PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

IDENTIFICACIÓN DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE SECUNDARIA SOBRE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTORA

Lucy Smith Molina Tarazona

ASESORA

DRA. ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2021

DEDICATORIA

A mis padres Felipe y Mary

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Jehová Dios quien ha permitido que llegue a terminar con mis estudios, dándome la salud, la fortaleza y la calma necesarios para ello.

A mi asesora, Dra. Cecilia Gaita, por su apoyo constante desde un inicio. Sus conocimientos y pasión por la carrera han sido pieza fundamental para culminar con nuestra investigación.

A mis padres, Felipe Molina y Maricia Tarazona, quienes han sido de gran apoyo en toda mi carrera profesional.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de la Matemática, quienes me enseñaron a amar más mi carrera por la forma como se expresaban de ella y el incentivo que siempre mostraron por ampliar mis horizontes.

RESUMEN

Es ampliamente reconocido el papel que tiene el docente en el proceso de instrucción matemática. Ello ha llevado a la realización de diversos trabajos de investigación donde se describen los distintos conocimientos que este debe considerar en su enseñanza docente.

En este sentido, empleamos el modelo de conocimientos didáctico matemáticos (CDM) del enfoque ontosemiótico (EOS) para identificar algunos de tales conocimientos que permita al profesor de matemática potenciar su práctica docente. En particular, los que se relacionan a las funciones lineales y cuadráticas.

Será fundamental construir previamente un significado institucional de referencia para las funciones lineales y cuadráticas, puesto que a partir de ello caracterizaremos los conocimientos necesarios que los profesores deberían tener al enseñar el tema señalado.

Para ello, se consideran trabajos previos que identifiquen conocimientos didácticos matemáticos para facetas específicas como la epistémica y ecológica. Estos se complementan con un trabajo teórico de propuesta de conocimientos didácticos matemáticos para las facetas cognitivas, afectiva, mediacional e interaccional y se considerará una etapa experimental con maestros en ejercicio que permitirá validar o enriquecer la propuesta.

Posteriormente, se presenta una propuesta final de los conocimientos didácticos matemáticos del profesor de matemática al enseñar el tema señalado. De esta manera se espera contribuir en el campo de la Educación Matemática, particularmente en investigaciones que se enfocan en los conocimientos de profesores en formación.

ABSTRACT

The role of the teacher in the mathematics instruction process is widely recognized. Because of this, various research works have been conducted, which describe the different knowledge that the teacher must consider in their instruction.

Within this framework, we employ the Didactic- Mathematical Knowledge model (DMK model) of the Onto- Semiotic Approach (OSA) to identify said knowledges. Especially, those that corresponding to linear and quadratic functions. This will allow the mathematics teacher to enhance their teaching.

It is essential to previously plan an institutional meaning of reference for linear and quadratic functions because from this, we can identify the necessary knowledges that teachers must have when teaching the indicated topic.

Thus, previous research that identifies didactic- mathematical knowledge for specific facets such as epistemic and ecological facets considered. This is complemented with a theoretical proposal of didactic- mathematical knowledge for the cognitive, affective, mediational and interactional facets. In addition, an experimental part with practicing teachers will be considered, which will allow to validate or enrich the proposal.

Subsequently, a final proposal of the Didactic- Mathematical Knowledge of the mathematics teacher is presented when teaching the indicated topic. In this way it is tried to contribute to the field of Mathematics Education. Particularly, in research focused on the knowledge of teachers in training.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La labor del docente en el proceso de la enseñanza matemática ha sido el centro de diferentes investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática. Su interés, identificar los conocimientos del profesor de matemáticas en relación a un tema de contenido determinado. En nuestro caso, funciones lineales y cuadráticas en la educación de la secundaria peruana. Por tal razón, esta investigación tiene el objetivo de identificar estos conocimientos, en relación de las seis facetas propuestas por el modelo de conocimientos didácticos matemáticos, que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea lo más idónea posible.

Nuestra investigación consta de seis capítulos. El primero presenta algunas investigaciones que se asocian al interés que tienen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, considera algunas investigaciones que caracteriza los conocimientos didáctico matemáticos del profesor en las diferentes facetas propuesto por el modelo del conocimiento didáctico matemático. Por último, se presenta la justificación de la investigación en el contexto peruano y los objetivos propuestos.

En el segundo capítulo se describe los elementos teóricos que esta investigación emplea para caracterizar los conocimientos del profesor al enseñar funciones lineales y cuadráticas, que son propuestas por el modelo de conocimientos didáctico matemáticos. Este modelo nos permite categorizar e identificar los conocimientos en relación a un tema específico de enseñanza. Por último, se describe los procedimientos metodológicos que se sigue en la investigación para alcanzar los objetivos propuestos.

En el tercer capítulo, se describe la construcción de un significado de referencia institucional en relación a las funciones lineales y cuadráticas de la secundaria peruana. Para ello, se realizó un análisis minucioso de diferentes textos didácticos e investigaciones en didáctica matemática.

En el cuarto capítulo, se describe los conocimientos didácticos matemáticos de un profesor, con respecto a las funciones lineales y cuadráticas, identificados teóricamente. Para ello se tomó en cuenta el significado de referencia e investigaciones como la de Godino (2009) y Escudero (2017).

En el quinto capítulo, se caracteriza los conocimientos didáctico matemáticos sobre las funciones lineales y cuadráticas de profesores en ejercicio. Para ello, se aplicó un cuestionario a cuatro profesores; el análisis de sus respuestas permitió afinar algunos indicadores de conocimientos propuestos en el capítulo anterior y caracterizar otros.

Finalmente, en el sexto capítulo se propone los conocimientos didáctico matemáticos que permitirían al profesor potenciar su enseñanza en relación a las funciones lineales y cuadráticas. También realizamos algunas reflexiones de nuestro trabajo, su contribución en el campo de la didáctica matemática, en la formación de profesores y algunas limitaciones.

CAPÍTULO I: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo delimitamos el problema de nuestra investigación a partir de las diferentes investigaciones que abordan su interés en los conocimientos didáctico matemáticos del profesor en relación a un tema específico. Luego, presentamos argumentos que darán la base a nuestro tema de investigación en torno a un contexto determinado. En nuestro caso, la educación de la secundaria peruana con respecto al tema de funciones lineales y cuadráticas. Por último, planteamos la pregunta de investigación, el objetivo principal y los objetivos específicos.

1.1 Investigaciones previas relacionadas con los Conocimientos Didácticos Matemáticos (CDM) del profesor de matemática

Las investigaciones que presentamos a continuación están organizadas en dos grupos: investigaciones que se centran en el conocimiento del profesor de matemáticas en los diferentes modelos teóricos e investigaciones que se centran en caracterizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

En este primer grupo podemos considerar la investigación de Espinoza (2015), quien identifica el conocimiento especializado del profesor de matemática en relación al concepto función. En particular, se enfoca en reconocer descriptores para el conocimiento de los temas (KOT), los cuales se muestran en la Tabla 1. Esta caracterización se fundamenta en el análisis del contenido de textos escolares y el programa de estudio de 8vo básico de Chile, que corresponden a niños de 13 a 14 años de edad.

Tabla 1. *Indicadores para la KOT respecto a funciones*

Fenomenología	
• Conoce los distintos contextos donde aparece la función como variación	• Conoce los distintos significados de la función, como por ejemplo,

proporcional o cambio lineal. • Conoce los ámbitos numéricos donde son posibles trabajar en el nivel en que enseña.	correspondencia, proceso de entrada salida.
Propiedades y sus fundamentos	
• Conoce la propiedad de linealidad de una función. • Conoce la posición relativa de una recta en el plano con respecto a los ejes del sistema.	• Conoce el concepto de constante de proporcionalidad y la manera de utilizarlo en determinar la representación de la función.
Registro de representación	
• Conoce las representaciones de funciones en tablas de valores, así como su construcción. • Conoce el lenguaje natural como enunciado. • Conoce el lenguaje algebraico como una expresión algebraica y=f(x) o ecuación funcional. • Conoce la representación de función como diagrama sagital. • Conoce la representación de función como conjunto de par ordenado.	• Conoce la representatividad de la función en material concreto como geoplano o con software educativo. • Conoce la representación de función en el plano cartesiano como conjunto de puntos. • Conoce la representación más adecuada dependiendo de la situación que se plantea. • Reconoce las diferencias entre la representación de una relación funcional de una no funcional.
Definiciones y Procedimientos	
• Conoce la definición de función. • Establecer criterios para decidir si un ejemplo o situación corresponde a una función.	• Domina la evaluación de expresiones algebraicas. • Domina la ubicación de los puntos en el plano.

Fuente: Espinoza (2015, p. 5)

Debemos resaltar que Espinoza (2015) considera estos indicadores como universales, pero no exhaustivos. Por ello, existe la posibilidad de ampliar tal investigación empleando diferentes herramientas teóricas. Nosotros utilizaremos el enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Enseñanza para profundizar dicho análisis extendiéndolo a las funciones lineales y cuadráticas.

Asimismo, la investigación de Rodríguez, Picado, Espinoza y Rojas (2018) se centra en describir y caracterizar el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de nivel secundario al enseñar el tema de función. Para ello emplea el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza que enmarca la diferencia entre dos dominios del conocimiento, conocimiento del contenido matemático y conocimiento pedagógico del contenido. Cada uno de ellos comprende tres subdominios. El primero, el conocimiento común, conocimiento especializado y el conocimiento ampliado, refiriendo a los conocimientos que debe tener el docente al enseñar un tema específico. Y el segundo, el conocimiento matemático en relación con el aprendizaje, el conocimiento matemático en relación con la enseñanza y el conocimiento curricular

Analizan el grado del lenguaje matemático que se emplea en el proceso de enseñanza, así como los diferentes sistemas de representación y sus relaciones entre sí, la variedad de significados de un mismo concepto que el docente presenta en su discurso, entre otros aspectos. Ello evidencia un conocimiento especializado de los conceptos básicos de la función del docente si emplea los conocimientos mencionados anteriormente y los articula entre sí.

Bajo los indicadores que se establecieron, los resultados muestran que el contenido especializado del docente fue de alto nivel, a pesar de que la enseñanza se dio de manera tradicional. Pero, también se puso en evidencia que las respuestas que proporciona el profesor no responden ante una variedad, las que destacan: variedad de contexto, variedad de significados, riqueza de respuestas, relación de las tareas, significados y contextos. De ello se desprende la necesidad de sumar al conocimiento del profesor otras herramientas que le permitirán lograr una enseñanza más sólida y efectiva. Las herramientas teóricas del EOS nos brindará la guía necesaria para cubrir esta necesidad.

En el segundo grupo de investigaciones se han organizado los trabajos sobre los conocimientos didácticos matemáticos desde el EOS. Así, en el trabajo de Godino (2009), se afirma que existe un consenso general en cuanto al dominio que los docentes deben poseer en relación a los contenidos disciplinares. Sin embargo, no existe un único procedimiento global en la forma cómo un profesor pone en juego sus conocimientos, competencias, etc., para favorecer el aprendizaje de sus alumnos. Por ello, presenta indicadores que son ítems de evaluación o propuestas de actividades en relación al conocimiento matemático-didáctico del profesor. Nosotros usaremos tales propuestas para diseñar actividades que nos permitan identificar los conocimientos didáctico matemáticos que debería tener el profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

Asimismo, Pino-Fan (2013) emplea estos indicadores para evaluar la faceta epistémica a un grupo de futuros profesores con respecto a un objeto matemático. Lo realiza mediante el diseño de un cuestionario de tipo cuantitativo, complementándose con entrevistas. Los resultados le permitieron conocer los conocimientos que los futuros docentes disponen y los que son necesarios para potenciar sus prácticas docentes.

Realizaremos algunas adaptaciones al modelo de evaluación desarrollado por Pino-Fan (2013). Primero, centrándonos en nuestro objeto matemático de estudio, funciones lineales y cuadráticas. Segundo, con el propósito de extender este análisis a las cinco facetas restantes propuestas por el EOS. Y, por último, diseñar un cuestionario de tipo cuantitativo que nos permita analizar, de forma minuciosa, los indicadores propuestos teóricamente.

Asimismo, Godino, Batanero, Cañadas y Contreras (2015) mencionan que, en la dialéctica entre la indagación y la transmisión de conocimiento en el aprendizaje de las matemáticas, el *diálogo* y la *cooperación* entre el profesor y los alumnos (y entre los propios alumnos), al resolver una situación-problema y el contenido matemático que aborda, es fundamental. Puesto que la transmisión del conocimiento se produce en estas etapas, gestionar momentos de exploración, comunicación, validación institucionalización sin adoptar posiciones extremas en el proceso, es una competencia clave para optimizar los aprendizajes.

Los autores señalan que el papel del docente como instructor y facilitador, y del estudiante como constructor activo de conocimiento y receptor de información supone una dialéctica compleja para optimizar el aprendizaje. Es así que, la forma en que una persona aprende algo depende de lo que tenga que aprender. Por ello, surge la necesidad de tener una guía que nos permita realizar un análisis del proceso de enseñanza que se activa, de modo que podamos identificar aspectos relevantes que contribuya a la mejora de la enseñanza.

Nuestra investigación realizará dicho análisis con la ayuda de las herramientas teóricas del EOS. Esta posee seis facetas, relacionadas al conocimiento del profesor, que abarca diferentes aspectos del proceso de enseñanza. Según este modelo, si seleccionamos un tema específico como las funciones lineales y cuadráticas, son diversos los conocimientos didáctico matemáticos que un profesor deberá tener.

En este sentido, Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) presentan un modelo de conocimiento didáctico-matemático (ver Fig. 1) conformado por diferentes facetas y componentes que se articulan entre sí. Se basa en la relación entre las prácticas matemáticas y los objetos que están involucrados en su realización, según el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática. Este modelo brinda indicadores para identificar los conocimientos necesarios que debe tener un profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas en las seis diferentes facetas señaladas en dicho modelo: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

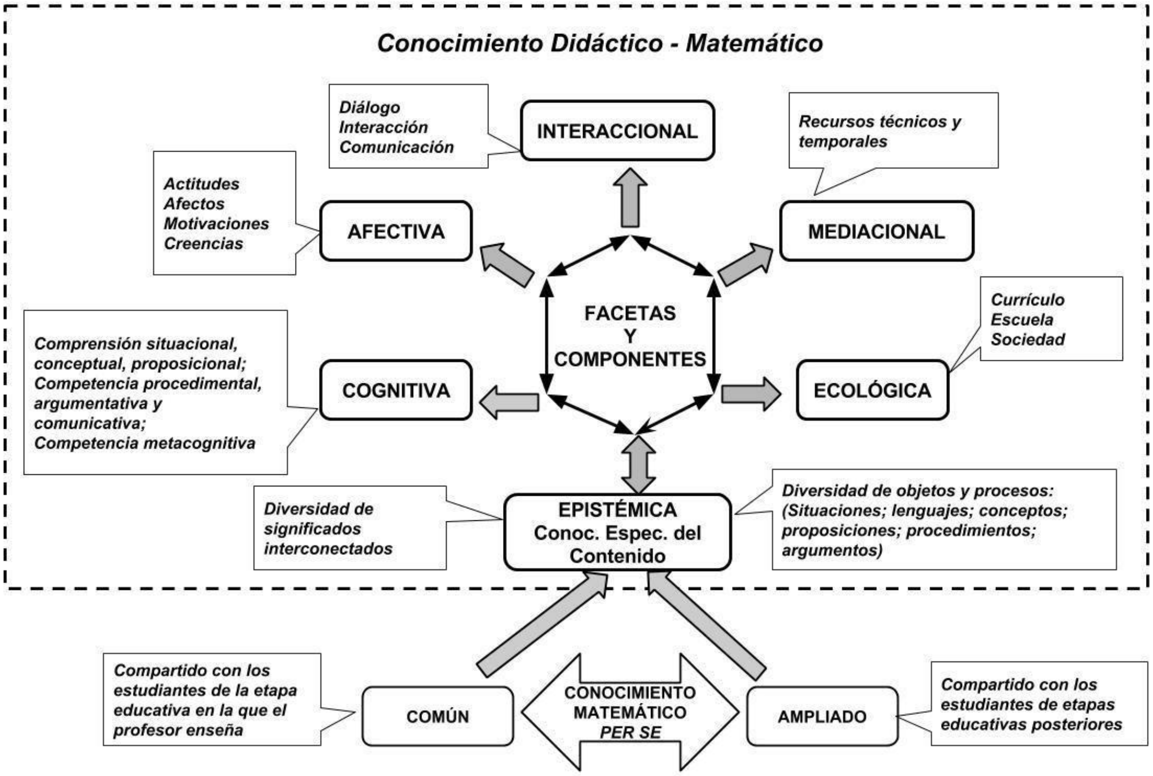


Figura 1. Facetas y componentes del conocimiento del profesor

Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

A diferencia del modelo presentado por Godino, Batanero, Cañada y Contreras (2015), este modelo categoriza los conocimientos didácticos matemáticos del profesor de tal modo que la identificación de los mismos sea más precisa y es el que usaremos para nuestro objetivo.

Por otro lado, investigaciones recientes también han centrado su interés en este campo. Por ejemplo, Oviedo y Pino-Fan (2017) señalan que el conocimiento de un profesor de matemáticas abarca diversos componentes adicionales. Uno de ellos, según su investigación, es emplear contextos extra matemáticos en las situaciones problema que se proponen con el propósito de establecer vínculos de lo que aprenden con otros contenidos matemáticos.

Caracterizar estas competencias y considerarlas como parte del desarrollo formativo del docente contribuirá en alcanzar una enseñanza idónea y favorecer a la gestión de los aprendizajes. Ello implica la necesidad de utilizar un sistema teórico apropiado, que contribuya a la identificación y la categorización de los conocimientos necesarios para la enseñanza. Consideramos que el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS) brindan herramientas para ello, de modo que lo emplearemos para nuestra investigación.

Como una aplicación del modelo teórico propuesto por el EOS, Escudero (2017) identifica los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de secundaria en relación a las funciones lineales y cuadráticas. Centra su atención en la faceta epistémica y presenta indicadores que muestran el conocimiento que debe tener el profesor de matemática tanto en el contenido algebraico como en el desarrollo del razonamiento algebraico. Construye un significado de referencia en base al lenguaje que emplea las diferentes situaciones problema encontrados, teniendo como referencia la configuración que propone la investigación de Godino, Wilhelmi y Bencomo (2014).

Para nuestra investigación tomaremos en cuenta las categorías propuestas en el trabajo anterior con el propósito de caracterizar los conocimientos didáctico matemáticos del profesor en relación al tema de funciones lineales y cuadráticas y la extenderemos a las cinco facetas restantes propuestas por el EOS: ecológica, mediacional, interaccional, afectiva y cognitiva.

Asimismo, la investigación de Goulart y Bisognin (2019) muestran que, en el proceso de enseñanza, la articulación entre la faceta epistémica y cognitiva es fundamental para la realización de una clase efectiva. Por ello, es el docente quien a través de su conocimiento didáctico-matemático debe emplear actividades, desde las más simples hasta las más complejas, que son de interés para los alumnos y que los incentive eficazmente. También, elegir métodos y recursos adecuados que permitan las interacciones en el proceso de enseñanza de forma idónea. Ello hace necesario suministrar herramientas adecuadas al docente para la movilización de tales recursos.

En la misma investigación, también se mostró la relevancia de los conocimientos de la faceta cognitiva, puesto que esta puede señalar las posibles dificultades que surgen en los estudiantes como, por ejemplo, un modelo de enseñanza que se fundamenta en la memorización. Ello supone determinar qué conocimientos matemáticos y didácticos debe poseer un profesor, para que su práctica docente sea la más idónea posible (Pino-Fan y Godino, 2015). Ante esta problemática, se requiere suministrar determinadas herramientas al profesor que contribuyan a centrar su atención es los aspectos más relevantes de la enseñanza matemática (Font, Breda, Seckel y Pino-Fan, 2018).

Por otro lado, Hummes, Font y Breda (2019) utilizan los criterios de idoneidad, presentados en la Figura 2 (por cuestiones de espacio solo presentaremos los indicadores que se refieren a la idoneidad epistémica) para valorar una clase, así como incentivar la reflexión de docentes en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de situaciones problemáticas.

Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Componentes	Descriptores
Idoneidad Epistémica	
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos

Figura 2. Criterios y componentes de idoneidad epistémica

Fuente: Adaptado de Breda y Lima (2016, p. 80)

La investigación dio a conocer que los profesores utilizan, implícitamente, algunos componentes de estos indicadores en su práctica docente, aunque no se les haya enseñado. Consideramos necesario incluir estos aspectos dentro de su formación, así como en capacitaciones de profesores en ejercicio (Morales y Font, 2017; Font, Breda, Seckel y Pino-Fan, 2018; Breda y Lima, 2016), de modo que se contribuya lograr una enseñanza adecuada y eficaz. Por tal razón incluiremos varios de estos aspectos al construir actividades que permitan caracterizar los conocimientos didáctico matemáticos del profesor de matemática, puestos en juego, al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

Por último, también consideramos importante incluir investigaciones que abordan el significado del objeto matemático función, los que ayudarán a construir un significado de referencia con respecto a las funciones lineales y cuadráticas en la institución de formación de maestros de matemática de secundaria en el Perú.

En este grupo de trabajos consideramos investigaciones como la de Godino, Wilhelmi y Bencomo (2004) que propone de manera concisa el holo-significado o significado global del objeto función (Figura 3). Este tipo de estructura permite organizar el significado de referencia de un objeto matemático. En nuestro caso, funciones lineales y cuadráticas, con respecto a una institución determinada.

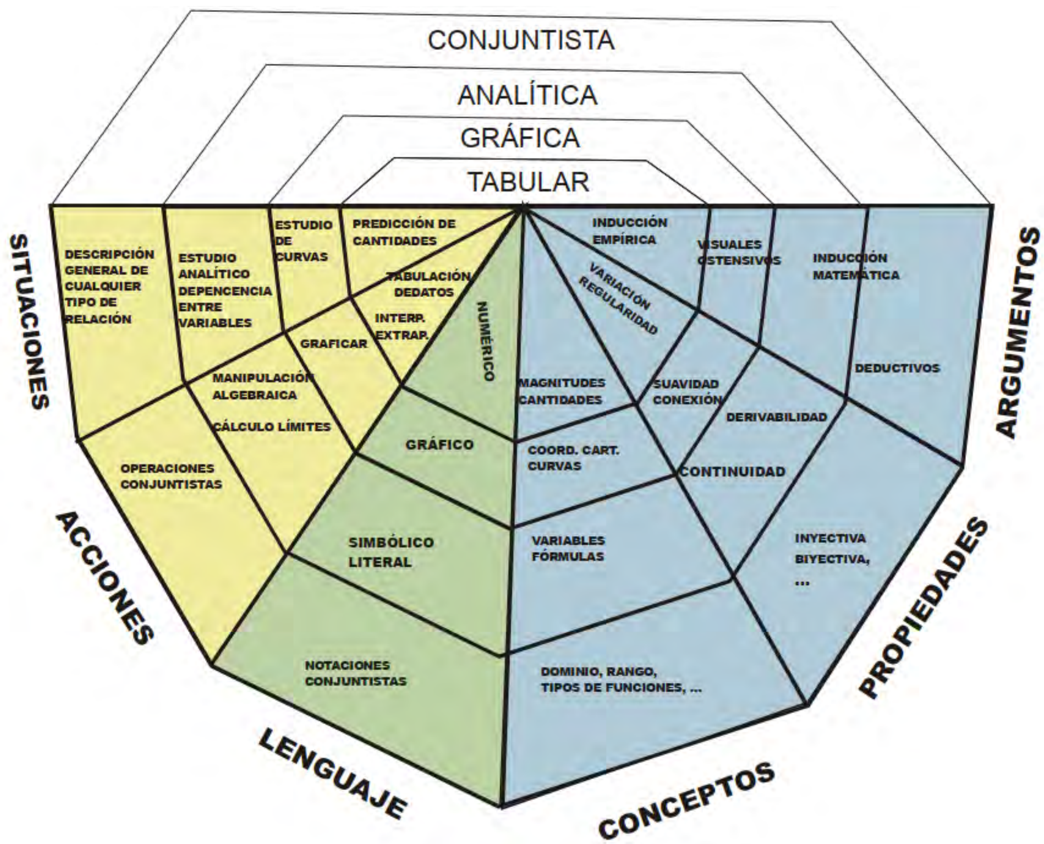


Figura 3. Holo-significado de la noción función

Fuente: Godino, Wilhelmi, Bencomo (2004, p. 7)

Como se puede ver en la Figura 3, esta estructura está conformado por cuatro tipos de configuraciones epistémicas, cada una de ellas caracterizada por objetos primarios específicos. Consideramos importante usar tales configuraciones porque nos permitirán identificar el significado que emerge en el proceso de instrucción, así como de la institución educativa involucrada. Así, organizar nuestro significado de referencia de la función lineal y cuadrática en la institución del nivel de educación secundaria.

Como parte de la construcción del significado de referencia se identificarán situaciones que a su vez permitirán hacer explícitos diversos conocimientos epistémicos y otros que formarán parte de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor ideales para realizar una clase idónea y los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática puestos en juego al enseñar funciones lineales y cuadráticas. Puesto que, como mencionan Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), es fundamental que el docente reconozca los objetos y procesos que envuelve una situación problemática determinada.

Asimismo, en la investigación de Parra, Y. (2015) se presenta de forma sistemática el significado holístico de la noción función de la siguiente manera:

1. **La función como correspondencia.**
   Referente a todo aquello que relaciona a los elementos de dos determinados conjuntos.
2. **La función como relación entre magnitudes.**
   Referente a la relación entre dos cantidades que varían (variable dependiente e independiente).
3. **La función como representación gráfica.**
   Establece la relación entre dos magnitudes por medio de una gráfica que caracteriza la dependencia entre ellas.
4. **La función como expresión analítica.**
   Referente al estudio de curvas.
5. **La función como correspondencia arbitraria.**
   Referente a las funciones como correspondencia de tipo más general.
6. **La función a partir de la teoría de conjuntos.**
   Referente a la teoría de conjuntos de Cantor.

Algunas categorías de esta propuesta también serán consideradas para organizar el significado de referencia institucional de las funciones lineales y cuadráticas que emergen en las situaciones abordadas por el profesor de matemáticas de secundaria en el Perú.

De las investigaciones señaladas, se reconoce el interés de la comunidad de investigaciones en didáctica de la matemática en profundizar diferentes aspectos del proceso de enseñanza del profesor de matemática con el propósito de realizar una clase más idónea que permita la apropiación de conocimientos por parte del alumno, a la vez que le permita construir nuevos conocimientos para el desarrollo de su formación académica.

1.2 Pertinencia de la investigación

A partir de las investigaciones de referencia que presentamos anteriormente, reconocemos que, según el CDM, el profesor debe tener diferentes conocimientos para llevar a cabo su labor profesional. En particular, en el contexto peruano, el sistema educativo demanda implícita y explícitamente que el docente posea conocimientos didáctico-matemáticos determinados para alcanzar los objetivos de enseñanza propuestos.

Por ejemplo, en el Currículo Nacional (Perú, 2016), que es un documento marco de política educativa que contiene los aprendizajes esperados de los estudiantes a lo largo de su formación básica, se establece el Perfil de egreso de los estudiantes de la Educación Básica, las competencias nacionales y sus progresos en todo el periodo de educación. También presenta los niveles que se espera que el estudiante alcance por ciclo, nivel y modalidades.

El Currículo Nacional (Perú, 2016) propone como meta de la Educación Básica desarrollar competencias en los estudiantes que les permitan responder a las demandas de nuestro tiempo y el docente es el encargado de guiar a los alumnos en ese caso, así como emplear la TIC (Tecnología de Información y Comunicación) en el proceso de enseñanza.

En este sentido, el programa de estudio que presenta este documento, específicamente en el área de matemática, aborda el tema de funciones. En particular, funciones lineales y cuadráticas y la resolución de problemas referente a estos esperando desarrollar determinadas capacidades y competencias. En el Currículo Nacional (Perú, 2016) se define competencia como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades (conocimientos, habilidades y actitudes) a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético. Según el mismo currículo, tales competencias deberían ser propiciadas por los docentes, las instituciones y los programas educativos.

La educación básica en el Perú está conformada por siete ciclos. Nos centraremos en los dos últimos porque corresponde al nivel de secundaria. Y el interés de nuestra investigación se enfoca en identificar los conocimientos didácticos matemáticos que permitan a un profesor, que pertenece a este nivel, potenciar su práctica docente, de ese modo, reducir la distancia entre lo que se pretende lograr y lo que se logra cuando se enseña funciones lineales y cuadráticas.

El Currículo Nacional (Perú, 2016) está conformado por veintinueve competencias, cuatro de ellas corresponden al área de matemáticas y están definidas en base a capacidades. Las competencias matemáticas son las siguientes:

- Resuelve problema de cantidad.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Es en la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", donde se identifica el tema de funciones, en particular, lineales y cuadrática, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2. *Competencia y capacidades asociadas a la función.*

Competencias	Capacidades
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio:	• **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** Concerniente a transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica que generalice la

Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para esto plantea ecuaciones, inecuaciones y **funciones**, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos.	interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada, con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión. • **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** Es decir, expresa su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, **funciones**, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones. • **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** Seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, **determinar dominios y rangos**, representar rectas, parábolas, y diversas funciones. • **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:** Es decir, elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 147)

Entre las necesidades que destaca la descripción del contenido “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” se encuentra reconocer patrones, realizar representaciones gráficas entre dos magnitudes cambiantes y comprobar supuestos matemáticos a través de herramientas matemáticas. Ello requiere adoptar un modelo referente al “conocimiento del profesor”, que este posea los conocimientos didáctico-matemáticos requeridos por el nivel educativo correspondiente (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013).

Asimismo, en el documento Perú, Ministerio de Educación (2016), se describen los niveles de aprendizaje asociados a la competencia mencionada en el nivel de secundaria. A continuación, en la Tabla 3, se ha identificado los párrafos en donde se hace referencia a las funciones lineales y cuadráticas.

Tabla 3. *Descripción de los niveles de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de equivalencia y cambio” asociados a funciones lineales y cuadráticas.*

Nivel	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
VI	Resuelve problemas referidos a **interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes**, **valores o entre expresiones**; **traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín y relaciones de proporcionalidad directa e inversa**. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. **Expresa su comprensión de la relación entre función lineal y proporcionalidad directa**, las diferencias entre una ecuación y una inecuación lineal y sus propiedades, la variable como un valor que cambia, el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación, las usa para interpretar resultados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. **Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética**, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y **evaluar funciones lineales**. **Plantea afirmaciones sobre propiedades** de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones, así como de una **función lineal, lineal afín** con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige.
VII	**Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas** que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y **funciones cuadráticas** y exponenciales, evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. **Expresa su comprensión** de la regla de formación de las sucesiones y progresiones geométricas, la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e

	inecuaciones, la **diferencia entre función lineal, cuadrática** y exponencial, y sus **parámetros, usándolas para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráfico.** **Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos** en progresiones geométricas, soluciones ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas, evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. **Plantea afirmaciones** sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplan entre expresiones algebraicas, así como **predecir el comportamiento de variables**, **comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas**.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 157)

De la tabla 3 se puede evidenciar implícita o explícitamente temas de estudio como, por ejemplo: proporciones directas e inversas, progresiones aritméticas, gráficas de funciones cuadráticas, modelación de funciones, análisis e interpretación de los mismos. De ello se desprende que, al establecer una relación entre la posición y término, y la forma cómo este se genera, se tendrá una regla de correspondencia que luego podrá evidenciarse como una función lineal o cuadrática. Así que, en el nivel de la secundaria peruana, esto deberá ser abordada como parte de la competencia “resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”.

Entonces, para que el alumno pueda desarrollar tales competencias exigidas por el Currículo Nacional (Perú, 2016), consideramos importante que el docente adquiera determinados conocimientos didáctico-matemáticos que le permita diseñar y valorar su práctica docente, gestionar secuencias de momentos de exploración, comunicación, validación e institucionalización, teniendo como consecuencia una mejora en su enseñanza (Godino, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015). El marco teórico que adoptamos en nuestra investigación nos permitirá analizar estos aspectos desde la faceta epistémica, ecológica y cognitiva, dentro de la institución secundaria peruana.

Dado la diversidad de aspectos que condicionan un proceso de enseñanza para el tema de funciones lineales y cuadráticas, se hace necesario que el conocimiento del docente no solo se limite a resolver las tareas propuestas a sus alumnos, sino que también identifique los conocimientos matemáticos que se ponen en juego cuando se realiza tales situaciones problemáticas (Godino, Gonzato, Fernández, 2010). Así, estos conocimientos contribuirán a que el docente desarrolle determinados criterios para la elección y diseño de tareas, prever posibles conflictos y considerar sus intervenciones en la sesión de clase.

De lo anterior podemos concluir que, para que el alumno se apropie del conocimiento enseñado en clase y lo emplee en diferentes situaciones problemas, se requiere que los docentes adquieran conocimientos específicos y consideramos que las herramientas proporcionadas por el marco teórico del EOS pueden contribuir a identificar tales conocimientos necesarios.

En esa misma línea y, ante la demanda del currículo del sistema educativo peruano de la Educación Básica, se han propuesto cambios en la formación inicial docente. Por tal razón, el Ministerio de Educación del Perú presentó un nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente. Este documento de política educativa presenta tanto el perfil de egreso del estudiante de Formación Inicial Docente (FID), las competencias profesionales docentes y sus niveles de progreso.

