

Pontificia Universidad Católica del Perú  
Escuela de Posgrado



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

# Estratificación del espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo

Tesis para optar el Grado de  
Doctora en Matemáticas

Autora

NÉLIDA SALOMÉ MEDINA GARCÍA DE CORREA

Asesora

LILIANA PUCHURI MEDINA

Jurado

FERNANDO MIGUEL CUKIERMAN  
PERCY BRAULIO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ  
CLAUDIA ESTELA REYNOSO ALCÁNTARA  
RUDY JOSÉ ROSAS BAZÁN

**Lima - Perú**  
**2021**

# Resumen

ESTRATIFICACIÓN DEL ESPACIO DE FOLIACIONES HOLOMORFAS DE GRADO 4 EN  
EL PLANO PROYECTIVO COMPLEJO

Nélida Salomé Medina García de Correa

2021

Asesora: Liliana Puchuri Medina

Título obtenido: Doctora en Matemáticas

---

La clasificación de las foliaciones holomorfas en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es un problema parcialmente resuelto. Cano et al describen las de grados 0, 1 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  y Cerveau et al las de grado 2 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , con una sola singularidad. Mumford y Fogarty demuestran que restringiendo la acción lineal de un grupo reductivo  $G$  a los puntos semiestables de una variedad proyectiva  $X$  se obtiene un cociente bueno. El objetivo de este trabajo es estratificar el espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo, denotado por  $\mathfrak{F}_4$ . Para ello, estudiamos la acción lineal por cambio de coordenadas del grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en  $\mathfrak{F}_4$  en el sentido de la Teoría de invariantes geométricos. Aplicando resultados y métodos desarrollados por Hesselink, Kirwan y Alcántara construimos una estratificación de las foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$  mediante subvariedades algebraicas no-singulares, irreducibles, localmente cerradas. Caracterizamos la foliación genérica de los estratos con singularidades aisladas según el número de Milnor y multiplicidad de un punto singular común, primer jet no trivial, existencia de recta invariante, y calculamos la dimensión del estrato. Demostramos que el conjunto de foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$  tiene dos componentes irreducibles. Obtenemos foliaciones de  $\mathfrak{F}_4$  con un único punto singular.

**Palabras clave:** foliaciones holomorfas, teoría de invariantes geométricos, estratificación.

# Abstract

The classification of holomorphic foliations in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  is a partially solved problem. Cano et al describe those of degrees 0, 1 in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , and Cerveau et al those of degree 2 with only one singularity in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Mumford and Fogarty prove that by restricting the linear action of a reductive group  $G$  on semistable points of a projective variety  $X$  we obtain a good quotient. The aim of this work is stratify the space of holomorphic foliations of degree 4 in the complex projective plane, denoted by  $\mathfrak{F}_4$ . For that, we study the linear action of the automorphisms group of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  by change of coordinates on  $\mathfrak{F}_4$  in the sense of the Geometric invariant theory. Applying results and methods developed by Hesselink, Kirwan and Alcántara we construct a stratification of  $\mathfrak{F}_4$  by locally closed, irreducible, non-singular algebraic subvarieties. We obtain a characterization of the generic foliation of strata with isolated singularities according to the Milnor number and multiplicity of a common singular point, first non trivial jet, existence of invariant line, and we calculate the dimension of the stratum. We prove that the set of unstable foliations of  $\mathfrak{F}_4$  has two irreducible components. We obtain foliations of  $\mathfrak{F}_4$  with a unique singular point.

**Key words and phrases.** holomorphic foliation, geometric invariant theory, stratification.

**2010 Mathematics Subject Classification.** Primary: 37F75, 14L24, 32S60; Secondary: 37O2.



... A mis padres  
Sara Bethzabé García y Téofilo Medina ...

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría de invariantes geométricos</b>	<b>7</b>
1.1. Acciones de grupos algebraicos . . . . .	7
1.2. Cociente bueno, cociente geométrico . . . . .	11
1.3. Criterio de Hilbert-Mumford . . . . .	13
<b>2. Foliaciones holomorfas de grado <math>d</math> en <math>\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2</math></b>	<b>17</b>
2.1. Foliaciones holomorfas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	17
2.2. Acciones lineales de un grupo reductivo en $\mathfrak{F}_d$ . . . . .	21
2.3. Caracteres, subgrupos a un parámetro virtuales . . . . .	24
2.4. Estratificación de una variedad proyectiva . . . . .	28
<b>3. Estratificación del espacio de foliaciones de grado 4 en <math>\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2</math></b>	<b>30</b>
3.1. Foliaciones inestables de $\mathfrak{F}_4$ . . . . .	31
3.2. Subgrupos a un parámetro virtuales de $SL_3(\mathbb{C})$ . . . . .	35
3.3. Representación asociada y diagrama de pesos . . . . .	37
3.4. Estratificación del espacio de foliaciones $\mathfrak{F}_4$ . . . . .	39
3.4.1. Conjunto de índices $\mathcal{B}$ para la estratificación de $\mathfrak{F}_4$ . . . . .	39
3.4.2. Formación de $Z_{\beta}$ y $Y_{\beta}$ . . . . .	43
3.5. Estratos de $\mathfrak{F}_4$ con singularidades aisladas . . . . .	49
3.5.1. Estrato 8 . . . . .	52
3.5.2. Estrato 11 . . . . .	54
3.5.3. Estrato 13 . . . . .	55
3.5.4. Estrato 15 . . . . .	57
3.5.5. Estrato 16 . . . . .	58
3.5.6. Estrato 18 . . . . .	62
3.5.7. Estrato 19 . . . . .	65
3.5.8. Estrato 21 . . . . .	70
3.5.9. Estrato 22 . . . . .	72
3.5.10. Estrato 24 . . . . .	74

3.5.11. Estrato 25 . . . . .	77
3.5.12. Estrato 26 . . . . .	79
3.6. Conclusiones . . . . .	85
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>



# Agradecimientos

A DIOS

A *Liliana Puchuri* por la orientación de esta tesis, infinita paciencia, enseñanzas y ayuda a lo largo del desarrollo de este trabajo

A *Claudia Reynoso Alcántara* por el tema de tesis, confianza, generosidad en brindarme sus enseñanzas y cuidar mi bienestar en mis estancias en Guanajuato.

A los profesores *Percy Fernández, Rudy Rosas* por sus enseñanzas; valiosas sugerencias y comentarios relacionados a este trabajo.

A *Roland Rabanal, Andrés Beltrán, Mariano González, Abelardo Jordán* por su apoyo y aliento.

Agradezco la hospitalidad del *Centro de Investigaciones Matemáticas y a la Universidad de Guanajuato* durante mis dos estancias.

Al *Departamento Académico de Ciencias de la PUCP* por el financiamiento de las estancias de investigación.

Cariño y gratitud a mi esposo *Lupercio* e hijos *Alberth, Elizabeth* y *Esther* por estar siempre presentes, su amor y ánimo.

# Introducción

El problema de clasificación de las foliaciones holomorfas en el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es parcialmente resuelto. Las clases de foliaciones de grados 0 y 1 son conocidas después del siglo XIX. Cano et al en [CCD13] describen las foliaciones de grado 0 en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  y las de grado 1 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Cerveau et al en [CDGM10] demuestran que en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  hay cuatro clases de foliaciones de codimensión 1, grado 2 y una sola singularidad.

David Hilbert [Hil] dictó un curso introductorio de la teoría de invariantes en la Escuela de verano de 1897 de la Universidad de Göttingen basado en la teoría de invariantes algebraicos y sus trabajos de investigación en esta área realizados durante los años 1885-1893. Mumford y Fogarty en la primera edición de *Geometry Invariant Theory* (GIT), 1965, presentan en forma geométrica, incluyendo resultados de Hilbert, la teoría de invariantes y sus aplicaciones. El criterio de Hilbert-Mumford, [MFK94, Teorema 2.1] caracteriza los puntos estables, semiestables, inestables de una variedad  $X$  por la acción lineal de un grupo reductivo  $G$ . Un resultado relevante de GIT en el contexto de variedades proyectivas establece que si un grupo reductivo  $G$  actúa linealmente en una variedad proyectiva compleja  $X$ , entonces existe un cociente bueno del subconjunto abierto de los puntos semiestables  $X^{ss}$  por  $G$ .

Gómez-Mont y Kempf en [GMK89] demostraron que una foliación holomorfa de grado  $d \geq 1$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  con singularidades no degeneradas es  $PGL_n(\mathbb{C})$  estable. Esteves en [EM11] obtuvo condiciones para que una foliación de grado mayor que 1 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  sea no estable.

La estratificación algebraica de una variedad proyectiva compleja (Definición 2.21) está basada en los trabajos de Kempf [Kem78], Hesselink [Hes79] y Kirwan [Kir85]. La teoría de invariantes geométricos asocia a la acción lineal de un grupo reductivo  $G$  en una variedad proyectiva compleja  $X$  dos categorías de puntos: semiestables e inestables. El único estrato abierto es el conjunto de los puntos semiestables de  $X$  y los otros estratos, cuya unión es el conjunto cerrado Zariski de puntos inestables, son subvariedades de  $X$



no singulares localmente cerradas  $G$ - invariantes (Teorema 2.23). El estrato al cual un punto inestable pertenece es determinado por una clase de subgrupos a un parámetro virtuales (Definición 2.17) de un subgrupo parabólico de  $G$ . Alcántara en [Alc16] realiza una estratificación del espacio de foliaciones de grado 2 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Alcántara y Ronzón en [AR16] construyen una estratificación del las foliaciones de grado 3 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con singularidades degeneradas.

En el presente trabajo estudiamos la acción lineal por cambio de coordenadas de  $PGL_3(\mathbb{C})$ , que es el grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , en  $\mathfrak{F}_4$ , el espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el sentido GIT. El objetivo principal es construir una estratificación algebraica de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , conjunto de foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$ .

En el capítulo 1 revisamos la teoría de invariantes geométricos, el criterio de Hilbert-Mumford, subgrupos a un parámetro diagonales de  $SL_3(\mathbb{C})$ . En el capítulo 2 presentamos nociones y resultados relacionados al espacio de foliaciones holomorfas de grado  $d$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Debido a que  $PGL_3(\mathbb{C})$  y  $SL_3(\mathbb{C})$  son isógenos y los subgrupos a un parámetro de  $SL_3(\mathbb{C})$  son conjugados a grupos diagonales, analizamos la acción por cambio de coordenadas de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_4$  en el sentido GIT. Obtenemos los subgrupos parabólicos de  $SL_3(\mathbb{C})$ . Definimos el  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de un grupo reductivo. Describimos la forma de construir la estratificación de los puntos inestables de una variedad proyectiva compleja asociada a la acción lineal de un grupo reductivo.

Para obtener los subespacios maximales de las foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$  definimos una base del espacio  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$  que diagonaliza la acción lineal por cambio de coordenadas de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_4$  y determinamos la inestabilidad de una foliación  $\mathcal{F}$  de  $\mathfrak{F}_4$  aplicando el Criterio de Hilbert- Mumford (1,23).

**Teorema 0.1.** *El conjunto cerrado de foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es*

$$\mathfrak{F}_4^{un} = SL_3(\mathbb{C})PV_1 \cup SL_3(\mathbb{C})PV_2,$$

donde

$$V_1 = \text{gen}(\{z^4 \frac{\partial}{\partial x}, yz^3 \frac{\partial}{\partial x}, y^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3z \frac{\partial}{\partial x}, y^4 \frac{\partial}{\partial x}, xz^3 \frac{\partial}{\partial x}, xyz^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^2z \frac{\partial}{\partial x}, x^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^3 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y}, yz^3 \frac{\partial}{\partial y}, y^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3z \frac{\partial}{\partial y}, y^4 \frac{\partial}{\partial y}, xz^3 \frac{\partial}{\partial y}, xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^4 \frac{\partial}{\partial z}\})_{\mathbb{C}},$$

$$V_2 = \text{gen}(\{z^4 \frac{\partial}{\partial x}, yz^3 \frac{\partial}{\partial x}, y^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3z \frac{\partial}{\partial x}, y^4 \frac{\partial}{\partial x}, xz^3 \frac{\partial}{\partial x}, xyz^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^2z \frac{\partial}{\partial x}, \\ x^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y}, yz^3 \frac{\partial}{\partial y}, y^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3z \frac{\partial}{\partial y}, xz^3 \frac{\partial}{\partial y}, x^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}, \\ xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}\})_{\mathbb{C}}.$$

Para construir una estratificación de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , primero hacemos un Diagrama de pesos de la representación de un toro maximal

$$T = \{\text{diag}(t^{k_1}, t^{k_2}, t^{k_3}) : k_1 + k_2 + k_3 = 0, t \in \mathbb{C}^*\} \subset \text{SL}_3(\mathbb{C})$$

en  $\mathbb{C}^{35}$ .

Según Kirwan [Kir85, Definición 12.8], el conjunto  $\mathcal{B}$  de índices para la estratificación de  $\mathfrak{F}_4$  consiste de los puntos  $\beta_i$  más cercanos a 0 situados en la cámara de Weyl seleccionada. Usando la representación de los pesos de campos vectoriales que definen foliaciones inestables presentados en la Tabla 3 y la Figura 1, y aplicando el algoritmo descrito por Popov en [Pop10] conseguimos fórmulas para calcular los índices  $\beta_i$  del Conjunto de índices  $\mathcal{B}$ . Obtenemos 26 líneas  $\mathcal{L}_i$  que se muestran en las Figuras 2, 3, 4, y 26 índices  $\beta_i$ .

Por la definición 2.16,  $Z_i$  es la proyectivización del subespacio lineal complejo generado por los campos vectoriales asociados a los pesos en la línea  $L_i$  y  $Y_i$  es la proyectivización de la envolvente convexa de  $L_i$  generada por los campos asociados a los pesos  $\alpha_j$  tales que el producto interno  $\alpha_j \cdot \beta_i \geq q(\beta_i)$ . En la subsección (3.4.2) formamos  $Z_i, Y_i, i \in \{1, \dots, 26\}$ , y con base en ellos construimos los estratos  $S_i, i \in \{1, \dots, 26\}$ , de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ . Descartamos el estudio de foliaciones con una curva de singularidades, pues al quitarlas pueden verse como foliaciones de grado menor ya estudiadas por Alcántara en [Alc13] y [AR16].

Caracterizamos la foliación genérica con singularidades aisladas de los estratos  $S_i, i \in \{8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26\}$ , según el número de Milnor y la multiplicidad de un punto singular común. También obtenemos el primer jet no trivial, la dimensión del estrato, una recta invariante de algunos estratos.

La estratificación de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  es descrita en el siguiente Teorema.

**Teorema 0.2.** *Los espacios  $S_i = \text{SL}_3(\mathbb{C})Y_i^{ss}, i \in \{1, \dots, 26\}$ , son subvariedades algebraicas localmente cerradas, irreducibles, no singulares de  $\mathfrak{F}_4$ . Ellas forman una estratificación del conjunto cerrado de foliaciones inestables  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , y  $\overline{S_i} \subset \cup_{j \leq i} S_j$ . Estas variedades también satisfacen*

<b>Estrato</b>	<b>Caracterización de foliaciones genéricas de <math>\mathfrak{F}_4^{un}</math></b>
$S_1, S_2, S_3, S_4,$ $S_5, S_6, S_7, S_9,$ $S_{10}, S_{12}, S_{14},$ $S_{17}, S_{20}, S_{23}$	Toda foliación tiene una curva de singularidades
$S_8$ $\dim S_8 = 8$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un único punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4, \mu_p(\mathcal{F}) = 21$ , 4-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$
$S_{11}$ $\dim S_{11} = 10$	Contiene un subconjunto abierto tal que sus elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(\mathcal{F}) = 20$
$S_{13}$ $\dim S_{13} = 12$	Contiene un subconjunto abierto tal que sus elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(\mathcal{F}) = 19$
$S_{15}$ $\dim S_{15} = 16$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(X) = 16$
$S_{16}$ $\dim S_{16} = 13$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(X) = 17$ 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$
$S_{18}$ $\dim S_{18} = 15$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 16$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{19}$ $\dim S_{19} = 17$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 15$
$S_{21}$ $\dim S_{21} = 17$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 13$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{22}$ $\dim S_{22} = 18$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 12$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{24}$ $\dim S_{24} = 19$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 12$ , y recta invariante $z = 0$
$S_{25}$ $\dim S_{25} = 20$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3, \mu_p(\mathcal{F}) = 12$
$S_{26}$ $\dim S_{26} = 18$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(X) = 2, \mu_p(X) = 13$ , 2-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$ .

La recta  $z = 0$  es invariante para  $\mathcal{X} \in Y_i^{ss}$   $i \in \{8, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24, 26\}$ .

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente resultado,

**Teorema 0.3.** Sea  $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}_4$  con singularidades aisladas. Si  $\mathcal{X}$  es inestable, entonces

1.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 4 o
2.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 3 y 3-jet linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$  o
3.  $\mathcal{X} \in S_{19} \cup S_{24} \cup S_{25}$  o
4.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 2.

Las componentes irreducibles de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  son las cerraduras de las subvariedades localmente cerradas  $S_{25}$  y  $S_{26}$  que tienen dimensiones 20 y 18, respectivamente.

Además, obtenemos las foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$  con un punto singular, es decir con número de Milnor 21.

**Teorema 0.4.** Las foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con un único punto singular son

1. El estrato  $S_8$  que tiene dimensión 8.
2. El subespacio de  $S_{11}$

$$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,0} \neq 0, b_{0,1} = 0) \text{ o } (a_{1,0} = 0, b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z))\},$$

de dimensión 9.

3. El subespacio de  $S_{13}$

$$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,1}b_{0,2} \neq 0, b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 = c(a_{1,1}y + a_{1,0}z)^2) \text{ o } (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} = 0) \text{ o } (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} \neq 0, a_{1,0}b_{0,1} = a_{1,1}b_{0,0}, b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z)) \text{ o } (a_{1,1} = 0, b_{0,2} \neq 0, a_{1,0} = 0, b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 \nmid P_4(y, z))\},$$

de dimensión 10.

4. El subespacio de  $S_{15}$

$$SL_3(\mathbb{C})\{(\alpha_1 y - \beta_1 z)(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4\} \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_1 y - \beta_1 z)^2(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) \frac{\partial}{\partial y} : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0), \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0 \text{ o } \alpha\alpha_1 = 1, (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq (0, 0, 0)\},$$

de dimensión 12.

5. El subespacio de  $S_{18}$

$$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\} \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,3}, a'_3 = 0, a'_2 = 0, a'_1 = 0, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, a_{0,2}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, a_{0,1}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}, b_{0,2} \neq 0)\},$$

donde  $a'_j = a_{0,j}b_{1,0} - (a_{1,1}b_{0,j-1} + a_{1,0}b_{0,j})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de dimensión 10.

6. El subespacio de  $S_{19}$

$$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\} \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{2,0} = b_{1,1} = b_{0,3} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} = 0, Q_2 \mid L_1L_2z, Q_2 \nmid P_4(y, z))\},$$

$Q_2(y, z) = b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2$ ,  $b_{0,2} \neq 0$ , de dimensión 13.

El punto singular tiene multiplicidad 4 en  $S_8, S_{11}, S_{13}, S_{15}$  y multiplicidad 3 en  $S_{18}, S_{19}$ .

Nélida Salomé Medina García de Correa  
Lima, Perú.  
2021

# Capítulo 1

## Teoría de invariantes geométricos

*Revisamos definiciones y resultados relevantes de la teoría de invariantes geométricos (GIT) orientados a la construcción de cocientes algebraicos por acciones lineales de grupos reductivos en variedades proyectivas complejas. Las órbitas del cociente por la acción de un grupo lineal en una variedad algebraica no siempre pueden ser separadas. Quitando algunos puntos de la variedad, llamados inestables, el cociente de los llamados puntos semiestables por la acción lineal de un grupo reductivo es un cociente (bueno) que tiene estructura de una variedad proyectiva. El Criterio de Hilbert-Mumford caracteriza los puntos semiestables, inestables de una variedad proyectiva mediante las acciones de subgrupos a un parámetro de un grupo reductivo en una variedad proyectiva. Los subgrupos a un parámetro de  $SL_n(\mathbb{C})$  son conjugados a una matriz diagonal de forma conocida. Las principales referencias son: [Bri10], [Dol03], [MFK94], [Hos12], [New06].*

### 1.1. Acciones de grupos algebraicos

Presentamos definiciones y resultados importantes sobre acciones de grupos algebraicos lineales en variedades algebraicas.

**Definición 1.1.** Una **acción** (izquierda) de un grupo algebraico  $G$  en una variedad algebraica  $X$  es un morfismo de variedades algebraicas

$$\varphi : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \rightarrow \varphi(g, x)$$

tal que para todo  $g, g' \in G, x \in X$ :

i)  $\varphi(e, x) = x$ ,  $e$  es el elemento identidad de  $G$ ,

ii)  $\varphi(g, \varphi(g', x)) = \varphi(gg', x)$ .

Decimos que  $G$  actúa en  $X$  y  $X$  es una  $G$ -variedad. Por simplicidad escribiremos  $g \cdot x$  en lugar de  $\varphi(g, x)$ , así las condiciones anteriores se escriben

$$e \cdot x = x, \quad g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x.$$

Un punto  $x$  de  $X$  se llama  $G$ -**invariante** o, simplemente, invariante si  $g \cdot x = x$  para todo  $g \in G$ . Un subconjunto  $Y \subseteq X$  se denomina  $G$ -**invariante** o  $G$ -estable si  $gY = \{g \cdot y : y \in Y\} \subseteq Y$ .

**Definición 1.2.** Dada una  $G$ -variedad  $X$  y un punto  $x \in X$ , la **órbita** de  $x$  es el conjunto

$$Gx := \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq X,$$

el estabilizador de  $x$

$$\text{Estab}(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

es un subgrupo cerrado de  $G$  llamado también grupo de isotropía de  $x$ .

Si todas las órbitas de  $X$  son cerradas, se dice que la acción de  $G$  en  $X$  es cerrada.

**Ejemplo 1.3.** El morfismo

$$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (g, x) \rightarrow g \cdot x$$

que consiste en multiplicar la matriz  $g$  por el vector columna  $x$  es una acción. La órbita del punto cero es  $\{0\}$  y su estabilizador es  $GL_n(\mathbb{C})$ . La órbita de un punto  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \neq 0$ , es  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  y el estabilizador es la matriz identidad  $I_n$ .

Algunas propiedades fundamentales de las órbitas y sus cerraduras son dadas en la proposición siguiente.

**Proposición 1.4.** ([Bri10, Proposición 1.11]) Dada una  $G$ -variedad  $X$  y un punto  $x \in X$ ,

- i) La órbita  $Gx$  es una subvariedad de  $X$  suave localmente cerrada y toda componente de  $Gx$  tiene dimensión  $\dim Gx = \dim G - \dim \text{Estab}(x)$ .
- ii) La cerradura  $\overline{Gx}$  de una órbita es la unión de la órbita  $Gx$  y órbitas de dimensión menor. En particular, la cerradura de cualquier órbita contiene una órbita cerrada (de dimensión mínima).

La estructura de una órbita como variedad algebraica está determinada por el estabilizador.

**Definición 1.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Una **representación**  $(\rho, V)$  de un grupo algebraico  $G$  en  $V$  es un homomorfismo de grupos algebraicos  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . En este caso decimos que  $V$  es un  $G$ -módulo. Si los únicos subespacios invariantes de  $V$  son  $\{0\}$  y  $V$  se dice que  $(\rho, V)$  es una **representación irreducible de  $G$** .

Toda representación  $(\rho, V)$  de  $G$  en  $V$  define una acción (lineal) de  $G$  en  $V$  :

$$\varphi : G \times V \rightarrow V, \quad (g, v) \rightarrow \rho(g) \cdot v.$$

Recíprocamente, toda acción  $\varphi : G \times V \rightarrow V$  define una representación de  $G$  en  $V$ :

$$g \rightarrow (v \rightarrow \varphi(g, v)), \quad g \in G, \quad v \in V.$$

**Definición 1.6.** Una acción  $G \times X \rightarrow X$  de un grupo algebraico lineal  $G$  en una variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = P(\mathbb{C}^{n+1})$  es **lineal**, o  $G$  **actúa linealmente** en  $X$ , si existe una representación de  $G$  en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(\mathbb{C}^{n+1}) \\ g &\rightarrow \rho(g) : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ x &\rightarrow & \rho(g)x, \end{array} \end{aligned}$$

tal que la acción de  $G$  en  $X$  es inducida por la acción lineal de  $G$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\varphi : G \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \quad (g, x) \rightarrow g \cdot x := \rho(g)x$$

donde  $\rho(g)x$  se obtiene aplicando la transformación lineal  $\rho(g)$  al punto  $x$ .

De la definición 1.6, resulta que toda acción lineal de  $G$  en  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  induce una acción lineal de  $G$  en  $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ , cono afín de  $X$ .

**Ejemplo 1.7.** Sean  $G$  el grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^*$  y  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . El morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ (t, (x : y : z)) &\rightarrow (tx : ty : t^{-1}z) \end{aligned}$$

cumple

$$\text{i) } 1 \cdot (x : y : z) = (x : y : z)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } t \cdot (t' \cdot (x : y : z)) &= t \cdot (t'x : t'y : (t')^{-1}z) = (tt'x : tt'y : (tt')^{-1}z) \\ &= (tt') \cdot (x : y : z). \end{aligned}$$



Entonces,  $\varphi$  es una acción de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Definimos

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}^* &\rightarrow GL(\mathbb{C}^3) \\ t &\rightarrow \rho(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Debido a que

$$(t, (x : y : z)) \rightarrow t \cdot (x : y : z) = \rho(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ t^{-1}z \end{pmatrix} := (tx : ty : t^{-1}z),$$

$\varphi$  es una acción lineal de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

Un morfismo  $\phi : X \rightarrow Y$  de dos  $G$ -variedades es llamado **invariante** o  $G$ -morfismo si  $\phi(g \cdot x) = \phi(x)$  para todo  $g \in G$  y  $x \in X$ .

Una acción de un grupo algebraico lineal  $G$  en una variedad algebraica  $X$  determina una acción de  $G$  en  $\mathbb{C}[X]$ , álgebra de las funciones regulares de  $X$ , definida por

$$(g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x), \text{ para todo } g \in G, f \in \mathbb{C}[X], x \in X.$$

Esta acción es lineal.

Un elemento  $f$  de  $\mathbb{C}[X]$  se denomina  $G$ -**invariante** si  $f(g \cdot x) = f(x)$  para todo  $g \in G$  y  $x \in X$  o, equivalentemente,  $f$  es constante en todas las  $G$ -órbitas de  $X$ . El subálgebra de elementos de  $\mathbb{C}[X]$  que son  $G$ -invariantes se denota  $\mathbb{C}[X]^G$ .

**Definición 1.8.** Sea  $G$  un grupo algebraico lineal. El **radical**  $R(G)$  de  $G$  es el subgrupo normal, soluble, conexo, maximal de  $G$ . El **radical unipotente**  $R_u(G)$  de  $G$  es el subgrupo normal, conexo, unipotente, maximal de  $G$ . El grupo  $G$  es **reductivo** si  $R_u(G) = \{e\}$ .  $G$  es **semisimple** si  $R(G) = \{e\}$ .

En forma equivalente,  $G$  es reductivo si  $G$  no contiene subgrupo cerrado normal isomorfo al grupo aditivo  $\mathbb{C}^n$ , para algún  $n \geq 1$ . [Bri10, Teorema 1.23].

Por ejemplo, el grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^*$ , los toros algebraicos ( $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ , para algún  $n$  natural),  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $PGL_n(\mathbb{C})$  son grupos reductivos. Los grupos  $SL_n(\mathbb{C})$  también son semisimples.

## 1.2. Cociente bueno, cociente geométrico

Si un grupo algebraico lineal  $G$  actúa en una variedad algebraica  $X$ , el conjunto de órbitas por la acción de  $G$  en  $X$  no siempre admite una estructura de variedad. En la topología de Zariski, la cerradura de dos o más órbitas pueden contener otra órbita de dimensión menor y así no pueden separarse en el cociente. La teoría de invariantes geométricos demuestra que para algunos grupos algebraicos es posible construir un subconjunto abierto  $U \subset X$  tal que el cociente de  $U$  por la acción de  $G$  tiene estructura de variedad algebraica.

**Definición 1.9.** ([New06, Página 4]) Sea  $G$  un grupo algebraico actuando en una variedad afín  $X$ .

Un **cociente bueno** de  $X$  por  $G$  es un par  $(Y, \phi)$  donde  $\phi : X \rightarrow Y$  es morfismo de variedades que satisface:

- i)  $\phi$  es  $G$ -invariante.
- ii)  $\phi$  es suryectiva.
- iii) Si  $U \subset Y$  abierto,  $\phi$  induce el morfismo  $\phi^* : \mathbb{C}[U] \rightarrow \mathbb{C}[\phi^{-1}(U)]$  que es un isomorfismo del álgebra  $\mathbb{C}[U]$  en el subálgebra invariante  $\mathbb{C}[\phi^{-1}(U)]^G$ .
- iv) Si  $W$  es un subconjunto de  $X$  cerrado y  $G$ -invariante, entonces su imagen  $\phi(W)$  es cerrada en  $Y$ .
- v) Si  $W_1$  y  $W_2$  son subconjuntos de  $X$  cerrados disjuntos y  $G$ -invariantes, entonces  $\phi(W_1)$  y  $\phi(W_2)$  son disjuntos.

