PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Análisis de organizaciones matemáticas del Método Singapur para la resolución de problemas aritméticos

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Jorge Armando Dávila Rocca

ASESORA

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Junio , 2021

Resumen

El trabajo que se presenta a continuación responde a la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el alcance del método Singapur en términos de los problemas aritméticos que permite abordar y cómo han sido organizados en la propuesta basada en este método? Para ello, se presentan antecedentes que han evaluado la pertinencia de la aplicación de la metodología de Singapur en países que lo han adoptado en sus procesos de enseñanza. Las investigaciones más importantes sobre esta metodología han sido llevadas a cabo en Singapur por el equipo de profesores de centros educativos como National Institute of Education y Nanyang Technological University; en Latinoamérica, sin embargo, no hay trabajos que profundicen específicamente sobre las organizaciones matemáticas involucradas en la resolución de problemas. Este trabajo pretende apuntar en ese sentido. El objetivo general de la investigación es identificar una organización matemática de los problemas aritméticos abordados en una colección de textos de primaria que siguen el modelo del método Singapur. Para ello, tomamos como marco teórico a la teoría antropológica de lo didáctico en adelante (TAD), propuesto por Chevallard (1999), que presenta la noción de praxeología. Es así como las nociones de tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría permiten modelar la actividad matemática. Como resultado de nuestro trabajo, se presenta un Modelo epistemológico de referencia (MER) para la clasificación de los problemas aritméticos, que permitan la identificación de una organización matemática para estos problemas en los libros de texto Prime Matemáticas de Singapur.

Palabras claves: Problemas aritméticos; praxeología; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Modelo epistemológico de referencia; Método Singapur

Abstract

The following work answers the following research question: What is the scope of the Singapore method in terms of the arithmetic problems it addresses and how have they been organized in the proposal based on this method? The most important research on this methodology has been carried out in Singapore by the team of teachers from schools such as National Institute of Education and Nanyang Technological University and in Latin America, however, there are no work that specifically delves into the mathematical organizations involved in problem solving. This work aims to point in that direction.

The overall objective of the research is to identify a mathematical organization of the arithmetic problems addressed in a collection of primary texts that follow the Singapore method model for this we take as a theoretical framework for the anthropological theory of the didactics onwards (TAD) proposed by Chevallard (1999) that presents the notion of praxeology, is as well as the notions of type of task , technique, technology and theory allow us to model mathematical activity and allows us to study the mathematical practices that are carried out in the so-called Singapore method. For this, we take as a theoretical framework the anthropological theory of the didactic onwards (TAD), proposed by Chevallard (1999), which presents the notion of praxeology. This is how the notions of type of task, technique, technology and theory allow to model the mathematical activity.

As a result of our work, we present an Epistemological Reference Model (MER) for the classification of arithmetic problems, which allow the identification of a mathematical organization for these problems in the Prime Mathematics of Singapore textbooks.

Keywords: Arithmetic problems; praxeology; Anthropological Theory of didactics; Reference epistemological model; Singapore method

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a mis padres, Alicia y Segundo, y a mi esposa, Liz, por su apoyo, comprensión y amor en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Un especial agradecimiento a mi asesora de la tesis, la actual directora de la maestría en Enseñanza de la Matemática de la PUCP, la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por su exigencia y paciencia a lo largo de la elaboración de este trabajo de investigación.

A los profesores de la maestría, a quienes felicito por su labor de enseñar y contribuir a la formación de profesores con una sólida base matemática para nuestro país.

A mis padres, así como a mi hermano Juanjo, por todo el apoyo recibido durante el desarrollo de esta tesis.

A mi esposa Liz, por su apoyo a pesar de los tiempos complicados que nos tocó vivir en este tiempo de la pandemia.

A mis compañeros y amigos de la maestría, con quienes compartimos muy buenos momentos en clase en los años de estudio en la PUCP.

A mi centro de trabajo, el Colegio Villa Caritas, por el apoyo brindado para la realización de los estudios de maestría.

Índice

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Introducción

Se conoce como “El Método Singapur” a la forma en que los estudiantes aprenden Matemática y la forma en que los profesores aprenden a enseñar Matemática en Singapur (Ban Har, 2014, pág. 8).

En Singapur, se le da importancia al desarrollo de habilidades y es donde se enfoca la línea de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según el Ministerio de Educación de Singapur (2012), la construcción del currículo de matemáticas tiene como finalidad que la matemática sea útil para situaciones problemáticas de la vida diaria, para esto se trabaja en que se aprenda, se aplique y se construya habilidades matemáticas, este trabajo va a ayudar a que se desarrollen habilidades cognitivas y metacognitivas a través del enfoque de resolución de problemas aritméticos.

Para lograr esto, el diseño curricular de matemática en Singapur propone actividades que plantean una variación sistemática en el nivel de complejidad, pasos a seguir donde se desarrollan estrategias de solución de manera estructurada y ordenada. Por otra parte, el currículum espiral se sustenta en la hipótesis de que el alumno debe tener varias oportunidades para retener el aprendizaje de cualquier tema sin repetir el mismo ejercicio. Desarrollar el currículo en espiral y analizarlo es un punto importante de la presente investigación.

La metodología de Singapur en matemática está estructurada siguiendo un modelo pentagonal donde se entrelazan el desarrollo de conceptos, habilidades, procesos matemáticos, metacognición, y que, además, proponga como directriz central la resolución de situaciones problemáticas significativas para el alumno. Esta metodología plantea como punto de partida el uso de material concreto para después pasar a una representación pictórica del problema y, posteriormente, a la utilización de símbolos y de un lenguaje más abstracto. A partir de este proceso, se espera que los estudiantes puedan hacer una matemática significativa para reconocer la relación entre los datos y la incógnita del problema, comprenderlo mejor y resolverlo. Según Kho, Yeo y Lim (2009, citados en Yeap, 2012), “en Singapur, el currículum de matemática en primaria enfatiza las relaciones cuantitativas cuando los alumnos aprenden el sentido de los números y sus cuatro operaciones básicas. Una característica clave es el desarrollo y el uso del Método de barras desde 1980” (p.14).

En el diseño curricular de Matemática (2012), se establece que la matemática está estructurada con criterios didácticos que relacionan las nociones del curso, promueven la apropiación progresiva de un lenguaje matemático, y utilizan varios recursos como medios fundamentales para el aprendizaje. El currículo está estructurado con un enfoque en espira donde los contenidos son presentados secuencialmente, esto permite articular y ampliar de manera progresiva los contenidos que se deben enseñar en cada grado escolar. Los alumnos deben aprender a justificar, argumentar y a realizar procesos metacognitivos.

Este diseño curricular ha permitido mejorar la enseñanza de la Matemática en Singapur (PISA, 2018). De hecho, Singapur es uno de los primeros países con un buen rendimiento académico en el área de Matemática. Por su parte, de acuerdo con los informes TIMSS, Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (traducción del inglés, *Trends in International Mathematics and Science Study*, TIMSS), Singapur siempre ha ocupado los primeros lugares en esta prueba desde el año 1999 hasta el 2015. En este sentido, vale considerar a Singapur como un ejemplo para el resto de los países en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que ha ofrecido evidencia de los óptimos resultados que ha conseguido entre su población educativa. Según Cordano (2012), en Singapur, para poder estudiar la carrera docente es un requisito indispensable que el candidato haya tenido un desempeño sobresaliente en su etapa escolar.

Dado que hay una valoración positiva del método en el medio, es una tarea importante evidenciar en qué fundamentos teóricos se sustenta el currículo de matemática planteado por el Ministerio de Educación de Singapur, cuál es su alcance y qué contenidos matemáticos son estudiados.

Considerando como la habilidad central la resolución de problemas en la metodología propuesta por Singapur, en la presente investigación, se buscó centrar el objeto matemático en la resolución de problemas aritméticos que involucran las cuatro operaciones fundamentales. Este trabajo se enmarca en una investigación cuyo foco es identificar una praxeología u organización matemática de los problemas aritméticos en el ámbito de una institución. Se abordará el aspecto curricular, que se centrará en estudiar el enfoque del método Singapur para la resolución de problemas aritméticos los cuales se empiezan a enseñar en primer grado de primaria y hasta sexto grado del mismo nivel.

Según Almouloud (2015), la TAD contempla, en el caso de la enseñanza de las Matemáticas, dos praxeologías. La primera es llamada organización matemática (OM), la cual plantea que la matemática puede ser construida con un grupo de individuos que estudian un tema matemático específico. La segunda, la organización didáctica (OD), que muestra cómo se puede organizar esta matemática para ser enseñada. El presente trabajo pretende proponer organizaciones matemáticas para la resolución de problemas aritméticos a partir del análisis de los libros de texto *Prime Mathematics*, de la editorial Schollastic Singapur, libros elegidos para el estudio.

CAPÍTULO 1. Planteamiento y Justificación del Problema

1.1 Investigaciones de Referencia

Luego de una revisión bibliográfica en bases de datos y repositorios de investigaciones de distintas universidades, se han organizado los antecedentes en dos secciones: (a) investigaciones sobre el método Singapur con énfasis en aspectos cognitivos y su efecto en los sistemas de enseñanza, (b) investigaciones sobre la dimensión epistemológica de un problema didáctico sobre los problemas aritméticos.

1.1.1 Investigaciones sobre el método Singapur con énfasis en aspectos cognitivos y efectos del método en los sistemas de enseñanza.

Por un lado, Yeap (2002) investigó en su tesis doctoral la relación entre la capacidad matemática de plantear problemas de los niños y tres variables: nivel de grado, capacidad de resolución de problemas y tipo de tarea. Mientras dos de las variables eran de sujeto, una era de tarea. Cabe resaltar que los sujetos del estudio fueron de tercer grado de primaria (ocho años) y quinto grado de primaria (diez años). Para llevar a cabo la investigación, el diseño implicó el desarrollo de un esquema para analizar los problemas que plantean los niños. Este asignó un problema de aritmética solucionable a un índice de planteamiento de problemas más alto si el problema es más difícil para los pares del problema. La derivación del índice de planteamiento de problemas se basó en las características semánticas de los problemas de palabras. Así, se descubrió que este esquema podía usarse para analizar la mayoría de las respuestas problemáticas de los niños en dicho estudio.

Un total de 330 niños de tercer grado de primaria y 330 niños de quinto grado de primaria en tres escuelas de Singapur participaron en el estudio principal. Estos niños no habían estado expuestos a actividades explícitas de planteamiento de problemas antes de este estudio. La relación entre la capacidad de plantear problemas de los niños y el nivel de grado, la capacidad de resolución de problemas y el tipo de tarea se investigaron cuantitativamente. Se descubrió que los niños en el nivel de grado superior eran mejores para plantear problemas.

El estudio también encontró una fuerte relación positiva entre la capacidad de plantear problemas y la capacidad de resolución de problemas, particularmente entre los niños más pequeños. Sin embargo, el efecto de interacción entre el nivel de grado y la capacidad de resolución de problemas no fue estadísticamente significativo.

La capacidad de resolver problemas verbales planteados por 220 niños con alta capacidad de planteamiento de problemas se analizó cualitativamente para identificar categorías de procesos de búsqueda de problemas. Se encontró que estos niños demostraban cinco categorías de procesos cuando planteaban problemas de palabras. Los procesos fueron (1) la posesión de "primitivos", (2) la posesión de problemas relacionados, (3) la construcción de significado para las oraciones numéricas, (4) participar en procesos metacognitivos y (5) establecer conexión con experiencias propias, incluidas las experiencias con problemas de libros de texto. Algunos de los procesos eran específicos de la tarea mientras que otros eran comunes a todos.

El estudio también incluyó el desarrollo de un esquema para clasificar la amplia variedad de tareas de búsqueda de problemas utilizadas en estudios de instrucción e investigación. Se encontró que las tareas con restricciones y tareas que incluían un texto eran más difíciles para los niños de plantear problemas solucionables. Esto fue particularmente cierto para los niños en el nivel de grado inferior y los niños con menor capacidad de resolución de problemas. También se encontró que las tareas que estaban abiertas y las tareas que contenían información rica tendían a alentar a los niños a plantear problemas semánticamente complejos.

Esta es una investigación muy interesante ya que a los niños se los reto a plantear problemas. El diseño de la investigación implicó el desarrollo de un esquema para analizar los problemas que plantean los niños. La relación entre la capacidad de plantear problemas de los niños y el nivel de grado, la capacidad de resolución de problemas y el tipo de tarea se investigaron cuantitativamente y se llegó a la conclusión de que los niños en el nivel de grado superior eran mejores para plantear problemas. El estudio de esta tesis doctoral también encontró una fuerte relación positiva entre la capacidad de plantear problemas y la capacidad de resolución de problemas. Esto es lo que se trabaja en el currículo en espiral del método y será materia de investigación de la presente tesis para poder estudiar cómo se organizan las organizaciones didácticas en la resolución de problemas.

También, en línea con los objetivos de la presente tesis, Ho, Lee y Yap (2000) describen el intento de una escuela de lograr que los niños de primaria planteen problemas durante una prueba tradicional de matemática. El artículo en mención se centra en la relación del rendimiento de los niños con los problemas que plantearon. La muestra fue conformada por un grupo de 115 niños de quinto de primaria, a quienes se les pidió que escribieran un problema de palabras basado en un estímulo pictórico. Los datos se usaron para explorar si los niños de alto rendimiento planteaban problemas más complejos que los de bajo rendimiento.

La puntuación del examen de los niños se utilizó para formar un grupo de alto rendimiento y un grupo de bajo rendimiento. Los problemas planteados por los niños en cada grupo se analizaron de acuerdo con la cantidad de información incluida en ellos para revelar su complejidad matemática. Los resultados tienen implicaciones significativas para el uso de pruebas de papel y lápiz para evaluar la capacidad de los niños para pensar matemáticamente. Los autores definen al planteamiento de problemas matemáticos como la generación de nuevos problemas o la reformulación de los existentes (Silver, 1994, citado en Ho et al, 2000). Se ha identificado como una actividad matemática esencial (NCTM, 1989) e inseparable de la resolución de problemas matemáticos (Kilpatrick, 1987, citado en Ho et al, 2000).

El método Singapur busca el desarrollo de conceptos, habilidades, procesos matemáticos, metacognición y actitudes necesarias para el aprendizaje. Estos resultados validan la justificación del énfasis actual en el pensamiento, la resolución de problemas y la tecnología de la información en las escuelas de Singapur. En el documento, se tiene que el 51% de la muestra no pudo plantear un problema solucionable. Se realizarán análisis adicionales para emerger categorías de dificultades para sugerir razones para la incapacidad de plantear problemas solucionables.

Resulta interesante ver si alguna de estas categorías es debido a la falta de comprensión conceptual. También será interesante investigar cómo responden los alumnos a los diferentes tipos de tareas de planteamiento de problemas, y cómo responden los alumnos de diferentes grupos de edad a la misma tarea que lo encontramos en el siguiente antecedente.

Según Ng y Lee (2009), resolver problemas aritméticos y algebraicos es un componente clave del plan de estudios de matemáticas elementales de Singapur. Una enseñanza heurística se basa en el método modelo o también llamado método de barras; implica dibujar un diagrama para representar la información clave del problema. En este artículo, se describe el método de barras y un marco teórico que respalda su uso, que proviene de la investigación sobre el plan de estudios elemental ruso de Davydov (1962, citado en Ng y Lee, 2009). Aunque el método de barras es muy similar al enfoque de Davydov, existen dos diferencias principales. Davydov enfatizó el uso de letras como variables y la construcción de ecuaciones para resolver problemas con variables. En cambio, estos no son los focos del plan de estudios de primaria en Singapur. En el método de barras, los rectángulos representan valores desconocidos, pero la solución para lo desconocido todavía se basa en el conocimiento aritmético de los niños.

En esta investigación, se presentaron dos estudios para examinar las percepciones de los maestros y la aplicación en los niños del modelo de barras. Los sujetos fueron 14 profesores de primaria de 4 escuelas y 151 niños de primaria de quinto grado. El método de barras ofrece a los niños una mayor capacidad de acceso al álgebra simbólica. Los resultados ofrecen vías de apoyo en la resolución de problemas con una incógnita.

Se proporcionan detalles del método de barras y se muestra cómo se usa para resolver problemas aritméticos y algebraicos de palabras que requieren la construcción de un solo dibujo de modelo. En segundo lugar, se discute el marco teórico que destaca las tres fases de resolución de problemas en las que los niños se involucran cuando usan el método modelo para resolver problemas con variables. Tercero, proporciona evidencia de dos estudios que muestran cómo los maestros y los niños usan el método modelo para resolver problemas con variables. Cuarto, usa ejemplos de las soluciones parcialmente correctas de los niños para mostrar que la representación no es un proceso de todo o nada. Dichas soluciones se utilizan para ilustrar lo que puede haber impedido que los niños usen el método de barras con éxito. En la sección final, se discute las implicaciones de los hallazgos de estos dos estudios para la educación matemática.

Según Silver (1994, citado en Yeap, 2000), cuando los estudiantes se involucran en problemas matemáticos, generan nuevos problemas o reformulan los existentes. En la educación matemática, durante mucho tiempo se ha reconocido que el problema que plantea tareas es un componente importante de la capacidad matemática (Polya, 1954; Brown & Walter, 1970, citados en Yeap, 2000). Asimismo, Silver (1994, citado en Yeap, 2000) argumentó que los estudiantes deberían tener oportunidades de participar en problemas para posar porque (a) es un medio para mejorar la resolución de problemas de los estudiantes, (b) una manera de mejorar las disposiciones de los estudiantes hacia las matemáticas, (c) una ventana a la comprensión matemática de los estudiantes y (d) una característica prominente de la actividad matemática. Desde la problemática planteada en esta investigación, el objetivo es estudiar las organizaciones matemáticas y didácticas presentes en el currículo de Singapur para la resolución de problemas que desarrollan capacidades que dotarán a los estudiantes de herramientas para que puedan tener recursos para dar solución a una situación problemática. La herramienta del modelo de barras presentada (Ng & Lee, 2009) muestra la importancia de enseñar a los estudiantes más problemas matemáticos en vez de algoritmos o ejercicios repetitivos. Así, tendrán una mejor idea de los que es la matemática y esto se articula con lo que se publicó en el libro de Yeap (2000).

Por otro lado, Yeap y Berinderjeet (2000), se enfocan en un aspecto de una investigación sobre el problema matemático de los niños. Se les pidió a todos los niños de Primaria 3 y Primaria 5 en tres escuelas primarias que abordaran una prueba de resolución de problemas y que escribieran problemas matemáticos. Las respuestas de los niños a la prueba de planteamiento de problemas se clasificaron inicialmente como problemas con solución y sin solución. Posteriormente, los problemas solucionables se analizaron más a fondo para obtener un índice de complejidad del problema. El marco de análisis se modifica a partir de uno sugerido previamente (Silver & Cai, 1996) en base a posibles situaciones en problemas aritméticos de palabras (Marshall, 1995).

Este documento tiene como objetivo investigar la complejidad de los problemas planteados por niños de diferentes edades y la capacidad de resolución de problemas cuando se les dan diferentes tareas de planteamiento de problemas. Teniendo el método Singapur como estructura medular la resolución de problemas, esta investigación permite validar la complejidad de problemas planteados cuando al estudiante se le presenta reformular problemas o que genere nuevos problemas.

En esta sección, se presentan investigaciones que han evaluado la pertinencia de la aplicación del Método Singapur en países que lo han adoptado en sus procesos de enseñanza.

Un antecedente Importante para la presente investigación es el estudio de Espinoza, Matus, Barbe, Fuentes y Márquez (2016), este trabajo de investigación considera que con el método Singapur el proceso a seguir es el CPA (Concreto, pictórico y abstracto) , siendo la organización del currículo en espiral los estudiantes tienen más de una oportunidad de desarrollar habilidades en una tema y aprenderlo significativamente ya que son planteadas en orden creciente a dificultad.

El propósito de esta investigación es responder cómo la implementación del uso de los “textos de Singapur”, que son textos de estudios basados en la metodología de enseñanza de la matemática utilizada en Singapur ayuda a que los niños y niñas de Chile logren aprendizajes matemáticos de calidad y busca comprender cómo aporta a que los profesores cumplan con las expectativas de enseñanza del Estado. Así, los resultados indicaron un impacto positivo del Método Singapur en los alumnos de cuarto grado de primaria en comparación con otras estrategias de enseñanza. Esta investigación surge frente al reconocimiento de un problema con la educación chilena: bajo nivel de logro respecto a los estándares internacionales. La prueba PISA del 2012 demostró que Chile obtuvo 71 puntos por debajo del promedio internacional y que 52% de los estudiantes chilenos se encontraban por debajo del nivel más básico de matemáticas.

La metodología de la investigación consistió en tres partes: un estudio documental de los libros de texto *Pensar sin límites*, basados en el Método Singapur; un estudio cuantitativo de las habilidades de estudiantes de cuarto grado de primaria; y un estudio cualitativo con el fin de caracterizar aspectos que han afectado la implementación del Método Singapur en las escuelas. La primera parte determinó qué y cuántos elementos que se mencionaban en los textos se encontraban en las bases curriculares. Después, se identificaron los niveles en los que se encontraban tratados estos elementos en los textos y las bases curriculares.

Finalmente, se identificaron los principios fundamentales de aprendizaje y enseñanza de ambos para luego compararlos. En el caso del estudio cuantitativo, se compararon estudiantes de cuarto grado que habían implementado el Método Singapur y los que no. Se seleccionaron estudiantes del mismo colegio a los que se puedan comparar. Se comparaba el Método Singapur con otra metodología de los colegios donde se hicieron las pruebas. Finalmente, en el estudio cualitativo, se comprendieron las transiciones que iban experimentando los docentes, los estudiantes y las escuelas con esta nueva estrategia.

Se consideraron estudiantes de doce escuelas de Chile que participaron de esta investigación; seis donde se implementaba el Método Singapur y seis de comparación. En este estudio, solo participaron estudiantes de cuarto grado de primaria. Los resultados de la investigación en el estudio documental muestran que los textos *Pensar sin límites* abordan casi la totalidad de los objetivos de aprendizaje de las bases curriculares y los programas de estudio, y promueven el desarrollo de las mismas habilidades matemáticas.

Los resultados del estudio cuantitativo evidencian que el porcentaje de logro promedio de los estudiantes que implementaron el método es 4.76 puntos porcentuales mayor que el porcentaje de logro promedio de comparación. Según los investigadores se puede deducir que el Método Singapur es una buena alternativa para los estudiantes chilenos, ya que estos logran mejores niveles de aprendizaje que aquellos que estudian otras metodologías. Además, hubo un incremento en las habilidades de resolver problemas y manipular expresiones matemáticas.

Asimismo, Juárez y Aguilar (2018), en su investigación titulada “El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en primaria”, tiene como propósito mejorar los aprendizajes de las matemáticas en educación primaria. Esta investigación consistía en implementar el método Singapur en México. Para analizar los resultados, se utilizaron métodos cuantitativos y cualitativos, los cuales implican evaluaciones de un antes y después, y observaciones durante el proceso.

Asimismo, este estudio, cuyo diseño fue cuasi experimental, se realizó en una escuela primaria pública del estado de Puebla, México, donde participaron treinta y un niños de segundo grado. Los niños tenían la característica de utilizar símbolos para representar objetos, lugares y personas. Las características principales fueron el juego simbólico, egocentrismo, animismo, clasificación, conservación e irreversibilidad. A estos niños se les enseñó una nueva manera de resolver los problemas que se caracterizó por seguir los siguientes pasos: leer el enunciado del problema para decidir de qué se está hablando, un rectángulo será la representación de la unidad, se realizan las operaciones correspondientes para finalmente escribir la respuesta con sus unidades. Finalmente se evaluaron las habilidades que habrían obtenido mediante el método Singapur.

En el pre-test de este método se encontró que siete de cada diez niños mostraban deficiencia al resolver problemas matemáticos que implicaban la suma o la resta. Así fue como se les enseñó el método Singapur durante trece sesiones en el 2016. Los problemas consistían en campos que se tenían que completar con los pasos del método. Luego, se incrementó la complejidad brindándoles problemas que no contenían los campos con indicaciones precisas, ya que las cantidades las tenían que extraer de los gráficos. Finalmente, después de las trece sesiones, se notó una mejoría, ya que la mayoría de los alumnos desarrolló las habilidades que les hacían falta.

Como conclusiones de esta investigación, el artículo menciona que, en México, se debería fomentar el desarrollo de competencias para resolver problemas de manera autónoma. Además, si los alumnos reprueban o no entienden bien un tema, se atrasarían, ya que, al llegar a la secundaria, no tendrían una base para ver temas más complejos. Sin embargo, de la experiencia desarrollada, se concluyó que el método Singapur puede ayudar a los niños con el problema de la reprobación; entonces, ya no se daría el problema del atraso en estudios superiores. De acuerdo con la investigación, los niños que no tuvieron tanta mejoría fueron los que faltaron a algunas sesiones, por lo que no hubo continuidad como sus compañeros. En este estudio, se señala que, si esta estrategia se aplicara desde el inicio del ciclo escolar, se lograría mejores resultados en matemáticas. Asimismo, este método se podría aplicar a cualquier otro grado de primaria.