En relación al área de matemáticas para el nivel de secundaria de la Educación Básica Regular (EBR), el plan de estudios del Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN) consta de diez ciclos académicos. Contiene cursos y módulos organizados en tres componentes curriculares: formación general, formación específica y formación en la práctica e investigación. Su objetivo es formar docentes de matemática que promuevan el desarrollo de competencias específicas en sus alumnos y que reflexionen sobre su propia práctica docente a fin de mejorarla.

El Perfil de egreso de un estudiante de la FID está compuesto por cuatro dominios siguientes:

- Dominio 1: Preparación para el aprendizaje de los estudiantes.
- Dominio 2: Enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes
- Dominio 3: Participación en la gestión de la escuela articulada a la comunidad.
- Dominio 4: Desarrollo personal y de la profesionalidad e identidad del docente.

En particular, los dominios 1 y 2 especifican competencias del profesor que se relacionan con el contenido matemático, su aprendizaje y enseñanza. Por ello, presentamos brevemente la descripción de tales dominios, así como las competencias que tengan relación con el objetivo de nuestro estudio.

Dominio 1: preparación para el aprendizaje de los estudiantes

Este dominio tiene como uno de sus principios básicos la elaboración de un plan por competencias que articula de forma lógica los medios con los fines y plantea situaciones que exijan trabajar combinando diferentes capacidades.

Tabla 3. Competencia y capacidades del Dominio 1

DOMINIO 1: PREPARACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES	
COMPETENCIAS	CAPACIDADES
Competencia 1 Conoce y comprende las características de todos sus estudiantes y sus contextos, los contenidos disciplinares que enseña, los enfoques y procesos pedagógicos, con el propósito de promover capacidades de alto nivel y su formación integral.	Comprende las características individuales, evolutivas y socioculturales de sus estudiantes y sus contextos, así como la forma en que se desarrollan los aprendizajes.
	Comprende los conocimientos disciplinares que fundamentan las competencias del currículo vigente y sabe cómo promover su desarrollo.
Competencia 2 Planifica la enseñanza de forma colegiada, lo que garantiza la coherencia entre los aprendizajes que quiere lograr en sus estudiantes, el proceso pedagógico, el uso de los recursos disponibles y la evaluación en una programación curricular en permanente revisión.	Establece propósitos de aprendizaje y criterios de evaluación que están alineados a las expectativas de aprendizaje establecidas en el currículo, y que responden a las necesidades de aprendizaje y características de los estudiantes, así como a las demandas de su contexto sociocultural.
	Diseña planificaciones anuales, unidades/proyectos y sesiones en forma articulada, y se asegura de que los estudiantes tengan tiempo y oportunidades suficientes para desarrollar los aprendizajes previstos.

	Propone situaciones, estrategias y recursos de aprendizaje y evaluación que guardan coherencia con los propósitos de aprendizaje, y que tienen potencial para desafiar y motivar a los estudiantes.

Fuente: DCBN (2019, pág. 30)

De la Tabla 3 identificamos la necesidad de formar profesores capaces de movilizar su conocimiento común y ampliado, pero también capaces de movilizar diferentes representaciones de un objeto matemático, resolver tareas empleando diferentes procedimientos y relacionar el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que desarrolla su práctica docente o, de niveles anteriores o posteriores, tal como lo señalan también Pino-Fan y Godino (2015).

Dominio 2: enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes

La función de mediador que asume el docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje implica que desarrolle competencias específicas al abordar problemas que se sitúen en la realidad y que fomenten el interés del alumno.

De las competencias 3-5 que constituyen el dominio 2, describiremos brevemente las que tienen relación con el foco de nuestra investigación.

Tabla 4. *Competencias y capacidades del Dominio 2*

DOMINIO 2: ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES	
COMPETENCIAS	CAPACIDADES
Competencia 4 Conduce el proceso de enseñanza con dominio de los contenidos disciplinares y el uso de estrategias y recursos	Gestiona interacciones pedagógicas con el fin de facilitar la construcción de aprendizajes por parte de los estudiantes.
	Fomenta que los estudiantes comprendan el sentido de las actividades que realizan en el marco de propósitos de aprendizaje más amplios.

pertinentes para que todos los estudiantes aprendan de manera reflexiva y crítica lo que concierne a la solución de problemas relacionados con sus experiencias, intereses y contextos culturales.	Brinda apoyo pedagógico a los estudiantes de forma flexible para responder a sus necesidades y a situaciones inesperadas.
	Optimiza el uso del tiempo de modo que sea empleado principalmente en actividades que desarrollen los propósitos de aprendizaje.
Competencia 5 Evalúa permanentemente el aprendizaje de acuerdo con los objetivos institucionales previstos para tomar decisiones y retroalimentar a sus estudiantes y a la comunidad educativa, teniendo en cuenta las diferencias individuales y los diversos contextos culturales	Brinda apoyo pedagógico a los estudiantes de forma flexible para responder a sus necesidades y a situaciones inesperadas.
	Optimiza el uso del tiempo de modo que sea empleado principalmente en actividades que desarrollen los propósitos de aprendizaje.
	Involucra continuamente a los estudiantes en el proceso de evaluación.
	Usa una variedad de estrategias y tareas de evaluación acordes a las características de los estudiantes y pertinentes para recoger evidencias sobre los aprendizajes.
	Interpreta las evidencias de aprendizaje usando los criterios de evaluación y, a partir de ellas, toma decisiones sobre la enseñanza.
	Brinda retroalimentación oportuna y de calidad a los estudiantes.

Fuente: Adaptado de DCBN (2019, pág. 31)

Este tipo de competencias demandan que el profesor desarrolle las diferentes facetas de la teoría del EOS para un aprendizaje idóneo. Por ejemplo, las facetas cognitiva y afectiva promueven la reflexión sobre el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes. La unión de las facetas interaccional y mediacional contribuyen a la noción de conocimiento del contenido que refiere a la enseñanza. La faceta ecológica fomenta la reflexión y relación del conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares (Godino, 2009).

Tal como se describe en las Tablas 3 y 4, se destaca la necesidad de formar profesores que adquieran conocimientos necesarios para reflexionar y evaluar su propia práctica docente, así como para mejorar su enseñanza. En este sentido, tal como señala Godino (2011), la enseñanza de la matemática tiene en cuenta las directrices que brindan las instituciones locales para el proceso de instrucción, pero para que este sea lo más idóneo posible el docente debe poseer un conocimiento didáctico matemático, que le permita contribuir con flexibilidad, a que el alumno se enfrente a diversas situaciones que involucran un determinado objeto matemático. En nuestro caso, ese objeto serán las funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, las descripciones que presenta el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional con respecto a los cursos y módulos que ofrece muestra el propósito de desarrollar en los estudiantes de la FID la capacidad de realizar una reflexión crítica sobre su práctica docente y movilizar sus conocimientos con el objetivo de que los estudiantes de un nivel educativo determinado den sentido a las matemáticas y lo utilicen en diferentes ámbitos. Presentamos algunos de estos cursos que tienen relación con las funciones lineales y cuadráticas.

Tabla 5. *Características de un curso de formación específica 1*

<table>
<tr><td>Componente Curricular</td><td colspan="3">Formación Específica</td></tr>
<tr><td>Curso</td><td colspan="3">VARIACIÓN Y SUS FUNDAMENTOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA I</td></tr>
<tr><td>Ciclo</td><td>III</td><td>Competencias</td><td>1, 2, 11</td></tr>
<tr><td colspan="4">El curso tiene por propósito que los estudiantes de FID comprendan la variación y el cambio entre magnitudes y cómo desarrollan los estudiantes de EB su pensamiento variacional. Se examinan los procesos matemáticos que se llevan a cabo cuando los estudiantes de EB interpretan y representan relaciones de dependencia presentes en diferentes contextos, especialmente las que aparecen en las sucesiones; analizan la naturaleza del cambio; modelan situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones lineales, afines, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; y formulan y argumentan afirmaciones a partir de las relaciones encontradas. En ese proceso de aprendizaje, los estudiantes de FID profundizan en los conocimientos disciplinares asociados a las funciones señaladas y establecen conexiones entre dichos conceptos. Se estudian las principales dificultades que pueden presentarse durante el desarrollo del pensamiento variacional a partir de la lectura de investigaciones, y cómo se debe gestionar el error para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, especialmente cuando realizan transformaciones entre las distintas representaciones de una función. Se identifican fenómenos para ser estudiados mediante actividades o problemas que requieren la caracterización de la variación en diferentes contextos y se discute cómo planificar actividades y crear problemas que demanden la evolución del pensamiento variacional.</td></tr>
</table>

Algunos de los desempeños específicos que se esperan alcanzar al final del curso son los siguientes: • Resuelve situaciones problemáticas de la vida diaria asociadas a patrones, sucesiones, relaciones y funciones, identifica los conocimientos y procesos matemáticos involucrados en la solución, y analiza si es posible adaptar la situación a la EB. • Diseña experiencias de aprendizaje relacionadas con funciones lineales, afines, cuadráticas, entre otras, y propone una secuencia de actividades en las que los estudiantes de educación básica exploran soluciones o confrontan sus puntos de vista. • Utiliza tecnologías digitales para analizar la naturaleza del cambio y representar funciones lineales, afines, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, y justifica cómo dicha elección favorece el aprendizaje.

Fuente: DCBN (2019, p. 92)

Entonces, según la Tabla 5, se requiere movilizar los conocimientos específicos en cuanto a la utilización de herramientas tecnológicas y la modelización de funciones con el propósito de favorecer a la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas. Por ello, caracterizar conocimientos en relación a las facetas epistémica y mediacional, se hace necesario para alcanzar los objetivos propuestos.

Tabla 6. *Características de un curso en formación específica 2*

Componente Curricular	**Formación Específica**		
Curso	**ÁLGEBRA COMO HERRAMIENTA MODELIZADORA I**		
Ciclo	**IV**	**Competencias**	**1, 4, 5**
El curso tiene por propósito que los estudiantes de FID desarrollen en sus estudiantes de EB capacidades que permitan encontrar y analizar regularidades para que en forma progresiva identifiquen modelos y los formalicen. Para ello, propone actividades de aprendizaje, crea problemas y analiza evidencias de aprendizaje que estos recogen. Además, estudia los procesos matemáticos que se manifiestan cuando los estudiantes de EB interpretan y representan la regularidad existente en las sucesiones, establecen equivalencias entre expresiones algebraicas y las operan, así como cuando transforman las condiciones de una situación problemática en ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas, o en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y argumentan sus procedimientos. Profundiza en los contenidos disciplinares asociados a los conocimientos abordados y establece conexiones entre ellos, e identifica los fenómenos que pueden ser estudiados a través de problemas que requieren la construcción de nociones algebraicas. Investiga sobre la evolución del razonamiento algebraico y sobre las principales dificultades que pueden presentar los estudiantes de EB durante el aprendizaje de igualdades y desigualdades a partir del estudio de investigaciones y analizando evidencias de aprendizaje del estudiante de EB. Finalmente, reflexiona sobre la pertinencia de introducir			

el álgebra mediante actividades de modelización matemática para el desarrollo de las competencias. **Algunos de los desempeños específicos que se esperan alcanzar al final del curso son los siguientes:** • Resuelve situaciones problemáticas de la vida diaria asociadas al uso de diversas técnicas algebraicas con ecuaciones e inecuaciones, identifica los conocimientos y procesos matemáticos involucrados en la solución, y analiza si es posible adaptar la situación a la EB. • Desarrolla actividades de aprendizaje para la construcción de modelos usando expresiones algebraicas y brindando oportunidades para que los estudiantes elaboren sus propias ideas y exploren soluciones. • Describe evidencias de aprendizaje de los estudiantes de EB sobre sucesiones, ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas, o sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a partir de la información recogida al aplicar instrumentos de evaluación en espacios de práctica reales.

Fuente: DCBN (2019, p. 97)

Lo mencionado anteriormente muestra el gran interés en la propuesta de formación inicial docente, pero aún hay trabajo pendiente que realizar. En este sentido, el análisis del proceso de enseñanza desde la faceta interaccional y mediacional, provistas por el EOS, puede contribuir a la realización de tal trabajo. Por ejemplo, podemos abordar la problemática de cuáles son los conocimientos que debe movilizar un docente para enseñar un determinado tema, cómo manejar las interacciones que se produce entre el docente y el alumno a fin de optimizar el aprendizaje y, qué tipo de tareas fomentarán en el alumno el aprendizaje deseado.

Por último, el DCBN está basado en el modelo del “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT), descrita en la sección anterior. Emplear este modelo tiene como finalidad la articulación del conocimiento disciplinar, didáctico y matemático en los cursos que imparte.

Esto muestra la necesidad que urge de que el docente desarrolle la capacidad de elegir situaciones que van de acorde con el currículo propuesto por la institución educativa donde imparte la enseñanza, que las interacciones con los estudiantes sea lo más eficaz posible, que establezca conexiones intra e interdisciplinares y que destaque la importancia de emplear determinada noción matemática para la resolución de una situación problema.

Como se ha puesto en evidencia, el conocimiento de un profesor de matemática incluye diferentes aspectos. Por ello, se requiere caracterizarlos de forma que suministren pautas a los docentes en ejercicio o en formación inicial, que favorezcan la adquisición de competencias idóneas para el proceso de enseñanza (Oviedo, Pino-Fan, 2017).

Por todo lo anterior, consideramos fundamental realizar investigaciones que pretendan caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de un profesor de matemática, del nivel educativo secundario, necesarios para mejorar su enseñanza y cubrir a mayor grado las exigencias que se presentan en el ámbito educacional. En este trabajo, se abordará el problema particular de caracterizar conocimientos didáctico matemáticos asociados a las funciones lineales y cuadráticas.

1.3 Pregunta y objetivos de la Investigación

A partir de lo descrito previamente, se ha mostrado la importancia de proveer a los profesores recursos necesarios para mejorar su enseñanza de modo que cubra las demandas establecidas por el sistema educativo. Por tal razón, nos propondremos plantear la siguiente pregunta que guiará nuestra investigación.

¿Cuáles son los conocimientos didáctico matemáticos que debe poseer un profesor de educación secundaria en el Perú para mejorar su práctica docente, en relación a la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas?

De modo que, con los hallazgos que se obtengan, se pueda contribuir con la formación de profesores de matemática en la secundaria peruana brindándoles recursos que les permitan desarrollar procesos de instrucción idóneos, tal como proponen Godino (2009) y, Oviedo y Pino-Fan (2017).

Objetivo General:

Identificar conocimientos didáctico-matemáticos que debe poseer el profesor de matemática en la secundaria peruana para mejorar su práctica docente respecto a las funciones lineales y cuadráticas.

Objetivos específicos:

- ✓ Construir un significado de referencia institucional de las funciones lineales y cuadráticas.
- ✓ Hacer un diagnóstico para Identificar los conocimientos del profesor de matemáticas en relación al tema descrito, de modo que desarrolle procesos de instrucción con alta idoneidad didáctica.
- ✓ Proponer conocimientos didácticos matemáticos del profesor de matemática en relación a las funciones lineales y cuadráticas, considerando las facetas epistémica y ecológica, en base al estudio de significado de referencia y del Currículo Nacional, así como las facetas, cognitiva, interaccional, mediacional y afectiva.

CAPÍTULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Este capítulo está dividido en tres partes. En la primera parte, presentamos el marco teórico que utilizaremos en nuestra investigación, el Enfoque Ontosemiótico e Instrucción Matemática (EOS). En la segunda parte, describiremos el modelo del conocimiento didáctico matemático que nos permitirá categorizar, más detalladamente, los conocimientos didáctico matemáticos del profesor. Por último, mostraremos los aspectos metodológicos para alcanzar nuestro objetivo.

2.1 Aspectos teóricos considerados en el Enfoque del Conocimiento e Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (EOS) es un marco teórico que articula las diferentes aproximaciones y modelos teóricos que se utilizan en la investigación en Educación Matemática (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Este modelo teórico contiene categorías que permiten un análisis más fino de los conocimientos didáctico matemáticos del profesor al enseñar un tema específico como se mostró en las diversas investigaciones presentadas en el capítulo I. Puesto que ese es nuestro objetivo, considerando situar dicho análisis en los conocimientos didácticos matemáticos del profesor de matemática en el nivel educativo de la secundaria peruana, al enseñar funciones lineales y cuadráticas, consideramos pertinente emplear este modelo en nuestra investigación.

A continuación, presentaremos una breve descripción de cada una de las nociones teóricas que emplearemos en esta investigación.

2.1.1 Sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

El marco teórico del EOS considera como parte importante la actividad asociada a la resolución de problemas para el constructo del conocimiento matemático (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Según Godino, Batanero y Font (2009), una práctica matemática es toda actuación o expresión que una persona realiza para resolver cualquier problema matemático, comunicar la solución que obtiene, validarla o llevarla a otros contextos y problemas, generalizándola. Esta puede ser de índole personal o compartida en una institución conformada por individuos con una misma situación problema.

Más que una práctica en particular, el estudio de las matemáticas tiene como prioridad analizar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que surgen cuando un individuo se encuentra ante algún tipo de situación problema. El significado de los objetos matemáticos emerge de estos sistemas, puede darse desde dos perspectivas: personal e institucional. Dando origen a los significados personales e institucionales.

Los significados institucionales pueden ser:

1) Referencial, sistema de prácticas que se emplea como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza en particular este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2004).

   Para nuestra investigación, el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas será el sistema de prácticas que se encuentran en los libros didácticos e investigaciones que centran su atención al objeto matemático de nuestro interés. Estos nos permitirán caracterizar los conocimientos didácticos matemáticos del profesor de matemática en la faceta epistémica.

2) Pretendido, sistema de prácticas elaborado por una institución determinada en un proceso de estudio.

3) Evaluado, subsistema de prácticas que emplea el docente para evaluar los aprendizajes.

4) Implementado, sistema de prácticas implementadas por el profesor en un proceso de estudio específico.

Los significados personales son:

1) Global, es el conjunto total de sistema de prácticas personales que puede manifestar un individuo con relación a un objeto matemático.

2) Declarado, son las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas. Estas incluyen, las que son las correctas o incorrectas desde el punto de vista de la institución que las propone.

3) Logrado, son las prácticas que manifiestan los estudiantes de acuerdo con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales dado en un proceso de estudio, se considera los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Figura 4. Tipos de significados institucionales y personales

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 6)

En la Figura 4 se muestra la dialéctica entre la enseñanza y aprendizaje, de este modo se puede apreciar el acoplamiento progresivo y continuo entre los significados personales e institucionales.

2.1.2 Emergencia de los objetos matemáticos

Como se ha mencionado anteriormente, los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas. Ello conlleva explicar por lo menos dos niveles en las que estos objetos emergen de la actividad matemática (Godino, Batanero y Font, 2009).

En el primer nivel se encuentran entidades que se contemplan en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En el segundo nivel se encuentran la tipología de objetos que emerge de las diferentes formas de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del primer nivel.

Para nuestra investigación consideramos importante incluir estos niveles, porque las entidades que la conforman nos permitirán organizar el significado de referencia institucional en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

a. **Primer nivel: Configuración de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas**

Para que la actividad de una práctica matemática y la interpretación de sus resultados sean declarados como aprobatorios desde el punto de vista de una institución en particular es necesario poner en funcionamiento conocimientos específicos.

Por ello, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática pone en operatividad un conglomerado constituido por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos articulados entre sí (Font y Godino, 2006). A esta estructura se le denomina configuración de objetos primarios.

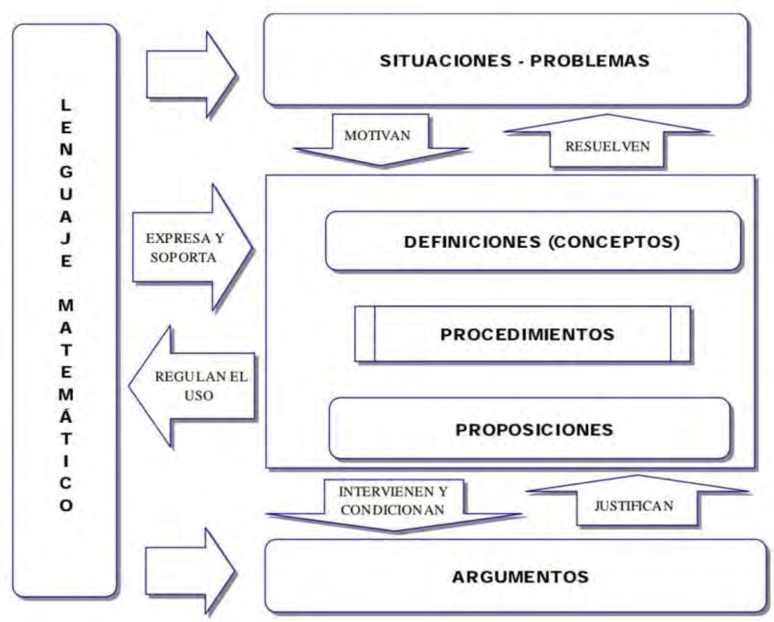


Figura 5. Configuración de objetos primarios

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p.7)

La Figura 5 muestra la tipología de objetos matemáticos primarios. Está conformada por:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, representaciones gráficas, que se presentan en sus diferentes registros, escrito, oral, gestual, etc.

- Situaciones-problema: que son aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc.
- Concepto-definición: son introducidos valiéndose de definiciones o descripciones, recta, número, media, función, etc.
- Proposiciones: son enunciados referentes a los conceptos.
- Procedimiento: son algoritmos, operaciones, técnica de cálculo, etc.
- Argumentos: son enunciados que se usan para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo, etc.

Según Font (2007), esta configuración de objetos primarios se propone como una herramienta teórica para describir los conocimientos matemáticos.
Las situaciones problemas son el punto de partida de la actividad, se emplea el lenguaje para referirnos a ella, y evocar conceptos o definiciones utilizados en los procedimientos y propiedades asociadas. Por último, los argumentos justifican los procedimientos y propiedades que relacionan las definiciones o conceptos entre sí.

Consideramos importante incluir este nivel para nuestra investigación, puesto que a partir de ello podemos describir los conocimientos matemáticos que se ponen en juego al resolver una situación problema, de este modo caracterizar los conocimientos didácticos matemáticos necesarios del profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

b. Segundo nivel: Atributos contextuales

Según Godino, Batanero y Font (2009), cada uno de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes de las prácticas matemáticas pueden ser analizadas desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

- Personal-Institucional. Los objetos emergentes de los sistemas de prácticas pueden ser consideradas como “objetos institucionales” cuando son compartidas dentro del marco de una institución, o como “objetos personales” cuando los sistemas son propios de una persona.

- Ostensivo- no ostensivo. La caracterización de un objeto matemático como ostensivo (se puede mostrar al público) o no ostensivo (no perceptibles por sí mismos) depende del juego del lenguaje en el que interviene. Por otro lado, tales objetos pueden ser utilizados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos).

- Expresión-contenido. Una de las características en común de la actividad matemática, procesos de construcción y uso de objetos matemáticos es que son fundamentalmente relacionales. Por tal razón, se entiende que los objetos matemáticos están relacionados entre sí, no considerándolas como entidades aisladas. Esta relación es determinada mediante una función semiótica formada por un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) instituida por un sujeto (persona o institución), según cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo-intensivo. La intervención de un objeto en un juego de lenguaje puede ser particular (por ejemplo, la función $y = 2x + 1$) y general (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$). La relación dual extensivo-intensivo permite caracterizar la actividad matemática en relación al uso de elementos genéricos (dialéctica entre lo particular y general). Por ello es un punto clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

- Unitario-sistemático. Dependiendo de las circunstancias, los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias o como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

Las facetas descritas anteriormente se complementan de forma dual y dialéctica, y se consideran como atributos que pueden ser aplicados a los diferentes objetos primario.

Godino, et al. (2009) analiza estos niveles desde la óptica proceso-producto, como se muestra en la Figura 6. Ello implica los siguientes procesos.

- Institucionalización-personalización.
- Generalización-particularización.
- Análisis (descomposición)-síntesis (reificación).
- Materialización (concreción)-idealización(abstracción).
- Expresión (representación)-significación.

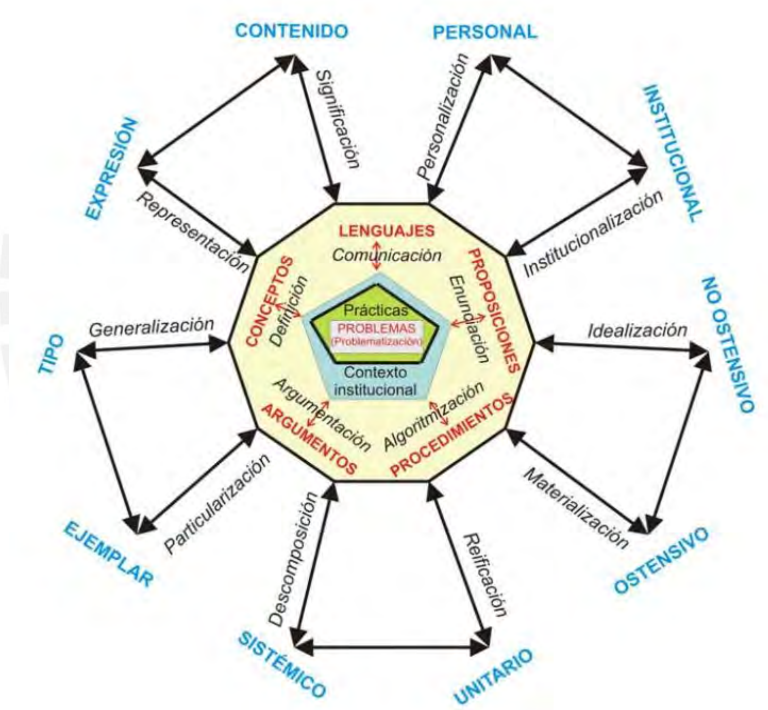


Figura 6. Configuración de objetos y procesos

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 10)

Reconocer explícitamente los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas permite al docente prever posibles conflictos potenciales y efectivos en relación al aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas del estudiante y distinguir objetos que tienen que tener presente e institucionalizados en un determinado momento en el proceso de enseñanza (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). Por ello, consideramos importante incluir este aspecto en nuestra investigación, puesto que nos permitirá potenciar las capacidades del profesor en reconocer los conflictos que el estudiante pueda tener cuando se le enseña funciones lineales y cuadráticas. De esto modo, el docente diseñará métodos efectivos de enseñanza.

El siguiente nivel de análisis tiene el objetivo de valorar un proceso de estudio, conocimiento que debería formar parte de los conocimientos didáctico matemáticos de un profesor. Por tal razón, dada las características de nuestra investigación, consideramos pertinente incluirlo.

2.1.3 Idoneidad didáctica

Es un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistemática de seis componentes que se presentan en la Figura 7.

- Idoneidad epistémica. Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), con relación de un significado de referencia.

- Idoneidad cognitiva. Grado de proximidad entre los significados personales logrados y los significados pretendidos.

- Idoneidad interaccional. Grado en el que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten reconocer conflictos semióticos potenciales en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como resolver los conflictos que se originan durante el proceso de instrucción.

- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Idoneidad emocional. Grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los alumnos en el proceso de estudio.

- Idoneidad ecológica. Grado en que el proceso de estudio se adecúa al proyecto educativo, la escuela, la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Cabe señalar que la idoneidad de una faceta no garantiza la idoneidad global del proceso enseñanza-aprendizaje. Por ello, estas deben ser integradas entre sí, considerando a la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia con relación al proyecto educativo global (Godino et al, 2009).

Para nuestra investigación, la idoneidad didáctica contribuirá a caracterizar aquellos conocimientos didácticos matemáticos del profesor que potencien su enseñanza en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

Por ejemplo, tomaremos en cuenta el nivel educativo donde se enseña el objeto matemático (idoneidad ecológica), los conocimientos del profesor de matemáticas del nivel secundario (idoneidad epistémica), qué recursos tecnológicos permiten una mejor enseñanza del tema (idoneidad mediacional), cuáles son las posibles interacciones entre el alumno y el profesor durante el proceso de enseñanza (idoneidad interaccional), entre otros. Cabe señalar que estos conocimientos se identificarán teóricamente y luego pondremos en acción un cuestionario que nos permitirá afinar algunos de estos conocimientos encontrados.

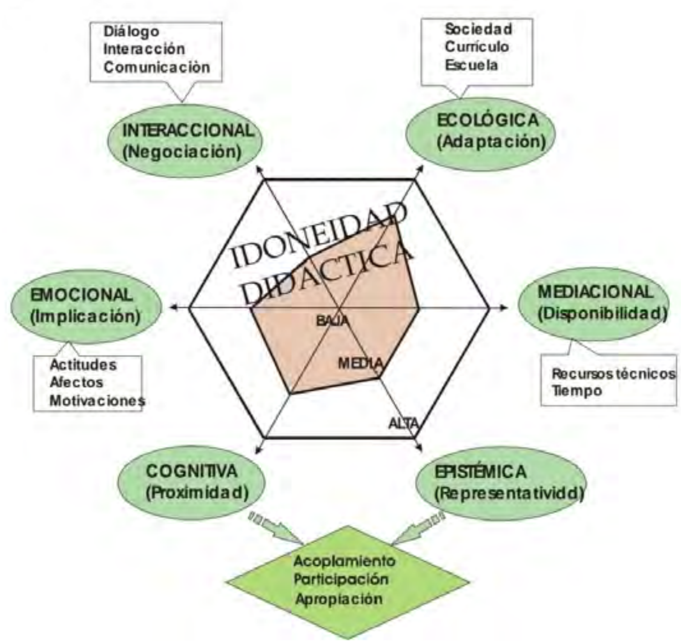


Figura 7. Componentes de la idoneidad didáctica

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 16)

2.2 Modelo del Conocimiento Didáctico-matemático

Godino (2009) propone un modelo denominado "modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM)" que se fundamenta en la teoría del EOS, este modelo de categorización de conocimientos del profesor de matemática, incorpora seis facetas para el conocimiento didáctico-matemático involucradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico. Estas facetas son las siguientes:

- Faceta epistémica: Conocimientos matemáticos en relación al significado institucional implementado (definiciones, propiedades, argumentos, problemas, lenguajes, procedimientos) a lo largo del tiempo de enseñanza y aprendizaje.

- Faceta cognitiva: Realización de los significados personales (aprendizajes).

- Faceta afectiva: Estados afectivos temporales (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y procesos de estudio seguido.

- Faceta interaccional: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes con el propósito de fijar y negociar los significados.

- Faceta mediacional: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y la fijación del tiempo a las diferentes acciones y procesos.

- Faceta ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, entre otros, los cuales soportan y condicionan el proceso de estudio.

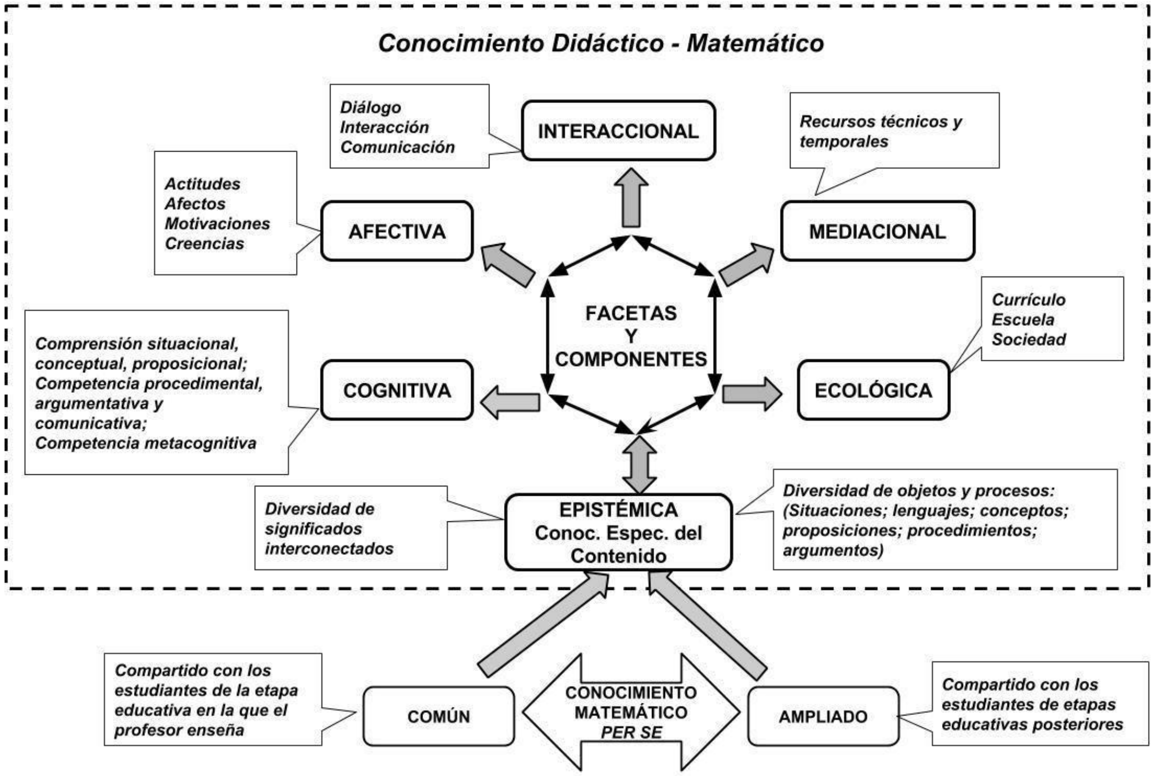


Figura 8. Facetas y componentes del conocimiento del profesor

Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

Para cada una de estas facetas o dimensiones descritas (ver Figura 8), se propone cuatro niveles que permiten el análisis del CDM del profesor, según el tipo de información que se necesite al tomar decisiones instruccionales. A continuación, se detallan estos niveles de análisis:

- Prácticas matemáticas y didácticas. Descripción de las acciones que se realizan al resolver las tareas matemáticas propuestas. Estas tienen como propósito contextualizar los contenidos y fomentar el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y los discentes.

- Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que participan y emergen en la realización de las prácticas. Su propósito es especificar la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas explicando los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

- Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que supeditan y posibilitan el proceso de estudio, e influyen en cada faceta y sus interacciones.

- Idoneidad. Identificación de posibles mejoras del proceso de estudio que incremente la idoneidad didáctica.

En la Figura 9 se observa la interacción de las facetas con los diferentes niveles del conocimiento del profesor descritos anteriormente.

Figura 9. Facetas y niveles del conocimiento didáctico-matemático del profesor

Fuente: Godino (2009, p. 21)

Consideramos importante incluir estas seis facetas en nuestra investigación porque nos permitirán organizar los conocimientos didácticos matemáticos del profesor de matemática de forma más precisa, teniendo en cuenta sus diferencias y particularidades las cuales pueden ser situadas en alguna de estas seis facetas.

El modelo que propone Godino (2009), desde la teoría del EOS, además de introducir diferentes facetas y niveles de análisis en relación a las categorías de análisis más "finas" de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, también propone una serie de normas para la formulación de consignas, que son ítems de evaluación, que permiten evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático en los profesores. En el caso de la faceta epistémica, del modelo CDM, incorpora y refina al conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático).

Faceta epistémica	**Consigna**
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Figura 10. Conocimiento en relación a la faceta epistémica

Fuente: Godino (2009, p. 25)

Las facetas cognitivas y afectiva estudian el conocimiento del contenido referente a los estudiantes (ver Figura 11).

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Figura 11. Conocimientos en relación a la faceta cognitiva/afectiva

Fuente: Godino (2009, p.26)

Las facetas interaccional y mediacional analizan la noción de conocimiento del contenido referente a la enseñanza (ver Figura 12).

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	Consigna
Configuración didáctica: - Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido - Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos; - Recursos materiales - Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Figura 12. Conocimiento en relación a la faceta interaccional/mediacional

Fuente: Godino (2009, p. 27)

Por último, la faceta ecológica considera el conocimiento que debe tener un profesor sobre el currículo y el tema en cuestión, así como las conexiones intra e interdisciplinares (ver Figura 13).

Faceta ecológica	Consigna
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Figura 13. Conocimiento en relación a la faceta ecológica

Fuente: Godino (2009, p. 27)

Así, el modelo de Godino (2009) incluye nuevos aspectos que mejoran los modelos del conocimiento propuestos con anterioridad. Aunque, como el mismo autor señala, el listado de consignas que presenta para las diferentes facetas del EOS, no son exhaustivas, por lo que se requiere nuevos refinamientos y adaptaciones de estas consignas para mejorarlas o establecer otras que permitan analizar, evaluar o describir el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en relación a un tema específico, a la vez que puede ser utilizado por los mismos profesores como herramientas de análisis y reflexión sobre su propia práctica.

Nuestra investigación se enfocará en elaborar tales refinamientos en todas las facetas que propone el EOS, en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

2.3 Aspectos metodológicos

Esta investigación se centra en identificar indicadores del conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

Consideramos las siguientes características de nuestra investigación:

- Realizaremos una recolección de datos. Esta se llevará a cabo mediante una entrevista grabada, donde a cada docente que participe en la investigación se le pedirá responder un cuestionario. Las preguntas de este cuestionario tendrán el objetivo de poner en juego los conocimientos didácticos matemáticos del profesor que se propondrán en las diferentes facetas propuestas por el EOS: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e interaccional.

- Para ello, en primer lugar, construiremos un significado de referencia institucional. En segundo lugar, señalaremos los conocimientos didáctico matemáticos que se ponen en juego cuando los profesores abordan dicho tema en la secundaria peruana, que según el currículo nacional (ver Tabla 3), emerge en los cinco grados de instrucción.

- Para describir cuáles son los conocimientos que el profesor desarrolla al enseñar funciones lineales y cuadráticas, se tendrá en cuenta el significado de referencia institucional construido para los conocimientos didáctico matemáticos de las facetas epistémica y ecológica, principalmente.

De lo anterior, esperamos proponer una serie de indicadores que permitan conocer los conocimientos didácticos-matemáticos que el profesor de matemática debería tener al enseñar funciones lineales y cuadráticas, las cuales pueden contribuir a investigaciones futuras.

Como parte experimental del trabajo, se diseñará un cuestionario que movilizará algunos conocimientos de los Conocimientos Didácticos Matemáticos previamente propuesto en profesores en ejercicio. A partir de los resultados que se obtengan al aplicar el cuestionario, se harán modificaciones al modelo propuesto.

Para estudiar los diferentes significados de la función lineal y cuadrática se analizarán los libros de texto didácticos, investigaciones que centran su atención en temas de estudio de nuestro interés, así como el Currículo Nacional (Perú, 2016) y el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019). Con estos elementos se podrán identificar situaciones prioritarias que permitirán desarrollar las capacidades esperadas por el Ministerio de Educación del Perú.

Con respecto al análisis de textos didácticos, según Ortiz (1999, citado por Cobo, 2003), es considerado como un segundo nivel de transposición didáctica, constituyendo el primer nivel los currículos y programas oficiales. Lo que requiere del profesor una atención constante sobre los contenidos de los textos didácticos para que no muestren un significado sesgado. Esta acción del docente nos lleva a considerar el análisis de los textos didácticos como parte de nuestra investigación para que, con la ayuda de los elementos teóricos descritos anteriormente, podamos construir el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas y, de este modo caracterizar los conocimientos didácticos puesto en juego al enseñar el tema señalado.

Adicionalmente, trabajos previos que giran en torno a nuestro tema de interés serán adaptados a las funciones lineales y cuadráticas. Ello contribuirá a caracterizar teóricamente los conocimientos didácticos matemáticos de un profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas que estarán organizados según las seis facetas propuestas por el EOS, donde cada una de ellas tendrán relación con el conocimiento del contenido matemático, el conocimiento en relación a los estudiantes y el conocimiento en relación al aprendizaje.

Luego, construiremos un cuestionario que permita poner en evidencia algunos de los Conocimiento Didácticos Matemáticos propuestos. Será un cuestionario que nos permitirá reconocer las prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por profesores en ejercicio sobre las funciones lineales y cuadráticas. Uno de los aspectos que explorará el cuestionario serán las configuraciones cognitivas activadas o asociadas a tales prácticas matemáticas. Para ello realizaremos algunas adaptaciones a las consignas de la investigación presentadas por Godino (2009) y Escudero (2017).

Este instrumento se pondrá en acción por medio de entrevistas a profesores en ejercicio, puesto que, según Cerda (2013), las entrevistas son un medio por el cual se obtiene información que no se pueden extraer por medio de la observación. En este sentido, nosotros estamos interesados por los conocimientos didácticos matemáticos que moviliza el profesor al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

Estableceremos indicadores que nos permitan describir estos conocimientos y junto con el análisis comparativo de los conocimientos teóricos obtenidos en la primera etapa nos ayudarán a proponer los conocimientos didácticos matemáticos asociados al conocimiento matemático (conocimiento común y ampliado) y los conocimientos didáctico matemáticos en las diferentes facetas propuestas por el EOS, tales como son: faceta epistémica, ecológica, mediacional, interaccional, afectiva y cognitiva.

De lo anterior, proponemos los siguientes procedimientos metodológicos para nuestra investigación:

Construir el significado de referencia sobre las funciones lineales y cuadráticas, en el nivel de educación secundaria peruana. Proponer conocimientos didáctico-matemáticos que debería tener un profesor de matemáticas, en la institución educativa de secundaria, con relación a las funciones lineales y cuadráticas.

Evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores de matemática en servicio, con respecto a las funciones lineales y cuadráticas, según la caracterización que se ha realizado en el paso anterior e identificar los conocimientos asociados a las facetas epistémicas, ecológica, cognitivas, mediacional, interaccional y afectiva.

Presentar una propuesta sobre los conocimientos didáctico-matemáticos que los profesores deberían tener sobre las funciones lineales y cuadráticas.

CAPÍTULO III: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA PARA LAS FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Este capítulo tiene como objetivo la construcción de un significado de referencia en relación a las funciones lineales y cuadráticas en la institución educativa de nivel secundario. Este nos ayudará a identificar indicadores del conocimiento en relación a la faceta epistémica.

En base a las diferentes investigaciones relacionadas a nuestro tema de interés y el marco teórico utilizado, se considera que, en líneas generales, el significado de los objetos matemáticos de estudio puede variar de acuerdo a la institución en la que se enseña. Por tal razón, nos concentraremos en identificar el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas en el nivel de educación de secundaria.

Según Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) el significado de referencia institucional, en este caso de las funciones lineales y cuadráticas, es el conjunto de prácticas operativas y discursivas que se emplean para la resolución de una situación problemática compartida en una institución determinada.

Para ello, realizaremos un análisis de contenido de los diferentes textos escolares que abordan el tema de funciones lineales y cuadráticas, así como diferentes investigaciones que tengan relación con nuestro tema de interés. También consideraremos como insumo para nuestra investigación el análisis desarrollado por Escudero (2017). Por último, incorporaremos un análisis extra del nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente y de los textos escolares presentados en el Ministerio de educación.

En primer lugar, como se indicó, consideraremos el trabajo de Escudero (2017), en donde se propone un significado de referencia para las funciones lineales y cuadráticas en el nivel de secundaria peruana. En dicha investigación, las situaciones problemáticas se organizan de la siguiente manera:

S1: **Problemas en contexto tabular**: Situaciones donde la función que interviene emplea una representación tabular.

S2: **Problemas en contexto gráfico**: Situaciones donde la función que interviene o se busca determinar tiene representación gráfica. Implica reconocer intervalos de crecimiento-decrecimiento, concavidad-convexidad y simetrías.

S3: **Problemas en contexto analítico**: Situaciones donde la función que interviene o se busca determinar tienen representación analítica. Implica reconocer y representar a la función lineal y cuadrática en el lenguaje simbólico literal e incluye situaciones donde se exige resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

S4: **Problemas en contexto conjuntista**: Situaciones donde la función que interviene o se busca determinar tiene representación conjuntista (par ordenado).

S5: **Problemas que integran diferentes contextos de uso, asociados a la noción función**: Situaciones que implica la intervención de dos o más representaciones de la función cuadrática o lineal.

S6: **Problemas de modelización**: De acuerdo a la complejidad de las situaciones se clasifican en:

S6.1: **Problemas contextualizados introductorios**: Situaciones que implica que el estudiante transite del mundo real al mundo matemático para resolver el problema, utilizando sus conocimientos previos con el propósito de que facilite la construcción de nuevos conceptos que posteriormente va adquirir.

S6.2: **Problemas contextualizados evocados a la aplicación**: Situaciones relativamente “fáciles”, que tiene como objetivo que el alumno conozca la utilidad de las matemáticas en el mundo real.

S6.3: **Problemas contextualizados evocados de consolidación**: Situaciones más complejas que requiere la utilización de conocimientos que se adquirieron en el proceso de instrucción impartida.

S6.4: **Problemas intradisciplinarios**: Situaciones que establece relaciones entre los diferentes contenidos del currículo de matemáticas.

S6.5: **Problemas interdisciplinarios**: Situaciones que envuelven otras áreas como lo son la física, química, etc. y que se pueden abordar desde las matemáticas.

Como ya se comentó en el capítulo I, las categorías que establece Escudero (2017) se basa en el lenguaje empleado en la situación problema. Por otro lado, Parra (2015) toma en cuenta el significado holístico de la función y adiciona a ello el trabajo de Biehler (2005), que reconstruye los significados desde un punto de vista didáctico.

Todo lo anterior nos lleva a reconocer que el lenguaje que se emplea en una situación problema es importante para describirla. Pero también hemos observado que en cada situación propuesta puede intervenir más de un lenguaje por lo que caracterizarla de esta forma no nos permitiría construir un significado de referencia más preciso de la función lineal y cuadrática.

Por tal razón, del trabajo de Escudero (2017) tomaremos en cuenta el lenguaje que emplea en la organización de las situaciones para analizar más finamente los problemas seleccionados en nuestra investigación. Por otro lado, dado el análisis del Currículo Nacional (2016) y el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019), organizaremos las situaciones tomando en cuenta el significado holístico de la función descrita en el trabajo de Parra (2015), centrándonos solo en algunas de ellas.

Lo anterior nos lleva a establecer cinco categorías para la construcción del significado de referencia como sigue:

a) Situaciones donde emergen la función como cualquier tipo de relación.
b) Situaciones donde emerge la función como relación entre variables.
c) Situaciones donde emerge la función como expresión analítica.
d) Situaciones donde un fenómeno se modela con una gráfica.
e) Situaciones donde la función que emerge se encuentra en un contexto extra matemático.

Como ya lo mencionamos anteriormente, en las tres primeras categorías se consideran algunas de las representaciones de la función que pertenecen al significado holístico, según Parra (2015). La cuarta categoría se debe al análisis de contenido de las diferentes fuentes. En varias de las situaciones analizadas se encuentra la función lineal o cuadrática en su expresión gráfica y se proponen preguntas respecto a sus elementos, tales como vértice, puntos que pertenecen a la función o deducir la función en su expresión analítica.

La quinta categoría toma en cuenta el contexto donde emerge la función. Estas fueron consideradas por dos razones. En primer lugar, ello se ajusta a varias situaciones que plantean los libros de texto didáctico peruanos del Ministerio de Educación (2016), que además de demandar la movilización entre las diferentes representaciones de la función lineal y cuadrática, las sitúa dentro de un contexto social, familiar o científico en el que se espera que el alumno extraiga elementos relevantes del contexto, las sitúe, organice y sistematice en el mundo matemático para resolverlas. Es decir, se ajusta al significado pretendido de dicha noción.

En segundo lugar, se relaciona con el nuevo Diseño Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019), que dentro de algunos de los desempeños específicos que se espera que alcance el profesor, se encuentra: “resolver situaciones problemáticas de la vida diaria y si es posible adaptar la situación a la Educación de nivel secundario”.

Asimismo, un aspecto que consideraremos para elegir las situaciones que nos permitan construir nuestro significado de referencia, es tener en cuenta lo que menciona el Currículo Nacional (Perú, 2016) sobre las funciones lineales y cuadrática, particularmente en la competencia, “resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. Esto se refiere al desarrollo de las cuatro capacidades puntuales.

La primera de ellas, “traducir datos y condiciones a expresiones algebraicas”; conlleva transformar tales datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica que generalice la interacción entre estos. La segunda corresponde a, “comunicar su comprensión sobre las relaciones algebraicas” como, por ejemplo, la noción, el concepto o las propiedades de las funciones, donde puede usar tanto el lenguaje algebraico, como otras representaciones, e interpretar la información presente. La tercera hace referencia a, “usar estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales”, de este modo determinar, por ejemplo, el dominio y rango de una función, representar rectas, parábolas, etc.

Y, por último, la cuarta señala que, “argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia”, que refiere a elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando inductivamente para generalizar una regla, y deductivamente para probar y comprobar propiedades y nuevas relaciones.

Todo lo mencionado anteriormente implica presentar situaciones que demanden el desarrollo de tales capacidades, esta tipología de situaciones son las que incluiremos en nuestro análisis.

Asimismo, para la descripción de objetos primarios; lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que están involucradas en las situaciones descritas se ha tomado como referencia la investigación de Escudero (2017), y se han incluido algunos elementos adicionales.

Por otro lado, es importante señalar que en la era tecnológica en que vivimos, la educación puede valerse de ella para desarrollar y acentuar el pensamiento crítico y reflexivo en los alumnos y así lograr el aprendizaje esperado. En este sentido, tal como menciona Jiménez y Jiménez (2017), el empleo de la "Tecnología de Información y Educación" (TICs) tiene la posibilidad se favorecer tanto al alumno como al docente: al alumno, porque le permite desarrollar su pensamiento matemático. Por ejemplo, el GeoGebra favorece al aumento de su nivel de compresión y capacidad de resolver problemas del vivir diario. Asimismo, también favorece al docente, porque este debe desarrollar habilidades y destrezas necesarias abordar este tipo de tecnología que contribuye a la innovación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este tipo de situaciones, que incluye el uso de la TIC, involucra el análisis de la función en su representación analítica asociada a su representación gráfica, análisis de los elementos de la función en su expresión analítica, problemas de modelización, entre otros. Por tal razón, consideramos importante incluir en nuestra investigación este tipo de situaciones que permiten alcanzar la comprensión de los conceptos matemáticos enseñados, en este caso, funciones lineales y cuadráticas, y desarrollar competencias que contribuyan a la solución de problemas del vivir diario.

Es importante señalar que este tipo de situaciones permitirán analizar los conocimientos didáctico matemáticos del profesor desde la dimensión mediacional. Particularmente en lo que se refiere a emplear tecnologías digitales, como el software GeoGebra, para analizar la naturaleza del cambio, en relación a las funciones lineales y cuadráticas. También, justificar cómo esta herramienta tecnológica favorece al aprendizaje.

Lo mencionado anteriormente nos llevó a analizar diversas fuentes que tengan relación con las diferentes formas de expresión de la función lineal o cuadrática con las características que encajan en nuestra descripción. De este modo, identificar aspectos de la configuración epistémica de las funciones lineales y cuadráticas.

Debemos resaltar que, las categorías propuestas en esta investigación se basan en las diferentes formas como emerge la función en las situaciones propuestas.

a) **Situaciones donde emerge la función como cualquier tipo de relación.**
   Este tipo de *situaciones* describen de forma general cualquier tipo de relación. El *lenguaje* que involucra es *simbólico-literal*, en particular, *conjuntista*. Según Godino, Wilhelmi y Bencomo (2016), esta idea se formaliza por medio de la noción de "par ordenado". Los *conceptos*, dominio y rango de la función. Las propiedades, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función. Los *procedimientos* abordan las operaciones conjuntistas. Por último, *los argumentos* se fundamentan en los conceptos y propiedades que involucra esta categoría.

   Una situación que lo ejemplifica es el siguiente, tomado de Larson (2012, p. 480), el cual como ya mencionamos, se fundamenta en la teoría de conjuntos.

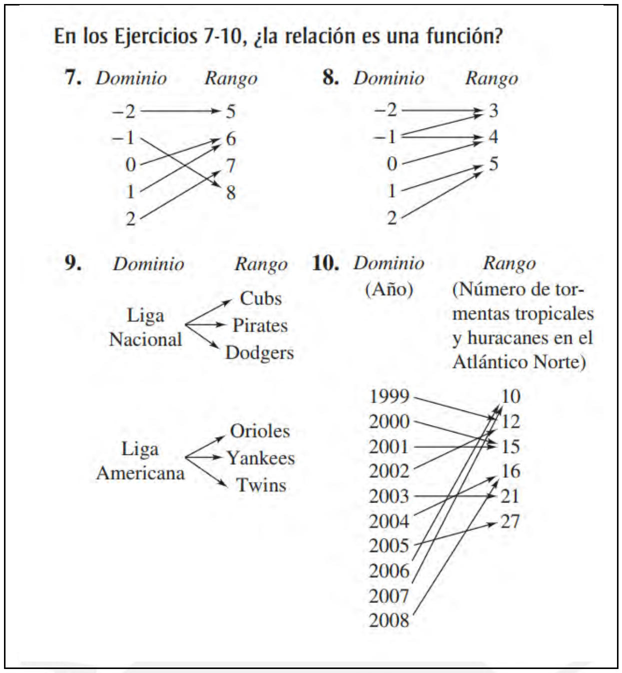


Figura 14. Situación donde emerge la función como cualquier tipo de relación. Fuente: Larson (2012, p. 480)

Los *lenguajes* que utilizan son, el gráfico, por el uso de diagramas, y el simbólico-literal, puesto que emplea la noción conjuntista. Los *conceptos* empleados, dominio y rango de la función. La *propiedad* es, para cada elemento del dominio de una función existe un único elemento de su rango. El *procedimiento* implica asociar los elementos del dominio con los elementos del rango considerando que para cada elemento del dominio existe un único elemento del rango. El *argumento* es de tipo deductivo, puesto que se deduce a partir de las propiedades y los conceptos indicados.

b) Situaciones donde emerge la función como relación entre variables.

Dentro de esta categoría se encuentra todas las *situaciones* en la que se espera realizar una predicción de cantidades. El *lenguaje es* el numérico, que implica el uso de tabla para representar las funciones, el gráfico y el simbólico literal. Los *conceptos* son, función cuadrática, que se relacionan con las progresiones aritméticas y geométricas, y función lineal que involucra las magnitudes proporcionales. Por ejemplo, en el caso de la función lineal, $y=ax$, la magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x, y a es la constante de proporcionalidad. Las *propiedades* que aborda son las variaciones de regularidades. Escudero (2017) las describe de la siguiente manera: En el caso de las funciones lineales, el cambio que sufre la variable dependiente es constante por una unidad en la que cambia la variable independiente. Asimismo, con respecto a la función cuadrática, el segundo cambio que sufre la variable dependiente es constante por una unidad en la que cambia la variable. Los *procedimientos* refieren a las tabulaciones de datos, las extrapolaciones e interpolaciones. Por último, los *argumentos* involucran la inducción empírica.

La siguiente situación que pertenece al libro de texto didáctico de tercero de secundaria de Perú, Ministerio de Educación (2020, p.37) ejemplifica la categoría descrita.

3. Identifica la tabla o tablas de valores que pueden ser funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

a)

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	3	2	5	12	23

b)

x	0	1	2	3	4
$f_2(x)$	1	-3	-7	-11	-15

c)

x	0	1	2	3	4
$f_3(x)$	5	4	5	-4	-11

Figura 15. Situaciones donde emerge la función como relación entre variables
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2020, p.37)

Los *lenguajes* empleados son: el numérico (tablas), el gráfico (plano cartesiano) y el simbólico-literal (conjuntista). El *concepto*, función cuadrática. La *propiedad*, la relación entre la variable independiente y dependiente de una función cuadrática. El *procedimiento* consiste en ubicar los pares ordenados en el sistema cartesiano y deducir la forma de la ecuación cuadrática. Los *argumentos* son de tipo deductivo, puesto que a partir de la forma que emerge en el sistema cartesiano se deduce que es una función cuadrática.

c) Situaciones donde un fenómeno se modela con una gráfica

En esta categoría se encuentran todas las *situaciones* que se asocian al estudio de curvas. En nuestro caso, son las funciones lineales y cuadráticas. Los *lenguajes* son, el gráfico, particularmente las que se ubican dentro del plano cartesiano y el simbólico-literal (conjuntista). Los *conceptos* tanto en la función lineal y cuadrática son, el sistema de coordenadas cartesiano (intercepto con el eje *x*, intercepto con el eje *y,* rango y dominio). En particular, en el caso de las funciones lineales, la pendiente. Las *propiedades* son: la traslación y la monotonía, en el caso de las funciones lineales, y en las funciones cuadráticas, valores extremos, alargamiento y contracción verticales, concavidad, convexidad y simetría. Los *procedimientos* implican interpretar o analizar los elementos de la función en su expresión gráfica. Por último, los *argumentos* son deductivos porque se deducen de las propiedades o conceptos.

La siguiente situación, tomado de Escudero (2017, p.55) ejemplifica la categoría descrita.

Por ejemplo: Para la siguiente gráfica obtenga las coordenadas de los puntos marcados:

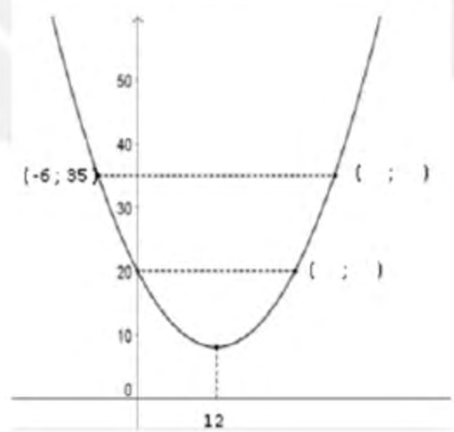


Figura 16. Situaciones donde un fenómeno se modela con una gráfica
Fuente: Escudero (2017, p.55)

Donde el *lenguaje* que emplea es el gráfico, particularmente el uso de las coordenadas cartesianas y el simbólico literal (conjuntista). El *concepto*, dominio y rango de la función cuadrática. La *propiedad*, simetría. *Procedimiento*, análisis de la función cuadrática en su expresión gráfica reconociendo los puntos que pertenecen al dominio y rango de la función. Y los *argumentos* se desprenden de la propiedad de la simetría, donde la recta vertical que pasa por el vértice de la función, la divide en dos mitades iguales.

Asimismo, presentamos situaciones que pueden abordarse empleando el software GeoGebra, con el fin de explorar algunas propiedades de la función cuadrática en su expresión gráfica. Por ejemplo, presentamos la siguiente situación tomada del libro didáctico digital de Buenos Aires (2019, p. 14).

> En este problema trabajarán en el programa GeoGebra con un conjunto de funciones cuadráticas que tienen algunas características en común. Sigan las instrucciones que se indican a continuación:
>
> - En un nuevo archivo GeoGebra, creen un *Deslizador* de nombre *a* con un intervalo de -5 a 5.
> - Ingresen en la barra de Entrada la siguiente función: $f(x)=ax^2-5$. Al mover el deslizador, para cada valor de *a*, se obtiene una parábola diferente. Antes de continuar, guarden el archivo con el nombre *problema4.gbb.*
>
> Respondan las siguientes consignas:
> a. ¿Cuánto tiene que valer *a* para que el punto (2;3) pertenezca al gráfico de la función obtenida?
> b. ¿Será posible encontrar un valor *a* para que el punto (1;3) pertenezca al gráfico de la función obtenida? Si responden que sí, encuéntrenlo. Si responden que no, expliquen por qué.
> c. ¿Cuánto tiene que valer *a* para que las raíces de la ecuación obtenida sean -5 y 5? ¿-10 y 10?
> d. Si colocan el deslizador en la posición *a*=0, podrán comprobar que la gráfica se transforma en una recta. ¿Pueden explicar por qué?
> e. Usando la función que se obtiene cuando *a*=-3,5 encuentren un valor de *x* para que el punto (*x*;19) pertenezca a la parábola. ¿Cuántos hay?
> f. Usando la función que se obtiene cuando *a*=-7, encuentre dos valores distintos de *x* para que el punto (*x*; -180) pertenezca a la parábola.

Figura 17. Situaciones donde un fenómeno se modela con una gráfica
Adaptado de: Ministerio de Educación e Innovación. Buenos Aires (2019, p.14)

Donde los *lenguajes* que involucra son, el simbólico-literal (expresión analítica y conjuntista) y el gráfico. Los *conceptos*, dominio, rango e intercepto con el eje *x* de una función cuadrática, función lineal en su expresión analítica. La *propiedad,* alargamiento y contracción vertical de funciones cuadráticas. Los *procedimientos*, para la consigna a) con la ayuda de la herramienta deslizador el estudiante puede ubicar el punto de forma que pertenezca a la función cuadrática y determinar el valor de *a.*

Para la consigna b), al notar que según el intervalo pre-establecido de la herramienta deslizador no es posible hallar un valor adecuado para *a*, se espera acudir a las manipulaciones algebraicas (resolución de ecuación de primer grado) teniendo presente que el par ordenado pertenece a la función cuadrática. Así determinar el valor de *a*.

Para la consigna c), en la primera parte se puede proceder manipulando la herramienta deslizador y hallar fácilmente el valor de *a*. Para la segunda parte, dado que el valor de *a* es un valor racional no se podrá resolver el problema directamente. Ello demandará por parte del alumno las manipulaciones algebraicas como la resolución de una ecuación de primer grado.

Para la consigna d), se espera que el alumno acuda a la definición de función cuadrática en su expresión analítica para establecer las razones de la conversión a la función lineal. Para las consignas e) y f), se espera que el alumno acuda a las manipulaciones algebraicas como son las ecuaciones cuadráticas para hallar los valores esperados. Dentro del procedimiento podemos incluir, factorización por aspa simple, la acción de completar cuadrados o determinar los valores por medio de la discriminante.

Por último, los *argumentos* se deducen de las propiedades o definiciones empleadas, si un punto pertenece a una función cuadrática, entonces debe cumplir la relación existente con la regla de correspondencia y si es una raíz, entonces debe cumplir la definición de intercepto con el eje x.

d) Situaciones donde emerge la función como expresión analítica.

En esta categoría se encuentran las *situaciones* que estudia la dependencia entre variables a partir del análisis de la expresión analítica de la función. Se definen dos tipos de variables: la variable independiente y la variable dependiente. El *lenguaje* que involucra es el simbólico-literal (expresión analítica y noción conjuntista) o gráfico, en el sistema de plano cartesiano.

Los *conceptos* que utiliza son, en el caso de la función lineal, intercepto con el eje *x*, intercepto con el eje *y,* dominio, rango y pendiente, y en el caso de la función cuadrática, intercepto con el eje *x*, intercepto con el eje *y*, dominio, rango, vértice, foco y discriminante. Las *propiedades* son, en el caso de la función lineal, la inyectividad, sobreyectividad, biyectividad y monotonía. En el caso de la función cuadrática, la sobreyectividad, valores extremos, concavidad/convexidad y simetría.

Los *procedimientos* son las manipulaciones algebraicas y el tránsito de la función en su expresión analítica a su expresión gráfica. Por último, los *argumentos* son deductivos, que según Escudero (2017) puede ser a partir de las definiciones o propiedades, o a partir del reconocimiento de un patrón. Una situación que ejemplifica esta categoría, es la siguiente, tomada de Escudero (2017, p. 56).

Por ejemplo: Dada la siguiente función $f(x) = (x-2)^2 - 5$

¿Existe otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = 2$? ¿Por qué? ¿Existe otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = -1$? ¿Por qué?

Figura 18. Situaciones donde emerge la función como expresión analítica
Fuente: Escudero (2017, p. 56)

Donde los *lenguajes* que usa son, el simbólico literal (expresión analítica y conjuntista) y el gráfico (plano cartesiano). *Concepto*, dominio, rango de la función cuadrática. La *propiedad*, simetría, valores extremos. El *procedimiento*, manipulaciones algebraicas de modo que se busque otro elemento que cumpla la relación funcional. Y el *argumento* se desprenden de la propiedad, con ello se asegura que exista otro elemento del dominio diferente a *2* que tenga la misma imagen.

e) Situaciones donde la función que emerge se encuentra en un contexto extra matemático.

Son todas las situaciones donde el contexto en el que emerge se relacionan con otras áreas diferentes a las matemáticas, tales como la física, biología, economía, etc.

Estos tipos de situaciones también demandan problemas de modelización, porque tal como menciona Blomhøj (2004, citado por Sala, Font y Barquero, 2019), en la actualidad la modelización matemática se destaca como una práctica de enseñanza para los diferentes tipos de nivel educativos existentes, que tienen como centro de la enseñanza y aprendizaje la relación entre el mundo real y las matemáticas. Este tipo de actividades posibilitan la motivación en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Al igual que en la categoría anterior, el *lenguaje*, los *conceptos*, *procedimientos*, *propiedades*, y *argumentos* que se utiliza dependen de la representación inicial de la función, de sus procesos y lo que finalmente se pide. Dentro de esta categoría podemos contemplar situaciones como la siguiente, que pertenece al texto didáctico de 1ero de secundaria de Perú, Ministerio de Educación (2020, p.92).

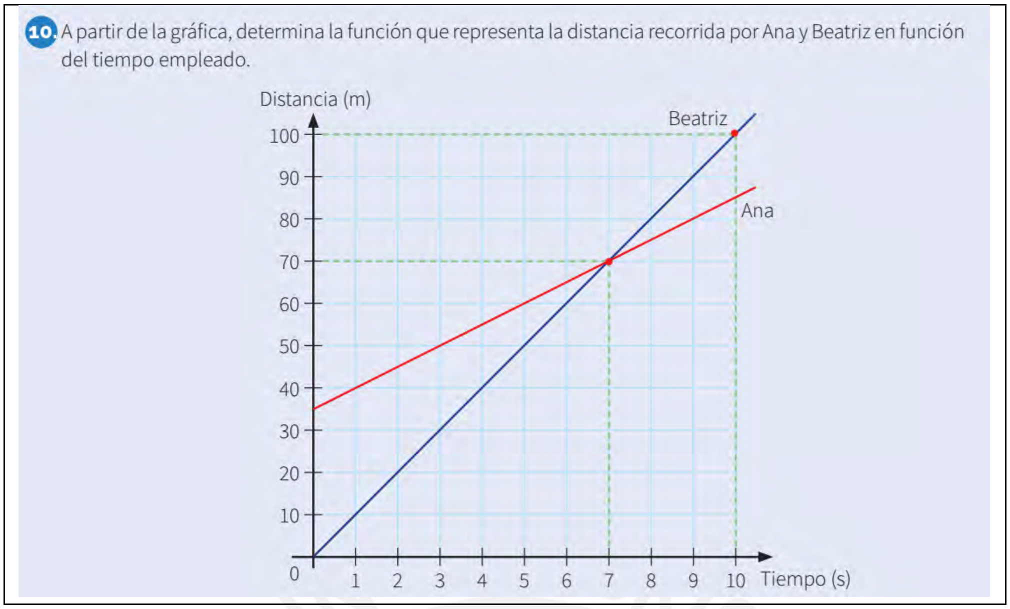


Figura 19. Situaciones donde la función que emerge se encuentra en un contexto extra matemático

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2020, p.92)

En este caso, el *lenguaje* empleado es el gráfico, puesto que se usa el plano cartesiano para la presentación de la función lineal en su expresión gráfica y el simbólico literal (expresión analítica y noción conjuntista). Los *conceptos* se relacionan con la pendiente e intercepto con el eje *y* de una función lineal y proporcionalidad. La *propiedad* de la función lineal es, el cambio de la variable dependiente es constante por una unidad de cambio en la variable independiente. El *procedimiento* implica la representación analítica de una función lineal a partir de un par ordenado que verifica la relación funcional y su pendiente. Y los *argumentos* se desprenden de los conceptos y de las propiedades.