Un **cociente geométrico** es un cociente bueno  $\phi : X \rightarrow Y$  que es también un **espacio de órbitas**, es decir la preimagen de cada punto de  $Y$  es una única órbita. Las órbitas de  $Y$  están en correspondencia uno a uno con las órbitas de los puntos geométricos de  $X$  mediante  $\phi$ .

Con frecuencia diremos que  $Y$  es un cociente bueno (geométrico) de  $X$  por  $G$  y escribiremos  $Y = X//G$  ( $Y = X/G$ ).

De v) inferimos que  $\phi$  separa órbitas cerradas.

**Proposición 1.10.** Si  $(Y, \phi)$  es un cociente bueno para la acción de  $G$  en  $X$ , entonces

- ii)  $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$  si y solo si  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ .
- iii) Para cada  $y \in Y$ , la preimagen  $\phi^{-1}(y)$  contiene una única órbita cerrada. En particular, si todas las órbitas son cerradas, entonces  $\phi$  es un cociente geométrico.

*Demostración.* [Hos12, Proposición 2.38] . □

**Ejemplo 1.11.** . Sea la acción de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  por multiplicación por un escalar. Consideremos la proyección canónica  $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ . Las órbitas son rectas sin el origen.  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}, \pi)$  es un espacio de órbitas.

**Ejemplo 1.12.** Sea la acción de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^2$  definida por

$$(t, (z_1, z_2)) \rightarrow t \cdot (z_1, z_2) = (tz_1, t^{-1}z_2).$$

Las órbitas cerradas son las hipérbolas  $\{(z_1, z_2) : z_1 z_2 = c, c \neq 0, \text{ constante}\}$  y el origen. Las órbitas  $\{(z_1, 0) : z_1 \neq 0\}$  y  $\{(0, z_2) : z_2 \neq 0\}$  no son cerradas debido a que sus cerraduras contienen el origen. El morfismo  $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definido por  $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 z_2$  es invariante y suryectivo. Así,  $(\mathbb{C}, \phi)$  define un cociente que no separa las órbitas  $\{(z_1, 0) : z_1 \neq 0\}$ ,  $\{(0, z_2) : z_2 \neq 0\}$  y  $\{(0, 0)\}$ . Por tanto  $(\mathbb{C}, \phi)$  no es un espacio de órbitas. El estabilizador del origen  $Estab((0, 0)) = \{t \in \mathbb{C}^* : t \cdot (0, 0) = (0, 0)\} = \mathbb{C}^*$  tiene dimensión 1. El estabilizador de cualquier punto  $\{(z_1, z_2) : z_1 z_2 \neq 0\}$  es  $\{1\}$ .

## Cocientes proyectivos

David Mumford demostró que quitando algunos puntos de  $X$ , denominados inestables, el cociente de los llamados puntos semiestables por la acción de  $G$  tiene estructura de un cociente bueno.

Las siguientes definiciones y resultados son tomados de [Bri10], [New78] y [New06].

Supongamos que  $G$  actúa linealmente en  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Consideramos la acción inducida de  $G$  en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ .

**Definición 1.13.** Sea  $X$  una variedad proyectiva en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Para cualquier acción lineal de un grupo reductivo  $G$  en  $X$ , un punto  $x$  de  $X$  es llamado

- **semiestable**, si existe un polinomio  $f$  homogéneo,  $G$ -invariante, de grado mayor o igual que 1 tal que  $f(x) \neq 0$ .
- **estable**, si  $x$  es semiestable, la órbita  $Gx$  es cerrada en  $X^{ss}$  y el estabilizador  $Estab(x)$  es finito.
- **inestable**, si  $x$  no es semiestable.

Denotamos por  $X^{ss}$ ,  $X^s$  y  $X^{un}$  los conjuntos de puntos semiestables, estables e inestables de  $X$ , respectivamente.

Por tanto, un punto  $x$  de  $X$  es inestable si  $f(x) = 0$  para todo polinomio  $f$  homogéneo, no constante,  $G$ -invariante.

**Lema 1.14.**  $X^{ss}$  y  $X^s$  son subconjuntos de  $X$  abiertos y  $G$ -invariantes.

*Demostración.* [New78, Lema 3.13]- □

El conjunto de puntos inestables  $X^{un}$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .

**Definición 1.15.**  $\phi : X \rightarrow Y$  es un cociente bueno si  $\phi$  es un morfismo afín (la imagen inversa de un conjunto Zariski-abierto afín en  $Y$  es afín) y son válidas las condiciones de la definición 1.9.

El principal teorema de GIT en el contexto de variedades proyectivas es:

**Teorema 1.16.** Sea  $G$  un grupo reductivo que actúa linealmente en una variedad proyectiva  $X$ . Entonces,

- i) Existe un cociente bueno  $\phi : X^{ss} \rightarrow Y$  y  $Y = X^{ss}/G$  es una variedad proyectiva.
- ii) Existe un subconjunto Zariski-abierto  $Y^s$  de  $Y$  tal que  $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$  y  $Y^s = X^s/G$  es un cociente geométrico.
- iii) Para  $x_1, x_2 \in X^{ss}$ ,  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$  si y sólo si  $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \cap X^{ss} \neq \emptyset$ .
- iv) Para  $x \in X^{ss}$ ,  $x$  es estable si y sólo si  $x$  tiene estabilizador finito y la órbita  $Gx$  es cerrada en  $X^{ss}$ .

*Demostración.* [New06, Teorema 3.12] □

### 1.3. Criterio de Hilbert-Mumford

Las definiciones originales de estabilidad y semiestabilidad requieren conocer polinomios homogéneos invariantes por la acción. Por el teorema de Nagata [Nag65], si  $G$  es reductivo y actúa racionalmente en un álgebra finitamente generado, entonces el álgebra de elementos  $G$ -invariantes es finitamente generado. Sin embargo, el cálculo de los generadores no siempre es fácil. Derksen y Kemper [DK02] han desarrollado algoritmos para calcular generadores del álgebra de invariantes  $K[V]^G$ , cuando  $G$  es un grupo linealmente reductivo,  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $V$  una representación  $n$ -dimensional de  $G$ .

## Criterio geométrico

Si un grupo reductivo  $G$  actúa linealmente en una variedad proyectiva  $X$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , entonces existe una acción inducida de  $G$  en el cono afín de  $X$ ,  $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ .

**Proposición 1.17.** *Sea  $G$  un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad proyectiva  $X$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Sean  $x$  un punto de  $X$  y  $\widehat{x} \neq 0$  un punto, en la clase de  $x$ , del cono afín  $\widehat{X}$ . Entonces,*

- i)  $x$  es semiestable si y sólo si  $0 \notin \overline{G\widehat{x}}$ .
- ii)  $x$  es estable si y sólo si es semiestable, el estabilizador  $Estab(x)$  es finito y la órbita  $G\widehat{x}$  es cerrada en  $\widehat{X}$ .
- iii)  $x$  es inestable si y sólo si  $0 \in \overline{G\widehat{x}}$ .

*Demostración.* [Hos12, Proposición 5.1] □

La Proposición 1.17 caracteriza la estabilidad de un punto  $x$  de una variedad proyectiva en términos de la cerradura de la órbita de  $\widehat{x}$  en su cono afín,  $\widehat{x}$  en la clase de  $x$ .

Denotamos el conjunto de puntos semiestables de  $X$  por  $X^{ss}$ , el conjunto de puntos estables de  $X$  por  $X^s$  y el conjunto de puntos inestables por  $X^{un}$ .

## Criterio de Hilbert-Mumford

El Criterio de Hilbert-Mumford es un criterio numérico para determinar la semiestabilidad, inestabilidad, estabilidad de un punto de una variedad proyectiva en términos de la restricción de la acción a subgrupos a un parámetro de  $G$ .

**Definición 1.18.** Un **subgrupo a un parámetro** de un grupo algebraico  $G$  es un homomorfismo no trivial de grupos algebraicos

$$\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G, \quad t \rightarrow \lambda(t).$$

Sea  $G$  un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . La acción de un subgrupo a un parámetro de  $G$ ,  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  induce una representación de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C}^* & \rightarrow & GL(\mathbb{C}^{n+1}) \\ t & \rightarrow & \lambda(t) : \quad \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ & & v \rightarrow \lambda(t) \cdot v. \end{array}$$

**Proposición 1.19.** *La representación de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$  inducida por la acción de un subgrupo a un parámetro de  $G$ ,  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ , en  $X$  es diagonalizable. Es decir, existe una base  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  tal que*

$$\lambda(t) \cdot e_i = t^{r_i} e_i, \quad \text{para algún } r_i \in \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* [Alc010, Proposición 5]. □

Los **exponentes**  $r_i$  son llamados **pesos de  $e_i$  respecto a la acción de  $\lambda(t)$** . Dados un punto  $x \in X$  y  $\hat{x} \in x$  en el cono afín  $\hat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  escribimos  $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$  respecto a esta base.

**Definición 1.20.** Sean  $x \in X$  y  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  un subgrupo a un parámetro de  $G$ . Si  $\hat{x} \in x$  en  $\hat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  y  $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$  entonces,

$$\lambda(t) \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} t^{r_i} a_i e_i.$$

Definimos la función siguiente

$$\mu(x, \lambda) = \min\{r_i : a_i \neq 0\}. \quad (1.1)$$

La definición de la función  $\mu$  es independiente de la selección de  $\hat{x}$  en el cono afín de  $X$  y de la base de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Aplicando (1.1) se demuestran las propiedades de la función  $\mu$ .

**Proposición 1.21.** *Sea  $\lambda$  un subgrupo a un parámetro de un grupo reductivo  $G$ . Sean  $x$  un punto de la  $G$ -variedad  $X$ ,  $\hat{x} \in \hat{X}$  en la clase de  $x$ . Entonces,*

- i)  $\mu(x, \lambda) > 0$  si y sólo si  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \hat{x}$  existe y es igual a cero,
- ii)  $\mu(x, \lambda) < 0$  si y sólo si  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \hat{x}$  no existe,
- iii)  $\mu(g \cdot x, \lambda) = \mu(x, g^{-1} \lambda g)$ , para todo  $g \in G$ .

De la Proposición 1.21 (i) se deduce: si existe un subgrupo a un parámetro de  $G$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \hat{x} = 0$ , entonces  $0 \in \overline{G\hat{x}}$  y por tanto  $x$  es un punto inestable de  $X$ .

Mumford demostró

**Proposición 1.22.** ([MFK94, Proposición 2.2]) *Si un grupo reductivo  $G$  actúa en una variedad  $X$ , entonces  $x$  es un punto semiestable si y sólo si  $0$  no está en la cerradura de la órbita  $\overline{G\hat{x}}$  para todo  $\hat{x}$  en la clase de  $x$ .*

**Teorema 1.23.** (Criterio de Hilbert-Mumford) Sea  $G$  un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva  $X$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Sea  $x$  un punto cualquiera de  $X$ , entonces

- i)  $x$  es semiestable si y sólo si  $\mu(x, \lambda) \leq 0$  para todo subgrupo  $a$  un parámetro de  $G$ .
- ii)  $x$  es estable si y sólo si  $\mu(x, \lambda) < 0$  para todo subgrupo  $a$  un parámetro de  $G$ .
- iii)  $x$  es inestable si y sólo si  $\mu(x, \lambda) > 0$  para algún subgrupo  $a$  un parámetro de  $G$ .

*Demostración.* [New78, Teorema 4.9]. □

Según la Proposición 1.21,

$$\mu(g \cdot x, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g), \quad g \in G,$$

es posible reemplazar un subgrupo  $a$  un parámetro  $\lambda(t)$  por un conjugado conveniente para los cálculos. Estos cálculos se simplifican cuando  $\lambda(t)$  es diagonalizable.

Todo subgrupo  $a$  un parámetro de  $SL_n(\mathbb{C})$  es conjugado a un subgrupo  $a$  un parámetro diagonal.

**Proposición 1.24.** Para todo subgrupo  $a$  un parámetro  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow SL_n(\mathbb{C})$  existen enteros  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ ,  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$ , para los cuales  $\lambda(t)$  es conjugado en  $SL_n(\mathbb{C})$  a una matriz diagonal de la forma

$$t \longrightarrow \text{diag}(t^{r_1}, \dots, t^{r_n}) = \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & t^{r_n} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

*Demostración.* [MO03, Proposición 7.5]. □

## Capítulo 2

# Foliaciones holomorfas de grado $d$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

*Revisamos las definiciones básicas y resultados importantes sobre el espacio  $\mathfrak{F}_d$  de foliaciones holomorfas de grado  $d$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Describimos la acción lineal por cambio de coordenadas del grupo  $SL_3(\mathbb{C})$ , isógeno al grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , en  $\mathfrak{F}_d$ . Construimos el  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de un toro maximal  $T$  de un grupo reductivo y el  $\mathbb{Q}$ -espacio dual. Describimos resultados relevantes de la estratificación algebraica de una variedad proyectiva por acción lineal de un grupo reductivo basados en el trabajo de Kirwan. Las principales referencias son: [GMOB89], [CDGM10],[AR16], [Kir85].*

### 2.1. Foliationes holomorfas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Consideramos foliaciones holomorfas de dimensión 1 con singularidades aisladas en el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Definición 2.1.** Una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 y grado  $d$ ,  $d \geq 0$ , en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es un morfismo de fibrados vectoriales no trivial

$$\mathcal{F} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(1 - d) \rightarrow T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

donde  $T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es el fibrado tangente de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , módulo multiplicación por un escalar distinto de cero.



De la sucesión de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(1)^{\oplus 3} \longrightarrow T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d)^{\oplus 3} \longrightarrow T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1) \longrightarrow 0$$

y pasando a la sucesión en cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d)^{\oplus 3}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1)) \longrightarrow 0$$

pues  $H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d-1)) = 0$ , para  $i \geq 1$ .

Entonces,

$$\mathcal{F} \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1)) \simeq \frac{H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d)^{\oplus 3})}{H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d-1))}. \quad (2.2)$$

Identificando las foliaciones que difieren una de otra en una constante multiplicativa distinta de cero, el conjunto de foliaciones holomorfas de grado  $d$  en el plano proyectivo complejo se define por

$$\mathfrak{F}_d := \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1))).$$

$\mathfrak{F}_d$  tiene estructura de espacio proyectivo complejo de dimensión

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{F}_d &= \dim H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1)) - 1 \\ &= \dim H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d)^{\oplus 3}) - \dim H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(d-1)) - 1 \\ &= 3 \binom{d+2}{2} - \binom{d+1}{2} - 1 \\ \dim \mathfrak{F}_d &= d^2 + 4d + 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En particular, el espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tiene dimensión 34.

**Proposición 2.2.** *Toda foliación  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{F}_d$  puede ser definida por un campo vectorial polinomial*

$$\mathcal{X} = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

módulo  $\mathbb{F} \mathbb{R}$ , donde  $P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]$  son polinomios homogéneos de grado  $d$ ,  $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$  polinomio homogéneo de grado  $d-1$ ,  $\mathbb{R} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$  es el campo radial, módulo multiplicación por un escalar distinto de cero.  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X} + F \mathbb{R}$  definen la misma foliación.

La forma dual para describir una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de grado  $d$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  (Cerveau et al, [CDGM10]) es mediante una 1-forma

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

donde  $A, B$  y  $C \in \mathbb{C}[x, y, z]$  son polinomios homogéneos de grado  $d + 1$  que verifican la condición de Euler  $Ax + By + Cz = 0$ , módulo multiplicación por un escalar distinto de cero.

En este trabajo, suponemos que  $\mathcal{F}$  está definida por un campo vectorial polinomial homogéneo de grado  $d$

$$\mathcal{X} = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

**Definición 2.3.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación definida por un campo vectorial polinomial (2.4). Un punto  $p = (x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es un punto **singular** de  $\mathcal{F}$  si existe algún  $k \in \mathbb{C}$  tal que

$$(P(x_0, y_0, z_0), Q(x_0, y_0, z_0), R(x_0, y_0, z_0)) = k(x_0, y_0, z_0).$$

El conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{F}$  se denota por  $Sing\mathcal{F}$ .

**Definición 2.4.** Supongamos que  $p = (1 : y_0 : z_0)$  es un punto singular de una foliación  $\mathcal{F}$  definida por  $\mathcal{X}$  con generador local

$$\begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix}.$$

El **número de Milnor de  $p$** ,  $\mu_p(\mathcal{F})$ , se define por

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}}{\langle f, g \rangle},$$

donde  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}$  denota el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en  $p$  y  $\langle f, g \rangle$  denota el ideal generado por  $f$  y  $g$ .

La **multiplicidad de  $p$**  se define por

$$m_p(\mathcal{F}) = \min\{ord_p(f), ord_p(g)\}.$$

**Teorema 2.5.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de grado  $d$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Si  $p_1, \dots, p_k$  son puntos singulares aislados de  $\mathcal{F}$  y  $\mu_1, \dots, \mu_k$  los números de Milnor correspondientes, entonces

$$\mu_1 + \dots + \mu_k = d^2 + d + 1.$$

*Demostración.* Cano et al [CCD13, Proposición 9.2]. □

De este teorema se deduce que no existen foliaciones regulares en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Definición 2.6.** Una curva plana definida por un polinomio  $F(x, y, z)$  es una **hoja algebraica** de  $\mathcal{X}$  o **invariante** para  $\mathcal{X}$  si existe un polinomio  $H(x, y, z)$  tal que

$$P(x, y, z) \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = FH. \quad (2.5)$$

**Teorema 2.7.** *El conjunto de foliaciones holomorfas  $\mathcal{F}$  de grado  $d \geq 2$  tales que  $\mathcal{F}$  no tiene hojas algebraicas es un subconjunto abierto y denso en  $\mathcal{F}_d$ .*

*Demostración.* Lins Neto y Soares [LNS96, Teorema II ]. □

Supongamos que  $p = (1 : 0 : 0)$  es un punto singular de una foliación  $\mathcal{F}$  definida por un campo vectorial polinomial homogéneo de grado  $d$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Entonces, en la carta afín  $U_0 : x = 1$ ,  $(0, 0)$  es un punto singular de

$$\mathcal{X}|_{U_0} = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ R(1, y, z) - zP(1, y, z) \end{pmatrix}.$$

Fulton [Ful09, Teorema 3] demuestra que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p_0}}{\langle f, g \rangle} = I_0(f, g)$$

donde  $I_0(f, g)$  representa el número de intersección de las curvas planas  $f$  y  $g$  en  $(0, 0)$ .

Analizamos el caso particular  $R(x, y, z) = 0$ .

**Lema 2.8.** *Si una foliación  $\mathcal{F}$  está definida por un campo vectorial polinomial homogéneo de grado  $d$*

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces

1.  $z = 0$  es una recta invariante de  $\mathcal{X}$ .
2. El número de Milnor del punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  es

$$\mu_p(\mathcal{F}) = I_0(Q(1, y, z) - yP(1, y, z), z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)).$$

*Demostración.*

1. Aplicar la definición 2.6.
2. El campo vectorial polinomial correspondiente a  $\mathcal{X}$  en la carta  $U_0$  alrededor del punto  $(0, 0)$  es

$$\mathcal{X}|_{U_0} = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ -zP(1, y, z) \end{pmatrix}$$

El número de Milnor de  $p = (1 : 0 : 0)$  es el número de intersección en  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{F}) &= I_0(f(y, z), g(y, z)) \\ &= I_0(Q(1, y, z) - yP(1, y, z), z) + I_0(Q(1, y, z) - yP(1, y, z), P(1, y, z)) \\ &= I_0(Q(1, y, z) - yP(1, y, z), z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)). \end{aligned}$$

□

## 2.2. Acciones lineales de un grupo reductivo en $\mathfrak{F}_d$

Gómez-Mont y Kempf analizaron la acción lineal del grupo  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$  de automorfismos del espacio proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  en  $\mathfrak{F}_d$  espacio de foliaciones holomorfas de grado  $d$  en el sentido de Mumford (GIT).

Una foliación holomorfa es **no degenerada** si todos sus puntos singulares tienen número de Milnor 1.

**Teorema 2.9.** ([GMK89, Teorema]) *Sea  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$  actuando linealmente en el espacio de foliaciones holomorfas de grado  $d > 0$ . Una foliación no degenerada es  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ - estable.*

**Definición 2.10.** Un morfismo suryectivo de grupos algebraicos con núcleo finito es llamado **isogénia**. Dos grupos algebraicos se llaman isógenos si existe una isogénia entre ellos.

**Lema 2.11.** *La función*

$$\begin{aligned}\phi : SL_3(\mathbb{C}) &\rightarrow PGL_3(\mathbb{C}) = GL_3(\mathbb{C})/Z(GL_3(\mathbb{C})) \\ g &\rightarrow [g]\end{aligned}$$

es una isogénia.

*Demostración.* La función  $\phi$  es un morfismo suryectivo de grupos algebraicos. Su núcleo es

$$\ker(\phi) = \{g \in SL_3(\mathbb{C}) : \phi(g) = aI_3, a \in \mathbb{C}^*\}.$$

Debido a que  $\det(g) = 1 = a^3$ , el núcleo  $\ker(\phi)$  consta de tres matrices escalares dadas por la matriz identidad  $I_3$  multiplicada por las raíces cúbicas de la unidad. En consecuencia,  $\phi$  es una isogénia.  $\square$

El grupo  $PGL_3(\mathbb{C})$  de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  actúa linealmente en la variedad proyectiva compleja  $\mathfrak{F}_d$  por cambio de coordenadas: Si  $g \in PGL_3(\mathbb{C})$  y  $\mathcal{F}$  es una foliación de grado  $d$  definida por un campo vectorial  $\mathcal{X}$  de la forma (2.4), entonces

$$\begin{aligned}PGL_3(\mathbb{C}) \times \mathfrak{F}_d &\rightarrow \mathfrak{F}_d \\ (g, \mathcal{X}) &\rightarrow g \cdot \mathcal{X} = Dg\mathcal{X} \circ (g^{-1}).\end{aligned}$$

Los grupos  $PGL_3(\mathbb{C})$  y  $SL_3(\mathbb{C})$  son isógenos. De las proposiciones 1.21 y 1.24 deducimos que la inestabilidad de un punto  $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}_d$  para la acción de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_d$  está determinada por la función  $\mu(x, \lambda)$  donde  $\lambda$  es un subgrupo a un parámetro diagonal de  $SL_3(\mathbb{C})$  de la forma (1.2).

Por tanto, estudiaremos la acción lineal por cambio de coordenadas del grupo reductivo  $SL_3(\mathbb{C})$  en el espacio proyectivo  $\mathfrak{F}_d$

$$\begin{aligned}SL_3(\mathbb{C}) \times \mathfrak{F}_d &\rightarrow \mathfrak{F}_d \\ (\lambda(t), \mathcal{X}) &\rightarrow \lambda(t) \cdot \mathcal{X} = D\lambda(t)\mathcal{X} \circ \lambda^{-1}(t) = \lambda(t)\mathcal{X} \circ \lambda^{-1}(t) \\ \left( \lambda(t), \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \right) &\rightarrow \lambda(t) \begin{pmatrix} P(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \\ Q(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \\ R(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

**Definición 2.12.** Un **subgrupo parabólico** de un grupo algebraico lineal  $G$  es un subgrupo  $P \subset G$  cerrado en la topología de Zariski, para el cual el espacio cociente  $G/P$  es una variedad algebraica proyectiva.

Si  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  es un subgrupo a un parámetro de  $G$ , entonces

$$P_\lambda := \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) g \lambda^{-1}(t) \text{ existe en } G\} \quad (2.7)$$

es un subgrupo parabólico de  $G$ . [Kir85, Definición 12.11].

Aplicamos (2.7) con el fin de obtener los subgrupos parabólicos de  $SL_3(\mathbb{C})$ -

**Lema 2.13.** *Los subgrupos parabólicos  $P_\lambda$  de  $SL_3(\mathbb{C})$  correspondientes a subgrupos a un parámetro*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\rightarrow SL_3(\mathbb{C}) \\ t &\rightarrow \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{r_3} \end{pmatrix}, \quad r_1 \geq r_2 \geq r_3 \end{aligned}$$

son:

i) *El subgrupo de las matrices triangulares superiores de  $SL_3(\mathbb{C})$*

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}) \right\}, \text{ si } r_1 > r_2 > r_3,$$

*de dimensión 5.*

ii) *Los subgrupos*

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{C})L \right\}, \text{ si } r_1 = r_2 > r_3,$$

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{C})L \right\}, \text{ si } r_1 > r_2 = r_3,$$

*de dimensión 6.*

*Demostración.* Por definición,

$$P_\lambda = \{g \in SL_3(\mathbb{C}) : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) g \lambda^{-1}(t) \text{ existe en } SL_3(\mathbb{C})\}.$$

Analizamos la existencia del límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{r_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-r_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-r_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-r_3} \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}t^{r_1-r_2} & g_{13}t^{r_1-r_3} \\ g_{21}t^{r_2-r_1} & g_{22} & g_{23}t^{r_2-r_3} \\ g_{31}t^{r_3-r_1} & g_{32}t^{r_3-r_2} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Si  $r_1 > r_2 > r_3$ , el límite existe cuando  $g_{21} = g_{31} = g_{32} = 0$

Si  $r_1 = r_2 > r_3$ , el límite existe cuando  $g_{31} = g_{32} = 0$

Si  $r_1 > r_2 = r_3$ , el límite existe cuando  $g_{21} = g_{31} = 0$ .

Entonces, los correspondientes subgrupos parabólicos  $P_\lambda$  de  $SL_3(\mathbb{C})$  son:

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}), \text{ si } r_1 > r_2 > r_3 \right\}$$

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}), \text{ si } r_1 = r_2 > r_3 \right\}$$

$$P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}), \text{ si } r_1 > r_2 = r_3 \right\}.$$

□

## 2.3. Caracteres, subgrupos a un parámetro virtuales

El objetivo de esta sección es definir el  $Q$ -espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de un grupo reductivo. Nuestras referencias son [GM16], [Perr15], [Mak11], [Ron14].

Un **toro**  $T$  de dimensión  $n$  es un grupo algebraico isomorfo a  $(\mathbb{C}^*)^n$ . En forma equivalente, un toro es un grupo algebraico conexo que consiste solo de elementos semisimples, condición que implica conmutatividad. Todos los toros maximales de un grupo algebraico lineal conexo son conjugados. [Gor11, Teorema 14.0.1]. La dimensión de un toro maximal de  $G$  es llamado el rango de  $G$ .

Un grupo algebraico  $G$  es llamado **diagonalizable** si existe una representación fiel  $(\rho, V)$  de  $G$  tal que su imagen está contenida en el subgrupo de matrices diagonales.  $G$  es diagonalizable si y sólo si es conmutativo y consiste de elementos semisimples. [Perr15, Proposición 3.3.2].

**Definición 2.14.** Sean  $G$  un grupo reductivo conexo. Un **caracter** de  $G$  es un homomorfismo de grupos algebraicos  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Un **subgrupo a un parámetro** de  $G$  (o cocaracter) es un homomorfismo de grupos algebraicos  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ .

El conjunto  $X(G)$  de caracteres de  $G$  con la multiplicación es un grupo abeliano. Si  $G$  es abeliano, el conjunto  $Y(G)$  de los subgrupos a un parámetro de  $G$  también es un grupo abeliano.

Supongamos que  $G$  es un toro,  $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ . Los homomorfismos de grupos algebraicos de  $T = \mathbb{C}^*$  son  $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) = \{t \rightarrow t^m, m \in \mathbb{Z}\}$ . Así tenemos,  $X(\mathbb{C}^*) = Y(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ . Entonces,

$$Y(T) = \text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \cong (\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*))^n \cong X(T) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Por consiguiente,  $X(T)$  y  $Y(T)$  son  $\mathbb{Z}$ -módulos libres de igual rango.

La función compuesta de un subgrupo a un parámetro  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  y un carácter  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  es el homomorfismo

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \rightarrow (\alpha \circ \lambda)(t) = t^r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, la forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : X(T) \times Y(T) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \lambda) &\rightarrow r = \langle \alpha, \lambda \rangle \text{ donde } (\alpha \circ \lambda)(t) = t^r, t \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

define un emparejamiento natural de  $X(T)$  y  $Y(T)$ .

**Teorema 2.15.** (Teorema de estructura de grupos diagonalizables) *Sea  $G$  un grupo algebraico lineal. Son equivalentes:*

1.  $G$  es diagonalizable.
2. El grupo de caracteres  $X(G)$  es finitamente generado.
3. Toda representación de  $G$  es isomorfa a una suma directa de representaciones unidimensionales

*Demostración.* [Perr15, Teorema 4.1.8] □

Notamos que los elementos de  $(\mathbb{C}^*)^n$  son diagonales y conmutan. Así, por las propiedades de la descomposición de Jordan, sus imágenes bajo cualquier representación  $\rho : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow GL(V)$  son diagonalizables. Lo mismo vale para cualquier toro  $T$ . El espacio vectorial  $V$  es la suma directa

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X(T)} V_{\alpha} \tag{2.8}$$

donde

$$V_{\alpha} = \{v \in V : h \cdot v = \alpha(h)v, \text{ para todo } h \in T\}. \tag{2.9}$$

Los  $V_{\alpha}$  son llamados espacios pesos de  $V$  respecto al toro  $T$  y los homomorfismos de grupos algebraicos  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  son llamados pesos.



