

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
ESCUELA DE POSGRADO



**Título**

**REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE INECUACIONES LINEALES:  
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA TERCER GRADO DE EDUCACIÓN  
SECUNDARIA**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN  
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

Alex José Iparraguirre Zavaleta

**ASESORA**

Dra. Verónica Neira Fernández

Mayo, 2021

## RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar si una propuesta didáctica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales. Los estudiantes o sujetos de investigación tienen generalmente 14 años de edad y mediante una secuencia de ítems en una actividad didáctica sobre inecuaciones lineales se debe identificar y describir los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes movilizan en diferentes representaciones semióticas. Por ello se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales? Asimismo, se plantea dos objetivos específicos: Primero, identificar los posibles tratamientos y conversiones que podrían realizar los estudiantes al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales; segundo, describir y analizar los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes utilizan al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales. En efecto, la investigación se justifica porque permite identificar los registros de representación semiótica que movilizan los estudiantes con respecto a la inecuación lineal y por la importancia que tienen las inecuaciones lineales como prerrequisito para diferentes temas, como el dominio y rango de funciones, programación lineal, sistemas de inecuaciones, inecuaciones cuadráticas, etc. Así pues, como marco teórico del estudio de investigación se considera la teoría de representación semiótica, específicamente a tratamientos y conversiones propuesta por Raymond Duval. La investigación es de tipo cualitativo descriptivo, ya que se realiza una descripción de los registros de representación semiótica de los estudiantes sobre la movilización del objeto matemático inecuaciones lineales. En relación con el análisis de los ítems de la actividad se identifica y describen los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes movilizan con respecto a las inecuaciones lineales como son: lenguaje natural, algebraico y la representación gráfica en la recta.

**Palabras clave:** Registro de representación, Inecuación Lineal, Conversión, Tratamiento.

## ABSTRACT

The present work aims to analyze whether a didactic proposal based on the Semiotic Representation Theory of Records favors the mobilization of the notion of linear inequalities. The students or research subjects are generally 14 years old and through a sequence of items in a didactic activity on linear inequalities, the possible treatments and / or conversions that the students mobilize in different semiotic representations must be identified and described. For this reason, the following research question is posed: How does a didactic proposal, based on the Theory of Records of Semiotic Representation, favor the mobilization of the notion about linear inequalities? Likewise, it has two specific objectives: First, to identify the possible treatments and conversions that students could make when solving a didactic proposal on linear inequalities; second, describe and analyze the possible treatments and / or conversions that students use when solving a didactic proposal on linear inequalities. Indeed, the research is justified because it allows identifying the records of semiotic representation that students mobilize with respect to linear inequality and because of the importance of linear inequalities as a prerequisite for different topics, such as the domain and range of functions, linear programming, systems of inequalities, quadratic inequalities, etc. Thus, as the theoretical framework of the research study, the semiotic representation theory is considered, specifically to treatments and conversions proposed by Raymond Duval. The research is of a qualitative descriptive type, since a description is made of the semiotic representation records of the students on the mobilization of the mathematical object linear inequalities. In relation to the analysis of the items of the activity, the possible treatments and / or conversions that the students mobilize with respect to the linear inequalities are identified and described, such as: natural language, algebraic and the graphic representation in the line.

**Keywords:** Representation record, Linear Inequality, Conversion, Treatment.

## AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dr. Verónica Neira Fernández, por sus orientaciones, sugerencias y paciencia para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

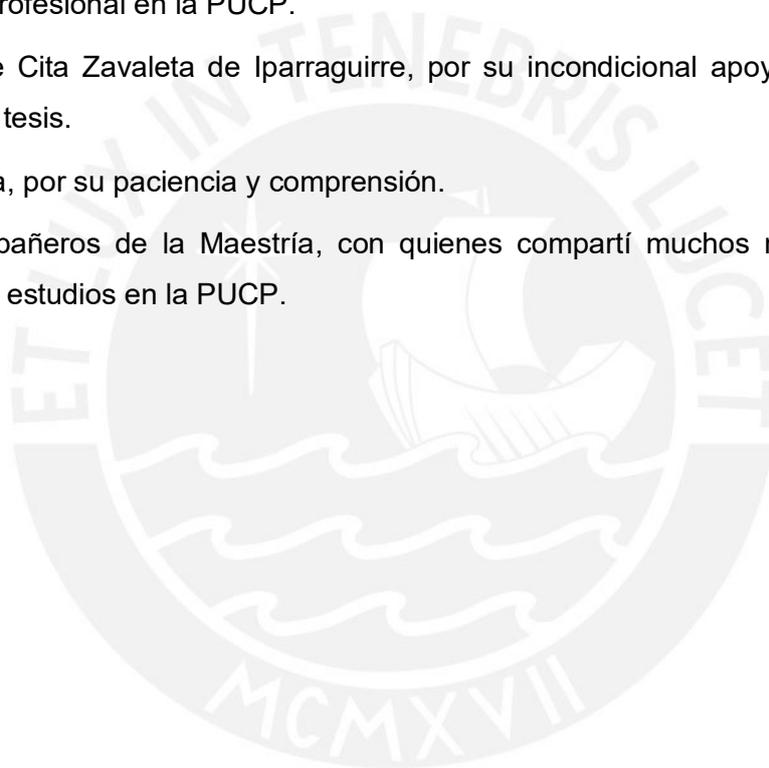
A los miembros del jurado, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar y Mg. Flor Isabel Carrillo Lara, por sus sugerencias y recomendaciones, que han enriquecido el informe de investigación de la línea “Tecnologías y visualización en Educación Matemática”

A mis profesores de la Maestría, Dra. Loretta Gasco Campos, Dr. Uldarico Malaspina, Dr. Alejandro Ortiz Fernández y Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, quienes dejaron huella en mi formación profesional en la PUCP.

A mi madre Cita Zavaleta de Iparraguirre, por su incondicional apoyo y ánimos para culminar mi tesis.

A mi esposa, por su paciencia y comprensión.

A mis compañeros de la Maestría, con quienes compartí muchos momentos gratos durante mis estudios en la PUCP.



# ÍNDICE

Resumen	ii
Lista de Figuras	vi
Lista de Tablas	viii
Introducción	1
<b>CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA</b>	<b>2</b>
1.1 Investigaciones De Referencia.....	2
1.2 Justificación.....	13
1.3 Pregunta Y Objetivos De La Investigación.....	17
<b>CAPÍTULO II: INECUACIONES LINEALES</b>	<b>19</b>
2.1 Aspectos Matemáticos/Históricos/Epistemológicos .....	19
2.2 Aspectos Del Tema A Investigar En Los Libros Didácticos.....	29
<b>CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO</b>	<b>44</b>
3.1 Marco Teórico .....	44
3.3.1. Teoría De Registro De Representación Semiótica.....	44
3.2 Metodología Y Procedimientos.....	50
3.2.1. Procedimientos Metodológicos .....	50
<b>CAPÍTULO IV: PROPUESTA DIDÁCTICA</b>	<b>53</b>
4.1. Resultados Esperados De La Propuesta .....	53
Conclusiones	63
Referencias	69
Anexo	74

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación geométrica de la proposición XXI	19
Figura 2. Representación algebraica de una inecuación	20
Figura 3. Área bajo la curva hasta $x$ está dado por $x^n$	21
Figura 4. Demostración de la desigualdad triangular	21
Figura 5. Insignia que da origen a los símbolos de las desigualdades	22
Figura 6. Símbolos Introducidos por Harriot para la Desigualdad	23
Figura 7. Representación gráfica en la recta numérica	27
Figura 8. Representación gráfica de una desigualdad en la recta numérica	28
Figura 9. Introducción del tema	29
Figura 10. Definición de inecuación lineal	29
Figura 11. Explicación de cómo hallar el conjunto solución de una inecuación lineal	30
Figura 12. Propiedades de una inecuación lineal	31
Figura 13. Hechos históricos	31
Figura 14. Ten en Cuenta	32
Figura 15. Inecuaciones lineales con una incógnita	32
Figura 16. Cómo Hacer	33
Figura 17. Desigualdad compuesta	34
Figura 18. Inecuación compuesta I	35
Figura 19. Inecuación compuesta II	35
Figura 20. Cómo hacer I	36
Figura 21. Cómo hacer II	36
Figura 22. Registros de representación que moviliza el libro Santillana 3	37
Figura 23. Estrategias del cuaderno de trabajo	38
Figura 24. Situación problemática 1	39
Figura 25. Situación problemática 2	39

Figura 26. Situación problemática 3	40
Figura 27. Situación problemática 4	40
Figura 28. Situación problemática 5	41
Figura 29. Situación problemática 6	42
Figura 30. Situación problemática 7	43
Figura 31. Los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento	49



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Niveles de los estándares de aprendizaje	15
Tabla 2. Competencias, capacidades y desempeños del 3er año de educación secundaria	16
Tabla 3. Reglas para resolver desigualdades	25
Tabla 4. Clasificación de los registros semióticos	47
Tabla 5. Registro de representación de la inecuación lineal	48



## INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación tiene como finalidad analizar si una propuesta didáctica permite a los estudiantes movilizar los Registros de Representación Semiótica del objeto matemático inecuaciones lineales y de esta forma consolidar su aprendizaje como lo fundamenta Duval (1995).

El trabajo de investigación consta de cuatro capítulos: en el primero, titulado *Problemática*, presentamos las investigaciones de referencias, la justificación, pregunta y objetivos de investigación. Resaltamos la importancia que tiene el estudio de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas específicamente en el objeto matemático inecuaciones lineales con una variable.

En el segundo capítulo, se realiza el estudio de los aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos del objeto matemático inecuaciones lineales; así como también un análisis del libro de texto *Matemática 3* del Ministerio de Educación del Perú (2016b) y cuaderno de trabajo *Matemática 3* del Ministerio de Educación del Perú (2016c), que utilizan los estudiantes del tercer año de educación secundaria de las instituciones educativas públicas.

El tercer capítulo, tiene como título: *Marco teórico y metodológico*, que constituye la fundamentación del presente trabajo de investigación. Son aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995). Además, se describen los procedimientos metodológicos que se siguieron para realizar el estudio de investigación.

En el cuarto capítulo titulado *Propuesta didáctica*, se presenta la propuesta pedagógica, el análisis y la descripción de las posibles respuestas que se pueden obtener de los estudiantes al responder una actividad didáctica sobre inecuaciones lineales.

Para finalizar, se presenta las conclusiones del trabajo de investigación basados en los objetivos generales y específicos; de la misma manera, las recomendaciones que servirán para trabajos futuros.

## CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, se presentan las investigaciones de referencia, que guardan relación con el objeto matemático de estudio: las inecuaciones lineales. Se pone de manifiesto la justificación que permitió el desarrollo de la investigación; así mismo, se formulan las preguntas y objetivos de la investigación.

### 1.1 Investigaciones de referencia

En cuanto a ello, se realizó una revisión de investigaciones que se relacionan y aportan significativamente al trabajo de investigación.

Gómez (2018), el trabajo tuvo como objetivo analizar una praxeología matemática en una colección de cinco libros que distribuye el Ministerio de Educación (MINEDU), tanto para los estudiantes de educación secundaria como para los docentes, específicamente en el objeto matemático de las inecuaciones. Con respecto a la metodología, fue una investigación cualitativa, se realiza un análisis histórico epistemológico de las matemáticas como disciplina y un análisis siguiendo el modelo de Almouloud de los libros del MINEDU. En efecto sigue un procedimiento:

Primero, identifica tres instituciones públicas donde se moviliza el objeto de estudio las inecuaciones lineales en el área de matemáticas focalizando en dos de ellas.

Como segundo procedimiento, realiza un análisis histórico – epistemológico de las inecuaciones en dos aspectos: geometría y álgebra, resaltando los trabajos de Diofanto con las ecuaciones lineales y desigualdades, también a Rahn al relacionar las desigualdades con la geometría, Ruffini por el uso del álgebra en las desigualdades, Harriot y Bryne por el uso de los símbolos de las desigualdades para nombrar las propiedades, y finalmente a Hardy, quien es considerado el padre de las desigualdades.

El tercer procedimiento consiste en un estudio de los libros que distribuye el MINEDU y los planes curriculares que se utilizan para la enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones lineales. Fundamentado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El análisis de la colección de libros del MINEDU lo realiza en dos partes: un análisis ecológico, describiendo los libros de texto y los cuadernos de trabajo; y un análisis praxeológico. En este análisis el autor Gómez (2018) menciona: “La praxeología matemática reconstruida de los libros didácticos en torno a las inecuaciones lineales, es decir presentamos una descripción de los tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría identificados en la colección de libros didácticos” (p. 69).

Al observar la descripción de los libros y cuadernos de trabajo podemos identificar representaciones de la inequación lineal; la algebraica, lenguaje natural y geométrica o representación gráfica en la recta numérica, haciendo predominar la representación de lenguaje natural por medio de problemas. Por lo tanto, este trabajo fue importante para la investigación porque muestra como el objeto matemático inequaciones lineales en el nivel secundario, es plasmado en los libros que utilizan los profesores y estudiantes en las sesiones de aprendizaje y nos muestra la representación semiótica que prevalece: el algebraico.

Por otro lado, la investigación presentada por Ruiz (2019) tuvo como objetivo analizar las deficiencias que tienen los estudiantes del tercero de secundaria en la resolución de las inequaciones e identificar dichos errores. Para lograr el objetivo previsto tuvo como marco teórico el enfoque lógico semiótico (ELOS) de Socas (2007, citado por Ruiz, 2019) que toma tres elementos fundamentales: estudiantes, profesor y objeto matemático, sin dejar de lado el sociocultural y la institución educativa. Para el análisis de los errores que se encontraron se basó en el fundamento teórico de Socas (1997, citado por Ruiz, 2019) que considera tres ejes fundamentales: dificultades y errores, estadios de desarrollo cognitivo y sistemas de representación. Con respecto a la clasificación de los errores que cometen los estudiantes en la resolución de las inequaciones, se basó en diferentes autores entre ellos se mencionan: “Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Saucedo (2007)” (Ruiz, 2019, p. 3). Metodológicamente fue una investigación cualitativa descriptiva, que siguió la siguiente secuencia: primero se revisó investigaciones sobre los errores más comunes que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas; luego, basándose en el marco teórico se realizó una propuesta de los diferentes errores más comunes que se comenten en la resolución del objeto matemático inequaciones lineales, para después construir un cuestionario, que fue validada por expertos; posteriormente, se realizó un análisis a priori para identificar los supuestos errores que pueden cometer los estudiantes en la resolución de inequaciones lineales, continuando con el recojo de datos, aplicando el cuestionario a 30 estudiantes de tercer grado de educación secundaria para recabar información sobre los errores que cometen con respecto a las inequaciones lineales, se identificaron los errores que cometen los estudiante, se analizaron las respuestas de los estudiantes para identificar los errores, se realizaron entrevistas a un grupo de estudiantes y se concluyó con una tipología de los errores más comunes cometidos por los estudiantes del tercer año de educación secundaria con respecto a la resolución de inequaciones lineales.

En las conclusiones que menciona se resalta la dificultad de pasar de una representación semiótica a otra, por ejemplo, del lenguaje natural al algebraico o a la representación gráfica, ya que desconocen las propiedades y los símbolos de la desigualdad e intervalos. La investigación concluye en que los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de tercer grado de educación secundaria son: la comprensión y traducción de una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica); los errores sobre el desconocimiento teórico, dominio de fórmulas, propiedades, no comprensión de símbolos y términos matemáticos de desigualdad e intervalos y su relación entre ellos. Esta investigación es muy importante porque brinda un alcance sobre los problemas que tienen los estudiantes del tercer año de educación secundaria de pasar de la representación semiótica literal al algebraico y geométrico.

También se consideró un artículo de investigación dirigido por Maroto (2013), cuyo objetivo fue “analizar las ideas centrales del constructivismo y proponer una secuencia didáctica que pueda ser aplicada para estudiar el tema inecuaciones de primer grado con una incógnita” (p. 2). En cuanto a la metodología, se consideró la propia experiencia de la autora, el análisis bibliográfico y documentos diversos. Entre los errores encontrados por la autora tenemos: (i) No identifican los signos de la desigualdad, confundiendo el “mayor que” por “menor que” o viceversa, (ii) El conjunto de solución de una inecuación son números reales, los estudiantes solo toman en cuenta a los enteros, (iii) Hay estudiantes que solo comprenden el algoritmo de solución por tanto lo confunden con una ecuación ya que cuando se presenta cambiar la desigualdad no entienden por qué.

EL grupo de investigación estuvo constituido por estudiantes de educación secundaria, aunque no especifica las edades. En las conclusiones se puede resaltar que para el aprendizaje de las desigualdades o inecuaciones “es necesario que el grupo de docentes proponga diferentes situaciones que permitan al estudiantado analizar el concepto, definir el algoritmo para resolverlas, aplicar el concepto en la solución y el análisis de diferentes situaciones” (Maroto, 2013, p. 16). Finalmente, concluye en que es necesario la enseñanza de las inecuaciones y se debe realizar analizando los símbolos, el procedimiento, empleando situaciones de la vida real o contextualizando. Este artículo fue importante para el trabajo realizado porque ayudó en la identificación de algunos errores que cometen los estudiantes en la representación de las inecuaciones lineales y así considerarlos en la presente propuesta didáctica.

En Chile, el objeto matemático, las inecuaciones lineales también son motivo de estudio, Arévalo y Rojas (2015) presentaron una investigación que tuvo como objetivo analizar el espacio de trabajo en los estudiantes y proponer una forma de enseñanza aprendizaje de las inecuaciones lineales para potenciar dichos espacios de trabajo. El marco teórico que

fundamentó esta investigación es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de Houdement y Kuzniak (1999, 2006, citado en Arévalo y Rojas, 2015) y de la Ingeniería Didáctica por Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) siguiendo la siguiente secuencia metodológica:

Fase 1, se analizó todo lo referente al objeto de estudio, así como: la construcción de la inecuación lineal, el currículo, los programas de estudio, textos escolares, antecedentes referentes a los problemas de aprendizaje de las inecuaciones. El análisis del objeto matemático se ha realizado basándose en aspectos históricos y epistemológicos.

Fase 2, consistió en un análisis del cuestionario a priori, es decir, inferir los supuestos errores que pueden tener los estudiantes tomando en cuenta las bases teóricas, para luego aplicar el cuestionario y elaborar la propuesta, tomando como base los resultados del cuestionario. En el trabajo de investigación se ha propuesto una actividad didáctica basándose en el sustento teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1995)

Fase 3, se implementa la propuesta tomando como base teórico el Espacio de Trabajo Matemático. En este caso se realizó una descripción de las supuestas respuestas que los estudiantes podrían tener cuando resuelven una propuesta didáctica de inecuaciones lineales.

Por otro lado, los estudiantes que participaron en la investigación fueron de tercer año de enseñanza media y universitarios agrupados en pares.

Arévalo y Rojas (2015) concluyen que los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos teniendo dificultad en la interpretación de la solución; además, tienen problemas en modelar situaciones problemáticas de inecuaciones lineales; asimismo, confunden inecuación con ecuación, realizando el algoritmo de la solución de una ecuación y dejando de lado las propiedades de las desigualdades, obteniendo un solo valor y no un conjunto de solución. El autor, con la evidencia, elabora una propuesta de enseñanza aprendizaje dando énfasis a la representación gráfica y en dar un sentido a la representación algebraica que utilizan los estudiantes considerando la conversión que propone Duval (1995), en el registro de representación semiótica. Esta investigación es importante porque permitió identificar el registro de representación más predominante y algunas dificultades que se tienen al desarrollar las inecuaciones lineales por los estudiantes de tercer año de nivel medio de Chile y tomarlo como una referencia en el presente trabajo.