Otra investigación importante es la de Bastías, Olea y Trincado (2015), que tuvieron como objetivo medir la eficacia del método Singapur con resultados cuantitativos, al aplicar un instrumento tipo ensayo SIMCE de matemática para el cuarto año de educación básica en dos instituciones educativas, colegio Leonardo Da Vinci, el cual aplica el currículo del MINEDUC (método tradicional) y el colegio El Salvador, que implemento el método Singapur desde el 2011.

A su vez, Delgado, Mayta y Alfaro (2018), realizaron una investigación en el Perú cuyo objetivo principal fue demostrar la efectividad del “Método Singapur” en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de tercer grado de primaria en una Institución Educativa Privada de dicho país. Se empleó un diseño pre-experimental, donde la muestra estaba conformada por 57 estudiantes correspondientes al grupo experimental que cursaba el tercer grado de educación primaria, a quienes se enseñó siguiendo los lineamientos del método Singapur para trabajar la resolución de problemas y se utilizó la prueba de Resolución de Problemas de la Batería Psicopedagógica Evalúa-3 para medir la efectividad del método. Los resultados después de aplicado el método mostraron diferencias significativas en el nivel de logro de resolución de problemas matemáticos en diferencia del pre-test y post-test.

En estos trabajos de investigación la aplicación del Método Singapur muestra una efectividad tanto en el cuarto año de primaria de un colegio de Chile como, en el segundo caso, en tercer grado de primaria de un colegio peruano. En la primera investigación, la medición fue de manera cuantitativa analizando un instrumento tipo ensayo SIMCE de matemática para poder determinar la incidencia de la utilización de esta metodología en los resultados obtenidos. En la segunda, se demostró la efectividad del método empleando un diseño experimental y se midieron los resultados con la prueba estandarizada Evalúa 3.

En resumen, en estas investigaciones sobre el método Singapur con énfasis en aspectos cognitivos y efectos del método en los sistemas de enseñanza podemos concluir que en el aprendizaje y resolución de los problemas aritméticos los niños para aprender cada concepto matemático parten de representaciones concretas donde el niño puede manipular objetos físicos para poder experimentar por su propia cuenta , de ahí se pasa a representaciones pictóricas o imágenes que permiten que el alumno pueda comunicarse matemáticamente y al final se llega a lo abstracto o simbólico donde el trabajo se centra en la competencia de manejar elementos simbólicos , formales y técnicos de las matemáticas , otra idea importante que se presentó en estas investigaciones es que el currículo está organizado en espiral donde los contenidos son presentados secuencialmente , los problemas aritméticos tienen una variación sistemática en el nivel de complejidad dado que se establecen secuencias de actividades en las que la competencia de resolver problemas matemáticamente se presentan en forma progresiva.

1.1.2 Investigaciones sobre la dimensión epistemológica de un problema didáctico, relacionado con los problemas aritméticos.

Según Gascón (2011), para formular un problema didáctico, es necesario descripción y una interpretación, es decir, un modelo epistemológico del ámbito matemático que está en juego. En este trabajo de investigación analizaremos las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico planteado desde la TAD, según (Gascón, 2011), siendo la dimensión epistemológica la dimensión más importante, ya que condiciona fuertemente la dimensión económica–institucional, y la dimensión ecológica.

Según Ruiz, Bosch y Gascón (2010), como parte de la dimensión epistemológica, el investigador busca identificar un modelo epistemológico de referencia y organizaciones matemáticas OM cada vez más complejas; desde esta perspectiva, los problemas aritméticos también deberían organizarse de esa manera. Pero, para elaborar una propuesta con esas características es necesario revisar trabajos en donde se cuestiona cuál podría ser la razón de ser de los problemas aritméticos.

En los siguientes trabajos revisados se presenta una estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas pasando por la algebrización de los programas de cálculo aritmético y la forma como se introduce el álgebra en secundaria, para terminar con un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. A la Luz, del análisis de estos antecedentes y del estudio de las investigaciones que en didáctica de la matemática se han realizado en torno a los problemas aritméticos, se podrá analizar la OM involucrada en el llamado método Singapur para los problemas aritméticos.

En la investigación de Puig y Cerdán (1996) se presentan los resultados de un trabajo anterior, donde detallan cómo el proceso de resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal puede considerarse dividido en las siguientes fases: la fase de lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación. Este modelo se sustenta en la teoría de Polya (1957, citado en Puig y Cerdán, 1996), la cual presenta una diferencia en la fase de la elaboración de un plan; los autores la denominan la fase de traducción, dado que, para los problemas aritméticos, este momento es crucial para su resolución.

Según Puig y Cerdán (1996), Los problemas de varias operaciones combinadas (en adelante, PAVOC) no se resuelven en un solo paso; es decir, no se resuelven con una sola operación, sino con más de una. En estos problemas, la fase de traducción es más compleja, pues hay que usar al menos tres componentes: las operaciones que se deben realizar, entre qué datos, y entre qué orden. Lo anterior es muy importante para la presente investigación, ya que los autores proponen que, si se quiere estudiar la estructura de los problemas aritméticos, conviene distinguir entre los problemas de una etapa con las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética y los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (de más de una etapa).

Otra conclusión importante a la que llegan Puig y Cerdán (1996) es que, para resolver problemas de una etapa, la matemática que involucran estos problemas y los procedimientos que se pueden llevar a cabo para resolverlos utilizan en ocasiones

Procesos que no presentan una escritura aritmética, sobre todo antes de recibir instrucción. Estas técnicas, que permiten la solución de un determinado conjunto de tareas, dejan de ser útiles cuando los números presentados no son tan pequeños. La técnica para resolver problemas que involucren más operaciones debe tener como objetivo dotar de significados a números y después de un análisis de la situación problemática crear esquemas resolviendo problemas.

Otro resultado importante en la investigación es que, cuando se hace el proceso de traducción de un PAVOC de más de una etapa se necesita un trabajo de articulación del orden de cada una de las traducciones correspondientes a las operaciones que hay que realizar.

Los autores presentan el método de análisis de síntesis, cuya base es el método de Lakatos (1981, citado en Puig y Cerdán 1996), el cual presenta una validez universal para los PAVOC. Al tener un problema aritmético se hace una secuencia ordenada para encontrar la solución del problema, en el siguiente ejemplo que presentaremos a continuación, presentamos la regla del análisis –síntesis presentada por Puig y Cerdán (1996).

Regla del análisis – Síntesis

Suponiendo que conocemos la incógnita x

Verificar los antecedentes para encontrar el valor de x

Tener en cuenta estos antecedentes para que se conviertan en la nueva incógnita(Auxiliar).

Problema para aplicar el método de análisis – síntesis

Problema 1: Un helicóptero recorrió 1950 km el primer día, el segundo día recorrió 440 km más que el primero y el tercero 800 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos km recorrió el helicóptero en total?

Problema adaptado de Puig y Cerdán (1990).

Análisis

1. La pregunta final es el total de kilómetros recorridos.
2. Teniendo como dato lo que recorre por día, podemos encontrar el total recorrido.
3. Las incógnitas auxiliares son lo recorrido el segundo y tercer día.
4. Para determinar los kilómetros recorridos el segundo día tenemos como dato lo que se ha recorrido el primer día y los kilómetros recorridos de más que

también se proporciona como dato en el problema, de la misma forma encontraremos los kilómetros recorridos el segundo día.

5. A la hora de encontrar los kilómetros que recorre el tercer día necesitamos saber lo que se recorre el primer día que ya lo tenemos como dato del problema y lo que recorre el segundo día (Encontrado en 4) y el dato de los kilómetros recorridos de menos que también es dato del problema.

Síntesis

1. La suma nos permite encontrar lo recorrido el segundo día, considerando que tenemos como dato lo que ha recorrido el primer día efectuando una suma: 1950 +440 = 2390.
2. Para encontrar lo recorrido en el tercer día basta sumar y restar: 2390 + 1950 -800 = 3540.
3. Teniendo lo recorrido los tres días, tenemos que efectuar una suma para poder encontrar lo recorrido en total: 1950+ 2390 + 3540 = 7880.
4. Se encontró lo que hemos denominado la incógnita, luego la síntesis finalizo.

La síntesis se reduce a efectuar los cálculos correctamente para encontrar la respuesta. Para aplicar el método del análisis síntesis para la resolución de los PAVOC solo se puede pasar del análisis a la síntesis en el momento que la incógnita culmina en los datos del problema, pero esto no siempre ocurre de esa manera, en el siguiente problema 2 mostraremos un caso donde se analiza una situación problemática donde no es posible que la incógnita sea encontrada solo siguiendo procesos y procedimientos aritméticos.

Problema 2: Un carro parte de un punto inicial con velocidad uniforme de 40km/ h hacia otro punto final. Dos horas después sale del punto inicial hacia el punto final otro carro con velocidad uniforme de 60 km/ h. Dígase a qué distancia del punto tomado como inicial se encuentran. (Puig y Cerdán,1990)

A continuación, se presenta en la figura 1 un esquema de solución por el método análisis – síntesis:

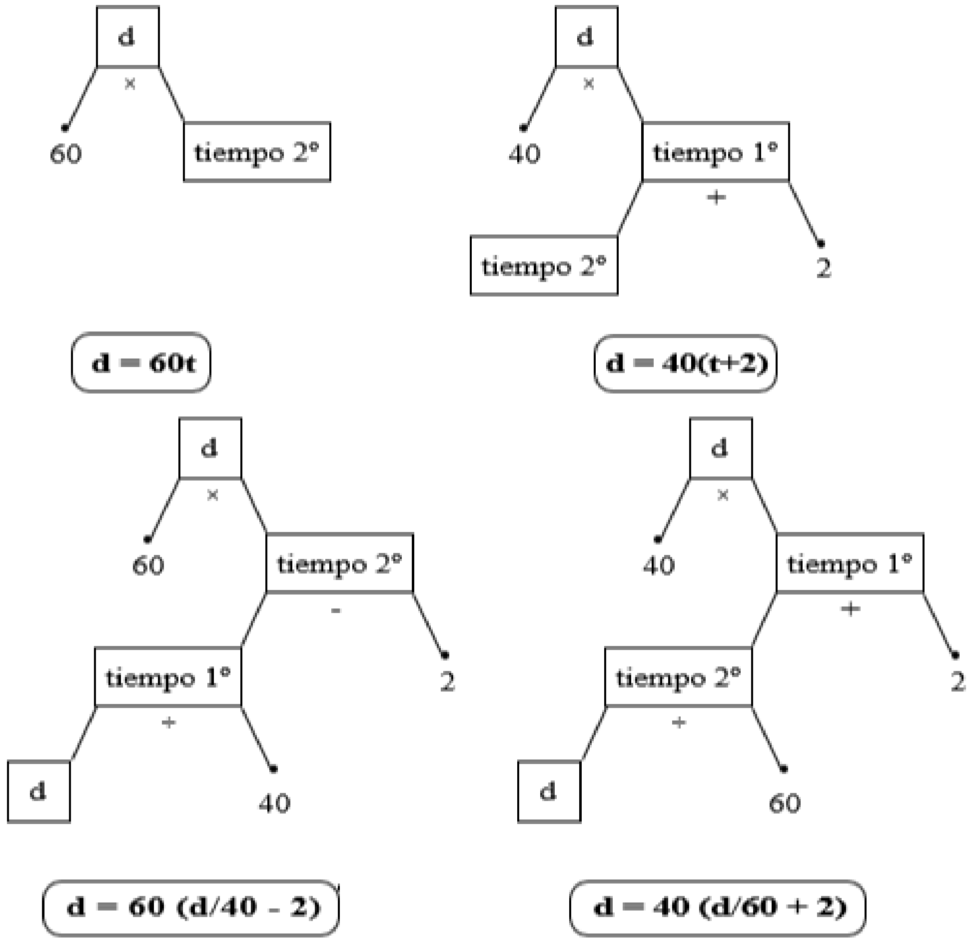


Figura 1. Esquema de solución del problema 2 por el método análisis – síntesis

Fuente: La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. (Puig y Cerdán, 1990)

Si el proceso de traducción no posibilita reducir la incógnita, el análisis nunca termina y se convierte en un proceso cíclico y parece no acabar. Entonces, no se puede proceder con la síntesis, y no se puede resolver con los instrumentos de la aritmética. Por ello, se debe usar la herramienta algebraica.

Según Ruiz, Bosch y Gascón (2011):

> El Álgebra es interpretada en la TAD como un instrumento genérico de modelización de organizaciones matemáticas (en adelante OM). El álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas OM previamente construidas. Para ello, proponemos un modelo epistemológico de referencia (MER) que sustenta la génesis, y el posterior desarrollo del proceso de modelización algebraica durante la enseñanza secundaria. (pág. 546).

En la investigación, consideramos la definición propuesta por (Puig y Cerdán, 1996) donde consideran al “problema aritmético” al problema cuya solución está determinada por una secuencia ordenada de operaciones aritméticas llámese suma, resta, multiplicación y división, resolver el problema se limitará a realizar estas operaciones para calcular la incógnita. Dicho proceso de resolución o secuencia de operaciones aritméticas se denomina Programa de Cálculo Aritmético (PCA) (Chevallard, 2005, citado en Ruiz, Bosch y Gascón 2010).

Desde el patrón de análisis – síntesis de Puig y Cerdán (1996), se platean algunas preguntas sobre las condiciones que necesitan de los datos, estas condiciones serán planteadas cuando se haga el proceso de modelización y que nos permitirá entender los procesos de algebrización que van a experimentar los PCA.

De todo lo presentado hasta aquí podemos determinar que una forma de organizar los problemas aritméticos es ir complejizándolos hasta que requerimos la herramienta algebraica. Según Ruiz, Bosch y Gascón (2010), “Definiremos expresión algebraica como la formulación simbólica de un PCA que, en general, podremos utilizar para modelizar tanto el proceso de resolución de un problema aritmético como su estructura” (pág. 548).

Ruiz, Bosch y Gascón (2010), presentan tres etapas en el proceso de algebrización siendo la primera la que considera el PCA como un todo y donde se debe construir una formulación escrita (simbólica), es en este momento donde las técnicas son insuficientes y aparece la necesidad de construir nuevas técnicas de mayor eficacia.

Aparece, entonces, la necesidad de construir nuevas técnicas que permitan manipular las expresiones algebraicas para su simplificación.

En el punto de partida de la modelización, se entiende que simplificar un PCA es transformarlo en otro equivalente para que se pueda conseguir un modelo más sencillo. En la siguiente fase de este proceso de algebrización, se igualan dos PCA y se requieren de nuevas técnicas, aparece entonces una nueva técnica de solución que vendría a hacer un nuevo objeto matemático, en este caso sería una ecuación, debido que al igualar los PCA nos determina ecuaciones equivalentes (Ruiz, Bosch y Gascón, 2010). En la tercera etapa de algebrización, se debe culminar con la generalización total de las situaciones problemáticas, esto nos servirá para darle el mismo tratamiento algebraico a parámetros e incógnitas.

Las practicas algebraicas van a generalizar las técnicas propiamente aritméticas, por consiguiente, el lenguaje algebraico será la generalización del lenguaje aritmético. (Bolea, 2002).

1.2 Delimitación del Problema de Investigación

En este trabajo de investigación se considera fundamental hacer explícito el alcance del método Singapur para la resolución de problemas aritméticos que involucran las cuatro operaciones fundamentales. Esto significa determinar de manera sistemática qué tipo de problemas, qué métodos, qué justificaciones son abordadas cuando se diseña una propuesta curricular que tiene como soporte metodológico el denominado método Singapur. Una forma de hacerlo es empleando la noción de praxeología, definida de la siguiente manera según Chevallard (2006): “Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general” (p. 23). Este análisis praxeológico consistirá en reconstruir una   praxeología matemática en torno a los problemas aritméticos abordados en los libros didácticos *Prime Mathematics* de la editorial Marshall Cavendish International.

La pregunta de investigación que dirige este estudio es la siguiente: ¿Cuál es el alcance del método Singapur en términos de los problemas aritméticos que permite abordar y cómo han sido organizados en la propuesta basada en ese método?

Cuando nos referirnos al alcance queremos decir cuáles son los problemas aritméticos reconocer los problemas que pueden ser abordados empleando el método Singapur. Para ello recurrimos a la noción de praxeología que permite identificar los procedimientos y justificaciones empleadas al abordar los problemas aritméticos y reconocer cómo están organizados. Según esto, planteamos el siguiente objetivo general:

Identificar una organización matemática de los problemas aritméticos abordados en una colección de textos de primaria que siguen el modelo del método Singapur.

Este objetivo general se centrará en identificar contenidos matemáticos, también las condiciones que se presentan en la dimensión económico institucional y las restricciones que presenta la dimensión ecológica. El objetivo es tratar de entender qué tipo de tareas, técnicas y tecnologías forman parte de la organización matemática para los problemas aritméticos en el denominado método Singapur.

Para poder cumplir con el objetivo general, se deben realizar los objetivos específicos:

1) Identificar el rol que cumplen los problemas aritméticos en la propuesta de la teoría Antropológica de lo didáctico TAD y su relación con la postura que esta teoría presenta sobre el álgebra como herramienta modelizadora.

2) Reconstruir una praxeología matemática en torno a los problemas aritméticos

presentes en una colección de libros.

1.3 Justificación de la Investigación

Desde que este método llegó a Perú, son cada vez más las instituciones educativas que apuestan por adaptar el currículo de Singapur en el curso de Matemática en el nivel primaria. En el caso de la institución donde se va a aplicar el presente este estudio, esta I.E.P. ha implementado el método desde el año 2014. Esto ha implicado la responsabilidad de capacitarse en la comprensión y asimilación de los aspectos teóricos del método Singapur. Uno de los usos que tendrán los resultados del estudio de la presente investigación será poder identificar qué tipos de problemas pueden ser abordados con este método y para cuáles podría resultar insuficiente.

Por otro lado, desde los antecedentes presentados, se reconoce que las investigaciones se han centrado en aspectos cognitivos y metodológicos de la implementación del método en diferentes países con buenos resultados, pero no se cuestiona la identificación de las organizaciones matemáticas presentes en la propuesta de resolución de problemas aritméticos. Las investigaciones más importantes han sido llevadas a cabo en Singapur por el equipo de profesores de centros educativos como National Institute of Education y Nanyang Technological University y en Latinoamérica, sin embargo, no hay trabajos que profundicen específicamente sobre las organizaciones matemáticas involucradas en la resolución de problemas. Este trabajo pretende apuntar en ese sentido.

CAPÍTULO 2 : Aspectos teóricos y metodológicos adoptados en la investigación

En el presente capitúlo, mostraremos los ejes directrices teóricos que tomaremos para la la presente investigación , los cuales se fundamentan en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Asimismo, se describe la metodología a seguir , poniendo especial enfasis en los procedimientos metodologicos a seguir para el analisis de libros didácticos seleccionados para lo cual se seguirá la propuesta de Chaachoua (2010

Lo que sera materia de invesigación en esta etapa es los fundamentos para explicitar una organización matemática de la resolución de problemas aritméticos en libros de educación primaria que se sustentan en el currículo de matemática de Singapur, específicamente en los libros Prime Mathematics de la editorial Scholastic Education International (Singapore).

En la presente tesis, la pregunta de investigación es la siguiente: ¿cuál es el alcance del método Singapur en términos de los tipos de tareas aritmeticas que permite abordar y cómo estos son organizados en la propuesta que presentan los textos de una colección didáctica diseñados desde esta perspectiva?. Para poder entender mejor el concepto de Organización Matemática (OM), esta se define como la que se ocupa por la construcción matemática que se desarrollará en el aula y la Organización Didáctica (OD) por la que le preocupa cómo se llevará a cabo esta construcción (Varella, 2010).

2.1 Aspectos teoricos de la TAD presentes en la Investigación

Según Bolea (2002, en el seno de una institución las actividades matemáticas van a modelizarse gracias a una organización matemática (OM) , que delimitara el proceso de eneñanza-aprendizaje que describiremos como organización didactica (OD).

2.1.1 Noción de Praxeología

Chevallard (2006) señala que “una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general” (p.23). Podemos analizar toda actividad humana separándola en dos acciones, la de la práctica y la del conocimiento: Praxis y logos. La TAD nos brinda una herramienta para representar la actividad matemática y aparecen las nociones de tarea, técnica, tecnología y teoría. (Almouloud, 2015).

2.1.2 Noción de Institución

Una institución es productora de un nuevo saber para el aprendizaje de los sujetos que se encuentran en el seno de esta organización social y forma parte de ella, La TAD hace explicito que la institución delimita la actividad de estos sujetos con un fin cognitivo y didáctico. (Castella, 2017).

En las escuelas de Singapur se usan los libros de texto que son elaborados siguiendo las directrices proporcionadas por el currículo de matemática donde se sustenta la elaboración de los libros de texto. A diferencia de otros países donde hay varios textos que pueden diferir según las decisiones de los autores, en Singapur, los libros de texto son la traducción de una directiva institucional, expresada como un programa, según la interpretación del currículo de matemática y son la base de la aplicación del llamado método Singapur. Según Chaachoua (2010), los libros escolares son productos de las instituciones de transposición. Estos pueden ser individuos o grupos de personas encargadas por las autoridades de escribir los libros o manuales.

La investigación estará centrada en estudiar cómo se aborda la resolución de problemas aritméticos (RPA) en el currículo de matemática de Singapur en el nivel primaria, teniendo como herramienta los libros Prime Mathematics de la editorial Scholastic Education International (Singapore), que son los recursos elaborados a partir de los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación de Singapur mediante el currículo de matemática.

Por otro lado, la investigación busca analizar la organización matemática mediante un análisis praxeológico de los libros de texto para determinar qué tipo de problemas, qué métodos, qué justificaciones son abordadas cuando se diseña una propuesta curricular que tiene como soporte metodológico el denominado método Singapur. Una forma de hacerlo es teniendo como soporte técnico la noción de praxeología.

2.1.3 Modelo Epistemológico de Referencia

Según Gascón (2011), cuando se formula un problema didáctico, el MER es fundamental para estudiar el saber matemático y hacer un análisis e interpración de ese saber matemático y se usa como referencia en el estudio praxeologíco de lo que vamos a realizar, que es la reconstrucción de una organización matemática a partir de los libros didácticos escogidos.

2.1.4 Elementos de las praxeologías matemáticas

Estos elementos tienen un modelo de representación en la TAD : $[T, \tau, \theta, \Theta]$ para Chevallard (1999), este modelo se descompone de dos bloques:

El Saber – hacer o la praxis $[T, \tau]$, donde T es un tipo de tareas, τ una técnica, es decir, un conjunto de procedimientos (no necesariamente un algoritmo) que permite dar solución a un tipo de tareas .

"El Saber o el logos $[\theta, \Theta]$ donde θ representa la tecnología de τ , es decir, el discurso racional que es elaborado para justificar y producir esta técnica. La teoría Θ es la tecnología de la tecnología, en particular, garantiza la validez de la tecnología." (Castella, 2017 p.11).

De esta manera queda modelada la actividad humana y matemática con los elementos de una praxeologia que son las tareas, técnicas, tecnologías y teoría. (Almouloud, 2015).

Tipo de tareas. Al conjunto de tareas , llámese así en la condición que una tarea t forme parte de un conjunto de tareas T , y cuya notación se presenta de la forma : $[T, \tau$,

$\theta,\Theta]$, Chevallard (1999) muestra que cada institución tiene sus propias construcciones y que las tareas y los tipos de tareas que presenta la institución forman parte de estas construcciones. Lo que se entiende por tarea en la TAD se delimita por un segundo postulado que establece, que entendiendo como técnica un sentido amplio el desarrollo de una tarea deriva de la aplicación de una técnica. (Bolea, 2002).

Técnica (τ).

El primer paso es identificar las tareas, seguidamente debemos encontrar las técnicas que van a dar solución a estas tareas planteadas. Cuando se tiene un tipo de tareas T, se debe buscar la forma de poder plantear y solucionar este conjunto de tareas, a este procedimiento en la TAD se le llama técnica.

El llamado bloque práctico- técnico que conforma una praxeología matemática está compuesta por la técnica (τ) y las tares (T) , en determinados dispositivos y medios estas técnicas permiten solucionar un conjunto de tareas no siempre en su totalidad. (Castella, 2017 p.12).

A continuación, presentamos un tipo de tarea con su respectiva técnica de solución.

Tipo de tarea: Resolver un problema aritmético del tipo parte-todo

Como ejemplo, se analiza la técnica presente en la tarea de resolver un problema aritmético del tipo parte –todo. Primero caractericemos este tipo de problemas:

Aquí, dos o más subconjuntos (las partes) forman un conjunto (el todo).

En el método modelo, las barras rectangulares se utilizan para representar cantidades que forman “partes”. Los largos relativos de las barras ayudan a los estudiantes a ver y entender las relaciones entre las cantidades.