Sea  $G$  un grupo reductivo conexo con toro maximal  $T$  y  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ . La acción adjunta de  $T$  en  $\mathfrak{g}$  está dada por conjugación. Consideremos la representación adjunta  $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ . Para un caracter  $\alpha \in X(T)$ , tenemos

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{A \in \mathfrak{g} : Ad(h) \cdot A = \alpha(h)A, \text{ para todo } h \in T\}.$$

Los  $\alpha \in X(T)$  distintos de cero tales que  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  son llamados **raíces** de  $T$  en  $G$ . El conjunto (finito) de las raíces se denota por  $\Phi$ .

**Definición 2.16.** Sea  $G$  un grupo reductivo conexo y  $T$  un toro maximal  $T \subset G$ . El **grupo de Weyl** de  $T$  en  $G$  es  $W(G, T) := N_G(T)/T$  donde  $N_G(T) := \{g \in G : gTg^{-1} = T\}$  es el normalizador de  $T$  en  $G$ .

Los toros maximales de  $G$  son conjugados, así que sus grupos de Weyl son isomorfos. Nos referiremos a  $W$  grupo de Weyl de cualquier toro maximal de  $G$  como el grupo de Weyl de  $G$ . El grupo  $W$  actúa en  $T$ , por lo cual  $W$  actúa en  $Y(T)$  y  $X(T)$ .

**Definición 2.17.** [Hes79, 2.1]. Sean  $G$  un grupo reductivo,  $Y(G)$  el grupo de subgrupos a un parámetro de  $G$ . El cociente del producto  $Y(G) \times \mathbb{N}$  (conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ ) por la relación de equivalencia

$$(\lambda, n) \sim (\mu, m) \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda(t^m) = \mu(t^n), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}^*.$$

se denomina conjunto de **subgrupos a un parámetro virtuales (S1PV)** de  $G$  y se escribe  $M(G)$ .

La acción adjunta de  $G$  en  $Y(G)$  se extiende a una acción en  $M(G)$ .

Sea  $T$  un toro maximal de  $G$ . Los elementos  $[(\lambda, n)]$  de  $M(T)$  se escriben  $\frac{\lambda}{n}$ .  $M(T)$  con las operaciones:

$$\begin{aligned} + : M(T) \times M(T) &\rightarrow M(T), & \left(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{m}\right) &\rightarrow \frac{\lambda\mu}{nm} \\ \cdot : \mathbb{Q} \times M(T) &\rightarrow M(T), & \left(\frac{p}{p'}, \frac{\lambda}{n}\right) &\rightarrow \frac{\lambda^p}{p'n} \end{aligned}$$

tiene estructura de  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

Notamos que  $M(T) \cong Y(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

**Definición 2.18.** Una norma en  $M(G)$  es una aplicación  $\tilde{q} : M(G) \rightarrow \mathbb{Q}$  tal que

- i)  $\tilde{q}(g\lambda g^{-1}) = \tilde{q}(\lambda)$ , para todo  $g \in G$ ,  $\lambda \in M(G)$
- ii) Para cualquier toro maximal  $T \subset G$ , existe una forma bilineal definida positiva  $\langle, \rangle$  tal que  $\tilde{q}(\lambda)^2 = \langle \lambda, \lambda \rangle$ .

Los elementos de  $M(T)^*$  se identifican con elementos de  $M(T)$  usando el producto interno  $\langle, \rangle$  del  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial  $M(T)$ .

**Ejemplo 2.19. Caracteres y subgrupos a un parámetro de  $SL_3(\mathbb{C})$**

$SL_3(\mathbb{C})$  es un grupo semisimple (por tanto reductivo), conexo.

El grupo de las matrices diagonales  $T = \{\text{diag}(h_1, h_2, h_3) : h_1 h_2 h_3 = 1\}$  es un toro maximal de  $SL_3(\mathbb{C})$ .

El grupo de Weyl de  $SL_3(\mathbb{C})$  es isomorfo al grupo de matrices de permutación de tres elementos, es decir  $W \cong S_3$ .

El grupo de subgrupos a un parámetro (o cocaracteres) de  $T$  es

$$Y(T) = \{\lambda : t \rightarrow \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) : r_1 + r_2 + r_3 = 0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}\}$$

y el grupo de caracteres de  $T$  es

$$X(T) = \{\alpha : \text{diag}(h_1, h_2, h_3) \rightarrow h_1^{m_1} h_2^{m_2} h_3^{m_3} : h_1 h_2 h_3 = 1, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

$Y(T)$  y  $X(T)$  son  $\mathbb{Z}$ -módulos libres con emparejamiento

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3. \quad (2.10)$$

Sea  $M(T)$  el  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de  $T$ . Sean  $\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{m} \in M(T)$  con  $\lambda(t) = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})$  y  $\mu(t) = \text{diag}(t^{s_1}, t^{s_2}, t^{s_3})$ . La aplicación  $M(T) \times M(T) \rightarrow \mathbb{Q}$  definida por

$$\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{m}\right) \rightarrow \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{\mu}{m} = \frac{r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3}{nm} \quad (2.11)$$

es un producto interno invariante por la acción del grupo simétrico  $S_3$ .

En particular, la aplicación

$$\begin{aligned} M(T) &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \frac{\lambda}{n} &\rightarrow \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{\lambda}{n}, \end{aligned}$$

es el cuadrado de una norma, denotada  $q$ , invariante por la acción del grupo simétrico  $S_3$ . Es decir, si  $b_i = \frac{r_i}{n}$ ,

$$q((t \rightarrow \text{diag}(t^{b_1}, t^{b_2}, t^{b_3}))) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0. \quad (2.12)$$

Identificamos  $M(T)$  y su dual  $M(T)^*$  usando el producto interno (2,11).

## 2.4. Estratificación de una variedad proyectiva

En esta sección exponemos la definición y resultados relevantes de la estratificación de una variedad proyectiva compleja no singular  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  actuada linealmente por un grupo reductivo complejo. Está basada en los trabajos de Kirwan [Kir85, Sec. 12, 13], quien aplica los resultados de Hesselink [Hes79] a la acción de  $G$  en el cono afín  $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  de  $X$ .

Sea  $G$  un grupo reductivo complejo actuando linealmente en una variedad proyectiva  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Los puntos estables, semiestables e inestables de  $X$  son caracterizados por el Criterio numérico de Hilbert-Mumford (Teorema 1.23). El conjunto de puntos semiestables  $X^{ss}$  es abierto y el cociente  $X^{ss}/G$  es una variedad proyectiva (Teorema 1.16). Estamos interesados en la estratificación del conjunto  $X^{un}$  de puntos inestables de  $X$ .

La representación de un toro maximal  $T \subset G$  en el espacio vectorial  $V = \mathbb{C}^{n+1}$  da la descomposición peso

$$V = \bigoplus_{\alpha \in M(T)^*} V_{\alpha}, \quad (2.13)$$

donde  $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\} \subset M(T)^*$  y  $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_{n+1}}$  son subespacios de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

**Definición 2.20.** El elemento  $\beta \in M(T)$  más cercano a 0 de la envolvente convexa generada por un subconjunto no vacío de pesos de  $M(T)$  se denomina una mínima combinación de pesos. El conjunto  $\mathcal{B}$  de las mínimas combinaciones de pesos que están en una cámara positiva de Weyl se llama conjunto de índices para la estratificación de  $X$ .

**Definición 2.21.** Sea  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  una variedad proyectiva compleja no singular. Una colección finita  $\{S_{\beta} : \beta \in \mathcal{B}\}$  de subconjuntos de  $X$  forman una **estratificación** de  $X$  si  $X$  es la unión disjunta de los estratos  $\{S_{\beta} : \beta \in \mathcal{B}\}$ , y existe un orden parcial  $>$  en el conjunto de índices  $\mathcal{B}$  tal que

$$\overline{S_{\beta}} \subset \bigcup_{\gamma \leq \beta} S_{\gamma},$$

para todo  $\beta \in \mathcal{B}$ .

Describimos un estrato  $S_{\beta}$  de la estratificación de  $X$ .

**Definición 2.22.** Sean

$$Z_{\beta} = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in X : x_j = 0 \text{ si } \alpha_j \cdot \beta \neq \beta, \beta := q(\beta)\}$$

$$Y_{\beta} = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in X : x_j = 0 \text{ si } \alpha_j \cdot \beta < q(\beta); x_j \neq 0 \text{ si algún } \alpha_j \cdot \beta = q(\beta)\},$$

donde  $\alpha_j \in M(T)$ . Se define el morfismo de variedades

$$p_\beta : Y_\beta \rightarrow Z_\beta, \quad p_\beta((x_1 : \cdots : x_{n+1})) = (x'_1 : \cdots : x'_{n+1})$$

donde  $x'_j = x_j$ , si  $\alpha_j \cdot \beta = q(\beta)$ ,  $x'_j = 0$ , de otro modo.

$Z_\beta$  es una subvariedad cerrada de  $X$  y  $Y_\beta$  es una subvariedad localmente cerrada de  $X$ .

Las definiciones de  $Z_\beta$ ,  $Y_\beta$  y  $p_\beta$  dependen solo de  $\beta$ .

Denotamos por  $Estab(\beta) = \{g \in G : g \cdot \beta = g\beta g^{-1} = \beta\} \subset G$  el estabilizador de  $\beta$  bajo la acción adjunta de  $G$ . Según Kirwan, existe un único subgrupo reductivo conexo  $G_\beta$  de  $Estab(\beta)$  tal que

$$M(G_\beta) = \{\lambda \in M(Estab(\beta)) : \lambda \cdot \beta = 0\}.$$

Con este grupo, Alcántara en [Alc13] define

$$Z_\beta^{ss} = \{x \in Z_\beta : x \text{ es semiestable bajo la acción de } G_\beta \text{ en } Z_\beta\} \quad (2.14)$$

y  $Y_\beta^{ss} = p_\beta^{-1}(Z_\beta^{ss})$ .

$Z_\beta^{ss}$  es invariante por la acción de  $Estab(\beta)$ ,  $Y_\beta$  y  $Y_\beta^{ss}$  son invariantes por la acción del grupo parabólico  $P_\beta$ .

**Teorema 2.23.** ([Kir85, Teorema 13.5]) Sean  $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  una variedad proyectiva compleja no singular y  $G$  un grupo reductivo complejo que actúa linealmente en  $X$ . Entonces, existe una estratificación  $\{S_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$  de  $X$  tal que:

- i) El único estrato abierto de  $X$  es  $S_0 = X^{ss}$ .
- ii) En el conjunto de los puntos inestables de  $X$ , para cada  $\beta \in \mathcal{B}$  el estrato

$$S_\beta \cong G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss} \quad (2.15)$$

donde  $Y_\beta^{ss}$  es una subvariedad no singular localmente cerrada de  $X$  y  $P_\beta$  es un subgrupo parabólico de  $G$ .

- iii) Existe una fibración algebraica localmente trivial  $p_\beta : Y_\beta^{ss} \rightarrow Z_\beta^{ss}$  con fibras afines, donde  $Z_\beta^{ss}$  consiste de puntos semiestables de una subvariedad no singular cerrada de  $X$  bajo la acción de un subgrupo maximal reductivo de  $P_\beta$ .

De (2.15) se deduce: La dimensión del estrato  $S_\beta$  es

$$\dim S_\beta = \dim G + \dim Y_\beta^{ss} - \dim P_\beta - 1. \quad (2.16)$$

## Capítulo 3

# Estratificación del espacio de foliaciones de grado 4 en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

*Estudiamos la acción lineal por cambio de coordenadas del grupo reductivo  $SL_3(\mathbb{C})$  en el espacio proyectivo complejo  $\mathcal{F}_4$  de las foliaciones holomorfas de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en el sentido de la Teoría de invariantes geométricos. Nuestros objetivos principales son construir una estratificación de  $\mathcal{F}_4^{un}$  y caracterizar los estratos con singularidades aisladas mediante el número de Milnor y multiplicidad del punto singular; primer jet no trivial, existencia de rectas invariantes, dimensión de los estratos. Para ello, encontramos los generadores y las componentes del conjunto cerrado Zariski de las foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , obtenemos los generadores de  $M(T)$  espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de  $SL_3(\mathbb{C})$  y los de su dual  $M(T)^*$ . Después obtenemos la representación de un toro maximal de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}^{35}$ . Obtenemos fórmulas para calcular el conjunto de índices de la estratificación de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , basándonos en un algoritmo dado por Popov, hallamos la norma de cada índice y el caracter asociado. Construimos, en el sentido GIT, una estratificación del espacio de foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Analizamos las foliaciones genéricas de los estratos con singularidades aisladas y las caracterizamos según los criterios propuestos. Caracterizamos las foliaciones de los estratos  $S_8$ ,  $S_{16}$  y  $S_{22}$ . Además, hallamos foliaciones de grado 4, inestables, con un único punto singular. Nuestras referencias son: [Kir85], [Pop10], [Alc16], [AR16].*

### 3.1. Foliaciones inestables de $\mathfrak{F}_4$

Los objetivos de esta sección son obtener los generadores y las componentes de las foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$  para la acción lineal de  $SL_3(\mathbb{C})$  por cambio de coordenadas.

Por el Criterio de Hilbert-Mumford, un punto  $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}_4$  es inestable para esta acción de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_4$  si y sólo si  $\mu(\mathcal{X}, \lambda) > 0$  para algún subgrupo a un parámetro (S1P)  $\lambda$  de  $SL_3(\mathbb{C})$ . Por la proposición 1.24, existe  $g \in SL_3(\mathbb{C})$  tal que  $g\lambda(t)g^{-1} = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})$ ,  $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ . Aplicando la proposición 1.21, obtenemos

$$\mu(g \cdot \mathcal{X}, \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})) = \mu(\mathcal{X}, g^{-1} \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})g) = \mu(\mathcal{X}, \lambda(t)), \quad (3.1)$$

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3.$$

Entonces, todo punto inestable de  $\mathfrak{F}_4$  está en la órbita de un punto inestable respecto a la acción de un S1P diagonal de la forma (1.2). Por tanto, buscaremos foliaciones inestables respecto a la acción de tales S1P diagonales.

El espacio  $\mathfrak{F}_4$  de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es un espacio proyectivo complejo de dimensión 34, según (2,3). Su cono afín es  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3)) \cong \mathbb{C}^{35}$ .

Una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$  está definida por un campo vectorial homogéneo  $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}_4$  de la forma (2.4). En adelante, aplicando el isomorfismo entre  $\mathfrak{F}_4$  y  $\mathfrak{X}_4$ , descrito en la sección 2.1, identificamos la foliación  $\mathcal{F}$  con el campo vectorial  $\mathcal{X}$  que la define.

Consideramos una base del espacio  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$  que diagonaliza la acción de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_4$  constituida por 35 campos vectoriales monomiales mónicos de grado 4

$$B = \left\{ x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}, x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}, x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad 0 \leq i, j \leq 4, \quad i + j \leq 4.$$

Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$  una foliación descrita por un campo vectorial polinomial homogéneo de grado 4

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= \sum_{\substack{i=0, j=0 \\ i+j \leq 4}}^4 a_{i,j} x^i y^j z^{4-i-j}, & Q(x, y, z) &= \sum_{\substack{i=0, j=0 \\ i+j \leq 4}}^4 b_{i,j} x^i y^j z^{4-i-j}, \\
R(x, y, z) &= \sum_{i=0}^4 c_{i,j} x^i y^{4-i}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

y  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow SL_3(\mathbb{C})$  un subgrupo a un parámetro diagonal

$$\lambda : t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{r_3} \end{pmatrix}$$

con  $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ ,  $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ ,  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$ . Obtenemos

$$\lambda^{-1}(t) = \begin{pmatrix} t^{-r_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-r_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-r_3} \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1}(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-r_1} x \\ t^{-r_2} y \\ t^{-r_3} z \end{pmatrix}.$$

La acción por cambio de coordenadas del toro maximal  $T = \{\text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) : r_1 \geq r_2 \geq r_3, r_1 + r_2 + r_3 = 0\} \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathfrak{F}_4$  está definida por

$$\begin{aligned}
SL_3(\mathbb{C}) \times \mathfrak{F}_4 &\rightarrow \mathfrak{F}_4 \\
(\lambda(t), \mathcal{X}) &\rightarrow \lambda(t) \cdot \mathcal{X} = \lambda(t) \mathcal{X} \circ \lambda^{-1}(t) \\
&= \begin{pmatrix} t^{r_1} P(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \\ t^{r_2} Q(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \\ t^{r_3} R(\lambda^{-1}(t))(x, y, z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t^{r_1 - r_1 i - r_2 j - r_3 (4-i-j)} P(x, y, z) \\ t^{r_2 - r_1 i - r_2 j - r_3 (4-i-j)} Q(x, y, z) \\ t^{r_3 - r_1 i - r_2 (4-i)} R(x, y, z) \end{pmatrix}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Reemplazamos  $r_3 = -r_1 - r_2$  en (3.1) y obtenemos la definición de la acción por cambio de coordenadas de  $T \subset SL_3(\mathbb{C})$  en los campos monomiales de B

$$\begin{aligned}
\lambda(t) \cdot x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x} &= t^{(5-2i-j)r_1 + (4-i-2j)r_2} (x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}) \\
\lambda(t) \cdot x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y} &= t^{(4-2i-j)r_1 + (5-i-2j)r_2} (x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}) \\
\lambda(t) \cdot x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z} &= t^{(-1-i)r_1 + (-5+i)r_2} (x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z}).
\end{aligned}$$

Para cada campo monomial de B, el correspondiente exponente de  $t$  es su peso respecto a la acción de  $\lambda(t) \subset T$  en  $\mathfrak{F}_4$ .

Como  $\lambda$  es no trivial, suponemos  $r_1 > 0 > r_3$ . La condición  $r_3 \leq r_2 \leq r_1$  implica

$$\frac{-r_1 - r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_1} \leq \frac{r_2}{r_1} \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{r_2}{r_1} \leq 1.$$

Se define  $q_2 := \frac{r_2}{r_1} \in [-\frac{1}{2}, 1] \cap \mathbb{Q}$ .

Aplicamos la definición (1.1) y el Criterio de Hilbert-Mumford 1.23 con el fin de obtener los puntos  $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}_4$  para los cuales existe un S1P diagonal de la forma (1.2) tales que:

$$\mu(\mathcal{X}, \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})) = \min\{E_P, E_Q, E_R\} > 0 \text{ y } q_2 \in [-\frac{1}{2}, 1]$$

donde

$$E_P = \min\{(5 - 2i - j)r_1 + (4 - i - 2j)r_2 : a_{i,j} \neq 0\}$$

$$E_Q = \min\{(4 - 2i - j)r_1 + (5 - i - 2j)r_2 : b_{i,j} \neq 0\}$$

$$E_R = \min\{(-1 - i)r_1 + (-5 + i)r_2 : c_{i,j} \neq 0\}.$$

Mostramos el valor de  $q_2$  correspondiente a cada campo monomial de B

$a_{i,j}x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}$ $(5 - 2i - j)r_1 + (4 - i - 2j)r_2$	$b_{i,j}x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}$ $(4 - 2i - j)r_1 + (5 - i - 2j)r_2$
$i = 4, j = 0 \Rightarrow q_2 > 1$	$i = 4, j = 0 \Rightarrow q_2 > 4$
$i = 3, j = 0 \Rightarrow q_2 > 1$	$i = 3, j = 0 \Rightarrow q_2 > 1$
$i = 3, j = 1 \Rightarrow q_2 < -2$	$i = 3, j = 1 \Rightarrow q_2 > 1$
$i = 2, j = 0 \Rightarrow q_2 > -\frac{1}{2}$	$i = 2, j = 0 \Rightarrow q_2 > 0$
$i = 2, j = 1 \Rightarrow 0 > 0$	$i = 2, j = 1 \Rightarrow q_2 > 1$
$i = 2, j = 2 \Rightarrow q_2 < -\frac{1}{2}$	$i = 2, j = 2 \Rightarrow q_2 < -2$
$i = 1, j = 0 \Rightarrow q_2 > -1$	$i = 1, j = 0 \Rightarrow q_2 > -\frac{1}{2}$
$i = 1, j = 1 \Rightarrow q_2 > -2$	$i = 1, j = 1 \Rightarrow q_2 > -\frac{1}{2}$
$i = 1, j = 2 \Rightarrow q_2 < 1$	$i = 1, j = 2 \Rightarrow 0 > 0$
$i = 1, j = 3 \Rightarrow q_2 < 0$	$i = 1, j = 3 \Rightarrow q_2 < -\frac{1}{2}$
$i = 0, j = 0 \Rightarrow q_2 > -\frac{5}{4}$	$i = 0, j = 0 \Rightarrow q_2 > -\frac{4}{5}$
$i = 0, j = 1 \Rightarrow q_2 > -2$	$i = 0, j = 1 \Rightarrow q_2 > -1$
$i = 0, j = 2 \Rightarrow q_2 \leq 1$	$i = 0, j = 2 \Rightarrow q_2 > -2$
$i = 0, j = 3 \Rightarrow q_2 < 1$	$i = 0, j = 3 \Rightarrow q_2 < 1$
$i = 0, j = 4 \Rightarrow q_2 < \frac{1}{4}$	$i = 0, j = 4 \Rightarrow q_2 < 0$



$c_{i,j}x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z}$
$(-1-i)r_1 + (-5+i)r_2$
$i = 4, j = 0 \Rightarrow q_2 < -5$
$i = 3, j = 1 \Rightarrow q_2 < -2$
$i = 2, j = 2 \Rightarrow q_2 < -1$
$i = 1, j = 3 \Rightarrow q_2 < -\frac{1}{2}$
$i = 0, j = 4 \Rightarrow q_2 < -\frac{1}{5}$

Tabla 1. Valores  $q_2$  para campos de B.

De la Tabla 1, obtenemos los valores de  $q_2$  correspondientes a 19 campos de B que definen foliaciones inestables de  $\mathfrak{F}_4$ .

$a_{i,j}x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}$	$b_{i,j}x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}$
$(5-2i-j)r_1 + (4-i-2j)r_2 > 0$	$(4-2i-j)r_1 + (5-i-2j)r_2 > 0$
$i = 2, j = 0, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 2, j = 0, q_2 \in ]0, 1]$
$i = 1, j = 0, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 1, j = 0, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$
$i = 1, j = 1, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 1, j = 1, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$
$i = 1, j = 2, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1[$	$i = 0, j = 0, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$
$i = 1, j = 3, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 0[$	$i = 0, j = 1, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$
$i = 0, j = 0, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 0, j = 2, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$
$i = 0, j = 1, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 0, j = 3, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1[$
$i = 0, j = 2, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1]$	$i = 0, j = 4, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 0[$
$i = 0, j = 3, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, 1[$	
$i = 0, j = 4, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}[$	
$c_{i,j}x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z}$	
$(-1-i)r_1 + (-5+i)r_2 > 0$	
$i = 0, j = 4, q_2 \in ]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}[$	

Tabla 2. Valores de  $q_2$  de campos de B que definen foliaciones de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ .

De los cálculos anteriores, deducimos que: los coeficientes  $a_{4,0}, a_{3,1}, a_{3,0}, a_{2,2}, a_{2,1}, b_{4,0}, b_{3,1}, b_{3,0}, b_{2,2}, b_{2,1}, b_{1,2}, b_{1,3}, c_{4,0}, c_{3,1}, c_{2,2}, c_{1,3}$  son 0, y  $a_{2,0}, a_{1,2}, a_{1,1}, a_{1,0}, a_{0,3}, a_{0,2}, a_{0,1}, a_{0,0}, b_{1,1}, b_{1,0}, b_{0,3}, b_{0,2}, b_{0,1}, b_{0,0}$  pueden ser distintos de 0. Hacemos una partición de  $]-\frac{1}{2}, 1] \cap \mathbb{Q}$  para determinar los subespacios de foliaciones inestables respecto a un S1P diagonal de  $SL_3(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
q_2 \in ]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}[ &\Rightarrow b_{2,0} = 0 \\
q_2 \in ]-\frac{1}{5}, 0[ &\Rightarrow b_{2,0}, c_{0,4} = 0 \\
q_2 = 0 &\Rightarrow a_{1,3}, b_{2,0}, c_{0,4}, b_{0,4} = 0 \\
q_2 \in ]0, \frac{1}{4}[ &\Rightarrow a_{1,3}, b_{0,4}, c_{0,4} = 0 \\
q_2 \in ]\frac{1}{4}, 1] &\Rightarrow a_{0,4}, a_{1,3}, b_{0,4}, c_{0,4} = 0
\end{aligned}$$

Hay cinco subespacios de foliaciones inestables correspondientes a la partición descrita contenidos en dos subespacios maximales de  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$ :

$$V_1 = \text{gen}(\{z^4 \frac{\partial}{\partial x}, yz^3 \frac{\partial}{\partial x}, y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3 z \frac{\partial}{\partial x}, y^4 \frac{\partial}{\partial x}, xz^3 \frac{\partial}{\partial x}, xyz^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^2 z \frac{\partial}{\partial x}, \\ x^2 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^3 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y}, yz^3 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3 z \frac{\partial}{\partial y}, y^4 \frac{\partial}{\partial y}, xz^3 \frac{\partial}{\partial y}, \\ xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^4 \frac{\partial}{\partial z}\})_{\mathbb{C}}$$

$$V_2 = \text{gen}(\{z^4 \frac{\partial}{\partial x}, yz^3 \frac{\partial}{\partial x}, y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3 z \frac{\partial}{\partial x}, y^4 \frac{\partial}{\partial x}, xz^3 \frac{\partial}{\partial x}, xyz^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy^2 z \frac{\partial}{\partial x}, \\ x^2 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y}, yz^3 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3 z \frac{\partial}{\partial y}, xz^3 \frac{\partial}{\partial y}, x^2 z^2 \frac{\partial}{\partial y}, \\ xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}\})_{\mathbb{C}}.$$

En consecuencia, hemos demostrado

**Teorema 3.1.** *El conjunto cerrado de foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es*

$$\mathfrak{F}_4^{un} = SL_3(\mathbb{C})PV_1 \cup SL_3(\mathbb{C})PV_2.$$

## 3.2. Subgrupos a un parámetro virtuales de $SL_3(\mathbb{C})$

Sea  $M(T)$  el  $Q$ -espacio vectorial de los subgrupos a un parámetro virtuales de un toro maximal diagonal  $T$  de  $SL_3(\mathbb{C})$ .

La correspondencia natural

$$(t \rightarrow \text{diag}(t^{b_1}, t^{b_2}, t^{-b_1-b_2})) \longrightarrow (b_1, b_2)$$

permite identificar una clase de equivalencia de  $M(T)$  con un elemento de  $(\mathbb{Q}^*)^2$ . Así,  $M(T)$  y su dual  $M(T)^*$  son  $Q$ -espacios vectoriales isomorfos a  $\mathbb{Q}^2$ .

En  $M(T)^*$ , los caracteres  $L_i : M(T) \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se definen por

$$L_i : \left( t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{a_3} \end{pmatrix} \right) \rightarrow a_i,$$

con  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ .

$L_1, L_2$  y  $L_3$  generan  $M(T)^*$  y  $(L_1 + L_2 + L_3)(t \rightarrow \text{diag}(t^{a_1}, t^{a_2}, t^{a_3})) = 0$ , para

todo  $t \in \mathbb{C}^*$ . Así,  $L_2 = -L_1 - L_3$ .

En  $M(T)^*$  se define el producto interno  $S_3$ - invariante

$$(L_i, L_j) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (3.4)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el símbolo delta Kronecker.

Identificando  $M(T)^*$  y  $M(T)$  mediante el producto interno (3,4) obtenemos los subgrupos a un parámetro virtuales de  $SL_3(\mathbb{C})$  definidos por

$$L_1^* : t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1/3} \end{pmatrix}, \quad L_2^* : t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{-1/3} & 0 & 0 \\ 0 & t^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1/3} \end{pmatrix},$$

y

$$L_3^* : t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{-1/3} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & t^{2/3} \end{pmatrix}$$

correspondientes a  $L_1, L_2$  y  $L_3$ , respectivamente, que generan  $M(T)$ . Hacemos las identificaciones

$$L_1^* = \left( \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad L_2^* = \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad L_3^* = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right). \quad (3.5)$$

Cada  $\alpha$  en  $M(T)^*$  corresponde a un subgrupo a un parámetro virtual  $\lambda$  en  $M(T)$

$$\alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \rightarrow \left( t \rightarrow \begin{pmatrix} t^{\frac{2a-b-c}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\frac{2b-a-c}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & t^{\frac{2c-a-b}{3}} \end{pmatrix} \right)$$

que identificamos con

$$\left( \frac{2a-b-c}{3}, \frac{2b-a-c}{3}, \frac{2c-a-b}{3} \right).$$

Definimos  $q(\alpha) := (\alpha, \alpha)$  cuadrado de la norma inducida por el producto interno (3,4). Un cálculo directo muestra que el ángulo formado por  $L_i$  y  $L_j$ ,  $i \neq j$ , es  $\frac{2\pi}{3}$ .