Otra investigación internacional relacionada con el objeto matemático de inecuaciones lineales, es el desarrollado por Heredia y Palacios (2014). Esta investigación se realizó con estudiantes del noveno grado, cuyas edades oscilaron entre los 14 y 16 años, de la

institución educativa Santa Isabel de Hungría, de la ciudad de Santiago de Chile, tiene como objetivo primordial:

Aportar algunas reflexiones didácticas, elementos conceptuales y metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela, a partir de la aplicación de una prueba diagnóstica que permita la identificación de dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno de Educación Básica, con relación a la solución de desigualdades e inecuaciones lineales (Heredia y Palacios, 2014, p. 11).

Para lograr el objetivo, los autores han aplicado un instrumento de medición, que consiste en una prueba escrita a dos secciones, con un grupo de 36 estudiantes cada una, con edades entre 14 y 16 años, del grado noveno de la institución educativa Santa Isabel de Hungría de Chile. Luego, identificaron los errores y falencias más concurrentes, fundamentándose en el marco teórico de Santos y Lozada (2010), Rico (1995, citado por Heredia y Palacios, 2014), Socas (1997, citado por Heredia y Palacios, 2014), etc. En los resultados, se pudo observar que los estudiantes tienen dificultades en el uso de las propiedades de las desigualdades, haciendo uso de la transposición de términos así como en la solución de ecuaciones lineales; con respecto a las representaciones semióticas de Duval (1995), tienen mayor dificultad en la conversión de un registro a otro, como es la representación de lenguaje natural al lenguaje algebraico; por otro lado, se observa que algunos estudiantes no diferencian entre ecuación e inecuación, y no logran interpretar los conjuntos de solución de las inecuaciones lineales y tampoco realizaron representaciones en diferentes registros.

Esta investigación toma importancia para la presente investigación porque se identifican errores y dificultades cuando el estudiante quiere cambiar de una representación a otra [a esto Duval (1995) lo llama conversión] y también en realizar tratamientos adecuados en el mismo registro, en este caso el algebraico.

Por su parte Balanta y Garcés (2017) en su trabajo de investigación propusieron el siguiente objetivo general: “Aportar algunas reflexiones didácticas a partir de la caracterización de las propuestas de enseñanza que presentan dos textos escolares de la educación colombiana en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real e identificar posibles contrastes y similitudes entre ambas propuestas” (p. 8).

Para este trabajo los investigadores seleccionaron dos libros, tomando en cuenta que son los más utilizados por los docentes en la enseñanza de la educación secundaria en el 11° grado, con estudiantes de 16 y 17 años, con la finalidad de analizar los libros de manera conceptual (los conceptos de inecuación, desigualdad, intervalos etc.) y procedimental

(propiedades y teoremas para representar las inecuaciones en forma algebraica y simbólico).

Para lograr los objetivos formulados, el proceso se dividió en cuatro etapas:

Primera etapa, llamada *Delimitación del trabajo*, donde se encuentra la descripción del problema de investigación, los objetivos que se quiere alcanzar, la importancia o justificación que tiene el trabajo de investigación.

Segunda etapa, se conceptualiza el objeto matemático inecuaciones, se analizan si los libros de textos tienen relación con lo que propone el Ministerio de Educación en el programa curricular y las competencias de matemáticas; estos elementos permiten la elaboración de la estrategia La Rejilla, que permitirá analizar los libros elegidos.

Tercera etapa, se eligen los libros de textos aplicando una encuesta a un grupo de 20 docentes de matemática de instituciones educativas nacionales y fueron elegidos los 2 libros más usados por los docentes. Estos libros fueron analizados con la estrategia la rejilla para obtener las características didácticas de los libros de textos elegidos.

Cuarta etapa, se realizaron las conclusiones basados en las diferencias y similitudes del análisis de los dos libros, obteniendo algunas reflexiones con respecto a la enseñanza de las inecuaciones lineales de variable real.

Apoyándose en la investigación cualitativa de tipo evaluativo que permite evaluar la productividad de organizaciones y programas educativos, en conclusión, el autor realiza un análisis de representación de la inecuación en los libros observando que:

La representación simbólica algebraica es presentada cuando se brindan algunas definiciones y se enuncian las diferentes propiedades, además, de ser evidenciada en los diferentes ejercicios, ejemplos, actividades y sus respectivas soluciones que son propuestos a los estudiantes en su mayoría mediante un lenguaje natural. Además el texto emplea la representación gráfica, en particular cuando presenta la notación de los intervalos en la recta real (abierto, semiabierto, cerrado, semicerrado, infinito) pero en cuanto al conjunto solución de las inecuaciones lineales no cuenta con ninguna representación gráfica (Balanta y Garcés, 2017, p. 76).

Entre las conclusiones más relevantes de la investigación de Balanta y Garcés (2017) tenemos: Los dos textos analizados tienen coherencia y articulación al presentar el objeto matemático y también tiene una secuencia con el tema anterior, pero se observa que en los textos se presenta la definición de la inecuación lineal y luego se formulan una lista de ejercicios. El papel del docente debe ser importante y no debe limitarse en lo escrito en el

libro ya que se presenta las propiedades, pero no la importancia y el uso que se tienen en la resolución de las inecuaciones. Las limitaciones que tienen los libros de textos es enfocarse en el algoritmo de resolución de las inecuaciones dejando de lado la contextualización, las representaciones semióticas.

En efecto este trabajo de investigación es importante porque permite conocer los libros de textos en las instituciones educativas de educación básica de Colombia y el uso del registro de representación algebraica como el más predominante en el objeto de estudio las inecuaciones lineales para tener una referencia de cómo se está presentado a los estudiantes.

Igualmente, Monje (2017) realizó un trabajo de investigación titulado: tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia. El objetivo que tuvo fue explorar los planes, libros y currículo que se utilizan para el aprendizaje del área de matemática. Se indagó, en especial, sobre el objeto matemático *inecuaciones* en Chile; mientras que de Rusia se indagó solo los libros o textos de estudio. Las edades de los estudiantes que se encuentran estudiando con los materiales que se analizaron oscilan, en el caso de Chile, desde 9 hasta 18 años, y de Rusia, desde los 12 hasta los 17 años. La metodología fue de tipo cualitativa y exploratorio siguiendo las siguientes etapas:

Primera etapa, es dedicada a la fundamentación teórica del objeto matemático inecuaciones y a la complejidad de esta. Esta etapa coincide con el capítulo II de nuestra investigación: Inecuaciones lineales

Segunda etapa, se identifican y seleccionan todos los documentos y materiales como: planes, programas, currículo y libros de textos que se relacionan con el objeto matemático desde cuarto año básico hasta cuarto año medio. Esta etapa se relaciona con la nuestra porque hemos seleccionado el libro de texto y el cuaderno de trabajo que distribuye el ministerio de educación del Perú (MINEDU) y también la programación curricular del área de matemática del tercer grado de educación secundaria.

Tercera etapa, se observan los contenidos de los libros rusos, destacando la complejidad del objeto matemático inecuaciones y compararlo con el esquema realizado en la primera etapa. Esta etapa se relaciona con la nuestra porque analizamos los libros, de texto y cuaderno de trabajo relacionándolo con la teoría de registro de representaciones de Duval (1995)

Cuarta etapa, luego de analizar y comparar los libros de textos de Chile y Rusia empleando la técnica cualitativa de análisis de contenido con los esquemas de complejidad, se realiza las conclusiones finales.

Entre las conclusiones más resaltantes se tiene que, tanto en el currículo y libros, falta profundizar más en inecuaciones cuadráticas, de valor absoluto, fraccionaria, pero en el análisis de texto se puede observar que se tiene más énfasis en las inecuaciones lineales proponiendo actividades para que los estudiantes transiten por las representaciones semióticas: lengua natural, algebraica, gráfica y simbólica.

Esta investigación es importante para este trabajo porque permite comparar las representaciones semióticas que utilizan los libros del MINEDU en Perú y los libros del MINEDUC en Chile, pudiendo confirmar que en los dos países es importante trabajar el objeto de inecuaciones lineales y las representaciones semióticas de la inecuación lineal.

Así mismo, Vasco (2019), en su trabajo de investigación para optar el grado de magister en enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Pereira – Colombia, tuvo como objetivo determinar si el programa MOOC, creación de secuencias didácticas utilizando el internet, tiene un efecto positivo en la enseñanza aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones en la institución educativa Nueva Granada con estudiantes del onceavo grado, el autor:

Empleó una metodología cualitativa, de tipo descriptivo- interpretativo, que se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, la conducta observable; incluyó la observación participante, registros videográficos, grabaciones de audio, hojas de respuestas o cuadros de trabajo de los estudiantes, para posteriormente describir, analizar y vincular la información de acuerdo a los fenómenos que ocurren naturalmente en el de aula de en el momento de la aplicación del MOOC sobre desigualdades e inecuaciones (Vasco, 2019, p.59).

El grupo elegido para la investigación fue de 30 estudiantes, entre 15 y 19 años de la institución educativa Nueva Granada: El procedimiento de la aplicación de la propuesta tiene cinco etapas:

Primera etapa, realizar el diagnóstico de la problemática de enseñanza, analizando los resultados de las evaluaciones tomadas a los estudiantes.

Segunda etapa, se recopila la información bibliográfica sobre los MOOC, las TICs, el enfoque socio constructivista, el conectivismo, teorías de aprendizaje y del objeto matemático inecuaciones y desigualdades.

Tercera etapa, se diseña o construye los recursos y actividades sobre inecuaciones que se implementaran en el MOOC, utilizando la plataforma wix.

Cuarta etapa, se aplica el MOOC como una herramienta pedagógica en la plataforma wix a 4 secciones del décimo primer grado para el objeto matemático inecuaciones y desigualdades.

Quinta etapa, la evaluación de la utilización de la herramienta MOOC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial del objeto inecuaciones y desigualdades.

Entre las conclusiones más importantes para la presente investigación es que, una de las condiciones para lograr alcanzar o interiorizar las inecuaciones es haber representado el objeto matemático en diferentes formas con la ayuda del MOOC y también es importante para el docente porque cuando crea las secuencias didácticas para el MOOC con respecto a las desigualdades e inecuaciones se alcanza generar actividades con distintos tipos de representaciones para el objeto matemático inecuaciones e desigualdades como lo estipula Duval (1995). Por lo tanto, esta investigación es importante porque permite desarrollar el objeto matemático inecuaciones lineales por medio de las TIC en este caso un MOOC, pero debe ir de la mano con lo expresado por Duval (1995) la importancia de los registros de representación para consolidar el aprendizaje de un objeto matemático.

En el mismo sentido para Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) en su trabajo de investigación sobre "Dificultades en el aprendizaje de desigualdad e inecuaciones en alumnos del primer curso de bachillerato", el objetivo primordial fue de identificar los errores comunes que cometían los estudiantes con respecto al objeto matemático inecuaciones, enumerándolas, nombrando las propiedades sin utilizar, problemas de tratamiento y conversión de registro de representación.

Garrote et al. (2004), dividen en cinco grupos las dificultades:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra que operan en sentidos: semántico y sintáctico; asociadas a los procesos de pensamiento y que surgen debido a la naturaleza lógica del álgebra; asociadas a los procesos de enseñanza, que se derivan del propio currículum de matemáticas, de la institución escolar y de los métodos de enseñanza; asociadas a los procesos de desarrollo de los alumnos y, por último, asociadas a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra (p. 4).

Además, el grupo fue de 91 estudiantes, entre 17 y 18 años de 4 centros educativos siendo el objeto matemático *inecuaciones* muy poco conocido o tenían algunos prerrequisitos; se aplicó el instrumento, un cuestionario, después de haber desarrollado el tema de inecuaciones. Entre los errores encontrados tenemos: en las dos primeras preguntas sobre la conversión de representación lenguaje natural a la representación algebraica, la mayoría de los estudiantes resolvieron correctamente pero el error que se encontró en

limitarse al conjunto de los números naturales y dejando de lado al conjunto de los reales; en la segunda pregunta los estudiantes entienden el lenguaje natural pero al pasar al registro de representación algebraico se confunden en los símbolos de las desigualdades; en la tercera pregunta o ítem se propone una inecuación y se quiere verificar el desarrollo de ésta ósea realizar el tratamiento en el registro de representación algebraico y luego la conversión en un registro de representación lengua natural, en este caso se obtuvieron tres tipos de resultados: primero, estudiantes que realizaron correctamente el tratamiento y realizaron la conversión a lengua natural; segundo, estudiantes que solo realizaron el tratamiento adecuando pero no fueron capaces de realizar la conversión y tercero estudiantes que no realizaron ni el tratamiento ni la conversión al registro la lengua natural. En los ítems 4 y 6, se identifican que los estudiantes no toman en cuenta el signo negativo y tratan a la inecuación como una ecuación sin tomar en cuenta la desigualdad. En el ítem 5 se identifica que el estudiante tiene dificultad de realizar la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación lengua natural, se confunde con una ecuación pensando que solo debe obtener un valor para la incógnita. En el ítem 8 los estudiantes tienen la dificultad de relacionar la representación visual-geométrico y el registro algebraico, para la representación visual-geométrico. En el ítem 10 el docente quiere observar si el estudiante logra interpretar la solución de una desigualdad, ósea convertir de un registro de representación algebraico a un registro de representación lengua natural, el autor observo que hay un grupo de estudiantes que: sí lo logran, otros que realizan la conversión en forma errada y otros dejan en blanco la hoja; otro resultado que consideramos importante para nuestra investigación fue del ítem 11, en este caso el estudiante tiene dificultad de convertir un registro de lengua natural, por ejemplo, *x es mayor que 5 pero menor que 15*, los estudiantes al convertir al registro algebraico lo realizan de manera errónea:  $5 < x > 15$ . Por último, en el ítem 12 se confirma el problema que tienen en la conversión del registro de representación lengua natural al registro de representación algebraico, por ejemplo: *x es inferior que y pero se sabe que  $x + y = 10$* , en este caso hay tres tipos de respuestas, estudiantes que consideran que  $x < 5$ ; un grupo, la mayoría de estudiantes, consideran un solo valor numérico para *x* por ejemplo el 3, y otro grupo mayoritario que deja en blanco la hoja.

Esta investigación es importante porque permite identificar errores y dificultades que pueden tener los estudiantes en el momento de resolver nuestra actividad didáctica propuesta.

De la misma forma, el trabajo de Pirella y Silva (2015), siguiendo la misma línea de estudio en investigar el problema que tienen los estudiantes con respecto al objeto matemático *inecuaciones lineales*, formula el siguiente objetivo general: "Analizar las dificultades

presentes en el estudiantado de cuarto año de educación media general en el aprendizaje de inecuaciones, según el enfoque teórico de Socas” (p. 9).

El estudio se realizó con una muestra de 115 estudiantes de edades entre 15 y 16 años de la institución media técnica “Monseñor Gregorio Adam” de Venezuela, para lograr los objetivos planteados se empleó una investigación descriptiva cuyo procedimiento fue:

Primero, escoger la muestra que fue el 71,42% de la población.

Segundo, se elaboran dos instrumentos: la primera una prueba escrita para medir el aspecto cognitivo del estudiante con respecto al objeto matemático *inecuaciones lineales* y el segundo instrumento un cuestionario tipo escala de Likert, para medir el aspecto actitudinal del estudiante al desarrollar el objeto matemático en estudio.

Tercero, se validaron los instrumentos con juicio de cinco expertos.

Cuarto, se aplica el instrumento para obtener los datos para la investigación.

Quinto, se realiza la parte de estadística analizando e interpretando las tablas y gráficos para sacar finalmente las conclusiones y recomendaciones.

Entre las conclusiones y/o resultados del trabajo de Pírela y Silva (2015) tenemos:

Un alto porcentaje, de 115 estudiantes el 62% no pueden realizar la conversión de la representación lenguaje natural a la representación algebraica con respecto al intervalo.

Otro resultado es, el 67% de los 115 estudiantes tienen problemas en el tratamiento de la inecuación específicamente en la transposición de términos y el 66% en la dificultad de emplear las propiedades de la inecuación.

En el ítem 12, de la prueba escrita, el 70% de los 115 estudiantes no identificaron la transformación como correcta de  $x < -3$  por  $-3x > 9$ . Entonces podemos concluir que tienen dificultad en el tratamiento de la representación algebraica.

Se puede observar también en los resultados que un 62% de los 115 estudiantes tienen dificultad en realizar la conversión del registro de representación algebraica a la de representación gráfico.

Por tanto, esta investigación es importante porque nos da una visión de los errores y dificultades en las representaciones semióticas que tienen los estudiantes frente al objeto matemático inecuaciones lineales.

## 1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia muestran investigaciones en las que los autores tienen interés por la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático inecuaciones como, por ejemplo:

Gómez (2019) analiza la praxeología matemática mediante un análisis histórico - epistemológico, análisis de la colección de libros y cuadernos de trabajo del MINEDU, observando el uso de representaciones algebraicas, representaciones tabulares, el lenguaje natural, pero en sus resultados concluye que en los textos hay un predominio en la representación algebraica.

Así mismo, Ruiz (2019) se basa en analizar los errores que comenten los estudiantes de tercero de secundaria en la resolución de las inecuaciones, encontrando que tienen dificultades en la comprensión y traducción de una expresión matemática, así como en la conversión de lenguaje literal a la representación algebraica y representación gráfica.

De la misma forma, en el trabajo de investigación de Maroto (2013) es muy importante para la presente investigación porque menciona que entre los errores que cometen los estudiantes al resolver las inecuaciones está la representación de estas.

De la misma manera, Toque (2017) demuestra que, aplicando situaciones didácticas de Brosseau los estudiantes del quinto grado de educación secundaria mejoran el nivel de aprendizaje de las inecuaciones, teniendo como base teórica la teoría de representación de registro semiótica que propone Duval.

También, Arévalo y Rojas (2015) aportan en el estudio de las inecuaciones, analizando el espacio de trabajo de los estudiantes y proponen una forma de enseñanza de las inecuaciones utilizando la teoría de Duval (1995) con respecto a la conversión de registro de representación. Una de las conclusiones es que los estudiantes se basan en procedimientos algebraicos, con dificultad en la interpretación de la solución, además tienen problemas en modelar situaciones problemáticas de inecuaciones lineales.

Heredia y Palacios (2014) se interesaron sobre el estudio del objeto matemático *inecuaciones* encontrando dificultades y errores, entre ellos, con respecto a los registros de representación, la mayor dificultad en la conversión de un registro a otro, tal como la representación de lenguaje natural al lenguaje algebraico.

En el trabajo de Balanta y Garcés (2017) se revela el interés en el estudio de las inecuaciones lineales en los libros de textos, concluyen que la representación algebraica es la que predomina en los libros.

Del mismo modo, Monje (2017) se interesa en investigar el objeto matemático de inecuaciones lineales en los libros de texto de Chile y de Rusia tomando en cuenta la importancia del registro de representación de la inecuación lineal.

Por otro lado, Bernardis, Nitti y Scaglia (2017) mencionan que, para ayudar en la comprensión de las desigualdades es pertinente utilizar diferentes marcos como el algebraico, funcional y geométrico y que se relacionen entre ellos. Así mismo, Heredia (2014) indica que en la resolución de una inecuación, los estudiantes tienen dificultades en uso de propiedades de las desigualdades, utilizando los mismos procedimientos para la resolución de una ecuación, también tienen limitaciones en la conversión de enunciados en lenguaje natural a una representación algebraica y en la conversión en lenguaje simbólico.

De la misma forma, Vasco (2019) toma interés en el objeto matemático de inecuaciones y desigualdades apoyado en un recurso TIC llamado MOOC, tomando en cuenta los registros de representación de las inecuaciones y desigualdades.

Así mismo, Garrote et al. (2004) demuestran interés en identificar los errores y dificultades en el desarrollo de las inecuaciones. La misma línea de investigación lo realizan Pirela y Silva (2015).