En la siguiente figura 2 vamos a representar un problema que modela una situación problemática de parte –todo.

Los pasos para seguir son los siguientes:

Construir un modelo de barras que represente y modele la situación problemática:

Los modelos parte-todo se pueden dibujar de la siguiente manera. Para determinar el tamaño se analiza los datos que se tienen del problema planteado.

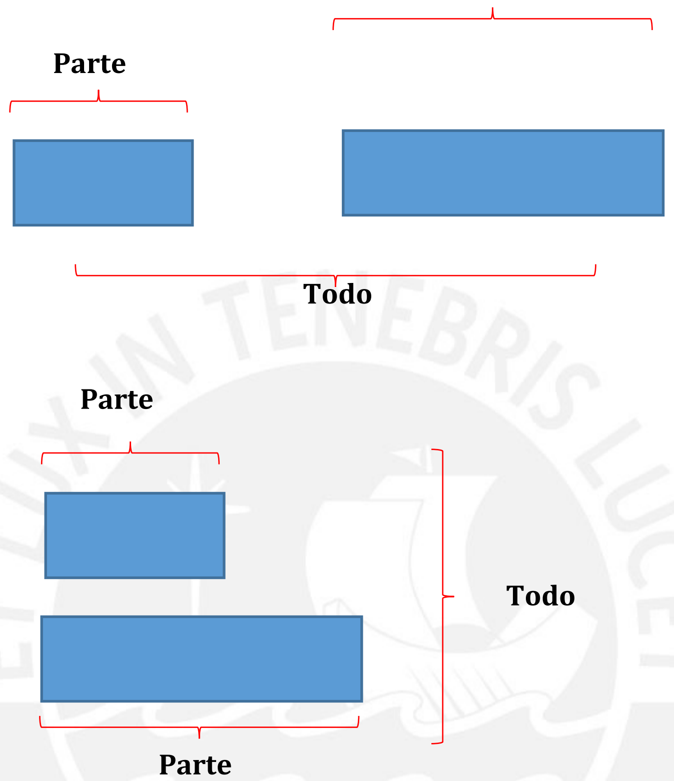


Figura 2. Representación de un modelo parte-todo

Fuente: Libro Método de barras Yeap Ban Har (2012, p. 8).

En el gráfico presentado se puede visualizar con más facilidad que al sumar las partes se obtiene un todo.

Una vez caracterizado este tipo de problemas, presentamos a continuación un ejemplo de una tarea de resolver un problema aritmético del tipo parte-todo.

Ejemplo:

Tarea: Resolver un problema aritmético del tipo parte-todo.

Problema de las Galletas

El Sr. Dávila cocinó un total de 36 galletas de chocolate y vainilla. Si 15 galletas son de chocolate, ¿cuántas galletas de vainilla hay? Representamos la situación problemática en la siguiente figura 3.

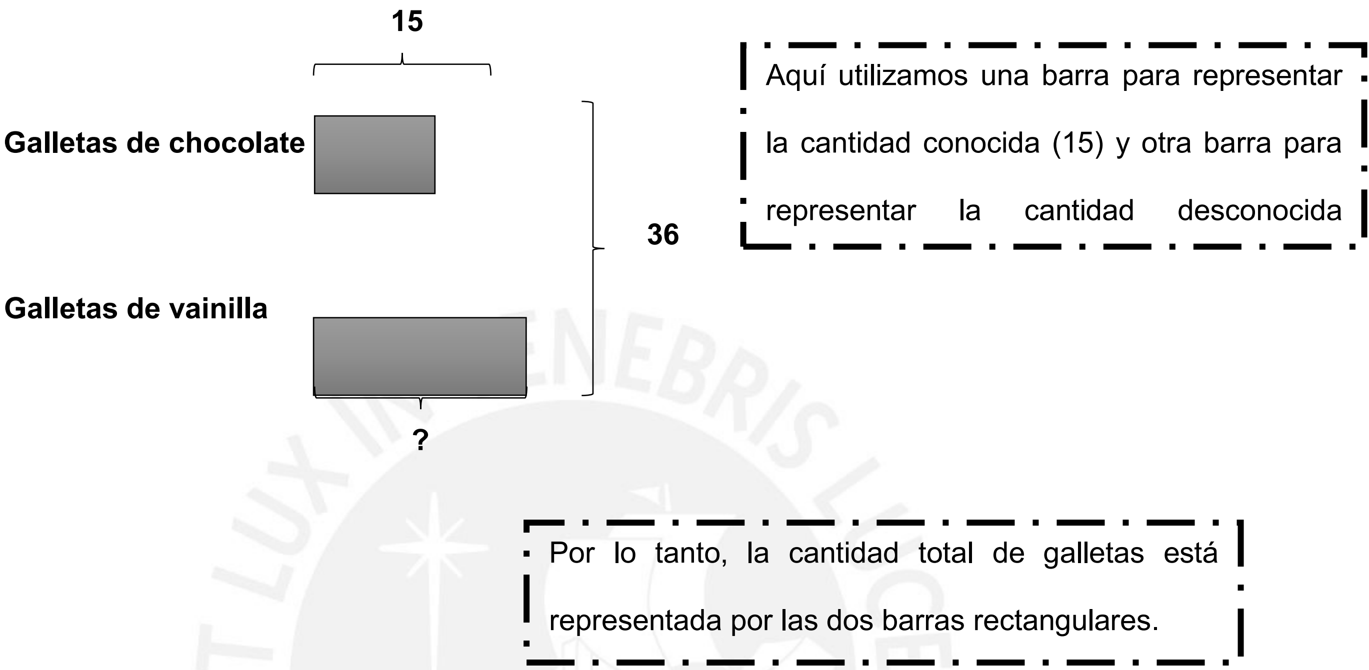


Figura 3. Representación de un problema del tipo parte – todo.

Fuente: Elaboración propia

Solución del problema

1. La pregunta es: ¿Cuantas galletas de vainilla hay?

Para determinarlo podemos usar el método de barras, que representa la cantidad de galletas que tiene chocolate y Vainilla.

2. El análisis visual de la representación permite identificar que las galletas de vainilla representan un mayor valor que las de chocolate, entonces resulta de entender ¿Cuántas galletas de chocolate me faltan para poder tener la misma cantidad de las de vainilla?
3. De la representación de la situación problemática, se puede concluir que el número de galletas de vainilla se encuentra usando la diferencia de restar los números, el resolver problemas y usar modelos que permitan el entendimiento,

se desarrolla la habilidad de modelización en los estudiantes. Finalmente: 36 - 15 = 21

Respuesta: Hay 21 galletas de Vainilla

Por lo tanto, la técnica para este tipo de tareas es el modelo de barras rectangulares que se utilizan para representar cantidades que forman “partes”. Los largos relativos de las barras ayudan a los estudiantes a ver y entender las relaciones entre las cantidades.

En Singapur, a los niños de primaria se les enseña un enfoque visual y concreto para resolver problemas aritméticos con una variable que se inicia con un término desconocido. En 1983, el Ministerio de Educación de Singapur introdujo oficialmente un diagrama heurístico que involucra un diagrama o dibujo modelo conocido como el método de barras en el plan de estudios primario de matemáticas. El método de barras puede usarse como una herramienta para resolver problemas aritméticos y algebraicos que involucran números enteros, fracciones, razones y porcentajes (Kho, 1987, citado en Swee Fong Ng y Kerry Lee 2000).

La técnica utilizada el modelo de barras se puede usar para representar la situación aritmética representada por a + b = x o el caso algebraico de x + a = b. El modelo consta de dos rectángulos de diferentes longitudes que representan las cantidades a y b (ver Figura 2). El total desconocido, x, está representado por una llave que une los dos rectángulos entre sí. Lo desconocido se encuentra sumando a y b.

La representación de esta técnica para resolver un problema es el modelo de barras, tal rectángulo se conoce como una unidad, y este rectángulo de unidad asume el papel de las letras como variables. Los rectángulos también se pueden usar para

representar valores numéricos específicos, como las relaciones numéricas entre dos variables, pero tales relaciones se indican utilizando rectángulos de tamaño apropiado. En la Figura 3, el rectángulo con la letra a representa la relación numérica dada entre b y lo desconocido

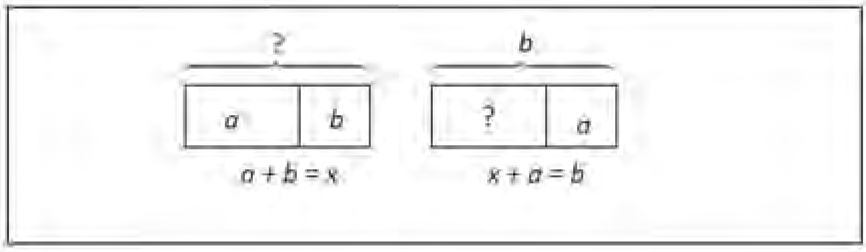


Figura 4. Modelos parciales: modelo aritmético (a la izquierda) y modelo algebraico (a la derecha).

Fuente: Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method.

Una técnica no presentada en el plan curricular peruano es la técnica del modelo de barras, que es la técnica principal en la resolución de problemas en el currículo de matemática de Singapur. En donde, un rectángulo con un signo de interrogación significa un valor desconocido. Tal rectángulo se conoce como una unidad, y este rectángulo de unidad asume el papel de las letras como variables. Los rectángulos también se pueden usar para representar valores numéricos específicos, como las relaciones numéricas entre dos variables, pero tales relaciones se indican utilizando rectángulos de tamaño apropiado.

Tecnología (θ). La justificación y la razón de ser de una técnica es la tecnología y asegura que la técnica a usar sea pertinente para solucionar las tareas planteadas. Chevallard (1999).

Teoría Θ. Lo que da el respaldo a las tecnologías que a su vez justifican el uso de ciertas técnicas para la realización de un conjunto de tareas, es la teoría. La Teoría respalda la validez de la tecnología y junto a la tecnología forman el bloque tecnológico –teórico

[θ / Θ]. (Castella, 2017).

Clasificación de las organizaciones matemáticas.

Praxeologia puntual (OMP), definida por un bloque práctico técnico que solo considera un tipo de tareas. Según Castella (2017), “cuando varias praxeologías puntuales derivan de la misma tecnología, se habla de una organización praxeológia local”. (p. 14).

Praxeologia local (OML) , recolección de praxeologías puntuales que tienen como eje central un mismo discurso tecnologico , la tecnología es la misma para estas organizaciones matemáticas puntuales . Chevallard (1999).

Praxelogia regional (OMR), de la misma manera que en una OML ,teniendo como eje central una misma teoría , la unión de estas praxeologias locales forman una OMR. (Chevallard, 1999).

2.2 Metodología de la Investigación

El presente trabajo de investigación se desarrolla dentro del paradigma cualitativo con un enfoque documental y partiendo del constructo metodológico de análisis de libros didácticos propuestos por la TAD presentados en Almouloud (2015) y Chaachoua y Comiti (2010).

Siguiendo lo propuesto por (Gascón ,2011) vamos a considerar las tres dimensiones de un problema didáctico siguiendo lo propuesto por la TAD, es imprescindible como marco de referencia un modelo epistemológico de referencia (MER) que sea relativo al ámbito de la actividad que el didacta desea investigar y permitirá el posterior análisis praxeologíco de una organización matemática.

Para el primer objetivo específico que es identificar el rol que cumplen los problemas aritméticos en la propuesta de la TAD y su relación con la postura que esta teoría presenta sobre el álgebra como herramienta modelizadora seguiremos los procedimientos metodológicos que se seguirán son los siguientes:

Se hace una investigación de los problemas aritméticos, su definición y clasificación para poder construir un modelo epistemológico de referencia en torno a los problemas aritméticos y en base a este MER se puede construir la OM de los problemas aritméticos.

Para el segundo objetivo específico que es reconstruir una praxeologia matemática en torno a los problemas aritméticos presentes en una colección de libros, seguiremos la metodología presentada por Chaachoua y Comiti (2010) u Almouloud (2015). En esta metodología debemos revisar trabajos previos de investigación que nos muestren como se debe realizar este análisis, identificar cómo realizar la descripción del texto a estudiar. Identificación de los tipos de tareas: analizamos las actividades presentes en las diferentes, luego se agrupan los tipos de tareas y las técnicas asociadas a ellas y finalmente se estudian las tecnologías asociadas a la técnica para poder plantear la organización matemática de los libros que se van a estudiar.

CAPÍTULO 3: Dimensión Epistemológica de los Problemas Aritméticos

En este capítulo se delimitarán y caracterizarán los problemas aritméticos, empleando elementos de la TAD. Las preguntas más importantes que guiarán el desarrollo de este capítulo son las siguientes:

- ¿Qué son los problemas aritméticos?
- ¿Qué se entiende por resolución de problemas aritméticos?
- ¿Cómo se estructuran los problemas aritméticos?
- ¿Cuál es la razón de ser, cómo surgen y para qué surgen?

Otras preguntas que se responderán son las siguientes:

¿Cuál es el alcance de estos problemas aritméticos, qué tipo de problemas ya no se pueden solucionar con los problemas aritméticos?

- ¿Cómo se transforman estos problemas aritméticos al emigrar en diferentes instituciones?

Si bien la TAD ubica a los problemas aritméticos en un nivel inicial de algebrización, no hemos encontrado trabajos en donde estos hayan sido estudiados en sí mismos y organizados en términos de praxeologías.

Será una tarea importante, dar una organización de estos problemas a través de una investigación que tome como referencia estudios epistemológicos de los problemas aritméticos con los estudios de la teoría de los campos conceptuales de (Vergnaud, 1990), con sus nociones cognitivas llámese esquema, invariante operatoria, concepto y campo conceptual, en la presente investigación será muy valioso el aporte de esta teoría ya que nos va a permitir elaborar de forma progresiva los conceptos de las estructuras aditivas y multiplicativas , nos centraremos también en el trabajo de Puig y Cerdán, (1996), donde proponen una organización para los problemas aritméticos .

3.1 Aritmética y operaciones

Si nuestro campo de estudio es la resolución de problemas aritméticos, es muy importante definir el término aritmética desde un recuento histórico epistemológico para poder definir qué se entiende por la definición de un problema aritmético.

El nombre de esta ciencia deriva de la palabra griega Αριθμό (número). Los griegos consideraban números solo los enteros mayores que 1, por lo cual la aritmética para ellos era la ciencia de los números enteros y de sus propiedades. El arte de calcular y las reglas de las operaciones pertenecían a la logística, que ellos consideraban una ciencia de orden inferior. El primer libro donde esta ciencia se interpretaba de una manera totalmente independiente de la geometría fue Arithmetike eisagoge (Introducción a la aritmética), escrita por Nicómaco. Newton se refería al álgebra como el término "Aritmética general" (1707). El primer libro impreso de aritmética apareció anónimamente en Italia en 1475.

Los intentos de construir axiomáticamente la aritmética se remontan a los tiempos de Leibniz. A finales del siglo XIC e inicios del siglo XX, parecía que el objetivo ya estaba cerca (Investigaciones de Peano, Hilbert y otros). Finalmente, este problema fue resuelto en 1932: Gödel demostró que es imposible construir un sistema de axiomas de la aritmética de los números naturales que sea consistente y completo al mismo tiempo (Alexandrova, 2019).

El desarrollo histórico de la aritmética a condicionado a la forma en la que el curso es impartido en la escuela, está se desarrolla en tres partes: estudio de la numeración, estudio de las operaciones con números enteros y sus propiedades, y estudio de las fracciones.

3.1.1. La numeración oral

El objetivo de la numeración escrita es la representación de todos los números utilizando la cantidad menor posible de símbolos (Cifras, dígitos); en la Antigüedad, los pueblos solucionaron este problema de diferentes maneras. La solución ideal de este problema fue la creación de la numeración posicional, la cual, gracias a la existencia del cero, permite expresar cualquier número con ayuda de diez cifras (Depman, 2011).

3.1.2. Los términos Cifra y Cero

La palabra Cifra proviene de la palabra árabe *sifr,* que significa vacío (lugar). Así, los árabes tradujeron la palabra hindú *sunya* que significa vacío (Lugar), con lo que los hindúes nombraban el símbolo de ausencia de un digito en un número. Hasta el siglo XVIII, el cero se denominaba cifra. Las cifras hindúes aparecieron en Europa en el siglo XIII; eran tomadas como símbolos misteriosos, como una escritura secreta (Criptografía). La Criptografía (escritura con símbolos convencionales) se denomina cifra (Depman, 2011).

3.1.3. Adición y sustracción como operaciones aritméticas

Si los números se utilizaran solo para contar objetos, entonces, no serían de gran utilidad. La aplicación más importante de los números naturales consiste en que con ellos se pueden realizar diferentes operaciones matemáticas y, de este modo, efectuar diferentes tipos de cálculos que permiten pronosticar qué cantidad de objetos habrá en un conjunto que aún no existe, pero que aparecerá como resultado de ciertas operaciones reales. En su actividad práctica, el hombre realiza numerosas operaciones con diferentes conjuntos de objetos, se realiza cierta operación entre dos o varios conjuntos y se obtiene como resultado uno nuevo. Y es así como conociendo ciertos números naturales (las cantidades de objetos en cada uno de los conjuntos dados) y realizando determinadas operaciones con ellos, es posible hallar un número natural que indica la cantidad de objetos del nuevo conjunto sin haberlos contado en realidad. Es más, este número (la cantidad de objetos en el nuevo conjunto) se puede hallar mucho antes de su aparición real, antes de realizar cualesquiera operaciones con los conjuntos dados.

Todas las diversas operaciones que el hombre realiza con los conjuntos en su actividad práctica se pueden reducir a unas cuantas operaciones que son consideradas como fundamentales. La elección de estas operaciones fundamentales tuvo lugar en el transcurso de muchos siglos de actividad práctica de la humanidad. A cada operación fundamental con conjuntos le corresponde una operación matemática con números naturales. Por tanto, cada operación matemática con números naturales es la imagen (un modelo) de determinada operación fundamental real con conjuntos. (Fridman, 2011).

Sentido de las operaciones de adición y sustracción. Las operaciones más simples con conjuntos es la unión de varios conjuntos en uno nuevo. Si se tiene dos conjuntos A y B, como resultado de su unión se obtiene un conjunto C tal que cada elemento de C es elemento del conjunto A o del conjunto B, y viceversa: cada elemento de A y cada elemento de B pertenecen al conjunto C.

Según (Fridman,2011) Si la cantidad de elementos del conjunto A esa y la de los del conjunto B es b, entonces la operación mediante la cual se halla la cantidad de elementos en el conjunto C, es decir, en la unión de los conjuntos A y B, es la adición de los números a y b, que se escribe de la siguiente manera: $a + b = c$

En este caso, los números a y b se llaman sumandos y el numero C, que es el resultado de la adición de los números a y b, suma

Otra operación con conjuntos consiste en extraer (sustraer) de un conjunto los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, del conjunto C se puede extraer el conjunto A, después de lo cual queda el conjunto B. A esta operación le corresponde una operación matemática con números naturales que se denomina sustracción.

Si los conjuntos C y A contienen, respectivamente, c y a elementos, entonces la cantidad de elementos en el conjunto restante B será igual a la diferencia de los números naturales c y a, y se escribe del siguiente modo: $c- a$

El número C se llama minuendo (la cantidad de elementos del conjunto C se disminuye); el número a, sustraendo, y el resultado de la sustracción, el número b, diferencia (Fridman, 2011).

Este es el sentido de las operaciones de adición y sustracción de números naturales ¿Qué relación existe entre estas operaciones? Esta relación consiste en que estas dos operaciones son mutuamente inversas. Esto significa lo siguiente: la adición permite hallar la suma de dos números a y b: $a + b = c$.

Si conocemos la suma c y uno de los sumandos, por ejemplo, a, entonces, con ayuda de la sustracción, podemos hallar el sumando b

$b = c – a$

y viceversa, si conocemos la diferencia b de los números c y a, y el sustraendo a, entonces, con ayuda de la adición, podemos hallar el minuendo, es decir,

si $c - a = b$, entonces $c = b + a$

si conocemos la diferencia b y el minuendo c, entonces, con ayuda de la sustracción, podemos hallar el sustraendo, es decir,

si $c - a = b$, entonces $a = c - b$ (Fridman, 2011).

Según (Ramos, 2019), la operación aritmética de diferencia tiene una mayor complejidad que la operación aritmética, en principio porque no es una operación interna en los Naturales. La resta se puede definir partiendo del concepto de suma:

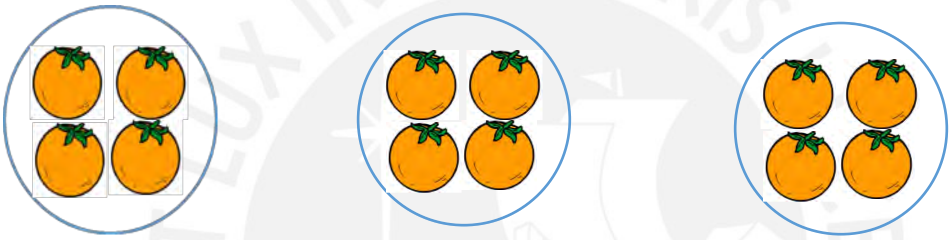
$M – s = d$ entonces $M = s + d$

El termino M es el llamado minuendo, el termino s se le conoce como sustraendo y d es la diferencia.

3.1.4. Multiplicación y división como operaciones aritméticas.

Según (Ramos, 2019), Ordena el significado de la operación multiplicación de menor a mayor complejidad de la siguiente manera:

La multiplicación como suma repetida es el significado más intuitivo para aproximar a los alumnos al concepto de multiplicación. El contar elementos distribuidos en conjuntos similares nos lleva a tener sumas de términos iguales, presentamos un ejemplo adaptado del libro de (Ramos, 2019).



4 + 4 +4

3 grupos de 4

3 veces 4

3 x 4

Se presenta más eficaz y conveniente el poder abreviar esas sumas repetidas, vemos en el ejemplo “3 grupos formados por 4 naranjas”, presentándose la operación aritmética de la multiplicación que denotamos como: 3x 4.

El modelo de área

Al presentar tareas iniciales de contar elementos en filas y columnas, los alumnos pueden ir formando intuitivamente el concepto del área y de esa forma estaríamos conectando competencias de cantidad con las competencias de espacio y localización.

El área de un rectángulo se verifica como los cuadrados más pequeños y unitarios, sirve el tener un modelo pictórico en una hoja cuadriculada para tal representación, después de trabajar con material concreto, pasamos a la etapa del trabajo pictórico y finalmente podemos abstraer el concepto, sin la necesidad de contar los cuadrados unitarios. (Ramos, 2019).

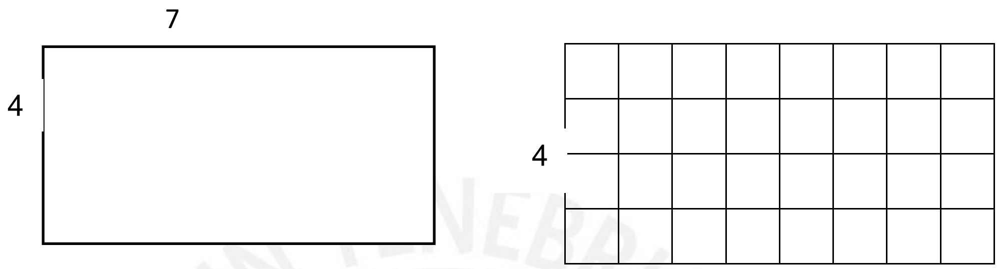


Figura 5. El modelo de área de la multiplicación

Fuente: Aritmética para maestros de (Ramos, 2019).

Modelos de proporcionalidad, escalado “multiplicado por”.

El significado de “multiplicado por” es más complicado de conceptualizar que el significado de “veces “, diferenciando ambas indicaciones con un ejemplo:

5x6 = si lo leemos como 5 veces 6, tenemos 5+5+5+5+5+5 una suma repetida de sumandos iguales, pero si al 5x6 lo leemos como 5 por 6 eso significa 5 veces 6, que resulta la suma repetida 6+6+6+6+6. La tecnología que justifica estas técnicas usando el lenguaje de la TAD sería la propiedad conmutativa de la multiplicación. (Ramos, 2019).

División

En la matemática de la antigüedad no existía la división, esta operación era realizada mediante sustracción sucesiva. El método moderno fue por primera vez descrito por un autor desconocido (1460).

Los términos división, dividendo, divisor aparecieron relativamente tarde, en el trabajo de Gerberto de Aurillac (El futuro Papa Silvestre II) a finales del siglo X. El término divisio (del verbo dividere, dividir) indicaba fraccionamiento o partición. En el transcurso de mucho tiempo, el resultado de la división era denominado suma de división; la palabra cociente (desde luego, del latín) apareció por primera vez en la obra de Fibonacci (1202), y después, consecutiva y sistemáticamente, en los trabajos de Nemorarius (general de la orden de los dominicos en el primer cuarto del siglo XIII). De los signos modernos de la división el más antiguo es la línea horizontal, que se encuentra en los trabajos de Herón de Alejandría y Diofanto, más tarde en los trabajos de Fibonacci. Sin embargo, el uso de la línea horizontal se generalizo sólo en los siglos XVI- XVII. Los dos puntos fueron introducidos en la Aritmética de Jones (1633). Los dos puntos como símbolo de la división fueron utilizados desde 1684 por Leibniz. Aparte de estos símbolos se utilizaban también otros: durante mucho tiempo la división se denotaba con la letra D (de División). El suizo Rahn introdujo el símbolo ÷ en el año (1659). (Alexandrova, 2019).