Una segunda situación, adaptada de Gallo (2018, p.114), se ubica, al igual que la anterior, en un contexto del área de la física.

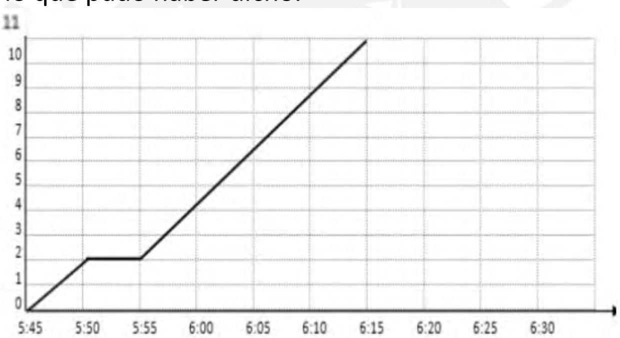
Camino al colegio. Vanessa, Fabián, Paula y Santiago, viven en una Urbanización cercana. Cuando van al colegio, suelen hacerlo en bicicleta en línea recta. La primea clase empieza a las 6:30 am, lo cual significa que deben salir de casa alrededor de las 5:45 am. Porque llegar tarde implicaría un fuerte llamado de atención, ya que la puntualidad es una característica importante para el buen desempeño escolar. La distancia de la Urbanización al colegio es de 11 km. Cada uno de ellos nos contó su recorrido:

Vanessa dice: yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, porque a esas horas de la mañana no me puedo apresurar…además todavía está oscuro. Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde.

Fabián dice: esta mañana me fui para el colegio en la bicicleta bien rápido, pero en la mitad del camino ¡se daña la cadena! Traté de organizarla, pero no tenía herramientas y no sé mucho de mecánica, así que me tocó irme caminando con mi bicicleta en la mano el resto del recorrido y lo peor es que llegué tarde al colegio.

Paula dice: yo salí de mi casa a la misma hora que todos, a una misma velocidad en todo el recorrido, ni muy rápido ni muy despacio. Eso sí, no me entretuve con nada y lo mejor de todo es que llegué un poquito más temprano para prepararme para la clase de matemáticas.

Santiago: representa su historia mediante el siguiente gráfico de distancia vs tiempo…imagínate lo que pudo haber dicho.



a) Grafica el recorrido de Vanesa, Fabián y Paula, y explica el procedimiento que sigues.
b) Describe cuál fue el recorrido de Santiago.

Figura 20. Situaciones donde la función que emerge se encuentra en un contexto extra matemático

Adaptado de: Gallo (2018, p.114)

Los *lenguajes* empleados son: el verbal, puesto que utiliza frases como: *ir despacio, ir rápido, misma velocidad* y el que usará el estudiante para describir la trayectoria de Santiago, y el gráfico, particularmente el uso del plano cartesiano, que el mismo problema lo incluye y el que demanda realizar. C*onceptos,* sistema de coordenadas cartesiano, pendiente de la función lineal, dominio y rango y magnitudes proporcionales. La *propiedad* que involucra se relaciona con la función lineal, es decir, el cambio en la variable dependiente es constante por una unidad de cambio en la variable independiente.

Con respecto al *procedimiento*, es la acción de graficar el recorrido de cada uno de los personajes que intervienen en la situación, tomando en cuenta el lenguaje verbal de cada uno de ellos y asociándolos a la pendiente de la función lineal. Por otro lado, el lenguaje verbal también ayudará a distinguir el dominio y rango de la función. De igual modo, para el caso de Santiago, el lenguaje verbal permitirá describir el recorrido que expresa mediante la gráfica de una función lineal.

Y, por último, los *argumentos* se desprenden de las definiciones y propiedades. Puesto que en base a la proporcionalidad de las variables se deduce la pendiente, ello permitirá graficar la función lineal. La identificación del dominio y rango de la función tiene relación con el lenguaje verbal que se asocia al contexto de la situación. De igual modo, si se tiene la función en su expresión gráfica (último caso), la identificación de la pendiente en cada tramo permitirá interpretar la relación existente entre las variables implicadas.

La tercera situación, tomada del libro didáctico de cuarto año de secundaria de Perú, Ministerio de Educación (2020, p.92), se sitúa dentro de un contexto económico.

10. Una empresa dedicada a empacar y transportar huevos ha proyectado, con la siguiente función, sus ingresos (I) según los miles de huevos empacados (h):

$I(h) = -100h^2 + 1000h + 7500$, con $h \geq 0$

¿Para qué valores de h se alcanzan el ingreso máximo y el ingreso nulo?

Figura 21. Situaciones donde emerge la función en sus diferentes expresiones

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2020, p. 92)

Donde los *lenguajes* que emplea son: el simbólico literal, puesto que se da la función en su representación analítica, $I(h)=-100h^2+1000h+7500$, el verbal, dado que utiliza expresiones como *ingreso máximo* e *ingreso nulo* y el gráfico (sistema cartesiano). Los *conceptos* se relacionan con el dominio y rango de una función cuadrática e intercepto con el eje *x*. Con respecto a las propiedades, estas involucran: máximo, mínimo y vértice de una función cuadrática.

Para la primera pregunta, los *procedimientos* involucran la manipulación algebraica de la función cuadrática en su representación analítica, tales como, cálculo del vértice según fórmula o por la acción de completar cuadrados e interpretación de resultados. Para la segunda pregunta, igualar a cero la función cuadrática y resolver el problema como una ecuación cuadrática, elegir el valor correcto de acuerdo a los datos y la interpretación de resultados. Los *argumentos* son de tipo deductivo, porque se deduce de las definiciones o propiedades como, por ejemplo, el máximo de la función cuadrática y el intercepto con el eje *x.*

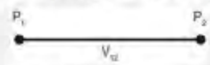
Dentro de esta categoría se encuentran *situaciones* extra matemáticas en la que se espera, de forma implícita o explícita, que el alumno descontextualice el enunciado distinguiendo los elementos relevantes, en este caso funciones lineales y cuadráticas, para situarlas en el mundo matemático y proceder con la solución. En una primera etapa de la situación, el *lenguaje* que predomina es el verbal. Luego, dependiendo de lo que se pide, puede considerarse otros tipos de lenguaje como, por ejemplo, el numérico. Los *conceptos* involucrados son, función lineal y cuadrática, intercepto con el eje *x*, intercepto con el eje *y*. Las *propiedades* que predominan son máximo y mínimo de una función cuadrática. Los *procedimientos* demandan manipulación algebraica, análisis de la función en cualquiera de sus expresiones. Por último, los *argumentos* se deducen de los conceptos y propiedades enunciadas. Pueden ser de tipo deductivo como inductivo.

También, consideramos importante incluir la siguiente situación tomada de

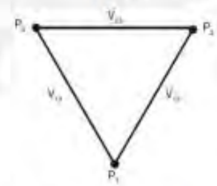
Huapaya (2012, p. 100), donde la función cuadrática emerge de manera inductiva.

EL CRECIMIENTO DE LAS REDES SOCIALES

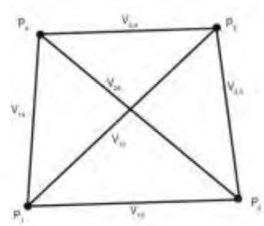
Podemos apreciar las interacciones humanas en los equipos de trabajo, en el apoyo mutuo de las familias, en las redes de asistencia social, en las acciones de solidaridad para enfrentar situaciones graves, en los juegos deportivos, etc. En todos estos casos, mientras más personas participan, mayor es la variedad de contribuciones específicas que pueden hacer, por lo tanto, de mayor valor social. Para ilustrar esto, veamos el caso de las telecomunicaciones (ya sea telefonía, internet u otros medios). Si consideramos dos personas (*P1* y *P2*), entonces la cantidad de vínculos que pueden establecer es *1* (*v12*).



Si consideramos tres personas (*P1, P2 y P3*), entonces la cantidad de vínculos es *3* (*v12, v13, v14*).



Si consideramos cuatro personas (*P1, P2, P3 y P4*) entonces la cantidad de vínculos es *6* (*v12, v13, v14, v23, v24, v34*).



Si ahora consideramos *n* personas, ¿cuántos vínculos se producen?. Establecer el modelo de esta

Figura 22. Situaciones de modelización donde emerge las funciones lineales y cuadráticas

Fuente: Huapaya (2012, p.100)

Donde el *lenguaje* que involucra es verbal, utiliza frases como: *si consideramos dos personas entonces la cantidad de vínculo es*, *si consideramos tres personas entonces la cantidad de vínculo es*, etc. El *concepto* es la función cuadrática en su expresión analítica. El *procedimiento*, la interpretación de los datos visuales que se presentan y establecer una relación entre las variables, número de personas y cantidad de vínculos. Y el *argumento* es de tipo inductivo. La expresión analítica surge a partir de casos particulares.

CAPÍTULO IV: PROPUESTA INICIAL DE INDICADORES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

A partir del análisis realizado para la construcción del significado de referencia y teniendo en cuenta los indicadores propuestos por Godino (2009) definiremos indicadores específicos del conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

Adicionalmente, para refinar estos indicadores, tendremos en cuenta la descripción de los conocimientos didácticos matemáticos en la faceta epistémica del profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas propuestos por Escudero (2017). Por otro lado, para refinar los indicadores de las cinco facetas restantes y definir otras, tomaremos en cuenta el Currículo Nacional del Perú (2016), que se centran en las competencias que se espera que el estudiante adquiera a lo largo de su formación académica, y el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019), que tiene como propósito desarrollar en los profesores capacidades específicas que le permitan alcanzar los objetivos planteado por el Ministerio de Educación del Perú.

4.1 Indicadores en relación a la faceta epistémica y ecológica

En esta sección presentaremos algunos indicadores de los conocimientos didáctico matemáticos que tengan relación con la faceta epistémica y ecológica. Como mencionamos al inicio de este capítulo, para establecer estos indicadores, se tomaron en cuenta la propuesta de Godino (2009) y Escudero (2017).

El trabajo de Godino (2009) nos proporcionó indicadores generales que hemos particularizado, respecto a las funciones lineales y cuadráticas, con la contribución del trabajo Escudero (2017) que, como mencionamos anteriormente, define indicadores del conocimiento en relación a la faceta epistémica. También el significado de referencia construido en el capítulo anterior nos aportó nuevos detalles que nos permitieron afinar tales indicadores.

Asimismo, consideramos los desempeños que se esperan alcanzar, según el Currículo Nacional (Perú, 2016) y el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019). Estos nos permitieron refinar los indicadores generales propuestos por Godino (2009), en relación a la faceta ecológica.

Con respecto al conocimiento en común

- *Resuelve tareas donde intervienen funciones lineales y cuadráticas.* El profesor debe ser capaz resolver las situaciones asociadas funciones lineales y cuadráticas en relación a la educación secundaria.

Con respecto al conocimiento especializado: Elabora la configuración de objetos y procesos que se ponen en juego en las posibles soluciones de la tarea y las relacionadas a ella. Implica lo siguiente:

Situaciones

- *Reconoce los distintos problemas sobre las funciones lineales y cuadráticas.* El profesor debe reconocer los diferentes tipos se situaciones problemas que se presentan en el sistema educativo de educación secundaria. En nuestro caso, al construir el significado de referencia se identificó cinco situaciones en la que se movilizan la función lineal y cuadrática. La prioridad en las cuatro primeras fue la forma cómo emerge la función según la situación propuesta. Para la quinta categoría nos centramos particularmente en el Currículo Nacional (Perú, 2016) y el nuevo Diseño Curricular Básico de la Formación Inicial Docente (2019).
- *Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado*.
  El profesor debe tener la capacidad de identificar las variables específicas que le permitan particularizar o generalizar el objeto de estudio.
- *Elige adecuadamente situaciones que permitan ejemplificar el tema de estudio*

en toda su amplitud, en este caso, las que se relacionan con las funciones lineales y cuadráticas.

Lenguaje

- *Reconoce los diferentes lenguajes que se utiliza para representar una función.* Estas pueden ser, verbal, numérico (tablas), gráfico (diagramas o planos cartesianos), simbólico-literal (como conjunto de pares ordenados o como expresión analítica).
- *Utiliza diferentes lenguajes: verbal, gráfico, simbólico, etc. para resolver la situación planteada.*

  El profesor debe ser capaz de emplear los diferentes lenguajes asociados a las funciones lineales y cuadráticas al resolver una situación.
- *Emplea un lenguaje adecuado al abordar la situación propuesta, que corresponda al nivel educativo que se pretende enseñar.*
- *Reconoce si el gráfico de una función en el plano cartesiano corresponde a una función lineal o una función cuadrática.*
- *Elabora la representación algebraica de la función cuadrática, lineal o afín. Para ello emplea su regla de correspondencia.*
- *Reconoce el lenguaje verbal que interviene en la situación, extrae información relevante, lo traduce a datos y condiciones asociados a expresiones gráficas o algebraicas que lo generalice.*
- *Interpreta los resultados obtenidos luego de la resolución de situaciones que involucra funciones lineales y cuadráticas.*

Procedimientos

- *Resuelve problemas de funciones lineales y cuadráticas empleando procedimientos adecuados.*
- *Describe el procedimiento que desarrolla, señalando las posibles acciones a realizar.*
- *Transforma representaciones algebraicas de la función cuadrática en gráficos*

que se encuentran en el plano de coordenadas rectangulares.

- *Modeliza situaciones donde intervienen funciones lineales y cuadráticas, que sean útiles y familiares a los estudiantes, traduciendo sus elementos a la matemática.*
- *Establece criterios que le permitan elegir un procedimiento, según sea el tema que se pretenda enseñar y el nivel educativo al que pertenezca la situación.*
- *Emplea propiedades de los números reales para hallar en forma analítica el rango de las funciones analizadas.*
- *Establece criterios gráficos para determinar el rango de las funciones que se analizan.*
- *Establece criterios que relacionen el lenguaje verbal interviniente en la situación problemática, con el dominio y rango de la función.*
- *Emplea adecuadamente los instrumentos de enseñanza como el software GeoGebra como parte de la solución del problema. Esta herramienta permite estudiar a la función lineal y cuadrática de forma dinámica, reconociendo la dependencia entre sus elementos.*
- *Emplea diversas herramientas de las matemáticas para la resolución de los problemas, tales como ecuación lineal, ecuaciones cuadráticas, magnitudes proporcionales, sucesiones aritméticas.*
- *Identifica el comportamiento varacional de las funciones lineales y cuadráticas.*
- *Emplea estrategias para encontrar reglas generales.*
- *Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.* De este modo, establece relaciones entre las nociones, conceptos o propiedades con respecto a las funciones lineales y cuadráticas empleando diversas representaciones.

Conceptos/propiedades

- *Reconoce la definición de función que emerge, según la situación planteada.*
- *Conoce la definición de los objetos que comúnmente se emplean alrededor del tema a enseñar: función lineal, función afín, función cuadrática, dominio, rango, pendiente, intercepto con el eje x e intercepto con el eje y.*

Argumentos

- *Justifica detalladamente su procedimiento al resolver problemas donde intervienen funciones lineales y cuadráticas*, empleando para ello herramientas adecuadas que apoyen su procedimiento según sea el caso.
- *Se presentan situaciones en las que el estudiante tenga que argumentar.*
- *Los argumentos son de tipo deductivo e inductivo.*

Con respecto al conocimiento ampliado:

- *Identifica las posibles generalizaciones de la situación y conexiones con otros temas más avanzados, teniendo presente la función que emerge en la situación propuesta.*

Orientaciones curriculares

- *Identifica las capacidades y competencias esperadas por el currículo, referente a las funciones lineales y cuadráticas, que son abordados realizando tareas adecuadas.*
- *Identifica las situaciones propias de cada nivel educativo de secundaria, tomando en cuenta las capacidades y competencias descritas en el currículo.*
- *Comprende los conocimientos disciplinares que fundamentan las competencias del currículo vigente y sabe cómo promover su desarrollo.*

Conexiones intra-disciplinares

- *Explica las conexiones que pueden establecerse con otras áreas de la matemática y que aparecen en el currículo.*

  Para ello, identifica las diferentes situaciones donde interviene la noción de función lineal y cuadrática, como, por ejemplo, en el caso de maximización de áreas que corresponde a la geometría, o maximización/minimización de ingresos y costo que pertenecen a la economía, que establece la conexión del contenido matemático con otras áreas tanto de los que pertenecen a las matemáticas, como los que están fuera de ella

Conexiones inter-disciplinares

- Explica las conexiones que pueden establecerse con otras áreas que difieren de las matemáticas, pero que se encuentran dentro del currículo.

A continuación, presentamos una síntesis de los conocimientos didáctico matemáticos del profesor de matemática, en relación a la faceta epistémica y ecológica.

Tabla 7. *Indicadores del conocimiento didáctico matemático en relación a las funciones lineales y cuadráticas en las facetas epistémica y ecológica*

Faceta epistémica/ecológica	**Profesor**
Conocimiento en común	Resuelve las tareas donde intervienen funciones lineales y cuadráticas.
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relaciones:
Situaciones	Reconoce los distintos problemas sobre las funciones lineales y cuadráticas. Elige adecuadamente situaciones que permitan ejemplificar del tema de estudio en toda su amplitud.
Lenguaje	Reconoce los diferentes lenguajes que se utiliza para representar una función. Utiliza diferentes lenguajes: verbal, gráfico, simbólico, etc. para resolver una situación planteada. Emplea un lenguaje adecuado al abordar la situación propuesta, que corresponda al nivel educativo que se pretende enseñar. Interpreta los resultados obtenidos luego de la resolución de situaciones que involucra funciones lineales y cuadráticas.
Procedimiento	Resuelve problemas de funciones lineales y cuadráticas empleando procedimientos adecuados. Describe el procedimiento que desarrolla, señalando las posibles acciones a realizar. Emplea diversas herramientas matemáticas para la resolución de los problemas. Identifica el comportamiento varacional de las funciones lineales y cuadráticas.

Concepto/ propiedades	Reconoce la definición de función que emerge, según la situación planteada. Conoce la definición de los objetos que comúnmente se emplean alrededor del tema a enseñar.
Argumentos	Justifica detalladamente su procedimiento al resolver problemas donde intervienen funciones lineales y cuadráticas. Los argumentos son de tipo deductivo e inductivos.
Conocimiento ampliado	Identifica las posibles generalizaciones de la situación y conexiones con otros temas más avanzados, teniendo presente la función que emerge en la situación propuesta.
Orientaciones curriculares	Identifica las capacidades y competencias esperadas por el currículo, referente a las funciones lineales y cuadráticas, que son abordados realizando tareas adecuadas. Identifica las situaciones propias de cada nivel educativo de secundaria, tomado en cuenta las capacidades y competencias descritas en el currículo.
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que pueden establecerse con otras áreas de la matemática y que aparecen en el currículo.
Conexiones inter-disciplinares	Explica las conexiones que pueden establecerse con otras áreas fuera de las matemáticas, pero que se encuentran dentro del currículo.

4.2 Indicadores en relación a la faceta cognitiva y afectiva

En esta sección presentaremos algunos indicadores de los conocimientos didáctico matemáticos que tengan relación con la faceta cognitiva y afectiva. En este caso realizaremos una adaptación de la descripción general de Godino (2009) para definir los indicadores del conocimiento en relación a las funciones lineales y cuadráticas. También tomaremos en cuenta el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019) y Currículo Nacional (Perú, 2016), con el propósito que estos indicadores sean característicos del nivel de secundaria peruana.

Configuraciones cognitivas

- *Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea, en relación a las funciones lineales y* *cuadráticas, que se les propone.* Estas incluyen: estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones, etc.

Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones

- *Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de un determinado tipo de tareas desarrollada por los alumnos, asociadas a las funciones lineales y cuadráticas.*

Evaluación de aprendizajes

- *Emplea una variedad de estrategias y tareas de evaluación de acuerdo con las características del estudiante, que permitan evidenciar los significados personales.*
- *Formula preguntas que permitan esclarecer los significados personales por los estudiantes.*
- *Interpreta los resultados de la evaluación, en base a los criterios establecidos y a partir de ellos toma decisiones sobre el proceso de enseñanza.*
- *Involucra constantemente a los alumnos en el proceso de evaluación durante todo el aprendizaje.*

Actitudes, emociones, creencias, valores

- *Describe estrategias que se pueden implementar, que guarden coherencia con los propósitos de aprendizaje, y que tengan potencial para desafiar y motivar a los estudiantes.*
- *Fomenta la comprensión, en los estudiantes, del sentido de las situaciones propuestas en un campo de aprendizaje más amplio.*
- *Elige adecuadamente situaciones que contribuyan a la participación del alumno en el proceso de solución.*
- *Brinda retroalimentación adecuada, según sea la necesidad de cada estudiante.*

A continuación, presentamos los indicadores que se relacionan con el conocimiento didáctico matemático del docente de matemáticas, en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

Tabla 8.*Indicadores del conocimiento didáctico matemático en relación a las funciones lineales y cuadráticas en la faceta cognitiva y afectiva*

Faceta cognitiva + afectiva	**El profesor**
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones...)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea, en relación a las funciones lineales y cuadráticas, que se les propone.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales errores de aprendizaje en la resolución de una situación asociada a las funciones lineales y cuadráticas.
Evaluación de aprendizajes	Emplea una variedad de estrategias y tareas de evaluación de acuerdo con las características del estudiante, que permitan evidenciar los significados personales. Formula preguntas que permitan esclarecer los significados personales por los estudiantes. Involucra constantemente a los alumnos en el proceso de evaluación durante todo el aprendizaje.
Actitudes, emociones, creencias, valores.	Describe estrategias que se pueden implementar, que guarden coherencia con los propósitos de aprendizaje, y que tengan potencial para desafiar y motivar a los estudiantes. Elige adecuadamente situaciones que contribuyan a la participación del alumno en el proceso de solución.

4.3 Indicadores en relación a la faceta interaccional y mediacional

Por último, para caracterizar los indicadores referentes a las facetas interaccional y mediacional tomaremos como base los indicadores generales descritos por Godino (2009) y realizaremos una adaptación a ello. Ahora, nuestra prioridad será el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019) que se centra el desarrollar capacidades y desempeños de los profesores necesarios para alcanzar el aprendizaje esperado en los estudiantes del nivel educativo secundario. Y, al igual que en los casos anteriores, el Currículo Nacional (Perú, 2016) nos permitirá definir indicadores propios que se relacionan con las funciones lineales y cuadráticas.

Se centra en la configuración didáctica:
Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido.

- *Describe la configuración didáctica que implementaría usando la tarea relacionada a las funciones lineales y cuadráticas.*
- *Gradúa el grado de complejidad de las situaciones propuestas, con respecto a las funciones lineales y cuadráticas, a los estudiantes de tal modo que favorezca al diálogo entre ellos, realicen conjeturas y las validen.*

Modos de interacción profesor-alumnos; alumnos-alumnos:

- *En el proceso de enseñanza, contempla el momento en que los alumnos intervendrán de forma que asuman la responsabilidad de dar la solución a la situación, con respecto a las funciones lineales y cuadráticas.*
- *Ante una situación planteada a los alumnos, contempla en momento de intervenir de modo que resuelva las dudas o los redirija a la solución correcta.*
- *Propone preguntas adecuadas que invitan a la intervención del alumno en la solución de la situación dada.*

Recursos materiales

- *Utiliza tecnologías digitales, como el GeoGebra, para analizar la naturaleza del cambio, en relación a las funciones lineales y cuadráticas.*
- *Justifica cómo la herramienta tecnológica empleada favorece al aprendizaje.*

Tiempo asignado

- *Optimiza el tiempo con el propósito de emplearlo principalmente en situaciones que desarrollen el aprendizaje esperado.*

En la trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)

- *Diseña experiencias de aprendizaje que se relacionan con las funciones lineales y cuadráticas y propone una serie de secuencias para que los estudiantes exploren soluciones, realicen conjeturas y las validen.*

A continuación, presentamos los indicadores del conocimiento didáctico-matemático de la faceta interaccional y mediacional, en relación a las funciones lineales y cuadráticas:

*Tabla 9.*Indicadores del conocimiento didáctico matemático en relación a las funciones lineales y cuadráticas en la faceta interaccional/mediacional

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	**Consigna**
Configuración didáctica:	
Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido.	Describe la configuración didáctica que implementaría usando la tarea que se relaciona a las funciones lineales y cuadráticas. Gradúa el grado de complejidad de las situaciones, respecto a las funciones lineales y cuadráticas, propuestas a los estudiantes de tal modo que favorezca al diálogo entre ellos, realicen conjeturas y las validen.
Modos de interacción profesor-alumnos; alumnos-alumnos	Ante una situación planteada a los alumnos, contempla en momento de intervenir de modo que resuelva las dudas o los redirija a la solución correcta. Propone preguntas adecuadas que invitan a la intervención del alumno en la solución de la situación dada.
Recursos-materiales	Utiliza tecnologías digitales para analizar la naturaleza del cambio, en relación a las funciones lineales y cuadráticas. Justifica cómo la herramienta tecnológica empleada favorece al aprendizaje.
Tiempo asignado	Optimiza el tiempo con el propósito de emplearlo principalmente en situaciones que desarrollen el aprendizaje esperado.

Trayectoria didáctica	Diseña experiencias de aprendizaje que se relacionan con las funciones lineales y cuadráticas y propone una serie de secuencias para que los estudiantes exploren soluciones, realicen conjeturas y las validen

CAPÍTULO V: CARACTERIZACIÓN DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LAS FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS DE PROFESORES DE MATEMÀTICA DE SECUNDARIA EN EJERCICIO

En el presente capítulo, presentaremos los resultados de una entrevista aplicada a un grupo de profesores de matemáticas que enseñan funciones lineales y cuadráticas en la secundaria peruana. En la primera parte mostraremos las situaciones y preguntas que se aplicaron a los profesores que participaron en el estudio. Posteriormente, realizaremos un análisis cualitativo de las respuestas proporcionadas, en base a los indicadores de conocimiento didácticos matemáticos propuestos en el capítulo anterior. Finalmente, presentaremos una propuesta de conocimientos didáctico-matemático que deberá tener el profesor de matemática al enseñar funciones lineales y cuadráticas en la secundaria peruana.

5.1 Situaciones propuestas y análisis a priori

A continuación, presentamos las tres situaciones que aplicamos a los profesores de matemáticas durante la entrevista realizada.

En líneas generales, cada pregunta se enfoca en una consigna específica que caracteriza dos de las seis facetas propuestas por el EOS. Ello nos permitirá analizar los conocimientos didáctico matemáticos que se espera que el docente ponga en juego al enseñar funciones lineales y cuadráticas.

Esta serie de preguntas puede ser aplicado para cualquier objeto matemático de estudio puesto que tiene como criterio los indicadores del conocimiento del conocimiento didáctico matemático propuesto por Godino (2009), que son genéricos.

Situación 1:

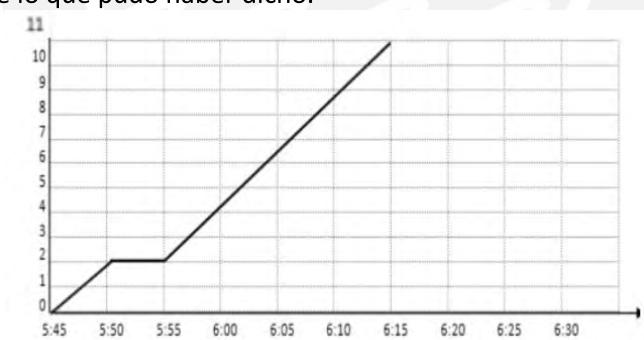
Camino al colegio. Vanessa, Fabián, Paula y Santiago, viven en una Urbanización cercana. Cuando van al colegio, suelen hacerlo en bicicleta en línea recta. La primera clase empieza a las 6:30 am, lo cual significa que deben salir de casa alrededor de las 5:45 am. Porque llegar tarde implicaría un fuerte llamado de atención, ya que la puntualidad es una característica importante para el buen desempeño escolar. La distancia de la Urbanización al colegio es de 11 km. Cada uno de ellos nos contó su recorrido:

Vanessa dice: yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, porque a esas horas de la mañana no me puedo apresurar…además todavía está oscuro. Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde.

Fabián dice: esta mañana me fui para el colegio en la bicicleta bien rápido, pero en la mitad del camino ¡se daña la cadena! Traté de organizarla, pero no tenía herramientas y no sé mucho de mecánica, así que me tocó irme caminando con mi bicicleta en la mano el resto del recorrido y lo peor es que llegué tarde al colegio.

Paula dice: yo salí de mi casa a la misma hora que todos, a una misma velocidad en todo el recorrido, ni muy rápido ni muy despacio. Eso sí, no me entretuve con nada y lo mejor de todo es que llegué un poquito más temprano para prepararme para la clase de matemáticas.

Santiago: representa su historia mediante el siguiente gráfico de distancia vs tiempo…imagínate lo que pudo haber dicho.



a) Grafica el recorrido de Vanesa, Fabián y Paula, y explica el procedimiento que sigues.
b) Describe cuál fue el recorrido de Santiago.

Figura 23. Situación 1

Relación entre la situación 1 y los conocimientos didácticos matemáticos

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?

Esta pregunta centra su atención en las facetas epistémica y ecológica. Tiene el propósito de identificar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que el docente pone en juego en la solución de la situación problemática propuesta. A partir de ello, reconocer los indicadores que se espera que el docente desarrolle.

En el caso del lenguaje, reconocer los distintos lenguajes empleados para representar una función lineal, utilizar diferentes lenguajes para resolver la situación planteada, emplear un lenguaje adecuado al abordar la situación propuesta, reconocer si el gráfico de una función en el plano coordenadas rectangulares corresponde a una función lineal.

En los procedimientos, resolver problemas de funciones lineales empleando procedimientos adecuados, describir el procedimiento seguido indicando las posibles acciones a realizar, modelizar situaciones que involucren funciones lineales, establecer criterios que le permitan elegir un procedimiento adecuado, establecer criterios que asocien el lenguaje verbal involucrado en la situación, con el dominio y rango de la función, reconocer el comportamiento variacional de las funciones lineales.

En los conceptos, reconocer la definición de función que emerge, conocer la definición de objetos comúnmente empleados alrededor del tema de función lineal. En el argumento, justificar rigurosamente su procedimiento en la resolución de problemas que involucren funciones lineales.

Por ejemplo, en el ítem a) el docente debe extraer los datos relevantes de la situación extra matemática y asociarlos con la gráfica de una función lineal en el sistema de coordenadas rectangulares. Esto debe permitir reconocer que los recorridos se modelan con una función lineal. Lo que a su vez permitirá justificar, por qué un segmento tiene una pendiente más elevada o menos elevada con respecto al otro segmento e identificar el rango y dominio de la función.

Para el ítem b), se espera que el docente reconozca el comportamiento varacional de la función lineal y lo interprete según el contexto donde se desarrolle la situación. Esto debe permitir reconocer que el lenguaje empleado es adecuado para abordar la situación propuesta.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta se centra en la faceta epistémica/ecológica. Se busca esclarecer si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema y hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación. También, se pretende reconocer si realiza conexiones con otras áreas, además de la matemática.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

   Centra su atención en las facetas cognitiva y afectiva. Esta pregunta nos permitirá reconocer qué conocimientos previos tiene el profesor. Ello contribuirá a analizar hasta qué grado es posible que el docente describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver una situación determinada.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

   Tiene como propósito analizar las facetas cognitiva y afectiva. Particularmente, describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes en el desarrollo de la situación propuesta.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
   a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
   b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
   c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

   Si la respuesta es negativa:

   ¿Por qué no?

   Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones lineales y cuadráticas.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

   Las preguntas 5a) y 5b) centran su atención en la faceta epistémica/ecológica y la 5c) y 6 en la faceta interaccional/mediacional.

   En el primer caso, se espera que el docente elija una situación considerando el grado al que se pretenda enseñar y en el segundo caso, que gradúe el grado de complejidad dependiendo de la situación propuesta.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

   La intención de la pregunta 7 es que el docente identifique la definición de función lineal (modelo matemático para las funciones de proporcionalidad) que emerge de la situación propuesta (faceta epistémica/ecológica).

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?

Esta pregunta busca reconocer si el docente emplea herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas, como el software GeoGebra, que contribuya a afianzar los conocimientos previamente enseñados.

Respuestas esperadas a las preguntas planteadas en la situación 1

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
   Para la pregunta a) se espera que el estudiante identifique el lenguaje verbal involucrado en el contexto. Por ejemplo, *tranquilidad y despacio*, *pedalear más deprisa, bien rápido, ¡se daña la bicicleta! traté de organizarla, me tocó irme caminando, llegué tarde al colegio, ni muy rápido ni muy despacio, no me entretuve con nada* y *llegué un poquito más temprano*, asociándolo a la pendiente de la función lineal. Por otro lado, también debe identificar el dominio y rango de la función que se encuentra dentro del contexto de la situación propuesta.