Como se puede observar, los investigadores mencionados relacionan el estudio del objeto matemático *inecuaciones* con los registros de representación para mejorar la enseñanza aprendizaje de los estudiantes, como es el caso de la presente investigación: proponer una actividad didáctica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004). Para lograr el objetivo se ha revisado investigaciones como Gómez (2019), Ruiz (2019), Maroto (2013), Toque (2017), Garrote et al. (2004), Arévalo y Rojas (2015), Balanta y Garcés (2017), Monje (2017), Bernardis, Nitti y Scaglia (2017), Heredia y Palacios (2014), Vasco (2019) y Pirela y Silva (2015), que aportaran en la propuesta de la actividad. Estos autores ayudan a conocer por medio de sus investigaciones la movilización, los errores, las dificultades que tienen los estudiantes con respecto a las representaciones de las inecuaciones lineales, así también la manera en que los libros o textos presentan la inecuación lineal y sus representaciones.

El presente estudio de investigación ha considerado a los estudiantes del tercer grado de educación secundaria, por tanto, se debe tener en cuenta el Currículo Nacional de Educación Básica que proporciona el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).

De acuerdo con el Ministerio de Educación del Perú (2016a), las inecuaciones lineales con una variable se encuentran contenidos en la competencia: Resuelve Problemas de

Regularidad, Equivalencia y Cambio. Los estándares de aprendizaje de la competencia están dividido en 8 niveles, según lo muestra la siguiente tabla.

**Tabla 1**

*Niveles de los estándares de Aprendizaje*

<b>Estándares</b>	<b>Educación Básica Regular</b>
Nivel 8	Nivel destacado
Nivel 7	Nivel esperado al final del ciclo VII
Nivel 6	Nivel esperado al final del ciclo VI
Nivel 5	Nivel esperado al final del ciclo V
Nivel 4	Nivel esperado al final del ciclo IV
Nivel 3	Nivel esperado al final del ciclo III
Nivel 2	Nivel esperado al final del ciclo II
Nivel 1	Nivel esperado al final del ciclo I

*Fuente:* adaptado del Ministerio de Educación del Perú (2016a, p. 138).

Para una mejor comprensión de la tabla 1, se debe precisar que los ciclos en la Educación Básica Regular están formados de la siguiente forma: ciclo I: inicial de 0 a 2 años; ciclo II: inicial 3 a 5 años; ciclo III: primaria 1° y 2°; ciclo IV: primaria 3° y 4°; ciclo V: primaria 5° y 6°; ciclo VI: primer y segundo grado de educación secundaria; ciclo VII: tercer, cuarto y quinto grado de educación secundaria.

Los desempeños de aprendizaje que los estudiantes del tercer grado deben alcanzar con respecto al objeto matemático de las inecuaciones, según el Currículo Nacional de Educación Básica (2016a) son:

**Tabla 2**

*Competencias, capacidades y desempeños del 3<sup>er</sup> año de secundaria*

**COMPETENCIA “RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO**

Cuando el estudiante resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, combina las siguientes capacidades:

- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

---

## DESCRIPCIÓN DEL NIVEL DE LA COMPETENCIA ESPERADO AL FINAL DEL CICLO VII

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.

### DESEMPEÑOS TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Cuando el estudiante resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del ciclo VII, los desempeños que se relacionan con las inecuaciones son:

- a) Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o relación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen a inecuaciones ( $ax \pm b < c$ ,  $ax \pm b > c$ ,  $ax \pm b \leq c$ ,  $ax \pm b \geq c$ ,  $\forall a \in Q$  y  $a \neq 0$ ).
- b) Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó representó todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes
- c) Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución de inecuación lineal, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.
- d) Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, solucionar inecuaciones, usando productos notables o propiedades de la igualdad.

---

*Fuente:* Basado del Ministerio de Educación del Perú (2016a, p. 258)

Como se puede observar, en los desempeños de aprendizaje los estudiantes deben transformar relaciones a expresiones algebraicas o gráficas, verificar si una expresión representa las condiciones del problema, expresar con diversas representaciones la solución de inecuaciones, determinar términos desconocidos y solucionar una inecuación; estos términos se relacionan con la conversión y transformación que propone Duval (2004) en su teoría de las representaciones de registros semiótica, en la que el autor menciona que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe implicar actividades cognitivas (conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y comprensión de textos), además requiere la utilización de diferentes registros de representación y de expresión.

En conclusión, en base a las investigaciones de referencia, se puede decir que el estudio del objeto matemático *inecuaciones lineales* es muy importante; así mismo, de acuerdo con la experiencia del autor como docente de pregrado, el estudio de las inecuaciones es primordial porque son la base para resolver diferentes temas; como dominio y rango de funciones, programación lineal, sistemas de inecuaciones, inecuaciones cuadráticas, etc. Por lo tanto, este trabajo de investigación se diferencia porque se analiza si una propuesta didáctica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica que propone Duval (2004), favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales.

Por último, la presente investigación se justifica porque permitirá identificar, qué registros de representación semióticas movilizan los alumnos en el tercer grado de educación secundaria con respecto a las inecuaciones lineales; por otro lado, en el Currículo Nacional de Educación Básica, las inecuaciones son objeto de estudio desde el primer grado hasta el quinto grado de educación secundaria, que nos demuestra la importancia de su análisis. Por lo tanto, se considera pertinente el estudio de los Registros de Representación Semióticas de las inecuaciones lineales.

### **1.3 Pregunta y objetivos de la investigación**

La presente investigación se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales?

Para responder a esta pregunta se plantea los siguientes objetivos de investigación:

#### **Objetivo General**

Analizar si una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales

### **Objetivos Específicos**

- Identificar los posibles tratamientos y conversiones que podrían realizar los estudiantes al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales.
- Describir y analizar los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes utilizan al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales.



## CAPÍTULO II: INECUACIONES LINEALES

En el presente capítulo se presenta un análisis de los aspectos históricos y epistemológicos del objeto matemático *inecuaciones lineales* y del libro de texto Matemática 3 del Ministerio de Educación del Perú (2016b) y cuaderno de trabajo Matemática 3 del Ministerio de Educación del Perú (2016c) que utilizan los estudiantes del tercer grado de educación secundaria.

### 2.1 Aspectos matemáticos/históricos/epistemológicos

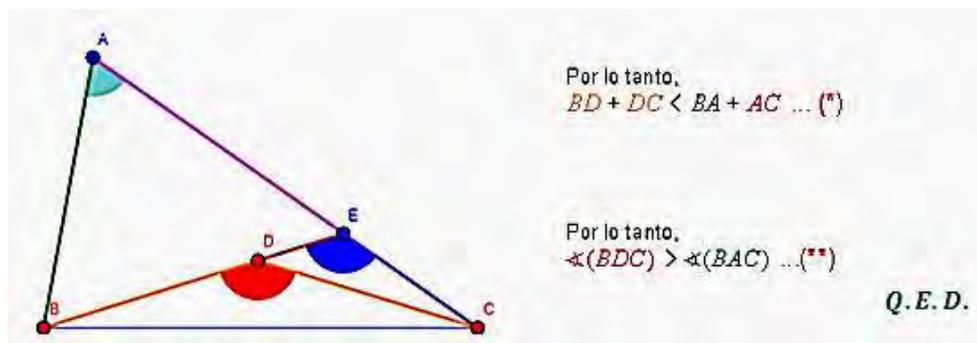
Desde principio de la historia de las matemáticas, se comenzó a desarrollar el concepto de inecuaciones, pero antes fue el concepto de las desigualdades; estas se encuentran en diferentes ámbitos, ya que desde el inicio de la humanidad se tenía que comparar cantidades; como por ejemplo: quién tiene más animales, quién tiene más hijos, quién es el menor de los hijos, hasta qué limite pertenecían sus tierras, etc.

Según Douady (1986, citado por Bernardis et al., 2017), a través de la historia, la desigualdad se ha utilizado en diferentes ramas, por tanto, para un mejor entendimiento se ha dividido en tres marcos:

- Geométrico: en los inicios de la historia de la matemática, las desigualdades eran utilizadas para desarrollar problemas geométricos comparando longitudes, áreas y volúmenes, por ejemplo: en el libro I los Elementos de Euclides (1991) proposición XXI:

Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor (p. 226).

Como podemos observar en la figura 1, la proposición XXI se puede representar geoméricamente y visualizar la relación de desigualdad.



**Figura 1:** Representación geométrica de la proposición XXI, libro I  
Fuente: Linares, 2016

- Algebraico: en el marco geométrico se basaba en lo visual, luego la desigualdad pasa a una nueva etapa empieza a relacionarse con los símbolos, empezando a resolver problemas del algebra basándose en la ecuación. Por ejemplo, en la figura 2, se encuentra en el libro de Rahn (1659) "Teutsche álgebra", la representación algebraica de una inecuación y su respectivas transformaciones o tratamientos para llegar a la solución.

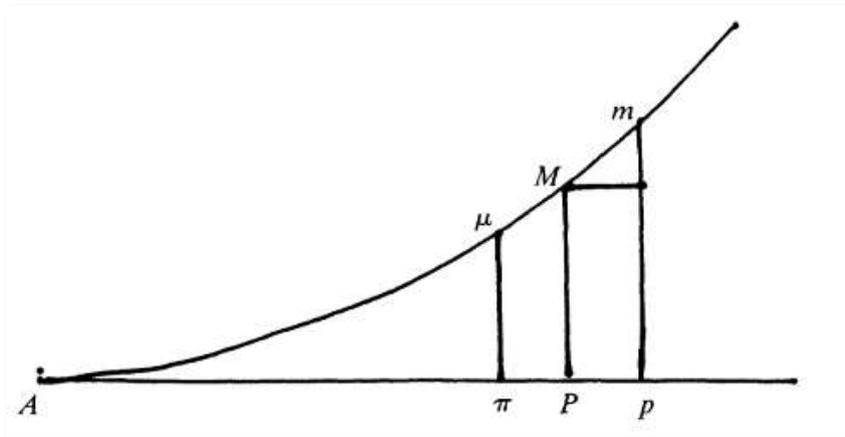
16 ÷ 2g	26	$a = \frac{cc - gg - 2bg}{2g}$
26,	27	$a > 0$
26, 27	28	$\frac{cc - gg - 2bg}{2g} > 0$
28 * 2g	29	$cc - gg - 2bg > 0$
29 + gg +	30	$cc > gg + 2bg$
(2bg		
30,	31	$cc > gg$
31 uuz	32	$C > g$ muß also c größer seyn als g.

**Figura 2:** Representación algebraica de una inecuación  
Fuente: Rahn, 1659, p. 97.

- Funcional: la desigualdad ingresa al campo de las funciones resolviendo problemas de modelación de la vida diaria o de diferentes ciencias, así como en el cálculo infinitesimal; por ejemplo, Grabiener (1997) menciona que se encontró las desigualdades en las primeras demostraciones en el campo del cálculo infinitesimal como el que realizo Colin Maclaurin, demostró:

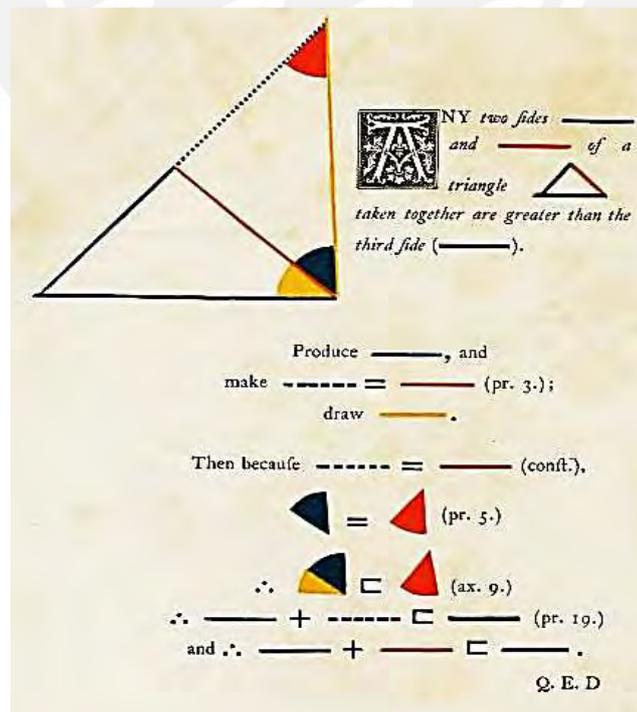
El área bajo la curva hasta  $x$  está dado por  $x^n$ , la ordenada de la curva debe ser  $y = nx^{n-1}$  que se sabe que es función de  $x^n$ , dado que  $x$  e  $y$  crecen juntos, la siguiente desigualdad se mantiene entre las áreas mostradas:  $x^n - (x - h)^n < yh < (x + h)^n - x^n$  (Grabiner, 1997, p. 398-399).

Esta desigualdad fue dada por Maclaurin en forma verbal o en su representación lengua natural de la inecuación, donde el Diagrama de Maclaurin es muy parecido al que mostró Newton en el DeAnalysisi.



**Figura 3:** Área bajo la curva hasta  $x$  está dado por  $x^n$ ,  
Fuente: Grabiner, 1997, p. 398.

Por otro lado, Halmaghi (2012) (citado por Bernardis et al. 2017) menciona que, se conoce de la historia de la matemática que las desigualdades fueron utilizadas como apoyo para resolver situaciones de longitud, áreas y volúmenes. Fink (2000) menciona que la desigualdad se encuentra en la historia de las matemáticas en el ámbito de la geometría al conocer la desigualdad del triángulo, para la demostración de este postulado Byrne (1847) construye un triángulo y relaciona los ángulos internos y la medida de sus lados opuestos, obteniendo la relación de los tres lados así: la suma de dos lados de cualquier triángulo siempre es mayor al tercer lado. En la figura 8, se puede observar el uso de los símbolos de las desigualdades que utilizo Bryne (1847).



**Figura 4:** Demostración de la desigualdad triangular.  
Fuente: Byrne, 1847, p. 20.

Por otra parte, también se encuentra que existen dos grandes enfoques que dividen la historia de la matemática:

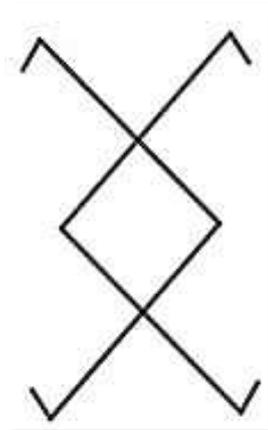
El empírico, todo aquel descubrimiento matemático se tenía que demostrar para ser considerado como verdadero o falso, este enfoque fue explayado principalmente en Babilonia y Egipto.

El deductivo, así como su método la característica principal era su formalidad y practicidad, fue desarrollado principalmente en Grecia, entre los matemáticos destacados de este enfoque tenemos a Thales, Pitágoras, Euclides, Arquímedes y otros.

Para empezar Euclides (1974), en su libro 1 de los Elemento, estudia las desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, por ejemplo “ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto” (p. 2). Así mismo, afirma que “en todo triángulo, el ángulo opuesto a mayor lado es mayor” (p. 19). En el mismo libro 1 de los Elementos Euclides realiza una relación de mayor y menor que: “Si de los extremos de cualquier lado de un triángulo se tiran dos rectas a un punto dentro de él, serán menores que los otros dos lados del triángulo; y el ángulo contenido por ellas será mayor que el comprendido por dichos lados” (Euclides, 1974, p. 21).

También Baldor (1988), expresa una definición de las desigualdades: “Desigualdad es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra” (p. 276). “Los signos de desigualdad son  $>$ , que se lee mayor que, y  $<$  que se lee menor que” (p. 276).

Eves (1969), en su libro *Una Introducción a la Historia de la Matemática* indica que los símbolos que representan a las desigualdades de mayor ( $>$ ) y menor ( $<$ ) fueron acuñados por Tomas Harriot en el año 1931. Bernardis, Nitti y Scaglia (2017) menciona “que Harriot fue inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano” (p. 178). (Ver Fig. 5)



**Figura 5:** insignia que da origen a los símbolos de las desigualdades  
Fuente: Bernardis et al., 2017

### *Symbols of Comparison to be Used in What Follows*

The symbol for equality is  $=$  so that  $a = b$  will signify that  $a$  equals  $b$ .

The symbol for 'greater than' is  $>$  so that  $a > b$  will signify that  $a$  is greater than  $b$ .

The symbol for 'less than' is  $<$  so that  $a < b$  will signify that  $a$  is less than  $b$ .

**Figura 6:** Símbolos Introducidos por Harriot para la Desigualdad

Fuente: Seltman y Goulding, 2007, p. 10.

Así mismo, Bernardis et al. (2017) mencionan que los símbolos de menor o igual ( $\leq$ ) y mayor o igual ( $\geq$ ) fue creado por Pierre Bouguer en el año 1734.

Continuando con el análisis del objeto matemático inecuaciones se ha encontrado en el libro de cálculo con geometría analítica en la parte de la introducción, Swokowski (1988) nos indica:

Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $a - b$  es positivo, se dice que  $a$  es mayor que  $b$  y se escribe  $a > b$ . Esto es equivalente a decir que  $b$  es menor que  $a$  ( $b < a$ ). Los símbolos  $>$  y  $<$  se llaman signos de desigualdad y expresiones como  $a > b$  y  $b < a$  se llaman desigualdades (p. 2).

Lehmann (2004) indica que la relación de orden para los números reales, relaciona la ecuación y desigualdad como opuestos, también expresa que, si los símbolos que representan a las desigualdades tiene la misma dirección entonces tienen el mismo sentido en caso contrario tienen sentido opuestos. También se puede observar que el autor vincula mayor y menor con el fenómeno de ordenación.

El fenómeno de ordenación según la autor, especifica que la desigualdad cumple las propiedades de tricotomía y transitividad, como resultado de la relación de orden surge las desigualdades. El fenómeno de ordenación nos muestra la relación de orden que existe entre un conjunto, en su libro Lehmann (2004) nos indica que:

El número real  $x$  se dice que es mayor que el número real  $y$  siempre que  $x - y$  sea un número positivo. Entonces escribimos  $x > y$  que se lee "x es mayor que y". Así,  $2 > -3$ , pues  $2 - (-3) = 5$  es un número positivo. Se sigue esta definición que el número real  $y$  es menor que el número real  $x$  siempre que  $y - x$  sea un número negativo. Entonces escribimos  $y < x$  que se lee "y es menor que x". Así,  $5 < 7$ , pues  $5 - 7 = -2$  que es un número negativo. El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor.

También vamos a introducir otros dos símbolos útiles:  $a \geq b$ , que se lee “a es mayor o igual que b”, y  $c \leq d$  que se lee “c es menor o igual que d”. En particular, la desigualdad  $a \geq 0$  es un modo conveniente de afirmar que  $a$  representa a todo número no negativo (p. 136).

En cuanto al Fenómeno de Generalización, para Lehmann (2004) existen dos tipos de desigualdades: Absolutas o incondicionales. Cuando la desigualdad no cambia el sentido aunque las variables cambien su valor por ejemplo  $m^2 > -2$ , podemos observar para cualquier valor real que tome  $m$  siempre se cumple la desigualdad de mayor que, otro ejemplo sería  $3 < 8$ , de la misma manera a las condicionales o también los llama inecuaciones son aquellas cuando el sentido si puede cambiar para un intervalo de valores, por ejemplo  $x + 3 < 7$ , el sentido de la desigualdad no cambia si  $x < 4$ , pero si  $x > 4$ , la desigualdad cambia.

Se puede afirmar que el conjunto de solución de una desigualdad absoluta son todos los números reales y de una desigualdad condicional es una parte o subconjunto de los números reales.

Baldor (1988) indica una definición a nuestro objeto matemático: “Una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones se llaman también desigualdades de condición” (p. 279).

Varios autores definen la desigualdad e inecuaciones, entre ellos tenemos Martínez y Varas (2013): “Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran una cantidad desconocida o incógnita. Resolver una inecuación quiere decir determinar todos los posibles valores de la incógnita que satisfacen la inecuación” (p. 136).