Para formalizar la operación aritmética división debemos partir de la multiplicación: Si m, n y p se encuentran en el conjunto de los naturales, podemos definir a la división como la operación inversa a la multiplicación, diremos que: $m \div n = p$ si $m = p \times n$, así se define entonces la división exacta sin resto, los elementos de la división son m dividendo, n es el divisor y p es el cociente. (Ramos, 2019, p.42).

La diferencia entre el concepto de división partitiva y de división cuotativa, es que en la primera se refiere a un reparto equitativo de objetos y en la segunda resulta un problema de agrupación.

3.2 Noción de problema aritmético

"Los problemas aritméticos son, en general, problemas de aplicación, lo que hace que aparezcan enunciados en contextos variados". (Puig y Cerdán,1989, p. 6). Existe una dificultad moderada para identificar si un problema es considerado aritmético. Al considerar una situación problemática contextualizada en el campo de la biología, física, geometría si los conceptos y conocimientos que no pertenecen al dominio aritmético no son un limitante para resolver el problema, se considera un problema aritmético.

Para definir un problema aritmético tenemos como principal característica que los datos deben ser cantidades exactas que expresen un valor cuantitativo real, para su resolución dispondremos de varias operaciones aritméticas. (Puig y Cerdán, 1996).

3.2.1 El proceso de resolución de un problema aritmético

La función principal de los problemas es producir un aprendizaje significativo, entonces no es solo introducir un tipo de problemas en el diseño curricular escolar de matemáticas para practicar lo aprendido en clase, la resolución de problemas permite iniciar la producción de conocimiento y aplicarlo en contextos nuevos que sean problemas nuevos donde el alumno no se sienta familiarizado para verificar la transferencia de conocimiento.

"La atención es para el proceso, no para los conocimientos. El conocimiento que se valora por su significación no es el conocimiento transmitido, sino el conocimiento producido por el que está en situación de aprender "(Puig y Cerdán, 1996, p.7).

Conceptos perspectivas y niveles de Análisis

Conceptos. Puig y Cerdán (1996) definen el concepto de proceso de resolución de un problema aritmético a la actividad mental que debe realizar el estudiante.

*Perspectivas***.** Puig y Cerdán (1996), el estudiante al resolver un problema lo puede solucionar siguiendo patrones previamente establecidos y respetando un orden propuesto. Pero en un problema aritmético la centralidad está en el análisis de procesos y aspectos cognitivos para la producción del nuevo conocimiento.

Niveles de análisis. Según Puig y Cerdán (1996), los problemas en el contexto escolar aparecen tradicionalmente como enunciados, los autores presentan las fases de análisis de un problema presentado por Polya (1957), que como veremos en el análisis de la organización matemática presentada en el próximo capítulo resulta un elemento muy importante a tomar en cuenta en las técnicas que usa la metodología de Singapur para la resolución de problemas aritméticos, Polya (1957) entonces plantea los siguientes pasos:

1.– Comprender el problema.

2.– Concebir un plan.

3.– Ejecutar el plan.

4.– Examinar la solución obtenida.

Variables de una tarea.

Idea de variable de una tarea. “Se utiliza el termino tarea porque se plantea para estudiar lo que los sujetos hacen y no con finalidades de enseñanza, y, por tanto, está aislada, sin relación con ninguna situación o secuencia de aprendizaje” (Puig y Cerdán, 1989, pág. 16).

Según Puig y Cerdán (1989) la variable de la tarea asume un valor particular y se clasifican de la siguiente manera en: numéricas, clasificatorias y cualitativas. Para fines de la presente investigación delimitaremos las condiciones de las variables solo para las cuales nos den aproximaciones para la resolución de los problemas aritméticos que es el objeto a estudiar, entonces tomaremos tres variables dela tarea que serán: sintácticas, de contexto y de contenido.

Webb (1979, citado en Puig y Cerdán, 1989) proporciona una clasificación a las variables de contenido según estos criterios: tema matemático, campos de aplicación, contenido semántico y variables de contexto. La más importante es la variable de contexto muestra una clasificación para los tipos de contexto, considerando que un problema puede ser presentado de modo manipulativo, pictórico, abstracto o una combinación de ellos, y eso se puede ir estudiando gradualmente como van a apareciendo los problemas escritos, a lo largo de la educación básica regular en el nivel primaria, pero se empieza a presentar las situaciones problemáticas a través de material concreto para después presentarlos en modo pictórico .

Según Kulm (1979, citado en Puig y Cerdán,1996), presenta la relación entre las variables y las fases.

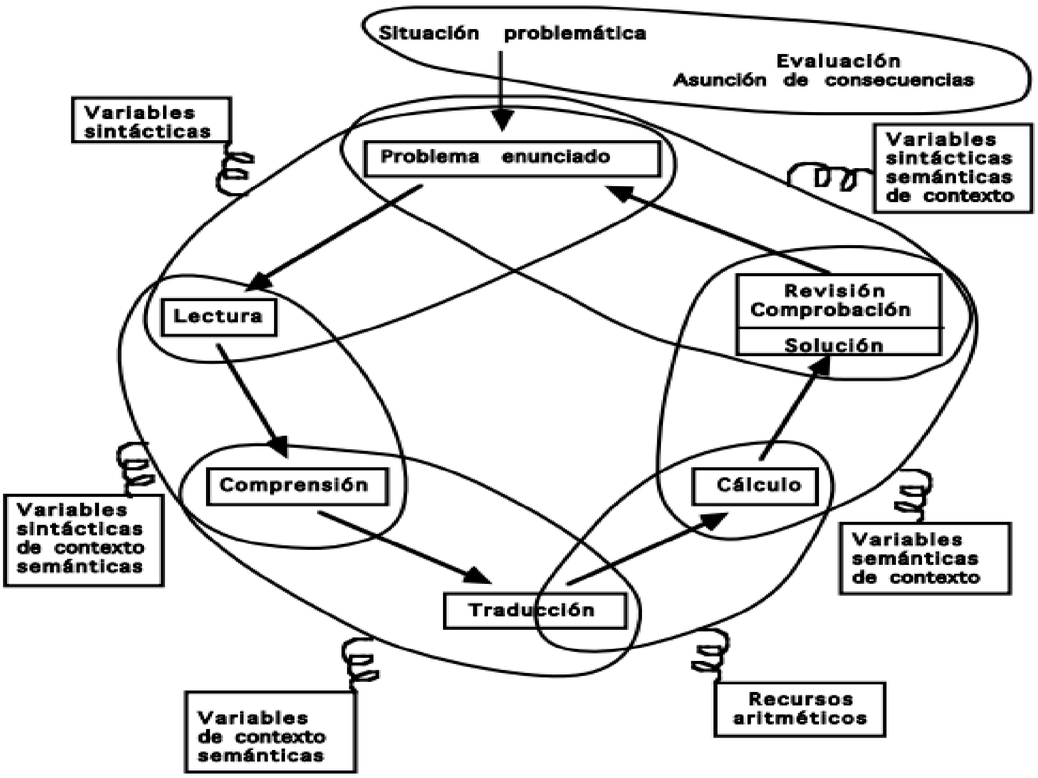


Figura 6. Esquema para los PAEV que ilustra la relación entre variables y fases.

Fuente: Problemas aritméticos escolares (Puig y Cerdán, 1996, p.36).

3.2.2 La Naturaleza estereotipada de los PAEV.

Nesher (1980, citado en Puig y Cerdán, 1989) presenta en dos esquemas la no existencia de un problema aritmético escolar que derive de un problema cuantitativo real ya que un problema cuantitativo real tiene su realidad en el aula.

En la siguiente figura 7, se presenta el proceso de resolución de un problema aritmético.

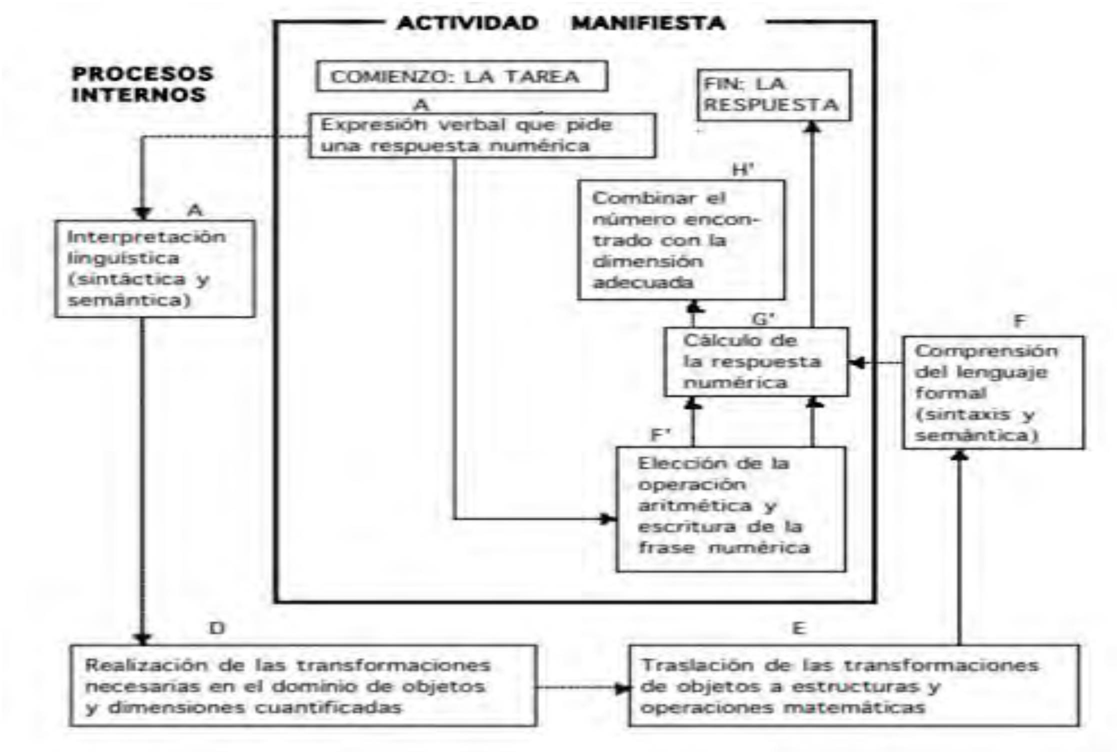


Figura 7. Proceso de resolución de un problema aritmético

Fuente: Problemas aritméticos escolares (Puig y Cerdán, 1996).

3.2.3 Clasificación de los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV)

La clasificación propuesta en (Puig y Cerdán, 1999) es problemas de una etapa y problemas de más de una etapa. Los problemas de una etapa se pueden separar en problemas aditivos y problemas multiplicativos, para que se pueda obtener la incógnita. La estrategia que utilicen los alumnos no caracteriza el problema estructuralmente. (Puig y Cerdán 1989).

Vergnaud fue el primero en presentar el concepto de campo conceptual como el agrupamiento de situaciones problemáticas donde el tratamiento esta necesariamente vinculado al uso de conceptos, procedimientos y representaciones todas interconectadas entre sí. (Vergnaud, 1983).

La teoría antropológica de lo didáctico ubica a los problemas aritméticos en un nivel inicial de algebrización, la definición de problema aritmético que seguiremos en la presente investigación es la siguiente:

Entonces, debemos considerar una forma de organizar los problemas aritméticos, después de definir los elementos teóricos de los campos conceptuales de VERGNAUD. Podemos tener un marco de referencia para poder clasificarlos. Siguiendo lo propuesto en el libro de problemas aritméticos de Puig y Cerdán (1989), se propone una clasificación considerando lo que se tienen que investigar en la presente tesis. Después de toda la literatura consultada, la clasificación de los problemas aritméticos será de problemas de adicción y sustracción y de multiplicación y división, por la cantidad de pasos u operaciones aritméticas involucradas que se necesitan para resolverlo tenemos problemas de una etapa o de más de una etapa y clasificándolos desde su categoría semántica tendríamos a: los problemas de cambio, composición y comparación.

Tomaremos esta reconstrucción de los problemas aritméticos para poder hacer el análisis de las organizaciones matemáticas de los problemas aritméticos presentes en los libros Prime Mathematics del Ministerio de Educación de Singapur.

Clasificación de los problemas aditivos. En la presente investigación para los problemas del campo aditivo los PAEV estarán clasificados en tres categorías:

1) **Cambio.**

   (Puig y Cerdán, 1996) Proponen una clasificación de estos problemas haciendo referencia a la cantidad inicial, final y de cambio donde las relaciones lógicas aditivas se enmarcan secuencialmente.

   Los autores presentan los siguientes ejemplos:

   Problema 1 Julio tiene x. Le dan y. ¿Cuántos tiene ahora?

Problema 2 Julio tiene x. Da y. ¿Cuántos le quedan?

2) **Combinar.**

(Puig y Cerdán, 1996) Presentan en esta categoría a los problemas que se enmarcan en la secuencia parte-todo-parte, teniendo dos posibles acciones al combinar, sumar y restar.

Problema 1. Hay x hombres. Hay y mujeres. ¿Cuál es el total de personas?

Problema 2. Hay x hombres. Hay z personas. ¿cuál es el total de personas?

3) **Comparar**

(Puig y Cerdán, 1996) incluyen en esta categoría a los problemas donde se compara dos cantidades, la primera a la que sirve de punto de comparación se llama cantidad de referencia, con la que vamos a hacer la comparación se llama cantidad comparada y al hacer esta comparación aparece la diferencia.

Se presentan los siguientes ejemplos para entender:

Problema 1. Comparar 1. Jorge tiene x. Juanjo tiene y. ¿Cuántos tiene Jorge más que Juanjo?

Problema 2. Comparar 2. Jorge tiene x. Juanjo tiene b. ¿Cuántos tiene Juanjo menos que Jorge?

Los problemas de tipo multiplicativo.

Vergnaud (1983) clasifica a los problemas multiplicativos en dos categorías y en tres tipos de problemas, desde su constructo teórico que son los campos conceptuales. Este modelo teórico se enmarca dentro un programa cognitivo.

La teoría de los campos conceptuales presenta en sus nociones cognitivas al concepto de esquema, la propia definición que se adopta de concepto, campo conceptual, sentido de un conocimiento y la noción de invariante operatorios. (Moreira, 2002).

En los problemas del campo multiplicativo, a diferencia de lo que ocurre con los problemas aditivos, no hay una clasificación universalmente aceptada en la clasificación de categorías semánticas. La que tomaremos en esta investigación es la propuesta por Vergnaud (1983) y Nesher (1987), presentadas en Puig y Cerdán (1989). Estas son isomorfismo de medidas o regla de correspondencia, comparación multiplicativa y producto de medidas.

Clases de problemas del tipo multiplicativo: Según (Vergnaud, 1983). Se pueden extraer numerosas clases de problemas, según la forma de la relación multiplicativa; el carácter discreto o continuo de las cantidades que intervienen; las propiedades de los números utilizados, etc.

1) **Isomorfismo de medidas:** (Nesher, 1987, citado en Puig y Cerdán ,1996), presenta a esta categoría con el nombre de problemas de regla de correspondencia o de la razón, donde la característica principal entre dos espacios de medida es que guardan una relación directamente proporcional.

II Comparación multiplicativa: Esta categoría semántica no fue considerada por Vergnaud. (Brown, 1981, citado en Puig y Cerdán, 1996) también llama a estos problemas de factor multiplicativo y la característica de estos problemas es que se parte de una función escalar, la cual permite comparar dos cantidades cuya característica sea tener la misma magnitud.

III. Producto de medidas: (Nesher citado en Puig y Cerdán, 1996) nombra a esta categoría multiplicación cartesiana y distingue dos clases de problemas, los de multiplicación y división.

Se presentan un ejemplo adaptado de (Vergnaud,1983) para comprender mejor este tipo de problemas.

Ejemplo: Jorge tiene 3 pantalones y 4 casacas. ¿Cuantas formas tiene de combinar estas prendas?

Tomando a P= {a, b, c} el conjunto de los pantalones, C= {f, g, h, i} el conjunto de casacas y el conjunto E de las combinaciones posibles es el producto cartesiano del conjunto de los pantalones por el conjunto de las casacas.

E = PXC

Como lo muestra la siguiente figura 8.

		C			
		f	g	h	i
	a	(a,f)	(a,g)	(a,h)	(a,i)
P	b	(b,f)	(b,g)	(b,h)	(b,i)
	c	(c,f)	(c,g)	(c,h)	(c,i)

Figura 8. Representación de un problema donde se representa la multiplicación cartesiana. Fuente: Elaboración propia.

Un par ordenado resulta de combinar un elemento del primer conjunto de pantalones a un elemento del segundo conjunto de casacas, el número de combinaciones posibles es igual al producto del número de pantalones por el número de casacas.

Entendemos que, después de analizar la estructura de un (PAVOC se presentan tareas ya no pueden ser solucionados con solo operaciones aritméticas. Entonces, entender que es la aritmética generalizada desde una perspectiva teórica, es analizar lo que propone Gascón (1993) que presenta al álgebra escolar como la ampliación del lenguaje aritmético.

La idea de interpretar al álgebra escolar como aritmética generalizada busca que las técnicas de resolución de la aritmética se generalicen en el lenguaje algebraico. (Bolea, 2002).

Al plantear la solución de un problema aritmético debemos hacer una secuencia de operaciones aritméticas simples, de otra forma cuando uno realiza un problema algebraico, este tipo de esquemas ya no se puede aplicar, cada etapa intermedia produce una igualdad, de una relación algebraica que va a representar el enunciado matemático. Considerando que en la aritmética se manipulan números concretos y en el álgebra se manipulan símbolos que se deben interpretar en el contexto que aparezcan, por lo que presentamos en apartados anteriores en el contexto aritmético las operaciones de suma, resta, multiplicación y división los signos nos indican relaciones y en la actividad algebraica la interpretación de los signos se modifica de manera esencial (Bolea, 2002).

3.3 Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

Tomando como referencia el trabajo de Espinoza, Gonzales y Barbe (2007), la presente investigación hace la reconstrucción de la clasificación de los problemas aritméticos tanto para lo aditivo, multiplicativo y los problemas aritméticos de varios pasos PAVOC.

En los problemas del campo aditivo se toman los siguientes tipos de tareas:

$T_{1:}$ Resolver problemas aditivos de cambio y de composición asociados a las acciones del tipo agregar-quitar y juntar respectivamente (Tabla 1)

Tabla 1

T_1: Resolver problemas aditivos de cambio y de composición asociados a las acciones del tipo agregar-quitar y juntar respectivamente

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	TECNOLOGÍA
• Las tareas podrían ser de tipo aditivo de cambio y composición. • Se puede agregar un dato más para que la tarea tenga una dificultad mayor, en este caso agregamos a los problemas aditivos de cambio y composición la acción de agregar y juntar respectivamente.	▪ Una o ninguna colección disponible. ▪ El sustraendo menor que 5. ▪ Un número de dos cifras y un número de una cifra, sin cambiar decenas.	**Para las sustracciones:** • Desde el número mayor se cuenta descendentemente de unidad en unidad. 15 - 4 = 11, ya que se parte de 15 hacia atrás: 14, 13, 12,11. En la cinta numerada se puede trabajar la idea de que al restar 1 a un número, lo que se espera es un número que lo antecede. (Es claro que el resultado será verificado con ayuda de la cinta numerada):	▪ La sustracción permite encontrar la cantidad de objetos de una colección que se le ha quitado objetos, teniendo como dato la cantidad inicial de objetos y los objetos que se van a quitar. .

Fuente: Adaptado de Matemática primer año básico – segunda unidad didáctica (Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006, p.15).

Tabla 2

T_2: Resolver problemas aditivos directos de composición y de cambio

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTACIÓN TECNOLOGÍA
▪ Resolver problemas aditivos de cambio y de composición asociados a las acciones del tipo agregar y juntar respectivamente.	▪ Una o ninguna colección está disponible. ▪ Tomar un número de dos cifras y un número de una cifra, necesitamos que la suma de cifras de las unidades no sea mayor a la decena en un primer caso, y en un segundo caso que esta suma de unidades sea mayor o igual a una decena. ▪ Operación notables: múltiplo de 10 más un número de una cifra: 20 + 6, 10 + 4.	▪ Al ser problemas del tipo aditivo, la acción del sobreconteo es una técnica que permite la solución de este tipo de tareas. Sobreconteo a partir del primer sumando: 21 + 7 = 28. Se cuenta a partir del 21, 22, 23, 24,25,26,27.	▪ Al tener dos subcolecciones y realizar la acción de juntar, esto se asocia a la operación aritmética adición. Se espera que al juntar estas dos subcolecciones se obtenga una cantidad mayor. ▪ La propiedad conmutativa es la tecnología que justifica la técnica de, al juntar dos colecciones, nos resulta indistinto considerar a cualquiera de las dos como primer sumando. ▪ (Propiedad conmutativa de la suma).

Fuente: Matemática primer año básico – segunda unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006, p.15).

Tabla 3

T_3: Resolver problemas aditivos directos e inversos de composición y de cambio.

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Resolver problemas aditivos directos de composición y de cambio.	**En la adición:** La primera condición seria tomar un sumando de dos cifras para sumarlo con uno de una cifra, pero se busca que la suma de las unidades sea mayor que una decena. **En la sustracción:** Los mismos casos anteriores. Ámbito numérico hasta 100. Problemas presentados a través de un dibujo y de un enunciado verbal.	Descomponer uno de los números de dos cifras. Se suman los números con la misma cantidad de cifras. Se suman los múltiplos de 10 y finalmente se suman en parejas los números resultantes. 57+6=50+7+6= 50+13= 50+10+3= 60+3= 63. En la sustracción: la misma técnica.	La tecnología que justifica estas técnicas es la de descomposición canónica, encontraremos que la suma de las unidades es mayor que una decena, es necesario volver a descomponer. . Por ejemplo, 47+6=40+7+6= 40+13= 40+10+3= 50+3= 53.

Matemática Segundo año básico – Primera unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

Tabla 4

T$_4$: Resolver problemas aditivos combinados directos e inversos, de composición, cambio y comparación

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES-TECNOLOGÍAS
▪ Resolver problemas aditivos directos e inversos de composición y de cambio.	**En la sustracción:** ▪ Ambos múltiplos de 10 cuya diferencia es “pequeña”. 40-30, 80 - 70. ▪ Ambos números de dos cifras cuya diferencia es menor que 5. 81 - 79, 52 - 49. **En la sustracción:** ▪ Un múltiplo de 10 y un número de dos cifras donde las unidades del sustraendo son mayores a 5: 70- 18 ▪ Dos números de dos cifras donde las unidades del minuendo son menores que las del sustraendo. 34 – 17	▪ sobreconteo a partir del sustraendo hasta llegar al minuendo. Se cuantifica la diferencia. Para calcular 60-50, se cuenta hacia adelante 50, 60; por lo tanto, 60-50=10. ▪ Se realiza un sobreconteo de 1 en 1 a partir del sustraendo hasta llegar al minuendo. ▪ Usando combinaciones aditivas básicas y las restas asociadas. 9 - 4 = 5 ya que 4 + 5 = 9	▪ La reversibilidad de la adición y sustracción permite encontrar el resultado de una resta en que la diferencia de los números es menor o igual a 4. ▪ En el caso de resolver una resta de números de dos cifras con “reserva “” se hace la descomposición canónica del sustraendo, para finalizar con las restas parciales.

Fuente: Matemática Segundo año básico – Primera unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

Tabla 5

T_5: Resolver problemas de proporcionalidad directa y de reparto equitativo

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES-TECNOLOGÍAS
▪ Resolver problemas aditivos combinados directos e inversos, de composición, cambio y comparación. ▪ Los cálculos son interpretados dependiendo de la situación contextual de cada problema. ▪ Crean problemas partiendo de situaciones establecidas y contextos propuestos en clase.	▪ Problemas presentados a través de enunciados. ▪ Los números tienen hasta 4 cifras, son múltiplos de 10, 100 ó 1000 o están cercanos a ellos. ▪ En los problemas de estimación los números están muy cercanos a un múltiplo de 10, 100 ó 1.000 por arriba y por abajo.	▪ Resuelven problemas con la estrategia de 5 fases, haciendo dibujos esquemáticos. ▪ Calculan sumas y restas basándose en descomposiciones aditivas convenientes. ▪ Calculan restas haciendo traslados. ▪ Estiman redondeando al múltiplo de 10 ó 100 más cercano. ▪ Evocación de combinaciones aditivas básicas.	▪ Para resolver un problema no es suficiente con reconocer los números que aparecen en el enunciado e identificar las palabras claves contenidas en el mismo. Se requiere hacer un análisis completo del enunciado, que permita dilucidar la relación matemática que existe entre los números y la incógnita.