   En la parte b) se espera que el estudiante interprete los datos asociados a la gráfica de la función lineal usando un lenguaje verbal. Esta tiene que tener relación con la pendiente; a mayor pendiente, mayor velocidad constante, a menor pendiente menor velocidad constante y pendiente cero, inmovilidad de la persona. También se debe considerar la interpretación en relación al dominio y rango de la función.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
      La definición de pendiente de una función lineal y magnitudes proporcionales.
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?
      Al no existir pares ordenados, el alumno solo emplearía lo que demanda la situación, en este caso, la expresión gráfica de la función lineal y para la consigna b) la interpretación de la función lineal usando un lenguaje verbal.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
   La definición de razón constante de una función lineal, la de magnitudes proporcionales y la ubicación de un punto en el plano cartesiano, la definición de velocidad y cómo graficar una función lineal.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
   No reconocer cuándo, en un contexto extra matemático, se puede modelizar con una función lineal y viceversa, no identificar el dominio y rango de la función, no distinguir lo que representa el eje *x* y el eje *y* dentro del contexto de la situación.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
   a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
      La situación fue propuesta para estudiantes entre segundo y cuarto año de secundaria.
   b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
      Dada las características de la situación, se puede considerar incluirlas al final de la clase de modo que afiance los conocimientos previamente adquiridos.
   c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?
      Grafique los tres recorridos en un solo plano cartesiano y distinga cuál es el recorrido que más le conviene si queremos llegar temprano (tarde) al colegio. ¿Qué datos adicionales propondríamos para que al graficar los recorridos la pendiente de la función sea mayor o menor? Y viceversa.

Si la respuesta es negativa:

¿Por qué no?

Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones lineales.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
   Podríamos proponer datos adicionales que permitan graficar la función lineal con mayor exactitud.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?
   Función lineal.

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?
   Sí, a medida que se use el deslizador para cada intervalo de tiempo en que la velocidad es constante, se podría plantear la siguiente pregunta, ¿qué significa los diferentes valores que toma la pendiente de la forma *f(x)=ax*?, con el propósito que se familiarice con la relación que existe entre el dominio y rango de la función.

Situación 2

Una empresa dedicada a empacar y transportar huevos ha proyectado, con la siguiente función, sus ingresos (I) según los miles de huevos empacados (h):

$I(h) = -100h^2 + 1000h + 7500$, con $h \geq 0$

¿Para qué valores de h se alcanzan el ingreso máximo y el ingreso nulo?

Figura 24. Situación 2

Relación entre la situación 2 y los conocimientos didácticos matemáticos

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación? Esta pregunta centra su atención en las facetas epistémica y ecológica. Tiene el propósito de identificar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que el docente ponen en juego en la solución de la situación problemática propuesta. A partir de ello, reconocer los indicadores que se espera que el docente desarrolle.

   En el caso del lenguaje, reconocer el lenguaje simbólico literal (expresión analítica) empleado para representar la función cuadrática y reconocer el lenguaje verbal asociado al contexto de la situación.

   En los procedimientos, se espera que el docente resuelva la situación empleando procedimientos claros, describir el procedimiento seguido, indicando las posibles acciones a realizar y justificando rigurosamente cada una de ellas. También que identifique las diferentes herramientas matemáticas para la solución del problema como la ecuación cuadrática. Por último, reconocer los concepto y propiedades que se emplean como la definición de la función cuadrática en su expresión analítica, vértice, intercepto con el eje *x* e intercepto con el eje *y*.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta se centra en las facetas epistémica y ecológica. Se busca esclarecer si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema y hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación. También, se pretende reconocer si realiza conexiones con otras áreas, además de la matemática.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
   Centra su atención en la faceta cognitiva/afectiva. Esta pregunta nos permitirá reconocer qué conocimientos previos tiene el profesor. Ello contribuirá a analizar hasta qué grado es posible que el docente describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver una situación determinada.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
   Tiene como propósito analizar las facetas cognitivas y afectiva. Particularmente, describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes en el desarrollo de la situación propuesta.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
   a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
   b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
   c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

   Si la respuesta es negativa:

   ¿Por qué no?

   Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones lineales.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
   Las preguntas 5a) y 5b) centran su atención en las facetas epistémica y ecológica y la 5c) y 6 en la faceta interaccional/mediacional.

En el primer caso, se espera que el docente elija una situación considerando el grado al que se pretenda enseñar y en el segundo caso, que gradúe el grado de complejidad dependiendo de la situación propuesta.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?
   La intención de la pregunta 7 es que el docente identifique la definición de función lineal (modelo matemático para las funciones de proporcionalidad) que emerge de la situación propuesta (facetas epistémica y ecológica).

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?
   Esta pregunta busca reconocer si el docente emplea herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas, como el software GeoGebra que contribuya a afianzar los conocimientos previamente enseñados.

Respuestas esperadas a las preguntas planteadas en la situación 2

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
   Para la primera pregunta, identificar el lenguaje verbal, *ingreso máximo*, asociado al contexto del problema. Luego, identificar el signo del coeficiente principal de la función cuadrática y determinar su concavidad/convexidad. De aquí, existen dos posibles procedimientos, que el estudiante utilice la fórmula de vértice de una función cuadrática o complete cuadrados para formar un binomio y determine el vértice de la función. Ello le permitirá hallar el valor máximo y asociarlo con el contexto de la situación.

   De igual modo, para la segunda pregunta, se espera que el estudiante identifique el lenguaje verbal, *ingreso nulo* asociado al contexto, iguale la función a cero y resuelve el problema como una ecuación de segundo grado empleando manipulaciones algebraicas: método del aspa simple o discriminante. Luego, elija el valor apropiado para el problema usando el dato adicional de *h>0*. Por último, interprete el resultado usando un lenguaje verbal.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   Para la primera pregunta, posiblemente utilice la noción de vértice de una función. Para la segunda pregunta, el concepto de intercepto con el eje *x.*

   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?
   Dada las características de la situación, el estudiante emplearía un lenguaje verbal, un lenguaje simbólico literal (expresión analítica) y el gráfico.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
   Manipulación algebraica: binomio al cuadrado, la acción de completar cuadrados para formar binomio al cuadrado, resolución de ecuación cuadrática, definición de vértice e intercepto de la función cuadrática con el eje *x*, definición de ingreso, ingreso mínimo y máximo.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
   La interpretación del valor que se asocia con el ingreso máximo, el valor que es adecuado para la solución (*h>0*), errores en la manipulación algebraica, como, acción de completar cuadrados o resolver una ecuación de segundo grado.

5. ¿Emplearías esta situación si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
   a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?

La situación está asociada al nivel educativo de cuarto o quinto año de secundaria.

b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?

   La situación se puede considerar como ejemplo aplicativo, al final de la clase, donde se puede hacer conexiones interdisciplinares.

c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

   Si queremos un ingreso mínimo, ¿qué cambios haríamos a la función cuadrática?, ¿a partir de qué cantidad de huevos empacados el ingreso disminuye (aumenta)?

Si la respuesta es negativa:

¿Por qué no?

Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones lineales.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

   Podría cambiarse los coeficientes de la función cuadrática de modo que sea más asequible las manipulaciones algebraicas.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

   Valores extremos de la función cuadrática e interceptos con el eje *x.*

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?

   A medida que los profesores y estudiantes estén familiarizados con el software GeoGebra, puede utilizarse para reconocer cómo los coeficientes que acompañan a las variables de la función cambian la expresión gráfica. Para ello, podríamos usar varios deslizadores que representen los coeficientes de la función cuadrática en su expresión analítica y preguntar: ¿para qué valores se tiene un único ingreso máximo o mínimo?, ¿para qué valores no tendría un ingreso mínimo o máximo? Con el propósito de analizar las variaciones que sufre la función a medida que varíen sus coeficientes.

Situación 3

En este problema trabajarán en el programa GeoGebra con un conjunto de funciones cuadráticas que tienen algunas características en común. Sigan las instrucciones que se indican a continuación: • En un nuevo archivo GeoGebra, creen un *Deslizador* de nombre *a* con un intervalo de -5 a 5. • Ingresen en la barra de Entrada la siguiente función: $f(x)=ax^2-5$. Al mover el deslizador, para cada valor de *a*, se obtiene una parábola diferente. Antes de continuar, guarden el archivo con el nombre *problema4.gbb.* Respondan las siguientes consignas: a. ¿Cuánto tiene que valer *a* para que el punto (2;3) pertenezca al gráfico de la función obtenida? b. ¿Será posible encontrar un valor *a* para que el punto (1;3) pertenezca al gráfico de la función obtenida? Si responden que sí, encuéntrenlo. Si responden que no, expliquen por qué. c. ¿Cuánto tiene que valer *a* para que las raíces de la ecuación obtenida sean -5 y 5? ¿-10 y 10? d. Si colocan el deslizador en la posición *a*=0, podrán comprobar que la gráfica se transforma en una recta. ¿Pueden explicar por qué? e. Usando la función que se obtiene cuando *a*=-3,5 encuentren un valor de *x* para que el punto (*x*;19) pertenezca a la parábola. ¿Cuántos hay? f. Usando la función que se obtiene cuando *a*=-7, encuentre dos valores distintos de *x* para que el punto (*x*; -180) pertenezca a la parábola.

Figura 25. Situación 3

Relación entre la situación 3 y los conocimientos didácticos matemáticos

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación? Si el docente emplea lápiz y papel, esta pregunta centra su atención en la faceta epistémica/ecológica. Tiene el propósito de identificar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que el docente pone en juego en la

solución de la situación problemática propuesta. A partir de ello, reconocer los indicadores que se espera que el docente desarrolle.

Si el docente emplea el software GeoGebra, principalmente, centra su atención en las facetas interaccional y mediacional. Es decir, hasta qué grado el docente emplea hábilmente herramientas adicionales como el software GeoGebra que contribuyan a afianzar la comprensión de los conceptos y propiedades de la función cuadrática y si justifica adecuadamente el empleo de la misma. Por último, describir cuáles son los conocimientos que pone en juego el docente al resolver las situaciones utilizando esta herramienta tecnológica.

En el ítem a) se espera que fácilmente con la herramienta deslizador puedan hallar el valor de *a* solicitado. También, a la falta de familiaridad o comodidad con el software emplee lápiz y papel, de este modo podemos identificar hasta qué grado el docente resuelve problemas de funciones cuadráticas empleando procedimientos claros y adecuados, identificar los lenguajes, concepto/propiedades, procedimientos y argumentos puestos en juego en el momento de resolver los problemas.

En el ítem b), al no poder hallar el valor de a de forma directa, existen dos opciones para resolver la pregunta. La primera, que modifique el rango de valores de *a* (facetas interaccional y mediacional) o resuelva el problema empleando procedimientos claros y adecuados a lápiz y papel (faceta epistémica y ecológica).

En el ítem c), para la primera parte, utilizar el deslizador será suficiente para hallar el valor de *a* (facetas interaccional y mediacional), pero al igual que los demás ítems, también tiene la posibilidad de resolverlo manualmente. Para la segunda parte, el valor de *a* será racional. Por esta razón acudirá a manipulaciones algebraicas, proporcionándonos información sobre las facetas epistémica y ecológica. En particular, resolver problemas de funciones cuadráticas empleando procedimientos claros y herramientas adecuadas tales como las ecuaciones lineales.

El ítem d) tiene como propósito identificar hasta qué grado el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema, como la definición de función cuadrática.

El ítem e) y f) nos permitirá ver hasta qué grado el docente emplea herramientas adecuadas para la resolución de la pregunta. Tales como la ecuación de segundo grado.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta se centra en la faceta epistémica/ecológica. Se busca esclarecer si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema y hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación.

3 ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

   Centra su atención en la faceta cognitiva/afectiva. Esta pregunta nos permitirá reconocer qué conocimientos previos tiene el profesor. Ello contribuirá a analizar hasta qué grado es posible que el docente describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver una situación determinada.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

Tiene como propósito analizar la faceta cognitiva/afectiva. Particularmente, describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes en el desarrollo de la situación propuesta.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
   a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
   b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
   c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

   Si la respuesta es negativa:

   ¿Por qué no?

   Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones cuadráticas.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

   Las preguntas 5a) y 5b) centran su atención en la faceta epistémica/ecológica y la 5c) y 6 en la faceta interaccional/mediacional.

   En el primer caso, se espera que el docente elija una situación considerando el grado al que se pretenda enseñar y en el segundo caso, que gradúe el grado de complejidad dependiendo de la situación propuesta.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

   La intención de la pregunta 7 es que el docente identifique la definición de función lineal (modelo matemático para las funciones de proporcionalidad) que emerge de la situación propuesta (facetas epistémica y ecológica).

Respuestas esperadas para las preguntas planteadas en la situación 3

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?

- Para la consigna a) existen dos posibles procedimientos: con la ayuda de la herramienta deslizador el estudiante puede ubicar el punto de la forma que pertenezca a la función cuadrática y determinar el valor de *a* o resolver la situación manualmente, mediante la regla de correspondencia y resolver la ecuación de primer grado.
- Para la consigna b), al notar que según el intervalo pre-establecido de la herramienta deslizador no es posible hallar un valor adecuado para *a*, se espera acudir a las manipulaciones algebraicas (resolución de ecuación de primer grado) tomando en cuenta que el par ordenado pertenece a la función cuadrática. Así determinar el valor de *a*.
- Para la consigna c), en la primera parte se puede proceder manipulando la herramienta deslizador y hallar fácilmente el valor de *a*. Al igual que en los ítems anteriores, también tiene la posibilidad de resolverlos manualmente (ecuaciones de primer grado). Para la segunda parte, dado que el valor de *a* es un valor racional no se podrá determinar de manera directa. Ello demandará por parte del alumno realizar manipulaciones algebraicas como la resolución de una ecuación de primer grado.
- Para la consigna d), se espera que el alumno acuda a la definición de función cuadrática para establecer las razones de la conversión a la función lineal.
- Para las consignas e y f, se espera que el alumno utilice las manipulaciones algebraicas como son las ecuaciones cuadráticas para hallar los valores esperados. Dentro del procedimiento podemos incluir: factorización por aspa simple, la acción de completar cuadrados o determinar los valores por medio de la discriminante.

2. Al resolverlo de esa manera,

a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?

- Para todas las consignas a excepción de la d), utilicen la noción de dominio y rango de la función cuadrática asociada a su regla de correspondencia.
- Para la consigna d), utilice la definición de función cuadrática.
- Adicionalmente, para las consignas e) y f), utilice la definición de discriminante.

b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?
En la situación se emplea el lenguaje simbólico-literal: la expresión analítica de la función cuadrática y conjuntista (pares ordenados). También el lenguaje gráfico (plano cartesiano).

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
La definición de función cuadrática, dominio y rango de la función, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

- Para la consiga a), b), c), e) y f): no identificar la relación entre dominio y rango de la función cuadrática por medio de su expresión simbólica literal (conjuntista), no emplear de forma adecuada la regla de correspondencia al reemplazar el par ordenado (si utiliza manipulaciones algebraicas).
- Manipulaciones algebraicas cuando la situación involucra parámetros.
- Para la consiga d): no justificar de forma adecuada su afirmación empleando la definición de una función cuadrática.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?

La situación está diseñada para un nivel educativo de secundaria. Dada la secuencia de consignas propuestas, podría colocarse a partir de 3ro a 5to de secundaria.

b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?

La situación propuesta puede ser empleada para afianzar los conocimientos adquiridos, al final de la clase. También puede se puede emplear al inicio de la clase como motivación, permitiendo que el alumno explore la relación existente entre la expresión gráfica y analítica de la función cuadrática, así como la relación entre el dominio y rango de la función, para luego consolidar el conocimiento a enseñar.

c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

¿Qué sucedería con la gráfica de la función si el término independiente de la función cuadrática también es un parámetro con valores positivos?, ¿dónde se ubicaría la gráfica de la función si ahora al parámetro toma valores negativos?

Si la respuesta es negativa:

¿Por qué no?

Se espera que el docente señale que sí emplearía la situación para enseñar funciones cuadráticas.

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
Podría asignarse un valor determinado al parámetro para que la situación sea más sencilla para los estudiantes.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

Función cuadrática.

5.2 Implementación: Aplicación del cuestionario y entrevistas

Para cumplir con uno de nuestros objetivos de investigación que es caracterizar los conocimientos didáctico matemáticos de los profesores de la secundaria peruana al enseñar funciones lineales y cuadráticas, como parte del procedimiento metodológico, realizamos una entrevista a cuatro profesores en ejercicio por separado, donde presentamos las tres situaciones propuestas y pusimos en acción la serie de preguntas que diseñamos.

Las entrevistas duraron un promedio de dos horas, estas fueron grabadas y obtuvimos también respuestas escritas. Se transcribieron sus respuestas.

5.3 Sobre los participantes

Los participantes fueron cuatro profesores en ejercicio que dentro de su práctica docente abordaron el tema de funciones lineales y cuadráticas. Es importante resaltar que, en el caso del docente 1 y el docente 3, ambos tienen como profesión la docencia con dos y cuatro años de experiencia respectivamente. Y los docentes 2 y 4, su profesión es la matemática con cinco y tres años de experiencia.

Para la investigación, se designó a cada uno de los participantes con los códigos D1 a D4 con el propósito de proteger su identidad.

5.4 Respuestas de los docentes al cuestionario de entrevistas

En esta sección realizaremos un análisis breve de las respuestas de los docentes al cuestionario aplicado a través de una entrevista (ver Anexo). En el Anexo se encontrarán la transcripción de cada una de ellas.

5.4.1 Respuestas a la situación 1

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación? La respuesta de esta pregunta nos permite identificar los tipos de objetos y procesos que el docente pone en juego al resolver la situación problemática (Facetas epistémica y ecológica).

   Para la primera consigna, todos los docentes reconocieron que la situación había sido descrita empleando lenguaje verbal. De otro lado, la representación gráfica de la situación descrita requería identificar el comportamiento lineal y hacer un esbozo con estas características. Sin embargo, no todos los profesores hicieron ello.

   En el caso del docente D1, asoció la expresión *salgo con mucha tranquilidad y despacio* con una velocidad de pequeño valor (magnitudes proporcionales) y por ende grafica un segmento con poca inclinación (concepto-pendiente). Luego, la expresión *empiezo a pedalear más de prisa*, lo relaciona con una mayor velocidad (concepto-magnitudes proporcionales), entonces al graficar el segmento, lo hace más inclinado con respecto al otro. Por último, en el caso de Vanessa, la expresión *porque no me gusta llegar tarde*, lo relaciona con el valor del dominio y rango de la función graficada (conceptos), tal como se puede ver en la Figura 26.

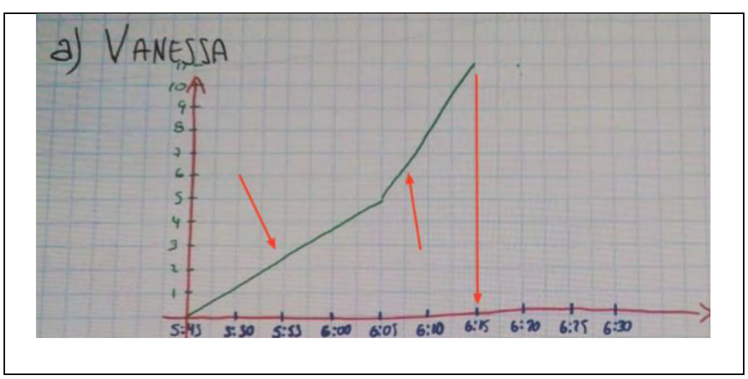


Figura 26. Respuesta 1a de D1_situación 1

Resulta interesante notar que para todas las gráficas realizadas en la consigna a), el docente D1 grafica el sistema de coordenada cartesianas señalando puntos en el eje de las abscisas y ordenadas, lo que llevaría a realizar un procedimiento más claro y preciso. Ello permitirá asignar luego un valor numérico a cada pendiente que está asociada al contexto de la situación (ver Figura 26), proporcionando así una justificación a su procedimiento.

Por ejemplo, volviendo al caso de Vanessa, la expresión *salgo con mucha tranquilidad y despacio […] además todavía está oscuro* lo relaciona a un intervalo de tiempo muy temprano, de 5:45 a.m. a 6:05 a.m. interpretando los datos dentro del contexto de la situación. Esto sería una parte del dominio de la gráfica, y a este dominio le asigna un rango.

Luego, el texto menciona que Vanessa empieza a *pedalear más deprisa*, entonces la pendiente de la función lineal es mayor y en consecuencia su rapidez aumenta. También, la hora de llegada al colegio es de 6:15 a.m. (dominio), porque según se menciona a Vanessa *no le gusta llegar tarde*.

De este modo, reconoce el comportamiento variacional de las funciones lineales y el lenguaje verbal involucrado que contribuya a la solución de la situación, y lo emplea para justificar cada procedimiento dado.

En el caso de Santiago, el segmento menos inclinado (de 5:45 a.m. a 5:50 a.m.) lo interpreta como, *pedalear tranquilo*. Luego, de 5:50 a.m. a 5:55 a.m., cuyo segmento es horizontal, lo interpreta como *descansé 5 minutos*. También, al segmento más inclinado lo relaciona verbalmente como, *empecé a pedalear un poquito más rápido*. Por último, le asigna la interpretación del máximo valor del dominio en la gráfica como, *quería llegar bien temprano* y *llegué bien temprano al colegio* (Figura 27).

Como se puede notar, en la consigna b), el docente D1 interpreta la gráfica de la función lineal utilizando el mismo lenguaje verbal que la situación. Así, este docente emplea un lenguaje adecuado al abordar la situación y justifica cada expresión verbal con el cambio del valor numérico de la pendiente (velocidad), según la gráfica propuesta. De este modo, describe de forma explícita el procedimiento de su solución.

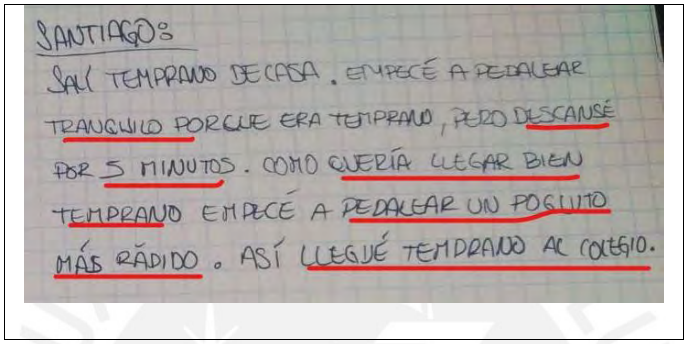


Figura 27. Respuesta 1b de D1_situación 1

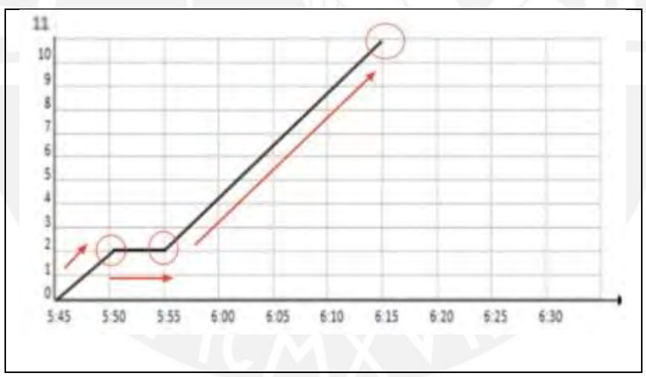


Figura 28. Análisis gráfico de 1b de D1_situación 1

Con respecto al docente D2, es interesante destacar que, al graficar el recorrido de Vanessa, asigna al eje *x* los valores de la distancia, y al eje *y*, lo valores del tiempo (ver Figura 29), lo que no concuerda con lo expresado verbalmente.

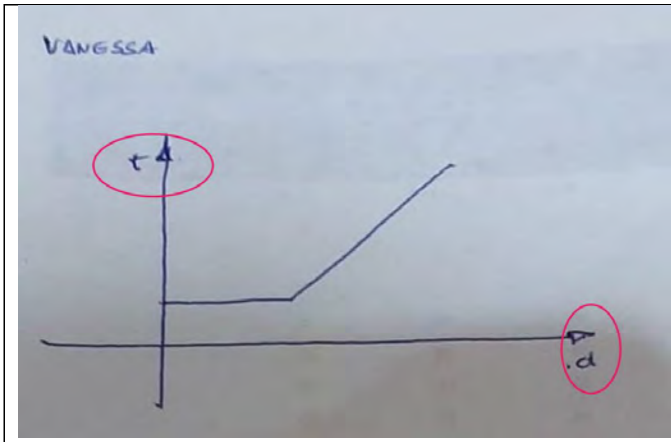


Figura 29. Respuesta 1_Vanessa de D2_situación 1

Asimismo, no asocia correctamente el punto de partida de Fabián (ver Figura 30), porque el par ordenado que se asocia a ello no tiene un valor numérico determinado, cuando el contexto de la situación sí lo indica. Estas dos observaciones tampoco son coherentes con lo que Fabián expresa. De este modo se desprende que este docente no logra establecer una relación entre el lenguaje gráfico y verbal asociado a la función lineal, parte importante para la resolución del problema, según lo propuesto en la solución esperada.

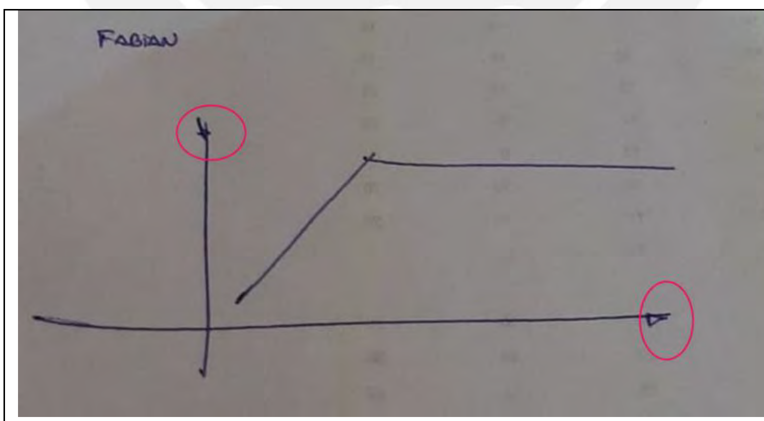


Figura 30. Respuesta 1a_Fabián de D2_situación 1

El docente D2 tampoco toma en cuenta algunas expresiones que le ayudarán a determinar el dominio y rango de la función, tal como sí lo menciona la solución esperada. De ello se desprende que D2 no logra traducir adecuadamente el lenguaje verbal y transitar al leguaje gráfico tomando en cuenta las características del problema.

En el caso de Santiago, relaciona al eje *x* con el tiempo, y al eje *y* con la velocidad. Por ejemplo, de 5:50 a.m. a 5:55 a.m., expresa *su recorrido no ha sufrido cambios*, sigue siendo 2. Ello no concuerda con lo que la gráfica expresa. La solución esperada toma en cuenta el dominio y rango que indica la gráfica para la interpretación verbal y tal como sugiere la pregunta, el eje *x* representa el tiempo y el eje *y* la distancia. De este modo, este docente no alcanza a resolver esta tarea que involucra funciones lineales y tampoco emplea un lenguaje adecuado que permita la interpretación de la función, según el contexto propuesto.

En el caso del docente D3, al igual que el docente D1, asigna valores numéricos al cambio de velocidad que se produce (ver Figura 31), extrayendo de este modo datos relevantes del contexto de la situación para representar la función en su expresión gráfica, pero indica el rango de la función. Justificando de este modo su procedimiento. De ello se desprende que este docente reconoce el concepto empleado, pendiente de la función lineal, reconoce el lenguaje gráfico y verbal involucrado y emplea procedimientos adecuados.

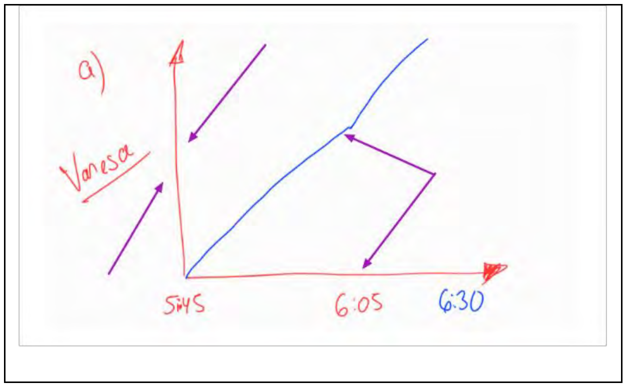


Figura 31. Respuesta 1a de D3_situación 1

En el caso de Fabián, el docente no logra interpretar los datos adecuadamente, puesto que la expresión *le tocó ir caminando*, lo asocia con una recta horizontal, lo que significa que no se ha movido (ver Figura 32), pero el docente lo interpreta como velocidad constante. De ello se desprende que el docente D3 no logra emplear adecuadamente el lenguaje verbal para esbozar la función lineal.

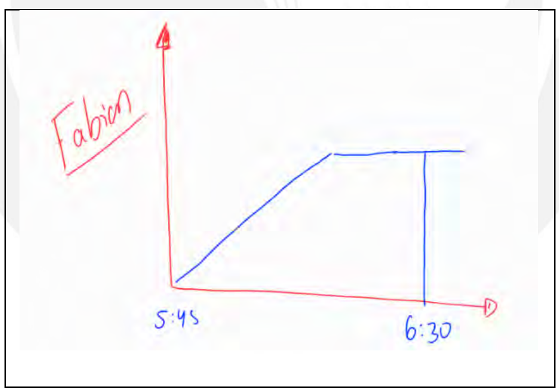


Figura 32. Respuesta 1a_ D3_situación 1

Para el caso de Santiago, D3 minucioso en dar argumentos a su respuesta, indica los puntos de cambio de velocidad (pendiente), y la relación entre el dominio y rango de la función (ver Figura 33). Ello implica que el docente, utiliza un lenguaje adecuado para la interpretación del problema.

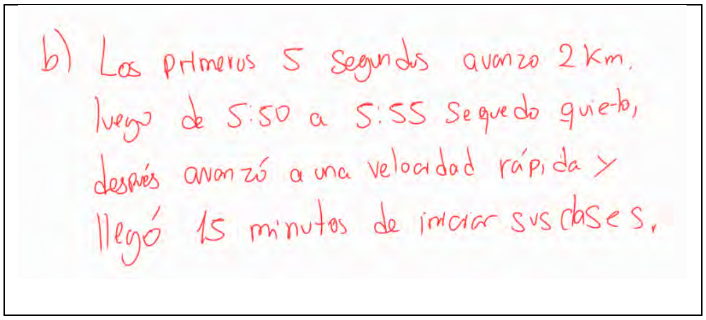


Figura 33. Respuesta 1b de D3_situación 1.

Por último, un detalle a considerar en el caso del docente D4 (ver Figura 34), según la respuesta esperada, es que no identifica el concepto del dominio y rango de la función, aspectos importantes para describir el recorrido de Vanessa de modo que concuerde con lo expresado y forme parte del procedimiento.

Tampoco alcanza a justificar su procedimiento, con el objetivo que indique, por ejemplo, por qué acaba el segmento a cierta distancia; datos que proporciona la situación. Lo que sí justifica es la dependencia entre las dos variables que intervienen en la gráfica.

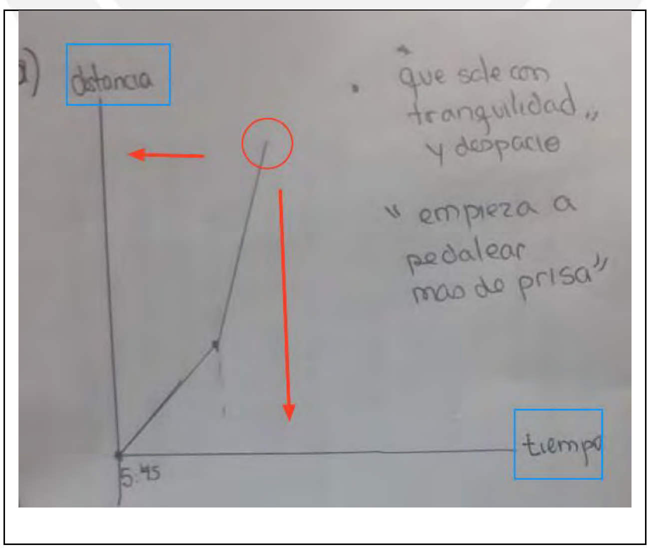


Figura 34. Respuesta 1a_Vanessa_de D4_situación 1

La interpretación para Santiago es poco clara (Figura 35). Por ejemplo, el docente D4 usa expresiones como *recorrió* o *se le malogró,* pero no es explícito en ello. Por lo tanto, en este caso, el docente no logra emplear un lenguaje adecuado que permita la interpretación de la situación propuesta.

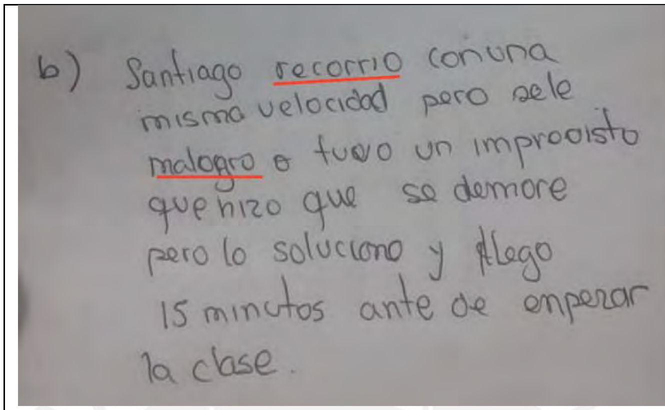


Figura 35. Respuesta 1b de D4_situación 1

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta, busca identificar si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema, hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación y si realiza conexiones con otras áreas de la matemática.