El ángulo formado por  $L_i^*$  y  $L_j^*$ ,  $i \neq j$ , también es  $\frac{2\pi}{3}$ .

En razón de que la dimensión del espacio vectorial  $M(T)^*$  es el número real 2, el ángulo formado por  $L_i$  y  $L_j$ ,  $i \neq j$ , es  $\frac{2\pi}{3}$  y  $q(L_1) = q(L_2) = q(L_3) = \frac{2}{3}$

podemos representar graficamente los caracteres  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  como vectores en  $\mathbb{R}^2$  en las direcciones de las raíces cúbicas de la unidad.

El conjunto

$$\Phi = \{\pm(L_1 - L_2), \pm(L_2 - L_3), \pm(L_1 - L_3)\}$$

es un sistema de raíces del espacio vectorial  $M(T)$ .

Consideramos  $M(T) \otimes \mathbb{R}$  provisto de las líneas  $H_\alpha = \{\lambda \in M(T) \otimes \mathbb{R} : \langle \alpha, \lambda \rangle = 0\}$  para  $\alpha \in \Phi$ . Las componentes conexas del complemento de  $\cup H_\alpha$  son llamadas **cámaras de Weyl**.

### 3.3. Representación asociada y diagrama de pesos

Estudiamos la acción lineal por cambio de coordenadas de un toro maximal  $T = \{\text{diag}(t^{k_1}, t^{k_2}, t^{k_3}) : k_1 + k_2 + k_3 = 0\} \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3)) \cong \mathbb{C}^{35}$ .

De 3.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x} &= (t^{r_1})^{1-i} (t^{r_2})^{-j} (t^{r_3})^{i+j-4} (x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}) \\ \lambda(t) \cdot x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y} &= (t^{r_1})^{-i} (t^{r_2})^{1-j} (t^{r_3})^{i+j-4} (x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}) \\ \lambda(t) \cdot x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z} &= (t^{r_1})^{-i} (t^{r_2})^{i-4} (t^{r_3}) (x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z}). \end{aligned}$$

Cada exponente de  $t$  es el peso del campo vectorial monomial asociado respecto a la acción de  $T$  en  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$ .

Los pesos de  $x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $x^i y^j z^{4-i-j} \frac{\partial}{\partial y}$  y  $x^i y^{4-i} \frac{\partial}{\partial z}$  son  $r_1(1-i) + r_2(-j) + r_3(i+j-4)$ ,  $r_1(-i) + r_2(1-j) + r_3(i+j-4)$  y  $r_1(-i) + r_2(i-4) + r_3$ , respectivamente. Los caracteres asociados a los campos monomiales son:  $(1-i)L_1 - jL_2 + (i+j-4)L_3$ ,  $-iL_1 + (1-j)L_2 + (i+j-4)L_3$  y  $-iL_1 + (i-4)L_2 + L_3$ , respectivamente. Como  $L_2 = -L_1 - L_3$ , expresamos los caracteres descritos en términos de  $L_1$  y  $L_3$ .

La dimensión de  $T$  es 2, entonces los caracteres de la representación de  $T \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}^{35}$  pueden mostrarse como puntos de  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 3.2.** Para el campo vectorial monomial  $yz^3 \frac{\partial}{\partial x}$ , el peso respecto a la acción de  $T$  en  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$  es  $r_1 - r_2 - 3r_3 = 2r_1 - 2r_3$ . El caracter asociado es  $2L_1 - 2L_3$  que se representa por el punto  $2n(1, 0) - 2n(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}) = n(3, \sqrt{3})$ , donde  $n = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Procedemos en la misma forma con los otros elementos de B.

La Tabla 3 muestra los campos vectoriales de B y sus caracteres asociados a la representación de  $T$  en  $\mathbb{C}^{35}$ . Los 19 primeros campos vectoriales de la tabla

generan foliaciones inestables en  $\mathfrak{F}_4$ .

Tabla 3. Campos vectoriales de la base de  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3))$  y caracteres asociados

$z^4 \frac{\partial}{\partial x}, L_1 - 4L_3$	$yz^3 \frac{\partial}{\partial x}, 2L_1 - 2L_3$	$y^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, 3L_1$	$y^3z \frac{\partial}{\partial x}, 4L_1 + 2L_3$
$y^4 \frac{\partial}{\partial x}, 5L_1 + 4L_3$	$xz^3 \frac{\partial}{\partial x}, -3L_3$	$xyz^2 \frac{\partial}{\partial x}, L_1 - L_3$	$xy^2z \frac{\partial}{\partial x}, 2L_1 + L_3$
$xy^3 \frac{\partial}{\partial x}, 3L_1 + 3L_3$	$x^2z^2 \frac{\partial}{\partial x}, -L_1 - 2L_3$	$z^4 \frac{\partial}{\partial y}, -L_1 - 5L_3$	$yz^3 \frac{\partial}{\partial y}, -3L_3$
$y^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}, L_1 - L_3$	$y^3z \frac{\partial}{\partial y}, 2L_1 + L_3$	$y^4 \frac{\partial}{\partial y}, 3L_1 + 3L_3$	$xz^3 \frac{\partial}{\partial y}, -2L_1 - 4L_3$
$xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}, -L_1 - 2L_3$	$x^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}, -3L_1 - 3L_3$	$y^4 \frac{\partial}{\partial z}, 4L_1 + 5L_3$	
$x^2yz \frac{\partial}{\partial x}, 0$	$x^2y^2 \frac{\partial}{\partial x}, L_1 + 2L_3$	$x^3z \frac{\partial}{\partial x}, -2L_1 - L_3$	$x^3y \frac{\partial}{\partial x}, -2L_1 + L_3$
$x^4 \frac{\partial}{\partial x}, -3L_1$	$xy^2z \frac{\partial}{\partial y}, 0$	$xy^3 \frac{\partial}{\partial y}, L_1 + 2L_3$	$x^2yz \frac{\partial}{\partial y}, -2L_1 - L_3$
$x^2y^2 \frac{\partial}{\partial y}, -L_1 + L_3$	$x^3z \frac{\partial}{\partial y}, -4L_1 - 2L_3$	$x^3y \frac{\partial}{\partial y}, -3L_1$	$x^4 \frac{\partial}{\partial y}, -5L_1 - L_3$
$x^4 \frac{\partial}{\partial z}, -4L_1 + L_3$	$x^3y \frac{\partial}{\partial z}, -2L_1 + 2L_3$	$x^2y^2 \frac{\partial}{\partial z}, 3L_3$	$xy^3 \frac{\partial}{\partial z}, 2L_1 + 4L_3$

La Figura 1 muestra los pesos de la representación de  $T$  en  $\mathbb{C}^{35}$ . Los pesos en el interior de la Figura 1 son tomados dos veces. Las líneas punteadas representan las líneas  $H_{L_2-L_3}$ ,  $H_{L_1-L_2}$ ,  $H_{L_1-L_3}$ . Las componentes conexas del complemento de  $H_{L_2-L_3} \cup H_{L_1-L_2} \cup H_{L_1-L_3}$  son las cámaras de Weyl. La región limitada por las líneas rojas (incluyéndolas) es la cámara de Weyl seleccionada:  $\{rL_1 - bL_3, r, b \geq 0\}$ .

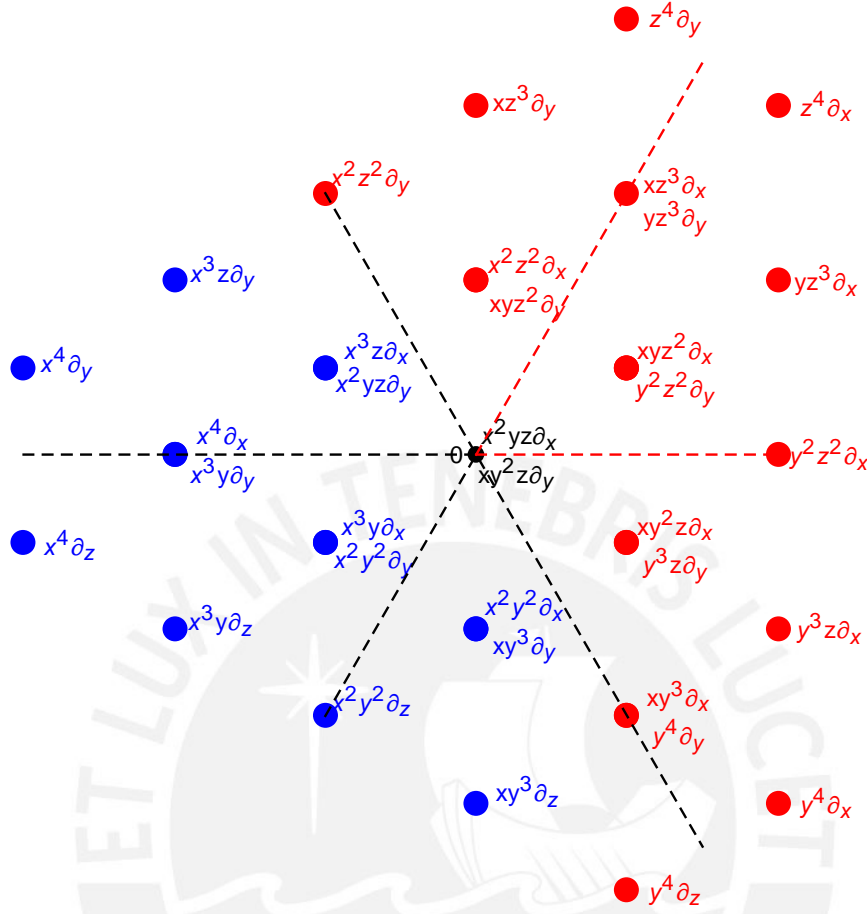


Figura 3.1: Diagrama de pesos de la representación de  $T \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}^{35}$ .

### 3.4. Estratificación del espacio de foliaciones $\mathfrak{F}_4$

#### 3.4.1. Conjunto de índices $\mathcal{B}$ para la estratificación de $\mathfrak{F}_4$

El conjunto  $\mathcal{B}$  de índices para la estratificación de  $\mathfrak{F}_4$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  se describe en términos de los pesos de la representación de un toro maximal diagonal  $T \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(3)) \cong \mathbb{C}^{35}$  definida por la acción cambio de coordenadas en  $\mathfrak{F}_4$ . Un elemento  $\beta$  de  $\mathcal{B}$  se interpreta como el punto más cercano a 0 de la envolvente convexa de un subconjunto no vacío de pesos de  $M(T)^*$ .

Vladimir Popov [Pop10] describe un algoritmo para obtener el conjunto de índices  $\mathcal{B}$ . Considera todas las posibles líneas  $\mathcal{L}$  en el diagrama de pesos de la representación de  $T \subset SL_3(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}^{35}$ , salvo la acción del grupo de Weyl, con las propiedades siguientes:

1.  $\mathcal{L}$  no pasa por 0.
2.  $\mathcal{L}$  pasa al menos a través de un peso.
3. El punto de intersección de la perpendicular trazada desde 0 a  $\mathcal{L}$  está en la Cámara de Weyl seleccionada.
4. Si  $\mathcal{L}$  no es paralela a ninguna raíz o es paralela a alguna raíz pero no contiene dos pesos diferentes entonces tomamos esta línea  $\mathcal{L}$ .

Alcántara [Alc13], afirma que los índices  $\beta_i \in \mathcal{B}$  están en la cámara de Weyl  $\{rL_1 - bL_3 : r, b \geq 0\}$ .

Obtendremos fórmulas para calcular los índices  $\beta_i \in \mathcal{B}$ .

### Cálculo del conjunto de índices $\mathcal{B}$

Supongamos que los campos vectoriales monomiales  $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j$  de  $B$  definen foliaciones inestables en  $\mathfrak{F}_4$ . Sean  $a_iL_1 + c_iL_3$  y  $a_jL_1 + c_jL_3$  en  $M(T)^*$ , sus respectivos caracteres, representados por los puntos  $P_i$  y  $P_j$  en  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente.

En  $M(T)^*$  usamos el producto interno (3.4).

Sean  $\mathcal{L}_i$  la línea que pasa por  $P_i$  y  $P_j$ , y  $\mathcal{L}'_i$  la línea ortogonal a  $\mathcal{L}_i$  trazada desde 0

$$\mathcal{L}_i : P = a_iL_1 + c_iL_3 + t_i [(a_j - a_i)L_1 + (c_j - c_i)L_3], \quad \mathcal{L}'_i : Q = r_iL_1 + b'_iL_3,$$

$t_i, r_i, b'_i \in \mathbb{Q}$ . La ortogonalidad de las líneas  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}'_i$  implica

$$\begin{aligned} (r_iL_1 + b'_iL_3, (a_j - a_i)L_1 + (c_j - c_i)L_3) &= 0 \\ r_i[2(a_j - a_i) - (c_j - c_i)] + b'_i[-(a_j - a_i) + 2(c_j - c_i)] &= 0. \end{aligned}$$

Las líneas  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}'_i$  se intersectan en  $\beta_i$  cuando  $P = Q$ . Resulta el sistema de ecuaciones

$$r_i = a_i + t_i(a_j - a_i), \quad b'_i = c_i + t_i(c_j - c_i).$$

Casos:

i)  $r_i = 0$ , si  $(a_j - a_i) = 2(c_j - c_i)$ . Entonces,  $\beta_i = b'_iL_3$ , donde

$$b'_i = \frac{c_i(a_j - a_i) - a_i(c_j - c_i)}{a_j - a_i}, \quad b'_i < 0.$$

ii)  $b'_i = 0$ , si  $(c_j - c_i) = 2(a_j - a_i)$ . Así que,  $\beta_i = r_i L_1$ , donde

$$r_i = \frac{a_i(c_j - c_i) - c_i(a_j - a_i)}{c_j - c_i}, r_i > 0.$$

iii)  $r_i \neq 0, b'_i \neq 0$ . Con el fin de simplificar los cálculos escribimos

$$\mathcal{L}'_i : Q = r_i L_1 + b'_i L_3 = r_i(L_1 + b_i L_3), \text{ donde } b_i = \frac{b'_i}{r_i}.$$

De la ortogonalidad de las líneas  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}'_i$  obtenemos

$$\begin{aligned} (L_1 + b_i L_3, (a_j - a_i)L_1 + (c_j - c_i)L_3) &= 0 \\ 2(a_j - a_i) - (c_j - c_i) - b_i(a_j - a_i) + 2b_i(c_j - c_i) &= 0 \\ b_i &= \frac{2(a_j - a_i) - (c_j - c_i)}{(a_j - a_i) - 2(c_j - c_i)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

y como estas líneas se intersectan cuando  $P = Q$ , conseguimos

$$\begin{aligned} r_i &= a_i + t_i(a_j - a_i), \quad r_i b_i = c_i + t_i(c_j - c_i) \\ r_i &= \frac{a_i(c_j - c_i) - c_i(a_j - a_i)}{c_j - c_i - b_i(a_j - a_i)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

El punto de intersección de  $\mathcal{L}_i$  y  $\mathcal{L}'_i$  es

$$\beta_i = r_i(L_1 + b_i L_3), r_i > 0, b_i \leq 0. \quad (3.8)$$

El cuadrado de la norma  $q(\beta_i)$  se consigue usando (3.4). El subgrupo a un parámetro virtual (S1PV) correspondiente a  $\beta_i$  se obtiene aplicando (3.5).

Definimos una relación de orden parcial en el conjunto de índices  $\mathcal{B}$

$$\beta_i \leq \beta_j \text{ si } q(\beta_i) \geq q(\beta_j).$$

**Ejemplo 3.3.** (Línea 8). Los campos vectoriales  $z^4 \frac{\partial}{\partial y}, y^4 \frac{\partial}{\partial x}$  definen foliaciones inestables. Los caracteres asociados son  $-L_1 - 5L_3, 5L_1 + 4L_3$ , respectivamente. La línea correspondiente en el diagrama de pesos es  $\mathcal{L} : P = 5L_1 + 4L_3 + t(6L_1 + 9L_3), t \in \mathbb{Q}$ . La línea  $\mathcal{L}'$  ortogonal a  $\mathcal{L}$  trazada desde 0 es  $\mathcal{L}' : Q = r(L_1 + bL_3)$ . Aplicando (3.6) obtenemos  $b = -\frac{1}{4}$  y usando (3.7) conseguimos  $r = 2$ . El punto de intersección de  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}'$  es  $\beta = 2(L_1 - \frac{1}{4}L_3) = 2L_1 - \frac{1}{2}L_3$ , el cual está en la cámara de Weyl seleccionada. El S1PV correspondiente es  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$  y el cuadrado de su norma  $q(\beta) = \frac{7}{2} = 3,5$ .



Realizando este procedimiento construimos 26 líneas y a continuación 26 índices para la estratificación de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ .

La Tabla 4 muestra el conjunto de índices  $\mathcal{B}$ .

Tabla 4. Conjunto de caracteres  $\alpha_i$ , índices  $\beta_i$  y cuadrado de normas  $q(\beta_i)$

$i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$q(\beta_i)$
1	$L_1 - 4L_3$	$(2, 1, -3)$	14
2	$2L_1 - 2L_3$	$(2, 0, -2)$	8
3	$3L_1$	$(2, -1, -1)$	6
4	$-3L_3$	$(1, 1, -2)$	6
5	$\frac{15}{7}L_1 - \frac{15}{14}L_3$	$(\frac{25}{14}, -\frac{5}{14}, -\frac{20}{14})$	$\frac{75}{14} = 5,357$
6	$\frac{3}{2}L_1 - \frac{3}{2}L_3$	$(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2})$	$\frac{9}{2} = 4,5$
7	$\frac{27}{13}L_1 - \frac{9}{13}L_3$	$(\frac{21}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{15}{13})$	$\frac{54}{13} = 4,154$
8	$2L_1 - \frac{1}{2}L_3$	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$	$\frac{7}{2} = 3,5$
9	$\frac{6}{7}L_1 - \frac{12}{7}L_3$	$(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{10}{7})$	$\frac{24}{7} = 3,428$
10	$\frac{12}{7}L_1 - \frac{6}{7}L_3$	$(\frac{10}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{8}{7})$	$\frac{24}{7} = 3,428$
11	$\frac{45}{26}L_1 - \frac{15}{26}L_3$	$(\frac{35}{26}, -\frac{10}{26}, -\frac{25}{26})$	$\frac{75}{26} = 2,884$
12	$L_1 - L_3$	$(1, 0, -1)$	2
13	$\frac{9}{7}L_1 - \frac{9}{14}L_3$	$(\frac{15}{14}, -\frac{3}{14}, -\frac{12}{14})$	$\frac{27}{14} = 1,928$
14	$-\frac{3}{2}L_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$	$\frac{3}{2} = 1,5$
15	$\frac{3}{2}L_1$	$(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2} = 1,5$

$i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$q(\beta_i)$
16	$\frac{18}{19}L_1 - \frac{12}{19}L_3$	$(\frac{16}{19}, -\frac{2}{19}, -\frac{14}{19})$	$\frac{24}{19} = 1,263$
17	$\frac{3}{7}L_1 - \frac{6}{7}L_3$	$(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{5}{7})$	$\frac{6}{7} = 0,857$
18	$\frac{6}{7}L_1 - \frac{3}{7}L_3$	$(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{4}{7})$	$\frac{6}{7} = 0,857$
19	$\frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_3$	$(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} = 0,5$
20	$\frac{3}{13}L_1 - \frac{9}{13}L_3$	$(\frac{5}{13}, \frac{2}{13}, -\frac{7}{13})$	$\frac{6}{13} = 0,461$
21	$\frac{9}{13}L_1 - \frac{3}{13}L_3$	$(\frac{7}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{5}{13})$	$\frac{6}{13} = 0,461$
22	$\frac{4}{7}L_1 - \frac{1}{7}L_3$	$(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$	$\frac{2}{7} = 0,285$
23	$\frac{3}{14}L_1 - \frac{3}{7}L_3$	$(\frac{4}{14}, \frac{1}{14}, -\frac{5}{14})$	$\frac{3}{14} = 0,214$
24	$\frac{3}{7}L_1 - \frac{3}{14}L_3$	$(\frac{5}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{4}{14})$	$\frac{3}{14} = 0,214$
25	$\frac{9}{26}L_1 - \frac{3}{26}L_3$	$(\frac{21}{26}, -\frac{6}{26}, -\frac{15}{26})$	$\frac{3}{26} = 0,115$
26	$\frac{3}{19}L_1 - \frac{9}{38}L_3$	$(\frac{7}{38}, \frac{1}{38}, -\frac{8}{38})$	$\frac{3}{38} = 0,0789$

### 3.4.2. Formación de $Z_\beta$ y $Y_\beta$

Siguiendo la definición 2.16, [Kir85, Definición 2.18],  $Z_i$  es la proyectivización del subespacio lineal complejo generado por los campos vectoriales asociados a los pesos en la línea  $L_i$  y  $Y_i$  es la proyectivización de la envolvente convexa de  $L_i$  generada por los campos asociados a los pesos  $\alpha_j$  tales que el producto interno  $\alpha_j \cdot \beta_i \geq q(\beta_i)$ .

**Ejemplo 3.4.** Examinando la línea 8, Figura 3, deducimos

$$Z_8 = \mathbb{P}\text{gen} \left\{ y^4 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y} \right\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_8 = \mathbb{P}\text{gen} \left\{ y^4 \frac{\partial}{\partial x}, y^3 z \frac{\partial}{\partial x}, y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, y z^3 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial x}, z^4 \frac{\partial}{\partial y} \right\}_{\mathbb{C}}.$$

En forma similar formamos  $Z_i$  y  $Y_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 26\}$ .

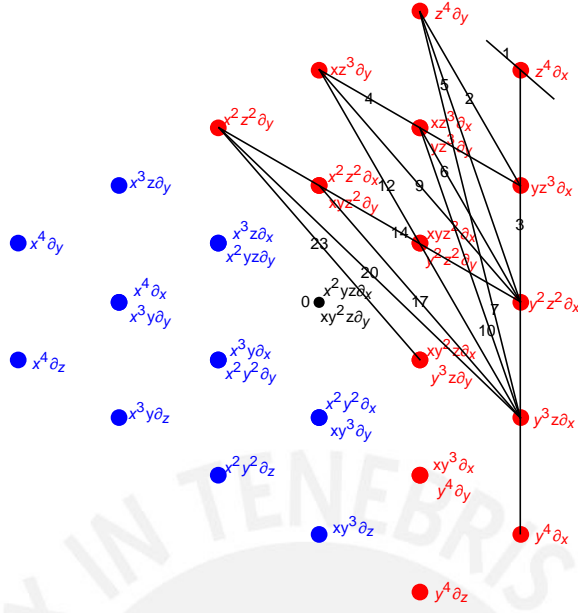


Figura 3.2: Líneas  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6, \mathcal{L}_7, \mathcal{L}_9, \mathcal{L}_{10}, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{14}, \mathcal{L}_{17}, \mathcal{L}_{20}, \mathcal{L}_{23}$ .

### Subvariedades $Z_i$ y $Y_i$

$$Z_1 = Y_1 = \mathbb{P}\{a_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial x}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_2 = \mathbb{P}\{a_{0,1}yz^3 \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_2 = \mathbb{P}\{(a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_3 = \mathbb{P}Y_3 = \{(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_4 = \mathbb{P}\{(a_{1,0}xz^3 + (a_{0,1}yz^3) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,1}yz^3) \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_4 = \mathbb{P}\{(a_{0,1}yz^3 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

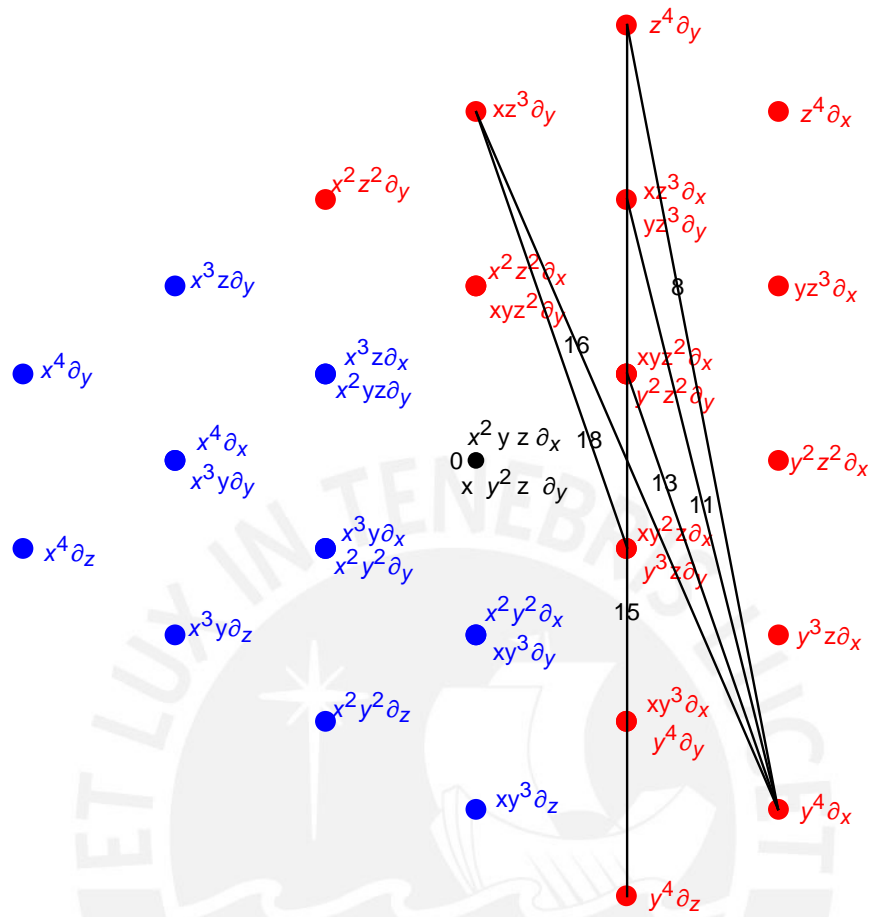


Figura 3.3: Líneas  $\mathcal{L}_8, \mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{13}, \mathcal{L}_{15}, \mathcal{L}_{16}, \mathcal{L}_{18}$ .

$$Z_5 = \mathbb{P}\{a_{0,2}y^2z^2 \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_5 = \mathbb{P}\{(a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_6 = \mathbb{P}\{a_{0,2}y^2z^2 \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,1}yz^3 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_6 = \mathbb{P}\{(a_{0,2}y^2z^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_7 = \mathbb{P}\{a_{0,3}y^3z \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_7 = \mathbb{P}\{(a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_8 = \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4 \frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

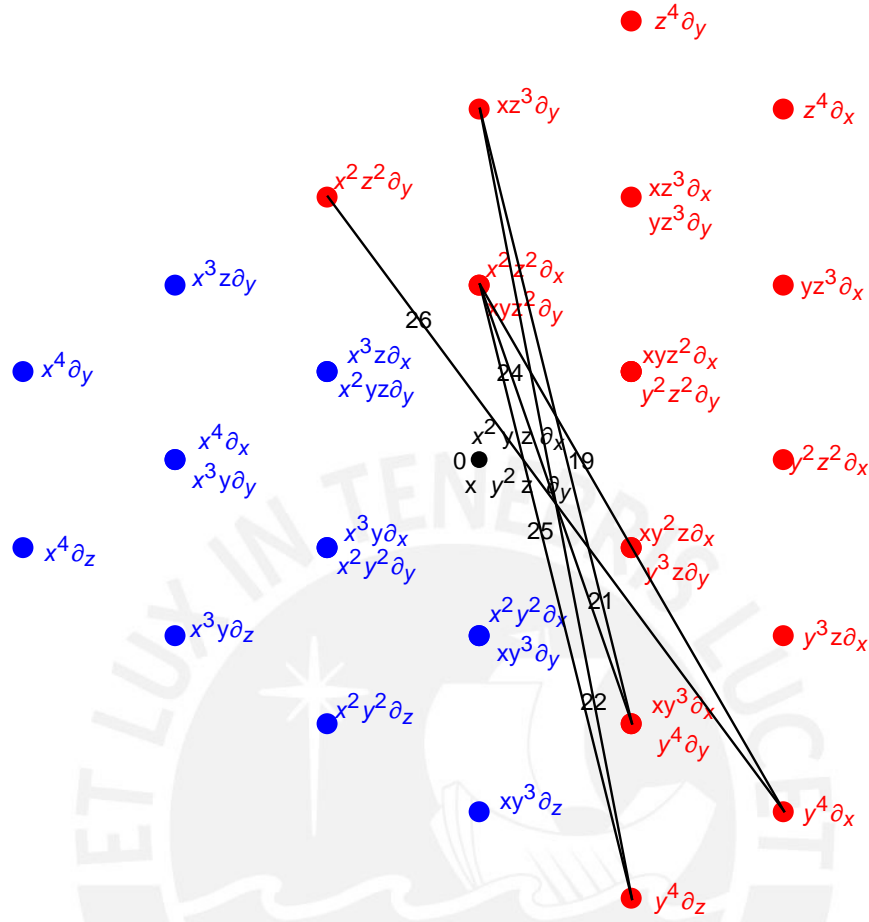


Figura 3.4: Líneas  $\mathcal{L}_{19}, \mathcal{L}_{21}, \mathcal{L}_{22}, \mathcal{L}_{24}, \mathcal{L}_{25}, \mathcal{L}_{26}$ .

$$Y_8 = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_9 = \mathbb{P}\{a_{0,2}y^2z^2\frac{\partial}{\partial x} + b_{1,0}xz^3\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_9 = \mathbb{P}\{(a_{0,2}y^2z^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_{10} = \mathbb{P}\{(a_{0,3}y^3z + a_{1,0}xz^3)\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,1}yz^3\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_{10} = \mathbb{P}\{(a_{0,3}y^3z + a_{1,0}xz^3 + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_{11} = \{(a_{0,4}y^4 + a_{1,0}xz^3)\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,1}yz^3\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_{11} = \{(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{1,0}xz^3 + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 +$$

$$\begin{aligned}
& b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} \} \mathbb{C} \\
Z_{12} &= \mathbb{P}\{(a_{1,1}xyz^2 + a_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,2}y^2z^2) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{12} &= \mathbb{P}\{(a_{0,3}y^3z + a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + \\
& b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{13} &= \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{1,1}xyz^2) \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,2}y^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{13} &= \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + \\
& (b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{14} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,1}xyz^2 + a_{0,2}y^2z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{0,2}y^2z^2) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{14} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + \\
& (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{15} &= \mathbb{P}\{(a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,3}xy^3) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + \\
& b_{0,3}y^3z + b_{0,4}y^4 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z}\} \mathbb{C} \\
Y_{15} &= \mathbb{P}\{(a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,3}xy^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\
& a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,3}y^3z + b_{0,4}y^4 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + \\
& c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z}\} \mathbb{C} \\
Z_{16} &= \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial x} + b_{1,0}xz^3 \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{16} &= \mathbb{P}\{(a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + \\
& (b_{1,0}xz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{17} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial x} + b_{1,1}xyz^2 \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{17} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} \\
& + (b_{1,0}xz^3 + b_{1,1}xyz^2 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{18} &= \mathbb{P}\{(a_{1,2}xy^2z \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{18} &= \mathbb{P}\{(a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + \\
&\quad a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{19} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{0,4}y^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{19} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\
&\quad a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + \\
&\quad b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{20} &= \mathbb{P}\{a_{0,3}y^3z \frac{\partial}{\partial x} + b_{2,0}x^2z^2 \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{20} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{21} &= \mathbb{P}\{a_{1,3}xy^3 \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{21} &= \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\
&\quad a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + \\
&\quad b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{22} &= \mathbb{P}\{b_{1,0}xz^3 \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z}\} \mathbb{C} \\
Y_{22} &= \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\
&\quad a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + \\
&\quad b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z}\} \mathbb{C} \\
Z_{23} &= \mathbb{P}\{(a_{1,2}xy^2z \frac{\partial}{\partial x} + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Y_{23} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + \\
&\quad a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + \\
&\quad b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C} \\
Z_{24} &= \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{2,0}x^2z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{0,4}y^4) \frac{\partial}{\partial y}\} \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$$Y_{24} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_{25} = \mathbb{P}\{a_{2,0}x^2z^2\frac{\partial}{\partial x} + b_{1,1}xyz^2\frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial z}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_{25} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial z}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Z_{26} = \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial x} + b_{2,0}x^2z^2\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

$$Y_{26} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y}\}_{\mathbb{C}}$$

### 3.5. Estratos de $\mathfrak{F}_4$ con singularidades aisladas

Analizando la información de la sección 3.4 deducimos que toda foliación en  $Y_i$  con  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 17, 20, 23\}$  tiene una curva de singularidades. Quitando la curva de singularidades estas foliaciones pueden ser vistas como foliaciones de grado 2 o 3 estudiadas en [Alc13] y [AR16], respectivamente, así que descartamos el estudio de los estratos correspondientes.