Lehmann (2004), en su libro Álgebra, especifica las propiedades de las desigualdades que necesitamos para desarrollar el objeto matemático inecuación lineal:

1. Si  $x > y$ , “la desigualdad no se altera si se suman en ambos miembros la misma cantidad”, entonces  $x + a > y + a \vee x - a > y - a$
2. Sea  $a > 0$ , si  $x > y$ , “la desigualdad no se altera si se multiplican o dividen por la misma cantidad positiva”, entonces  $x \cdot a > y \cdot a \vee \frac{x}{a} > \frac{y}{a}$
3. Sea  $a < 0$ , si  $x > y$ , “ la desigualdad cambia de sentido si ambos miembros se multiplica por, o se dividen entre, la misma cantidad negativa”, entonces  $x \cdot a < y \cdot a \vee \frac{x}{a} < \frac{y}{a}$

4. “La desigualdad no cambia de sentido si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido”. Si  $x > y, m > n \rightarrow x + m > y + n$

Las propiedades descritas anteriormente también se comprueban para las desigualdades mayor que ( $>$ ), menor o igual que ( $\leq$ ), mayor o igual que ( $\geq$ ), estas propiedades son necesarias para resolver una inecuación.

De la misma manera Swokowski (1988) indica las propiedades de las desigualdades de la siguiente manera.

- Si  $p > q$  y  $q > r$ , entonces  $p > r$
- Si  $p > q$ , entonces  $p + r > q + r$
- Si  $p > q$ , entonces  $p - r > q - r$
- Si  $p > q$  y  $r$  es positivo, entonces  $p \cdot r > q \cdot r$
- Si  $p > q$  y  $r$  es negativo, entonces  $p \cdot r < q \cdot r$

Igualmente, Stewart, Redlin y Watson (2012) proporcionan reglas o propiedades de las desigualdades para ser utilizadas en el desarrollo de una inecuación lineal.

**Tabla 3**

*Reglas para resolver desigualdades*

REGLAS PARA DESIGUALDADES	
REGLA	DESCRIPCIÓN
1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$	<b>Sumar</b> la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente
2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$	<b>Restar</b> la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente
3. Si $C > 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$	<b>Multiplicar</b> cada lado de una desigualdad por la misma cantidad <i>positiva</i> da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$	<b>Multiplicar</b> cada lado de una desigualdad por la misma <i>cantidad negativa</i> <i>invierte la dirección</i> de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ Y $B > 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	<b>Tomar</b> recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades <i>positivas</i> <i>invierte la dirección</i> de la desigualdad
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$ entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar

Fuente: Stewart *et al.* (2012, p. 73).

Otro aspecto importante en el tratamiento de las inecuaciones lineales es la que afirma Lima (1977)

Dado dos números reales  $m, n$  se escribe  $m < n$  cuando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $m + p = n$  se dice que  $m$  es menor que  $n$ . La notación  $m \leq n$

significa  $m < n$  ó  $m = n$ . Se puede probar que  $m < n$  y  $n < p \rightarrow m < p$  (transitividad) y que dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera, se cumple una, y solo una, de estas tres posibilidades:  $m < n, m = n$  o  $m > n$ .

Una de las propiedades más importantes de la relación de orden  $m < n$  entre números naturales es el llamado principio de buena ordenación (p. 3).

Lehmann (2004) diferencia entre ecuación y desigualdad, como igualdad y desigualdad entre dos expresiones, también nos indica que para diferenciar entre los símbolos mayor y menor debemos observar que “la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor” (p. 136), también nos muestra que los símbolos “ $a \geq b$ , se lee a es mayor o igual que b, y  $c \leq d$  se lee c es menor o igual que d” (p. 136)

En el libro de Álgebra cuyos autores Martínez y Varas (2013), expresan que, “La resolución de inecuaciones está basada en el uso de las propiedades de las desigualdades, las cuales permite en transformar la inecuación en otra equivalencia” (p. 139).

También los autores Triana y Moreno (2013) manifiestan que resolver una inecuación lineal se puede seguir una secuencia de pasos utilizando las propiedades de las desigualdades, también se puede optar por emplear la representación gráfica, tomando como base a la ecuación lineal cambiando el signo del igual con los signos de las desigualdades menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ).

De la misma manera, los autores Triana y Morenos (2013), mencionan:

Una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas y Para resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación, los principios en que basa la resolución de las inecuaciones son en las propiedades de las desigualdades. Dos desigualdades que tienen exactamente el mismo conjunto solución son llamadas desigualdades equivalentes. Como en las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es reemplazarla por una serie de desigualdades equivalentes, hasta que se obtenga una desigualdad con una solución obvia, tal como  $x < 3$ . Obtenemos desigualdades equivalentes aplicando algunas de las operaciones que se usaron para encontrar ecuaciones equivalentes (p. 27).

Para un mejor entendimiento de la aplicación de las propiedades de las desigualdades en la resolución de una inecuación lineal, Stewart et al. (2012) proporciona un ejemplo en su libro “Pre calculo, matemáticas para el cálculo”:

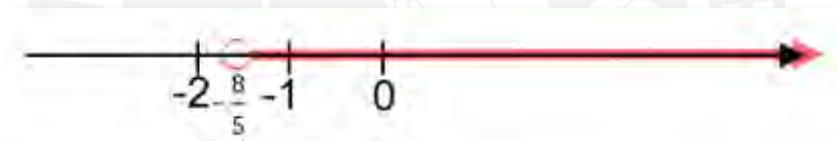
Resuelve la desigualdad  $5x < 10x + 8$  y grafique la solución:

Solución:

$5x < 10x + 8$	Desigualdad
$5x - 10x < 10x + 8 - 10x$	Reste $10x$
$-5x < 8$	
$\left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) < \left(-\frac{1}{5}\right)(8)$	Multiplique por $-\frac{1}{5}$ e invertir la desigualdad
$x > -\frac{8}{5}$	

Interpretación al lenguaje natural: El conjunto de solución que satisface a la inecuación, son todos los números mayores a  $-\frac{8}{5}$

Representación gráfica en la recta:



**Figura 7:** Representación gráfica en la recta  
Fuente: Stewart et al., 2012

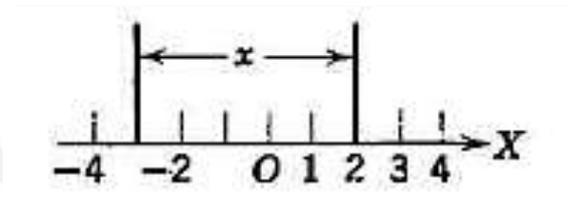
Como podemos observar la solución de una inecuación es un conjunto infinito de números reales, así como lo confirma Stewart (2012): “Resolver una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad” (p. 74).

El conjunto de los números reales que se obtiene de resolver una inecuación lineal y se puede representar por medio de intervalos, así como lo representa Lima (1997) si  $x \in R$  entonces llamamos intervalos:

$[a, b] = a \leq x \leq b$	$] - \infty, b[ = x < b$
$] a, b[ = a < x < b$	$[a, +\infty] = a \leq x$
$[a, b[ = a \leq x < b$	$] a, +\infty[ = a < x$
$] a, b] = a < x \leq b$	$] - \infty, +\infty[ = R$
$] - \infty, b] = x \leq b$	

También podemos aprovechar lo mencionado por Lehmann (2004): “La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geoméricamente en un sistema coordenado unidimensional” (p. 135). Este sistema se refiere a la representación del conjunto de solución de la inecuación en la recta numérica que es la relación entre el conjunto de números reales con cada punto de la recta numérica, por lo tanto “diremos que un sistema de coordenadas lineal es un medio muy conveniente para representar los números reales” (Lehmann, 2004, p. 75)

Por ejemplo, Lehmann (2004), realiza la representación gráfica en la recta numérica de la siguiente desigualdad:  $-3 < x < 2$ , que representa a todos los números reales entre -3 y 2.



**Figura 8:** Representación gráfica de una desigualdad en la recta numérica  
Fuente: Lehmann, 2014, p. 145

También es importante para el estudio del objeto matemático *inecuaciones lineales* conocer los errores y dificultades que pueden tener los estudiantes, entre estos tenemos:

- Cambio de registro de representación, por ejemplo, del registro lengua natural al registro algebraico. Así lo menciona Duval (1995).
- Confundir la inecuación con una ecuación, por tanto, realizar los tratamientos equivocados, para este caso Borello (2010), Garrote et al. (2004) y Moraleda (2010) menciona que se debe tomar atención a este error que se presenta entre la analogía de ecuación e inecuación.
- Al hallar el conjunto de solución de la inecuación, uno de los errores más comunes es no saberlo interpretar; en este caso Moraleda (2010) menciona que dado un conjunto de solución, el estudiante tiene dificultad de representarlo de otra manera. También Santos y Lozada (2010) mencionan que la dificultad del estudiante, esta no diferencia entre intervalo abierto o cerrado; y para Garrote et al. (2004), la dificultad está en que el estudiante no interpreta la solución.
- Otro error común en el desarrollo de las inecuaciones es la representación gráfica; así como lo afirma Borello (2010), los estudiantes cometen este tipo de error porque la gráfica viene como consecuencia de una tabulación.
- Para Maroto (2013), otro error que comenten los estudiantes al trabajar con inecuaciones es no diferenciar los símbolos de  $>$  o  $<$ .

## 2.2 Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos

Para nuestra investigación se ha utilizado el texto escolar de Matemática 3 de educación secundaria de la editorial Santillana y el cuaderno de trabajo Matemática 3 de la misma editorial, estos libros son distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú a las instituciones educativas públicas.

La descripción de los libros se realizará tomando en cuenta la presentación del objeto matemático inecuaciones lineales y su relación con la teoría de Representación Semiótica de Duval (1995).

En el libro de texto del Ministerio de Educación del Perú (2016b), nuestro objeto de estudio *inecuaciones lineales* se encuentran en el capítulo 5, después de sistemas de ecuaciones lineales.

Empieza redactando el uso de las inecuaciones lineales en la vida diaria, así como se observa en la fig. 9, lo resaltante de esta actividad son los términos máximo y mínimo ya que permite identificar el registro lengua natural de una inecuación.



**Figura 9:** Introducción del tema

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En el texto del Ministerio de Educación del Perú (2016b) se presenta una definición de la inecuación lineal (fig. 10), como una desigualdad, así como lo resalta Baldor (1988), resaltando los signos de las desigualdades mencionadas por Eves (1969) y el registro algebraico de las inecuaciones lineales, así como fórmula Duval (1995).

Una inecuación es una desigualdad algebraica que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por los signos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  o  $\geq$ . Son inecuaciones expresiones tales como:

$$2x + 1 \leq x + 2$$

$$2x - 3 \geq y$$

$$5x + 3 > x + 4$$

**Figura 10:** Definición de inecuación lineal

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En la figura 11, se presenta una inecuación lineal representada en el registro algebraico, el procedimiento para resolver la inecuación lineal que nos presenta es el siguiente: separa en dos partes la expresión que se encuentra a la izquierda de la desigualdad y la expresión que está a la derecha, luego asigna valores enteros a la variable  $x$  para obtener dos valores numéricos para cada expresión y finalmente compararlas entre ellas, realiza este procedimiento hasta que los valores que asigna a la variable  $x$  no cumpla con la condición de la desigualdad, concluyendo que los únicos valores que cumplen con la desigualdad son todos los números menores que 2. En esta actividad no se evidencia tratamiento ni conversión, pero se puede señalar que al realizar un tratamiento a una inecuación lineal se obtiene una inecuación equivalente, también se puede observar que los valores que tiene  $x$  son números enteros, omitiendo los subconjuntos restantes del conjunto de los números reales.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen cierta la desigualdad. Estos valores son las raíces de la inecuación. Así, la desigualdad  $x + 3 < 7 - x$  es una inecuación, ya que si damos valores a  $x$ , obtenemos:

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$x + 3$	...	0	1	2	3	4	5	6	...
$7 - x$	...	10	9	8	7	6	5	4	...
	<	<	<	<	<	<	=	>	>

- Para los valores de  $x$  menores que 2, se verifica que  $x + 3 < 7 - x$ .
- Para el valor de  $x$  igual a 2:  $x + 3 = 7 - x$
- Para los valores de  $x$  mayores que 2:  $x + 3 > 7 - x$

La solución de la inecuación es el conjunto de valores  $x < 2$ .

Las inecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Así, las inecuaciones  $5x + 3 > x + 4$  y  $4x > 1$  son equivalentes, ya que ambas tienen la misma solución:  $x > \frac{1}{4}$ .

**Figura 11:** Explicación de cómo hallar el conjunto solución de una inecuación lineal  
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En la figura 12, se muestran las propiedades de las desigualdades que permite tener un sustento matemático en la resolución de una inecuación lineal, consideradas en el libro del Ministerio de Educación.

Estas propiedades descritas por Lehmann (2004) facilitarán a los estudiantes realizar los tratamientos adecuados de una inecuación lineal, confirmado por Martínez y Varas (2013)

## Propiedades

Para resolver inecuaciones, hay que ir transformándolas en otras equivalentes más sencillas. Para ello, hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene una inecuación equivalente a la primera.

$$\text{Si } A \leq B \rightarrow A + C \leq B + C$$

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número mayor que cero, se obtiene otra inecuación equivalente.

$$\text{Si } A \leq B \text{ y } C > 0 \rightarrow A \cdot C \leq B \cdot C$$

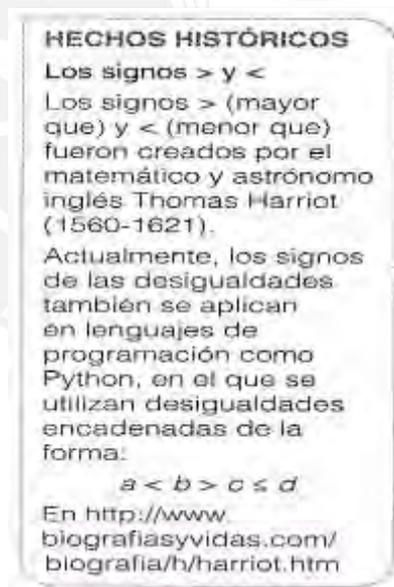
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número menor que cero, se obtiene otra inecuación equivalente a la dada, con el sentido de la desigualdad cambiado.

$$\text{Si } A \leq B \text{ y } C < 0 \rightarrow A \cdot C \geq B \cdot C$$

**Figura 12:** Propiedades de una inecuación lineal

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

La historia de la matemática también está presente en el libro de Ministerio de Educación del Perú (2016b), en la figura 13 se puede observar la narración de una reseña histórica de los signos de “mayor y menor que” de la misma forma como lo señala Eves (1969).



**Figura 13:** Hechos históricos

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

El libro Ministerio de Educación del Perú (2016b) tiene un espacio denominado “TEN EN CUENTA” (ver fig. 14), donde se puede observar el uso del registro algebraico para nombrar una propiedad de las desigualdades que más adelante se usará para realizar tratamientos como lo llama Duval (1995).

**▶ TEN EN CUENTA**

Si un número  $x$  verifica las inecuaciones  $x \leq b$  y  $x \geq a$ , significa que está comprendido entre  $a$  y  $b$ . Por lo tanto, se puede escribir:

$$a \leq x \leq b$$

**Figura 14:** Ten en Cuenta  
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En la figura 15, obtenida del libro del Ministerio de Educación del Perú (2016b), se presenta al estudiante:

- El registro de representación de las inecuaciones lineales en forma algebraica y su relación con los signos de desigualdad (mayor, menor, mayor igual y menor igual que)
- La representación en forma de intervalo de la solución de una inecuación, así como lo muestra Lima (1997).
- La representación gráfica en la recta de la solución de la inecuación, así como lo afirma Lehmann (2004).
- La lectura de cada desigualdad, como lo refiere Lehmann (2004), esto permitirá al estudiante reconocer una inecuación lineal en su registro lengua natural.

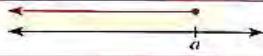
### Inecuaciones lineales con una incógnita

Una inecuación lineal, o de primer grado, con una incógnita es una desigualdad algebraica que se puede reducir a una de estas formas:  
 $ax + b < 0$ ,  $ax + b \leq 0$ ,  $ax + b > 0$  o  $ax + b \geq 0$ , donde  $a \neq 0$ .

Por ejemplo, la desigualdad  $2x - 6 < 5x$  es una inecuación de primer grado con una incógnita porque el mayor exponente de  $x$  es 1.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que satisfacen la inecuación dada. Para ello, se aplican las propiedades de las desigualdades.

La solución de una inecuación se representa en forma de intervalo, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Solución	Lectura	Intervalo	Representación en la recta
$x > a$	Números mayores que $a$	$]a; \infty[$	
$x < a$	Números menores que $a$	$] -\infty; a[$	
$x \geq a$	Números mayores o iguales que $a$	$[a; \infty[$	
$x \leq a$	Números menores o iguales que $a$	$] -\infty; a]$	

**Figura 15:** Inecuaciones lineales con una incógnita  
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 78.

En el texto del estudiante del Ministerio de Educación del Perú (2016b) en la sección “COMO HACER” (fig. 16), se presenta, según Duval (1995), los tres procesos cognitivos: identificar el registro de representación, la conversión y el tratamiento:

- Primer ejemplo, se identifica el registro algebraico de la inecuación lineal y se realiza una conversión hacia el registro lenguaje natural.
- Segundo ejemplo, del registro algebraico se realiza una representación gráfica en la recta numérica.
- Tercer ejemplo, se propone el registro algebraico de una inecuación lineal, luego se identifica con claridad el proceso de tratamiento del registro algebraico, empleando las propiedades de la desigualdad, también podemos resaltar que la solución se puede expresar en forma de intervalo y representarlo gráficamente en la recta numérica.

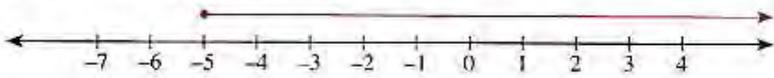
**✓ CÓMO HACER**

1. Determina cómo se lee la desigualdad  $x < 15$ .

- Esta desigualdad se lee como los números reales menores que 15.