Fuente: Matemática Tercer año básico – tercera unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006).

En los problemas del campo Multiplicativo se toman los siguientes tipos de tareas asociadas a la clasificación propuesta en el capítulo anterior del campo multiplicativo.

Tabla 6

$T_{6:}$ Resolver problemas de reparto equitativo, con y sin resto

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES
▪ Resolver problemas de proporcionalidad directa y de reparto equitativo. ▪ Calculan multiplicaciones y divisiones.	▪ Problemas presentados a través de enunciados apoyados con ayuda pictórica .	▪ Se divide la cantidad de fichas entre la cantidad de vasos, aproximándose lo más posible a la cantidad de fichas. En algunos casos el resto es cero; en otros es distinto de cero, pero menor que el divisor. ▪ Para encontrar el cociente de la división se apoyan en las tablas de multiplicar.	▪ La multiplicación y la división se parecen en que, para realizar los cálculos, en ambos casos hay que hacer multiplicaciones. Se diferencian en que, cuando multiplicamos dos números, sumamos repetidas veces un mismo número, y el resultado es mayor que cualquiera de los dos sumandos. En cambio, cuando dividimos un número entre otro (dividendo entre divisor), restamos reiteradas veces el divisor al dividendo, o bien restamos un múltiplo del divisor, y el resultado es menor que el número que se está dividiendo.

Fuente: Matemática Tercer año básico – Segunda unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

Tabla 7

T_7: Resolver problemas de iteración de una medida, agrupamiento en base a una medida y de reparto equitativo

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES-TECNOLOGÍAS
▪ Resolver problemas de reparto equitativo, con y sin resto. ▪ Establecer semejanzas y diferencias entre problemas que se resuelven con una multiplicación y con una división. ▪ Resolver problemas de reparto equitativo. ▪ Calcular divisiones sin resto de un número de dos cifras por un número de una cifra.	▪ La cantidad a repartir no siempre nos lleva a una división exacta. ▪ Los problemas son de iteración de una medida y de reparto equitativo. ▪ Problemas presentados a través de una situación concreta que se trabaja en aula y a través de enunciados.	▪ Para dividir dos números hay que preguntarse: ¿Cuántas veces el divisor da el dividendo?	▪ La división y la multiplicación son operaciones inversas entre sí.

Fuente: Matemática Tercer año básico – Segunda unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

Tabla 8

T$_{8:}$ Resolver problemas de iteración de una medida, agrupamiento en base a una medida y de reparto equitativo

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES
▪ Resolver problemas de iteración de una medida, agrupamiento en base a una medida y de reparto equitativo. ▪ Identificar las operaciones aritméticas que resuelven una tarea matemática.	▪ El planteamiento del problema se hace con una representación gráfica y un enunciado verbal. ▪ Las situaciones problemáticas planteadas en torno a la multiplicación se ejecutan en el uso de las tablas de multiplicar hasta la decena. ▪ Operaciones con la operación de división, un número de dos cifras como dividendo y un número de una cifra como divisor.	▪ La división se deduce a partir de la multiplicación previamente efectuada. ▪ Para las tareas de multiplicar un número de tres cifras por uno de una cifra, la técnica de la descomposición canónica es eficaz.	▪ Propiedad distributiva de la multiplicación.

Fuente: Adaptado de Matemática Tercer año básico – cuarta unidad didáctica (Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

Tabla 9

T_{9:} Plantear y resolver problemas de reparto equitativo, en base a una medida y de iteración de una medida directos e inversos.

TAREAS MATEMÁTICAS	CONDICIONES	TÉCNICAS	FUNDAMENTOS CENTRALES
▪ Plantear y resolver problemas de reparto equitativo, en base a una medida y de iteración de una medida directos e inversos.	▪ Problemas presentados a través de una situación concreta y a través de enunciados. ▪ Problemas donde se enuncia una acción, pero la operación que resuelve ese problema, es una operación inversa.	▪ Comprueban el resultado de una división multiplicando el divisor por el cociente y añadiendo el resto. ▪ Cada dato del problema debe ser identificado para poder articularlo con el rol de la incógnita. ▪ Utilizan esquemas para justificar sus procedimientos en la resolución de problemas inversos.	▪ División como reparto equitativo, el dividendo siempre mayor que el divisor, siendo este último un numero natural, obteniéndose un cociente menor que el dividendo.

Fuente: Matemática Tercer año básico – cuarta unidad didáctica

(Barbe, Espinoza, Gonzales y Mitrovich, 2006)

CAPÍTULO 4: Análisis de una organización matemática de Libros didácticos de 1º a 6º de Primaria

En el presente capítulo, se abordará el segundo objetivo específico, que es reconstruir una praxeología matemática en torno a los problemas aritméticos presentes en una colección de textos de primaria que siguen el modelo del método Singapur.

Para ello, se presenta el análisis de una praxeología matemática reconstruida de la revisión de una colección de libros de primaria de la editorial Scholastic Education International (Singapore) de primero a sexto grado de primaria, específicamente, las unidades que corresponden a los problemas aritméticos. Para ello, tomamos como base el constructo metodológico de análisis de libros didácticos propuestos por la TAD presentados en Almouloud (2015), y Chaachoua y Comiti (2010). El estudio epistemológico del capítulo anterior permitió entender el concepto de problema aritmético y organizar prácticas matemáticas en torno a ellos; Así se consideraron problemas aritméticos que podían resolverse con el patrón de análisis síntesis, asociado a un primer nivel de algebrización hasta problemas que deberán modelizarse con ecuaciones lineales, algunas de las cuales podrían resolverse usando el método de barras y otras no.

4.1 Análisis Ecológico

El actual currículo de matemática de nivel primaria de Singapur es guía para la práctica pedagógica de diversas instituciones y programas educativos, y es la base para poder editar los libros de matemática con autorización del Ministerio de Educación de Singapur.

En principio, se observa cómo se aborda los problemas aritméticos en el actual currículo de Matemática de Singapur, ya que este documento es usado como fundamento para la elaboración de los libros didácticos. Se observa que los problemas ocupan un lugar privilegiado, ya que el objetivo del currículo nacional de Matemáticas es garantizar que todos los estudiantes dominen las matemáticas para que les sean útiles en sus vidas, y para aquellos que tienen el interés y la habilidad, avanzar en las matemáticas al más alto nivel posible. Las matemáticas son un tema importante en el plan de estudios; por ello, los estudiantes comienzan a aprender matemáticas desde el día en que comienzan la educación formal y hasta el final de la educación secundaria (Currículo de Matemática de Singapur, 2012).

Los problemas aritméticos en el actual Currículo de Matemática de Singapur se encuentran en el estándar de números y operaciones, siendo la resolución de problemas la competencia central del método Singapur. En el currículo de matemática del Perú, los problemas aritméticos se encuentran en la competencia de cantidad.

A continuación, se analizará la institución, que es el currículo de Matemática desde primer grado de primaria hasta sexto grado de primaria para poder entender y situar el objeto matemático.

Los libros seleccionados para el análisis comprenden los 6 años de la educación primaria y el ente responsable de editarlos es el Ministerio de Educación de Singapur, que se encarga de que sigan los lineamientos didácticos y metodológicos que presenta el currículo de Matemática de primaria de Singapur. Para los fines de la investigación, se muestra las páginas de los libros donde se encuentran disponibles los problemas aritméticos, así como los temas relacionados a él.

En adelante, nos referiremos a los textos escolares con la nomenclatura TE; a continuación, se presenta una descripción general del TE, dado que tiene la misma estructura para los seis grados de educación primaria.

Descripción del texto escolar (TE)

Los libros didácticos, elaborados por la editorial Scholastic Education International (Singapore), están organizados de la siguiente manera:

Primer grado de primaria	12 capítulos
Segundo grado de primaria	15 capítulos

Tercer grado de primaria	16 capítulos
Cuarto grado de primaria	17 capítulos
Quinto grado de primaria	13 capítulos
Sexto grado de primaria	13 capítulos

El contenido en Scholastic Matemáticas PRIME, se presenta bajo cinco ejes de las matemáticas a lo largo de seis grados: Números y Operaciones, Medición, Geometría, Datos y Probabilidad y Álgebra. Hay dos Textos del Estudiante en el Grado 1, 1A y 1B, y un Texto del Estudiante a partir del Grado 2. Un Cuaderno de Práctica acompaña cada Texto del Estudiante y está diseñado para complementar y ampliar el Texto del Estudiante. Una Guía del Profesor acompaña a cada conjunto de textos para proporcionar orientación efectiva sobre el uso del programa.

4.2 Análisis praxeológico

En esta sección, describe la praxeología matemática reconstruida de los libros didácticos de la editorial Prime Mathematics de Singapur, tomando como referencia el modelo epistemológico de referencia MER para la organización de los problemas del campo aritmético presentado en el capítulo anterior, donde se hizo una clasificación de los problemas aditivos, multiplicativos, y el campo aritmético que es el conjunto de todos los problemas aditivos y multiplicativos. Siguiendo la metodología de la investigación, en base a la TAD, no solo se trata de clasificar los problemas como se presentan en los libros especializados de aritmética, sino que hay que considerar las técnicas asociadas y las representaciones, las tareas matemáticas asociadas a los tipos de problemas, las tecnologías como aparecen las propiedades y los aspectos teóricos, tomando en cuenta los trabajos de las teorías de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) , siguiendo con la definición de un problema aritmético que lo encontramos en el trabajo de Puig y Cerdán (1996).

Presentamos la siguiente terminologia para describir la organización matemática de los problemas aritmeticos presentes en la colección de libros con la metodologia Singapur.

Ti = Es el tipo de tarea i.

tij: Es la tarea j del tipo de tarea Ti.

τijk: Es la técnica; donde i es el tipo de tarea, j es el número de tarea y k indica el número de técnica de la tarea j.

θ: Es la tecnología que justifica la técnica.

Θ: Es la teoría que justifica la tecnología.

Después de hacer el análisis de los libros didácticos, identificamos 7 tipos de tareas relacionados con los problemas aritméticos.

A continuación, mostramos los tipos de tareas identificados en la colección de libros didácticos analizados:

T_1: Resolver problemas aditivos de cambio

T_2: Resolver problemas aditivos directos de composición y de cambio

T_3: Resolver problemas de suma y resta

T_4: Resolver problemas aditivos de Composición

T_5: Resolver problemas aditivos simples y combinados

T_6: Calcular anticipadamente el resultado de un reparto equitativo: de la multiplicación a la división.

T_7: Resolver un problema de múltiples pasos que involucre las cuatro operaciones.

Presentaremos entonces la organización matemática reconstruida para los problemas aritméticos:

T_1: Resolver problemas aditivos de cambio

Problemas de tipo aditivo asociados a la acción del tipo agregar-quitar

El tipo de tarea T_1 engloba a las tareas donde la solución se enmarca en la aplicación de las operaciones de suma y resta, en la resolución de situaciones problemáticas con suma y resta podemos identificar la relación inversa de la adición y sustracción.

T_{11}: Resolver ejercicios aditivos de cambio que involucra la acción del tipo agregar

Problemas que comprenden la tarea T_{11}:

Se plantea una situación problemática de orden aditiva que se puede trabajar con material concreto para que se presente la necesidad de usar una técnica más eficiente que el conteo de objetos, llamaremos a esta técnica más eficiente la adición.

Ejemplo: En una suma convencional como por ejemplo 8+4, se puede verificar que el primer sumando es mayor que el segundo. Esta tarea del tipo agregar se resuelve con el uso de la técnica del sobreconteo “hacia adelante” a partir del primer sumando.

En el libro de primer grado de primaria se propone la siguiente actividad: se echan 7 fichas en una caja vacía contándolas una a una delante de los niños, los niños no pueden visualizar el interior de la caja. Acto seguido el profesor echa 6 fichas. La tarea matemática consiste en calcular la cantidad de fichas sin poder contar y manipular las fichas que hay en la caja, esa es la razón por la cual no se permite ver el interior de la caja, para resolver esta tarea es necesario recurrir a un nuevo conocimiento para resolver la situación problemática: la adición, el resultado de 7+6 permitirá encontrar la cantidad de fichas en la caja sin haber contado las fichas.

Técnica (τ_{111}) Técnica de conteo y sobreconteo

En el ejemplo del tipo de tarea T_{11} Se pueden tomar chapitas como un “Símbolo concreto” de las fichas ocultas que son 7 para luego tomar 6 chapitas y cuentan todo, para encontrar la respuesta se usa la técnica del conteo.

Al usar la cinta numerada pueden usar el sobreconteo ya que al sumar 1 a un número en la cinta, el resultado será el número que le sigue en la secuencia numérica.

Sobreconteo a partir del primer sumando: 7+6 =13, se da cuenta a partir del 7,8,9,10, 11,12.13. Apoyo en la cinta numerada.

Tecnología (θ):

θ_1: La acción de Agregar está asociada a la operación de adición, al agregar una cantidad a otra obtenemos una tercera cantidad mayor que la inicial. Al usar la suma anticipamos la cantidad de objetos que vamos a tener al agregar, si tenemos como dato la cantidad inicial y la cantidad de objetos por agregar.

T_{12}: Plantear problemas aditivos de cambio y de composición relacionados a las acciones del tipo agregar y juntar respectivamente

Las tareas se complejizan adicionando problemas aditivos de composición asociados a la acción de juntar. Un ejemplo de este tipo de tareas que se encuentra en el libro de texto son las sumas de hasta dos cifras con uno de una cifra. Por ejemplo 22+3, 17+5. En este tipo de tareas se espera que se use la propiedad conmutativa de la suma para proceder al sobreconteo iniciándolo desde el sumando mayor. Se hace énfasis en la suma de un múltiplo de la decena y un numero de una cifra, por ejemplo, 30+6 se espera que de manera inmediata se encuentre el resultado 36 sin el uso del sobreconteo.

Ejemplo presente en el libro de primer grado:

En un jardín hay 40 flores entre tulipanes y geranios. Se separan los geranios de los tulipanes y se cuentan 22 geranios. ¿Cuántos tulipanes hay?

Las acciones de "juntar" o de "separar" pueden ser realizadas físicamente usando material concreto o a un nivel lógico que sería el nivel abstracto.

Se propone la siguiente actividad: Juntando chapitas

Se presentan 10 chapitas pintadas de color rojo y 6 chapitas pintadas de color blanco, sin poder manipularlas y juntarlas, en este caso la tarea matemática será determinar la cantidad de chapitas en total solo sabiendo el cardinal de ambas.

Se pueden hacer las siguientes preguntas: ¿Sera posible que podamos saber la cantidad total de chapitas rojas y blancas sin tener acceso a contar?, ¿Qué operación se debe realizar?, ¿Cómo realizar el cálculo de esa operación?

Técnica (τ_{121}) Sobreconteo a partir del primer sumando

Ejemplo: Resolver una suma: 22 + 7 = 29

Se cuenta a partir del 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Se puede usar la cinta numerada si así lo requiere.

En la tarea T_{12} usando la técnica del sobreconteo se puede usar solo un grupo de chapitas, teniendo la cantidad inicial de chapitas que hay en un grupo y añadir el otro grupo efectuando el sobreconteo, veamos la solución para la tarea planteada:

Si toman como base los chapitas de color blanco que son 10, se debe contar entonces 11, 12, 13, 14, 15 ,16. Se puede concluir que hay 16 chapitas en total. Si se toma como base los 6 chapitas rojas, deben contar 7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 en este caso se cuentan más objetos, podemos inferir que la primera opción es más eficaz dado que se cuentan menos objetos.

Tecnología (θ):

θ_2: La acción del tipo juntar es asociada a la adición, al juntar dos conjuntos o colecciones de objetos se obtiene una cantidad que es mayor a cada una de los objetos iniciales.

Es posible anticipar, a través de la adición, la cantidad de objetos que tendrá un conjunto que se ha formado juntando dos colecciones iniciales, si se sabe la cantidad de objetos de ambas colecciones.

T_{13}: Resolver ejercicios aditivos de cambio y de composición asociados a las acciones del tipo agregar-quitar y juntar respectivamente.

En este tipo de tareas se adiciona la acción del tipo quitar a los problemas aditivos de composición y de cambio. Se puede utilizar como técnica la acción de contar “hacia atrás”.

Técnica (τ_{131}) Conteo descendente de uno en uno partiendo del número mayor

17 - 4 = 13, ya que se parte de 17 hacia atrás: 16, 15, 14,13. Si es necesario se puede usar material concreto como una cinta numerada.

Al restar 1 a un número, el resultado corresponde al número que lo antecede en la cinta numerada.

Tecnología (θ):

θ_3: La acción del tipo quitar, se asocia con la resta, al suprimir cierta cantidad de otra mayor obtenemos una cantidad menor que la inicial.

Se puede entonces predecir usando la diferencia, la cantidad de objetos que quedan en una colección a la que se le han quitado objetos, para esto es necesario tener como datos iniciales cual es la cantidad que se tiene y la cantidad de objetos que vamos a quitar.

T_{14}: Identificar la propiedad de conservación de la cantidad.

Un conjunto de objetos formado por dos subconjuntos no cambia si se retiran elementos de las subcolecciones para agregar al otro subconjunto, (Se trasvasijan)

Las tareas que se presentan permiten identificar la conservación de la cantidad, esta propiedad es muy importante ya que permite asociar combinaciones aditivas que serán muy útiles para el tipo de tareas donde se pide el cálculo de adiciones y sustracciones.

Técnica (τ_{141})

Sobreconteo o conteo hacia atrás usando conservación de la cantidad

Tecnología (θ):

θ_4: Si con los objetos de una colección hacemos dos subcolecciones aleatoriamente, la cantidad de objetos permanece invariante.

T_2: Resolver problemas aditivos directos de composición y de cambio

Por lo presentado en el capítulo 3, en la clasificación de los problemas aritméticos, los problemas aditivos asociados a la acción del tipo juntar si es suma, y separar si es resta, se les conoce como problemas de composición, por otro lado, los problemas aditivos en donde tenemos una acción del tipo agregar-quitar se llaman problemas de cambio.

Las acciones de “juntar” o de “separar” son realizadas inicialmente con material concreto, para hacer a continuación un diagrama y trabajar la presentación pictórica y finalmente presentar el tema de manera abstracta a un nivel lógico.

Un ejemplo en el libro de primer grado de primaria es el siguiente: Si tenemos 17 pelotas grandes y 11 pelotas pequeñas, la suma de 17 + 11 nos da el resultado de calcular cuantas pelotas tenemos sin la necesidad de poner todas las pelotas juntas para contarlas, al hacer la operación de la adición las hemos juntado mentalmente, las 26 pelotas están ahora juntas y hacen un conjunto que tiene como característica que sus elementos pertenecen a una misma categoría que es pelotas , ya no se hace la separación por los tamaños.

Técnica (τ_{211}) Descomposición canónica del número de dos cifras

Para las tareas del tipo aditivo la descomposición canónica del número de dos cifras. Escrito en forma simbólica, estos pasos son: (Ejemplo de una tarea de suma directa)

43 + 35 = 40 + 3 + 30 + 5

40 + 3 + 30 + 5= 70 + 3 + 5   esto resulta agrupando 70 + 9 = 79.

Tecnología (θ):

θ_5: Uso de la propiedad asociativa y conmutativa de la adición.

La tecnología (θ_5) que justifica la técnica (τ_{211}) se sustenta en las propiedades asociativa y conmutativa de la adición. En el libro de primer grado se presenta la tarea de sumar dos números de dos cifras, para eso la técnica asociada es la de descomposición de cada uno de ellos en forma canónica, seguidamente se suman las decenas, y luego las unidades.

Técnica (τ_{212}) Descomposición canónica de uno de los dos sumandos

Otra técnica consiste en descomponer solo uno de los sumandos. Siendo esta técnica menos eficiente en algunos tipos de tareas es usada como procedimiento para sumas de cantidades de dos cifras.

Tecnología (θ):

θ_6: Uso de la propiedad asociativa y conmutativa de la adición.

La tecnología que justifica esta técnica (τ_{212}) es la misma que justifica la técnica (τ_{211}) .

T_3: Resolver problemas de suma y resta

En este tipo de tareas se plantea una adición o una sustracción con el fin de encontrar un valor desconocido teniendo datos iniciales proporcionados, usan una variedad de técnicas asociadas como por ejemplo la composición y descomposición de números de dos cifras.

Este tipo de tareas tendrá un subtipo de tarea T_{31} que presentaremos a continuación:

T_{31}: Plantear y resolver problemas aditivos directos e inversos de composición y de cambio

En este tipo de tareas, se aplica la reversibilidad de la adición y la sustracción, esto permitirá algunos cálculos de manera inmediata, en este tipo de tareas ya se agregan problemas inversos.

En los problemas presentados en el libro de segundo grado de primaria, se presentan tareas para el cálculo directo de diferencias, como por ejemplo 47- 4, en este caso se hace evidente que la técnica a usar es contar hacia atrás desde el 47, a diferencia de otra diferencia planteada como por ejemplo 48-44, en este caso es más eficaz contar hacia adelante a partir del 44, esto es la reversibilidad de la suma y diferencia.

Otra tarea presentada en el libro de primer grado de primaria que permitirá reconocer la relación aditiva de tres números es la siguiente: usando material concreto, ponemos en una caja 18 tapas recicladas de botellas de plástico, después se saca 6 tapas , una vez que hicieron las operaciones respectivas y determina que queda 12 tapas en la caja, se vuelve a echar las 6 tapas que sacamos a la caja, se debe trabajar en que se reconozca que ya no es necesario efectuar la suma de la relación planteada de 18-6 = 12 , se puede determinar que hay 18 tapas en la caja , de manera análoga se plantea sacar 12 tapas de la caja y se pide encontrar la cantidad de tapas en la caja, la respuesta es inmediata y es notable por la relación anteriormente planteada, al deducir que quedan 6 tapas en la caja inmediatamente se echan las 12 tapas que sacamos se espera que puedan determinar de manera directa que tenemos 18 tapas en la caja. Aquí es donde después de manipular el material concreto. Se trabaja con la representación pictórica en la pizarra para que finalmente se escriban las operaciones involucradas y estemos en la etapa de plantear de manera abstracta la situación problemática.

La siguiente tabla 10 muestra la secuencia de acciones y las operaciones asociadas:

Tabla 10. Secuencia de operaciones para un problema aditivo de composición.

Tenemos	Sacamos	Agregamos	Operamos	Nos queda
18 tapas	6 tapas		18 - 6	12 tapas
12 tapas		6 tapas	12 + 6	18 tapas
18 tapas	12 tapas		18- 12	6 tapas
6 tapas		12 tapas	6 + 12	18 tapas

Fuente: Elaboración propia

Las relaciones aditivas entre los números 18, 6 y 12:

12+6 = 18   6+12 = 18   18-12 = 6   18-6 = 12

Técnica (τ_{311})

Se realiza un sobreconteo a partir del sustraendo hasta llegar al minuendo.

En tareas planteadas de calcular una sustracción del tipo 82-78 se cuenta hacia adelante a partir del 78, 80, 81 ,82, podemos deducir que 82-78 = 4

En el libro de primer grado de primaria se presenta la técnica del sobreconteo en la siguiente tarea: Se pone en una caja 30 chapitas. Luego se saca 26 chapitas. Se determina el número de chapitas sobrantes en la caja. Una técnica que se usa es la descomposición del sustraendo.

$$30 \quad - \quad \cancel{26}$$

$$20 \qquad 6$$

A la hora de efectuar los cálculos asociados a esta tarea de resolver una diferencia: 30 - 20 – 6 = 30 - 20 = 10 luego 10 - 6 = 4. Por tanto, quedarían 4 chapitas en la caja.

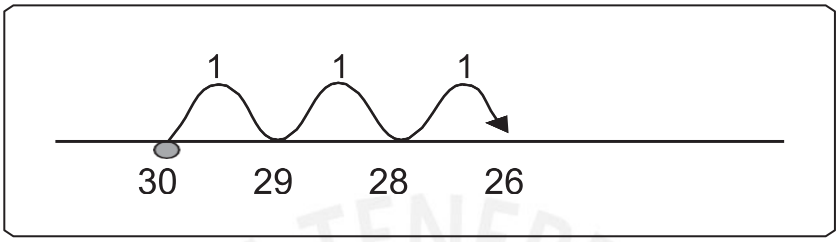
Otra técnica asociada a este tipo de tareas es la de determinar ¿Cuántos chapitas faltan para poder sacar todas?, ahora cambiamos la estrategia y se cuenta hacia adelante a partir del 26 hasta llegar al 40, obteniendo 4. Podemos concluir que esta técnica es más eficaz que la anterior y es posible que se use cuando la diferencia entre el sustraendo y minuendo sea pequeña.

Está técnica se sustenta en el principio de reversibilidad entre las operaciones de suma y resta.

30-26 = 4   y   26+4 = 30

Gráficamente: Veamos la solución en la siguiente figura 9.

Figura 9. Solución de un problema aritmético por sobreconteo a partir del sustraendo.