En esta sección calculamos la multiplicidad y el número de Milnor de un punto singular común en la foliación genérica con singularidades aisladas de cada estrato  $S_i$ ,  $i \in \{8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26\}$ . También calculamos el primer jet no trivial, la dimensión de los estratos y averiguamos la existencia de una recta invariante de la foliación.

Obtendremos  $Z_i^{ss}$  y  $Y_i^{ss}$  para  $i \in \{8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26\}$ . En [Kir85, Definición 12.20 ],

$$Z_\beta^{ss} = \{X \in Z_\beta : \mu(X, \lambda) \leq \lambda \cdot \beta, \text{ para todo } \lambda \in M(Est\beta)\} \quad (3.9)$$

y  $Y_\beta^{ss}$  es la imagen inversa de  $Z_\beta^{ss}$  bajo la aplicación definida en (2.14).



Con el fin de obtener  $Z_\beta^{ss}$  aplicamos

**Lema 3.5.** [Alc13, Lema 3.1] *Si  $X \in Z_\beta$  tal que el S1P virtual  $\text{diag}(t^{k_1}, t^{k_2}, t^{k_3})$  correspondiente a  $\beta$  satisface  $k_1 > k_2 > k_3$ , entonces  $X \in Z_\beta^{ss}$  si y solo si  $\beta$  es el punto más cercano a cero en la envolvente convexa  $C_X$ , respecto a  $T$ , formada con los pesos de  $X$ .*

El único S1P virtual diagonal correspondiente a un índice del conjunto  $\mathcal{B}$  que no satisface el Lema 3.5, es  $\beta_{15} = \text{diag}(t, t^{-1/2}, t^{-1/2})$ . En la subsección 3.4.2 hemos obtenido

$$Z_{15} = \mathbb{P}\left\{(a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,3}xy^3)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,3}y^3z + b_{0,4}y^4 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial z}\right\}_{\mathbb{C}}.$$

Calculamos  $Z_{15}^{ss}$  aplicando (3.9).

En [Kir85, Sección 21], Kirwan explica que  $\text{Estab}(\beta_{15})$  es el estabilizador de  $\beta_{15}$  bajo la acción adjunta de  $SL_3(\mathbb{C})$  en  $M(SL_3(\mathbb{C}))$ , es decir

$$\begin{aligned} \text{Estab}(\beta_{15}) &= \{g \in SL_3(\mathbb{C}) : g \text{diag}(t, t^{-1/2}, t^{-1/2}) g^{-1} = \text{diag}(t, t^{-1/2}, t^{-1/2})\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}) \right\}. \end{aligned}$$

Si  $\lambda \in M(\text{Estab}(\beta_{15}))$ , entonces extendiendo la acción adjunta de  $Y(SL_3(\mathbb{C}))$  a  $M(SL_3(\mathbb{C}))$  y la proposición 1.24 a S1P virtuales de  $SL_3(\mathbb{C})$ , existe  $g$  en  $\text{Estab}(\beta_{15})$  tal que  $g\lambda(t)g^{-1} = \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})$  con  $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ ,  $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ .

Así,

$$\begin{aligned} Z_{15}^{ss} &= \{X \in Z_{15} : \mu(X, \lambda) = \mu(g \cdot X, \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})) \leq \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) \cdot \beta_{15}\} \\ &= r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2}, \text{ con } r_1 \geq r_2 \geq r_3 \text{ y } g \in \text{Estab}(\beta_{15})\}. \end{aligned}$$

Para  $Y \in Z_{15}$  tenemos  $\text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}) \cdot Y =$

$$\begin{pmatrix} a_{1,0}t^{-3r_3}xz^3 + a_{1,1}t^{-r_2-2r_3}xyz^2 + a_{1,2}t^{-2r_2-r_3}xy^2z + a_{1,3}t^{-3r_2}xy^3 \\ b_{0,1}t^{-3r_3}yz^3 + b_{0,2}t^{-r_2-2r_3}y^2z^2 + b_{0,3}t^{-2r_2-r_3}y^3z + b_{0,4}t^{-3r_2}y^4 + b_{0,0}t^{r_2-4r_3}z^4 \\ c_{0,4}t^{r_3-4r_2}y^4 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\mu(\mathcal{X}, \lambda) = \min\{-3r_3, -r_2 - 2r_3, -2r_2 - r_3, -3r_2, r_2 - 4r_3, r_3 - 4r_2\} \leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2}$$

implica

$$\begin{aligned}
-3r_3 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_2 \leq r_3 \\
-r_2 - 2r_3 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_2 \leq r_3 \\
-2r_2 - r_3 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_3 \leq r_2 \\
-3r_2 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_3 \leq r_2 \\
r_2 - 4r_3 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_2 \leq r_3 \\
r_3 - 4r_2 &\leq r_1 - \frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2} \Leftrightarrow r_3 \leq r_2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$Z_{15}^{ss} = \{X \in Z_{15} : (a_{1,0}, a_{1,1}, b_{0,1}, b_{0,2}, b_{0,0}) \neq (0, 0, 0, 0, 0), (a_{1,2}, a_{1,3}, b_{0,3}, b_{0,4}, c_{0,4}) \\
2cm \neq (0, 0, 0, 0, 0)\}.$$

En esta sección, las foliaciones  $\mathcal{F}$  en  $Y_i^{ss}$ ,  $i = 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26$ , son definidas por campos polinomiales homogéneos de grado 4

$$\mathcal{X} = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Notamos que todas ellas tienen punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$ . El campo polinomial correspondiente alrededor del punto  $(0, 0)$  es

$$(Q(1, y, z) - yP(1, y, z)) \frac{\partial}{\partial y} + (R(1, y, z) - zP(1, y, z)) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definimos

$$f_i(y, z) = Q(1, y, z) - yP(1, y, z), \quad g_i(y, z) = R(1, y, z) - zP(1, y, z). \quad (3.10)$$

Calculamos el número de Milnor de  $p = (1 : 0 : 0)$  aplicando [Ful09, Teorema 3]

$$\mu_{(1:0:0)}(\mathcal{F}) = I_0(Q(1, y, z) - yP(1, y, z), R(1, y, z) - zP(1, y, z)),$$

donde  $I_0$  es el número de intersección de las curvas planas  $f_i$  y  $g_i$  en el punto  $(0, 0)$ .

En un examen preliminar,

1. Obtenemos de la fórmula (2.16) y del Lema 2.13, fórmulas para calcular la dimensión de los estrato  $S_i$

$$\dim S_i = \dim Y_i^{ss} + 2, \quad i \in \{8, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26\}, \quad (3.11)$$

$$\dim S_{15} = \dim Y_{15}^{ss} + 1. \quad (3.12)$$

2. Deducimos del Lema 2,8, para las foliaciones  $\mathcal{F}$  definidas por campos vectoriales  $\mathcal{X} = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y}$  en  $Y_i^{ss}$ ,  $i \in \{8, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24, 26\}$ , que:  $z = 0$  es una recta invariante para  $\mathcal{X}$  y el número de Milnor del punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  es

$$\mu_p(\mathcal{F}) = I_0(f_i(y, z), z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)). \quad (3.13)$$

### 3.5.1. Estrato 8

$$Z_8^{ss} = \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4\frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{0,0} \neq 0\}.$$

$$Y_8^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,0}z^4\frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{0,0} \neq 0\}.$$

Si un campo vectorial

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4 \\ b_{0,0}z^4 \\ 0 \end{pmatrix} \in Y_8^{ss},$$

entonces  $a_{0,4} \neq 0$  y  $b_{0,0} \neq 0$ . Definimos

$$f_8(y, z) = Q(1, y, z) - yP(1, y, z) = b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_8(y, z) = -zP(1, y, z) = -a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

Calculamos el número de intersección de  $f_8$  y  $g_8$  en  $(0, 0)$ . Notamos que  $P(1, y, z)$  y  $Q(1, y, z)$  no tienen factor común. Aplicamos (3.13),

$$\begin{aligned} I_0(f_8, g_8) &= I_0(f_8(y, z), z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) \\ &= I_0(b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4, z) \\ &\quad + I_0(b_{0,0}z^4, a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \\ &= I_0(-a_{0,4}y^5, z) + I_0(b_{0,0}z^4, a_{0,4}y^4) = 5 + 16 = 21. \end{aligned}$$

El número de Milnor en  $p = (1 : 0 : 0)$  es  $\mu_p(\mathcal{F}) = 21$  y la multiplicidad es  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ , por que  $b_{0,0} \neq 0$ . El 4-jet de  $\begin{pmatrix} f_8 \\ g_8 \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} z^4 \\ 0 \end{pmatrix}$  cuando  $b_{0,0} = 1$  y el 3-jet es trivial.

Las foliaciones de este estrato tienen recta invariante  $z = 0$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$  define una foliación  $\mathcal{F}$  de grado 4 con  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ ,  $\mu_p(\mathcal{F}) = 21$  y  $4\text{-jet} \begin{pmatrix} z^4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , entonces en la carta  $x = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ R(1, y, z) - zP(1, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(y, z) - y(P_3(y, z) + P_4(y, z)) \\ R(y, z) - z(P_3(y, z) + P_4(y, z)) \end{pmatrix}$$

donde  $P_3(y, z)$  y  $P_4(y, z)$  son polinomios homogéneos de grados 3 y 4, respectivamente. De la condición sobre el  $4\text{-jet}$  de  $\mathcal{X}$ , inferimos que  $Q(y, z) = yP_3(y, z) + z^4$  y  $R(y, z) = zP_3(y, z)$ . El número de Milnor

$$\begin{aligned} \mu_{(1:0:0)}(\mathcal{F}) &= I_0(z^4 - yP_4(y, z), -zP_4(y, z)) \\ &= I_0(z^4 - yP_4(y, z), z) + I_0(z^4 - yP_4(y, z), P_4(y, z)) \\ &= I_0(yP_4(y, z), z) + I_0(z^4, P_4(y, z)) = 21 \end{aligned}$$

si y sólo si  $I_0(yP_4(y, z), z) = 5$  y  $I_0(z^4, P_4(y, z)) = 16$  que sucede si y sólo si  $a_{0,4} \neq 0$ . Entonces,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P_4(y, z) + xP_3(y, z) \\ z^4 + yP_3(y, z) \\ zP_3(y, z) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} P_4(y, z) \\ z^4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4 \\ z^4 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Por(3,11), la dimensión del estrato  $S_8$  es 8.

Hemos probado la siguiente caracterización de las foliaciones del estrato  $S_8$ .

**Proposición 3.6.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$ .  $\mathcal{F} \in S_8$  si y sólo si tiene un punto singular con multiplicidad 4, número de Milnor 21 y su  $4\text{-jet}$  es linealmente equivalente a  $z^4 \frac{\partial}{\partial y}$ , recta invariante  $z = 0$ . Este estrato tiene dimensión 8.*

En adelante, denotaremos

$$P_4(y, z) = a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4 \quad (3.14)$$

$$P_3(y, z) = a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 \quad (3.15)$$

$$Q_4(y, z) = b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4 \quad (3.16)$$

$$Q_3(y, z) = b_{1,3}y^3 + b_{1,2}y^2z + b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3. \quad (3.17)$$

### 3.5.2. Estrato 11

$$Z_{11}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{1,0}xz^3)\frac{\partial}{\partial x} + b_{0,1}yz^3\frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, (a_{1,0}, b_{0,1}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{11}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{1,0}xz^3 + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, y (a_{1,0}, b_{0,1}) \neq (0, 0)\}.$$

Entonces,

$$f_{11}(y, z) = (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{11}(y, z) = -a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

Sea  $\mathcal{X} \in Y_{11}^{ss}$  con singularidades aisladas,  $a_{0,4} \neq 0$  y  $(a_{1,0}, b_{0,1}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos el número de intersección de  $f_{11}$  y  $g_{11}$  en  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} I_0(f_{11}, g_{11}) &= I_0(f_{11}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) \\ &= I_0(a_{0,4}y^5, z) + I_0(z^3(b_{0,1}y + b_{0,0}z), P(1, y, z)) \\ &= 5 + I_0(z^3, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) + I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\ &= 17 + I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)). \end{aligned}$$

Supongamos  $a_{1,0} \neq 0$ . Si  $b_{0,1} \neq 0$ , obtenemos

$$I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) = 3,$$

y si  $b_{0,1} = 0$ , entonces  $b_{0,0} \neq 0$ , pues  $\mathcal{X}$  tiene singularidades aisladas,

$$I_0(b_{0,0}z, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) = I(b_{0,0}z, a_{0,4}y^4) = 4.$$

Supongamos  $a_{1,0} = 0$ . Por las condiciones de  $\mathcal{X}$ ,  $b_{0,1} \neq 0$ . En este caso,

$$I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, P_4(y, z)) = 4, b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z).$$

Por consiguiente, el número de Milnor de la foliación  $\mathcal{F}$  definida por  $\mathcal{X}$  es

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} 20, & \text{si } a_{1,0} b_{0,1} \neq 0, \\ 21, & \text{si } (a_{1,0} \neq 0, b_{0,1} = 0) \text{ o } (a_{1,0} = 0 \text{ y } b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z)). \end{cases}$$

Si  $a_{1,0} \neq 0$ , la multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ . Si  $a_{1,0} = 0$ , entonces  $b_{0,1} \neq 0$ , y también  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ . El 4-jet de  $\begin{pmatrix} f_{11} \\ g_{11} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 \\ -a_{1,0}z^4 \end{pmatrix}$ .

La dimensión del estrato  $S_{11}$  es 10.

Por tanto, en el conjunto abierto de  $S_{11}$  donde  $a_{0,4} \neq 0$  y  $a_{1,0}b_{0,1} \neq 0$  toda foliación de grado 4 tiene un punto singular con multiplicidad 4 y número de Milnor 20.

### 3.5.3. Estrato 13

$$Z_{13}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{1,1}xyz^2) \frac{\partial}{\partial x} + b_{0,2}y^2z^2 \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, (a_{1,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{\beta_{13}}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{0,4}y^4 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} \\ + (b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, (a_{1,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0)\}.$$

En este caso, según (3.10),

$$f_{13}(y, z) = (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - \\ a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{13}(y, z) = -a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

Notamos que  $\mathcal{X}$  está en  $Y_{13}^{ss}$  cuando  $a_{0,4} \neq 0$  y  $(a_{1,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos el número de intersección de  $f_{13}$  y  $g_{13}$  en  $(0, 0)$ ,

$$I_0(f_{13}, g_{13}) = I_0(f_{13}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) \\ = I_0(a_{0,4}y^5, z) + I_0(z^2, P(1, y, z)) + I_0(b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, \\ P(1, y, z)) \\ = 5 + 8 + I_0(b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z))$$

• Consideramos  $a_{1,1}b_{0,2} \neq 0$ . Obtenemos

$$I_0(b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4(y, z)) \\ = 6, \text{ si } (a_{1,1}y + a_{1,0}z) \nmid b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2.$$

En caso  $b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 = (a_{1,1}y + a_{1,0}z)F_1(y, z)$ , donde  $F_1(y, z)$  es un polinomio homogéneo de grado 1, tenemos

$$I_0((a_{1,1}y + a_{1,0}z)F_1, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4) \\ = I_0(a_{1,1}y + a_{1,0}z, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4) + I_0(F_1, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4) \\ = 3 + 3, \text{ si } (a_{1,1}y + a_{1,0}z) \nmid F_1(y, z) \\ = 7, \text{ si } F_1(y, z) = c(a_{1,1}y + a_{1,0}z), c \text{ constante.}$$

- Consideramos  $(a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0)$ ,

$$I_0(b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, P(1, y, z)) = I_0(z, a_{0,4}y^4) + I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4).$$

Evidentemente,  $I_0(z, a_{0,4}y^4) = 4$ . En el último sumando tenemos las siguientes posibilidades:

$$\text{Si } b_{0,1} = 0, I_0(b_{0,0}z, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4(y, z)) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Si } b_{0,1} \neq 0, I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4(y, z) - \frac{a_{1,1}}{b_{0,1}}z^2(b_{0,1}y + b_{0,0}z)) \\ = I_0(b_{0,1}y + b_{0,0}z, (a_{1,0} - \frac{a_{1,1}b_{0,0}}{b_{0,1}})z^3 + P_4(y, z)) \\ = 3, \quad a_{1,0}b_{0,1} - a_{1,1}b_{0,0} \neq 0 \\ = 4, \quad a_{1,0}b_{0,1} - a_{1,1}b_{0,0} = 0, \quad b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z). \end{aligned}$$

- Consideramos  $(a_{1,1} = 0, b_{0,2} \neq 0)$ ,

$$\begin{aligned} I_0(b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) = 6, \quad \text{si } a_{1,0} \neq 0 \\ = 8, \quad \text{si } a_{1,0} = 0, \quad b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 \nmid P_4(y, z). \end{aligned}$$

Por consiguiente, el número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F})$  es

$$\left\{ \begin{array}{l} 19, \quad \text{si } (a_{1,1}b_{0,2} \neq 0, (a_{1,1}y + a_{1,0}z) \nmid b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2) \text{ o} \\ \quad (a_{1,1} = 0, b_{0,2} \neq 0, a_{1,0} \neq 0), \text{ o } (a_{1,1}y + a_{1,0}z) \nmid F_1(y, z) \\ 20, \quad \text{si } (a_{1,1}b_{0,2} \neq 0, (a_{1,1}y + a_{1,0}z) \mid (b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2), \\ \quad \text{o } (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} \neq 0, a_{1,0}b_{0,1} \neq a_{1,1}b_{0,0}) \\ 21, \quad \text{si } (a_{1,1}b_{0,2} \neq 0, b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 = c(a_{1,1}y + a_{1,0}z)^2) \text{ o} \\ \quad (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} = 0) \text{ o } (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} \neq 0, a_{1,0}b_{0,1} = \\ \quad a_{1,1}b_{0,0}, \quad b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z)) \text{ o } (a_{1,1} = 0, b_{0,2} \neq 0, a_{1,0} = 0, \\ \quad b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 \nmid P_4(y, z)). \end{array} \right.$$

Si  $b_{0,2} \neq 0$  y  $a_{1,1} = 0$ , entonces la multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ . Si  $b_{0,2} = 0$ , se cumple  $a_{1,1} \neq 0$  y, también  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ . El 4-jet de  $\left(\begin{smallmatrix} f_{13} \\ g_{13} \end{smallmatrix}\right)$  es  $\left(\begin{smallmatrix} (b_{0,2}-a_{1,1})y^2z^2+(b_{0,1}-a_{1,0})yz^3+b_{0,0}z^4 \\ -a_{1,1}yz^3-a_{1,0}z^4 \end{smallmatrix}\right)$ .

La dimensión del estrato  $S_{13}$  es 12.

Por tanto, en el conjunto abierto de  $S_{13}$  donde  $a_{0,4} \neq 0$  y  $a_{1,1}b_{0,2} \neq 0$ , toda foliación de grado 4 tiene un punto singular con multiplicidad 4 y número de Milnor 21 si  $b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 = c(a_{1,1}y + a_{1,0}z)^2$  o 19 si  $(a_{1,1}y + a_{1,0}z) \nmid (b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2)$ .

### 3.5.4. Estrato 15

$$Z_{15}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,3}xy^3) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,3}y^3z + b_{0,4}y^4 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z} : (a_{1,2}, a_{1,3}, b_{0,3}, b_{0,4}, c_{0,4}) \neq (0, 0, 0, 0, 0) \text{ y } (a_{1,0}, a_{1,1}, b_{0,0}, b_{0,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0)\}.$$

$$Y_{15}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,0}xz^3 + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,3}xy^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,3}y^3z + b_{0,4}y^4 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z} : (a_{1,2}, a_{1,3}, b_{0,3}, b_{0,4}, c_{0,4}) \neq (0, 0, 0, 0, 0) \text{ y } (a_{1,0}, a_{1,1}, b_{0,0}, b_{0,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0)\}.$$

En la carta  $x = 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} f_{15}(y, z) &= Q(1, y, z) - yP(1, y, z) = (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + \\ &\quad (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + b_{0,0}z^4 - yP_4(y, z) \\ g_{15}(y, z) &= R(1, y, z) - zP(1, y, z) = c_{0,4}y^4 - a_{1,0}z^4 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,3}y^3z \\ &\quad - zP_4(y, z), \end{aligned}$$

con las condiciones

$$(a_{1,2}, a_{1,3}, b_{0,3}, b_{0,4}, c_{0,4}) \neq (0, 0, 0, 0, 0) \text{ y } (a_{1,0}, a_{1,1}, b_{0,0}, b_{0,1}, b_{0,2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0).$$

Sea  $\mathcal{X} \in Y_{15}^{ss}$  con singularidades aisladas. El número de intersección de estas curvas es

$$\begin{aligned} I_0(f_{15}, g_{15}) &= I_0(Q_4(y, z) - yP_3(y, z) - yP_4(y, z), c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)) \\ &= 16, \text{ si } (c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z)) \nmid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)). \end{aligned}$$

Si  $(a_{1,2}, a_{1,3}, c_{0,4}) \neq (0, 0, 0)$ , entonces  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ , y si  $(a_{1,2}, a_{1,3}, c_{0,4}) = (0, 0, 0)$  sería  $(b_{0,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)$  y también  $m_p(\mathcal{F}) = 4$ .

El índice de este estrato es  $\beta_{15} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , entonces por (3.11), la dimensión del estrato  $S_{15}$  es 16.

El conjunto de las foliaciones  $\mathcal{F}$  de grado 4 tales que  $(c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z)) \nmid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$ , con un punto singular de multiplicidad 4 y número de Milnor 16 es abierto en  $S_{15}$ .



### 3.5.5. Estrato 16

$$Z_{16}^{ss} = \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial x} + b_{1,0}xz^3 \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{1,0} \neq 0\}.$$

$$Y_{16}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{1,0} \neq 0\}.$$

Si un campo vectorial

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} xz^2(a_{1,1}y + a_{1,0}z) + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4 \\ b_{1,0}xz^3 + z^2(b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2) \\ 0 \end{pmatrix} \in Y_{16}^{ss}.$$

entonces  $a_{0,4} \neq 0$  y  $b_{1,0} \neq 0$ . En la carta  $x = 1$  estos campos vectoriales  $\mathcal{X}$  tienen la forma  $(f_{16}, g_{16})$  donde

$$f_{16}(y, z) = b_{1,0}z^3 + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{16}(y, z) = -a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5$$

con las condiciones  $a_{0,4} \neq 0$  y  $b_{1,0} \neq 0$ .

Calculamos el número de intersección  $I_0(f_{16}, g_{16})$  en  $(0, 0)$ . En este estrato, escribimos  $P_1(y, z) = a_{1,1}y + a_{1,0}z$ ,  $Q_2(y, z) = b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2$  y  $P_4(y, z)$  según (3.14). Entonces,

$$\begin{aligned} I_0(f_{16}, g_{16}) &= I_0(f_{16}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) \\ &= I_0(a_{0,4}y^5, z) + I_0(b_{1,0}z^3 + z^2Q_2, z^2P_1 + P_4) \\ &= 5 + I_0(z^2, z^2P_1 + P_4) + I_0(b_{1,0}z + Q_2, z^2P_1 + P_4) \\ &= 13 + I_0(b_{1,0}z + Q_2, z^2P_1 + P_4 - \frac{zP_1}{b_{1,0}}(b_{1,0}z + Q_2)) \\ &= 13 + I_0(b_{1,0}z + Q_2, a_{0,4}y^4 + z(a_{0,3}y^3 + a_{0,2}y^2z + a_{0,1}yz^2 + a_{0,0}z^3) \\ &\quad - \frac{z}{b_{1,0}}P_1Q_2) \\ &= 17. \end{aligned}$$

El punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  tiene multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  por que  $b_{1,0} \neq 0$ . El 3-jet de  $\begin{pmatrix} f_{16} \\ g_{16} \end{pmatrix}$  es linealmente equivalente a  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , pues podemos

suponer  $b_{1,0} = 1$ . La recta  $z = 0$  es invariante para  $\mathcal{X}$ .

Por otro lado, supongamos que un campo vectorial  $\mathcal{X}$  define una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$  que tiene punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  con multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  y número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F}) = 17$ , 3-jet linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$  y recta invariante  $z = 0$ .

Sea  $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_4$ . Ya que  $z = 0$  es una recta invariante para  $\mathcal{X}$ , por la definición (2.5), existe un polinomio  $H(x, y, z)$  en  $\mathbb{C}[x, y, z]$  tal que :

$$R(x, y, z) = zH(x, y, z).$$

Considerando la definición (3.2),

$$R(x, y, z) = c_{0,4}y^4 + c_{1,3}xy^3 + c_{2,2}x^2y^2 + c_{3,1}x^3y + c_{4,0}x^4,$$

inferimos que  $R(x, y, z) = 0$ .