2. Representa la desigualdad  $x \geq -5$  en la recta numérica.

- La desigualdad  $x \geq -5$  corresponde al intervalo  $[-5; \infty[$ . Por lo tanto, su representación en la recta numérica es:



3. Resuelve la inecuación  $x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$ .

- Realizamos los siguientes pasos:

$$x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x) \leftarrow \text{Inecuación}$$

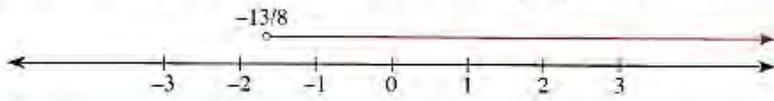
$$x + 3x - 15 < 6 - 8 + 12x \leftarrow \text{Se aplica la propiedad distributiva}$$

$$x + 3x - 15 + 15 - 12x < 6 - 8 + 12x + 15 - 12x \leftarrow \text{Se resta } 12x \text{ y se suma } 15 \text{ a cada miembro}$$

$$-8x < 13 \leftarrow \text{Se reducen términos semejantes}$$

$$x > -\frac{13}{8} \leftarrow \text{Se divide entre } -8 \text{ y se cambia el sentido de la desigualdad}$$

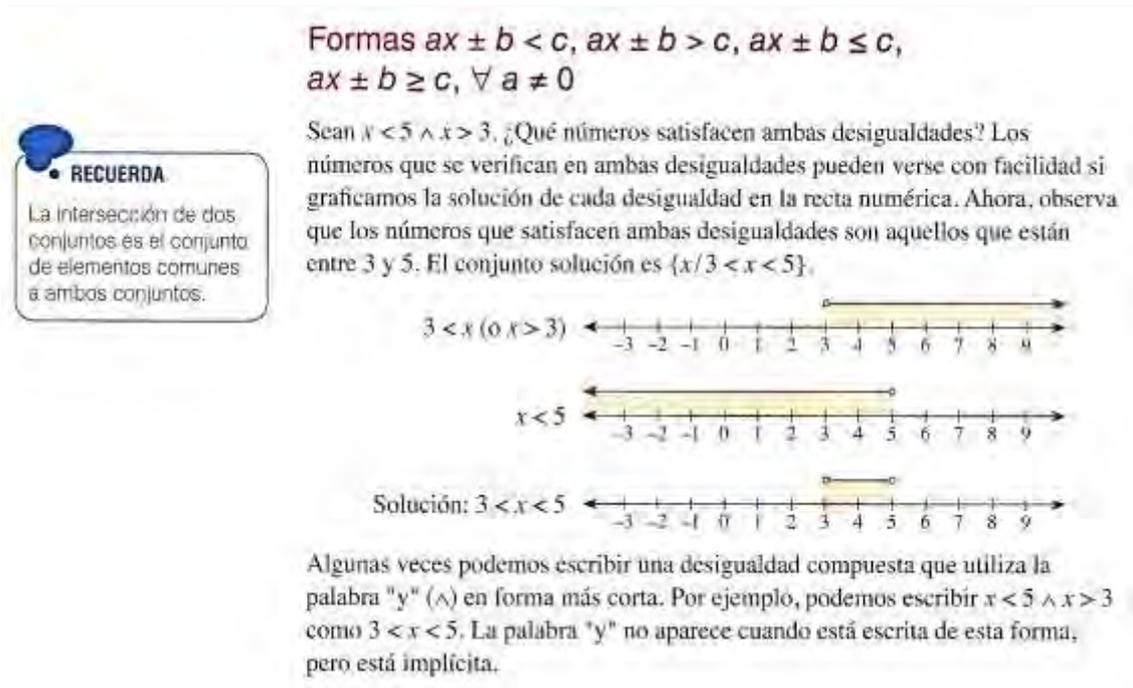
Por lo tanto, la solución de la inecuación es el conjunto de números reales mayores que  $-\frac{13}{8}$ , que corresponde al intervalo  $]-\frac{13}{8}; \infty[$ . Se representa así:



**Figura 16:** Cómo Hacer

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En la siguiente parte del libro de texto Ministerio de Educación del Perú (2016b), se puede observar dos desigualdades, luego la representación gráfica de estas en la recta numérica con la finalidad de observar con exactitud qué conjunto de números coinciden en ambas desigualdades, esta intersección lo expresa en una desigualdad compuesta representada en el registro algebraico.



**Figura 17:** desigualdad compuesta

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 79.

En la siguiente figura de la sección “CÓMO HACER” se presenta un ejemplo de inecuación compuesta en el registro algebraico:

Primero, realiza el tratamiento de una inecuación lineal compuesta separándolos en dos partes.

Segundo, realiza los tratamientos de las dos inecuaciones por separado utilizando transposición de términos hasta llegar a dos desigualdades.

Tercero, representación gráfica en la recta numérica de las dos desigualdades para observar la intersección.

Cuarto, expresa la intersección en un intervalo.

Se puede observar en este ejercicio tratamientos en una inecuación lineal representado en el registro algebraico, así como lo indica Duval(1995) que los tratamientos son transformaciones que se realizan en un mismo registro.

**✓ CÓMO HACER**

Resuelve  $-1 < x + 3 \leq 5$ .

- Identificamos ambas desigualdades:  $-1 < x + 3 \wedge x + 3 \leq 5$
- Resolvemos cada una por separado:
 

$-1 < x + 3$	$x + 3 \leq 5$
$-1 - 3 < x$	$x \leq 5 - 3$
$-4 < x$	$x \leq 2$
- Graficamos en la recta numérica (ver margen).

C.S. =  $] -4; 2 ]$

**Figura 18:** Inecuación compuesta I

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 79.

En la figura 19 se presenta un ejemplo parecido al anterior, con la diferencia de los tratamientos en el registro algebraico.

Primero, identificamos que la inecuación se encuentra representado en forma de registro algebraico.

Segundo, se realizan tratamientos correspondiente a este registro empleando las propiedades descritas en Lehmann (2004).

Tercero, la representación del registro algebraica hacia un intervalo.

**RECUERDA**

Cuando multiplicamos o dividimos una desigualdad por un número negativo, la dirección del signo de desigualdad se invierte.

**✓ CÓMO HACER**

Resuelve la desigualdad  $-2 < \frac{4 - 3x}{5} \leq 8$ .

- Multiplicamos las tres partes por 5 para eliminar el denominador:  
 $-2(5) < (5) \frac{4 - 3x}{5} \leq 8(5) \rightarrow -10 < 4 - 3x \leq 40$
- Restamos 4 a las tres partes:  
 $-10 - 4 < 4 - 3x - 4 \leq 40 - 4 \rightarrow -14 < -3x \leq 36$
- Dividimos entre  $-3$  las tres partes de la desigualdad:  
 $\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{36}{-3} \rightarrow \frac{14}{3} > x \geq -12$

Como por lo general escribimos desigualdades con el valor más pequeño a la izquierda, reescribimos la solución como:  $-12 \leq x < \frac{14}{3}$

C.S. =  $] -12; \frac{14}{3} ]$

**Figura 19:** Inecuación compuesta II

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 77.

En el libro de texto del Ministerio de Educación del Perú (2016b), la última sección del tema se expone la resolución de problemas en contexto. Duval (2006) expresa que es

indispensable un “contexto de representación”, por tanto, para el autor del libro de texto es importante contextualizar situaciones, así como se observa en las figuras 20 y 21, se presentan problemas donde se identifica el siguiente procedimiento:

- Identificamos el registro lenguaje natural.
- Luego se realiza la conversión hacia el registro algebraico.
- Se realizan los tratamientos correspondientes al registro algebraico.
- Para culminar se realiza otra conversión, ahora del registro algebraico hacia el registro lenguaje natural como respuesta final.

Este problema es importante porque el estudiante puede tener la posibilidad de transitar por lo menos en dos registros de representación de la inecuación lineal, así como lo afirma Duval (2006) el estudiante debe experimentar diferentes registros de representación semióticas.

✓ CÓMO HACER
EN CONTEXTO

Un grupo de estudiantes dispone de S/ 400 para comprar las entradas para visitar la ciudadela de Machu Picchu. Si compran la entrada a precio normal de S/ 32, les faltaría dinero, pero si compran la entrada a la tarifa promocional de S/ 22 establecida por el Ministerio de Cultura para fomentar la visita a la ciudadela a partir de las 13 horas, les sobraría dinero. ¿Cuántos estudiantes como máximo hay en este grupo?

- Existen dos condiciones. Sea  $x$  el número de entradas:

Si compran entradas de S/ 32, les falta dinero.	Si compran entradas de S/ 22, les sobra dinero.
$32x > 400$	$22x < 400$
$x > \frac{400}{32}$	$x < \frac{400}{22}$
$x > 12,5$	$x < 18,18$

- De ambas condiciones se obtiene un número natural mayor que 12,5 y menor que 18,18. Entonces:  $12,5 < x < 18,18$   
C.S. = {13; 14; 15; 16; 17; 18}

El número máximo de estudiantes que conforman el grupo es 18.

**Figura 20:** Como hacer I  
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 80.

## ✓ CÓMO HACER

EN CONTEXTO

Un laboratorio peruano importa la muestra de una vacuna contra el virus del papiloma humano, en cuyas especificaciones se indica que debe mantenerse a una temperatura entre los 34 °F y 60 °F. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados centígrados en que la muestra debe mantenerse?

- Las especificaciones escritas en términos de desigualdad son:

$$34 \leq F \leq 60$$

- Expresamos la temperatura en grados Fahrenheit en función de la temperatura en grados Celsius:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

- Sustituimos en la desigualdad y resolvemos:

$$34 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 60$$

$$34 - 32 \leq \frac{9}{5}C + 32 - 32 \leq 60 - 32 \rightarrow 2 \leq \frac{9}{5}C \leq 28$$

$$2 \cdot 5 \leq \frac{9}{5}C \cdot 5 \leq 28 \cdot 5 \rightarrow 10 \leq 9C \leq 140$$

$$\frac{10}{9} \leq C \leq \frac{140}{9} \rightarrow 1,1 \leq C \leq 15,6$$

La muestra debe mantenerse entre 1,1 °C y 15,6 °C.

**Figura 21:** como hacer II

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016b, p. 80.

En el libro de texto del Ministerio de Educación del Perú (2016b) usado tanto por el docente y estudiantes del tercer grado de educación secundaria, se puede concluir que presentan las inecuaciones en la forma de registro: lenguaje natural y algebraico, enfocándose en tratamientos en el registro algebraico; se observa también conversión en el registro lenguaje natural hacia el registro algebraico y viceversa.

También se puede concluir que, el tratamiento es usado solo en la representación algebraica, así como lo indica Eisenberg y Dreyfus (1991), Hitt (2003) sobre la utilización de las diferentes representaciones y la resistencia de pasar de una representación a otra, también indican que hay un predominio en la representación algebraica.

Otro material que el MINEDU proporciona a los estudiantes de las instituciones públicas es el cuaderno de trabajo Matemática 3, Ministerio de Educación del Perú (2016c), que analizaremos a continuación.

## CUADERNO DE TRABAJO

Este documento es utilizado por los estudiantes para reforzar el tema tratado, consta de varias actividades con el propósito de desarrollar las competencias y capacidades en matemática.

Cada actividad consta de diferentes estrategias como lo observamos en la figura 23.

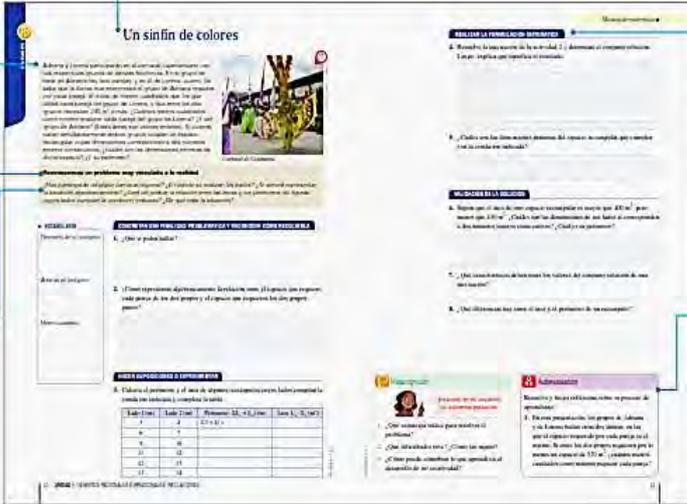
**Situación significativa**  
Texto y soporte gráfico como estímulo principal.

**Subtítulo** que sugiere el comienzo de la actividad.

**Preguntas previas** que orientan y aseguran la comprensión del problema y su resolución sin dificultad.

**Título de la ficha**  
Elemento distintivo que alude a una situación significativa.

**Un sin fin de colores**



**Desarrollo de la ficha**  
Actividades y preguntas orientadoras que guían el proceso de resolución de la situación significativa.

**Actividades de evaluación y metacognición**  
Interrogantes para reflexionar sobre lo aprendido, las estrategias seguidas y los recursos usados, así como actividades complementarias.

**Figura 23:** estrategias del cuaderno de trabajo  
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 04.

Para el presente análisis tomaremos las actividades que se relacionen con nuestro objeto matemático inecuaciones lineales. En la figura 24, titulado: Valor Energético, el cuaderno de trabajo presenta una situación problemática, por tanto, el estudiante tiene que conocer los terminos relacionados a las desigualdades como son: como máximo y relacionarlo con “menor igual que”, como mínimo y relacionarlo con “mayor o igual que” para luego realizar la conversión del registro lenguaje natural hacia el registro algebraico.

## Valor energético

Para un trabajo de su colegio, Israel busca en Internet información sobre los valores energéticos de los alimentos. Durante su búsqueda, encontró la página del Instituto Nacional de Salud del Perú y elaboró un cuadro con la información que se muestra. Además, Israel practica natación y sabe que necesita consumir como máximo 2500 kilocalorías diarias. ¿Cuál es el mínimo valor energético de 100 g de quinua? ¿Cuál es el máximo valor energético de 200 g de camote? ¿Cuántas kilocalorías le faltan consumir a Israel si hoy tomó un desayuno con el máximo valor energético compuesto por 150 g de pan, 200 g de avena, 50 g de manzana y 100 g de aceituna?

Nombre del alimento	Cantidad	Energía (Kcal)
Arroz	100 g	270 a 350
Camote	100 g	100 a 340
Avena	100 g	320 a 380
Pan	100 g	250 a 260
Fideo	100 g	300 a 378
Pollo	100 g	120 a 200
Plátano	100 g	80 a 95
Tomate	100 g	23 a 70
Gaseosa	100 mL	40 a 60
Manzana	100 g	60 a 75
Quinua	100 g	94 a 352
Muña	100 g	198 a 266
Aceituna	100 g	280 a 305
Chicha	100 mL	23 a 55

### Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad

¿En cuál de las columnas del cuadro debes centrar tu atención para responder las preguntas? ¿Cómo están expresadas las cantidades? ¿Será necesario realizar alguna conversión de unidades? ¿Qué estrategia aplicarás para responder las preguntas? ¿De qué trata el problema?

### Figura 24: Situación problemática 1

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 40.

En la figura 25, titulado Promedio de Notas, el estudiante debe tener la capacidad de reconocer que “nota mínima” o “nota aprobatoria mínima” son términos que permitan convertir del registro lenguaje natural hacia el registro algebraico y así realizar el tratamiento al registro algebraico para hallar la solución la nota mínima deseada.

## Promedio de notas

En una institución educativa del Cercado de Lima, los docentes de Matemática acordaron que la nota de una de las capacidades del área se obtendrá con la media aritmética de las calificaciones de tres evaluaciones. Si Marisol ha obtenido 12 en la primera evaluación y 08 en la segunda, ¿cuál es la nota mínima que debe obtener en la tercera evaluación para aprobar la capacidad?

Se sabe que la nota aprobatoria mínima es 11 y al hacer los cálculos se aplicará el redondeo por aproximación al entero.



### Resolvemos paso a paso

¿Cuáles son las notas obtenidas por Marisol? ¿Qué es la media aritmética? ¿Por qué es importante saber calcularla? ¿Cuál es la nota mínima aprobatoria?

### Figura 25: Situación problemática 2

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 42.

En la figura 26, titulado: Cultivos Peruanos, se proponen un juego matemático donde los estudiantes deben averiguar el nombre de una fruta, para esto deben resolver inecuaciones lineales representadas en el registro algebraico, el estudiante debe realizar

tratamientos hasta llegar a una inecuación simple, la variable seguida de una desigualdad y un número. Se puede observar que en esta actividad el estudiante no realiza ninguna conversión pero si varios tratamientos en el registro algebraico de la inecuación lineal.

### Cultivos peruanos

En el Día del Logro, un grupo de estudiantes presentó, mediante un juego matemático, el nombre de un cultivo peruano propio de la sierra central, cuya nominación científica es *Lepidium peruvianum*. Este juego consistía en resolver un grupo de desigualdades y relacionarlas con su conjunto solución para obtener el nombre del cultivo. ¿Cuál es el nombre de dicho cultivo?

C	$(3x - 1)/5 > (x + 1)/2 + (7 - x)/7$								
M	$x/2 + x/3 + x/6 < 1$								
A	$(x - 1)/3 + 2x/5 \leq 2x/3$								
U	$7/10x - 1/3 \geq 1/5x + 2$								
A	$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 > x + 1$								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x &lt; 1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>x \leq 5</math></td> <td style="text-align: center;"><math>x &gt; 7</math></td> <td style="text-align: center;"><math>x &gt; 1/11</math></td> </tr> </tbody> </table>						$x < 1$	$x \leq 5$	$x > 7$	$x > 1/11$
$x < 1$	$x \leq 5$	$x > 7$	$x > 1/11$						

**Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad**

*¿Qué beneficios conoces de algún cultivo peruano? ¿Qué otros cultivos peruanos conoces? ¿Qué propiedades aplicarás para encontrar el conjunto solución de cada desigualdad?*

**Figura 26:** Situación problemática 3

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 46.

En la figura 27, ¿Quién tiene la razón?, en esta actividad el estudiante se encuentra con un registro algebraico de la inecuación lineal, para resolverlo tiene que realizar transformaciones y luego decidir cuál de las dos expresiones es la afirmación correcta, para ello debe realizar una conversión en el registro algebraico al registro lenguaje natural.

### ¿Quién tiene razón?

Tres compañeros resuelven individualmente la desigualdad  $-3 \leq (2x - 5)/3 \leq 5$  propuesta por la profesora de Matemática. Luego de unos minutos, ella pregunta: "¿Entre qué valores están comprendidos los valores de  $x$ ?" Dos de los estudiantes, José y Carmen, luego de realizar su trabajo personal, comparten sus resultados. Teniendo en cuenta la información de la imagen, ¿quién acertó con la respuesta?



**Reconocer un problema muy vinculado a la realidad**

*¿Los resultados obtenidos por José y Carmen son iguales? ¿Qué procedimiento realizarás para encontrar la solución? ¿Qué propiedades aplicarás? ¿De qué trata el problema?*

**Figura 27:** Situación problemática 4

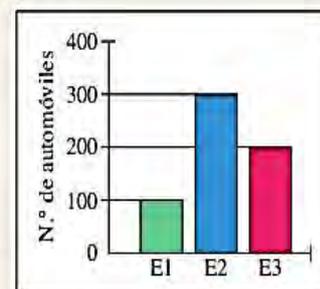
Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 48.

En la figura 28, titulada Un Lugar para Estacionar, se presenta al estudiante un gráfico estadístico donde se puede visualizar la cantidad máxima de automóviles que se pueden colocar en cada estacionamiento, pero para poder resolver el problema el estudiante debe ser capaz de realizar tres conversiones del registro lengua natural hacia el registro algebraico. Primero: relacionar “cantidad máxima” con la desigualdad “ $\leq$ ”, de esta forma:  $E_1 \leq 100$ ,  $E_2 \leq 300$ ,  $E_3 \leq 200$ . Segundo: relacionar “Se sabe que si dicha cantidad se redujera a la sexta parte, se ocuparía menos de la décima parte de la capacidad total de los estacionamiento” con  $\frac{E_1 + E_2 + E_3}{6} < 60$ . Tercero: relacionar “si se duplicará dicha cantidad de automóviles, faltaría espacio para que se estacionen, por lo menos 116 automóviles más” con  $2(E_1 + E_2 + E_3) > 716$ . Luego realizar los tratamientos necesarios en el registro algebraico para llegar a la conclusión o respuesta del problema, realizando la última conversión del registro algebraico:  $E_1 + E_2 + E_3 < 360 \wedge E_1 + E_2 + E_3 > 358$  al registro lengua natural: la cantidad de automóviles que había en el estacionamiento es 359.

## Un lugar para estacionar

El gráfico muestra la cantidad máxima de automóviles que pueden ubicarse en los tres estacionamientos de un centro comercial.

Una mañana había cierta cantidad de automóviles distribuidos en los tres estacionamientos. Se sabe que si dicha cantidad se redujera a la sexta parte, se ocuparía menos de la décima parte de la capacidad total de los estacionamientos. Por otro lado, si se duplicara dicha cantidad de automóviles, faltaría espacio para que se estacionen, por lo menos, 116 automóviles más. ¿Cuántos automóviles había en los estacionamientos esa mañana?



### Resolvemos paso a paso

*¿Por qué crees que debe normarse la cantidad máxima de automóviles que se pueden estacionar en un lugar público? ¿Se podrá resolver la situación utilizando inecuaciones? ¿Será útil modificar el problema y trabajarlo por partes? ¿Cómo está presentada la información?*

**Figura 28:** Situación problemática 5

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 50.

En la figura 29, titulado Un Sinfín de Colores, para resolver la situación problemática el estudiante debe ser capaz de representar la relación del área que necesita cada pareja de los dos grupos y área que necesitan los dos grupos juntos, por lo tanto, debe realizar una conversión del registro lenguaje natural hacia el registro algebraico luego realizar tratamientos adecuados a la representación algebraica.