Fuente: Elaboración propia

Tecnología (θ):

θ_7: La reversibilidad de la adición y sustracción

T_4: Resolver problemas aditivos de Composición

Este tipo de tareas presentan 4 subtipos de tareas

T_{41}: Calcular ejercicios aditivos directos de composición y de cambio

En este tipo de tareas presentes en el libro de segundo grado se presentan tareas de cálculo de sumas y restas de dos números hasta tres cifras, las tareas son presentadas en enunciados prácticos y situaciones problemáticas.

A continuación, presentamos tareas del tipo operativo de adición y sustracción:

En la adición: En general todas las combinaciones de sumar números de hasta tres cifras que la suma resulta notable y en la resta igualmente. Por ejemplo, 100+4; 200+40; 300+45.

Técnica (τ_{411}) Realizan cálculos tomando como base la estructura del sistema de numeración decimal .

Las sumas y restas que se operan con el fin de solucionar este tipo de tareas son de cálculo notable debido a la estructura del sistema de numeración decimal.

Tecnología (θ) :

θ_8: Descomposición canónica de un numero de tres cifras.

La descomposición de un número de tres cifras en base 10 resulta intuitivo dado que un número de tres cifras se descompone en la suma de una centena, una decena y una unidad, usando esta descomposición se puede tener una técnica para encontrar sumas y restas de manera directa.

T_{42}: Calcular ejercicios aditivos directos de cambio e inversos de composición

Las tareas que se presentan en el libro de tercer grado de primaria son del tipo aditivo directos de composición y de cambio hasta el 1000.

Técnica (τ_{421})

Calculan sumas y restas basándose en descomposiciones canónicas

Tecnología (θ):

θ_9: Uso de la propiedad asociativa y conmutativa de la adición.

La técnica se justifica en la propiedad asociativa y conmutativa de la adición , llegamos a concluir que la $\theta_7 = \theta_4$

T_{43}: Calcular operaciones aditivas directas e inversas de composición y de cambio.

En el libro de tercer grado de primaria se encuentran tareas presentadas a través de enunciados y situaciones problemáticas como, por ejemplo:

En la adición: Sumar dos números de hasta 3 cifras (Con reserva).

En la sustracción: Todos los casos anteriores

Técnica (τ_{431})

Calcular adiciones y sustracciones usando el algoritmo convencional, la justificación de esta técnica se basa en la descomposición canónica de un número que se sustenta en el sistema numérico decimal.

Tecnología (θ):

θ_{10}: Uso de la propiedad asociativa y conmutativa de la adición.

La tecnología que justifica la técnica es el uso de la propiedad asociativa y conmutativa de la suma, esto nos va a permitir presentar el algoritmo de las operaciones de adición y sustracción.

T_{44}: Plantear y resolver problemas aditivos directos de comparación

En este tipo de tareas se plantean situaciones problemáticas de comparación directa, se plantea una comparación entre los problemas que se resuelven por adición y sustracción para mostrar que la suma y resta son operaciones inversas.

Técnica (τ_{441})

Calcular adiciones y sustracciones usando el algoritmo convencional, la justificación de esta técnica se basa en la descomposición canónica de un número que se sustenta en el sistema numérico decimal.

Tecnología:

θ_{11}: Propiedad asociativa y conmutativa de la adición.

T_5: Resolver problemas aditivos simples y combinados

En este tipo de tareas vamos a tener ciertos datos iniciales para su resolución, se usa sumas y restas y la combinación de estas. La incógnita se presenta en diferentes lugares.

T_{51}: Resolver problemas aditivos combinados directos de composición y de cambio.

La tarea presentada en el libro de tercer grado de primaria se enmarca en el tipo de tarea $T_{51,}$ para este tipo de tarea se espera que los estudiantes posean la capacidad de resolver problemas aditivos simples para ir complejizando las construcciones de sus estrategias de solución.

La tarea presenta la siguiente información de la lista de precios de un restaurante de hamburguesas y bebidas, el profesor reparte distintos pedidos a los niños que previamente ya los tiene listos en un papel, se hace la siguiente pregunta: ¿Cuánto dinero necesitas para pagar el pedido que te ha tocado? Las combinaciones son diferentes ya que se tienen para escoger 5 tipos de hamburguesa y 5 tipos de bebidas.

Técnica (τ_{511}) Estrategia de (Polya, 1957) para la resolución de problemas

La técnica presentada en el libro es resolver los problemas con la estrategia de 4 fases, haciendo dibujos esquemáticos para representar las situaciones problemáticas.

Fase 1 Comprendo: Comprender el problema. Se formulan las siguientes preguntas ¿Qué debemos encontrar?,¿Qué otra cosa hay que responder?, se debe formular en su lenguaje la situación problemática para poder verificar el entendimiento.

Fase 2: Planeo que hacer. En esta fase se debe identificar datos e incógnita

Fase 3: Resolver usando las operaciones pertinentes para la resolución de la situación problemática.

Fase 4: Comprobación. Interpretar la respuesta en el contexto de la situación problemática.

Tecnología

θ_{12}**:** Descomposiciones aditivas.

En los problemas combinados de suma se utilizan técnicas que se justifican en las descomposiciones aditivas.

Tarea $_{52}$: Resolver problemas aditivos combinados directos e inversos de composición y de cambio.

La tarea anterior T_{51} va a sufrir una variante, vamos a invertir el problema, y recordando que un problema es inverso cuando se va planteando los sucesos en el enunciado de la situación problemática y estos no permiten inferir directamente las operaciones aritméticas que debemos realizar. Muchas veces el enunciado del problema nos sugiere una operación que no necesariamente nos conduce directamente a encontrar la incógnita.

Situación problemática: Adaptamos un problema del libro usando la moneda nacional.

Una niña va a una tienda donde una hamburguesa simple cuesta 14 soles y una porción de papa fritas cuyo costo es de 5 soles. la niña cancelo el pedido con 50 soles. ¿Cuánto recibió de vuelto?

Técnica (τ_{512}) Estrategia de Polya (1957) para la resolución de problemas

Las tareas planteadas de este tipo se resuelven con la estrategia de las 4 fases de (Polya, 1957). Al resolver el problema tenemos:

Fase 1: Comprendo el problema. Se debe leer y entender bien la situación problemática para poder hacerse la pregunta ¿Qué debemos encontrar?

Al efectuar las operaciones correspondientes, se deduce que si se pagó con un billete de s/.50 soles ya se deduce que este billete puede cubrir el gasto de la hamburguesa y la porción de papas frutas, el vuelto es parte de esos 50 esta forma de razonar es importante para poder identificar las operaciones aritméticas que darán respuesta a este problema.

Fase 2: Planeo que hacer. Interpretar y reconocer datos e incógnitas., en esta fase debemos preguntarnos ¿Qué debemos hacer para encontrar el vuelto?, teniendo los datos a la mano, la hamburguesa tenía un costo de s/.14 soles y la porción de papas s/. 5 soles

Fase 3: Resuelvo el problema, Es importante desarrollar un dibujo esquemático para poder tomar mejores decisiones sobre qué operación u operaciones aritméticas se deben usar.

Se presenta la siguiente figura 10 para esquematizar el problema

Figura 10. Esquema de un problema aditivo combinado directo.

Hamburguesa simple s/.14	Porción de papas fritas s/.5	Vuelto s/. ?
S/. 50 soles		

Fuente: Elaboración propia

Las operaciones se pueden representar de la siguiente forma:

$5 + 14 + \boxed{} = 50$

Cálculos:

$10+ 4+5 = 10 + 9 + \boxed{} = 50$

Fase 4: Comprobación. ¿Cómo comprobamos que nuestra respuesta sea razonable?

"La niña recibe de vuelto s/.31".

Tecnología

θ_{13}: Conservación de la cantidad en una adición y en una sustracción

Los argumentos más generales y formales que justifican estas técnicas presentan la siguiente estructura:

$M + N = (M + C) + (N - C)$ (En la adición, si a un sumando se le suma una cantidad y se le resta al otro sumando, la suma permanece invariante).

$M + N = (M - C) + (N + C)$ (Aplicando conmutatividad de la suma, de lo anterior se puede deducir: en una suma, si a un sumando se le resta una cantidad y se le suma al otro sumando, la suma permanece invariante).

$M - N = (M + C) - (N + C)$ (En una diferencia, si al minuendo se le suma una cantidad y esta misma cantidad se le suma al sustraendo, la diferencia permanece invariante)

$M - N = (M - C) - (N - C)$ (En una diferencia, si al minuendo se le resta una cantidad y esta misma cantidad se le resta al sustraendo, la diferencia permanece invariante).

La tecnología que justifica las técnicas de trasvasije y de traslado para poder convertir sumas y restas en otras que sean de más fácil operatividad se sustenta en la conservación de la cantidad en una suma y resta.

T_{53}: Resolver problemas aditivos combinados directos e inversos, de composición, cambio y comparación.

En el libro de tercer grado de primaria, se presenta la siguiente situación problemática:

María, Juan y José van juntos a visitar a una tía. En el edificio hay un ascensor que tiene una capacidad de 150 kilos. María pesa 45 kilos, Juan pesa 7 kilos más que María y José pesa 60 kilos. ¿Podrán subirse los tres juntos en el ascensor? ¿Por qué?

Técnica (τ_{531}) Las tareas planteadas de este tipo se resuelven con la estrategia de las 4 fases de (Polya, 1957). Al resolver el problema tenemos que:

Representar relaciones cuantitativas entre datos e incógnitas para poder determinar las operaciones que lo resuelven.

Se necesita la representación de las relaciones cuantitativas entre incógnitas y datos dado que es una tarea que presenta un problema aditivo simple de comparación inverso, esto nos va a permitir determinar las operaciones aritméticas que nos permiten solucionar la tarea.

Fase 1: Comprendo el problema. ¿El peso entre los tres es menor que 150kg?

Fase 2: Planeamiento del problema. El peso de Juan no es un dato del problema directamente, pero se puede deducir a partir del peso de María.

Dato 1: María pesa 45 kilos

Dato 2: Juan pesa 7 kilos más que María

Dato 3: José pesa 60 kilos

Fase 3: Dibujo esquemático.

Se debe determinar el peso de los tres niños juntos para que este resultado lo podamos comparar con el limitante del peso que proporciona el ascensor. A continuación, en la siguiente figura 11 se muestra un esquema del problema:

Figura 11 Esquema de un problema de la tarea **T**$_{\mathbf{53}}$

Peso de María 45 kilos	Peso de Juan 7 kilos más que Claudia	Peso de José 60 kilos
?		

Fuente: Elaboración propia.

Hay que determinar el peso de Juan:

Peso de Juan: Peso de María + 7 kilos:

45 kilos

45 kilos **7 kilos**

?

Luego, para calcular el peso de Juan se debe efectuar la siguiente operación: **45 + 7 =?**

Cálculo:

45 + 7 = 45 + 5 + 2 = **52**

Entonces, el peso de Juan es 52 kilos.

En la siguiente figura 12 representamos un esquema ya con los datos encontrados del problema:

Figura 12. Esquema con los datos obtenidos de un problema de la tarea $\mathbf{T_{53}}$

45 kilos	52 kilos	60 kilos
?		

Fuente: Elaboración propia

$45 + 52 + 60 = \boxed{\textbf{?}}$

$45 + 52 + 60 = 60 + 40 + 5 + 50 + 2 = 150 + 7 = \boxed{\textbf{157}}$

Fase 4: Comprobación

Al resolver la situación problemática nos encontramos con que el peso de los tres niños es 157kg, por las limitaciones del peso del ascensor no pueden ir los tres juntos ya que juntos pesan más de 150kg.

Tecnología

θ_{14}: Conservación de la cantidad en una adición y en una sustracción

Los argumentos más generales y formales que justifican estas técnicas presentan la siguiente estructura:

$M + N = (M + C) + (N - C)$ (En la adición, si a un sumando se le suma una cantidad y se le resta al otro sumando, la suma permanece invariante).

$M + N = (M - C) + (N + C)$ (Aplicando conmutatividad de la suma, de lo anterior se puede deducir: en una suma, si a un sumando se le resta una cantidad y se le suma al otro sumando, la suma permanece invariante).

$M - N = (M + C) - (N + C)$ (En una diferencia, si al minuendo se le suma una cantidad y esta misma cantidad se le suma al sustraendo, la diferencia permanece invariante)

M – N = (M– C) – (N– C) (En una diferencia, si al minuendo se le resta una cantidad y esta misma cantidad se le resta al sustraendo, la diferencia permanece invariante).

Las propiedades que permiten convertir sumas y restas en otras que sean de más fácil operatividad, estas técnicas son llamas de trasvasije y de traslado y la tecnología que justifica esas técnicas es la conservación de la cantidad en una suma y resta.

T_6: Calcular anticipadamente el resultado de un reparto equitativo: de la multiplicación a la división

En este tipo de tareas se asocia la operación de multiplicación a la relación de proporcionalidad y se considera a la operación división como un reparto equitativo.

Se consideran 6 subtipos de tareas asociadas a la tarea T_5.

T_{611}: Resolver situaciones problemáticas de proporcionalidad directa.

En el libro de tercer grado de primaria se presentan situaciones problemáticas que involucran tareas de proporcionalidad directa que se resuelven con multiplicación, que en nuestra definición del MER explicamos que se llaman problemas de iteración de una medida, en este caso se usa el lenguaje de reparto equitativo.

En el libro de tercero de primaria, se presenta la siguiente situación problemática:

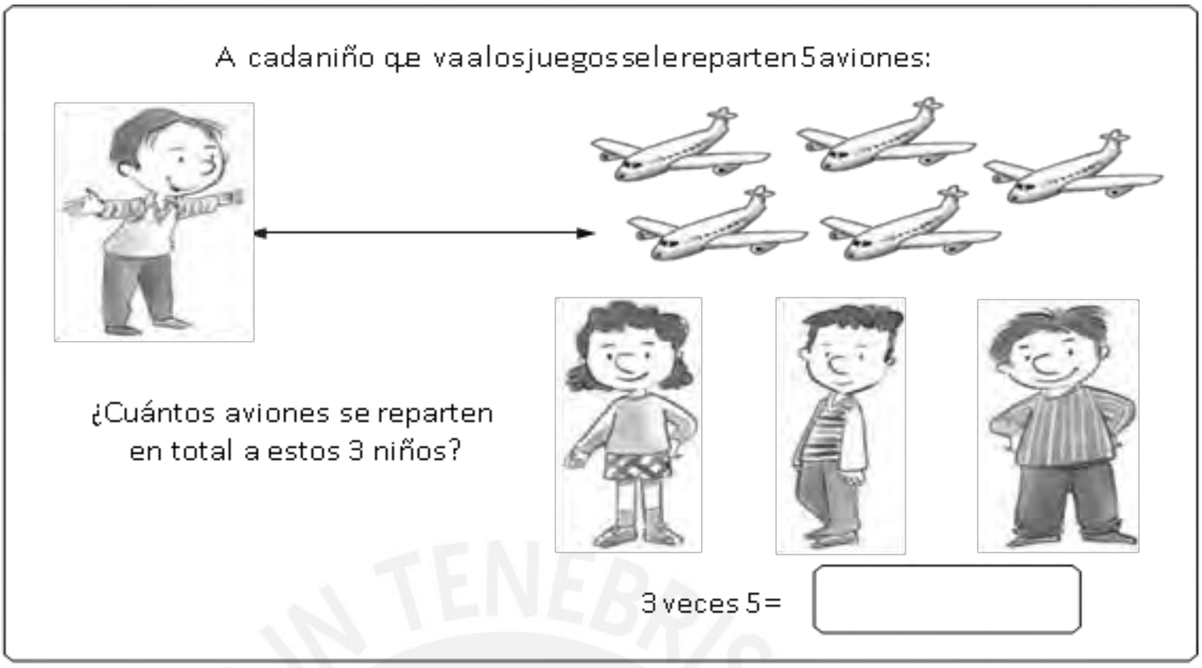


Figura 13. Problema de proporcionalidad directa tercer grado de primaria 2016

La tarea consiste en contestar a la pregunta ¿Cuántos aviones se reparten en total entre los tres sin contarlos?

Técnica (τ_{611}) Sumar reiteradas representando la combinación multiplicativa

La técnica que permite sistematizar este tipo de tareas se basa en utilizar sumas reiteradas que representaran la combinación multiplicativa correspondiente.

En caso de la solución de la tarea planteada en el libro de tercer grado de primaria de contestar cuantos aviones se reparten entre los tres sin contarlos, se espera que identifiquen que se ha repartido en total 3 veces 5 aviones, es decir, 3x5 = 15.

Tecnología: θ_{15}: La Multiplicación como suma de sumandos iguales

Según (Puig y Cerdán, 1996), como lo indicamos en el capítulo 3 los problemas en donde hay una proporción simple directa entre dos espacios de medida pertenecen a la categoría de regla de correspondencia.

La multiplicación permite encontrar la cantidad total de objetos que se reparten equitativamente teniendo como datos la cantidad de objetos que van a corresponder a cada una de las partes, y la cantidad de partes que disponemos.

T_{612}: Resolver problemas de Reparto equitativo.

En el libro de tercer grado de primaria se presentan situaciones problemáticas concretas y a través de enunciados donde en primera instancia se conoce la cantidad de objetos que se debe repartir y la cantidad de partes entre las cuales se va realizar el reparto

Una de las tareas se llama ¿Cuántas fichas le tocan a cada uno ?, se trabaja primero con material concreto para que se pueda realizar las manipulaciones concretas para realizar un reparto equitativo, a continuación, se trabaja el modelo pictórico pata visualizar lo que se pide y al final el modo abstracto para poder resolver la tarea con una división.

Al hacer el trabajo con material concreto pueden hacer el reparto haciendo manipulaciones concretas, anotan en su cuaderno y responden a la pregunta, ¿cuántas fichas le tocan a cada uno?, finalmente en la última etapa de solución del problema que es el modo abstracto se verifica el resultado del reparto mediante el uso de la multiplicación.

Otra tarea que se presenta en el libro de tercer grado de primaria es la que presentaremos en la figura 14, en esta tarea se pide realizar un reparto de 20 fichas en 4 vasos de forma equitativa, la pregunta es ¿Cuántas fichas corresponden en cada vaso?

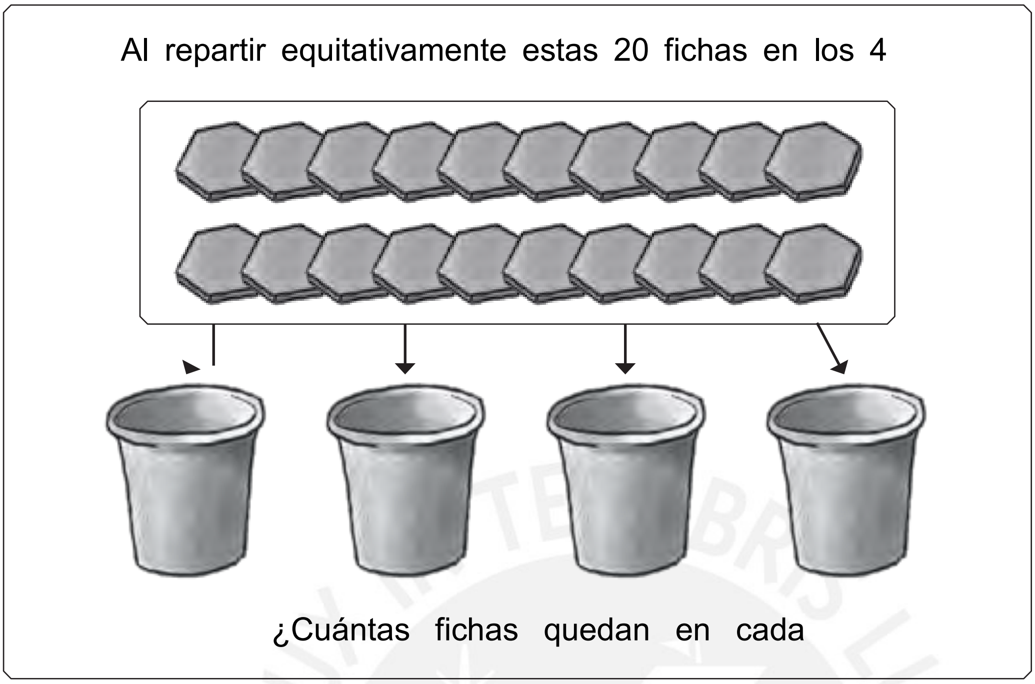


Figura 14. Problema de reparto equitativo Tercer grado de primaria

Técnica (τ_{612}) Asociar la división con una resta reiterada

Al resolver este tipo de tareas la técnica asociada es comprender a la división como una resta reiterada. En la tarea presentada en el ejemplo anterior se puede distribuir de una en una las fichas en los cuatro vasos hasta quedarse sin fichas, al final se cuentan las fichas en cada caso. Cada vez que se inserte una ficha en un vaso se puede asociar a la pregunta de ¿Cuántas fichas se repartieron? y ¿Cuántas fichas quedan por repartir? Esta técnica asociada permite la asociación de la división como una resta reiterada.

Tecnología

θ_{16}: La multiplicación aplicada al reparto equitativo.

La tecnología que justifica la técnica no necesita de la definición de la división, este tipo de tareas se pueden resolver sin dividir.

Técnica (τ_{612}) * Asociar la división con una resta reiterada usando diferentes combinaciones .

Se presenta en el libro de texto de tercer grado de primaria una técnica para resolver este tipo de tareas de reparto equitativo que es una extensión de la técnica τ_{511} y que resulta más eficiente.

En el mismo ejemplo de la tarea planteada en T_{52} vamos a repartir una mayor cantidad de fichas en un solo paso, ya no lo vamos a hacer de uno en uno, entonces vamos a poder realizar combinaciones de fichas. Si en el primer reparto se colocan tres fichas en cada vaso en esta ronda se habrá repartido 12 fichas en total, y quedara por repartir 8, o podemos poner cuatro fichas en cada vaso y luego una nos podemos topar con el problema de que falten fichas, eso nos permite replantear la solución, de ahí se cuentan las fichas para responder a la tarea planteada.

Entonces podemos concluir que la técnica **(τ_{612})*** es más eficiente que la técnica **(τ_{612})** de todas maneras la primera técnica es más segura que la primera.

Tecnología

θ_{17}: La multiplicación aplicada al reparto equitativo.

La multiplicación nos proporciona una herramienta para repartir equitativamente objetos que corresponden a cada una de las partes disponibles.

T_{613}: Calcular divisiones sin resto de un número de dos cifras por un número de una cifra.

Este tipo de tareas se presenta en el libro de tercer grado de primaria con problemas presentados a través de una situación concreta donde se permite el uso de material concreto y a través de enunciados para la respectiva representación pictórica.

La tarea de nombre: “Calcular cuántas tapas de plástico recicladas le toca a cada persona sin contar”, es similar a la planteada en la tarea T_{52} con la diferencia que se formula una condición distinta, esta ampliación de la tarea no permite la manipulación directa de las tapas. Esta variación de la tarea hace que se tenga que modificar los procedimientos de reparto para que se presente y construye la definición de división, la necesidad de plantear la división se hace presente ya que la actividad no admite la manipulación de las tapas en los recipientes para poder hacer el conteo, la tarea sigue siendo la misma, debemos encontrar cuantas tapas hay que colocar en cada recipiente para que el reparto sea equitativo, pero al hacer esta variante complejiza la tarea y se puede plantear la siguiente pregunta : ¿es posible saber cuántas tapas quedaron en cada recipiente después de realizar el reparto sin contarlas ?, dependiendo del número de tapas y de recipientes este tarea se puede seguir ampliando en complejidad .

La actividad planteada exige que el reparto se efectué en un solo momento, se debe entonces colocar las tapas que corresponden a cada recipiente , se van presentando diferentes posibilidades y se debe analizar cada resultado , si se plantea que la cantidad que permite hacer el reparto equitativo en un solo momento es 2 vasos por recipiente , deben verificar si su procedimiento es correcto , se llega a visualizar que solo han distribuido 8 tapas del total que son 20 y les va a quedar 12 tapas por repartir , ahí surge la idea de que en una sola ronda se puede colocar más tapas , por ensayo y error se va formando la definición de división .

Técnica (τ_{613}) Aplicar el método de ensayo y error para presentar el concepto de división.

La división es la operación matemática cuyo resultado anticipa la cantidad de objetos que le tocará a cada participante en un reparto equitativo. Se formaliza la operación de división y se puede responder a la pregunta: ¿Cuantas veces el divisor está contenido en el dividendo?

En la tarea $T_{62,}$ si en la primera ronda se distribuyen 4 tapas por recipiente, se reparten 16 tapas en total y nos van a quedar 4 tapas sin repartir, entonces surge la idea de que se ha podido repartir más tapas en cada recipiente, por ensayo y error se verifica que la propuesta no prospera. Por el contrario, si se colocan 6 tapas por recipientes en la primera ronda, se va a colocar 6 en los tres primeros recipientes y al llegar al cuarto recipientes, solo quedan 2 tapas disponibles, en este caso el reparto no es equitativo, se necesitarían 24 tapas para que el reparto sea equitativo, por ensayo y error esta propuesta fracasa. Siguiendo con el proceso si ahora se colocan 5 tapas por recipiente en la primera ronda, se va a poder distribuir todas las tapas y el reparto es equitativo, se logra contestar la pregunta de la tarea planteada.