El campo  $\mathcal{X}$  en la carta  $x = 1$  es

$$\begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ -zP(1, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4 \\ -zP_2 - zP_3 - zP_4 \end{pmatrix}$$

donde  $P_k = P_k(y, z)$ ,  $Q_k = Q_k(y, z)$  son polinomios homogéneos de grados  $k = 2, 3, 4$ , respectivamente. Como el 3-jet de  $\mathcal{X}$  es linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$ , deducimos que  $Q_3(y, z) = yP_2(y, z) + z^3$ ,  $zP_2(y, z) = 0$ . Así,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x^2P_2(y, z) + xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ xyP_2(y, z) + xz^3 + Q_4(y, z) \\ xzP_2(y, z) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ xz^3 + Q_4(y, z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El número de Milnor del punto singular, por (3.13),

$$\mu_p(\mathcal{F}) = I_0(z^3 + (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)) - yP_4(y, z), z) + I_0(z^3 + Q_4(y, z), P_3(y, z) + P_4(y, z))$$

es 17 si y sólo

- $I_0(z^3 + (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)) - yP_4(y, z), z) = 5$ ,

que sucede si y solo si  $a_{0,4} \neq 0$  y  $z \mid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$  y

- $I_0(z^3 + Q_4(y, z), P_3(y, z) + P_4(y, z)) = 12$ , que se cumple si y solo si  $z \mid Q_4(y, z)$ .

$z \mid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$  significa

$$Q_4(y, z) - yP_3(y, z) = (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zH_3(y, z), \quad b_{0,4} = a_{1,3},$$

donde  $H_3$  es un polinomio homogéneo de grado 3.

Se presentan las posibilidades:  $a_{1,3} \neq 0$  y  $a_{1,3} = 0$ .

En el caso  $a_{1,3} \neq 0$  deducimos que  $Q_4(y, z) = yP_3(y, z) + zH_3(y, z)$ ; posibilidad que descartamos pues  $z \mid Q_4(y, z)$ . En el caso  $a_{1,3} = 0$ , obtenemos  $Q_4(y, z) = zG_3(y, z)$ ,  $P_3(y, z) = zF_2(y, z)$ ;  $G_k, F_k$  polinomios homogéneos de grados  $k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I_0(z^3 + Q_4(y, z), P_3(y, z) + P_4(y, z)) &= I_0(z^3 + zG_3(y, z), zF_2(y, z) + P_4(y, z)) \\ &= I_0(z, zF_2(y, z) + P_4(y, z)) + I_0(z^2 + G_3(y, z), zF_2(y, z) + P_4(y, z)) \end{aligned}$$

con

$$I_0(z, zF_2(y, z) + P_4(y, z)) = 4$$

y

$$I_0(z^2 + G_3(y, z), zF_2(y, z) + P_4(y, z)) = 8$$

que se verifica si y solo si  $G_3(y, z) = zG_2(y, z)$ ,  $G_2$  polinomio homogéneo de grado 2,

$$\begin{aligned} I_0(z^2 + zG_2(y, z), zF_2(y, z) + P_4(y, z)) \\ &= I_0(z, zF_2(y, z) + P_4(y, z)) + I_0(z + G_2(y, z), zF_2(y, z) + P_4(y, z)) \\ &= 4 + I_0(z + G_2(y, z), P_4(y, z) - F_2(y, z)G_2(y, z)) = 8 \end{aligned}$$

el cual se cumple si y solo si  $F_2(y, z) = zF_1(y, z)$ , donde  $F_1$  es un polinomio homogéneo de grado 1.

En conclusión,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} xz^2F_1(y, z) + P_4(y, z) \\ xz^3 + z^2G_2(y, z) \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{16}.$$

**Observaciones.** Hacemos un análisis del número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F})$  cuando  $a_{0,4} = 0$  o  $z \nmid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$  o  $z \nmid Q_4(y, z)$ .

Denotamos por  $F_k, G_k, H_k \in \mathbb{C}[y, z]$  los polinomios homogéneos de grados  $k$ .

Se cumple

$$I_0(z^3 + (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)) - yP_4(y, z), z) = 4, \text{ si } z \nmid (Q_4 - yP_3) \quad (1)$$

$$= 5, \text{ si } z \mid (Q_4 - yP_3), a_{0,4} \neq 0 \quad (2)$$

$$= \infty, \text{ si } z \mid (Q_4 - yP_3), a_{0,4} = 0. \quad (3)$$

Si  $z \mid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} = 0$ ,  $z \mid Q_4$ , entonces  $\mu_p(\mathcal{F})$  sería infinito.

Si  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} \neq 0$ ,  $z \nmid Q_4$  tenemos  $b_{0,4} \neq a_{1,3}$ ,  $b_{0,4} \neq 0$ ,

$$I_0(z^3 + Q_4, P_3 + P_4) = 9, \text{ si } b_{0,4} \neq a_{1,3}, b_{0,4}a_{1,3} \neq 0$$

$$\begin{aligned} I_0(z^3 + Q_4, zF_2 + P_4 - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}(z^3 + Q_4)) &= I_0(z^3 + Q_4, z) + I_0(z^3 + Q_4, F_2 - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}z^2) \\ &\quad + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,3})y^3 + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,2})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,1})yz^2 \\ &\quad + (a_{0,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,0})z^3 \\ &= 10, \text{ si } b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} = 0, z \nmid F_2 \\ &= 4 + I_0(z^3 + Q_4, z) + I_0(z^3 + Q_4, F_1 - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}z + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,2})y^2) \\ &\quad + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,1})yz + (a_{0,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,0})z^2 \\ &= 12, \text{ si } b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} = a_{1,2} = 0, z \mid F_1, \end{aligned}$$

por consiguiente el número de Milnor del punto singular, considerando (1), podría ser 13 o 14 o 16.

Si  $z \nmid Q_4$ ,  $a_{0,4} = 0$ ,  $z \nmid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$ , ocurriría

$$\begin{aligned} I_0(z^3 + Q_4, P_3 + zF_3) &= 9, \text{ si } b_{0,4}a_{1,3} \neq 0 \\ I_0(z^3 + Q_4, zF_2 + zF_3) &= I_0(z^3 + Q_4, z) + I_0(z^3 + Q_4, F_2 + F_3) \\ &= 10, \text{ si } b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} = 0, z \nmid F_2, \end{aligned}$$

así que  $\mu_p(\mathcal{F})$  sería 13 o 14, respectivamente.

Si  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} \neq 0$ ,  $z \mid Q_4$  tendríamos  $b_{0,4} = 0$ ,  $a_{1,3} \neq 0$ ,

$$I_0(z^3 + zG_3, P_3 + P_4) = I_0(z, P_3 + P_4) + I_0(z^2 + G_3, P_3 + P_4) = 9$$

y teniendo en cuenta (1),  $\mu_p(\mathcal{F}) = 13$ .

Si  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} = 0$ ,  $z \mid Q_4$ , sucedería

$$I_0(z^3 + zG_3, P_3 + zF_3) = I_0(z, P_3 + zF_3) + I_0(z^2 + G_3, P_3 + zF_3) = 9$$

y  $\mu_p(\mathcal{F}) = 13$ .

Si  $z \mid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z))$ ,  $z \nmid Q_4$ ,  $a_{0,4} \neq 0$ , es decir  $b_{0,4} = a_{1,3} \neq 0$ , implicaría  $I_0(z^3 + Q_4, P_3 + P_4) = 9$  y usando (2) tenemos  $\mu_p(\mathcal{F}) = 14$ .

Si  $z \mid (Q_4 - yP_3)$  y  $a_{0,4} = 0$ ,  $z \nmid Q_4$  tendríamos por (3) que  $\mu_p(\mathcal{F}) = 14$  no es finito.

La dimensión del estrato  $S_{16}$  es 13.

**Proposición 3.7.** Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$ .  $\mathcal{F} \in S_{16}$  si y sólo si tiene un punto singular con multiplicidad 3, número de Milnor 17, 3-jet linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$  y recta invariante  $z = 0$ . Este estrato tiene dimensión 13.

### 3.5.6. Estrato 18

$$Z_{18}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,2}xy^2z \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial y} : b_{1,0} \neq 0, (a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{18}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : b_{1,0} \neq 0, (a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0)\}.$$

Si  $a_{0,4} = 0$ ,  $z = 0$  sería una recta de singularidades, así que suponemos  $a_{0,4} \neq 0$ .

Las componentes de  $\mathcal{X} \in Y_{18}^{ss}$  en la carta  $x = 1$  son

$$f_{18}(y, z) = b_{1,0}z^3 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{18}(y, z) = -a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5$$

con las condiciones  $a_{0,4} \neq 0$ ,  $b_{1,0} \neq 0$  y  $(a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos el número de intersección de  $f_{18}$  y  $g_{18}$  en  $(0, 0)$ , (usando la notación (3.14))

$$I_0(f_{18}, g_{18}) = I_0(f_{18}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z))$$

$$= 5 + I_0(b_{1,0}z^3 + zQ_3(y, z), a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z))$$

$$= 9 + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)).$$

En el cálculo del último sumando consideramos las siguientes posibilidades:

- $a_{1,2}b_{0,3} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,2}z^2 + Q_3(y, z), a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z) - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}y(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z))) \\
&= I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), a_{1,2}y^2z + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0})yz^2 + a_{1,0}z^3 + \\
&\quad (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3z + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z^2 + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^3 + a_{0,0}z^4) \\
&= I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, z) + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), \\
&\quad a_{1,2}y^2 + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0})yz + a_{1,0}z^2 + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3 + \\
&\quad (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^2 + a_{0,0}z^3) \\
&= 3 + 4.
\end{aligned}$$

- $(a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0)$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), z^2(a_{1,1}y + a_{1,0}z) + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + \\
&= I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, (a_{0,4} - \frac{a_{1,1}b_{0,3}}{b_{1,0}})y^4 + \\
&\quad a_{0,0}z^4 - \frac{a_{1,1}y + a_{1,0}z}{b_{1,0}}(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z))) \\
&= I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, (a_{0,4} - \frac{a_{1,1}b_{0,3}}{b_{1,0}})y^4 + \\
&\quad (a_{0,3} - \frac{a_{1,1}b_{0,2} + a_{1,0}b_{0,3}}{b_{1,0}})y^3z + (a_{0,2} - \frac{a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}}{b_{1,0}})y^2z^2 + \\
&\quad (a_{0,1} - \frac{a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}}{b_{1,0}})yz^3 + (a_{0,0} - \frac{a_{1,0}b_{0,0}}{b_{1,0}})z^4) \\
&= 8, \text{ si } a'_4 \neq 0 \\
&= 9, \text{ si } a'_4 = 0, a'_3 \neq 0 \\
&= 10, \text{ si } a'_4 = 0, a'_3 = 0, a'_2 \neq 0 \\
&= 11, \text{ si } a'_4 = 0, a'_3 = 0, a'_2 = 0, a'_1 \neq 0 \\
&= 12, \text{ si } a'_4 = 0, a'_3 = 0, a'_2 = 0, a'_1 = 0, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0},
\end{aligned}$$

donde  $a'_4 = a_{0,4}b_{1,0} - a_{1,1}b_{0,3}$  y  $a'_j = a_{0,j}b_{1,0} - (a_{1,1}b_{0,j-1} + a_{1,0}b_{0,j})$ ,  $1 \leq j \leq 3$ .

- $(a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0)$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, P(1, y, z)) \\
&= I_0(z, P(1, y, z)) + I(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, P(1, y, z)) \\
&= 4 + I(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, z(a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2) + P_4(y, z)),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, z(a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2) + P_4(y, z)) \\
& \quad - \frac{(a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2)}{b_{1,0}}(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2)) \\
& = I_0(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, (a_{0,4} - \frac{a_{1,2}b_{0,2}}{b_{1,0}})y^4 + \\
& \quad (a_{0,3} - \frac{a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}}{b_{1,0}})y^3z + (a_{0,2} - \frac{a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}}{b_{1,0}})y^2z^2 \\
& \quad + (a_{0,1} - \frac{a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}}{b_{1,0}})yz^3 + (a_{0,0} - \frac{a_{1,0}b_{0,0}}{b_{1,0}})z^4) \\
& = 4, \text{ si } a_{0,4}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,2} \\
& = 5, \text{ si } a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, a_{0,3}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0 \\
& = 6, \text{ si } a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, \\
& \quad a_{0,2}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2} \\
& = 7, \text{ si } a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, \\
& \quad a_{0,2}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, a_{0,1}b_{1,0} \neq a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1} \\
& = 8, \text{ si } a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, a_{0,2}b_{1,0} \\
& \quad = a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, a_{0,1}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}, \\
& \quad a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}.
\end{aligned}$$

De los cálculos anteriores, concluimos que el número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F})$  es

$$\left\{ \begin{array}{l}
16, \text{ si } a_{1,2}b_{0,3} \neq 0 \\
17, \text{ si } (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, a'_4 \neq 0) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, a_{0,4}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,2}) \\
18, \text{ si } (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, a'_4 = 0, a'_3 \neq 0) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, a_{0,4}b_{1,0} = \\
\quad a_{1,2}b_{0,2}, a_{0,3}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0) \\
19, \text{ si } (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, [\dots]_a, a'_2 \neq 0) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, [\dots]_b, \\
\quad a_{0,2}b_{1,0} \neq a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}) \\
20, \text{ si } (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, [\dots]_a, a'_2 = 0, a'_1 \neq 0) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, [\dots]_b, \\
\quad a_{0,2}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, a_{0,1}b_{1,0} \neq a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}) \\
21, \text{ si } (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, [\dots]_a, a'_2 = 0, a'_1 = 0, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}) \\
\quad \text{o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, [\dots]_b, a_{0,2}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, \\
\quad a_{0,1}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}).
\end{array} \right.$$

donde  $[\dots]_a$  es  $a'_4 = 0, a'_3 = 0$  y  $[\dots]_b$  es  $a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, b_{0,2} \neq 0$ .

La multiplicidad del punto singular es  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  por que  $b_{10} \neq 0$ . El 3-jet

de  $\begin{pmatrix} f_{18} \\ g_{18} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , suponiendo  $b_{1,0} = 1$ . La dimensión de  $S_{18}$  es 15.

En el conjunto abierto de  $S_{18}$ , donde  $b_{1,0}a_{0,4} \neq 0$  y  $a_{1,2}b_{0,3} \neq 0$ , toda foliación tiene un punto singular con multiplicidad 3 y número de Milnor 16.

### 3.5.7. Estrato 19

$$Z_{19}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{0,4}y^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{0,3}y^3z) \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0 \text{ y} \\ (a_{2,0}, b_{1,1}, a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0, 0, 0)\}.$$

$$Y_{19}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\ a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + \\ b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0 \text{ y} (a_{2,0}, b_{1,1}, a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0, 0, 0)\}.$$

En la carta  $x = 1$ , las componentes del correspondiente generador local de una foliación  $\mathcal{F}$  de  $Y_{19}^{ss}$  son

$$f_{19}(y, z) = (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + \\ (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4 \\ g_{19}(y, z) = -a_{2,0}z^3 - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 \\ - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5$$

con las condiciones  $a_{0,4} \neq 0$  y  $(a_{2,0}, b_{1,1}, a_{1,2}, b_{0,3}) \neq (0, 0, 0, 0)$ .

Calculamos el número de intersección  $I_0(f_{19}(y, z), g_{19}(y, z))$ ,

$$I_0(f_{19}, g_{19}) = I_0((f_{19}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z))) \\ = 5 + I_0(b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4, \\ P(1, y, z)) \\ = 5 + I_0(z, P(1, y, z)) + I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), P(1, y, z)) \\ = 9 + I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), P(1, y, z)).$$

Hallamos el número de intersección en el último sumando.



- Supongamos  $a_{2,0}b_{1,1}a_{1,2}b_{0,3} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), P(1, y, z) - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}y(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z))) \\
&= I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, a_{2,0}z^2 + \\
&\quad (a_{1,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,1})y^2z + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0})yz^2 + a_{1,0}z^3 + \\
&\quad (a_{0,4} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,3})y^4 + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3z + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z^2 + \\
&\quad (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^3 + a_{0,0}z^4) \\
&= I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, z) + I_0(b_{1,1}yz + \\
&\quad b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), a_{2,0}z + Ay^2 + Byz + a_{1,0}z^2 + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3 + \\
&\quad (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^2 + a_{0,0}z^3) \\
&= 3 + I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)z + Q_3(y, z) - \frac{b_{1,1}y + b_{1,0}z}{a_{2,0}}(a_{2,0}z + Ay^2 + Byz + \\
&\quad a_{1,0}z^2 + M), a_{2,0}z + Ay^2 + Byz + a_{1,0}z^2 + M) \\
&= 3 + I_0((b_{0,3} - \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}A)y^3 + (b_{0,2} - \frac{b_{1,0}A + b_{1,1}B}{a_{2,0}})y^2z + \\
&\quad (b_{0,1} - \frac{b_{1,0}B + b_{1,1}a_{1,0}}{a_{2,0}})yz^2 + (b_{0,0} - \frac{b_{1,0}a_{1,0}}{a_{2,0}})z^3 + M'(y, z), a_{2,0}z + \\
&\quad Ay^2 + Byz + M) \\
&= 6, \text{ si } (b_{0,3})^2a_{2,0} \neq b_{1,1}(a_{1,2}b_{0,3} - a_{0,4}b_{1,1}),
\end{aligned}$$

donde  $A = a_{1,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,1}$ ,  $B = a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0}$ ,  $M(y, z) = (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3 + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^2 + a_{0,0}z^3$ ,  $M'(y, z) = -\frac{b_{1,1}y + b_{1,0}z}{a_{2,0}}M(y, z)$  es un polinomio homogéneo de grado 4.

En el caso  $a_{2,0}b_{1,1}b_{0,3} \neq 0$ ,  $a_{1,2} = 0$ , realizando cálculos similares y con  $A' = -\frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,1}$  en lugar de  $A$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), a_{2,0}z^2 + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z) - \\
&\quad \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}y(b_{1,1}yz + b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z))) \\
&= 6, \text{ si } (b_{0,3})^2a_{2,0} + a_{0,4}(b_{1,1})^2 \neq 0,
\end{aligned}$$

- Supongamos  $a_{2,0} \neq 0$ . En el caso  $b_{1,1} \neq 0$ ,  $b_{0,3} = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
& I_0(z, P(1, y, z)) + I_0(b_{1,1}y + b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, a_{2,0}z^2 + a_{1,2}y^2z + \\
& \quad + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
& = 6,
\end{aligned}$$

si  $b_{1,1} = 0$ ,  $b_{0,3} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3 - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}} P(1, y, z), P(1, y, z)) \\
& = I(b_{0,3}y^3 + (b_{0,2} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}} a_{1,2})y^2z + (b_{0,1} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}} a_{1,1})yz^2 + (b_{0,0} - \\
& \quad \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}} a_{1,0})z^3 - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}} P_4(y, z), a_{2,0}z^2 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + \\
& \quad P_4(y, z)) \\
& = 6,
\end{aligned}$$

y si  $b_{1,1} = b_{0,3} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) = I_0(b_{1,0}z^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4, a_{2,0}z^2 + a_{1,2}y^2z + \\
& \quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
& = I_0(z^2, a_{0,4}y^4) + I_0(b_{1,0}z + b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, a_{2,0}z^2 + a_{1,2}y^2z + \\
& \quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
& = 8 + 4, \text{ si } b_{1,0} = 0 \text{ y } b_{0,2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Los números de intersección obtenidos son independientes de  $a_{1,2}$ .

- Supongamos  $a_{2,0} = 0$ . Denotamos

$$\begin{aligned}
& L(y, z) = b_{1,1}y + b_{1,0}z \\
& L_1(y, z)L_2(y, z) = a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2 \\
& L_1(y, z) = a_{1,1}y + a_{1,0}z \\
& Q_2(y, z) = b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2,
\end{aligned}$$

Consideramos varios casos. Si  $a_{1,2}b_{1,1}b_{0,3} \neq 0$ , entonces

$$I_0(zL + Q_3, P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3) = 8, \text{ si } zL \nmid P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3,$$

en caso contrario,  $P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3 = (zL)M_1M_2$ , donde  $M_1(y, z)$ ,  $M_2(y, z)$  son polinomios homogéneos de grado 1, y

$$\begin{aligned}
& I_0(zL + Q_3, P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3) = I_0(zL + Q_3, (zL)M_1M_2) \\
& = I_0(zL + Q_3, zL) + I_0(zL + Q_3, M_1M_2) \\
& = 10, \text{ si } zL \nmid M_1M_2,
\end{aligned}$$

en el caso  $a_{1,2} = 0, b_{1,1} \neq 0, b_{0,3} \neq 0$ , hallamos

$$\begin{aligned}
& I_0(Lz + Q_3(y, z), (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4(y, z)) \\
&= I_0(Lz + Q_3(y, z), P_4(y, z) - \frac{L_1}{L}zQ_3(y, z)) \\
&= 8, \text{ si } Lz \nmid P_4(y, z) - \frac{L_1}{L}zQ_3(y, z) \\
&= I_0(Lz + Q_3(y, z), LzM_1M_2), \text{ si } Lz \mid P_4(y, z) - \frac{L_1}{L}zQ_3(y, z) \\
&= 10, \text{ si } zL \mid P_4(y, z) - \frac{L_1}{L}zQ_3(y, z), zL \nmid M_1M_2,
\end{aligned}$$

si  $a_{1,2} = 0, b_{1,1} \neq 0, b_{0,3} = 0$ , sucede

$$\begin{aligned}
& I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) = I_0(b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4, \\
&\quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
&= I_0(z^2, a_{04}y^4) + I_0(L + Q_2, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4 - \frac{L_1}{L}z^2(L + Q_2)) \\
&= 8 + I_0(L + Q_2, P_4 - \frac{L_1}{L}z^2(L + Q_2)) \\
&= 12, \text{ si } L \nmid (P_4 - \frac{L_1}{L}z^2Q_2) \\
&= 8 + I_0(L + Q_2, LM_1M_2M_3), \text{ si } L \mid (P_4 - \frac{L_1}{L}z^2Q_2) \\
&= 13, \text{ si } L \mid (P_4 - \frac{L_1}{L}z^2Q_2), L \nmid M_1M_2M_3,
\end{aligned}$$

$M_3$ , polinomio homogéneo de grado 1,

si  $a_{1,2} = 0, b_{1,1} = 0, b_{0,3} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) = I_0(b_{1,0}z^3 + zQ_3(y, z), a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)), \\
&= I_0(z, a_{04}y^4) + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, (a_{1,1}y + a_{1,0}z)z^2 + P_4) \\
&= 4 + 6, \text{ si } b_{1,0} = a_{1,1} = 0 \\
&= 4 + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, P_4 - \frac{L_1}{b_{1,0}}Q_3), \text{ si } b_{1,0} \neq 0 \\
&= 12, \text{ si } b_{1,0}z^2 \nmid (P_4 - \frac{L_1}{b_{1,0}}Q_3),
\end{aligned}$$

si  $a_{1,2} \neq 0, b_{1,1} = 0, b_{0,3} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) = I_0(b_{1,0}z^3 + zQ_3, (a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2)z + P_4) \\
&= I_0(z, a_{04}y^4) + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, (a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2)z + P_4 - \\
&\quad \frac{a_{0,4}y}{b_{0,3}}(b_{1,0}z^2 + Q_3)) \\
&= 4 + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, a_{1,2}y^2z + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0})yz^2 + a_{1,0}z^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3z + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z^2 + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^3 + a_{0,0}z^4 \\
&= 4 + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, z) + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3, a_{1,2}y^2 + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{1,0})yz + \\
& \quad a_{1,0}z^2 + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,2})y^3 + (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,1})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,3}}b_{0,0})yz^2 + \\
& \quad a_{0,0}z^3) \\
&= 11, \text{ si } b_{1,0} \neq 0.
\end{aligned}$$

y en el caso  $a_{1,2} \neq 0, b_{1,1} = 0, b_{0,3} = 0,$

$$\begin{aligned}
I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0(b_{1,0}z^3 + z^2Q_2(y, z), L_1L_2z + P_4) \\
&= I_0(z^2, a_{04}y^4) + I_0(b_{1,0}z + Q_2, L_1L_2z + P_4) \\
&= 8 + 6, \text{ si } b_{1,0} = 0, Q_2 \nmid L_1L_2z \\
&= 8 + I_0(Q_2, Q_2M_1 + P_4) = 16, \text{ si } b_{1,0} = 0, b_{0,2} \neq 0, Q_2 \mid L_1L_2z, Q_2 \nmid P_4 \\
&= 8 + I_0(b_{1,0}z + Q_2, P_4 - \frac{L_1L_2Q_2}{b_{1,0}}), \text{ si } b_{1,0} \neq 0 \\
&= 8 + 4, \text{ si } b_{1,0} \neq 0, z \nmid P_4 - \frac{L_1L_2Q_2}{b_{1,0}} \\
&= 8 + I_0(b_{1,0}z + Q_2, zM_1M_2M_3) \\
&= 13, \text{ si } b_{1,0} \neq 0, b_{0,2} \neq 0, z \mid P_4 - \frac{L_1L_2Q_2}{b_{1,0}}, z \nmid M_1M_2M_3.
\end{aligned}$$

En conclusión, el número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F})$  es

- $$\left\{ \begin{array}{l}
15, \text{ si } (a_{2,0}b_{1,1}a_{1,2}b_{0,3} \neq 0, (b_{0,3})^2a_{2,0} \neq b_{1,1}(a_{1,2}b_{0,3} - a_{0,4}b_{1,1}) \circ (a_{2,0}b_{1,1}b_{0,3} \neq 0, \\
\quad a_{1,2} = 0, (b_{0,3})^2a_{2,0} + a_{0,4}(b_{1,1})^2 \neq 0) \circ (a_{2,0} \neq 0, (b_{1,1}, b_{0,3}) \neq (0, 0)) \circ \\
\quad (a_{2,0} = a_{1,2} = b_{1,1} = 0, b_{0,3} \neq 0, b_{1,0} = a_{1,1} = 0) \\
16, \text{ si } (a_{2,0} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,1} = 0, b_{0,3} \neq 0, b_{1,0} \neq 0) \\
17, \text{ si } (a_{2,0} \neq 0, b_{1,1} = b_{0,3} = 0, b_{1,0} = 0, b_{0,2} \neq 0) \circ (a_{2,0} = 0, b_{1,1}a_{1,2}b_{0,3} \neq 0, \\
\quad zL \nmid P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3) \circ (a_{2,0} = a_{1,2} = 0, b_{1,1}b_{0,3} \neq 0, Lz \nmid P_4 - \frac{L_1}{L}zQ_3) \\
\quad \circ (a_{2,0} = a_{1,2} = b_{0,3} = 0, b_{1,1} \neq 0, L \nmid P_4 - \frac{L_1}{L}z^2Q_2) \circ (a_{2,0} = a_{1,2} = \\
\quad b_{1,1} = 0, b_{0,3} \neq 0, b_{1,0} \neq 0, b_{1,0}z^2 \nmid P_4 - \frac{L_1}{b_{1,0}}Q_3), \circ (a_{2,0} = b_{1,1} = b_{0,3} = 0, \\
\quad a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} \neq 0, a \nmid P_4 - \frac{L_1L_2Q_2}{b_{1,0}}) \\
18, \text{ si } (a_{2,0} = a_{1,2} = b_{0,3} = 0, b_{1,1} \neq 0, L \mid P_4 - \frac{L_1}{L}z^2Q_2, L \nmid M_1M_2M_3) \circ \\
\quad (a_{2,0} = b_{1,1} = b_{0,3} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} \neq 0, z \mid P_4 - \frac{L_1L_2Q_2}{b_{1,0}}, z \nmid M_1M_2M_3) \\
19, \text{ si } (a_{2,0} = 0, b_{1,1}a_{1,2}b_{0,3} \neq 0, P_4 - \frac{L_1L_2}{L}Q_3 = zLM_1M_2, zL \nmid M_1M_2) \\
\quad \circ (a_{2,0} = a_{1,2} = 0, b_{1,1}b_{0,3} \neq 0, Lz \nmid P_4 - \frac{L_1}{L}zQ_3, zL \nmid M_1M_2) \circ (a_{2,0} = \\
\quad b_{1,1} = b_{0,3} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} = 0, Q_2 \nmid L_1L_2z) \\
21, \text{ si } (a_{2,0} = b_{1,1} = b_{0,3} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} = 0, Q_2 \mid L_1L_2z, Q_2 \nmid P_4),
\end{array} \right.$$

donde  $L(y, z) = b_{1,1}y + b_{1,0}z$ ,  $L_1(y, z)L_2(y, z) = a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2$ ,  $M_1(y, z)$ ,  $M_2(y, z), M_3(y, z)$  son polinomios homogéneos de grado 1.

La multiplicidad es  $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , si  $(a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)$ , y el 3-jet de  $\begin{pmatrix} f_{19} \\ g_{19} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} (b_{1,1}-a_{2,0})yz^2+b_{1,0}z^3 \\ -a_{2,0}z^3 \end{pmatrix}$ . Si  $a_{2,0} = b_{1,1} = 0$ , entonces la multiplicidad del punto singular es 4 y el 3-jet es trivial. La dimensión del estrato  $S_{19}$  es 17.

En el conjunto abierto de  $S_{19}$  donde  $a_{0,4} \neq 0$  y  $a_{2,0}b_{1,1}a_{1,2}b_{0,3} \neq 0$  toda foliación de grado 4 tiene un punto singular con multiplicidad 3 y número de Milnor 15.