## Un sinfín de colores

Adriana y Lorena participarán en el carnaval cajamarquino con sus respectivos grupos de danzas folclóricas. En el grupo de baile de Adriana hay seis parejas, y en el de Lorena, cuatro. Se sabe que la danza que interpretará el grupo de Adriana requiere, por cada pareja, el doble de metros cuadrados que los que utiliza cada pareja del grupo de Lorena, y que entre los dos grupos necesitan  $240 \text{ m}^2$  o más. ¿Cuántos metros cuadrados como mínimo requiere cada pareja del grupo de Lorena? ¿Y del grupo de Adriana? (Estas áreas son valores enteros). Si cuando bailan simultáneamente ambos grupos ocupan un espacio rectangular cuyas dimensiones corresponden a dos números enteros consecutivos, ¿cuáles son las dimensiones mínimas de dicho espacio? ¿Y su perímetro?



Carnaval de Cajamarca.

### Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad

¿Has participado de algún carnaval regional? ¿En dónde se realizan los bailes? ¿Te servirá representar la situación algebraicamente? ¿Será útil probar la relación entre las áreas y los perímetros de figuras cuyos lados cumplan la condición indicada? ¿De qué trata la situación?

### Figura 29: Situación problemática 6

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 52.

En la figura 30 se puede observar claramente una actividad presentada en forma de juego, donde los estudiantes para avanzar de casillero tienen que dar solución a un reto, se puede observar que se realizan diferentes representaciones de las inecuaciones lineales:

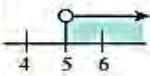
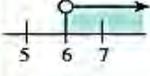
- En la primera casilla, se presenta la representación gráfica en la recta numérica de la solución de una inecuación lineal, se le pide que lo represente en forma de intervalo.
- En la segunda casilla, se presenta la representación de una inecuación lineal en el registro lenguaje natural, el estudiante para avanzar debe realizar una gráfica, lo que quiere decir el autor del cuaderno de trabajo es que lo represente gráficamente en la recta numérica la solución de la inecuación. para lograr esta actividad debe realizar los tratamientos correspondientes al registro algebraico.
- En la tercera casilla, se propone al estudiante resolver una inecuación lineal que está representada en el registro algebraico, para ello debe realizar los tratamientos adecuados en este registro, finalizando con la representación gráfica de la solución en la recta numérica.
- En el cuarto casillero, se propone un problema en forma de registro lenguaje natural, el estudiante debe realizar la conversión hacia el registro algebraico y realizar los tratamientos necesarios para finalizar con la conversión hacia el registro lenguaje natural.

- En el quinto casillero, el estudiante debe realizar tratamientos al registro algebraico de una inecuación lineal.

Por lo tanto, cuando el estudiante resuelve la actividad de la figura 29, está movilizando los registros de lengua natural y algebraica.

## El más rápido

**ADAPTACIÓN**

Partida	Representa el intervalo. 	La suma del doble de un número más 3 es mayor que 27. Representa gráficamente el conjunto solución.	Resuelve: $4(x - 2) \geq -8$ Luego, elabora su gráfica.	La edad de Miguel es el doble de la edad de Carlos. Si sus edades suman más de 36 años, ¿cuál es la mínima edad de Miguel?	Resuelve: $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} > 1 + \frac{x}{3}$	Llegada
Partida	Representa el intervalo 	La diferencia del triple de un número menos 5 es menor que 33. Representa gráficamente el conjunto solución.	Resuelve: $5(x + 1) \geq -20$ Luego, elabora su gráfica.	María tiene el triple de dinero que Isabel. Si la diferencia de lo que tienen es menos de 38 soles, ¿cuántos soles como máximo tiene María?	Resuelve: $\frac{x}{3} - \frac{7}{6} > 1 + \frac{x}{4}$	Llegada

Formen pares, manipulen el tablero de la carrera y respondan: ¿Qué se observa en el recorrido de la carrera? ¿A qué van a jugar?

**Organizamos nuestro juego**

¿Qué nombre le pondrías al juego? ¿Qué materiales se utilizarán? ¿En qué consistirá? ¿Cuántas personas podrán participar? ¿Qué reglas propondrías para el juego?

**Figura 30:** Situación problemática 7

Fuente: Ministerio de Educación del Perú, 2016c, p. 54.

En conclusión, en las actividades propuestas del Cuaderno de trabajo, el estudiante realiza representaciones en los registros de las inecuaciones, tomando más énfasis en la conversión del registro lenguaje natural hacia el registro algebraico y se puede observar una secuencia de resolución:

Primero, identificar el objeto matemático inecuaciones que esta representado en el registro lenguaje natural.

Segundo, realizar la conversión del registro lenguaje natural al registro algebraico.

Tercero, realizar tratamientos a al registro algebraico hasta llegar a la solución.

Cuarto, para dar respuesta a la actividad que propone el libro se debe realizar una conversión de registro algebraico hacia el registro lengua natural.

## **CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO**

Este capítulo se fundamenta en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y en la descripción de los procedimientos metodológicos que se siguió para realizar el trabajo de investigación.

### **3.1 Marco teórico**

Nuestra investigación se sustenta en la Teoría de Registro de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004).

#### **3.3.1. Teoría de Registro de Representación Semiótica**

Duval (2004), explica la teoría de registro de representación semiótica y diferencia los sistemas semióticos matemáticos con los utilizados para comunicar.

Para Penalva y Torregrosa (2001), manifiestan que una representación en Matemática es toda escritura, notación, un símbolo o figuras que manifieste una idea del objeto matemático.

Así mismo Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) afirman que:

En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. (p. 1).

Al respecto, Oviedo et al. (2012) expresan que los objetos matemáticos deben ser expresados en diferentes representaciones y estas representaciones no deben ser confundidas por el objeto matemático si no que deben ser utilizados para su aprehensión.

Para nuestra investigación tomaremos como fundamentación, aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como indica Duval (2004) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es importante las actividades cognitivas: conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y comprensión de textos, pero además es necesario la utilización de diferentes registros de representación y de expresión, así mismo Duval (2006), menciona que, un requisito indispensable para la aprehensión de un objeto matemático (inecuaciones lineales, ecuaciones, etc.), el estudiante debe movilizar al menos dos tipos de registros de representación de un objeto matemático.

En este mismo contexto Camargo (2013) afirma que “no bastará con presentar o proponer actividades que apunten a la aprehensión o tratamiento de registros, sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto” (p. 1844).

El mismo Duval (1995) afirma para la adquisición conceptual de un objeto matemático es necesario:

- El uso de más de un registro de representación semiótica.
- La creación y el desarrollo de nuevos sistemas semióticos.

También menciona que “no hay noesis sin semiosis” es decir que es muy importante que el estudiante relacione las diferentes representaciones semióticas que tiene un objeto matemático para lograr un proceso cognitivo, Duval (1999).

Así mismo Duval (2013) indica que:

Es para distinguir los sistemas semióticos usados en matemáticas y los otros sistemas semióticos usados fuera de las matemáticas, que yo elegí el término "registro". En primer lugar, esta es una palabra que Descartes utiliza en las primeras páginas de su geometría. En segundo lugar, esta palabra también se refiere a la extensión de los recursos disponibles en dominios como la voz, los instrumentos musicales y las formas de expresarse (p. 16).

D'Amore (2006) indica que el registro de representación semiótica se basa en un sistema de signos que ayuda a realizar actividades de comunicación, tratamiento y de objetivación, también exhorta que no se relaciona con las notaciones convencionales que no forman un sistema.

En este trabajo se considera lo dicho por Duval (1995), un sistema semiótico debe cumplir tres actividades cognitivas para convertirse en registro de representación:

- Primero: Comunicación, consiste en establecer una representación identificable. Por ejemplo: Numérico, simbólico, gráfico o verbal.
- Segundo: Tratamiento, consiste en realizar transformaciones en el mismo registro. Por ejemplo, la expresión: juan gana al mes como mínimo 2000 soles, un tratamiento, dentro del registro lenguaje natural sería juan gana al mes 2000 soles o más.
- Tercero: Conversión, consiste en pasar de una representación dada de un registro en otra representación de otro registro, pero manteniéndose su significado. Por ejemplo, realiza la conversión entre el registro lenguaje natural

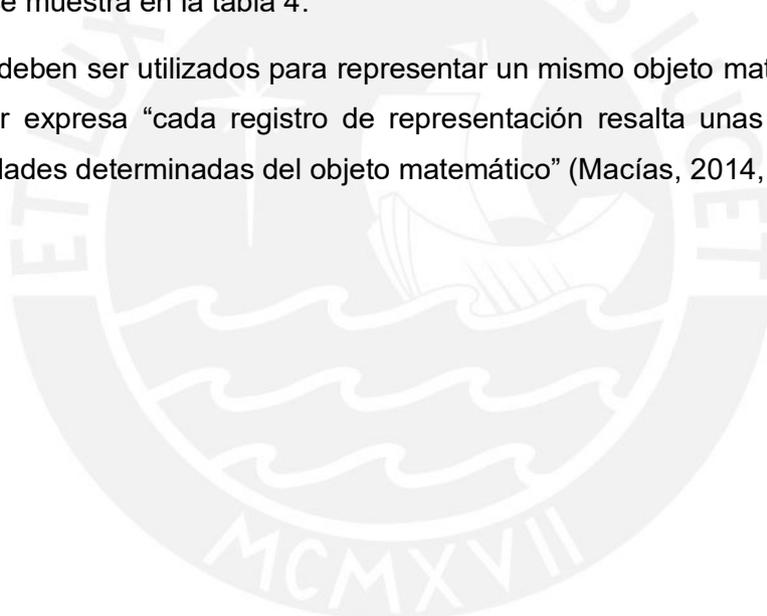
y el algebraico. La expresión: Juan gana al mes 2000 soles o más, la conversión al registro algebraico sería  $x \geq 2000$

Para reforzar lo dicho por Duval (1995), existen otros autores que se refieren los términos mencionados, así como Oviedo et al. (2012) mencionan que, el tratamiento consiste en realizar diferentes transformaciones sin salirse del registro original y la conversión es pasar, convertir, cambiar un registro de representación por otro sin que cambie la característica del objeto matemático estudiado.

De la misma forma Tamayo (2006) señala que “tratamiento, cuando una transformación produce otra dentro de un mismo registro”

Así mismo, Macías (2014), realiza la representación de la circunferencia mencionando diferentes registros semióticos que los estudiantes pueden experimentar, entre ellos tenemos: el simbólico, gráfico, algebraico y discursivo, tal como se muestra en la tabla 4.

Estos deben ser utilizados para representar un mismo objeto matemático, también el autor expresa “cada registro de representación resalta unas características y propiedades determinadas del objeto matemático” (Macías, 2014, p. 37).



**Tabla 4***Clasificación de los registros semióticos*

Registro de representación lenguaje Natural	RRL	Se presenta cuando describimos características, definiciones, argumentaciones, algunas propiedades, etc. en forma escrita u oral.
Registro de representación numérico	RRN	Estas representaciones tienen la característica de realizar cálculos matemáticos utilizando axiomas, teoremas, propiedades etc.
Registro de representación figural	RRF	Representa al objeto matemático utilizando líneas, marcas, dibujos, etc.
Registro de representación tabular	RRT	Representa al objeto matemático mediante filas y columnas, organizando los datos y características.
Registro de representación algebraico	RRA	Representa al objeto matemático mediante expresiones algebraicas cuya característica es utilizar variables, símbolos numéricos para generalizar.
Registro de representación geométrico	RRGE	Se representa en sistemas cartesianos y gráficos, utiliza las propiedades, elementos etc. de la geometría.
Registro de representación gráfico	RRG	Representa las características del objeto matemático mediante líneas, símbolos, dibujos, etc. para visualizar la relación matemática.

*Fuente:* basado en Macías (2014)

Por lo tanto, para lograr un aprendizaje significativo se debe incidir en distintos registros de representaciones semióticas, y para nuestro objeto de estudio inecuaciones lineales nos basaremos en dos registros de representación semiótica: lenguaje natural y algebraico.

- 1) **Registro de la Lengua Natural:** en este registro se representará la inecuación lineal en forma literal o expresándolo en forma verbal. Por ejemplo:
  - La cantidad de dinero que tiene Manuel es mayor a S/. 1000.
  - La mitad de una cantidad más 10 es como máximo 50.
  - El producto de dos números consecutivos no es mayor que 20.
- 2) **Registro algebraico:** una inecuación lineal está representado algebraicamente cuando utilizamos una incógnita y los símbolos de las desigualdades ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ). Por ejemplo:
  - $2x + 3 > 6$
  - $\frac{3x-1}{2} + 1 < 4$
  - $5x - \frac{2}{3} \geq x + 7$

Para Duval (1995) en su teoría de registro de representación semiótica afirma que, una representación semiótica para ser considerada como registro de representación debe cumplir 3 actividades cognitivas: formación, conversión y tratamiento. Por lo tanto, a continuación, presentamos los registros de representación de una inecuación línea.

**Tabla 5**

*Registro de representación de la inecuación lineal*

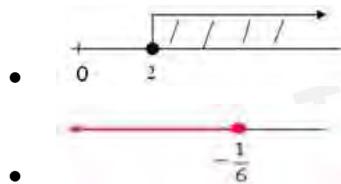
<b>OBJETO MATEMÁTICO INECUACIONES LINEALES</b>	
REGISTRO DE REPRESENTACIONES:	
1. LENGUAJE NATURAL:	Sea $x$ un número, La diferencia entre un número y 8 es como máximo 15
2. ALGEBRAICO:	$x - 8 \leq 15$

En la tabla 5, se puede observar que; llamaremos lenguaje natural al registro de representación escrita de una situación problemática sobre inecuación lineal donde se utilizará términos como: máximo, mínimo, a lo mucho, por lo menos, etc. Que nos indique una desigualdad, por otro lado, el registro de representación algebraica de una inecuación lineal es cuando el estudiante expresa la inecuación lineal utilizando símbolo de la desigualdad, variable o incógnita. De la misma forma el estudiante al representar el

conjunto de solución o el intervalo de solución en la recta numérica lo llamaremos representación gráfica en la recta.

### Representación gráfica en la recta numérica

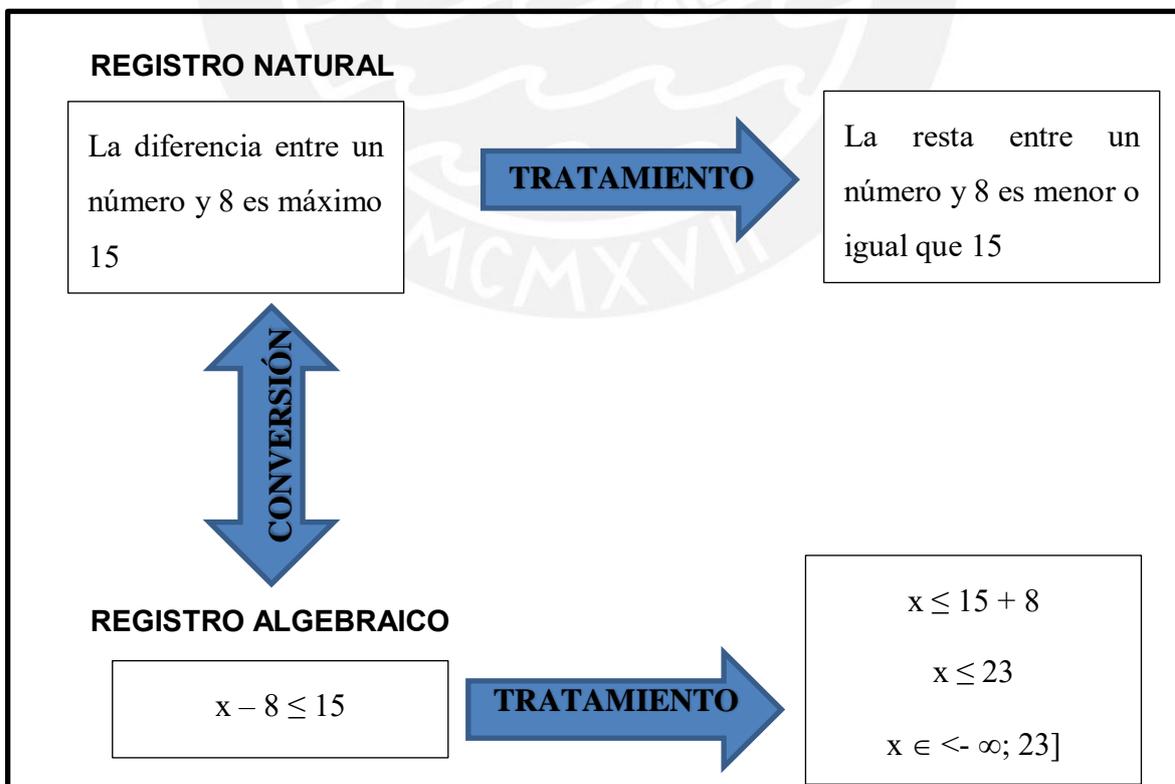
Lehmann (2004) nos menciona “La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geoméricamente en un sistema coordenado unidimensionalmente. En otras palabras, todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales” (p. 135). En consecuencia, para visualizar el comportamiento de la solución de una inecuación lineal utilizaremos la representación gráfica en la recta numérica. Por ejemplo.



Por lo tanto, la conversión se dará cuando el estudiante es capaz de pasar de un registro a otro.

En el siguiente esquema se muestra las transformaciones de conversión y tratamiento de una inecuación lineal:

### TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA DE UNA INECUACIÓN LINEAL



**Figura 31:** Los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.  
Fuente: Propia.

Existen diferentes autores que indican errores en la solución de una inecuación lineal, así como Vrancken, Engler y Müller (2010) nos muestra en su trabajo de investigación que los estudiantes prefieren la solución algebraica ante la representación gráfica en la recta y también los estudiantes tiene dificultad en expresar la solución en forma de conjunto. En consecuencia, el marco teórico nos permite orientarnos para el desarrollo del siguiente punto

### **3.2 Metodología y procedimientos**

La investigación es de tipo cualitativo descriptivo, porque proporciona una descripción de los registros de representación semiótica que los estudiantes del tercer grado de educación secundaria posiblemente movilicen frente a una actividad didáctica propuesta sobre el objeto matemático inecuaciones lineales. En el enfoque cualitativo, tal como Hernández, Fernández, y Baptista (2014) lo indican, pueden surgir nuevas preguntas o mejorarlas cuando se recolecta y se realiza el análisis de los datos, también nos mencionan que es descriptivo cuando se detalla un hecho, las características de la unidad de estudio, objeto matemático, realidad de enseñanza – aprendizaje. Etc.

#### **3.2.1. Procedimientos metodológicos**

Se ha considerado los siguientes procedimientos metodológicos:

1. Análisis de las investigaciones de referencia, búsqueda de información para elaborar la justificación.
2. Estudio de algunos aspectos o elementos de la teoría de registros de representación semiótica.
3. Un análisis de la reseña histórica y aspecto teórico del objeto matemático inecuaciones lineales.
4. Análisis del libro de texto Matemática 3 y cuaderno de trabajo Matemática 3, que distribuye el MINEDU a los estudiantes para desarrollar sus capacidades sobre objeto matemático inecuaciones lineales.
5. Se elabora una propuesta didáctica que favorezca las diferentes representaciones semióticas.
6. Se presentan los posibles resultados de la producción de los estudiantes cuando resuelven la propuesta didáctica a la luz de las representaciones semiótica.
7. Describir y analizar las supuestas respuestas de los estudiantes con base en la teoría de registros de representación semiótica.

Para un mejor entendimiento de los procedimientos metodológicos se va describir cada uno de ellos:

1. Análisis de las investigaciones de referencia, búsqueda de información para elaborar la justificación.

Este primer paso de nuestro procedimiento se encuentra en el primer capítulo, investigaciones de referencia, donde se ha buscado una serie de investigaciones relacionados con nuestro trabajo de investigación y obtener información significativa para nuestra investigación sobre el estudio del objeto matemático inecuaciones lineales con respecto a sus registros de representación.