Tecnología

θ_{18}: La división de dos números por aproximaciones sucesivas.

En el caso de la tarea planteada en T_{52}, que se resumía en la operación de división 20: 4, lo que debemos encontrar es cuantas fichas deben entrar en cada vaso que al multiplicarlo por la cantidad de vasos (4), nos dé como resultado el total de fichas (20).

$4 \bullet \square = 20.$

T_{614}: Plantear y resolver problemas de reparto equitativo, con y sin resto.

En este tipo de tareas no siempre el reparto equitativo resulta exacto, manipular material concreto que permita a los estudiantes verificar este resultado nos permite introducir la definición de la división con resto.

En el libro de tercer grado de primaria se presenta la siguiente situación problemática: Se quiere repartir 22 tapitas de botellas de plástico recicladas en 4 recipientes disponibles.

Técnica (τ_{614}) Algoritmo de la división

La técnica para este tipo de tareas es usar el algoritmo de la división, vamos a dividir la cantidad de tapitas de botellas de plástico entre la cantidad de recipientes disponibles, la aproximación debe ser la más exacta a la cantidad de tapas , al realizar esta técnica vamos a tener en ciertos casos un residuo igual a cero lo que va a significar que el reparto es exacto ; y en otros casos distinto de cero, aquí aparece la noción de resto de una división no exacta y se puede presentar con casos prácticos y manipulables que el residuo siempre será menor que el divisor.

Tecnología

Tecnología

θ_{19}: Definición de división como reparto equitativo con resto

En las tareas de tipo reparto equitativo, no en todas las ocasiones se puede repartir todos los objetos, la idea que va a surgir es la de repartir la mayor cantidad de objetos que nos permita la situación planteada en el problema. La cantidad de objetos que queda sin repartir se conoce como el resto de la división y siempre es menor que el divisor.

T_{615}: Establecer semejanzas y diferencias entre problemas que se resuelven con una multiplicación y con una división.

El libro de tercer grado de primaria presenta problemas de iteración de una medida y de reparto equitativo cuya solución se realiza con la operación de multiplicación o división y que fueron presentados en el capítulo anterior para poder tomar decisiones de los tipos de problemas que se iban a considerar en el MER de los problemas aritméticos. Una vez que se determina que operación se debe realizar para la tarea determinada lo siguiente es analizar las diferencias y semejanzas entre estas dos operaciones.

Técnica (τ_{615}) Algoritmo de la división – división con resto

En este caso la técnica para resolver estos problemas es congruente con la tecnología usada para la técnica (τ_{614}) de la tarea T_{614}.

Los problemas tendrán ahora una dificultad mayor, no será posible hacer el reparto equitativo, lo que se puede es repartir equitativamente una cantidad menor de tapas que las que nos piden repartir y nos va a quedar una cantidad de tapas por repartir, en el momento de abordar la tarea de manera abstracta se va a definir que esa cantidad de tapas que faltan se definen como el residuo de la división.

Tecnología

θ_{20}: La división y la multiplicación son operaciones inversas entre sí.

T_{616}: Resolver problemas de proporcionalidad directa y de reparto equitativo.

En este tipo de tareas hay una proporción simple directa entre dos espacios de medida (Puig y Cerdán, 1996, p.130).

En el libro de tercer grado de primaria aparecen las siguientes situaciones problemáticas que se encuentran en esa categoría definida en el MER de la presente investigación.

Problema: Hay 60 libros en la habitación de Carla. Hay 12 estantes. ¿Cuántos libros vamos a tener por estante?

Problema: Hay 12 estantes de libros en la habitación de Carla. Carla puso 5 libros en cada estante. ¿Cuántos libros puso Carla en total en su habitación?

Problema: Hay 60 libros en la habitación de Carla. Hay 5 libros en cada estante.

¿Cuántos estantes tiene la habitación de Carla?

Técnica (τ_{616}) Definición de división partitiva

En este caso la técnica para resolver este tipo de tareas es la de dividir, y en la tarea planteada tenemos un problema de división partitiva que hemos desarrollado en el capítulo anterior al presentar los tipos de divisiones y que nos permitieron la estructura y clasificación de los problemas aritméticos. Según (Puig y Cerdán, 1996) la multiplicación no es semánticamente conmutativa, entonces es por eso que los autores presentan tres escenarios dentro de esta categoría de tareas de proporcionalidad directa o también llamado de isomorfismo de medidas, estos tres tipos de problemas presentados en el párrafo anterior y construidos sobre una misma situación problemática nos sirve de ejemplo para que se pueda ver que se diferencian según cuál de las tres cantidades sea la incógnita.

Tecnología

θ_{21}: La división y la multiplicación son operaciones inversas entre sí.

En la multiplicación se hace la suma repetida de un mismo sumando obteniéndose un número que es mayor a los dos sumandos iniciales.

Técnica (τ_{616}) * Asociar la división con una resta reiterada

Para este tipo de tareas se presenta otra técnica que es una variante presentada a la tarea τ_{515} pero que resulta menos eficiente y se puede ser de utilidad en situaciones problemáticas donde los números no son tan grandes , para poder realizar menos operaciones.

Por ejemplo, para calcular 25: 5 se procede de la siguiente manera:

25 – 5 = 20

20 – 5 = 15

15 – 5 = 10

10 – 5 = 5

5 - 5 = 0

Después de hacer reiteradas veces la diferencia llegamos al resultado de 5, dado que hemos restado 5 veces el 5 hasta llegar a 0.

Tecnología

θ_{22}: División por restas reiteradas

En la división (dividendo entre divisor), hacemos implícitamente restas reiteradas, al dividendo se le resta el divisor o un múltiplo del divisor, y se hace estas restas hasta que el resultado sea menor que el divisor.

T_7: Resolver un problema de múltiples pasos que involucre las cuatro operaciones.

En el libro de quinto grado de primaria (Pág. 51) encontramos la siguiente situación problemática:

Un vendedor de frutas compró 386 duraznos. Él boto 14 duraznos que estaban podridos y puso el resto en bolsas de 12 duraznos cada una. ¿Cuántas bolsas uso?

Técnica (τ_{71}) Las tareas planteadas de este tipo se resuelven con la estrategia de las 4 fases de Polya (1957). Al resolver el problema tenemos:

Fase 1. Comprendo el problema

Las siguientes preguntas nos ayudan a plantear el problema:

¿Cuántos duraznos compró el vendedor de frutas? 386

¿Cuántos duraznos podridos botó el vendedor de frutas? 14

¿Qué debemos encontrar?

Fase 2. Planeo qué hacer

¿Qué debemos hacer para obtener la respuesta? Se debe encontrar el número de duraznos que no estaban podridos y luego usar la operación de división para dividirlo por el número de duraznos en cada bolsa.

Fase 3 . Resuelvo el problema

¿Cómo podemos encontrar el número de duraznos que no estaban podridos?

Aparece la operación de la resta: 386 -14 = 372, al encontrar 372 duraznos ya podemos dividir este número por el número de duraznos en cada bolsa. 372: 12 = 31

Fase 4. Compruebo

¿Cómo podemos comprobar si nuestra respuesta es razonable?

La respuesta es había 31 bolsas de durazno.

Tecnología

θ_{23}: Definición de las cuatro operaciones aritméticas.

Tarea T_{71}: Resolver un problema no rutinario que involucre las cuatro operaciones usando las estrategias de estimar y comprobar.

La tarea presentada en la página 53 del libro de quinto grado es la siguiente:

Tarea: Coloca dos pares de paréntesis en la frase numérica para que sea correcta.

560: 14 -12 x 10 +16 = 7280

Técnica (τ_{711})

Las tareas planteadas de este tipo se resuelven con la estrategia de las 4 fases de Polya (1957). Al resolver el problema tenemos:

1. Comprendo el problema. Explicar que lo que se necesita es colocar dos paréntesis para expresar la frase numérica correcta.
2. Planeando el problema. Se puede estimar y comprobar para decidir dónde colocar el paréntesis para obtener la respuesta de 7280.
3. Resuelvo el problema.

   Intentando colocar el paréntesis de esta forma:

   (560: 14) – 12x (10 +16) Haciendo los cálculos respectivos no llegamos a la respuesta.

   Moviendo el paréntesis tenemos:

   560: (14 – 12) x (10+ 16), esta operación si resulta 7280.

4. Compruebo

   Para comprobar la respuesta, aplicar correctamente el orden de las operaciones y asegurase de realizarlas en el orden correcto.

θ_{24}: Definición de las cuatro operaciones aritméticas.

4.3 Técnicas de resolución de problemas aritméticos usando el método de barras

Una representación matemática del mundo real es lo que se denomina un modelo matemático. En el currículo de Matemática de Singapur, existe un modelo de representación para los problemas aritméticos y algebraicos que se denomina el método del modelo de barras. El Método Modelo para resolver problema fue una innovación en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática gestado por el Instituto de Desarrollo Curricular de Singapur para hacer frente a las dificultades de los estudiantes con los problemas con enunciados (Kho, Yeo, & Lim, 2009, p. 2)

En un problema aritmético con enunciado como este, el método modelo ayuda a los alumnos a visualizar las situaciones involucradas, por lo tanto, son capaces de construir una frase numérica que las represente, por lo tanto, para resolver las tareas de resolución de problemas parte –todo se presenta una técnica llamada el método de barras.

No es sorprendente que el método del modelo de barras sea prevalente en las escuelas de Singapur. Fue introducido como un tipo heurístico de resolución de problemas en 1983, como una herramienta para resolver problemas que involucraran números, fracciones, proporciones y porcentajes (Kho, 1987, pág. 4).

Como ejemplo, analizaremos la técnica que el texto modelo de barras presenta para hacer la tarea de resolver un problema aritmético de parte –todo. Analizando el procedimiento podemos caracterizar los pasos que se sigue para la resolución de un problema parte – todo.

Aquí, dos o más subconjuntos (las partes) forman un conjunto (el todo).

En el método modelo, las barras rectangulares se utilizan para representar cantidades que forman "partes".

Ejemplo:

En problemas con enunciados que involucren situaciones de parte-todo, lo desconocido puede ser el todo (ej. Problema de los Niños y Niñas) o una parte (ej. Problema de las Galletas y Problema de los Libros). Presentamos algunos modelos en la siguiente figura 15.

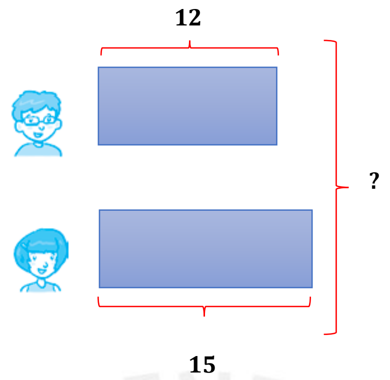
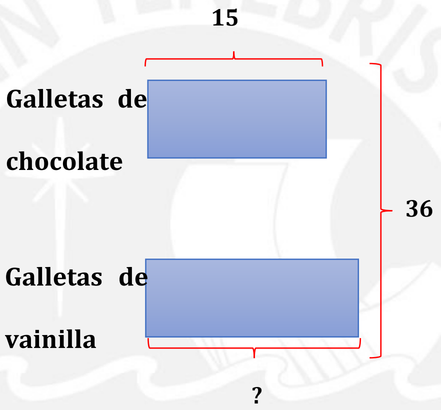
PROBLEMAS	CANTIDADES (Discretas)	MODELO	NÚMERO DE PARTES	CANTIDAD DESCONOCIDA
Ejemplo: Problema de los Niños y Niñas (pág. 11)	Cantidad de niños y niñas		2	Todo
Ejemplo: Problema de las Galletas (pág. 11)	Cantidad de galletas		2	Parte

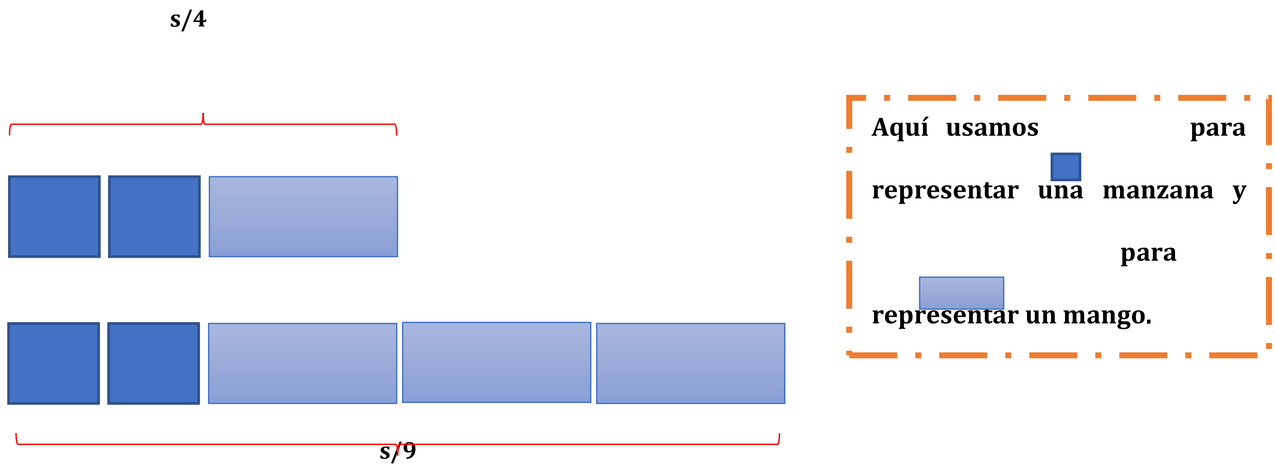
Figura 15. Problemas de relación parte-todo

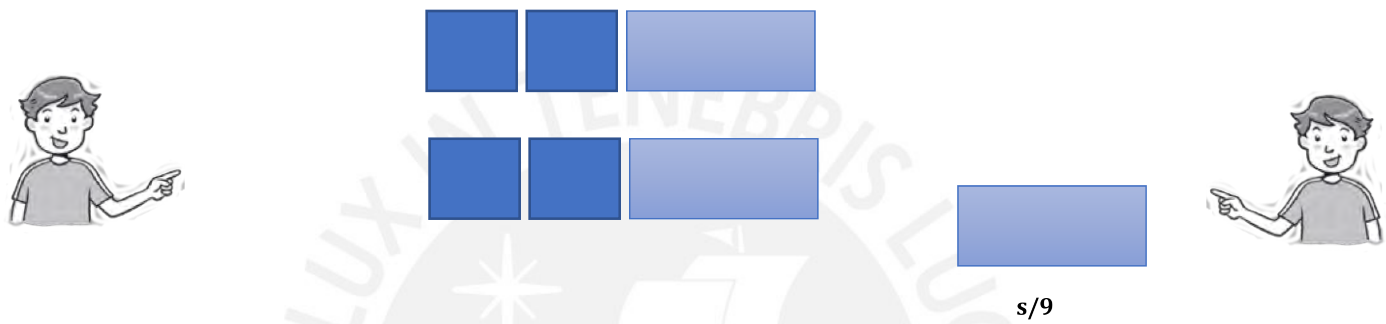
Fuente: (Yeap Bun Hur Método de barras p.11, 2012)

EJEMPLO: Problema de las Frutas

Dos manzanas y un mango cuestan s/4. Dos manzanas y tres mangos cuestan s/9. Encuentra el precio de un mango.

En la siguiente figura se representa un problema que se resuelve usando la técnica del método de barras.





Entonces, representa s/5 ÷ 2 = s/2.50.

Un mango cuesta s/2.50.

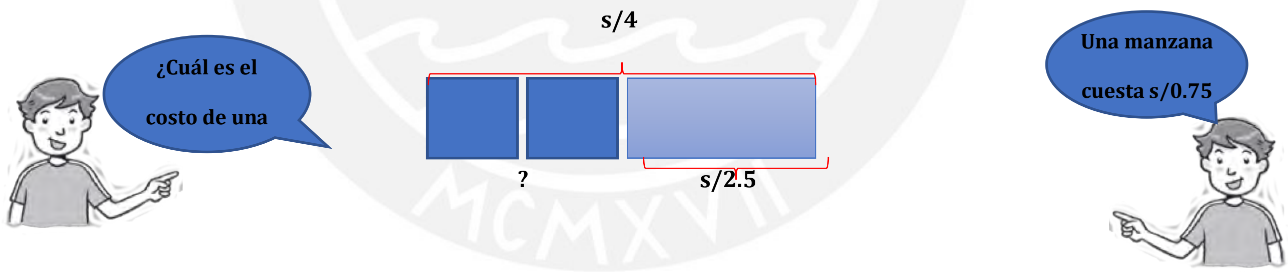


Figura 16. Representación de un problema por el método de barra.

Fuente. Libro método de barras (Yeap Ban Har ,2012).

Modelos de Comparación: Introducción

En situaciones que involucran modelos de comparación, una cantidad es comparada con otra. Veamos dos ejemplos de estas situaciones.

Representamos en la figura 17 dos problemas aritméticos de comparación, que se va a resolver por el método de barras.

Problema de las Conchas de Mar	Juan tiene 3 conchas de mar más que Susy. Juan y Susy tienen 15 conchas de mar en total. Encuentra el número de conchas de mar que tiene Juan.

Problema de Dinero	Dany tiene 3 veces más dinero que Mario. Dany y Mario tienen s/120 en total. Encuentra la cantidad de dinero que tiene Dany.

Figura 17. Problemas aritméticos para usar el método de comparación.

Fuente: Método de barras (Yeap Ban Har ,2012).

En el Problema de las Conchas de Mar, el número de conchas que tiene Juan se compara con el número de conchas que tiene Susy.

En el Problema de Dinero, el monto de dinero de Dany es comparado con la cantidad de dinero que tiene Mario.

Aquí, vemos que el primer problema es un ejemplo de comparación aditiva mientras que el segundo, es de comparación multiplicativa.

En la comparación aditiva, una cierta cantidad es mayor o menor que la otra.

La siguiente figura 18 se muestra la situación dónde B es 3 más que A.

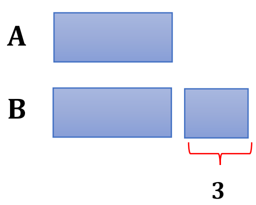


Figura 18. Representación de los datos de un problema de comparación.

Fuente: Elaboración propia.

En la comparación multiplicativa, una cantidad es cierto **número de veces** la otra cantidad.

En la siguiente figura 19 se hace una representación con el método de barras donde representamos la situación: B es 3 veces más que A.

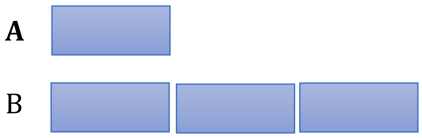


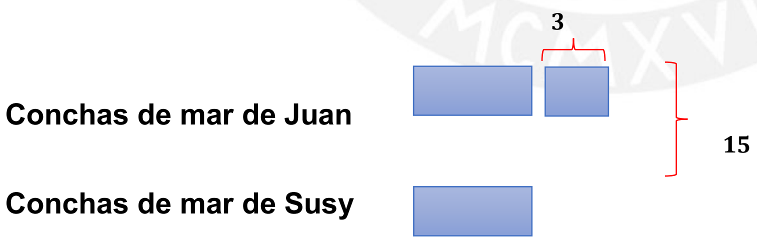
Figura 19. Representación de un problema de comparación.

Fuente: Elaboración propia.

Un error común que cometen los alumnos es malinterpretar “B es 3 más que A” y “B es 3 veces más que A”. El método modelo ayuda a los alumnos a abordar estos problemas. Resolveremos los dos problemas planteados por la técnica del modelo de barras.

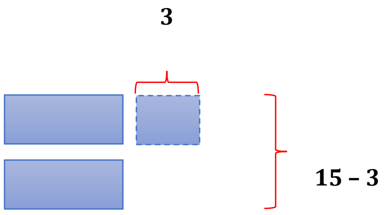
Ahora, resolvamos el Problema de las Conchas de Mar y el Problema de Dinero utilizando los modelos de comparación.

Este es el modelo de comparación básico para el Problema de las Conchas de Mar



Aquí hay dos formas de usar el modelo para encontrar el número de conchas de mar que tiene Juan.

Método 1



Conchas de Mar de Juan

Conchas de Mar de Susy

2 unidades = 15 – 3

2 unidades = 12

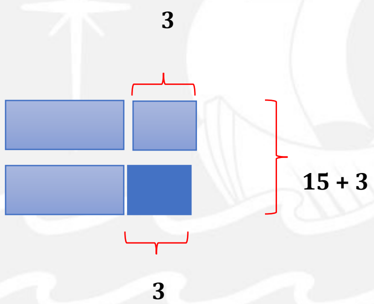
1 unidad = 12 ÷ 2 = 6

Susy tiene 6 conchas de mar.

Entonces, Juan tiene 9 conchas de mar.

Aquí  , es una unidad.

Método 2



Conchas de Mar de Juan

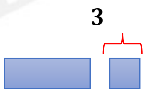
Conchas de Mar de Susy

2 unidades = 15 + 3

2 unidades = 18

1 unidad = 18 ÷ 2 = 9

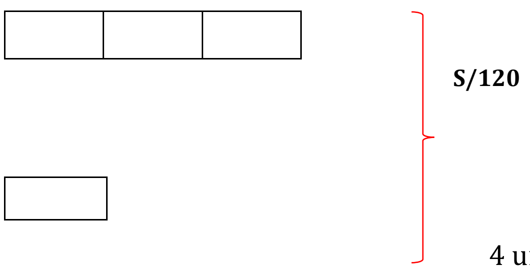
Juan tiene 9 conchas de mar.

Aquí. 

es una unidad.

Este es el modelo de comparación básico para el **Problema de Dinero** (pág. 97).

Danny



Mario

4 unidades = s/.120 , 1 unidad = s/.30

4.3 Resultados

Al abordar y plantear nuestro objetivo de investigación que es identificar una organización matemática de los problemas aritméticos abordados en una colección de textos de primaria que sigan el modelo del método Singapur, en este capítulo respondimos a las preguntas planteadas e identificamos el tipo de tareas , técnicas y tecnologías que forman parte de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en el denominado método Singapur , para plantear y sobre todo abordar este problema didáctico fue imprescindible tener como referencia el modelo epistemológico de referencia que describimos en el capítulo 3 , sabemos que este modelo es provisional y que dependerá de la investigación que se esté llevando a cabo, pero este MER me permitió “deconstruir ” y “ reconstruir ” la organización matemática que hemos presentado en el presente capitulo .

Después de presentar la descripción de la organización matemática de los problemas aritméticos en la serie de libros de primaria de la colección prime Mathematics (Singapur) de la editorial Scholastic podemos decir que la resolución de problemas en el eje central en la metodología de esta serie y que la resolución de los mismos se fundamenta en lo presentado por Polya (1957) y sus fases para la resolución de problemas. Identificamos 7 tareas y 20 subtareas.

Podemos concluir que la organización matemática de los problemas aritméticos propuestos por la serie de libros prime presenta tareas que se justifican en las técnicas propuestos en nuestro MER a excepción de la tarea 7 que es la única que no se encuentra en el modelo propuesto por la presente investigación.

Este tipo de tarea T_7 identificada en el libro presenta una tarea T_{71} que representa una tarea abierta no rutinaria que permite el uso de la técnica de resolución de problemas de Polya (1957), pero que puede ser solucionada con la técnica del ensayo error).

Podemos concluir que las 5 primeras tareas se refieren a la aplicación de las operaciones de suma y resta, tanto para tareas donde se tiene que resolver problemas aditivos de cambio, tareas para resolver problemas aditivos directos e inversos de composición y de cambio, tareas para resolver problemas aditivos de composición para llegar a los problemas aditivos simples y combinados, esto nos muestra una presentación de las tareas en orden creciente, donde las tareas se van complejizando.

En la tabla 11 que mostramos a continuación se observa la frecuencia de las tareas que corresponden al tipo de tareas T_1 en la colección de libros didácticos Prime Mathematics de primer a cuarto grado de primaria.

Tabla 11 Cantidad de tareas correspondientes al tipo de tarea T_1

Nivel		T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	Problemas resueltos	Problemas propuestos	To tal
1° grado.	TE 1	7	4	4	5	10	10	20
2° grado.	TE 2	5	4	3	4	10	6	16
3° grado.	TE 3	2	2	3	2	8	1	9
4° grado.	TE 4	1	0	0	0	1	0	0
5° grado.	TE 5	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		15	10	10	11	29	17	45

Fuente: Elaboración propia

La tarea T_{11} es la de mayor frecuencia en la colección de libros didácticos analizados, además podemos observar una distribución proporcionada en la cantidad de problemas que comprenden las tareas T_{12}(10), T_{13}(10) y T_{14} (11)

La Tarea T_{11} la identificamos en los libros de 1º, 2º, 3º y 4º de educación primaria.