   Para la primera pregunta, la respuesta del docente D4 es la única que coincide con la respuesta esperada. En los otros casos, por ejemplo, al responder la pendiente de una función lineal, D1 reconoce la definición de función que emerge en la situación propuesta. También considera tener conocimiento de áreas extra matemáticas. En particular, de física, velocidad constante. Ello muestra que establece conexiones extra matemáticas.

Por otro lado, la respuesta esperada toma en cuenta la definición de sistema de plano coordenado, el dominio y rango de la función que se emplea en la solución del problema.

En el caso del docente D2, sugiere que el estudiante podría usar tabulaciones para realizar la tarea propuesta. También considera importante que se le proporcione puntos específicos (numéricos) para realizar la solución.

Lo descrito anteriormente indica que el docente D2 no alcanza a identificar de manera puntual las definiciones o propiedades que se emplea en la situación, según la respuesta esperada.

El docente D3, relaciona las definiciones al área de la física, estableciendo así conexiones extra matemáticas. También destaca el concepto de pendiente, que coincide con la respuesta esperada, pero no las magnitudes proporcionales, que es un concepto fundamental para interpretar la relación entre el tiempo y la distancia.

Para la segunda pregunta, ninguno de los docentes mencionó el lenguaje verbal asociado al contexto, lo cual consideramos importante para representar la función lineal. En el caso del docente D1, reconoce el lenguaje gráfico involucrado en la situación, tanto en el mismo planteamiento del problema como en la consigna a).

Por otro lado, el docente D2 reconoce que primero se tendría que saber a qué grado de educación se pretende proponer la situación (Faceta epistémica/ecológica). Es interesante destacar este punto, porque justamente, debido a los elementos que asocia la situación, tales como la física, es oportuno colocar o pensar que está diseñada para alumnos que tuvieron nociones de ello. Así que, como menciona el docente, si está dirigida para *4to o 5to de secundaria*, entonces, usarían a Santiago de modelo y harían lo mismo que él. Esta afirmación concuerda con la respuesta esperada.

En el caso del docente D3, menciona el empleo del lenguaje numérico en la solución. Aunque la situación no lo demande, podría ser un procedimiento adecuado siempre que el problema aporte datos numéricos, pero este no es el caso. Dada las características de la situación, la respuesta esperada indica únicamente el empleo del lenguaje gráfico y el verbal. De ello se desprende que este docente no logra reconocer los lenguajes empleados en la situación propuesta.

La respuesta del docente D4 demuestra que reconoce los diferentes lenguajes empleados para representar a la función cuadrática, gráfico (sistema cartesiano) y el simbólico literal (conjuntista). Pero, también se tendría que añadir, según la respuesta esperada, el lenguaje verbal que permitirá ver la variación entre las dos variables e interpretar la gráfica en el caso de Santiago.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
El propósito de esta pregunta era reconocer qué conocimientos previos tiene el profesor de modo que sea posible que describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver la situación (Faceta cognitiva/afectiva).

Tanto el docente D2 como el docente D4 coinciden con la respuesta esperada. En el caso del docente D1, indica cada uno de los conocimientos previos requeridos según las respuestas esperadas dadas a excepción de la ubicación de un punto en el plano, lo cual consideramos importante por las características de la situación propuesta.

El docente D3 vuelve a destacar la importancia de conocimientos que tengan relación con la física, que contribuye a la solución del problema y establece conexiones extra matemáticos (Faceta epistémica/ecológica).

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
   El foco de esta pregunta era describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes al resolver la situación propuesta (faceta cognitiva/afectiva).

En este sentido, a diferencia de los docentes D2 y D3, los docentes D1 y D4 reconocen que el lenguaje verbal involucrado en la situación puede ser una dificultad en el desarrollo de la solución. Es uno de los dos errores más comunes que, según las respuestas esperadas, se puede dar en este caso. El docente D1 también incluyó un aspecto importante a considerar, la dificultad que los estudiantes pueden tener al graficar el plano cartesiano. En particular, establecer las escalas del sistema cartesiano, tanto en el eje *x* como en el eje *y*.

Para el docente D3 un error importante es el intercambio de los ejes coordenados, aunque la respuesta esperada no lo incluye, consideramos que se puede dar dentro del proceso de solución de los estudiantes. También, el error que señala con respecto a la velocidad constante y velocidad cero, es el mismo error que el docente comete al graficar el recorrido de Fabián, y dentro de ello está la interpretación de la gráfica de la función, tal como menciona la respuesta esperada.

Otro error interesante que la respuesta esperada no consideró, es que los estudiantes interpretan como velocidades iguales las dos rectas oblicuas que se presentan en la gráfica de Santiago.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
    a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
    b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
    c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

    Si la respuesta es negativa:
    ¿Por qué no?

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

Con estas preguntas se espera que el docente elija situaciones que correspondan al nivel educativo que se pretende enseñar (faceta epistémica/ecológica), así como graduar el grado de complejidad del problema (faceta interaccional/mediacional).

En este sentido, para la pregunta 5a), los docentes D1, D2 y D3 coinciden con la respuesta esperada, colocando la situación dentro del grado para el cual fue propuesta. Por otro lado, el docente D4 no considera pertinente emplear esta situación para enseñar funciones lineales. Su respuesta está basada en el contexto extra matemático de la situación. Por ejemplo, comenta: *primero tendría que reconocer algunos conceptos de funciones […] variable independiente, representar un par ordenado en un plano cartesiano*. Todo ello se podría dar si se coloca la situación al final de una clase con el propósito de afianzar los conocimientos previamente enseñados tal como lo menciona la respuesta esperada.

Para la pregunta 5b), solo el docente D3 coincide con la respuesta esperada. Por otro lado, los docentes D1 y D2 indican que la situación se presentaría al inicio de la clase para ser empleada como motivación. Aunque no concuerda con la respuesta esperada puesto que se había sugerido colocarlo al final de la clase para afianzar los conocimientos previamente enseñados, podemos considerar esta elección, siempre y cuando la forma como se presente la situación prepare a los estudiantes a emplear las funciones lineales.

Es interesante notar que en el caso del docente D2, incluso realizaría un cambio de contexto, adecuando el problema a la situación actual en el que vivimos, puesto que ello *contribuye a despertar el interés del estudiante y consolidar los conocimientos que se adquirirán durante el proceso de enseñanza* (faceta cognitiva/afectiva).

Para la consigna 5c), las respuestas de los docentes D1 y D3 coinciden con las respuestas esperadas. Adicionalmente, las preguntas propuestas por el docente D3 consideran incluir el gráfico de velocidad vs distancia para el caso de Paula. Puesto que son otras variables que se ponen en juego consideramos interesante la pregunta para elevar el nivel de complejidad.

En el caso del docente D2, relaciona su respuesta a los cambios que sufre la gráfica a través del tiempo, pero justamente eso es lo que los estudiantes tendrían que considerar al resolver la situación propuesta. Por lo tanto, no habría ningún cambio en el nivel de complejidad.

Por otro lado, la respuesta esperada propone graficar los tres recorridos en un solo plano cartesiano y luego preguntar si quisiéramos llegar temprano (tarde) al colegio, ¿de quién nos guiaríamos?, si Fabián quisiera llegar a la mitad de tiempo, ¿qué sucedería con su velocidad?

Finalmente, en la pregunta 6, la respuesta del docente D1 se relaciona con el lenguaje verbal *en abundancia* que se encuentra en el contexto, así como los personajes que participan en ella. Según comenta, eliminaría estas dos características para que la situación sea más sencilla. Ello demuestra que considera el papel del lenguaje verbal importante en el nivel de complejidad de la situación lo mismo que en la respuesta esperada. Aunque en este caso, se consideró la adición de datos adicionales para una mejor precisión en la gráfica de la función.

Con respecto a la respuesta del docente D2, él indica detalles de suma importancia, tales como redondear las horas en las que se produce los cambios de velocidad para que sea más práctico la interpretación. Ello es razonable, porque para los estudiantes es más sencillo trabajar con números enteros.

También sugiere el cambio de la distancia (11 km) a un número que pueda ser divisible (12 km) para que al determinar la pendiente (velocidad) sea más entendible para los estudiantes. Ambos detalles podrían contribuir a que la situación tenga una menor complejidad, siempre y cuando el contexto aporte datos específicos en los cambios de velocidad o si se le preguntara, en el caso de Santiago, por su velocidad.

En este caso, el docente D3 considera incluir valores numéricos a la velocidad de Vanessa, Fabián y Paula. Ello podría contribuir a que la situación sea más sencilla, ya que extraer los datos relevantes del contexto sería más directo, tal como menciona la respuesta esperada.

Los comentarios del docente D4 acerca de esta pregunta están relacionadas con el lenguaje verbal que involucra la situación. Sugiere un lenguaje más conciso y directo. Por ejemplo, de *¡se daña la cadena! Traté de organizarla, pero no tenía herramientas y no sé mucho de mecánica, así que me tocó irme caminando* a *se malogró la bicicleta, entonces camino*.

Ello podría ser una ayuda significativa para el estudiante, de modo que obtenga los datos más directamente y resuelva la situación.

7. ¿Cuál crees que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?
   Esta pregunta se enfoca en identificar si el docente reconoce la definición de función lineal que emerge de la situación propuesta (faceta epistémica/ecológica).

   Las respuestas de los docentes D1, D2 y D3 coinciden con la respuesta esperada. En el caso del docente D4, la definición sería función por tramos, este tipo de funciones abarca muchos aspectos, pues se puede presentar no solo como segmentos, sino también como curvas, por lo que consideramos que su respuesta es muy general. También reconocemos el conocimiento que tiene el profesor en temas de grados superiores que son importantes para la enseñanza (faceta epistémica/ecológica).

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?
   Esta pregunta busca reconocer si el docente emplea herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas, como el software GeoGebra que contribuya a afianzar los conocimientos previamente enseñados (faceta interaccional/mediacional). Debemos mencionar que todos los docentes entrevistados reconocieron su falta de familiaridad con la herramienta GeoGebra, aunque lo consideraban importante para la enseñanza de funciones.

   En particular, el docente D1 expone un problema adicional en cuanto al uso del software GeoGebra, la desviación del tema a enseñar, por lo que no lo emplearía. Aunque debemos resaltar que la respuesta estaba centrada en describir la habilidad del docente en el empleo del GeoGebra, podemos considerar el criterio de elección del docente al elegir una herramienta tecnológica que permitan la ejemplificación del tema.

Las preguntas que propone D2 son interesantes a medida que se pueda manipular una herramienta del GeoGebra que permita ver de forma dinámica los cambios que sufre la función al cambiar el valor de la pendiente, tal como menciona la respuesta esperada, pero no es específico en qué herramienta podría usar para ello.

En el caso de D3, considera usar la herramienta deslizador asociada a la pendiente de la función, *f(x)=ax*, para ver de forma dinámica su comportamiento, tal como lo menciona la respuesta esperada. Un detalle interesante que mencionar es que, dado los cambios de velocidad por intervalo de tiempo, se tendría que considerar usar varios deslizadores de modo que el estudiante pueda visualizar los cambios de forma más individual y mantener las características de la situación propuesta. De este modo podría optimizar el empleo de la tecnología digital con el propósito de analizar la naturaleza del cambio en las funciones lineales.

Por último, la respuesta de D4 se asocia al reconocimiento de los cambios de las inclinaciones de los segmentos graficados. Por ejemplo, menciona: *¿qué es lo que pasa de tal tiempo a tal tiempo?*, *¿qué es lo que pasa con la distancia?* Sin embargo, consideramos que estas preguntas podrían proponerse en un gráfico hecho a lápiz y papel, y analizar la variación de la velocidad en intervalos de tiempo, tal como ya lo demanda la situación propuesta.

5.4.2 Respuestas de la situación 2

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
   La respuesta de esta pregunta nos permite identificar los tipos de objetos y procesos que el docente pone en juego al resolver la situación problemática (Facetas epistémica y ecológica).

Para la primera pregunta, todos los docentes coinciden con la respuesta esperada con respecto al procedimiento, identificar el lenguaje verbal *ingreso máximo*, asociarlo con el valor máximo de la función cuadrática y realizar la acción de completar cuadrados para hallar el vértice de la función. Pero también todos no llegan a responder la pregunta, que es la interpretación de los resultados.

Por otro lado, solo los docentes D2 y D4 indican el signo del coeficiente principal para analizar la concavidad de la función, detalle importante para justificar su procedimiento según la respuesta esperada. De ello se desprende que los docentes no alcanzan a desarrollar un procedimiento claro y preciso.

En particular, en el caso del docente D1, dada la transformación que realiza (ver Figura 36) no llega a expresar la definición de función cuadrática en su forma canónica. De ello se desprende que, aunque el análisis es el correcto, el procedimiento no es lo esperado.

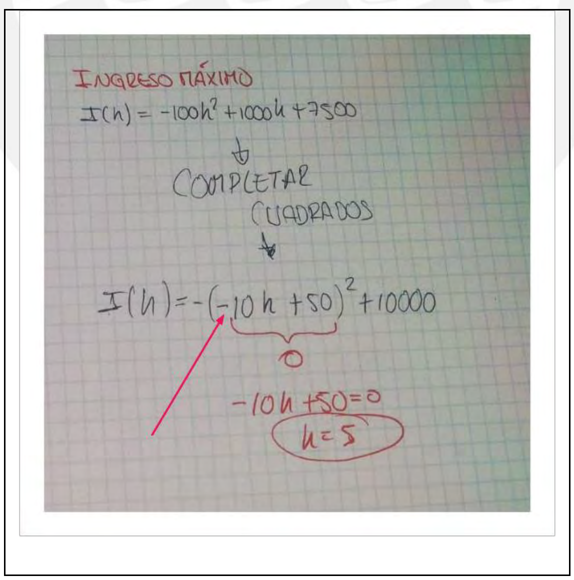


Figura 36 Respuesta 1a de D1_situación 2

En el caso del docente D3 primero toma en cuenta el grado a quién se dirige la pregunta para describir los posibles procedimientos (facetas epistémica y ecológica). Propone el uso de la derivada para 5to de secundaria y la acción de completar cuadrados para 4to de secundaria. La respuesta esperada no considera las derivadas, dado que es un tema que no se encuentra dentro del Currículo Nacional (Perú, 2016), pero podemos reconocer que el docente tiene conocimientos matemáticos que hará posible establecer conexiones con temas más avanzados.

Por otro lado, el docente D4 realiza como procedimiento la acción de completar cuadrados, pero no adecuadamente (ver Figura 37). Tampoco llega a la expresión formal de la función en su forma canónica, según la respuesta esperada. Emplea un lenguaje simbólico literal (conjuntista) para responder la pregunta, aunque la estructura de la pregunta requería una interpretación del resultado en forma verbal.

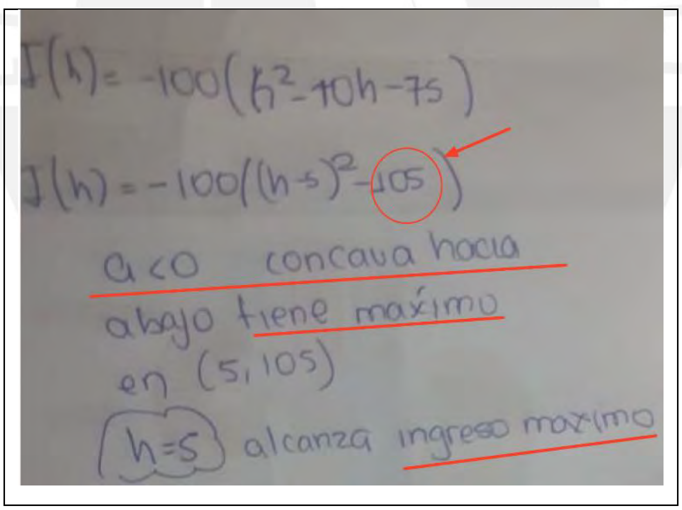


Figura 37. Respuesta 1a de D4_situación 2

En la segunda pregunta, todos los docentes emplean una herramienta adicional, ecuación de segundo grado, para la solución del problema. También realizan la acción de factorización por aspa simple para hallar los valores del intercepto de la función con el eje *x*. Pero, igual que en el primer caso, no llegan a completar el procedimiento interpretando el resultado.

Solo D1 toma en cuenta el dato adicional *(h≥ 0)* para reconocer el valor correcto dentro del contexto de la situación, justificando su elección (ver Figura 38).

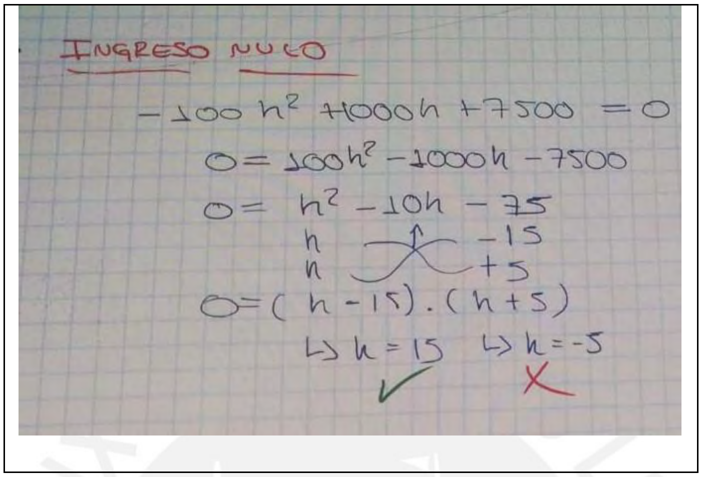


Figura 38. Respuesta 1b de D1_Situación 2

En el caso de D2, no toma en consideración el dato adicional de *h* (*h≥0*), procedimiento importante para identificar el valor correcto (ver Figura 39).

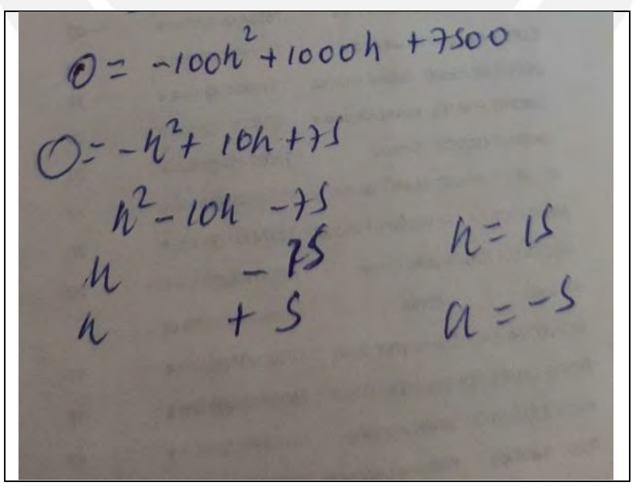


Figura 39. Respuesta 1 de D2_situación 2

Con respecto a la solución del docente D3, es más preciso en cuanto al procedimiento colocando expresiones como *I(h)=0*, de modo que indique los pasos a seguir (ver Figura 40).

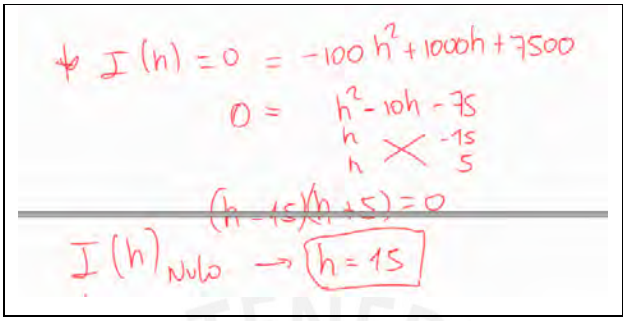


Figura 40. Respuesta 1b de D3_situación 3

Por último, el docente D4 no factoriza correctamente la expresión algebraica por lo que el procedimiento no es el esperado (ver Figura 41).

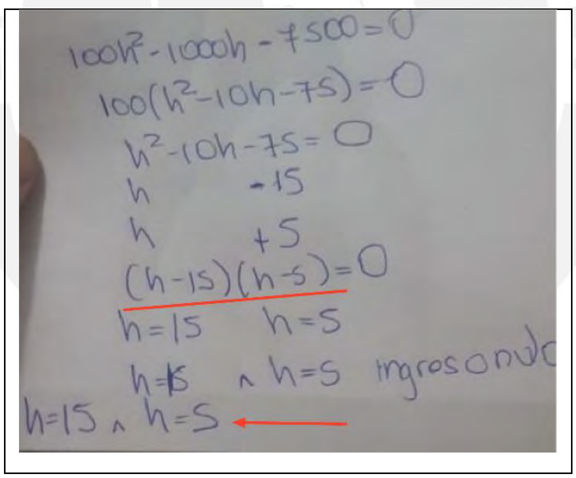


Figura 41. Solución 1b de D4_situación 2

Lo descrito anteriormente implica que todos los docentes emplean el lenguaje simbólico literal (expresión analítica) para resolver la situación, reconocen la definición de función cuadrática que emerge en la situación, conocen la definición de los objetos comúnmente empleados en el tema (intercepto con el eje *x*) y emplean herramientas matemáticas y propiedades (valores extremos de la función) para la resolución del problema.

También, hemos podido notar que el procedimiento para la solución no llega a completarse porque no responden la pregunta de la situación propuesta.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta, busca identificar si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema y hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación. También se pretende reconocer si realiza conexiones con otras áreas de la matemática.

   Una característica para la pregunta 2a), es que todos los docentes a excepción de D4 no toman en cuenta la definición/propiedades de los objetos comúnmente empleados en el tema, como el vértice, intercepto con el eje *x*, concavidad/convexidad de la función cuadrática. En particular, los docentes D1 y D3 considera la situación de índole más algebraica. Asocia la acción de completar cuadrados con una particularidad de la función cuadrática.

   Del mismo modo, el docente D2, menciona el empleo de trinomio cuadrado perfecto para formar la parábola, la ecuación de segundo grado y discriminante. Debemos señalar que, aunque efectivamente según la respuesta esperada, el estudiante puede emplear la definición de discriminante, la ecuación cuadrática es una herramienta para resolver un problema asociada a la función cuadrática. También incluye la *gráfica de una ecuación cuadrática*, esto tendría relación con los interceptos con el eje *x*, que, aunque la situación no lo demande directamente puede emplearse como parte de la solución.

Para la pregunta 2b), los docentes D1, D3 y D4 consideran el empleo del lenguaje simbólico-literal (expresión analítica) de la situación. En particular, el docente D3, también menciona el lenguaje simbólico literal (conjuntista), tanto en la situación como en la solución, tal como lo menciona la respuesta esperada.

Asimismo, los docentes D2 y D4, consideran probable que los estudiantes grafiquen la función cuadrática para analizar su comportamiento. Aunque la situación no lo demanda, puede existir casos donde el estudiante utilice el lenguaje gráfico. Esto sucede generalmente cuando no tiene los saberes necesarios para manipular directamente el lenguaje simbólico literal (expresión analítica) o para asociar la respuesta obtenida de manera operativa.

De ello se desprende que los docentes D2, D3 y D4 emplean diferentes lenguajes para abordar la situación planteada.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

   El propósito de esta pregunta era reconocer qué conocimientos previos tiene el profesor de modo que sea posible que describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver una situación determinada (Faceta cognitiva/afectiva).

   Debemos señalar que en general, ninguno de los docentes indicó la necesidad de saberes relacionados a la economía, criterio importante para la comprensión de la situación. Por otro lado, en el caso de los docentes D1 y D2, describen en gran parte los conocimientos previos caracterizados en las respuestas esperadas. Particularmente, el docente D1 no toma en consideración la noción de vértice, lo que consideramos importante para la resolución del problema, según la respuesta esperada.

En el caso de docente D2 considera también el criterio de la primera derivada, tema que en la actualidad varias de las instituciones educativas particulares incluyen en su silabo de estudio. Asimismo, también menciona el foco de una parábola, aunque no es necesario para resolver la situación, pero demuestra el conocimiento que el profesor maneja de este objeto matemático (Faceta epistémica/ecológica). No menciona las ecuaciones cuadráticas que es un saber importante para responder la segunda pregunta, ni el binomio al cuadrado que se asocia a la acción de completar cuadrados.

En el caso del docente D3 relaciona los conocimientos previos con las manipulaciones algebraicas, solo incluye la definición de una función cuadrática en su forma analítica, dominio y rango. De este modo, el docente no podría llegar a describir las configuraciones cognitivas empleadas por los estudiantes al resolver situaciones asociadas a las funciones cuadráticas.
Asimismo, el docente D4 reconoce solo algunas de las definiciones de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema, tales como, gráfica de una función cuadrática, máximos y mínimos asociadas a la gráfica.

Por esta razón también consideramos importante señalar que, en el caso de los docentes D3 y D4 hubo ausencia de algunos conocimientos de suma importancia para el desarrollo de la solución, por ello, no podrían realizar algunos desempeños a cabalidad, como describir las configuraciones empleadas por el estudiante al resolver este tipo de situaciones. Y como mencionamos anteriormente, los conocimientos asociados al contexto de la situación también son necesario para comprender que es lo que se busca en el problema y dar la interpretación correcta.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

El foco de esta pregunta era describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes al resolver la situación propuesta (faceta cognitiva/afectiva).

Todos los docentes a excepción de D3 asocian uno de los errores más comunes que puede cometer el estudiante con las manipulaciones algebraicas. Así también solo los docentes D3 y D4, mencionan la falta de interpretación de los datos. Ambos errores son los más destacados según la respuesta esperada.

En particular, los docentes D1 y D2 no consideran el dato adicional, $h>0$, criterio importante para que la interpretación del problema sea coherente con el contexto de la situación, según la respuesta esperada. Por otro lado, el docente D4 considera un posible error la acción de graficar la función, criterio con el que también coincidimos si procedieran de esta forma.

De lo descrito anteriormente podemos indicar que los docentes D1 y D2 centran su atención en las manipulaciones algebraica, no tomando en cuenta otros posibles errores de importancia como la interpretación de datos.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
    a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
    b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
    c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

    Si la respuesta es negativa:

    ¿Por qué no?

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
   Con estas preguntas se espera que el docente elija situaciones que correspondan al nivel educativo que se pretende enseñar (faceta epistémica/ecológica), así como graduar el grado de complejidad del problema (faceta interaccional/mediacional).

Con respecto a la pregunta 5a), todos los docentes a excepción de D1 coinciden con la respuesta esperada. De ello se desprende que los docentes identifican situaciones propias de cada nivel educativo de secundaria.

El docente D1 no considera adecuado aplicar la situación como parte de la enseñanza de funciones cuadráticas, porque ser de carácter *más algebraico*. Ello es razonable siempre y cuando consideremos el problema ajeno a un contexto. Sin embargo, las preguntas propuestas en la situación invitan al estudiante a emplear nociones de funciones cuadráticas y objetos asociados a ellas y afianzar tales conocimientos. Esto implica que el docente emplea un criterio de elección de la situación que permita la ejemplificación del tema de funciones cuadráticas (Facetas epistémica y ecológica).

Para la pregunta 5b), solo el docente D3 coincide con la respuesta esperada. Los docentes D2 y D4, sugiere colocar la situación en un inicio del proceso de enseñanza. El objetivo del docente D2 era crear un conflicto que permita relacionar las matemáticas con la vida real, o ver la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática. Es interesante considerar este criterio, porque dada la forma como lo presentaría puede contribuir al interés del estudiante por el tema a enseñar (Facetas cognitiva y afectiva).

En el caso del docente D4, considera que el problema se puede proponer al inicio de clase como situación significativa. Luego de presentarla, expone los *conocimientos que se necesita* y vuelve al problema para resolverlo. Igual que en el caso anterior, consideramos interesante la propuesta porque crearía una motivación por el tema a enseñar. Por otro lado, según la respuesta esperada, también se pudiera dar al final de la clase para realizar conexiones interdisciplinares y valorar los temas enseñados.

Para la pregunta 5c), los docentes D2 y D3 asocian el nivel de complejidad con las manipulaciones algebraicas. Particularmente, el docente D2 propone asignarle números exponenciales a los coeficientes que acompañan al valor de *x* y preguntar por el ingreso mínimo o promedio. Es interesante notar que la pregunta se asocia a los saberes extra matemáticos, conocimientos que al igual que el ingreso máximo o nulo, el alumno podría manipular si tuviera noción de ello.

Por otro lado, el docente D3 incluye preguntas con relación a la utilidad y costo, como, por ejemplo, ¿estoy perdiendo? o ¿estoy ganando? Estas preguntas se centran más en el análisis de la expresión algebraica lo que podría aumentar el nivel de complejidad.

En el caso del docente D4, propone la pregunta, *hallar la gráfica de la función e interpretar* dentro del contexto de la situación. Es una pregunta interesante que invita al estudiante a razonar.

Por otro lado, las preguntas propuestas por la respuesta esperada inducen al estudiante analizar los intervalos de la cantidad de huevo (dominio) en el que el ingreso aumente o disminuye. Esto haría que el estudiante realice un tránsito de la función en su expresión analítica a su expresión gráfica o resuelva la situación utilizando una herramienta adicional como las inecuaciones cuadráticas.

De lo descrito anteriormente, podemos concluir que los docentes D2, D3 y D4 realizan conexiones interdisciplinares (faceta epistémica/ecológica) para aumentar el nivel de complejidad.

Para la pregunta 6, el docente D1 considera que la situación ya es sencilla. Sin embargo, siempre existen formas de transformar los elementos de una situación de modo que sea más asequible a los estudiantes, tal como sugiere la respuesta esperada. De ello se desprende que el docente D1 desarrolla a un menor grado el nivel de complejidad de la situación propuesta.

En el caso de los docentes D2 y D4, sus respuestas coinciden con la respuesta esperada, puesto que como comentamos anteriormente, una de las dificultades más comunes que se hacen evidente cuando el estudiante resuelve una situación son las manipulaciones algebraicas y estos aumentan cuando los números con que se trabajan son cantidades mayores. Por ello se sugiere el cambio de los coeficientes a números más asequibles para los estudiantes.

Particularmente, el docente D2 también sugiere un cambio adicional que consideramos importante, cambiar de signo al coeficiente principal. Puesto que los estudiantes tienen retos cuando trabajan con expresiones numéricas negativas.

Por último, el docente D3 sugiere convertir la función cuadrática a una función lineal de modo que el análisis sea más sencillo para el alumno y preguntarle por una cantidad específica de huevos. Este cambio favorecería a las manipulaciones algebraicas realizadas por el alumno, pero perdería la definición de función cuadrática que se pretende enseñar (Faceta epistémica/ecológica).

Por lo tanto, podemos concluir que los docentes D1 y D3 no logran graduar el nivel de complejidad de las situaciones propuestas.

7. ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

Esta pregunta se enfoque en identificar si el docente reconoce la definición de función lineal que emerge de la situación propuesta (facetas epistémica y ecológica).

Las respuestas de todos los docentes a excepción de D3 coinciden con las respuestas esperadas. De ello se desprende que reconoce la definición de función cuadrática que emerge en la situación.

En el caso del docente D3 sugiere el tema de asuntos comerciales, por lo que establece conexiones con áreas que difiere de las matemáticas. También la derivada, que tiene como fin analizar el máximo/mínimo de una función cuadrática. Acciones matemáticas como el aspa simple y funciones cuadráticas en general. La variedad de respuestas que proporciona muestra que la función cuadrática se puede emplear de diferentes formas al enseñar, pero no deja claro si reconoce la definición de función que emerge de la situación propuesta.

8. ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?
   Esta pregunta busca reconocer si el docente emplea herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas, como el software GeoGebra que contribuya a afianzar los conocimientos previamente enseñados (facetas interaccional y mediacional).

   Las respuestas de todos los docentes a excepción de D3 se relacionan con la interpretación de la función en su expresión gráfica. En el caso del docente D1 lo usaría para describir las características de la función cuadrática, intervalos de crecimiento/decrecimiento y máximos/mínimos. De este modo emplearía hábilmente esta herramienta.

Las preguntas del docente D2 se asocian con los cambios de la forma de la función cuadrática con los valores de los coeficientes, esto coincide con la respuesta esperada. Por tanto, podemos considerar que el docente justifica el empleo de la herramienta tecnológica para favorecer el aprendizaje.

En el caso del docente D3, su respuesta no es muy clara, porque una de las preguntas que propone es hallar la discriminante de la función, para analizar si la función es positiva o negativa dependiendo del valor de *h* y los intervalos de crecimiento. Ello se puede analizar, graficando la función con el GeoGebra y empleando los deslizadores de forma adecuada o variando los números individualmente, tal como menciona la respuesta esperada.

Por último, las preguntas del docente D4 están asociadas a la interpretación de la función en su expresión gráfica en puntos específicos. Por ejemplo, *¿qué sucede cuando el coeficiente principal es positivo?, ¿Qué pasa cuando el coeficiente principal es negativo?* Estas preguntas pueden ser enriquecidas si se trabajara con uno o varios deslizadores que permitiera observar los cambios que sufre la función a medida que el valor del o de los parámetros varía, así establecer relaciones entre las raíces y la concavidad/convexidad de la función cuadráticas asociadas al contexto donde se desarrolla la situación.

Lo descrito anteriormente sugiere que los docentes D3 y D4, aunque consideran el empleo del software GeoGebra como herramienta tecnológica para afianzar los conocimientos previamente enseñados, las propuestas de sus preguntas no logran justificar su uso.