2. El análisis de la reseña histórica y aspecto teórico del objeto matemático inecuaciones lineales.

Este procedimiento se realizó en el capítulo II, donde se realiza un análisis de nuestro objeto matemático según su reseña histórica y aspecto teórico destacando a Euclides (1991), Baldor (1988), Eves (1969), Harriot (1931, citado por Eves, 1969), Bernardis et al. (2017), Lehmann (2004), Lima (1977) etc. que aportaron en el desarrollo del objeto matemático inecuaciones lineales.

3. Estudio del marco teórico.

Este apartado se realizó en el capítulo III, tomando como marco teórico algunos aspectos de la teoría de Registro de Representación Semiótica de Raymond Duval, que nos indica que el estudiante para lograr el conocimiento de un objeto matemático debe hacer uso de diferentes registros semióticos utilizando conversiones y tratamientos (Duval, 1995).

4. Un análisis del libro de texto y cuaderno de trabajo que distribuye el MINEDU y que los estudiantes usan para desarrollar sus conocimientos sobre las inecuaciones lineales.

Para desarrollar este procedimiento tomaremos las dos bibliografías; libro de texto y cuaderno de trabajo, que el MINEDU proporciona al estudiante para lograr los desempeños del tercer grado de educación secundaria, su análisis se encuentra en el capítulo II apartado 2.2.

5. Se elabora una propuesta didáctica.

La propuesta didáctica consta de 10 actividades sobre inecuaciones lineales, cada actividad tiene como objetivo favorecer las diferentes representaciones semióticas de la inecuación lineal y permitirá identificar, describir y analizar los posibles tratamientos y conversiones que el estudiante lograría al resolverlo,

teniendo en cuenta la Teoría de Registro de Representación Semiótica que propone Duval (1995).

6. Se presentan los posibles resultados de la producción de los estudiantes cuando resuelven la actividad didáctica propuesta a la luz de las representaciones semióticas.

Este procedimiento se realizará en el capítulo IV, aquí hacemos una descripción de las posibles respuestas de los estudiantes cuando resuelven la actividad didáctica propuestas tomando como base el marco teórico de la Teoría de Registro de Representación Semiótica específicamente (conversión y tratamiento), y así lograr identificar los posibles tratamientos y conversiones que podrían realizar los estudiantes al resolver esta propuesta didáctica.

7. Describir y analizar las posibles respuestas de los estudiantes con base en la teoría de registros de representación semiótica.

Este punto se desarrollará en las consideraciones finales, dando respuesta al objetivo específico planteado: describir y analizar los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes utilizan al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales, teniendo como marco teórico algunos aspectos de la teoría de registros de representación propuesta por Duval (1995).

Para lograr el objetivo propuesto: Analizar si una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales; se presenta en el siguiente capítulo: Propuesta Didáctica, que es una actividad con 10 preguntas.

## CAPÍTULO IV: PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo, se presenta la descripción de las posibles respuestas que pueden realizar los estudiantes frente a la actividad didáctica.

### 4.1. Resultados Esperados de la Propuesta

En esta parte, se presenta el análisis de las posibles respuestas que los estudiantes podrían dar a cada ítem o actividad de 10 preguntas de la propuesta didáctica. Este análisis se realiza tomando como base a nuestro marco teórico referente a la Teoría de Registro de Representación de Duval (1995) específicamente a lo que respecta a tratamiento y conversión.

#### 4.1.1. Ítem 1 de la Propuesta Didáctica.

##### 1) Representa en forma algebraica y en la recta numérica las siguientes situaciones.

Representación lengua natural	Representación algebraica	Representación gráfica en la recta numérica
El doble de la edad de Mario es mayor que 55		
La diferencia entre mi edad y 12 años es como máximo 20		
El perímetro de un terreno cuadrangular con lado $x$ es menor de 100		

Los objetivos de este ítem son:

- Identificar la posible conversión, del registro lengua natural hacia el registro algebraico y la posible representación gráfica de la solución de la inecuación en la recta numérica.
- Identificar los posibles tratamientos en la representación algebraica.

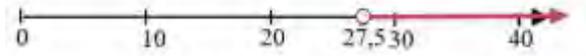
**Actividad didáctica propuesta (Representación lengua natural):** El doble de la edad de Mario es mayor que 55

**Representación algebraica:**  $2x > 55$

El estudiante es posible que relacione “*mayor que*” con el signo que representa “ $>$ ” según Eves (1969).

Para Duval (1995) pasar de un registro a otro es una condición primordial en el aprendizaje del estudiante, por tal motivo en este primer ítem el estudiante es posible que debe pasar de un registro lengua natural al registro algebraico

### Representación gráfica en la recta numérica:



Para realizar la posible representación gráfica en la recta numérica, primero debe emplear la propiedad descrita por Lehmann (2004), Sea  $a > 0$ , si  $x > y$ , “la desigualdad no se altera si se multiplican o dividen por la misma cantidad positiva”, entonces  $x \cdot a > y \cdot a$  ó  $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$ . Obteniendo como solución de la inecuación  $x > 27,5$  luego empleamos lo escrito por Lehmann (2004) la relación de orden se puede representar en forma gráfica en la recta numérica.

Al emplear la propiedad anterior, el estudiante tiene la posibilidad de realizar un tratamiento, que consiste en realizar transformaciones en el mismo registro en este caso el algebraico. Para Duval (1995) es necesario el uso de varias representaciones semióticas, por tanto, en esta actividad se propone la posibilidad de pasar de la representación en el registro lengua natural a la representación del registro algebraico y también permite representar gráficamente la desigualdad en la recta numérica.

**Actividad didáctica (Representación lengua Natural):** La diferencia entre mi edad y 12 años es como máximo 20

**Representación algebraica:**  $x - 12 \leq 20$

Para resolver este segundo ítem, según Duval (1995), el estudiante estaría realizando una conversión; pasar de un registro de lengua natural al registro de algebraico. Para esto debe relacionar “*diferencia*” con “*la operación restar*” y “*como máximo*” con la desigualdad “*menor o igual que*”

### Representación gráfica en la recta numérica:



Antes de pasar del registro algebraico a la representación gráfica en la recta numérica, el estudiante posiblemente debe realiza un tratamiento, como lo indica Duval (1995) un tratamiento consiste en realizar operaciones o cambios dentro del mismo registro, se espera que el estudiante sume 12 ambos miembros de la inecuación para que quede transformada en:  $x \leq 32$ . Al utilizar esta estrategia está empleando una de las propiedades descrita por Lehmann (2004), el signo

*mayor que* ( $>$ ) no cambia de sentido si se suman a ambos miembros un mismo número real, ósea si  $x > y, m \in R$  entonces  $x + m > y + m$ . Luego como en el caso anterior, teniendo la solución de la inecuación  $x \leq 32$ , se representa gráficamente en la recta numérica.

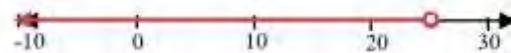
**Actividad didáctica (Representación lengua Natural):** El perímetro de un terreno cuadrangular con lado  $x$  es menor que 100.

**Representación algebraica:**  $4x < 100$

Para resolver este problema el estudiante posiblemente debe acudir a sus saberes previos sobre perímetro de un cuadrado y relacionar “*menor que*” con el signo que representa “ $<$ ” como lo manifestó Eves (1969).

Pero el objetivo de este ítem es lo que propone Duval (1995), la conversión de un registro a otro, en este caso es posible que el estudiante pase del registro lenguaje natural hacia el registro algebraico.

**Representación gráfica en la recta numérica:**



Para realizar la representación gráfica en la recta numérica, el estudiante posiblemente debe realizar un tratamiento en el registro algebraico de la inecuación  $4x < 100$ , empleando la propiedad que indica Lehmann (2004) Sea  $a > 0$ , si  $x < y$ , “la desigualdad no se altera si se dividen por la misma cantidad positiva”, entonces  $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$ .

Por lo tanto, se espera que el estudiante divida ambos miembros de la inecuación entre 4 para que quede transformada en:  $x < 25$  y así representarlo gráficamente recta numérica.

#### 4.1.2. Ítem 2 de la Propuesta Didáctica

El objetivo de este ítem es identificar la posible conversión y posibles tratamientos de una representación lengua natural hacia una representación algebraica.

**2) Luz tiene menos de 25 años y es 3 años mayor que Ana. Escribe la edad de Ana en una representación algebraica de la inecuación. \_\_\_\_\_**

En este ítem es posible que el estudiante realice la conversión de registro lenguaje natural hacia el registro algebraico, para que el estudiante realice esta conversión debe comprender el problema y asignar una variable, por ejemplo,  $x$  sería la edad de Luz y relacionarlo con la edad de Ana, así: Luz tiene menos de 25 años, en expresión algebraica sería:  $x < 25$ .

Luz es 3 años mayor que Ana, en expresión algebraica sería, si Luz tiene  $x$  años entonces Ana tiene:  $x - 3$ .

Para representar la edad de Ana, tiene que empezar con la relación:  $x < 25$ , emplear la propiedad de Lehmann (2004) que dice la desigualdad no cambia de sentido si se resta miembro a miembro dos cantidades reales iguales. Si  $x < y, m \in R$ , entonces  $x - m < y - m$ . En la resolución sería  $x - 3 < 25 - 3$ , para obtener la representación algebraica de la inecuación lineal de la edad de Ana, entonces sería  $x - 3 < 22$  una posible respuestas al ítem 2.

#### 4.1.3. Ítem 3 de la Propuesta didáctica

El objetivo de este ítem es identificar una posible conversión y posibles tratamientos de una representación lengua natura hacia una representación algebraica y viceversa.

**3) En el 3<sup>er</sup> grado de secundaria se quiere formar un grupo de teatro con 28 estudiantes, de manera que el doble de niñas sea mayor que el triple de niños. ¿Cuál es el menor número de niñas que deben participar?**

En esta actividad didáctica, el estudiante es posible que reconozca el registro de representación que se le presenta, luego realizar una posible conversión del registro lenguaje natural hacia el registro lenguaje algebraico, al hacer esto según Duval (1999) menciona que, es importante que el estudiante relacione las diferentes representaciones semióticas, también se puede rescatar lo mencionado en Duval (2006), es indispensable un contexto de representación.

- El ítem 3 está representado en un registro de lenguaje natural.
- El estudiante realiza una posible conversión al registro algebraico:

Cantidad de niñas:  $x$

Cantidad de niños:  $28 - x$

Según el problema:  $2x > 3(28 - x)$

Para seguir con la solución del problema el estudiante posiblemente debe realizar el proceso de tratamiento según Duval (1995) son transformaciones en el mismo registro, en este caso el algebraico.

$$2x > 84 - 3x$$

$$2x + 3x > 84$$

$$5x > 84$$

$$x > 16,8$$

Para dar respuesta a la actividad el estudiante posiblemente debe pasar del registro algebraico al registro lengua natural, este proceso Duval (1995) lo denomina conversión.

**Respuesta:** El menor número de niñas que deben participar en el grupo de teatro es 17.

#### 4.1.4. Ítem 4 de la Propuesta Didáctica

Este ítem tiene como objetivo identificar la posible conversión de registro lengua natural hacia la representación algebraica.

**4) Los días que Juan estuvo con síntomas por el virus covid 19 está dado por la representación de la siguiente expresión: *El resultado de multiplicar por 5 los días es menor que la mitad de dicho número, aumentado en 80. ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado?***

a)  $5x > \frac{x}{2} + 80$

d)  $5x < \frac{x}{2} + 80$

b)  $5x < \frac{x+80}{2}$

e)  $5x > \frac{x+80}{2}$

c)  $5x \leq \frac{x}{2} + 80$

En este ítem se diferencia con el anterior, porque permitirá analizar si el estudiante es capaz de realizar una posible conversión, del registro lengua natural, al registro algebraico.

El estudiante al escoger la alternativa (a) podemos decir, es posible que tiene una dificultad en relacionar “menor que” con (<).

El estudiante al escoger la alternativa (b) podemos decir que posiblemente no ha tomado en cuenta que los signos de puntuación, en este caso la coma, es importante para realizar la conversión del registro lengua natural hacia el registro algebraico.

El estudiante al escoger la alternativa (c) podemos decir que posiblemente ha confundido “menor que” (<) con “menor o igual que” (≤).

El estudiante al escoger la alternativa (d) podemos decir que posiblemente ha realizado la conversión correcta de un registro a otro en este caso del lenguaje natural al algebraico.

El estudiante al escoger la alternativa (e) podemos decir posiblemente tiene dos dificultades, en relacionar “menor que” con (<) y no tomar en cuenta la coma en el problema.

#### 4.1.5. Ítem 5 de la Propuesta Didáctica

Este ítem tiene como objetivo, identificar los posibles tratamientos de la representación algebraica y la posible conversión de la representación algebraica hacia la representación lengua natural.

**5) ¿Escribe, cuál es el mayor número entero que cumple con las características dadas en el enunciado, de la pregunta 4?**

---

Habiendo identificado la expresión algebraica del ítem anterior:  $5x < \frac{x}{2} + 80$ , el objetivo ahora es, que el estudiante realice los posibles tratamientos adecuados al registro de representación algebraico:

$x$ : Número de días.

Registro algebraico:  $5x < \frac{x}{2} + 80$

Tratamientos:  $5x < \frac{x+160}{2}$

$$10x < x + 160$$

$$10x - x < 160$$

$$9x < 160$$

$$x < 17,7 \dots$$

Conversión: del registro algebraico al registro lengua natural.

Es posible que el estudiante al realizar la conversión diera la siguiente respuesta:  
El número mayor entero es 17.

Por tanto, podemos afirmar que este ítem cumple con lo dicho por Duval (2006), que los estudiantes deben experimentar por diferentes registros de representación semióticos y como mínimo dos.

#### 4.1.6. Ítem 6 y 7 de la Propuesta Didáctica

El objetivo del ítem 6 es, identificar que el estudiante logre realizar una posible conversión de la representación lengua natural hacia la representación algebraica y del ítem 7 es, identificar los posibles tratamientos en la representación algebraica y la posible conversión de la representación algebraica hacia la representación lengua natural.

**6) Sea la siguiente expresión: El doble de la edad de Juan aumentada en 7 es, como mínimo, 56 años. ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado anterior?**

a)  $2x + 7 \geq 56$

c)  $2x + 7 > 56$

b)  $2x + 7 \leq 56$

d)  $2x + 7 < 56$

**7) ¿Cuál es la edad mínima que puede tener Juan?**

---

Los ítems 6 y 7 tienen objetivos similares que los ítems 4 y 5.

Primero, el estudiante es posible que reconozca que la inecuación lineal está representada en un registro de lenguaje natural y debe realizar un cambio hacia el registro algebraico, es llamado por Duval (1995) como el proceso de conversión.

En el ítem 6 si el estudiante escoge las alternativas b, c o d podemos decir: es posible que la dificultad del estudiante es no relacionar “como mínimo” con “mayor o igual que”.

En el ítem 7 luego de tener la representación de la inecuación en un registro algebraico debe realizar posibles transformaciones hasta llegar a la expresión algebraica  $x \geq 24.5$ , este proceso Duval (1995), lo llamó tratamiento de un registro semiótico y para finalizar se espera que el estudiante vuelva a realizar una posible conversión, ahora del registro algebraico al registro lengua natural obteniendo una posible respuesta: la edad mínima que puede tener Juan es de 24 años y medio o 24 años y 6 meses.

#### **4.1.7. Análisis del Ítem 8 de la Propuesta Didáctica**

Los objetivos de este ítem son tres:

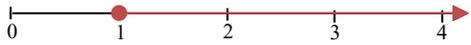
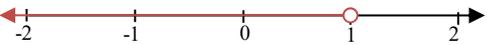
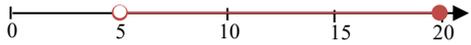
Primero, identificar una posible conversión del registro algebraico hacia el registro de lengua natural.

Segundo, identificar una posible representación gráfica de una desigualdad en la recta numérica.

Tercero, identificar los posibles tratamientos de la representación algebraica.

**8) Completar la Tabla según sea la representación de la desigualdad.**

<b>Representación gráfica en la recta numérica</b>	<b>Representación algebraica</b>	<b>Representación Lengua Natural</b>
--	----------------------------------	--------------------------------------

<p>a)</p> 	$x \geq 1$	Conjunto de los números reales mayores o iguales que 1
<p>b)</p> 	$x < 1$	Conjunto de los números reales menores que 1.
<p>c)</p> 	$x > 5$	Conjunto de los números reales mayores que 5.
<p>d)</p>	$-x \leq 7$	Conjunto de los números reales mayores o igual que -7.
<p>e)</p>	$-2x > 10$	Conjunto de los números reales menores que 5.

Esta actividad didáctica se divide en 5 incisos:

En a), b) y c) se pide al estudiante realizar una posible representación algebraica de una desigualdad con respecto a su representación gráfica en la recta numérica, luego una posible conversión del registro algebraico hacia el registro lenguaje natural, se espera que el estudiante logre relacionar las representaciones, así como afirma Duval (2006) los estudiantes deben movilizar diferentes registros semióticos de un objeto matemático.

En d) y e) se propone una inecuación en su representación de registro algebraico para que el estudiante realice una posible conversión hacia el registro lenguaje natural y la representación gráfica en la recta numérica. Para lograr el desarrollo de la actividad debe realizar algunos tratamientos al registro algebraico como aplicar una propiedad mencionada por Lehmann (2004) Sea  $a < 0$ , si  $x > y$ , “ la desigualdad cambia de sentido si ambos miembros se multiplica por, o se dividen entre, la misma cantidad negativa”, entonces  $x \cdot a < y \cdot a$  ó  $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$ . Por lo tanto, este ítem nos permite corroborar lo dicho por Duval (2006) los estudiantes deben experimentar diferentes representaciones semióticas, entre ellos tenemos

algebraico y lenguaje natural estos deben ser utilizados para representar un mismo objeto matemático.

#### 4.1.8. Ítem 9 de la Propuesta Didáctica.

Los objetivos del ítem 9 son:

Primero, identificar una posible conversión del registro algebraico hacia el registro lengua natural.

Segundo, identificar una posible representación gráfica en la recta numérica de la inecuación que está representado en el registro algebraico.

**9) Sea:  $15 \leq x < 75$  . Si  $x$  representa el dinero que gana Mario en un día, representar en lenguaje natural la inecuación:**

---

Marca la alternativa que muestre la representación gráfica en la recta numérica de la inecuación lineal

a)

b)

c)

d) b y c

e) todas

En la primera parte de este ítem, así como el anterior, es posible que el estudiante movilice la inecuación lineal en diferentes representaciones, en este caso primero debe realizar una posible conversión del registro algebraico al registro lenguaje natural.

En la segunda parte del ítem, para marcar la alternativa correcta el estudiante debe realizar un posible proceso de tratamiento en la representación gráfica de la recta numérica e identificar que la alternativa b y la alternativa d están en la misma representación, pero con tratamiento diferente. Por lo tanto, la alternativa correcta es la letra d.

En este ítem se corrobora lo afirmado por Duval (2006) para lograr un aprendizaje se debe incidir en distintas representaciones semióticas.

#### 4.1.9. Análisis del Ítem 10 de la Propuesta Didáctica

El objetivo de este ítem es identificar los posibles tratamientos en el registro algebraico e identificar la posible conversión del registro algebraico hacia el registro lengua natural.

Encuentra los valores de  $x$  que satisfacen cada inecuación dada y representa el conjunto de solución en forma gráfica en la recta numérica y lenguaje natural.

a)  $9x - 6 \geq -18x - 1$

b)  $\frac{x-2}{3} + \frac{3x}{4} \leq \frac{5x}{2}$

Para el ítem 10, se espera que el estudiante realice los tratamientos adecuados para el registro de representación algebraica, empleando las propiedades de las desigualdades y así obtener una expresión algebraica de la forma:  $x \leq a$  o  $x \geq a$ , de esta manera facilitar la representación gráfica en la recta numérica y la conversión al registro lengua natural.