La tarea T_{12} la identificamos en los libros de 1º, 2º y 3º de educación primaria.

La tarea T_{13} la identificamos en los libros de 1º, 2º y 3º de educación primaria.

La tarea T_{14} la identificamos en los libros 1º, 2º y 3º de educación primaria.

El alcance de las técnicas identificadas es satisfactorio, permiten hacer las tareas que conforman el tipo T_1, las técnicas τ_{111}, τ_{121}, τ_{131} y τ_{141} se integran a las técnicas de los tipos de tareas que conforman el género de tareas de problemas aditivos de cambio.

Podemos concluir que las técnicas ($\tau111$), ($\tau112$), ($\tau113$) y ($\tau114$) están ordenadas de manera creciente en orden de complejidad , pero esto nos da un resultado importante ya todas parten de la técnica ($\tau111$) que es la más general , y analizando las tareas propuestas podemos concluir que la técnica ($\tau113$) y ($\tau114$) dependiendo de la situación problemática , cada una es más eficiente en su respectiva tarea .

Las técnicas (τ_{211}) y (τ_{212}) son métodos parecidos y se usan en cada tipo de tareas que se presentan , se pueden intercalar sin perder la solución de la tarea planteada pero cada muestra mayor eficacia en el tipo de tarea que se analizó.

En la técnica (τ_{311}), podemos ver que generaliza las técnicas (τ_{211}) y (τ_{212}) y la presenta ahora para las tareas de manera indistinta para las tareas de suma y resta. Entonces la técnica (τ_{311}) será más eficaz y pertinente en las tareas planteadas de diferencia.

Las técnicas asociadas a la tarea T_4 están graduadas de menor a mayor complejidad, partiendo de la estructura del sistema numérico decimal para después calcular sumas y restas utilizando descomposiciones canónicas. Llegamos a encontrar las técnicas (τ_{431}) y (τ_{441}), donde se aplica el algoritmo convencional tanto para las operaciones de adición y diferencia.

Las técnicas (τ_{511}), (τ_{512}) y (τ_{513}) son las mismas y se sustenta en el método de resolución de problemas de Polya (1957). Si bien todas las técnicas antes mencionadas son presentadas en los libros de texto de manera secuencial , tienen en su aplicación las 4 fases que presenta Polya en su método; este resultado es muy importante ya que siguiendo la secuencia de tareas y técnicas podemos concluir que los problemas se presentan primero para que el estudiante pueda manipular material concreto , esto le va a permitir esquematizar el problema y pasar al nivel pictórico donde puede representar las técnicas antes mencionadas , para que finalmente pueda llegar al nivel abstracto donde podrá se le presenta los conceptos y necesariamente este es el camino que debe seguir un estudiante y a través de la presentación de la organización matemática planteada se puede visualizar lo que en Singapur llaman el método CPA (concreto, pictórico y abstracto).

En las técnicas asociadas a la tarea T_6 podemos concluir que están ordenadas de manera creciente de complejidad. donde se inicia con técnicas que se basan en presentar la multiplicación con sumas reiteradas, presentando las tareas primero manipulativas en material concreto y de la misma manera asociar la división con restas reiteradas, siendo las técnicas (τ_{612}) y (τ_{612})* técnicas similares para la ejecución de las situaciones problemáticas planteadas en la tarea T_{612} que son de reparto equitativo , para finalmente las técnicas evolucionen para presentar al algoritmo de la división y la definición de la división partitiva ,llegando a las técnicas (τ_{616}) y (τ_{616})* técnicas diferentes para el tipo de tarea T_{616} que viene a ser los que presentan actividades de proporción directa y de reparto equitativo.

CAPÍTULO 5. Consideraciones Finales

- La elección de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) como marco teórico y metodológico ha sido pertinente para esta investigación, dado que los elementos teóricos y metodológicos que hemos utilizado para poder responder al objetivo general ofrecieron el soporte teórico para entender qué tipo de tareas, técnicas y tecnologías forman parte de las practicas matemáticas que se llevan a cabo en el denominado método Singapur. Para ello, hemos realizado un análisis ecológico y praxeologico de los problemas aritméticos en los libros didácticos Prime Mathematics editados con autorización del ministerio de educación de Singapur.
- En lo referente a nuestro objetivo general, que es identificar una organización matemática de los problemas aritméticos abordados en una colección de textos de primaria que siguen el modelo del método Singapur, se ha podido cumplir con el objetivo propuesto en nuestra propuesta metodológica nos planteamos tres objetivos específicos:
- El primer objetivo específico fue identificar el rol que cumplen los problemas aritméticos en la propuesta de la TAD y su relación con la postura que esta teoría presenta sobre el álgebra como herramienta modelizadora. Así pues, nuestro modelo epistemológico de referencia lo construimos después de hacer un estudio de la definición de los problemas aritméticos y construir una clasificación de estos para delimitar el ámbito matemático. Esto se construye tomando trabajos previos de la comunidad de investigadores de la didáctica de la matemática y no de una propuesta de un investigador aislado. Este estudio nos permitió dar criterios para la determinación y elección de nuestro Modelo epistemológico de referencia, considerando además las reflexiones y conclusiones de los trabajos de referencia de nuestra investigación.
- El segundo objetivo específico fue reconstruir una praxeologia matemática en torno a los problemas aritméticos presentes en una colección de libros didácticos de la editorial

Prime Mathematics de Singapur. Para cumplir dicho objetivo, tomamos en consideración aspectos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de allí que tomando como referencia el modelo epistemológico de referencia MER para la organización de los problemas del campo aritmético presentado en el estudio de la dimensión epistemológica, donde se hizo una clasificación de los problemas aditivos, multiplicativos, y el campo aritmético que es el conjunto de todos los problemas aditivos y multiplicativos. Siguiendo la metodología de la investigación, en base a la TAD, no solo se trata de clasificar los problemas como se presentan en los libros especializados de aritmética, sino que hay que considerar las técnicas asociadas y las representaciones, las tareas matemáticas asociadas a los tipos de problemas, las tecnologías como aparecen las propiedades y los aspectos teóricos.

- En la reconstrucción de una praxeologia matemática en torno a los problemas aritméticos identificamos 6 tipos de tarea (Ti: Es el tipo de tarea i) , 12 tarea (tij: Es la tarea j del tipo de tarea Ti) , 20 técnicas (τijk: Es la técnica; donde i corresponde al tipo de tarea, j corresponde al número de tarea y k indica el número de técnica de la tarea j) y el bloque tecnológico – teórico que justifica las técnicas dentro de la teoría del cuerpo conmutativo ordenado (R, +, x). Se encontró una técnica particular en los libros de la metodología Singapur que es la del método de barras.
- Respecto al nivel de la praxeologia matemática, afirmamos que la praxeologia matemática reconstruida en un conjunto de praxeologías matemáticas puntuales integradas de manera parcial a través de la ampliación de las técnicas, ya que está conformada por 6 tipos de tareas.
- En lo referente al análisis de la metodología propuesta en Singapur, son pocas las investigaciones en educación matemática donde el foco de atención es reconstruir una organización matemática y didáctica de los problemas aritméticos en los libros con esta

metodología, este trabajo apunta a ser referente para el análisis de una organización matemática de los problemas aritméticos.

- Al reconstruir una organización matemática de los libros con la metodología Singapur y después de analizar las técnicas que utilizan para resolver problemas aritméticos, llegamos a la conclusión que el estudiante de primaria debe desarrollar la capacidad de resolver problemas matemáticos y esto implica contar con métodos pedagógicos orientados a dicho fin. El Método Singapur, para promover habilidades en la resolución de problemas matemáticos, se basa en el enfoque CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto). Así, el problema aritmético, al ser modelado por el método de barras, ayuda a los estudiantes a que puedan visualizar las situaciones involucradas. Por lo tanto, son capaces de construir una frase numérica que las represente. Adicionalmente, para un alumno, el método de barras también es una forma de representar el problema y lo ayuda a profundizar la comprensión de las operaciones que deben utilizar para resolver los problemas:

- El problema aritmético, al ser modelado por el método de barras, ayuda a los estudiantes a que puedan visualizar las situaciones involucradas, por lo tanto, son capaces de construir una frase numérica que las represente. Adicionalmente para un alumno el método de barras también es una forma de representar el problema y lo ayuda a profundizar la comprensión de las operaciones que deben utilizar para resolver los problemas:

- Se puede concluir que en la organización matemática de los problemas aritméticos reconstruida en los libros de primaria con la metodología de Singapur , su principal característica es sentar las bases en primaria para poder desarrollar una matemática significativa, que los alumnos adquieran los conceptos y habilidades matemáticas que les permitan desarrollar habilidades de pensamiento, razonamiento, comunicación, aplicación y metacognitivas a través de un enfoque matemático para la resolución de problemas y que desarrollen confianza en el uso de las matemáticas y aprecie su valor al tomar decisiones informadas en la vida real.

- El Currículo de Singapur de matemática en primaria (2012) está organizado en espiral, lo que significa que un contenido no se agota en una única oportunidad de aprendizaje, sino que el estudiante tiene varias oportunidades para estudiar un concepto. Las actividades que se plantean tienen una variación sistemática en el nivel de complejidad. De tal forma que se establecen secuencias de actividades en las que se desarrollan estrategias de solución de forma progresiva.

- La matemática se construye de manera jerárquica. Los conceptos y habilidades superiores se basan en los más fundamentales y deben aprenderse en secuencia, esa es la idea de poder plantear un currículo en matemática, en Singapur se adopta un enfoque espiral en la creación de contenido en todos los niveles (Ministerio de Educación de Singapur).

- En un futuro trabajo nos plantearemos la construcción de una organización didáctica de los problemas aritméticos para hacer un análisis de las OD presentes en los libros de matemática de Singapur, tomando en consideración el MER planteado en la presente investigación.

- Para una futura investigación pretendo delimitar el alcance del método Singapur para la resolución de problemas aritméticos propuestos en el currículo nacional del Perú y para este futuro trabajo estudiaremos el currículo de matemática de nivel primaria, este documento es usado como fundamento de la práctica pedagógica en todas las escuelas del Perú, observamos que los problemas aritméticos en el actual currículo de matemática del Perú lo encontramos en la competencia de resuelve problemas de cantidad.

- Se añade, también, para un futuro trabajo de investigación un análisis y comparación del currículo de matemática de Singapur con el currículo de matemática del Perú en primaria. El sistema educativo de Singapur se ha caracterizado por ser centralizado y normalizado, con una alineación burocrática (Sharpe y Gopinathan, 2002, citados en Ratnam, 2019). En Singapur, el Ministerio de Educación pública el programa de estudios de todas las materias que se imparten en las escuelas. Estos planes de estudio contienen los resultados deseados, detallando el contenido, las habilidades y los valores de cada tema.

REFERENCIAS

Alexándrova, N.V. (2015). *Diccionario histórico de notaciones, términos y conceptos.* KRASAND.

Almouloud, S. (2015). Teoría antropológica didáctica: metodología de análisis de materias didácticos. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 9-34. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de https://goo.gl/n4GTNs

Álvarez, V. (2016). *Análisis de la organización matemática de los números racionales en un texto de primero de secundaria*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/8071

Artigue, M. & Mariotti, M. (2014). Networking theoretical frames: The ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 329-355. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de la base de datos Advanced Placement Source de EBSCO, DOI: 10.1007/s10649-013-9522-2

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de la base de datos Advanced Placement Source de EBSCO, DOI: 10.1007/s10649-005-5889-z

Barbé, J., Espinoza, L., González, E., & Mitrovich, D. (2006). *Estudiando problemas aditivos simples y combinados: Guía didáctica. Educación matemática. Tercer año básico. Tercera unidad didáctica*. Chile : Ministerio de Educación. Recuperado el 10 de octubre de 2020, de https://www.yumpu.com/es/document/view/43894165/estudiando-problemas-aditivos-simples-y-combinados-clases-

Bashmakova, I.G. (2019). *Diofanto y las ecuaciones diofánticas*. KRASAND.

Bastías, A., Olea, D. & Trincado, N. (2015). *Efectividad del método Singapur en el desempeño académico de los estudiantes de cuarto año básico en la asignatura de educación matemática*. Tesis para optar el título de Profesor en Educación General Básica. Facultad de Educación, Universidad Andrés Bello, Santiago de Chile. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://repositorio.unab.cl/xmlui/handle/ria/6390

Birger, F., Lee, S.K., Goh, C.B. & Tan, J.P. (2012). *Hacia un futuro mejor: educación y formación para el desarrollo económico de Singapur Desde 1965.* Santiago de Chile: Banco Mundial. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1596/978-9-5683-0406-5

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España. Recuperado el 11 de julio de 2020, de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Tesis-Pilar.pdf

Bosch Casabò, M. (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los 'instrumentos de representación' en la actividad matemática. En *IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Comp.) (pp. 15-28). Huelva. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://hdl.handle.net/11162/47884

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf

Bosch, M., Gascón, J. & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 39-52. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de la base de datos Advanced Placement Source de EBSCO, DOI: 10.1007/s10649-016-9734-3

Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/1547

Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana,* (59), 8-15. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/publication/325132822

Castela, C. (2019). *Un enfoque ecológico de lo didáctico* [diapositiva]. Lima: PUCP. 39 diapositivas. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2019/08/Conference_ecologie_Castela.pdf

Castro, E. et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática: primer encuentro, 12 y 13 de septiembre de 1997, Zamora* (pp. 63-76). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado el 11 de octubre de 2020, de http://funes.uniandes.edu.co/1467/1/Castro1998Problemas_SEIEM_64.pdf

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Apports de la théorie anthropologique, Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils et connaissances d'action*, 771-790. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/profile/Hamid_Chaachoua/publication/281328986_L'analyse_des_manuels_dans_l'approche_anthropologique/links/5de2b7f5a6fdcc2837faa52a/Lanalyse-des-manuels-dans-lapproche-anthropologique.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Editorial Horsori, Universitat de Barcelona. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://curriculares.files.wordpress.com/2011/09/el_eslabon_perdido.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires: AIQUE. Recuperado el 13 junio de 2020, de https://eva.udelar.edu.uy/mod/resource/view.php?id=297372

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.ing.unp.edu.ar/asignaturas/algebra/chavallard_tad.pdf

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* (pp. 21-30). Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.mathematik.unidortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_2_Plenaries.pdf#page=3

Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/cockcroft1982.html

Delgado, M., Mayta, E. & Alfaro, M. (2018). *Efectividad del "Método Singapur" en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes del tercer grado de primaria de una institución educativa privada del distrito de Villa El Salvador*. Tesis para optar el grado de Magíster en Magister en Educación con mención en Dificultades de Aprendizaje. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13335

Depman, I.I. (2008). *Del álgebra clásica al álgebra moderna: una breve introducción histórica*. URSS.

Ertl, H.A. (2014). *An Analysis and Comparison of the Common Core State Standards for Mathematics and the Singapore Mathematics Curriculum Framework*. Thesis submited in Partial Fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science in Mathematics. The University of Winsconsin-Milwaukee. Recuperado el 30 de junio de 2020, de https://dc.uwm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1407&context=etd

Espinoza, A. & Villalobos, A. (2016). *El Método Singapur en el aprendizaje de las ecuaciones lineales de primer grado: Una propuesta metodológica para la enseñanza de la matemática*. Tesis para optar el título de Profesor de Educación Media en Educación Matemática. Facultad de Educación y Humanidades, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1810/1/Villalobos_Valdes_Ana.pdf

Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes, J. & Márquez, F. (2016). Qué y cuánto aprenden de matemáticas los estudiantes de básica con el Método Singapur: evaluación de impacto y de factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la brecha de género. *Calidad en la Educación, (45)*, 90-131. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: http://dx.doi.org/10.4067/S0718-45652016000200004

Fonseca, C. & Gascón, J. (2000). *Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria*. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huelva/Fonseca_Gascon.doc

Fonseca, C., Gascón, J. & Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 17*(3),289-318. Recuperado el 30 de junio de 2020, de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33532494003

Fridman L.M. (2011). *¿Qué es la Matemática?* KRASAND.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (15)* 75-94. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación matemática, 6*(03), 37-51.

Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de la matemática. En *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Comp.) (pp. 129-150). Valladolid. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2746544.pdf

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico el caso del Álgebra Elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1* (2) 203-231. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.redalyc.org/pdf/335/33519238004.pdf

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 26*, 99-123. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5987192

Goh, C.B. & Gopinathan, S. (2012). El desarrollo de la educación en Singapur desde 1965. En *Hacia un futuro mejor: educación y formación para el desarrollo económico de Singapur desde 1965* (pp. 37-70). Santiago de Chile: Banco Mundial. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1596/978-9-5683-0406-5

Goh, C.B., & Lee, S.K. (2012). Pertinencia y adecuación para la formación de profesores. En *Hacia un futuro mejor: educación y formación para el desarrollo económico de Singapur desde 1965* (pp. 147-170). Santiago de Chile: Banco Mundial. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1596/978-9-5683-0406-5

Gómez, A. (2018). *Análisis de una praxeología matemática de las inecuaciones lineales en los libros didácticos de educación secundaria*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13586

Gómez, L. (2011). Un espacio para la investigación documental: a space for research documentary. *Revista Vanguardia Psicológica, 1*(2), 226-233. Recuperado el 30 de junio de 2020, de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4815129.pdf

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción: en un texto universitario*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/5225

Gonzales, C. & Najarro, L. (2018). Características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en textos de educación secundaria. En *Actas del IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (Comp.) (pp. 15-28). Huancavelica: PUCP. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/publication/327822975_Caracteristicas_del_modelo_epistemologico_dominante_de_la_proporcionalidad_en_textos_de_educacion_secundaria

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Ho, S. Y., Lee, S., & Yap, B. H. (2000). Children posing word problems during a paper-and-pencil test: Relationship between achievement and problem posing ability. *ERA-AME-AMIC Joint Conference, Singapore*, 598-604. Recuperado el 17 de abril de 2020, de http://hdl.handle.net/10497/15298

Hoong, A. W. (2012). La historia de la creación de textos escolares en Singapur de 1965 a 1997: cómo satisfacer las necesidades del cambio curricular. En *Hacia un futuro mejor: educación y formación para el desarrollo económico de Singapur desde 1965* (pp. 111-146). Santiago de Chile: Banco Mundial. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1596/978-9-5683-0406-5

Josep, G. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(2), 203-231. Recuperado en 24 de mayo de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004&lng=es&tlng=es

Juárez, M. & Aguilar, M. (2018). El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en primaria. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (98), 75-86. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6516524

Lara, M. (2013). *El uso del método de Singapur y su incidencia en la resolución de adiciones y sustracciones sin reagrupación con material concreto gráfico y simbólico en los niños de segundo año de básica del centro educativo particular "Iberoamérica" de la ciudad de Ambato*. Tesis para optar el título de Licenciada en Ciencias de la Educación. Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Universidad Técnica de Ambato, Ambato, Ecuador. Recuperado el 16 de abril de 2020, de https://repositorio.uta.edu.ec/jspui/handle/123456789/6207

Leinwand, S. & Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore math. *Educational leadership: journal of the Department of Supervision and Curriculum Development, N.E.A., 65*(3), 32-36. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/nov07/vol65/num03/Learning-from-Singapore-Math.aspx

Lim-Ratnam, C. (2019). Curriculum Leadership. In *School Leadership and Educational Change in Singapore* (pp. 31-49). Springer, Cham. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-74746-0

Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 1-21). Síntesis. Recuperado el 10 de octubre de 2020, de **https://personal.us.es/cmaza/maza/capitulo.PDF**

Mercado, C. (1972). *Historia de las matemáticas: época antigua*. Editorial Universitaria.

Morales Paredes, H. (2013). La teoría antropológica de la didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción. En *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (Comp.) (pp. 4518-4525). Montevideo. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/183.pdf

Moreira, M. A. (2002). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Consultado el 10 de octubre de 2020, de **https://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf**

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2015). *TIMSS 2015 International results in mathematics*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado el 30 junio de 2020, de http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ng, F. D. (2019). Instructional Leadership. En *School Leadership and Educational Change in Singapore* (pp. 7-30). Springer, Cham. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-74746-0

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40* (3), 282-313. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/publication/232472405

Ng, S. F. & Wong, B. (2019). Introduction: School Leadership and Educational Change in Singapore. In *School Leadership and Educational Change in Singapore* (pp. 1-6). Springer, Cham. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-74746-0

Otero, M., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V., Sureda, P. & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/publication/259287004

Perales Palacios, F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias, 11*(2), 170-178. Recuperadoel 30 junio de 2020, de https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Perales/publication/31891805_La_resolucion_de_problemas_una_revision_estructurada/links/586e5a9808ae6eb871bcfc5e/La-resolucion-de-problemas-una-revision-estructurada.pdf

Perú, Ministerio de Educación. (2016). Currículo Nacional de Educación Básica. Lima: MINEDU. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Perú, Ministerio de Educación. (2016). Programa Curricular de Educación Primaria. Lima: MINEDU. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-nivel-primaria-ebr.pdf

Perú, Ministerio de Educación. (2016). Programa Curricular de Educación Secundaria. Lima: MINEDU. Recuperado el 24 de mayo de 2020, de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/03062016-programa-nivel-secundaria-ebr.pdf

Popov G.N. (2011). *Historia de la matemática elemental en problemas.* KRASAND

Puig, L., & Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 8-10. Recuperado el 30 junio de 2020, de https://www.uv.es/puigl/acapulco90.pdf

Puig, L. & Cerdán, F. (1996). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.

Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Centro de Semiótica y Teoría de Espectáculo, Universitat de València & Asociación Vasca de Semiótica. Recuperado el 10 de octubre de 2020, de **https://www.uv.es/puigl/sm.pdf**

Quiroz Rivera, S., & Rodríguez Gallegos, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática, 27*(3), 45-79. Recuperado el 13 de junio de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262015000300045&lng=es&tlng=es

Ramos Alonso, P. (2019). *Aritmética para maestros: + ideas, - cuentas*. Recuperado el 30 junio de 2020, de http://www3.uah.es/pramos/Blog/Pdfs/Aritmetica-Maestros-Muestra.pdf

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Mir Moscú.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. *Investigación en Educación Matemática,* (14), 545-556. Recuperado el 30 junio de 2020, de http://funes.uniandes.edu.co/1716/1/365_2010Laalgebrizacion_SEIEM13.pdf

Ruiz-Higueras, L. & García, F. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana* *de Investigación en Matemática Educativa,14* (1), 41-70. Recuperado el 13 de junio de 2020, de https://www.researchgate.net/publication/262718531

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis Doctoral en Matemáticas. Departamento de Matemática, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Recuperado en 11 de julio de 2020, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. *Un panorama de la TAD, 10*, 743-765. Recuperado el 30 junio de 2020, de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/NoemiMariannaJosepCITAD-III-2011.pdf

Ruiz-Higueras,L; Estepa, A; & García. (2007). *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). Universidad de Jaén.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 1A*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 1B*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 2*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 3*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 4*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2016). *Prime Mathematics 5*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Scholastic Education International. (2017). *Prime Mathematics 6*. Singapur: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited.

Seong, D. N. F. (2012). La gestión estratégica del desarrollo educacional en Singapur (1965–2005). En *Hacia un futuro mejor: educación y formación para el desarrollo económico de Singapur desde 1965* (pp. 71-110). Santiago de Chile: Banco Mundial. Recuperado el 13 de noviembre de 2019, de DOI: https://doi.org/10.1596/978-9-5683-0406-5

Sierra Delgado, T. A. (2007). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral. Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 30 junio de 2020, de http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t29075.pdf

Singapore, Ministry of Education. (2012). *Mathematics syllabus: primary one to six*. Recuperado el 8 de mayo de 2020, de https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Critica.

Tiburcio, J. (2017). *Organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto de segundo año de educación secundaria*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/9444

Usiskin, Z. (2007). Do We Need National Standards with Teeth? *Educational Leadership, 65* (3), 38-42. Recuperado en 13 de junio de 2020, de https://eric.ed.gov/?id=EJ779285

Valentín, M. (2015). *Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto del tercer grado de educación primaria del Ministerio de Educación*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6567

Varella, M. (2010). *Prova e demonstração na Geometria Analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos*. Dissertação Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Recuperado el 30 junio de 2020, de https://tede.pucsp.br/handle/handle/10844

Verganud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3), 1-21. Recuperado el 10 de octubre de 2020, de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espanhol.pdf

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo Veintiuno de España.

Yeap, B. H. (2000). Types of mathematical problem posing tasks. *REACT*, (2), 30-34. Recuperado el 17 de abril de 2020, de http://hdl.handle.net/10497/3827

Yeap, B. H. (2002). *Relationship between children's mathematical word problem posing and grade level, problem-solving ability and task type*. Unpublished PhD dissertation, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore. Recuperado el 17 de abril de 2020, de https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/1642/3/YeapBanHar-PHD.html

Yeap, B. H. (2012). *Modelo de barras: una herramienta para la resolución de problemas*. Singapur: Marshall Cavendish International.