5.4.3 Respuestas a la situación 3

1. ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
   La respuesta de esta pregunta nos permite identificar los tipos de objetos y procesos que el docente pone en juego al resolver la situación problemática

(Faceta epistémica/ecológica). Como comentamos anteriormente los docentes reconocen la falta de familiaridad con el software GeoGebra por lo que sus respuestas estarán basadas en la resolución por medio de lápiz y papel.

En todas las preguntas a excepción de la d), los docentes D1, D2 y D3 emplean manipulaciones algebraicas para la resolución del problema. En particular, la ecuación de primer o segundo grado.

En el caso del docente D1, emplea el lenguaje simbólico literal (conjuntista) para emplear la ecuación de primer grado (ver Figura 42).

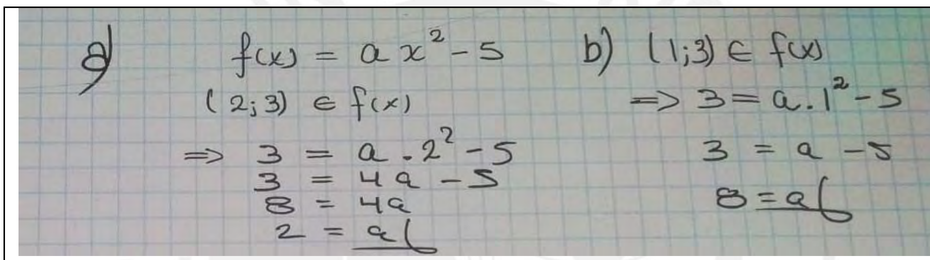


Figura 42. Respuesta 1a y 1b de D1_situación 3

En el caso de los docentes D2 y D3, resuelven la situación directamente sin indicar por qué se reemplaza los datos en la regla de correspondencia, no realizando un procedimiento claro (ver Figura 43).

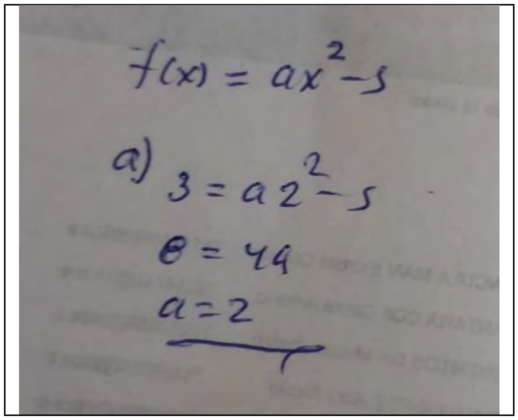


Figura 43. Respuesta 1a de D2_situación 3

En particular, el docente D3 no realiza un reemplazo de datos correcto, porque al exponente cuadrático le asigna tanto a *x* como al parámetro *a*. Al resolverlo de esta manera obvia el segundo valor que debe obtener de una ecuación cuadrática (ver Figura 44).

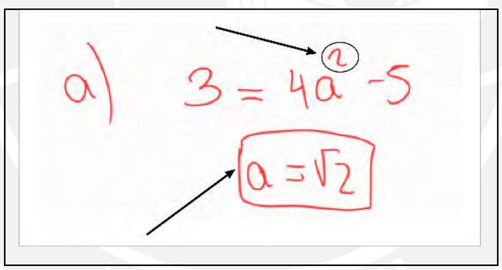


Figura 44. Respuesta 1a de D3_situación 3

Asimismo, para la consigna c) el procedimiento no es claro, de la expresión x^2-*25* llega a *(1/5).*x^2*-5* sin especificar los pasos seguidos (ver Figura 45). Según la respuesta esperada, podría haber reemplazado los puntos directamente en la función e igualarlo a cero por la condición de ser raíces de la función cuadrática y resolverla como una ecuación de primer grado. De ambas consignas se desprende que este docente no llega a realizar un procedimiento adecuado para la solución del problema, tampoco es claro en la justificación.

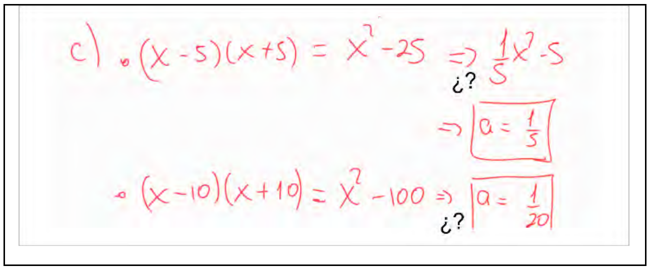


Figura 45. Respuesta 1c de D3_situación 3

En el caso del docente D4, se puede notar en la Figura 46, que para resolver el problema parte de las raíces de la función cuadrática, teniendo en cuenta la definición de intercepto con el eje *x*. Emplea la diferencia de cuadrados como herramienta para llegar a la expresión analítica de la función, pero no justifica el valor de *a*, tampoco llega a la forma correcta de la función original, $f(x)=ax^2-5$. De ello se desprende que este docente no logra realizar un procedimiento claro ni justifica los pasos a seguir.

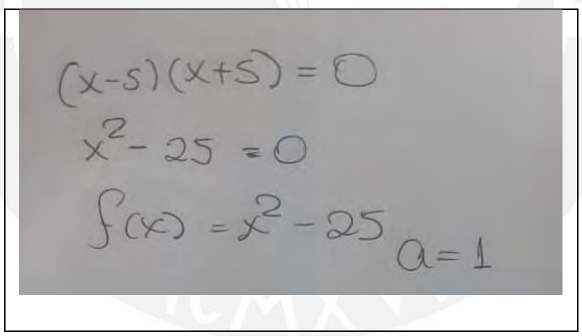
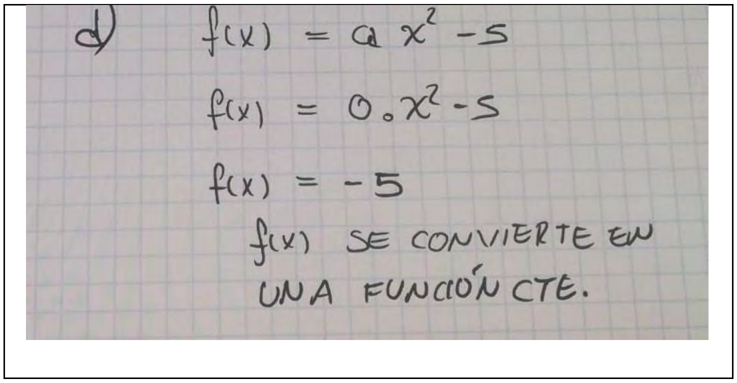


Figura 46. Solución 1c de D4_situación 1

Para la consigna d), los docentes D1, D3 y D4 no argumentan su respuesta empleando la definición de una función cuadrática, criterio que habíamos considerado importante según la respuesta esperada. Particularmente, el docente D1, asume que la expresión analítica resultante es suficiente para responder a la pregunta (ver Figura 47).


d) $f(x) = a x^2 - 5$

$f(x) = 0 \circ x^2 - 5$

$f(x) = -5$

f(x) SE CONVIERTE EN UNA FUNCIÓN CTE.

Figura 47. Respuesta 1d de D1_situación 3

En el caso de los docentes D3 y D4, solo aseguran que la función cuadrática con valor de parámetro *a=0*, se *convierte* a una función constante (ver Figura 48).

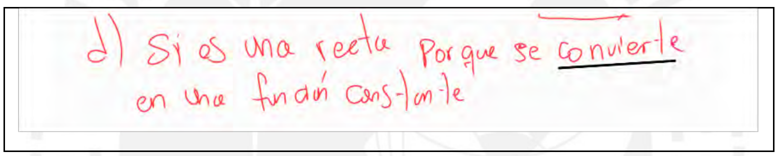

d) Si es una recta Porque se convierte en una función constante

Figura 48. Respuesta 1d de D3_situación 3

Por último, para la consigna e) y f), dado que se da un valor determinado al parámetro, el objetivo era, tal como lo hicieron los docentes D1 y D3, trabajar manualmente, resolviendo ecuaciones cuadráticas de segundo grado. Luego, emplear una herramienta adicional como la diferencia de cuadrados para la solución del problema (ver Figura 49).

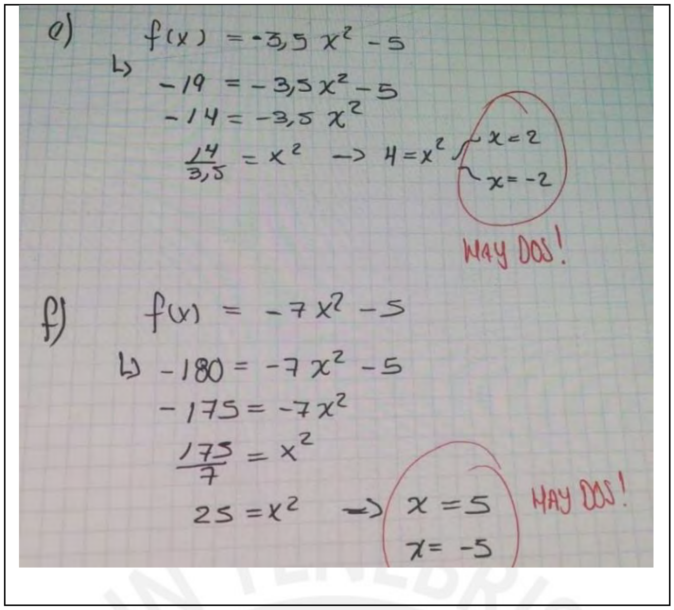


Figura 49. Respuesta 1e y 1f de D1_situación 3

El docente D4 es el único que emplea el GeoGebra para la solución de la situación. Para las consignas a), b), la primera parte de c), e) y f) manipula correctamente esta herramienta tecnológica. Debemos acotar que para la segunda pregunta de b) el docente cambia el intervalo del deslizador *a*, y para la parte e) y f) emplea otras herramientas como el segmento (ver Figura 50), para determinar el valor de *x*.

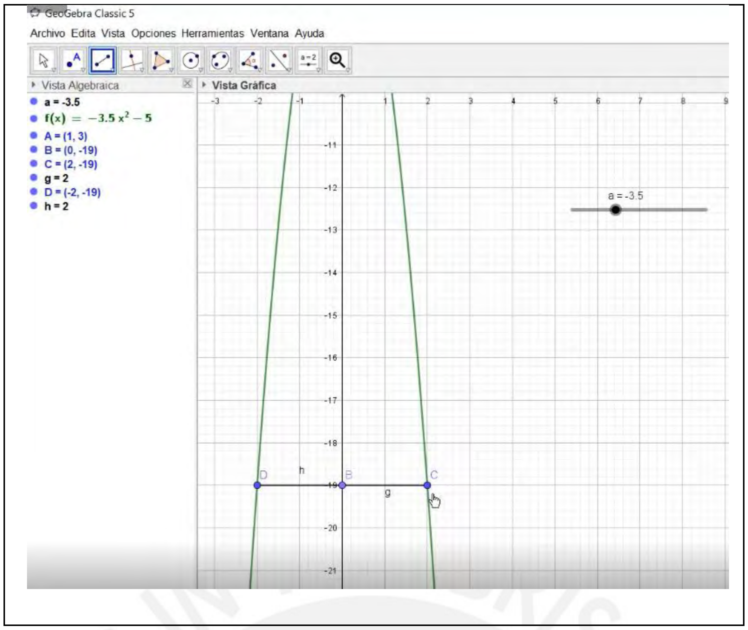


Figura 50. Solución 1e de D4_situación 4

Aunque es menos probable que los estudiantes realicen este procedimiento dada la poca familiaridad con el software, podemos concluir que el docente D4 utiliza esta herramienta tecnológica eficazmente como medio para resolver problemas asociados a las funciones cuadráticas. Por ejemplo, emplea la propiedad de la simetría para ello, justificando así su procedimiento.

Es importante señalar que la situación propuesta está diseñada para trabajar de forma manual y dinámica. Al resolverlo manualmente, emplean un lenguaje simbólico literal, conjuntista y la expresión analítica, que le permite establecer relaciones entre los tratamientos algebraicos y la representación gráfica propuesta. Emplear conceptos y propiedades como: dominio y rango de una función, intercepto con el eje *x* y la pertenencia de un par ordenado a una función cuadrática, mediante la regla de correspondencia.

Sin embargo, hacerlo únicamente de esta manera no permitía al alumno explorar los cambios que sufre la función cuadrática a medida que cambia el coeficiente principal representado por el parámetro *a*. Estos cambios están asociados a la concavidad/convexidad de la función e interceptos con el eje *x* y eje *y*, y las variaciones de las ramas de la función cuadrática con respecto al eje *y* o emplear otras propiedades como la simetría de la función cuadrática. Así, afianzar los conocimientos previamente enseñados.

2. Al resolverlo de esa manera,
   a) ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
   b) ¿qué crees que usaría, un gráfico, una tabla?

   Esta pregunta, busca identificar si el docente conoce la definición de los objetos comúnmente empleados alrededor del tema y hasta qué grado reconoce los lenguajes utilizados en la situación. También se pretende reconocer si realiza conexiones con otras áreas de la matemática.

   Para la pregunta 2a), el docente D1 no reconoce ninguna definición/propiedad que se emplea en la solución de la situación, porque lo considera un problema algebraico. Sin embargo, es interesante notar que, para realizar este tipo de procedimientos, según la solución esperada, se debe tomar en cuenta la pertenencia de un punto a una función cuadrática asociada a su regla de correspondencia, la definición de una función cuadrática (consigna d)) en su expresión analítica y los interceptos con el eje *x*. De ello se desprende que este docente no llega a reconocer la definición de los objetos comúnmente empleados en alrededor del tema de estudio.

   En el caso del docente D2 menciona el empleo del *principio de sustitución* y la *transposición de términos*, que son acciones que forman parte de procedimientos matemáticos para hallar un valor determinado, mas no son propiedades o definiciones. Considera como parte de su respuesta la función constante, que según la respuesta esperada es importante para el inciso d), al igual que la definición de función cuadrática en su expresión analítica. En líneas generales, también menciona la idea de *puntos que pertenecen a la función*.

Por otro lado, el docente D3 refiere a una herramienta de la matemática, tal como la diferencia de cuadrados. Ello es importante al resolver las situaciones propuestas, pero solo para las consignas e) y f). La respuesta esperada puntualiza que para las consignas a), b), c), e) y f) el estudiante emplee la definición de dominio y rango de la función cuadrática y para la consigna d), la definición de una función cuadrática.

Por último, en el caso del docente D4, podemos notar que conoce la definición de varios de los objetos comúnmente empleados alrededor de la función cuadrática. Por ejemplo, si se utiliza el GeoGebra, el docente D4 indica que el estudiante podría emplear conceptos/propiedades como el intercepto con el eje *x*, concavidad/convexidad de la función. En este caso, la concavidad/convexidad de la función formaría parte de la exploración de la forma de la función cuadrática en su expresión gráfica al manipular el parámetro *a*, por lo que consideramos importante tomar en cuenta esta propiedad.

De lo descrito anteriormente podemos sugerir que los docentes D1, D2 y D3 no logran reconocer los conceptos/propiedades que se emplean para la resolución de la situación, tales como intercepto con el eje *x*, dominio y rango de la función cuadrática, tal como lo indica la respuesta esperada.

Con respecto a la pregunta 2b), solo el docente D4 toma en cuenta el lenguaje simbólico-literal (conjuntista), aspecto importante para la justificación de los procedimientos empleados. A ello suma el lenguaje gráfico, puesto que trabaja con el GeoGebra, pero no considera el lenguaje simbólico literal (expresión analítica), que es esencial para graficar la función, según la respuesta esperada.

Particularmente los docentes D1 y D3 consideran solo el empleo del lenguaje simbólico-literal (expresión analítica) de la situación.

Por último, el docente D2 menciona el lenguaje numérico como parte de la solución de la pregunta, aunque ninguna de las consignas propuestas lo demanda, pero podría darse en el caso de algunos estudiantes.

En conclusión, ningún docente llega a reconocer todos los lenguajes empleados en la solución de la situación tales como, lenguaje simbólico literal, expresión analítica y noción conjuntista, que se consideran importante para la resolución del problema, según la respuesta esperada.

3. ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
   El propósito de esta pregunta era reconocer cuáles son los conocimientos previos que tiene el profesor de modo que sea posible que describa las configuraciones cognitivas de los estudiantes al resolver la situación propuesta (Faceta cognitiva/afectiva).

   Los docentes D1 y D2, describen la mayoría de los conocimientos caracterizados en las respuestas esperadas. En el caso particular del docente D1, no toma en consideración el dominio y rango de la función cuadrática, que es importante para la resolución de esta tipología de situaciones. Por otro lado, el docente D2 no toma en cuenta la definición de función cuadrática, saber necesario en este caso. Ello implica que estos docentes pueden llegar a reconocer las configuraciones empleadas por el estudiante a un mayor grado cuando resuelven este tipo de situaciones.

   En el caso del docente D3, relaciona los conocimientos previos con las manipulaciones algebraicas, productos notables, potencia, racionalización y números reales. Pero no reconoce los conocimientos asociados a estas situaciones, tal como menciona la respuesta esperada. De ello se desprende que, dada la ausencia de los conocimientos previos, este docente no llegaría a describir las configuraciones cognitivas empleadas por el estudiante al resolver la situación propuesta.

Por último, el docente D4 reconoce la definición de los objetos que se emplean alrededor del tema, según la respuesta esperada. También considera importante conocer algunas herramientas matemáticas como las ecuaciones para resolver este tipo de problemas, el lenguaje simbólico literal (conjuntista) que se emplea y el procedimiento de reconstruir la ecuación cuadrática a partir de las raíces de la ecuación. Ello indica que este docente puede llegar a describir las configuraciones cognitivas empleadas por el estudiante.

4. De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
El foco de esta pregunta era describir hasta qué grado el docente identifica los errores que pueden cometer los estudiantes al resolver la situación propuesta (faceta cognitiva/afectiva).

Los errores que describen todos los docentes son de índole algebraico. En particular los docentes D1 y D3 lo relacionan con la resolución de una ecuación de segundo grado empleando diferencia de cuadrados y obviando la intervención de parámetros.

Por otro lado, el docente D4 lo relaciona con reconstruir la ecuación cuadrática a partir de sus raíces, reemplazar el par ordenado en la regla de correspondencia de la función cuadrática y graficar la función. Otro error interesante que sugiere es con respecto a la consigna d) que implica utilizar la definición de función cuadrática. Concepto que, como menciona, *el docente no lo pone o el estudiante no se da cuenta*.

En líneas generales los docentes D1, D3 y D4, no toman en cuenta otros criterios como el reconocimiento del dominio y rango de una función cuadrática por medio de su expresión simbólico literal (conjuntista) y en particular, para la consigna d) no justificar adecuadamente su respuesta empleando la definición de función cuadrática. Lo que consideramos importante y está descrito en las respuestas esperadas para afianzar los conocimientos previamente adquiridos por parte de los estudiantes. De ello se desprende que estos docentes describen razonablemente los principales errores que comenten los estudiantes al resolver este tipo de situaciones.

Solo el docente D2 coincide con la respuesta esperada, puesto que al estudiante le resulta difícil identificar el dominio y rango de una función cuadrática expresada en un lenguaje simbólico literal (conjuntista). Por otro lado, también menciona el error que pudiera tener el estudiante al graficar la función dado el parámetro que contiene. Aunque es un error común en ellos, es poco probable que se pueda dar puesto que la situación no lo demanda o es un procedimiento poco empleado en esta tipología de situaciones.

5. ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones? Si la respuesta es afirmativa:
    a) ¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
    b) ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
    c) ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

    Si la respuesta es negativa:

    ¿Por qué no?

6. ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

Con estas preguntas se espera que el docente elija situaciones que correspondan al nivel educativo que se pretende enseñar (facetas epistémica y ecológica), así como graduar el grado de complejidad del problema (facetas interaccional y mediacional).

Las respuestas de todos los docentes con respecto a la pregunta 5a) coinciden con la respuesta esperada. Por lo tanto, reconoce situaciones que corresponden a un grado de estudio determinado, según el currículo establecido.

Con relación a la pregunta 5b), solo los docentes D2, D3 y D4 coinciden con la respuesta esperada, colocar la situación al final de la clase para afianzar los conocimientos previamente adquiridos.

En el caso del docente D1, la situación se plantearía a mitad de la clase tomándolo como ejemplo de análisis. Esta medida puede ser efectiva a medida que indique en un inicio cuál es el tema a enseñar, de este modo, con los suficientes conocimientos previos incluir la situación.

Para la pregunta 5c), el docente D1 no considera que habría una pregunta que haría la situación más compleja, sino *más interesante*. Para ello, toma en cuenta el comportamiento de la función cuadrática de acuerdo a los valores asignados para *a*, formando parte del análisis de la gráfica con ayuda de la herramienta GeoGebra. Pero como sugiere el mismo docente no contribuye a que la situación sea más compleja.

La respuesta del docente D2 coincide con la respuesta esperada, convertir el término independiente en otro parámetro, de tal modo que pudiera preguntar sobre la ubicación de la gráfica, de acuerdo a los valores que toma. Así, el docente reconoce el tipo de preguntas que haría más compleja la situación.

Con respecto a los docentes D3 y D4, agregar un término lineal haría más compleja la situación. Concordamos con este criterio porque, tal como menciona la respuesta esperada, ello haría que el estudiante lleve a la función a su forma canónica, lo que le resultaría difícil por la presencia del parámetro. Por otro lado, el docente D3 también hace referencia al signo del parámetro, pero debemos considerar que, dado el procedimiento para hallar el vértice, este dependería de *a*, por lo cual el análisis de signo no contribuiría a la complejidad del problema.

Por último, para el caso del uso del GeoGebra, la sugerencia de D4 es cambiar el valor numérico de las raíces a números imaginarios. Ello resultaría interesante siempre que se permitiera visualizar la relación con la gráfica de la función cuadrática, y así emplear el GeoGebra para el proceso de enseñanza, situación que bajo estas características es difícil que se realice.

Para la pregunta 6, el docente D1 considera que, así como está caracterizado la situación es sencilla por lo que no le haría ningún cambio. Sin embargo, tomando en cuenta las dificultades que podrían tener los estudiantes al resolver la situación, según la respuesta plausible, podría asignarse un valor determinado al parámetro *a* de modo que la solución sería más asequible.

En el caso del docente D2, su respuesta coincide con la respuesta esperada, dado que las manipulaciones algebraicas con parámetro pueden crear en el estudiante un conflicto en la forma de la función cuadrática, asignar un valor numérico resultaría disminuir el nivel de complejidad.

Para el docente D3, la situación sería más sencilla si se eliminara el término independiente de la función cuadrática. Aunque no concuerda con la respuesta esperada, esto llevaría a que las manipulaciones algebraicas, que es una de las dificultades en los estudiantes, sea más asequibles para ellos, como resultado, el nivel de complejidad disminuiría.

7. ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?
   Esta pregunta se enfoque en identificar si el docente reconoce la definición de función lineal que emerge de la situación propuesta (facetas epistémica y ecológica).

   En el caso de los docentes D2 y D4 sus respuestas coinciden con la respuesta esperada, el estudio de la función cuadrática en su expresión gráfica, particularmente, el análisis de las variaciones de la gráfica de una función cuadrática ante la variación de su expresión analítica. De ello se desprende que reconocen la definición de función que emerge en la situación propuesta.

   En el caso del docente D1, su respuesta está asociada al uso de parámetros, que es un elemento que forma parte de las situaciones matemáticas en general. Por último, el docente D3 menciona el teorema de Cardano. Esto pudiera ser razonable si en la mayoría de las consignas se empleara, pero no es el caso. De ello se desprende que los docentes D1 y D3 no logran alcanzar a reconocer la definición de función que emerge de la situación propuesta.

Puesto que los indicadores de conocimiento fueron propuestos teóricamente, el análisis descrito nos ha permitido ser más específicos en algunos aspectos, así como descubrir nuevos indicadores que contribuyan a la enseñanza matemática del docente en relación a las funciones lineales y cuadráticas. Por ejemplo, hemos visto la importancia de que los procedimientos empleados deben ser claros y precisos hasta llegar a la respuesta de la pregunta, y justificar cada paso seguido.

5.5 Propuesta final de indicadores de CDM para funciones lineales y cuadráticas

Como se ha podido notar, la fase experimental no se llevó a cabo en sesiones de clase donde interactúan docente y estudiantes, pero la propuesta de un cuestionario aplicado a los profesores nos ha permitido aproximarnos a ello, y explorar hasta qué grado un profesor desarrolla determinadas capacidades al enseñar el tema de funciones lineales y cuadráticas, cómo estas contribuyen a un mejor proceso de enseñanza y lo importante que es mantener un equilibrio entre estas. Por último, también hemos podido reconocer que emplear una herramienta tecnológica puede contribuir a la enseñanza matemática a medida que los docentes propongan secuencias didácticas en la que se potencie su utilidad.

Lo descrito anteriormente nos permite caracterizar los indicadores del conocimiento del docente de forma más específica que a continuamos mostramos.

En relación a las facetas epistémica y ecológica:

Tabla 10*. Nuevos indicadores del conocimiento del profesor, en la faceta epistémica/ecológica en relación a las funciones lineales y cuadráticas*

Indicador	Descripción
Identifica el dominio y rango de una función lineal o cuadrática expresado en un lenguaje verbal.	El profesor debe identificar el dominio y rango de la función lineal o cuadrática en un contexto extra matemático e intra matemático. Ello permitirá esbozar la función de forma más específica y determinar qué valores del dominio son los adecuados para la solución del problema.
Elije la situación tomando en cuenta el elemento o característica de la función lineal y cuadrática que pretende enseñar.	El profesor debe elegir situaciones que ejemplifiquen el tema a plenitud sin desviarse a otros contenidos matemáticos.
Describe procedimientos claros y específicos hasta llegar a responder las preguntas propuestas.	El profesor debe describir los procedimientos, indicando cada paso a realizar, llegar a la expresión formal de los resultados y responder la pregunta propuesta.

Justifica la elección de su procedimiento a elegir.	El profesor debe justificar por qué elige un determinado procedimiento en la solución de la situación propuesta.
Justifica los procedimientos seguidos.	El profesor debe indicar por qué se toma decisiones en cada paso a seguir del procedimiento que desarrolla.
Justificar la elección de usar argumentos visuales.	El profesor debe indicar cuando el argumento que brinda el estudiante puede ser visual, teniendo en cuenta lo que se pretende enseñar.

En relación a la faceta cognitiva/afectiva:

Tabla 11. *Nuevos indicadores del conocimiento del profesor, en la faceta cognitiva/afectiva en relación a las funciones lineales y cuadráticas*

Indicadores	Descripción
Identifica los conocimientos previos que debe poseer los estudiantes.	El profesor debe identificar qué conocimientos previos debe poseer el estudiante para describir las posibles configuraciones cognitivas que ponen en acción al resolver tareas de un determinado tipo.
Describe los errores que cometen los estudiantes al resolver una situación en un contexto extra matemático.	El profesor debe reconocer cuáles son los errores que el estudiante comete al resolver un problema en un contexto extra matemático o que involucre un lenguaje verbal.
Describe los errores que cometen los estudiantes con relación a las manipulaciones algebraicas.	El profesor debe reconocer cuáles son los errores que el estudiante comete al resolver una situación algebraicamente.
Describe los errores que comenten los estudiantes con relación a los elementos o características de la función lineal o cuadrática.	El profesor debe reconocer cuáles son los errores que el estudiante comete al identificar los elementos y características de la función lineal o cuadrática como parte de la solución.

Describe estrategias didácticas, tomando en cuenta los elementos o características de la función lineal o cuadrática, que promuevan el interés de los alumnos.	El profesor debe describir las estrategias, realizar cambios a las situaciones, proponer preguntas de modo que motive al estudiante sin perder el propósito del tema de enseñanza.

En relación a la faceta interaccional/mediacional:

Tabla 12. *Nuevos indicadores del conocimiento del profesor, en la faceta interaccional/mediacional*

Indicadores	Descripción
Graduar el grado de complejidad de las situaciones propuestas.	El profesor debe graduar el grado de complejidad de las situaciones, teniendo en cuenta qué es lo que se pretende enseñar de la función lineal y cuadrática. El profesor debe graduar el grado de complejidad de las situaciones, teniendo en cuenta el nivel educativo a quien se dirige. El profesor debe graduar la complejidad de las situaciones empleando para ello los elementos o características de la función lineal y cuadrática. El profesor debe graduar el grado de complejidad de las situaciones, cuidando que no se pierda el tema que se pretende enseñar.
Justificar la utilización de tecnologías digitales para la enseñanza de la naturaleza del cambio.	El profesor debe justificar el uso de tecnologías digítales, proponiendo preguntas que no se podría resolver tan fácilmente a lápiz y papel.
Diseñar experiencias de aprendizaje, tomando en cuenta los elementos y características	El profesor debe diseñar secuencias de aprendizaje empleando tecnologías digitales que potencie la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas.

de las funciones lineales y cuadráticas, tal que emplear herramientas tecnológicas sea efectivo.	

Las tablas anteriores serían una propuesta de los conocimientos didácticos matemáticos del profesor al enseñar las funciones lineales y cuadráticas en el nivel de la secundaria peruana.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

El centro de interés de este trabajo fue identificar los conocimientos didácticos matemáticos que un profesor debe poseer de la secundaria peruana para llevar a cabo un proceso de instrucción sobre las funciones lineales y cuadráticas.

Tal como lo confirman diversos investigadores, los conocimientos que posee el profesor en relación al contenido matemático a enseñar son necesarios, pero no son suficientes para garantizar un proceso de instrucción idóneo. Existen otros conocimientos que se requieren para tal propósito. En este sentido, empleamos las herramientas teóricas proporcionadas por el EOS para identificar conocimientos asociados a las distintas dimensiones y caracterizarlos dentro del ámbito de la educación peruana.

Luego de un profundo análisis a las investigaciones relacionadas a nuestro tema de interés, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los conocimientos didácticos matemáticos que debe poseer un profesor de educación en el Perú para mejorar su práctica docente, en relación a la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas?

Para responder a esta pregunta nos propusimos tres objetivos específicos, el primero:

- ✓ *Construir un significado de referencia institucional de las funciones lineales y cuadráticas.*

Como mencionamos en el capítulo II, el modelo teórico empleado para esta investigación es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Este contiene herramientas que nos permitieron un análisis más minucioso de los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes. También, la configuración de objetos primarios propuesta por el enfoque ontosemiótico, posibilitó la construcción de un significado de referencia institucional en relación a las funciones lineales y cuadráticas en la secundaria peruana.

Realizamos una revisión concienzuda de textos didácticos del nivel de secundaria que abordan el tema descrito, el Currículo Nacional (Perú, 2016), el nuevo Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (2019) e investigaciones que tienen relación con nuestro tema de interés.

Luego, tomando como guía principal la investigación de Escudero (2017) y la teoría descrita en el capítulo II, establecimos cinco categorías que nos permitieron tener un criterio de elección para las situaciones encontradas, agruparlas y describir las prácticas matemáticas que se ponen en acción al resolverlas. Así llegamos a alcanzar el primer objetivo.

El segundo objetivo:

- ✓ *Hacer un diagnóstico para identificar los conocimientos del profesor de matemática en relación al tema descrito, de modo que desarrolle procesos de instrucción con alta idoneidad didáctica*.

La construcción del significado de referencia institucional nos permitió establecer un conjunto de indicadores de conocimientos y organizarlos empleando el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático que ofrece el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática y que contiene seis facetas donde cada una de ellas caracteriza conocimientos didáctico matemáticos específicos.

Por ejemplo, identificamos conocimientos didáctico matemáticos no solo con respecto al conocimiento del contenido en relación al docente (faceta epistémica), sino también extenderlo a los conocimientos en relación a los estudiantes (faceta cognitiva/afectiva), a la enseñanza (faceta interaccional/mediacional) y, al currículo y su vínculo con áreas intra y extra matemáticas (faceta ecológica). Para enriquecer nuestro trabajo, hemos considerado investigaciones como las de Godino (2009) y Escudero (2017). El primero nos permitió tener una visión general de tales conocimientos y realizar algunas refinaciones. El segundo nos permitió enriquecer nuestro trabajo en relación a la faceta epistémica. A continuación, indicamos algunas de ellas:

Con respecto a la faceta epistémica/ecológica, elegir adecuadamente situaciones que permitan ejemplificar el tema de estudio, emplear un lenguaje adecuado, realizar procedimiento adecuados y justificarlos, modelizar situaciones y realizar conexiones con otros temas más avanzados.

Con relación a la faceta cognitiva/afectiva, describir los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta, describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos, y describir estrategias que se pueden implementar, que tengan potencial para desafiar y motivar a los estudiantes.

Con relación a la faceta interaccional/mediacional, graduar el grado de complejidad de las situaciones propuestas, utilizar tecnologías digitales para analizar la naturaleza del cambio, en relación a las funciones lineales y cuadráticas, y diseñar experiencias de aprendizaje que se relacionan con las funciones lineales y cuadráticas.

Por último, el tercer objetivo:

- ✓ *Proponer conocimientos didáctico matemáticos del profesor de matemática en relación a las funciones lineales y cuadráticas, considerando las facetas epistémica y ecológica, en base al estudio de significado de referencia* *institucional y del Currículo Nacional, así como las facetas cognitivas, interaccional, mediacional y afectiva.*

Para alcanzar este objetivo, tomamos en cuenta los conocimientos propuestos en la primera etapa de la investigación y las entrevistas nos permitieron realizar algunos ajustes como cambios en dichos conocimientos. Reconocemos que en el transcurso del análisis de las respuestas de los docentes entrevistados vimos cómo en algunos casos, aunque no alcanzaban a desarrollar ciertos desempeños esperados, desarrollaban otras de vital interés para el aprendizaje del estudiante. Ello llevó a reconsiderar algunos indicadores asociados a los conocimientos descritos teóricamente.