## CONCLUSIONES

De acuerdo con las investigaciones de referencia consultadas que tienen relación con la comprensión del objeto matemático inecuaciones lineales se resaltan diferentes aspectos como son la representación de la inecuación lineal en los textos identificando los tipos de tareas, técnicas, teorías, también investigaciones que han identificado los errores que cometen los estudiantes al resolver una inecuación lineal como en la interpretación de la solución, modelar situaciones problemáticas, emplear las propiedades de la ecuación en la solución de una inecuación y el uso de herramientas tecnológicas para abordar las inecuaciones lineales.

Se considera que, al analizar una propuesta didáctica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica según Duval (1995), debe favorecer en la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales.

El marco teórico de esta investigación está basado en aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Raymond Duval, que afirma, para desarrollar un aprendizaje todo objeto matemático debe ser posible de representarlo por lo menos con dos registros de representación semiótica ya que un objeto matemático necesita de un medio que nos facilite entenderlo por ser abstracto, para ello hemos considerado utilizar las representaciones semióticas de la inecuación lineal como; legua natural, algebraica y la representación gráfica en la recta.

Dicho esto, el trabajo de investigación se basó en analizar si una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales favorece la movilización de diferentes representaciones semióticas. La presente investigación está enfocada en estudiantes del tercer grado de educación básica regular del nivel secundario porque es en esa etapa el currículo nacional del Perú enfoca con más énfasis las inecuaciones lineales y los estudiantes deben interiorizar el tema de inecuaciones lineales porque será la base para futuros tópicos como funciones, programación lineal, sistemas de inecuaciones, inecuaciones cuadráticas, etc.

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, ya que hemos tomado en cuenta que un investigador cualitativo realiza su trabajo estudiando el contexto, la realidad en este caso de los estudiantes con respecto a las inecuaciones lineales, por lo tanto hemos tomado en cuenta 7 procedimientos metodológicos; empezamos analizando investigaciones de referencia, el estudio del marco teórico "Teoría de Registros de Representación Semiótica" de Raymond Duval, Análisis del objeto matemático inecuaciones lineales, Análisis del libros de texto y cuaderno de trabajo del tercer grado de educación secundaria, elaboración de una propuesta didáctica, presentación de posibles producciones de los estudiantes al resolver la propuesta didáctica, análisis de las posibles respuestas basándonos en nuestro marco teórico.

La propuesta didáctica fue diseñada para que los estudiantes interioricen el objeto matemático inecuaciones lineales utilizando los registros de representación lenguaje natural, algebraico y la representación gráfica en la recta.

En este sentido por la circunstancia en que vivimos y mi experiencia como docente se realizó posibles respuestas que los estudiantes realizarían en la resolución de la propuesta didáctica.

En relación a la pregunta de investigación: ¿Cómo una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales?, consideramos que se dio respuesta a la pregunta de investigación ya que, se identificó, describió y analizo las posibles conversiones y/o tratamientos que podrían realizar los estudiantes al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales utilizando las representaciones semióticas como: representación del registro lengua natural, registro algebraico y la representación gráfica en la recta numérica.

En relación al objetivo general: Analizar si una propuesta didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, favorece la movilización de la noción sobre inecuaciones lineales. Podemos concluir que sí se logró implementar una secuencia de actividades didácticas que permite movilizar en por lo menos dos registros de representación semiótica como lo sugiere Duval (1995).

En relación de los objetivos específicos que son fundamentales para lograr el objetivo general:

**1. Identificar los posibles tratamientos y conversiones que podrían realizar los estudiantes al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales.**

Se pudo lograr el primer objetivo específico como a continuación se describe:

**El ítem 1**, se puede identificar dos posibles conversiones: de un registro de lengua natural al registro algebraico para luego representarlo gráficamente en una recta numérica, también se puede identificar posible tratamiento a la representación algebraica.

**El ítem 2**, se puede identificar una posible conversión del registro lenguaje natural al registro algebraico, y para dar solución a la situación problemática se realiza un posible tratamiento al registro algebraico. Según Duval (1992), identificar el registro, realizar tratamientos, y pasar de un registro a otro son los tres procesos cognitivos que debe interiorizar un estudiante.

**El ítem 3**, se puede identificar que el estudiante debe realizar una posible conversión del registro de representación natural al registro de representación algebraico al hacer esto según Duval (1999), es importante que el estudiante relacione las diferentes

representaciones semióticas. También en este ítem se identifica posibles tratamientos al registro de representación algebraica y luego se identifica otra posible conversión de regreso ósea del registro de representación algebraica al registro de representación lengua natural.

**Los ítems 4 y 6**, se puede identificar una posible conversión del registro natural hacia el registro algebraico, no se identifica un tratamiento en estos ítems.

**Los ítems 5 y 7**, para el ítem 5 es la continuación del ítem 4 entonces después que el estudiante realice la posible conversión del registro de representación lengua natural hacia el registro de representación algebraico se puede identificar que el estudiante debe realizar posibles tratamientos necesarios al registro algebraico y para dar una respuesta acertada debe realizar una posible conversión al registro de lengua natural. De la misma forma el ítem 7 se relaciona con el ítem 6.

**El ítem 8**, consta de 5 incisos:

En a, b, y c. Se propone la representación gráfica en la recta numérica de una inecuación lineal, primero el estudiante es posible que realice la representación de la inecuación en el registro algebraico luego es posible una conversión hacia el registro lengua natural o también es posible que el estudiante de la representación gráfica en la recta numérica pase a representarlo en el registro lengua natural.

En d y e. Se propone la representación del registro algebraico de una inecuación lineal, el estudiante es posible que realice una conversión hacia el registro lengua natural o de la representación del registro algebraico pase a la representación gráfica en la recta numérica. También se identifica posibles tratamientos en la representación algebraica.

**El ítem 9**, se puede identificar una posible conversión de registro de representación algebraico al registro de representación lengua natural, también se identifica un posible cambio del registro algebraico o lengua natural hacia la representación gráfica en la recta numérica. Se identifica un posible tratamiento en la representación gráfica de la recta.

**El ítem 10**, se identifica el registro algebraico de una inecuación lineal, luego se puede identificar posibles tratamientos hasta lograr despejar  $x$  en la inecuación, finalmente se identifica posible conversión del registro algebraico hacia el registro lengua natural, para finalizar con la posible representación gráfica en la recta numérica la solución de las inecuaciones lineales propuestas.

**2. Describir y analizar los posibles tratamientos y/o conversiones que los estudiantes utilizan al resolver una propuesta didáctica sobre inecuaciones lineales.**

**El ítem 1**, para la posible conversión del registro lengua natural al registro algebraico el estudiante es posible que relacione las desigualdades con sus signos, debe expresar el doble de un número y el perímetro de un terreno, este saber previo le permite realizar una posible conversión de un registro a otro. Para representar la inecuación en la recta numérica, el estudiante posiblemente primero realice tratamientos empleando las propiedades de las desigualdades hasta despejar la incógnita y así facilitar la representación gráfica en la recta numérica.

**El ítem 2**, Según Duval (2006), es necesario que los estudiantes relacionen expresiones y lo traduzcan en una ecuación, en este caso inecuación. En este ítem para realizar una posible conversión del registro lengua natural hacia el registro algebraico se debe relacionar las expresiones: “menor que” y “mayor que” luego realizar un posible tratamiento y expresar la respuesta correcta.

**El ítem 3**, Duval (2006), es indispensable un contexto de representación. En efecto, en la actividad 3 el estudiante se enfrenta a un problema, para resolverlo primero debe identificar una posible representación semiótica, en este caso el registro de lenguaje natural, porque se expresa la inecuación en forma verbal o literal, luego realizar una posible conversión hacia el registro algebraico, para esto se debe relacionar la frase mayor que con el símbolo “>” luego realizar posibles tratamientos utilizando las propiedades de las desigualdades hasta despejar la variable, esto permite realizar una posible conversión hacia el registro lengua natural.

**Los ítems 4 y 6**, esta actividad está representado en un registro lengua natural, se le pide al estudiante realizar una posible conversión a la representación de registro algebraico, se ha colocado 5 alternativas, para elegir la respuesta correcta el estudiante debe relacionar la parte literal “menor que” con el símbolo “<” y también la importancia de la coma en una representación lengua natural de la inecuación. Según Duval (2006), para resolver un problema se debe identificar las variables y su relación para traducir en una ecuación, en este caso inecuación. La dificultad de este ítem está en la relación que haga el estudiante no sea la adecuada ya que una coma en la representación lengua natural puede variar la representación algebraica

**El ítem 5**, hay una relación con el ítem 4, ya que plantea al estudiante realizar posibles tratamientos en el registro algebraico que se obtuvo en el ítem 4, hasta lograr despejar la variable, la dificultad que nos encontramos es relacionar  $x < 17,7 \dots$  con la parte

literal “mayor numero entero” y para dar una respuesta adecuada debe realizar una posible conversión del registro algebraico al registro lenguaje natura. Según Duval (2006), el tratamiento es muy importante ya que hace que se elija una mejor conversión.

**Ítem 8**, Duval (2006), los estudiantes deben experimentar diferentes representaciones semióticas, entre ellos tenemos el registro algebraico y registro lenguaje natural estos deben ser utilizados para representar un mismo objeto matemático. En 8a, 8b y 8c. el estudiante es posible que, de una representación gráfica en la recta numérica pase a una representación en el registro algebraico y a una representación en el registro lengua natural, en 8d y 8e es posible que el estudiante represente el registro algebraico de una inecuación en la recta numérica y posiblemente en un registro de lengua natural, pero antes debe realizar un tratamiento al registro algebraico, aplicando propiedades de la desigualdad.

**Ítem 9**, Duval (2006) expresa que, para lograr un aprendizaje se debe incidir en distintos registros de representaciones semióticas, por tanto en este ítem así como el anterior el estudiante debe movilizar las representaciones semióticas de la inecuación lineal, en este caso primero debe realizar una posible conversión del registro algebraico al registro lenguaje natural pero para marcar la alternativa correcta el estudiante debe identificar que hay un posible proceso de transformación en la representación gráfica en la recta numérica en este caso la alternativa b) con la alternativa c).

**Ítem 10**, para resolver este ítem los estudiantes posiblemente deben realizar diferentes tratamientos al registro algebraico utilizando las propiedades de las desigualdades hasta lograr despejar la incógnita, luego realizar una posible conversión del registro algebraico hacia el registro lenguaje natural y finalmente representar el resultado de la inecuación como gráfica en la recta numérica, así como lo expresa Lehmann (2004).

Se puede concluir que, una propuesta para desarrollar significativamente y de manera positiva en la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales es por medio de actividades que favorezcan transitar por diferentes representaciones semióticas del objeto matemático inecuaciones lineales.

En relación a posteriores investigaciones, se puede recomendar que:

- Emplear la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval (1995) en el estudio del objeto matemático inecuaciones lineales utilizando metodologías experimentales, como por ejemplo la Ingeniería Didáctica.

- Emplear la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval (1995) en diferentes objetos matemáticos.
- Realizar investigaciones analizando los libros de textos que utilizan los docentes y estudiantes de educación secundaria tomando como base teórico la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval (1995)
- A los docentes del tercer grado de educación secundaria emplear esta propuesta didáctica en su práctica pedagógica para el desarrollo del objeto matemático inecuaciones lineales.



## REFERENCIAS

- Arévalo, B. y Rojas, T (2016). *Un estudio de las inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo matemático*. Recuperado de <http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2016.pdf>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Balanta, D. y Garcés, Y. (2017). *Enseñanza y Aprendizaje de las Inecuaciones Lineales con una Incógnita Real: Un análisis a la propuesta de Enseñanza presentada en dos textos escolares de la Educación Colombiana* (tesis de maestría). Recuperado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/13200/1/0586319.pdf>
- 
- Baldor, A. (1988). *Álgebra*. Patria, México: Ed. Editorial Patria, 5ta edición.
- Bernardis, S., Nitti, L. y Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática*, 29, 3. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2017/11/29/indagacion-de-la-historia-de-las-desigualdades-matematicas/>
- Borello, M., (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor*. (Tesis de doctorado). Recuperado de <https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/9174?show=full>
- Byrne, O. (1847). *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. Recuperado de <https://archive.org/details/firstsixbooksofe00byrn/page/20/mode/2up>
- Camargo, Á (2013). *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 1841-1849). Montevideo, Uruguay: SEMUR. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/18554/1/Camargo2013El.pdf>
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 177-196.

- Duval, R. (1995). *Semiosis y Pensamiento Humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia en 1999.
- Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Recuperado de: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. Recuperado de <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- Duval, R. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2(3), 10-34. Disponible en [http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf\\_122](http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf_122)
- 
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics. *Mathematical Association of America*, Washington D.C., pp. 25-37.
- Euclides (1974). *Los seis primeros libros de los Elementos de Euclides. (Libros I – VI)*. Recuperado en [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los\\_seis\\_primeros\\_libros\\_y\\_el\\_undecimo%2C\\_y\\_duodécimo\\_de\\_los\\_elementos\\_de\\_Euclides.pdf](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo%2C_y_duodécimo_de_los_elementos_de_Euclides.pdf)
- Euclides (1991). *Elementos*. Barcelona, España: Gredos.
- Eves, H. (1969). *An introduction to the history of mathematics. Third Edition*, New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of mathematical analysis and applications*, 249(1), 118-134. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X00969348>
- Garrote, M., Hidalgo, M., J. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma* 46, 37 – 44
- Grabiner, J. V. (1997). Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's treatise of fluxions. *The American mathematical monthly*, 104(5), 393-410.

- Gómez, A. (2018). *Análisis de una praxeología matemática de las inecuaciones lineales en los libros didácticos de educación secundaria*. (Tesis de Maestría). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13586>
- Heredia, M; Palacios, M. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje*. (Tesis de Licenciatura). Recuperado de <http://hdl.handle.net/10893/7743>
- 
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial Ultra. Sexta Edición.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Venezuela. X(2). Pp. 213-223.
- Lehmann, Ch. (2004). *Álgebra*. Mexico: Limusa.
- 
- Lima, E. (1997). *Análisis Real Volumen 1*. Chile: Textos del IMCA.
- 
- Linares, M. (2016). *Geometría Interactiva*. Recuperado de [http://newton.matem.unam.mx/geometria/t\\_1\\_021/t\\_1\\_021\\_m.html](http://newton.matem.unam.mx/geometria/t_1_021/t_1_021_m.html)
- Macías, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, 4(9): 27-57
- Maroto, A (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Educación*, 37(2), 1-16. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44029444001>
- Martínez, S y Varas, M. (2013). *Álgebra para futuros profesores de educación básica*. Recuperado de [https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/07/REFIP-Algebra\\_01.pdf](https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/07/REFIP-Algebra_01.pdf)
- Ministerio de Educación del Perú (2016a). *Currículo Nacional de Educación Básica Regular (CNEB)*.
- 
- Ministerio de Educación del Perú (2016b). *Texto del estudiante, matemática 3*. Perú: Santillana.
- Ministerio de Educación del Perú (2016c). *Cuaderno de trabajo, matemática 3*. Perú: Santillana.
- Monje, F. (2017). *Tratamiento De La Inecuación En El Contexto Escolar De Chile y Rusia*. (Tesis de Maestría). Recuperado de

<http://repositoriodigital.ucsc.cl/bitstream/handle/25022009/1223/yerka%20Monje%20Fern%c3%a1ndez.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Moraleda, C. (2010). *Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de soluciones*. (Tesis de maestría). Recuperado de [https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Cristina\\_Moraleda.pdf](https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Cristina_Moraleda.pdf)

Oviedo, L., Kanashiro, A, Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*. 13(), 29-36. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar>

Penalva, C. y Torregrosa, G. (2001) *Representación y aprendizajes de las matemáticas*. Scripta in Memoriam, 649-658. Recuperado de [click aquí](#)

Pirela, L., Silva, L. (2015). *Dificultades que presenta el estudiantado de cuarto año de educación media general en el aprendizaje de inecuaciones según el enfoque teórico de Socas*. (Tesis de licenciatura). Recuperado de <http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/4156/Pirela%20-%20Silva.pdf?sequence=1>

Rahn, J. (1659). *Teutsche algebra*. Recuperado de [https://books.google.com/books?id=ZJg\\_AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com/books?id=ZJg_AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false)

Ruiz, R. (2019). *Errores que cometen los estudiantes de tercer año de secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable*. (Tesis de Maestría). Recuperado de <http://hdl.handle.net/20.500.12404/13408>

Santos, J. y Lozada, A. (2010). *Una propuesta para la construcción de los conceptos desigualdad e inecuación mediante el modelo de situaciones didácticas y a partir del desarrollo de la solución de problemas*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1098/1/457> Una Propuesta para la Construcción Asocolme2010.pdf

Seltman, M., y Goulding, R. (2007). *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis*, Nueva York: Springer.

Swokowski, E. (1988). *Calculo con Geometría Analítica*, México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo*. Santa fe, México: Cengage Learning Editores, S.A.

Toque, Michael (2017). *Teoría de Situaciones Didácticas de Brosseau en el aprendizaje de inecuaciones lineales en los estudiantes del Quinto Grado de Secundaria de*

- la Institución Educativa Privada ELIM de Ventanilla Región Callao*. (Tesis de Maestría). Recuperado de <http://repositorio.uancv.edu.pe/handle/UANCV/1573>
- Tamayo, O. (2006), Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educativa y Pedagógica*, 18(45), 37-49. Recuperado de <https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/6085>
- Triana, J. y Moreno M. (2013). *Una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software geogebra*. (Tesis de Maestría). Recuperado de <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/123/TO-16325.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Vasco, J. (2019). *MOOC para la enseñanza de desigualdades e inecuaciones en alumnos de once grado de la institución educativa Nueva granada del municipio de Dosquebradas*. (Tesis de doctorado). Recuperado de <http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/10539/T371.33%20B926.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- 
- Vrancken, S.; Engler, A.; Müller, D. (2010). Inecuaciones algebraicas. Una experiencia didáctica articulando diversos sistemas de representación. *Yupana*, Argentina, Santa fe. 10(5). pp. 55-66.



e)  $5x > \frac{x+80}{2}$

4) ¿Cuál es el mayor número entero que cumple con las características dadas en el enunciado?

---



---



---

5) Sea la siguiente expresión: El doble de la edad de Juan aumentada en 7 es, como mínimo, 56 años. ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado anterior?

e)  $2x + 7 \geq 56$

g)  $2x + 7 > 56$

f)  $2x + 7 \leq 56$

h)  $2x + 7 < 56$

6) ¿Cuál es la edad mínima que puede tener Juan?

---

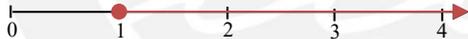
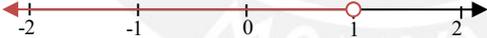
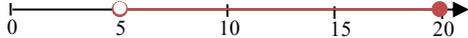


---



---

7) Completar la Tabla según sea la representación de la inecuación lineal.

Representación gráfica en la recta	Expresión algebraica	Expresión Natural
		
		
		
	$-x \leq 7$	
	$-2x > 10$	

8) Sea:  $15 \leq x < 75$ . Si  $x$  representa el dinero que gana Mario en un día, representar en lenguaje natural la inecuación:

---

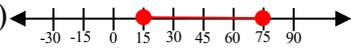
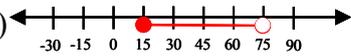


---



---

9) Marca la alternativa que muestre la representación gráfica de la inecuación lineal

- a) 
- b) 
- c) 
- d) b y c
- e) todas

10) Encuentra los valores de  $x$  que satisfacen cada inecuación dada y representa el conjunto de solución en forma gráfica en la recta numérica y en lenguaje natural.

a)  $9x - 6 \geq -18x - 1$

b)  $\frac{x-2}{3} + \frac{3x}{4} \leq \frac{5x}{2}$