### 3.5.8. Estrato 21

$$Z_{21}^{ss} = \mathbb{P}\{a_{1,3}xy^3 \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4) \frac{\partial}{\partial y} : b_{1,0} \neq 0, (a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{21}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : b_{1,0} \neq 0, (a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)\}.$$

Las componentes de los campos que definen foliaciones en  $Y_{21}^{ss}$  en la carta afín  $x = 1$  son

$$f_{21}(y, z) = b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{21}(y, z) = -a_{1,3}y^3z - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

con las condiciones  $b_{1,0} \neq 0$  y  $(a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos el número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F})$ ,

$$I_0(f_{21}, g_{21}) = I_0((b_{0,4} - a_{1,3})y^4 - a_{0,4}y^5, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)).$$

Es evidente que,  $I_0((b_{0,4} - a_{1,3})y^4 - a_{0,4}y^5, -z)$  es 4 cuando  $b_{0,4} \neq a_{1,3}$  y 5 cuando  $b_{0,4} = a_{1,3}$  y  $a_{0,4} \neq 0$ .

Supongamos  $a_{1,3}b_{0,4} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z), a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + \\ &\quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Supongamos  $(a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = 0)$ ,

$$\begin{aligned} I_0(Q((1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0(z, a_{1,3}y^3) + I_0(b_{1,0}z^2 + Q_3(y, z), a_{1,3}y^3 + \\ &\quad a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Supongamos  $(a_{1,3} = 0, b_{0,4} \neq 0)$ ,

$$\begin{aligned} I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z), a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + \\ &\quad P_4(y, z) - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z))) \\ &= I(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z), z) + I(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z), a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + \\ &\quad (a_{1,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,0})z^3 + (b_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}a_{0,3})y^3 + (b_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}a_{0,2})y^2z + \\ &\quad (b_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}a_{0,1})yz^2 + (b_{0,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}a_{0,0})z^3) \\ &= 10, \text{ si } a_{1,2} \neq 0. \end{aligned}$$

Los elementos de  $Y_{21}^{ss}$  tienen número de Milnor

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} 13, & \text{si } (a_{1,3}b_{0,4} \neq 0, b_{0,4} \neq a_{1,3}) \text{ o } (a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = 0) \\ 14, & \text{si } (a_{1,3}b_{0,4} \neq 0, b_{0,4} = a_{1,3}, a_{0,4} \neq 0) \text{ o } (a_{1,3} = 0, b_{0,4} \neq 0, a_{1,2} \neq 0). \end{cases}$$

Como  $b_{1,0} \neq 0$ , el punto singular tiene multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 3$ . El 3-jet de  $\begin{pmatrix} f_{21} \\ g_{21} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ya que podemos asumir  $b_{1,0} = 1$ .

El estrato  $S_{21}$  tiene dimensión 17.

En el conjunto abierto de  $S_{21}$  tal que  $a_{1,3}b_{0,4} \neq 0$  y  $b_{0,4} \neq a_{1,3}$ , las foliaciones de grado 4 tienen un punto singular  $p$  de multiplicidad 3, número de Milnor 13, 3-jet linealmente equivalente a  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$  y recta invariante  $z = 0$ .

### 3.5.9. Estrato 22

$$Z_{22}^{ss} = \mathbb{P}\{b_{1,0}xz^3 \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z} : b_{1,0} \neq 0, c_{0,4} \neq 0\}.$$

$$Y_{22}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial z} : b_{1,0} \neq 0, c_{0,4} \neq 0\}.$$

Las componentes de un campo vectorial  $\mathcal{X} \in Y_{22}^{ss}$  en la carta afín  $x = 1$  son

$$f_{22}(y, z) = Q(1, y, z) - yP(1, y, z) = b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{22}(y, z) = R(1, y, z) - zP(1, y, z) = c_{0,4}y^4 - a_{1,3}y^3z - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

con las condiciones:  $b_{1,0} \neq 0$  y  $c_{0,4} \neq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{F}) &= I_0(f_{22}, g_{22}) \\ &= I_0(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z) - yP_3(y, z) - yP_4(y, z), c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)) \\ &= 12, z \nmid (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)). \end{aligned}$$

De la condición  $b_{1,0} \neq 0$  inferimos que la multiplicidad del punto singular es  $m_p(\mathcal{F}) = 3$ . El 3-jet de  $\begin{pmatrix} f_{22} \\ g_{22} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , suponiendo  $b_{1,0} = 1$ .

Las foliaciones de  $S_{22}$  tienen grado 4, un punto singular  $p$  con multiplicidad 3, número de Milnor 12, 3-jet linealmente equivalente a  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$  y la recta  $z = 0$  no es invariante para  $\mathcal{X}$ .

Ahora, supongamos que una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$  definida por un campo vectorial polinomial  $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$  tiene un punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  con multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  y número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F}) = 12$ , 3-jet linealmente equivalente a  $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , y la recta  $z = 0$  no es invariante para  $\mathcal{X}$ .

Por la definición (3.2),

$$R(x, y, z) = c_{0,4}y^4 + c_{1,3}xy^3 + c_{2,2}x^2y^2 + c_{3,1}x^3y + c_{4,0}x^4.$$

En la carta  $U_0 : x = 1$ ,  $\mathcal{X}|_{U_0}$  tiene componentes

$$\begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ R(1, y, z) - zP(1, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ c_{0,4}y^4 + c_{1,3}y^3 + c_{2,2}y^2 + c_{3,1}y + c_{4,0} - zP(1, y, z) \end{pmatrix}.$$

La multiplicidad del punto singular es 3, así que  $c_{2,2} = 0$ ,  $c_{3,1} = 0$ ,  $c_{4,0} = 0$ . De la condición del 3-jet,

$$\begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ R(1, y, z) - zP(1, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4 \\ (c_{1,3}y^3 - zP_2) + (c_{0,4}y^4 - zP_3) - zP_4 \end{pmatrix},$$

donde  $P_k(y, z)$ ,  $Q_k(y, z)$  son polinomios homogéneos de grado  $k = 2, 3, 4$ , inferimos  $Q_3(y, z) = yP_2(y, z) + z^3$  y  $c_{1,3}y^3 = zP_2(y, z)$ . En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} x^2P_2(y, z) + xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ x(yP_2(y, z) + z^3) + Q_4(y, z) \\ xzP_2(y, z) + c_{0,4}y^4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ xz^3 + Q_4(y, z) \\ c_{0,4}y^4 \end{pmatrix}.$$

El punto singular tiene número de Milnor

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{F}) &= I_0(z^3 + (Q_4(y, z) - yP_3(y, z)) - yP_4(y, z), c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)) \\ &= 12 \end{aligned}$$

si y solo si  $c_{0,4} \neq 0$ , condición que se cumple por que la recta  $z = 0$  no es invariante para  $\mathcal{X}$ . Por tanto,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ xz^3 + Q_4(y, z) \\ c_{0,4}y^4 \end{pmatrix} \in S_{22}.$$

La dimensión del estrato  $S_{22}$  es 18

**Proposición 3.8.** Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$ .  $\mathcal{F} \in S_{22}$  si y sólo si tiene un punto singular con multiplicidad 3, número de Milnor 12, 3-jet linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$ . Este estrato tiene dimensión 18.



### 3.5.10. Estrato 24

$$Z_{24}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{1,3}xy^3 + a_{2,0}x^2z^2)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{0,4}y^4)\frac{\partial}{\partial y} : (a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0), \\ (a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{24}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + \\ a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + \\ b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} : (a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0), (a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)\}.$$

En la carta afín  $U_0 : x = 1$ ,  $\mathcal{X}|_{U_0}$  tiene componentes

$$f_{24}(y, z) = (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + \\ (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - \\ a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4, \\ g_{24}(y, z) = -a_{2,0}z^3 - a_{1,3}y^3z - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 \\ - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5$$

que cumplen  $(a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)$  y  $(a_{1,3}, b_{0,4}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos

$$I_0(f_{24}, g_{24}) = I_0(f_{24}, z) + I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) \\ I_0(f_{24}, z) = I_0((b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + \\ (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - y(a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + \\ a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4), z) \\ = 4, \text{ si } b_{0,4} \neq a_{1,3} \\ = 5, \text{ si } b_{0,4} = a_{1,3} \text{ y } a_{0,4} \neq 0, \text{ (si } a_{0,4} = 0, \mathcal{X} \text{ tiene una curva de} \\ \text{singularidades)}$$

Supongamos  $a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3}b_{0,4} \neq 0$ . Tenemos

$$I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) = I_0(b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z) - \frac{b_{1,1}y + b_{1,0}z}{a_{2,0}}P(1, y, z), \\ a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\ a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z))$$

$$\begin{aligned}
&= I_0\left(\left(b_{0,4} - \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}a_{1,3}\right)y^4 + \left(b_{0,3} - \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}a_{1,2} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,3}\right)y^3z + \right. \\
&\quad \left. + \left(b_{0,2} - \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}a_{1,1} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,2}\right)y^2z^2 + \left(b_{0,1} - \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}a_{1,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,1}\right)yz^3 + \right. \\
&\quad \left. \left(b_{0,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,0}\right)z^4 - \frac{b_{1,1}y + b_{1,0}z}{a_{2,0}}P_4(y, z), a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + \right. \\
&\quad \left. a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)\right) \\
&= 8, \text{ si } b_{0,4} \neq \frac{b_{1,1}}{a_{2,0}}a_{1,3}.
\end{aligned}$$

Supongamos  $a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3} \neq 0$ ,  $b_{0,4} = 0$ ;  $b_{0,3} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0(b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + z^2Q_2(y, z), a_{2,0}z^2 + P_3(y, z) + \\
&\quad P_4(y, z)) \\
&= I_0(z^2, a_{1,3}y^3) + I_0(b_{1,1}y + b_{1,0}z + Q_2(y, z), a_{2,0}z^2 + P_3(y, z) + P_4(y, z)) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Supongamos  $a_{2,0}b_{0,4} \neq 0$ . Si  $b_{1,1} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0(b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z) - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}zP(1, y, z), P(1, y, z)) \\
&= I_0(b_{0,4}y^4 + \left(b_{0,3} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,3}\right)y^3z + \left(b_{0,2} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,2}\right)y^2z^2 + \left(b_{0,1} - \right. \\
&\quad \left. \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,1}\right)yz^3 + \left(b_{0,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,0}\right)z^4 - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}zP_4(y, z), a_{2,0}z^2 + \\
&\quad P_3(y, z) + P_4(y, z)) \\
&= 8, \text{ no depende de } a_{1,3},
\end{aligned}$$

Suponiendo  $a_{2,0}a_{1,3} \neq 0$ ,  $b_{1,1} = b_{0,4} = 0$  y  $a_{0,4} \neq 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
I_0(z, a_{1,3}y^3) &+ I_0(b_{1,0}z^2 + b_{0,3}y^3 + b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3 - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}(a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + \\
&\quad a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)), a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + \\
&\quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
&= 3 + I_0\left(\left(b_{0,3} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,3}\right)y^3 + \left(b_{0,2} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,2}\right)y^2z + \left(b_{0,1} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,1}\right)yz^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(b_{0,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,0}\right)z^3 - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}P_4(y, z), a_{2,0}z^2 + a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + \right. \\
&\quad \left. a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)\right) = 9, \text{ si } b_{0,3} \neq \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,3}.
\end{aligned}$$

Consideremos  $b_{1,1}b_{0,4} \neq 0$ ,  $a_{2,0} = a_{1,3} = 0$ . Hallamos

$$\begin{aligned}
I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2 + Q_4(y, z), a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + \\
&\quad a_{1,0}z^3 + P_4(y, z) - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}(b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + Q_4(y, z))) \\
&= I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2 + Q_4, z) + I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2 + Q_4, (a_{1,2}y^2 + \\
&\quad (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,1})yz + (a_{1,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,0})z^2) + (a_{0,3} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,3})y^3 + \\
&\quad (a_{0,2} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,2})y^2z + (a_{0,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,1})yz^2 + (a_{0,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{0,0})z^3) \\
&= 10, \text{ si } (a_{1,2}y^2 + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,1})yz + (a_{1,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,0})z^2) \nmid \\
&\quad (b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2.
\end{aligned}$$

Consideremos  $a_{2,0} = 0$ . Con la condición  $a_{1,3}b_{1,1}b_{0,4} \neq 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
I_0(Q(1, y, z), P(1, y, z)) &= I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2 + Q_4(y, z), a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + \\
&\quad a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
&= 9, \text{ si } b_{1,0} \neq 0,
\end{aligned}$$

y si  $b_{0,4} = 0$ ,  $a_{1,3}b_{1,1} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
I_0(z, a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2z + a_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) &+ I_0((b_{1,1}y + b_{1,0}z)z + b_{0,3}y^3 + \\
&\quad b_{0,2}y^2z + b_{0,1}yz^2 + b_{0,0}z^3, a_{1,3}y^3 + a_{1,2}y^2za_{1,1}yz^2 + a_{1,0}z^3 + P_4(y, z)) \\
&= 9, \text{ si } b_{1,0} \neq 0.
\end{aligned}$$

En conclusión, el número de Milnor

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} 12, & \text{si } (a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3}b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} \neq b_{0,4}, a_{1,3}b_{1,1} \neq a_{2,0}b_{0,4}) \text{ o } (a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3} \\ & \neq 0, b_{0,4} = 0, b_{0,3} = 0) \text{ o } ((a_{2,0}b_{0,4} \neq 0, b_{1,1} = 0), a_{1,3} \neq b_{0,4}) \\ 13, & \text{si } (a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3}b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} = b_{0,4}, a_{0,4} \neq 0, a_{1,3}b_{1,1} \neq a_{2,0}b_{0,4}) \text{ o} \\ & ((a_{2,0}b_{0,4} \neq 0, b_{1,1} = 0), a_{1,3} = b_{0,4}, a_{0,4} \neq 0) \text{ o} \\ & ((a_{2,0}a_{1,3} \neq 0, b_{1,1} = b_{0,4} = 0) \text{ o } (a_{1,3}b_{1,1} \neq 0, a_{2,0} = b_{0,4} = 0) \text{ o} \\ & (a_{2,0} = 0, a_{1,3}b_{1,1}b_{0,4} \neq 0, a_{1,3} \neq b_{0,4}, b_{1,0} \neq 0) \\ 14, & \text{si } ((a_{2,0} = 0, b_{1,1} \neq 0), a_{1,3} = b_{0,4} \neq 0, a_{0,4}b_{1,0} \neq 0) \text{ o } (b_{1,1}b_{0,4} \neq 0, \\ & a_{2,0} = a_{1,3} = 0, (a_{1,2}y^2 + (a_{1,1} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,1})yz + (a_{1,0} - \frac{a_{0,4}}{b_{0,4}}b_{1,0})z^2) \\ & \nmid (b_{1,1}y + b_{1,0}z)^2). \end{cases}$$

La multiplicidad del punto singular es  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  por que  $(a_{2,0}, b_{1,1}) \neq 0$ . El 3-jet de  $\begin{pmatrix} f_{24} \\ g_{24} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 \\ -a_{2,0}z^3 \end{pmatrix}$ . La dimensión del estrato  $S_{24}$  es 19.

En el conjunto abierto de  $S_{24}$  tal que  $a_{2,0}b_{1,1}a_{1,3}b_{0,4} \neq 0$  las foliaciones tienen grado 4, un punto singular con multiplicidad 3 y número de Milnor 12, recta invariante  $z = 0$ .

### 3.5.11. Estrato 25

En este estrato tenemos

$$Z_{25}^{ss} = \mathbb{P}\{a_{2,0}x^2z^2\frac{\partial}{\partial x} + b_{1,1}xyz^2\frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial z} : c_{0,4} \neq 0, (a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)\}.$$

$$Y_{25}^{ss} = \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,3}xy^3 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,4}y^4 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4)\frac{\partial}{\partial y} + c_{0,4}y^4\frac{\partial}{\partial z} : c_{0,4} \neq 0, (a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)\}.$$

Entonces,

$$f_{25}(y, z) = Q(1, y, z) - yP(1, y, z) = (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4$$

$$g_{25}(y, z) = R(1, y, z) - zP(1, y, z) = -a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - a_{1,3}y^3z - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5.$$

tales que  $c_{0,4} \neq 0$  y  $(a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)$ .

Calculamos el número de intersección de  $f_{25}$  y  $g_{25}$  en  $(0, 0)$ .

$$I_0(f_{25}, g_{25}) = I((b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - yP_4(y, z), -a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)).$$

Supongamos  $a_{2,0}b_{1,1} \neq 0$ . Si  $a_{2,0} = b_{1,1}$ , obtenemos

$$I_0(f_{25}, g_{25}) = I_0(b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - yP_4(y, z) + \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}(-a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)), -a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z))$$

$$= I_0((b_{0,4} - a_{1,3} + \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}c_{0,4})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,3})y^3z +$$

$$\begin{aligned}
& (b_{0,2} - a_{1,1} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,2})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,1})yz^3 + \\
& (b_{0,0} - \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}a_{1,0})z^4 - (y + \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}z)P_4(y, z), -a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) \\
& - zP_4(y, z)) \\
& = 12, \text{ si } b_{0,4} - a_{1,3} + \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}c_{0,4} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ahora, denotamos

$$\begin{aligned}
Q_4(y, z) - yP_3(y, z) &= (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + [(b_{0,3} - a_{1,2})y^3 + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z + \\
& (b_{0,1} - a_{1,0})yz^2 + b_{0,0}z^3]z = (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3(y, z) \\
P_4(y, z) &= z(a_{0,3}y^3 + a_{0,2}y^2z + a_{0,1}yz^2 + a_{0,0}z^3) = zP'_3(y, z), a_{0,4} = 0 \\
L(y, z) &= (b_{1,1} - a_{2,0})y + b_{1,0}z \\
L_1(y, z) &= a_{2,0}z + \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}}L(y, z), A = \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}},
\end{aligned}$$

y considerando  $a_{2,0}b_{1,1} \neq 0$  y  $a_{2,0} \neq b_{1,1}$  hallamos

$$\begin{aligned}
I_0(f_{25}, g_{25}) &= I_0((b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3(y, z) - yzP'_3(y, z), \\
& - a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - z^2P'_3(y, z)) \\
&= I_0(Lz^2 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3 - yzP'_3, -a_{2,0}z^3 + c_{0,4}y^4 \\
& - zP_3(y, z) - z^2P'_3(y, z) - \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}}[Lz^2 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3(y, z) \\
& - yzP'_3(y, z)], b_{0,4} \neq a_{1,3}) \\
&= I_0(Lz^2 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3(y, z) - yzP'_3(y, z), z) + I_0(Lz^2 + \\
& (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3 - yzP'_3, -(a_{2,0}z + \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}}L)z - (P_3 + \\
& \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}}Q'_3) - (z - \frac{c_{0,4}}{b_{0,4} - a_{1,3}}y)P'_3) \\
&= 4 + I_0(Lz^2 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3 - yzP'_3, L_1z + (P_3 + AQ'_3) - \\
& (z - Ay)P'_3) \\
&= 4 + I_0((b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + zQ'_3 - yzP'_3 - \frac{L}{L_1}z(P_3 + AQ'_3 - (z - Ay)P'_3)), \\
& L_1z + (P_3 + AQ'_3) - (z - Ay)P'_3) \\
&= 12, \text{ si } a_{0,4} \neq 0.
\end{aligned}$$

Supongamos ( $a_{2,0} \neq 0, b_{1,1} = 0$ ). Estas condiciones implican  $a_{2,0} \neq b_{1,1}$ . Denotamos  $L'(y, z) = b_{1,1}y + b_{1,0}z$ . Suponiendo  $a_{0,4} = 0$  y siguiendo el proceso

anterior, obtenemos  $I_0(f_{25}, g_{25}) = 12$ .

Finalmente, en el caso  $(a_{2,0} = 0, b_{1,1} \neq 0)$ ,

$$\begin{aligned} I_0(f_{25}, g_{25}) &= I((b_{1,1}y + b_{1,0}z)z^2 + (b_{0,4} - a_{1,3})y^4 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + \\ &\quad (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - yP_4(y, z), \\ &\quad c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z) - zP_4(y, z)) \\ &= 12, \text{ si } b_{1,1}y + b_{1,0}z \nmid (c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z)). \end{aligned}$$

El número de Milnor del punto singular es

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} 12, & \text{si } (a_{2,0} \neq 0, a_{2,0} \neq b_{1,1}, a_{0,4} = 0) \circ (a_{2,0} \neq 0, b_{1,1} \neq 0, a_{2,0} = b_{1,1}, \\ & b_{0,4} - a_{1,3} + \frac{b_{1,0}}{a_{2,0}}c_{0,4} \neq 0) \circ (a_{2,0} = 0, b_{1,1} \neq 0, b_{1,1}y + b_{1,0}z \nmid \\ & (c_{0,4}y^4 - zP_3(y, z))). \end{cases}$$

La multiplicidad del punto singular es  $m_p(\mathcal{F}) = 3$  pues  $(a_{2,0}, b_{1,1}) \neq (0, 0)$ .

El 3-jet de  $(f_{25}, g_{25})$  es  $\begin{pmatrix} (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 \\ -a_{2,0}z^3 \end{pmatrix}$ .

La dimensión del estrato  $S_{25}$  es 20.

En el conjunto abierto de  $S_{25}$  con  $a_{2,0}b_{1,1} \neq 0$  y  $c_{0,4} \neq 0$ , las foliaciones tienen un punto singular de multiplicidad 3 y número de Milnor 12.

### 3.5.12. Estrato 26

$$Z_{26}^{ss} = \mathbb{P}\{a_{0,4}y^4 \frac{\partial}{\partial x} + b_{2,0}x^2z^2 \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{2,0} \neq 0\}.$$

$$\begin{aligned} Y_{26}^{ss} &= \mathbb{P}\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + \\ &\quad a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{2,0}x^2z^2 + b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + \\ &\quad b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : a_{0,4} \neq 0, b_{2,0} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Las componentes de  $\mathcal{X} \in Y_{26}^{ss}$  en la carta  $x = 1$  son

$$\begin{aligned} f_{26}(y, z) &= b_{2,0}z^2 + (b_{1,1} - a_{2,0})yz^2 + b_{1,0}z^3 + (b_{0,3} - a_{1,2})y^3z + (b_{0,2} - a_{1,1})y^2z^2 + \\ &\quad (b_{0,1} - a_{1,0})yz^3 + b_{0,0}z^4 - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4 \\ g_{26}(y, z) &= -a_{2,0}z^3 - a_{1,2}y^2z^2 - a_{1,1}yz^3 - a_{1,0}z^4 - a_{0,4}y^4z - a_{0,3}y^3z^2 - a_{0,2}y^2z^3 - \\ &\quad a_{0,1}yz^4 - a_{0,0}z^5 \end{aligned}$$

con las condiciones  $a_{0,4} \neq 0$  y  $b_{2,0} \neq 0$ .

En este estrato denotamos  $Q_1(y, z) = b_{1,1}y + b_{1,0}z$ ,  $P_2(y, z) = a_{1,2}y^2 + a_{1,1}yz + a_{1,0}z^2$ ;  $P_k, Q_k, F_k, G_k, H_k \in \mathbb{C}[y, z]$  polinomios homogéneos de grados  $k$ .

Aplicamos (3.13),

$$\begin{aligned}
I_0(f_{26}, g_{26}) &= I_0(a_{0,4}y^5, z) + I_0(b_{2,0}z^2 + b_{1,1}yz^2 + b_{1,0}z^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + \\
&\quad b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4, P(1, y, z)) \\
&= 5 + I_0(b_{2,0}z^2 + z^2Q_1(y, z) + zQ_3(y, z), a_{2,0}z^2 + zP_2(y, z) + P_4(y, z)) \\
&= 5 + I_0(z, a_{2,0}z^2 + zP_2 + P_4) + I_0(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3, a_{2,0}z^2 + zP_2 + P_4) \\
&= 9 + I_0(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3, a_{2,0}z^2 + zP_2 + P_4 - \\
&\quad \frac{(a_{2,0}z + P_2)}{b_{2,0}}(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3)) \\
&= 9 + I_0(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3, P_4 - \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}z^2Q_1 - \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}zQ_3 - \frac{P_2}{b_{2,0}}zQ_1 \\
&\quad - \frac{P_2}{b_{2,0}}Q_3 + \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}zQ_1(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3)) \\
&= 9 + I_0(b_{2,0}z + zQ_1 + Q_3, P_4 - \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}zQ_3 + \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}z^2Q_1^2 - \frac{P_2}{b_{2,0}}zQ_1 - \frac{P_2}{b_{2,0}}Q_3 \\
&\quad + \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}zQ_1Q_3) \\
&= 13.
\end{aligned}$$

La multiplicidad del punto singular es  $m_p(\mathcal{F}) = 2$ , pues  $b_{2,0} \neq 0$ . El 2-jet de  $\begin{pmatrix} f_{26} \\ g_{26} \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , suponiendo  $b_{2,0} = 1$ .

La recta  $z = 0$  es invariante para  $\mathcal{X} \in Y_{26}^{ss}$ .

Por otro lado, supongamos, que una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$  definida por un campo vectorial polinomial  $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$  tiene un punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  con multiplicidad  $m_p(\mathcal{F}) = 2$  y número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F}) = 13$ , 2-jet linealmente equivalente a  $z^2 \frac{\partial}{\partial y}$  y recta invariante  $z = 0$ .

Como la recta  $z = 0$  es invariante para  $\mathcal{X}$ , por la definición (2.5), existe un polinomio  $H(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$  tal que :

$$R(x, y, z) = zH(x, y, z),$$

donde

$$R(x, y, z) = c_{0,4}y^4 + c_{1,3}xy^3 + c_{2,2}x^2y^2 + c_{3,1}x^3y + c_{4,0}x^4,$$

así pues  $R(x, y, z) = 0$ .

El campo vectorial  $\mathcal{X}|_{U_0}$  en  $U_0 : x = 1$  tiene componentes

$$\begin{pmatrix} Q(1, y, z) - yP(1, y, z) \\ -zP(1, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Q_2 - yP_1) + (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4 \\ -zP_1 - zP_2 - zP_3 - zP_4 \end{pmatrix}.$$

De la información sobre el 2-jet,  $Q_2(y, z) - yP_1(y, z) = z^2$ ,  $-zP_1(y, z) = 0$  sigue:  
 $Q_2(y, z) = yP_1(y, z) + z^2$ , así que,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x^3P_1 + x^2P_2 + xP_3 + P_4 \\ x^2yP_1 + x^2z^2 + xQ_3 + Q_4 \\ x^2zP_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^2P_2(y, z) + xP_3(y, z) + P_4(y, z) \\ x^2z^2 + xQ_3(y, z) + Q_4(y, z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El punto singular tiene número de Milnor

$$\mu_p(\mathcal{F}) = I_0(z^2 + (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4, -z(P_2 + P_3 + P_4)) = 13$$

si y solo si

- $I_0(z^2 + (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4, z) = 5$ ,

que sucede si y solo si  $a_{0,4} \neq 0$  y  $z \mid (Q_3 - yP_2)$ ,  $z \mid (Q_4 - yP_3)$ ; y

- $I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = 8$ ,

válido si y solo si  $z \mid P_2$  y  $z \mid P_3$ .

Denotamos  $P_2(y, z) = a_{2,2}y^2 + a_{2,1}yz + a_{2,0}z^2$ .

$z \mid (Q_3 - yP_2)$  significa:

$$Q_3(y, z) - yP_2(y, z) = (b_{1,3} - a_{2,2})y^2 + zH_2(y, z), \quad b_{1,3} = a_{2,2}.$$

Existen dos posibilidades:  $a_{2,2} \neq 0$  y  $a_{2,2} = 0$ .

Si  $a_{2,2} \neq 0$ , entonces  $Q_3(y, z) = yP_2(y, z) + zH_2(y, z)$ , y si  $a_{2,2} = 0$  tenemos  $Q_3(y, z) = zG_2(y, z)$  y  $P_2(y, z) = zF_1(y, z)$ .

$z \mid (Q_4 - yP_3)$  implica:

$$Q_4(y, z) - yP_3(y, z) = (b_{0,4} - a_{1,3})y^3 + zH_3(y, z), \quad b_{0,4} = a_{1,3}.$$

De  $a_{1,3} \neq 0$  sigue  $Q_4(y, z) = yP_3(y, z) + zH_3(y, z)$ , y si  $a_{1,3} = 0$  sucede  $Q_4(y, z) = zG_3(y, z)$  y  $P_3(y, z) = zF_2(y, z)$ .

Analizamos el número de intersección para las diferentes posibilidades de  $a_{2,2}$



y  $a_{1,3}$ .

Si  $a_{2,2} \neq 0$  y  $a_{1,3} \neq 0$ ,

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = I_0(z^2 + yP_2 + zH_2 + yP_3 + zH_3, P_2 + P_3 + P_4) = 4.$$

Si  $a_{2,2} = 0$  y  $a_{1,3} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) &= I_0(z^2 + zG_2 + yP_3 + zH_3, zF_1 + P_3 + P_4) \\ &= I_0(z^2 + zG_2 + yP_3 + zH_3, P_3 - azG_2 + P_4 - ayP_3 - azH_3) \\ &= 6, \text{ si } F_1 = az, a \neq 0. \end{aligned}$$

Si  $a_{2,2} \neq 0$  y  $a_{1,3} = 0$ ,

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = I_0(z^2 + yP_2 + zH_2 + zG_3, P_2 + zF_2 + P_4) = 4.$$

El número de intersección es diferente de 8 en estas posibilidades.

Consideramos  $a_{2,2} = 0$  y  $a_{1,3} = 0$ ,

$$\begin{aligned} I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) &= I_0(z^2 + zG_2 + zG_3, zF_1 + zF_2 + P_4) \\ &= I_0(z, zF_1 + zF_2 + P_4) + I_0(z + G_2 + G_3, zF_1 + zF_2 + P_4 - \\ &\quad (F_1 + F_2)(z + G_2 + G_3)) \\ &= 4 + I_0(z + G_2 + G_3, -F_1G_2 + P_4 - F_1G_3 - F_2G_2 - F_2G_3). \end{aligned}$$

Si  $z \nmid F_1(y, z)G_2(y, z)$ , entonces el número de intersección sería 3 en el último sumando, por consiguiente:  $z \mid F_1(y, z)$  o  $z \mid G_2(y, z)$  o  $z \mid F_1(y, z)$  y  $G_2(y, z)$ .

Cuando  $F_1(y, z) = az$ ,  $a$  constante,

$$\begin{aligned} I_0(z + G_2 + G_3, -azG_2 + P_4 - azG_3 - F_2G_2 - F_2G_3 + aG_2(z + G_2 + G_3)) \\ = I_0(z + G_2 + G_3, (P_4 + aG_2^2 - azG_3 - F_2G_2) - F_2G_3 + aG_2G_3) \\ = 4 \end{aligned}$$

si y sólo si  $G_2(y, z) = zG_1(y, z)$ .

Por tanto,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} ax^2z^2 + xzF_2(y, z) + P_4(y, z) \\ x^2z^2 + xz^2G_1(y, z) + zG_3(y, z) \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{26}.$$

**Observaciones.** Analizamos  $\mu_p(\mathcal{F})$  cuando  $z \nmid (Q_3 - yP_2)$  o  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$  o  $a_{0,4} = 0$  o  $z \nmid P_2$  o  $z \nmid P_3$ , donde  $P_2(y, z) = a_{2,2}y^2 + a_{2,1}yz + a_{2,0}z^2$ .

Conocemos el número de intersección

$$I_0(z^2 + (Q_3 - yP_2) + (Q_4 - yP_3) - yP_4, z) = 3, \text{ si } z \nmid (Q_3 - yP_2) \quad (4)$$

$$= 4, \text{ si } z \mid (Q_3 - yP_2), z \nmid (Q_4 - yP_3) \quad (5)$$

$$= 5, \text{ si } z \mid (Q_3 - yP_2), z \mid (Q_4 - yP_3), a_{0,4} \neq 0 \quad (6)$$

$$= \infty, \text{ si } z \mid (Q_3 - yP_2), z \mid (Q_4 - yP_3), a_{0,4} = 0. \quad (7)$$

Si  $z \mid (Q_4 - yP_3)$ , es decir  $b_{0,4} = a_{1,3}$  y  $z \nmid (Q_3 - yP_2)$ , esto es  $b_{1,3} \neq a_{2,2}$ ,  $a_{0,4} = 0$ ,

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + zF_3) = 4, \text{ si } b_{1,3}a_{2,2} \neq 0, z \nmid P_2$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, zF_1 + P_3 + zF_3)$$

$$= I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_3 - a_{2,0}Q_3 + zF_3 - a_{2,0}Q_4)$$

$$= 6, \text{ si } a_{2,2} = a_{2,1} = 0, a_{2,0} \neq 0, b_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = a_{1,3} \neq 0, a_{1,3} \neq a_{2,0}b_{1,3}$$

$$= 8, \text{ si } a_{2,2} = a_{2,1} = 0, a_{2,0} \neq 0, b_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = a_{1,3} \neq 0, a_{1,3} = a_{2,0}b_{1,3}$$

y considerando (4),  $\mu_p(\mathcal{F})$ , sería 7, 9 o 11.

Si  $z \mid (Q_4 - yP_3)$ ,  $z \nmid (Q_3 - yP_2)$ ,  $a_{0,4} \neq 0$  obtenemos,

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = 4, \text{ si } b_{1,3}a_{2,2} \neq 0, z \nmid P_2.$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4 - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}(zF_1 + P_3 + P_4), zF_1 + P_3 + P_4), z \mid P_2, z \nmid P_3$$

$$= I_0(z, zF_1 + P_3 + P_4) + I_0(z - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}F_1 + (b_{1,2} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{1,2})y^2 +$$

$$(b_{1,1} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{1,1})yz + (b_{1,0} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{1,0})z^2 + (b_{0,3} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{0,3})y^3 +$$

$$(b_{0,2} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{0,2})y^2z + (b_{0,1} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{0,1})yz^2 + (b_{0,0} - \frac{b_{0,4}}{a_{0,4}}a_{0,0})z^3, zF_1 + P_3 + P_4)$$

$$= 5, \text{ si } b_{0,4} = a_{1,3} \neq 0, a_{2,2} = 0, a_{2,1} \neq 0, b_{1,3} \neq 0, a_{2,1}a_{2,0} \neq 0, b_{1,3}a_{0,4} = b_{0,4}a_{1,3}.$$

$$I_0(z^2 + zG_2 + zG_3, P_2 + zF_2 + P_4) = I_0(z, P_2 + zF_2 + P_4) +$$

$$I_0(z + G_2 + G_3, P_2 + zF_2 + P_4)$$

$$= 4, \text{ si } b_{0,4} = a_{1,3} = 0, b_{1,3} = 0, a_{2,2} \neq 0,$$

por tanto, teniendo en cuenta (4),  $\mu_p(\mathcal{F})$  sería 8, 7, respectivamente..

Si  $z \mid (Q_3 - yP_2)$  y  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ , es decir  $b_{1,3} = a_{2,2}$  y  $b_{0,4} \neq a_{1,3}$ , y  $a_{0,4} = 0$  tenemos

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + zF_3) = 4, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} \neq 0, z \nmid P_2, z \nmid P_3$$

$$I_0(z^2 + zG_2 + Q_4, zF_1 + zF_2 + zF_3) = I_0(z^2 + zG_2 + Q_4, z) +$$

$$= I_0(z^2 + zG_2 + Q_4, F_1 + F_2 + F_3)$$

$$= 6, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} = 0, a_{2,1} \neq 0, a_{1,3} = 0, b_{0,4} \neq 0, z \mid P_2$$

$$I_0(z^2 + zG_2 + zG_3, zF_1 + P_3 + zF_3) = I_0(z, zF_1 + P_3 + zF_3) + I_0(z + G_2 + G_3, F_1 + F_2 + F_3)$$

$$= 5, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} = 0, a_{2,1} \neq 0, a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = 0, z \mid P_2$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + zF_2 + zF_3) = 4, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} \neq 0, a_{1,3} = 0, b_{0,4} \neq 0, z \nmid P_2,$$

y considerando (5) inferimos que  $\mu_p(\mathcal{F})$  podría ser 8 o 9 o 10.

Si  $z \mid (Q_3 - yP_2)$  y  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} \neq 0$ , vemos

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = 4, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} \neq 0, z \nmid P_2, z \nmid P_3.$$

$$I_0(z^2 + zG_2 + zG_3, zF_1 + P_3 + P_4)$$

$$= I_0(z, zF_1 + P_3 + P_4) + I_0(z + G_2 + G_3, zF_1 + P_3 + P_4)$$

$$= 3 + I_0(z + G_2 + G_3, zF_1 + P_3 + P_4 - F_1(z + G_2 + G_3))$$

$$= 3 + I_0(z + G_2 + G_3, P_3 - F_1G_2 + P_4 - F_1G_3)$$

$$= 6, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} = 0, a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} = 0, z \nmid (P_3 - F_1G_2), z \mid P_2, z \nmid P_3$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + zF_2 + P_4) = 4, \text{ si } b_{1,3} = a_{2,2} \neq 0, a_{1,3} = 0, b_{0,4} \neq 0, z \nmid P_2, z \mid P_3,$$

y a consecuencia de (5),  $\mu_p(\mathcal{F})$  sería 8 o 10.

Si  $z \nmid (Q_3 - yP_2)$ , significa  $a_{2,2} \neq b_{1,3}$ ,  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ , es decir  $b_{0,4} \neq a_{1,3}$ , y  $a_{0,4} = 0$ , obtenemos

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + zF_3) = 4, \text{ si } a_{2,2}b_{1,3} \neq 0$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, a_{2,0}z^2 + P_3 + zF_3)$$

$$= I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, a_{2,0}z^2 + P_3 + zF_3 - a_{2,0}(z^2 + Q_3 + Q_4))$$

$$= I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_3 - a_{2,0}Q_3 + zF_3 - a_{2,0}Q_4)$$

$$= 6, \text{ si } a_{2,2} = a_{2,1} = 0, a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} \neq 0, z \nmid (P_3 - a_{2,0}Q_3), z \mid P_2, z \nmid P_3$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + zF_2 + zF_3) = 4, \text{ si } a_{2,2} \neq 0, a_{1,3} = 0, z \nmid P_2, z \mid P_3,$$

entonces  $\mu_p(\mathcal{F}) = 7$  o  $9$ .

Finalmente, si  $z \nmid (Q_3 - yP_2)$  y  $z \nmid (Q_4 - yP_3)$ ,  $a_{0,4} \neq 0$ , hallamos

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + P_3 + P_4) = 4, \text{ si } a_{2,2}b_{1,3} \neq 0$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, a_{2,0}z^2 + P_3 + P_4)$$

$$= I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, a_{2,0}z^2 + P_3 + P_4 - a_{2,0}(z^2 + Q_3 + Q_4))$$

$$= I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_3 - a_{2,0}Q_3 + P_4 - a_{2,0}Q_4)$$

$$= 6, \text{ si } a_{2,2} = a_{2,1} = 0, a_{1,3} \neq 0, b_{0,4} \neq 0, z \mid P_2, z \nmid P_3$$

$$I_0(z^2 + Q_3 + Q_4, P_2 + zF_2 + P_4) = 4, \text{ si } a_{2,2} \neq 0, a_{1,3} = 0, z \nmid P_2, z \mid P_3,$$

y también  $\mu_p(\mathcal{F}) = 7$  o  $9$ .

Los resultados del análisis anterior implican descartar estas posibilidades.

La dimensión del estrato  $S_{26}$  es 18

**Proposición 3.9.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_4$ .  $\mathcal{F} \in S_{26}$  si y sólo si tiene un punto singular con multiplicidad 2, número de Milnor 13, 2-jet linealmente equivalente a  $z^2 \frac{\partial}{\partial y}$  y recta invariante  $z = 0$ . Este estrato tiene dimensión 18.*

### 3.6. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo es construir una estratificación algebraica de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , conjunto de foliaciones inestables del plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , en el sentido de la teoría de invariantes geométricos.

Demostremos que el conjunto cerrado de foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tiene dos subespacios maximales.

Construimos una estratificación algebraica de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  formada por 26 estratos.

Análizamos los estratos de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  con singularidades aisladas. Consideramos el punto singular  $p = (1 : 0 : 0)$  en las variedades  $Y_i^{ss}$ ,  $i \in \{8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26\}$ . Caracterizamos una foliación genérica de estos estratos según el número de Milnor y multiplicidad del punto singular, jets, existencia de recta invariante, y calculamos la dimensión del estrato.

Describimos las foliaciones inestables de grado 4 en el plano proyectivo complejo con un único punto singular.

Presentamos un resumen de los resultados obtenidos en la sección 3.5 en el Teorema 3.10.

**Teorema 3.10.** *Los espacios  $S_i = SL_3(\mathbb{C})Y_i^{ss}$ ,  $i \in \{1, \dots, 26\}$ , son subvariedades algebraicas localmente cerradas, irreducibles, no singulares de  $\mathfrak{F}_4$ . Ellas forman una estratificación del conjunto cerrado de foliaciones inestables  $\mathfrak{F}_4^{un}$ , y  $\overline{S_i} \subset \cup_{j \leq i} S_j$ . Estas variedades también satisfacen:*

<b>Estrato</b>	<b>Caracterización de foliaciones genéricas de <math>\mathfrak{F}_4^{un}</math></b>
$S_1, S_2, S_3, S_4,$ $S_5, S_6, S_7, S_9,$ $S_{10}, S_{12}, S_{14},$ $S_{17}, S_{20}, S_{23}$	Toda foliación tiene una curva de singularidades
$S_8$ $\dim S_8 = 8$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un único punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 21$ , 4-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$
$S_{11}$ $\dim S_{11} = 10$	Contiene un subconjunto abierto tal que sus elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(\mathcal{F}) = 20$
$S_{13}$ $\dim S_{13} = 12$	Contiene un subconjunto abierto tal que sus elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(\mathcal{F}) = 19$
$S_{15}$ $\dim S_{15} = 16$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 4$ y $\mu_p(X) = 16$
$S_{16}$ $\dim S_{16} = 13$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(X) = 17$ , 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$
$S_{18}$ $\dim S_{18} = 15$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 16$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{19}$ $\dim S_{19} = 17$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 15$
$S_{21}$ $\dim S_{21} = 17$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos $\mathcal{F}$ tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 13$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{22}$ $\dim S_{22} = 18$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 12$ y 3-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S_{24}$ $\dim S_{24} = 19$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 12$ , y recta invariante $z = 0$
$S_{25}$ $\dim S_{25} = 20$	Contiene un subconjunto abierto cuyos elementos tienen un punto singular $p$ con $m_p(\mathcal{F}) = 3$ , $\mu_p(\mathcal{F}) = 12$
$S_{26}$ $\dim S_{26} = 18$	Toda foliación $\mathcal{F}$ tiene un punto singular $p$ con $m_p(X) = 2$ , $\mu_p(X) = 13$ ; 2-jet linealmente equivalente a $\begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y recta invariante $z = 0$ .

La recta  $z = 0$  es invariante para  $\mathcal{X} \in Y_i^{ss}$ ,  $i \in \{8, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24, 26\}$ .

**Teorema 3.11.** Sea  $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}_4$  con singularidades aisladas. Si  $\mathcal{X}$  es inestable,

entonces

1.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 4 o
2.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 3 y 3-jet linealmente equivalente a  $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$  o
3.  $\mathcal{X} \in S_{19} \cup S_{24} \cup S_{25}$  o
4.  $\mathcal{X}$  tiene un punto singular con multiplicidad 2.

Las componentes irreducibles de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  son las cerraduras de las subvariedades localmente cerradas  $S_{25}$  y  $S_{26}$  que tienen dimensiones 20 y 18, respectivamente.

*Demostración.* La primera afirmación es consecuencia de la tabla del teorema (3.10).

En la demostración de la segunda afirmación, aplicamos la Proposición 4-2 de [Hes79] que afirma que todo estrato  $S_j$  es irreducible y  $\overline{S_j} = SL_3(\mathbb{C})\overline{Y_j}$ . Como  $\overline{Y_{26}} \subset \cup_{j \neq 25} Y_j$  y  $S_{25} \not\subset S_{26}$  concluimos que  $\mathfrak{F}_4^{un} = \overline{S_{25}} \cup \overline{S_{26}}$  es la descomposición de  $\mathfrak{F}_4^{un}$  en componentes irreducibles.  $\square$

De las construcciones de  $V_1, V_2$  en el teorema (3.1) 3.1 y las de  $Y_{25}, Y_{26}$  en 3.4.2 inferimos que  $V_1 = Y_{25}, V_2 = Y_{26}$ .

Describimos las foliaciones con un punto singular, es decir con número de Milnor 21.

**Teorema 3.12.** *Las foliaciones inestables de grado 4 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con un único punto singular son*

1. El estrato  $S_8$  que tiene dimensión 8.
2. El subespacio de  $S_{11}$

$$SL_3(\mathbb{C})\left\{ (a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,0} \neq 0, b_{0,1} = 0) \text{ o } (a_{1,0} = 0, b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z)) \right\},$$

de dimensión 9.

3. El subespacio de  $S_{13}$

$$SL_3(\mathbb{C})\left\{ (a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,1}b_{0,2} \neq 0, b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 = \right.$$

$c(a_{1,1}y + a_{1,0}z)^2) \circ (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} = 0) \circ (a_{1,1} \neq 0, b_{0,2} = 0, b_{0,1} \neq 0, a_{1,0}b_{0,1} = a_{1,1}b_{0,0}, b_{0,1}y + b_{0,0}z \nmid P_4(y, z)) \circ (a_{1,1} = 0, b_{0,2} \neq 0, a_{1,0} = 0, b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2 \nmid P_4(y, z))\},$

de dimensión 10.

#### 4. El subespacio de $S_{15}$

$SL_3(\mathbb{C})\{(\alpha_1y - \beta_1z)(\alpha_2y - \beta_2z)(\alpha_3y - \beta_3z) + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4\} \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_1y - \beta_1z)^2(\alpha_2y - \beta_2z)(\alpha_3y - \beta_3z) \frac{\partial}{\partial y} : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0), \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0 \text{ o } \alpha\alpha_1 = 1, (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq (0, 0, 0)\},$

de dimensión 12.

#### 5. El subespacio de $S_{18}$

$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{1,2} = 0, b_{0,3} \neq 0, a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,3}, a'_3 = 0, a'_2 = 0, a'_1 = 0, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}) \text{ o } (a_{1,2} \neq 0, b_{0,3} = 0, a_{0,4}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,2}, a_{0,3}b_{1,0} = a_{1,2}b_{0,1} + a_{1,1}b_{0,2}, a_{0,2}b_{1,0} = a_{2,0}b_{0,0} + a_{1,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{0,2}, a_{0,1}b_{1,0} = a_{1,1}b_{0,0} + a_{1,0}b_{0,1}, a_{0,0}b_{1,0} \neq a_{1,0}b_{0,0}, b_{0,2} \neq 0)\},$

donde  $a'_j = a_{0,j}b_{1,0} - (a_{1,1}b_{0,j-1} + a_{1,0}b_{0,j}), j = 1, 2, 3,$  de dimensión 10.

#### 6. El subespacio de $S_{19}$

$SL_3(\mathbb{C})\{(a_{2,0}x^2z^2 + a_{1,2}xy^2z + a_{1,1}xyz^2 + a_{1,0}xz^3 + a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial x} + (b_{1,1}xyz^2 + b_{1,0}xz^3 + b_{0,3}y^3z + b_{0,2}y^2z^2 + b_{0,1}yz^3 + b_{0,0}z^4) \frac{\partial}{\partial y} : (a_{2,0} = b_{1,1} = b_{0,3} = 0, a_{1,2} \neq 0, b_{1,0} = 0, Q_2 \mid L_1L_2z, Q_2 \nmid P_4(y, z))\},$

$Q_2(y, z) = b_{0,2}y^2 + b_{0,1}yz + b_{0,0}z^2, b_{0,2} \neq 0,$  de dimensión 13.

El punto singular tiene multiplicidad 4 en  $S_8, S_{11}, S_{13}, S_{15}$  y multiplicidad 3 en  $S_{18}, S_{19}$ .

*Demostración.* Las foliaciones del estrato  $S_8$  tienen un punto singular con multiplicidad 4;  $S_8$  posee dimensión 8 (proposición 3.6). Las foliaciones con un punto singular en  $S_{11}, S_{13}, S_{18}$  y  $S_{19}$  son estudiadas en la construcción de

la estratificación de  $\mathfrak{F}_4^{un}$ . Si  $\mathcal{X}$  es una foliación del subespacio lineal descrito en  $Y_{11}^{ss}, Y_{13}^{ss}, Y_{18}^{ss}, Y_{19}^{ss}$  y  $g \in SL_3(\mathbb{C})$ , entonces  $g \cdot X$  está en el mismo subespacio si y solo si  $g$  está en el correspondiente subgrupo parabólico, que es el subgrupo de las matrices triangulares superiores que tiene dimensión 5. Por consiguiente, la dimensión del subespacio de foliaciones inestables con una singularidad es la dimensión del subespacio lineal más tres.

Sea  $\mathcal{X} \in Y_{15}^{ss}$  tal que  $p = (1 : 0 : 0)$  es el único punto singular. Aplicamos el [AR16, Lema 3] que dice: Si una foliación  $X$  de grado  $d$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tiene un punto singular  $p$  con multiplicidad  $d$  y número de Milnor mayor que  $d^2$ , entonces  $X$  tiene una recta invariante que pasa por  $p$ . Por el Lema,  $\mathcal{X}$  tiene una recta invariante  $\alpha y - \beta z$ . Existe  $g \in P_{15}$  tal que  $z$  es invariante para  $g\mathcal{X} \in Y_{15}^{ss}$ . Es posible suponer:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} xL_1(y, z)L_2(y, z)L_3(y, z) + P_4(y, z) \\ L_4(y, z)L_5(y, z)L_6(y, z)L_7(y, z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $L_k = \alpha_k y - \beta_k z$ ,  $P_4(y, z) = a_{0,4}y^4 + a_{0,3}y^3z + a_{0,2}y^2z^2 + a_{0,1}yz^3 + a_{0,0}z^4$  con  $\alpha_k, \beta_k, a_{0,j} \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, 7$ ,  $j = 0, \dots, 4$ . El número de Milnor según (3.13),

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{F}) &= I_0((L_4L_5L_6L_7 - yL_1L_2L_3) - yP_4, -z(L_1L_2L_3 + P_4)) \\ &= I_0((L_4L_5L_6L_7 - yL_1L_2L_3) - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - \\ &\quad a_{0,0}yz^4, z) + I_0(L_4L_5L_6L_7, L_1L_2L_3 + P_4) \\ &= 21 \end{aligned}$$

si y solo si

- $I_0((L_4L_5L_6L_7 - yL_1L_2L_3) - a_{0,4}y^5 - a_{0,3}y^4z - a_{0,2}y^3z^2 - a_{0,1}y^2z^3 - a_{0,0}yz^4, z) = 5,$

válido si y solo si  $a_{0,4} \neq 0$  y  $z \mid (L_4L_5L_6L_7 - yL_1L_2L_3)$ , y

- $I_0(L_4L_5L_6L_7, L_1L_2L_3 + P_4) = 16,$

verdadero si y solo si  $L_4L_5L_6L_7 = \alpha L_1^2L_2L_3$  para algún  $\alpha \neq 0$  y  $L_1^2L_2L_3 \nmid P_4$ .

Como

$$z \mid (L_4L_5L_6L_7 - yL_1L_2L_3) = L_1L_2L_3(\alpha L_1 - y) = L_1L_2L_3((\alpha\alpha_1 - 1)y - \alpha\beta_1z),$$

tenemos cuatro posibilidades:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$  o  $\alpha\alpha_1 = 1$ . La condición  $\mathcal{X} \in Y_{15}^{ss}$  implica: si  $\alpha_1 = 0$ , entonces  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $\alpha_3 \neq 0$  o si  $\alpha_2 = 0$ , entonces



$\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$  o si  $\alpha_3 = 0$ , entonces  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ . Si  $\alpha\alpha_1 = 1$ , entonces  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  son diferentes de cero. Por tanto,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x(\alpha_1 y - \beta_1 z)(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) + P_4(y, z) \\ \alpha(\alpha_1 y - \beta_1 z)^2(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que las foliaciones definidas por campos vectoriales con esta forma tienen número de Milnor  $\mu_p(\mathcal{F}) = 21$  para el caso particular  $\alpha_1 = 0$ . Efectivamente,

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{F}) &= I_0((\beta_1 z)^2(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) - y(-\beta_1 z)(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) - yP_4, \\ &\quad z) + I_0((\beta_1 z)^2(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z), \beta_1 z(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) + P_4) \\ &= 5 + I_0(z^2, \beta_1 z(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) + P_4) + I_0((\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z), \\ &\quad \beta_1 z(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z) + P_4) \\ &= 13 + I_0(\alpha_2 y - \beta_2 z)(\alpha_3 y - \beta_3 z), P_4) \\ &= 21. \end{aligned}$$

La dimensión de la proyectivización del espacio lineal de estos campos vectoriales es 9. Cuando movemos la línea invariante a través de  $(1 : 0 : 0)$  obtenemos una familia de foliaciones de dimensión 10. Al tomar la acción de  $SL_3(\mathbb{C})$  módulo el subgrupo parabólico  $P_{15}$ , de dimensión 6, obtenemos un espacio de dimensión 12.  $\square$

# Bibliografía

- [Alc010] C. R. Alcántara, *Introducción a la teoría de invariantes geométricos*. Universidad de Guanajuato, 2010.
- [Alc13] C. R. Alcántara, *Foliations on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  of degree 2 with degenerate singularities*. Bull Braz Math Soc, New Series **44** (2013), no. 3, 421-454
- [AR16] C. R. Alcántara and R. Ronzón, *Classification of Foliations on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  of degree 3 with degenerate singularities*. Journal Singularities **14** (2016), 52-73.
- [Alc16] C. R. Alcántara, *Stratification of the space of foliations on  $CP^2$* . J. Symbolic Comput. **72** (2016), 147-160.
- [Bor91] A. Borel, *Linear algebraic Groups*. 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics **126** Springer Verlag, 1991.
- [Bri10] M. Brion, *Introduction to actions of algebraic groups*. Les cours du CIRM. **1** (2010), no.1, 1.22.
- [CCD13] F. Cano, D. Cerveau and J. Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Belin, 2013.
- [CDGM10] D. Cerveau, J. Déserti, D. Garba Belko and R. Meziani, *Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux*. Bull Braz Math Soc, New Series **41**(2) (2010), 161-198.
- [DK02] H. Derksen and G. Kemper, *Computational Invariant Theory*. Encyclopaedia Mathematical Sciences. Springer, 2002.
- [Dol03] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*. London Mathematical Society. Cambridge University Press. Lecture Notes Series **296**, 2003.
- [EM11] E. Esteves and M. Marchisto, *Invariant theory of foliations of the projective plane*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Brazil, 2011.
- [FV10] V. Ferrer and I. Vainsencher, *Enumerative aspects of holomorphic foliations*. Escuela CIMPA-UNESCO-Perú 2010. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, Lima, 2010.

- [FKM94] J. Fogarty, F. Kirwan and D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ful09] W. Fulton, *Curvas algebraicas*. Editorial Reverté S.A., 2009.
- [GM16] M. Geck and G. Male, *Reductive groups and Steinberg maps*. arXiv: 1608.01156v1 [math RT]. 2016.
- [GMK89] X. Gómez-Mont and G. Kempf, *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*. Comment. Math. Helvetici **64** (1989), 462-473.
- [GMOB89] X. Gómez-Mont and L. Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación [Mathematical Contributions: Research Notes], 3. Sociedad Matemática Mexicana, 1989.
- [GW09] R. Goodman and N. Walach, *Symmetry, Representations and Invariants*. Graduate Texts in Mathematics 255. Springer, 2009.
- [Gor11] E.Z. Goren, *Algebraic groups*. McGill University, 2011.
- [Hes79] W. H. Hesselink, *Desingularizations of varieties of nullforms*. Inventiones Mathematicae. Springer-Verlag, 1979.
- [Hil] D. Hilbert, *Theory of Algebraic invariants Geometric invariants*. Cambridge University Press.
- [Hos12] V. Hoskins, *Geometric invariant theory and symplectic quotients*. fu-berlin.de/hoskins/GITnotes. 2012.
- [Kem78] G. Kempf, *Instability in Invariant Theory*. Annals of Mathematics 108 (1978), 299-316.
- [Kir85] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and Algebraic Geometry*. Princeton University Press, Mathematical Notes **31** (1985).
- [LNS96] A. Lins Neto and M.G. Soares, *Algebraic solutions of one-dimensional foliations*. J. Differential Geometry **43** (1996), 652-673.
- [Mil17] J. S. Milne, *Algebraic Groups*. Cambridge University Press, 2017.
- [MO03] S. Mukai and W. M. Oxbury, *An introduction to Invariants and Moduli*. Cambridge University Press, 2003.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, third edition, *Ergebnisse der Mathematic* **34**. Springer-Verlag, Berlin. 1994.

- [Mak11] S. Makisumi, *Structure Theory of Reductive Groups through Examples*. Semantic Scholar, 2011.
- [Nag65] M. Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert*. Tata Institute of Fundamental Research, 1965.
- [New78] P. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. Springer-Verlag, 1978.
- [New06] P. Newstead, *Geometric Invariant Theory*. CIMAT, Mexico, 2006.
- [Perr15] N. Perrin, *Linear algebraic groups*. Hausdorff Center for Mathematics, Universitat Bonn. 2015.
- [Pop10] V. Popov, *The Cone of Hilbert Nullforms*. arXiv. 1009.6107v1. 2010.
- [Ron14] R. Ronzón, *Estratificación del espacio de foliaciones en el plano proyectivo de grado tres*. Universidad de Guanajuato, México. 2014.
- [Scha16] L. Schaffler, *Reductive, linearly reductive and geometrically reductive affine algebraic groups*. University of Georgia (2016).
- [Spr94] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*. Springer. Verlag, 1994.
- [Ste99] R. Steinberg, *The isomorphism and Isogeny Theorems for Reductive Algebraic Groups*. *Journal of Algebra* **216** (1999), 366-383 .