También, con respecto al cuestionario, tuvimos que adecuar algunas preguntas de acuerdo a las respuestas de los docentes, que, en casos particulares fueron muy genéricas o donde la falta de familiaridad con el software GeoGebra no permitió la resolución del problema que esperábamos. A continuación, presentamos un resumen de ellos.

En relación a la Faceta epistémica/ecológica:
Con respecto a la faceta epistémica/ecológica, identificar el dominio y rango de una función lineal o cuadrática expresado en un lenguaje verbal, elegir la situación tomando en cuenta qué elemento o característica de las funciones lineales u cuadráticas pretende enseñar, describir procedimientos claros y específicos hasta llegar a responder las preguntas propuestas, justificar la elección del procedimiento a seguir, justificar los procedimientos seguidos y justificar la elección de usar argumentos visuales.

En relación a la faceta cognitiva/afectiva:
Con relación a la faceta cognitiva/afectiva, identificar los conocimientos previos que debe poseer los estudiantes, describir los errores que se cometen los estudiantes al resolver una situación en un contexto extra matemático, describir los errores que

comenten los estudiantes con relación a las manipulaciones algebraicas, describir los errores que cometen los estudiantes con relación a los elementos o características de las funciones lineales y cuadráticas y, describir estrategias didácticas, tomando en cuenta los elementos y características de las funciones lineales y cuadráticas, que promuevan el interés de los alumnos.

En relación a la faceta interaccional/mediacional:
Con relación a la faceta interaccional/mediacional, graduar el grado de complejidad de las situaciones propuestas, justificar la utilización de tecnologías digitales para la enseñanza de la naturaleza del cambio y diseñar experiencias de aprendizaje, tomando en cuenta los elementos y características de las funciones lineales y cuadráticas, tal que emplear herramientas tecnológicas sea efectivo.

Estos indicadores contribuyen a potencializar los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes, tanto los que están en servicio como los que están en formación, puesto que podrán identificar qué conocimientos específicos son necesarios para llevar a cabo su labor docente, en relación a las funciones lineales y cuadráticas, lo más idóneamente posible.

Asimismo, los indicadores de conocimientos didáctico matemáticos que propone esta investigación pueden contribuir a investigaciones relacionadas con otros temas, puesto que son pocas las que centran su interés en la didáctica matemática, indicando conocimientos específicos necesarios para el proceso de enseñanza en relación a un determinado contenido matemático.

Reconocemos que nuestra investigación es una muestra mínima de todo lo que se tiene que analizar en este campo, y que también depende de otros factores externos que influyen en los conocimientos didácticos matemáticos de los docentes. Consideramos importante seguir realizando investigaciones de este tipo que contribuirá a lograr una enseñanza adecuada en los estudiantes, en relación a las funciones lineales y cuadráticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS, Revista de didáctica de las matemáticas,* (32), 13-25.

Breda, A. y Lima, V. (2016). Estudio de Caso sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*.

Cerda, H. (1993). Los elementos de la investigación. Ciudad, país: El Buho.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Granada: (Tesis doctoral) Universidad de Granada. Obtenido de

https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf

Escudero, P. (2017). *Identificación de conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas* (Tesis de maestría). Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Espinoza, J. (2015). Identificación de indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre funciones mediante el análisis didáctico. En Editor Parraguez, M. Rivas, H., Vásquez, C., Pincheira, N., Solar, H., Rojas, F. y Chandia, E. (Eds.), XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pp. Inicial-final). Lugar: Villarrica-Chile.

Font, V., Breda, A., Seckel, M. y Pino-Fan, L. (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemáticas sobre la práctica docente. *Ciencia y Tecnología, 34*(2), 62-75.

Font, V., Breda, A., y Pin-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En Editor Muñoz-Escoleno, J., Arnal-Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M., y Carrillo, J. (Eds), Investigación en Educación Matemática XXI (pp.247-256). Zaragoza: SEIEM.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2004). Criterios de idoneidad d un proceso de instrucción Matemática. Aplicación a una experiencia de enseñanza de la noción función.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado de

https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemática. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J., Gonzato, M. y Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A., Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 341-352). Lleida: SEIM.

Godino, J. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XII Conferencia Interamericana de Educacao Matemática (CIAEM-IACME)Recife, Brasil.

Godino, J., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. (Febrero de 2015). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. Noveno Congreso de Investigación Europea en Educación Matemática (CERME 9), (pp. 77-86). Praga, República Checa. Recuperado de

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289439/document

Godino, J., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimiento y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En Fernández, C., González, J. L., Ruiz, F. J., Fernández T. y Berciano A. (Eds.), *Investigación de la educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31* (57), 90-113.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes en indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*(1), 46-74.

Goulart, P. y Bisognin, E. (2019). Análisis Epistémico-Cognitivo de una formación continuada con profesores de matemática. *Paradigma, 11*(1), 1-28.

Hummes, V., Font, V., y Breda, A. (2019). Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, *4* (7), 1-17.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI: Revista de Educación,* *4*(19), 167-179. Obtenido de http://www.uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/view/610/933

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en Psicología, 9*(1), 123-146.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas.

MINEDU (2016). *Diseño Curricular Nacional.* Lima: MINEDU http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

MINEDU (2019). *Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente-Programa de estudios Educación Secundaria, especialidad Matemática.* Lima: MINEDU

Morales, Y., y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Oviedo, T. y Pino-Fan, R. (2017). El conocimiento didáctico-matemático en la faceta epistémica e interaccional de profesores peruanos sobre la noción de función: ejemplificado con un estudio de caso. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (pp. 1162-1170). México, DF. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de

https://pdfs.semanticscholar.org/a020/31a17e62fddb5e85e9635bba7cbac72ad4a2.pdf

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción función* (Tesis de maestría). Escuela de Posgrado, Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.

Pino Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada, Granada, España. Obtenido de

https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Luis_Pino_tesis.pdf

Pino Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, *34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J., Rojas, N., (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia, 32*(1), 89-107.

Rodriguez, J. (2018). *La creación de problemas como medio para comprender la relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas* (Tesis de maestría). Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Sala, G., Font, V. y Barquero, B. (2019). Relaciones entre modelización matemática e indagación en un contexto arqueológico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds). Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 533-542). Valladolid: SEIEM.

Soto, J. (2019). *Observación y caracterización de prácticas didáctico-matemáticas de profesores de enseñanza media sobre la noción función: un estudio de caso.* (Tesis de maestría). Escuela de Posgrado, Universidad de los Lagos, Osorno, Chile.

ANEXO

En esta sección daremos las respuestas más destacadas de los docentes al cuestionario aplicado a través de una entrevista.

Resultados de la entrevista del docente 1

Situación 1:

E: ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver esta situación?

D1: Dependería a qué alumno está dirigido […].

E: ¿El nivel?

D1: Sí, exacto.

E: Entonces, en qué nivel crees tú que lo situarías el problema.

D1: […] puede ser trabajado por segundo año de secundaria tal vez.

E: En este grado, ¿cuál sería el procedimiento que este alumno podría emplear para resolver este problema? […] Por ejemplo, si le están pidiendo graficar el recorrido de Vanessa, Fabián y Paula, ¿qué es lo que el alumno haría?

D1: […] creo yo que lo haría en un gráfico.

E: De frente a gráfico.

D1: Sí, dado que el problema no le da alguna cantidad o dato numérico, todo es más cualitativo […].

E: En el caso de Santiago, […] ¿qué procedimiento emplearía el alumno?

D1: […] como ya tiene nociones […] él trataría de interpretar dichas pendientes y diría […], en cierto momento, fui a una velocidad, ni muy rápido, ni muy despacio […] Luego me detuve y luego continué y diría luego la velocidad aumentó [...].

E: ¿Te puedo hacer una pregunta sobre Vanessa? […] tú has puesto que a las 6:05 a.m. hay digamos, una variación […] ¿por qué lo has puesto en las 6:05 a.m.? […].

D1: Bueno, leo el enunciado y yo digo, el alumno entonces debe interpretar […] en todo momento tiene que interpretar toda la información […] en base a su experiencia, 6:05 a.m. tal vez es un horario en el cual ya se empieza aclarecer el día […].
E: […] Al resolverlo de esa manera, ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D1: […] tiene que tener conocimientos de pendiente, es decir, ah… una velocidad mayor gráficamente tiene un pendiente mayor respecto de una velocidad menor […] exactamente no es una propiedad, pero esos conocimientos lo hacen graficar […] una velocidad de una manera y otra velocidad de otra manera, al hacer esa comparación.
E: Entonces sería asociada a la pendiente, ¿no? […].
D1: Sí, lo asocio con la pendiente, con un poco de conocer qué significa tal vez, una velocidad constante […] es un problema donde se combina ¿no?, bastante de física.

Más que una propiedad o definición, D1 destaca la interpretación que se puede dar a la pendiente de la función lineal.

E: ¿qué crees que usaría, un gráfico?, una tabla?
D1: […] va a utilizar gráficos, principalmente porque en la situación de Santiago como que el problema mismo lo invita a hacer ese tipo de gráficos […].
E: Y en el caso de Santiago, ¿qué expresiones clave usaría como para resolver el problema? O ¿describir el problema? […].
D1: Se guiaría bastante de los enunciados anteriores ¿no? Utilizaría un poco los términos […] es decir palabras como, para ir más rápido, pedalear […].

En este aspecto D1 considera importante la consigna b) porque, según su criterio, de forma implícita se invita al estudiante a realizar lo mismo en la consigna a).

E: […] ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación? […].

D1: El uso del plano cartesiano, gráficas de relaciones directamente proporcionales […] pendiente de una función, qué significa que una gráfica esté más elevada que otra […] función lineal.
E: De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D1: […] por ejemplo, en el caso de Paula, que dice, mantuve una velocidad en todo momento, ni muy despacio ni muy rápido, un error puede ser que el alumno en lugar de dibujar una línea continua y con una pendiente ni tan elevada ni tan chata […] dibujaría una línea recta […] horizontal.
[…] colocaría las divisiones, tal vez del gráfico del eje *y*, por ejemplo, no lo haría de forma tan ordenada y no lo haría con las mismas escalas […].
En el caso de Fabián, se dice ¿no? se daña la cadena, traté de organizarla […] eso implica que hubo una pérdida de tiempo […] no tendría en cuenta tal vez eso […].
E: ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones?
D1: Sí, yo creo que sí.
¿En qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?
D1: […] 2do grado de secundaria.
E: ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta? […].
D1: Situación problemática inicial […] para motivarlos.
E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?
D1: […] graficar en el plano, claro, lo que ocurre con Vanessa y lo que ocurre con Fabián, y en base a eso preguntar ¿quién de ellos fue más deprisa?, ¿quién fue más lento?, ¿por qué fue más lento?, ¿por qué fue más deprisa? […] ¿Qué parte del enunciado de lo que dice Vanessa te ayuda con el gráfico? […].

D1 asocia la complejidad del problema con la interpretación de la pendiente de la función lineal dentro del contexto donde se sitúa. Es interesante notar que, es precisamente la interpretación del problema uno de los errores que más podría cometer el estudiante.

E: ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

D1: […] quitarle un poco de contexto […] que sean, tal vez, dos a tres de los chicos que ahí se presentan, diría dos para que comparen entre los dos […].

Igual que en la respuesta anterior, D1 asocia al nivel de complejidad de la situación con la extracción de los datos relevantes dentro del contexto extra matemático.

E: ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?
D1: […] pendiente de una función lineal […].
E: ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?, si la respuesta es afirmativa, ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?
D1: […] No.
E: ¿Por qué?
D1: Primero, porque como te dije estaría dirigido a estudiantes, si no son de primero en una etapa final, sería con segundo y me pongo en la situación de que, si ellos saben o no saben manejar GeoGebra. Por experiencia, yo diría que no, tomaría tiempo el enseñarles el uso de la plataforma, el organizarlos, el evaluar si se tienen las herramientas adecuadas para que se pongan en el colegio […] el problema está excelente porque demanda que los chicos grafiquen, que agarren lápiz, regla, cuaderno cuadriculado y empiecen a graficar, que se familiaricen con esto de colocar bien las escalas y distribución en el plano cartesiano que es donde se confunden muchísimo. Entonces, teniendo estas dificultades ya, que son muy serias, pensar en […] Geogebra como que, considero que no, no encajaría.

D1 considera que la poca familiaridad del GeoGebra tanto en los alumnos como en su persona sea una razón por la que no se considere como herramienta de enseñanza para el tema de funciones lineales.

<u>Situación 2:</u>

E: […] ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D1: […] usaría lo que es función cuadrática, ecuación cuadrática.
E: ¿Qué de la función cuadrática usaría?
D1: Por ejemplo, un procedimiento de completar cuadrados […] algo más operativo lo veo el problema […].

Para D1, la situación propuesta es más algebraica, y aunque se asocia a funciones cuadráticas, no existe una propiedad o definición más que la expresión analítica de dicha función.

E: ¿Qué crees que usaría, gráfico?, ¿tabla? Ningún tipo de herramienta.
D1: […] No, no creo que utilice eso.
E: […] ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver este tipo de situación?
D1: Conocer qué es la función cuadrática, debe conocer procesos de completar cuadrados […] hallar las raíces de una ecuación cuadrática.
E: [..] ¿qué de la función cuadrática específicamente crees que deba conocer para resolver este tipo de problema.
D1: […] la regla de formación […].

Aunque D1 incluye en su respuesta la regla de correspondencia de la función cuadrática, también incluye manipulaciones algebraicas tales como: la acción de completar cuadrados, así como la resolución de una ecuación cuadrática de segundo grado.

E: De tu experiencia como docente, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D1: […] suponiendo que sí puede realizar o hallar las dos raíces de la función, de hallar los interceptos con el eje x. No considerar que hay un dato que dice que $h \geq 0$ [..] no completar correctamente los cuadrados.

D1 asocia los errores más comunes con la manipulación algebraica y con no considerar los datos propuestos en la situación.

E: […] ¿tú usarías este tipo de situación para enseñar funciones?
D1: […] creo que no.
E: ¿Por qué?
D1: […] Tal vez un problema en el cual aparte de conocer la expresión de la función cuadrática, también debería relacionarlo con el gráfico de la función cuadrática. Por experiencia, diría yo, que los estudiantes no recurrirían al gráfico de la función cuadrática. Por los números que les aparecen ahí, tal vez, no les sería tan asequible a ellos. Pensaría en una situación en la que, más bien, se pida modelar la función cuadrática, llegar a conocer, como es, en un problema contextualizado […] la función cuadrática, la regla de formación y graficarlo.

Es interesante notar que en la respuesta de D1, de forma implícita reconoce que el problema no es propio para enseñar funciones cuadráticas porque debería abarcar otros aspectos más allá de las manipulaciones algebraica, como, por ejemplo, la gráfica de la función.

E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
D1: […] de acuerdo al momento, como te digo, yo creo que no, no le haría cambios.
E: […] ¿cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con esa situación propuesta? […].
D1: Función cuadrática.
E: Y, ¿qué de la función cuadrática?
D1: […] hallar máximos y mínimos.

Tenemos que resaltar que, aunque desde un inicio D1 no considera la situación adecuada para enseñar funciones cuadráticas y solo incluye la regla de correspondencia y las raíces de la función. En este caso, relaciona el concepto o propiedad que se pretende enseñar con los máximos y mínimos de la función cuadrática.

E: ¿tú crees que si usamos un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos que pretendemos enseñar? […].
D1: […] en este caso, yo creo sí.
E: ¿qué preguntas podrían hacer?, si en tal caso usaríamos el GeoGebra y ¿para qué?
D1: […] a partir de realizar la gráfica de esa función, ¿qué representa ese punto de inflexión en la gráfica?, ¿qué significa para el contexto?, ¿qué información te da?
E: Y ¿para qué harías este tipo de preguntas? […].
D1: […] para que él reconozca, ¿no? esta gráfica modela el comportamiento […] de los ingresos en función de una cantidad *h* […] que diga, ¿no?, la gráfica me representa los ingresos, hay momentos en que los ingresos sube a un máximo y luego empieza a descender. Ese punto máximo te dice, de cierta forma, cuando se obtiene la mayoría de ingresos.

<u>Situación 3</u>

En esta situación, debemos puntualizar que el docente reconoce que no tiene familiaridad con el GeoGebra al grado de responder las preguntas desde esta perspectiva. Por tal razón, empleará herramientas manuales (hoja y papel) para la resolución de las consignas. Asimismo, también de acuerdo a su experiencia, los alumnos, en su mayoría, no tienen contacto con este tipo de herramienta tecnológica.

E: […] Por ejemplo, para la a) […] ¿cuánto tiene que ser el valor de *a* para que el punto *(2,3)* pertenezca a la función […] tú crees que ellos manipularían el deslizador o lo harían en hoja y papel?
D1: […] sí tengo la noción de cómo se usa el deslizador […] no sé qué tan manipulable es ubicar con el cursor, con el mouse, en el punto *(2,3)*. Si esto es sencillo de hacer con el mouse yo creo que con el GeoGebra sí lo pueden hacer.

Si fuera en hoja y papel, reemplazaría el par ordenado en la regla de correspondencia de la función y emplearía manipulaciones algebraicas. En el caso del inciso d) el argumento sería que se convierte en una función constante.

E: ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?

D1: No […] solo procedimientos algebraicos.

E: […] A parte del gráfico que está usando en GeoGebra, ¿usaría otro tipo de herramientas? Como una tabla […].

D1: No, si lo está trabajando en GeoGebra, creo que no.

E: […] ¿qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

D1: Debe conocer función cuadrática.

E: ¿Qué de la función cuadrática, específicamente?

D1: Cómo es la regla de correspondencia, cómo es su gráfica. Debe saber acerca del uso de parámetros. Debe conocer los procedimientos de reemplazar el valor numérico de una función, pares ordenados, las raíces de la ecuación, qué significan las raíces y luego tal vez […] cuántas soluciones tienen una ecuación cuadrática […].

Es interesante notar que, aunque D1 considera que la situación es más algébrica y que en el momento de la resolución del problema no se emplea casi ninguna propiedad o definición. Sí exige de cierto modo, tener conocimientos previos asociados a las funciones cuadráticas para resolver el problema.

E: […] de tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

D1: Errores típicos de los procedimientos algebraicos […] no saber respetar los signos cuando se pasa de un miembro a otro, no reemplazar correctamente. Tal vez, el error típico de que si $x^2=25$, la respuesta es $x=5$ […].

E: ¿Emplearías tú este problema si tuvieras que enseñar funciones? […].

D1: Yo creo que sí.

E: […] ¿en qué nivel lo usarías tú?

D1: 4to, 5to de secundaria […].

E: Y ¿en qué momento del proceso lo usarías? […].

D1: Al inicio de la clase […].

E: ¿Cómo motivación?

D1: Eso depende, porque va a demandar mucho tiempo. Entonces, creo que sería principalmente, a la mitad de la clase, para que conozcan qué sucede cuando se trabajan parámetros […] análisis.

E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

D1: Si se va a proponer a trabajar con GeoGebra, la pregunta sería, ¿qué sucede con la gráfica de la función cuando el valor de *a* es 1, cuando es 2, cuando es 3?, qué sucede, en conclusión, cuando este aumenta, y lo otro sería, qué sucede cuando este valor se hace más pequeño, ¿cómo se comporta la gráfica? […] lo hace más interesante.

E: Disculpa, para ti lo interesante no es complejo.

D1: No, porque si está en el GeoGebra lo único que tiene que hacer es mover el deslizador […] eso los ayudar a analizar […].

E: […] ¿qué cambios, quizás, podrías hacer a este tipo de situación sea más sencilla?

D1: […] creo que, así como está con GeoGebra, lo hace sencillo.

E: […] ¿cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

D1: […] uso de los parámetros.

Resultados de la entrevista del docente 2

<u>Situación 1</u>:

E: ¿Qué procedimiento crees tú, que emplearía el alumno para resolver la situación?, por ejemplo, en el caso de Vanessa.

D2: […] lo que yo creo que haría un estudiante […] sería ver primero si el comportamiento es constante o de repente hay una variación. Para el de Vanessa, […] en la primera parte, yo creo que hay un comportamiento constante, lineal […] yo creo que graficaría una lineal horizontal y después una línea diagonal.

E: En el caso de Fabián […].

D2: Cuando se tiene la cadena hay una pausa, hay una parte en la cual no hay desplazamiento, se queda fijo en un punto […] cuando dice me tocó irme caminando con mi bicicleta […] el desplazamiento o cambio que realiza es constante […] una línea horizontal.

E: ¿Para el caso de Paula?

D2: […] para que grafique tiene que hacer un plano cartesiano, indicarle como no hay un cambio en la velocidad, o sea es constante, la línea sería horizontal, o sea, una línea recta.

E: Y cuando ellos empleen la gráfica […] ¿tú crees que pondrían ese eje, como está puesto, quizás, en el caso de Santiago? […].

D2: […] la descripción tanto en Vanessa, Fabián y Paula es más cualitativa y no hay muchos números, creo que no entrarían mucho en detalle en la parte de colocar cantidades y se guiarán, más que nada, por la forma que va a tener la línea, si es horizontal o de repente diagonal […].

E: Y en esos puntos donde has hecho la diferencia de pendientes […] ¿cómo ellos lo reconocerían esas diferencias?

D2: […] si eso lo asociamos a situaciones como el accidente que tuvo Fabián […] al no tener, digamos, un movimiento o un cambio de posición se le podría, en este caso, colocar como un punto fijo, y luego con una información […] de que empieza a ir de tal forma que la velocidad se incrementa […] haría un cambio de pendiente […].

E: Y ¿en el caso de Santiago?

D2: […] primero tendría que identificar, ¿no?, los cambios que se dan en la parte del eje x que es el tiempo, con los números que aparecen en el eje y […] entonces el estudiante puede interpretar, que cuando hay una pendiente positiva, hay un incremento en la velocidad […], por ejemplo, de 5:45 a.m. a 5:50 a.m., yo podría decir que Santiago ha incrementado su velocidad, mientras que en el intervalo de tiempo de 5:50 a.m. a 5: 55 a.m. […] su recorrido ha sido de 2 y de 5:55 a.m. a 6:15 a.m. de lo que estaba en 2 se ha desplazado a 11, o sea, hay un incremento de velocidad.

Implícitamente relaciona la frase *tranquilidad y despacio* con la velocidad constante con una recta horizontal, aunque no lo dice verbalmente, sus gestos registrados dan cuenta de ello.

E: […] resolverlo así, como lo has resuelto tú […] el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?

D2: Bueno, si empezamos con una situación en la cual se le da al estudiante un ejemplo […] no sé si llamarle propiedad […] buscar puntos o valores, para tal tiempo o para tal distancia recorre en un tiempo establecido, ¿no?, de tal forma que le permita hacer curvas. Podría ser tabular valores, puntos y luego unir los mismos mediante una recta […] encontrar una curva, teniendo siempre presente qué representa el eje *x*, y qué representa el eje *y*.

E: Cuando tú le pides al alumno graficar […], ¿qué crees que usaría, de frente un gráfico?, ¿usaría una tabla? […].

D2: […] iría más ligado […] al grado de estudiantes para la cual va dirigida esta pregunta. Bueno, si estuviera dirigida a 5to año o 4to año de secundaria, donde ya tienen nociones de física […] harían lo que ha hecho Santiago, un gráfico de esa forma para describir […] pero si no es de 5to o de 4to y de repente es el primer contacto que hace con ese tipo de preguntas […] lo que haría es buscar un medio, un gráfico o quizás, algo que le permita comparar […] no exactamente un plano cartesiano […] colocar un plano y colocares dos lugares […] de colores distintos y colocar datos como, la línea azul ha ido un poco despacio, la línea roja un poco más rápido y la línea negra ha ido regular […].

E: ¿Qué conocimientos previos crees […] que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

D2: […] las nociones de ubicar un punto en el plano, pendiente, para ver los cambios que se dan […] proporcionalidad y ver los cambios que se manifiestan de una cantidad con respecto a la otra y después ya, darle un sentido, una interpretación […].

E: De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver este tipo de situación?

D2: […] carece de dificultes cuando ubica el punto (1,2) o el punto (1,1) […] no reconoce en qué cuadrante está tal par ordenado […] identificar cuál es el eje *x* y el eje *y* […].
E: […] ¿Emplearías este problema […] si tuvieras que enseñar funciones?
D2: […] sí.
E: ¿En qué nivel educativo de los estudiantes, tú emplearías la situación? […].
D2: Yo lo emplearía en 4to de secundaria.
E: Y ¿en qué momento del proceso de enseñanza lo incluirías?
D2: […] lo usaría como una motivación, o sea, al inicio […] asociándolo a la pandemia, quizás, del covid para señalar la variación y los cambios que se dan a través del tiempo, con la cantidad de muertos […] infectados u hospitalizados de tal forma que genere […] un impacto o conflicto cognitivo […].

Es interesante notar que D2 sugiere el cambio de contexto a la situación actual que estamos viviendo para hacerlo más interesante y motivador a los estudiantes.

E: […] ¿qué preguntas adicionales propondrías tú, para que la situación sea más compleja?
D2: […] se podría señalar al estudiante qué cambios presenta la gráfica de tal forma que permita generar […] cómo varía las cantidades […] según el gráfico […] ¿dentro de qué intervalos de tiempo se realizan cambios? Y dentro de esos cambios, si la gráfica es ¿creciente?, es ¿decreciente? o quizás llegue un momento que es continua o es constante, ¿qué cambios manifiesta la gráfica a través del tiempo […].

Vemos que para D2, la complejidad de la situación se asocia al comportamiento variacional de la función lineal.

E: […] ¿qué cambios realizarías tú, al contexto que te he presentado, para que la situación sea más sencilla?
D2: […] quizás empezar en horas específicas […] quitaría un poco los minutos, de tal forma que se trabajare con números enteros para que sea un poquito más práctico.

Bueno, con respecto a la distancia de la urbanización le pondría un valor que tenga mitad, tenga cuarta […] porque posiblemente al momento de graficar en el plano cartesiano al colocar 12 me permita hacer una proporción tal que […] los valores del tiempo que están en el eje horizontal con el número 12, al hacerle subdivisiones, permita tener una mejor apreciación del comportamiento que sufren […].

E: ¿Cuál crees tú, que es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación que se ha propuesto ahora? […].

D2: Funciones lineales o funciones en términos generales […] si lo asocio a temas, quizás, de aritmética, podría ser proporcionalidad […] podría ser pendiente también.

E: ¿Tú crees que podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?

D2: Sí […].

E: ¿Qué preguntas le harías tú? […].

D2: ¿Qué cambios tú ves a medida que avanzo en el eje *x*?, ¿qué observas en el eje *y*? […] ¿ves algún crecimiento algún crecimiento o algún decrecimiento? […] ¿qué tanto está cambiando?

E: Y ¿por qué harías ese tipo de preguntas? […].

D2: Ver la pendiente, ¿cuándo una pendiente es positiva?, ¿qué forma debe tener la gráfica, cuando una pendiente es positiva? […], o quizás cuando le pendiente es nula, ¿cómo se comporta esta función? […] la idea es que el estudiante pueda ver de forma dinámica, cómo se realiza el cambio de una función a medida […] que van cambiando sus parámetros […].

Situación 2:

E: ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?

D2: […] construiría una parábola, completaría cuadrados y ubicaría el vértice […].

E: ¿Qué haría para ver el ingreso máximo y el ingreso nulo?

D2: […] se guiaría del vértice de la parábola y del signo que va a tener.

E: ¿Y para el ingreso nulo? […].

D2: Igualaría a cero y después resolvería la ecuación, ¿no? […].

E: Al resolverlo de esa manera, […] ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición? […].

D2: Estaría formando un trinomio cuadrado perfecto para el caso de formar la parábola […] Sin embargo, la ecuación también de forma general estaría usando la propiedad de discriminante […].

E: ¿qué crees que tendría que dibujar?, ¿hacer un gráfico?, ¿una tabla? […].

D2: Se podría dar valores pequeños a *h* […] y después ver el comportamiento en *y*; quizás con ciertos puntos ver más o menos cómo va a ser la gráfica […].

E: ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver esa situación?

D2: […] secciones cónicas […] parábola, propiedades de las ecuaciones cuadráticas […] el vértice, el foco, la concavidad […] y considerar también, yo creo, el valor de *h* […] en contextos avanzados, sería pertinente usar el criterio de la primera derivada para hallar el máximo.

E: […] de tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

D2: Yo creo que gran parte de los estudiantes manifiestan dificultades al manipular expresiones algebraicas, les cuesta generar o completar cuadrados, operar con signos, identificar términos semejantes al momento de reducir términos y carecen de métodos de factorización, criterios de completar cuadrados […].

E: ¿Emplearías esta situación si tuvieras que enseñar funciones?

D2: […] sí lo usaría.

E: […] me dijiste que el nivel educativo que lo emplearías sería para 5to creo, ¿no?

D2: Sí, 5to de secundaria.

E: ¿En qué momento del proceso de enseñanza lo incluirías?

D2: Yo lo incluiría al inicio, como una situación que genere un conflicto cognitivo, que permita al estudiante quizás relacionar la estructura con algo que él ya conoce, ecuaciones. Si el tema es funciones cuadráticas, él lo podría relacionar con ecuaciones cuadráticas o temas anteriores como completar cuadrados, de tal forma que genere cierto impacto o interés al momento de empezar la clase […]

E: ¿Dónde se crearía el conflicto cognitivo que dices?

D2: […] se daría al momento de comentar al estudiante que una función puede ser una ecuación en un caso particular, cuando esta se hacer cero […].

E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

D2: […] quizás darle una notación exponencial a esa parte numérica […].

E: ¿Y cuáles son las preguntas tú le plantearías para que la situación sea compleja?

D2: […] ¿cuál es el ingreso mínimo?, ¿el ingreso promedio?

E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

D2: […] le quitaría los ceros a toda la expresión […] pondría cambio de signo al coeficiente principal […].

E: ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

D2: […] ¿qué es una parábola?, pero cuando mencionan $h>0$, me haría pensar, y viendo la forma ¿no?, si la parábola es para la derecha o para la izquierda […] podría ser función o también parábola.

E: Y ¿qué de la parábola crees tú que se pretendía enseñar con esa situación?

D2: Los elementos, la aplicación. Como el vértice, concavidad […] foco.

E: ¿Podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?

D2: Yo creo que sí […].

E: Y, ¿qué preguntas le harías? y para qué?, ¿por qué?

D2: ¿qué pasa con los valores son negativos?, ¿hacia dónde apunta la concavidad si es positivo? […].

E: Y ¿para qué harías estas preguntas?, ¿Para que identifique su concavidad, su convexidad?

D2: […] sí, si es cóncavo hacia arriba o hacia abajo.

Situación 3:

Al igual que D1, D2 no está familiarizado con el software GeoGebra, por tal razón sus respuestas serán a papel y lápiz.

E: […] ¿qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
D2: […] reemplazar el par ordenado y generar una ecuación de primer grado, en este caso se pide hallar el valor de *a* […]. Para la d), la estructura de la parábola se pierde, por la misma definición que el coeficiente principal tiene que ser diferente de *0*; es una recta porque el término cuadrático no está presente.
E: Al resolverlo de esa manera […] ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D2: Bueno, principio de sustitución ¿no?, estaría reemplazando en la expresión original de la función, luego por transposición de términos estaría hallando lo que se solicita […].
E: Y ¿qué cosa respondería para la d)?
D2: […] podría justificar con la definición para una parábola y para una recta […] diría es una recta, porque en este caso, el término cuadrático no está presente.
E: ¿Tú crees que podrías resolver solamente la a)? […] ¿tú qué crees que usaría una tabla para hacer eso? ¿qué usarían ahí?
D2: […] se podría tabular, de tal forma que cuando se obtiene la gráfica, quizás permita ver de manera más global cada una de las preguntas que aparece ahí.
E: Pero cuando tú tabulas tendrías que tener el valor de *a*.
D2: […] podría analizarlo con valores positivos por un lado y con valores negativos.
E: […] ¿qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
D2: Resolver una ecuación, ubicar los puntos en el plano, tener coordinación entre elementos de partida y con elementos de llegada e identificar los puntos en los cuadrantes.
E: […] de tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D2: Yo creo que identificar los elementos de partida con los elementos de llegada […] no hay una buena coordinación entre los valores que le das a *x* y los elementos que le das a *y*. Asimismo, la forma de la expresión, cuando está al cuadrado. Posiblemente, cuando quiere graficar no encuentra el vértice o la concavidad que

tiene la función cuadrática […] para una expresión que tiene el parámetro *a* va a hacer un poco complicado.

E: […] ¿emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones?

D2: […] sí.

E: Y, ¿en qué nivel educativo de los estudiantes emplearías la situación?

D2: […] 5to de secundaria mediado por una instrucción guiada, puesto que no hay manipulación, quizás de las herramientas de forma constate […].

E: ¿En qué momento del proceso de enseñanza lo incluirías? […].

D2: Yo lo usaría al final, puesto que ya el estudiante tiene la teoría y de forma sólida, la consistencia de lo que es la función cuadrática. Entonces lo usaría al final como medio de mostrar al estudiante los cambios y la forma de cómo realizar construcciones partiendo de algo particular a algo más general, que es el caso de los deslizadores.

E: […] ¿qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

D2: Bueno, yo le cambiaría el 5 por *b* […], más que nada, si lo ven de forma estática, o sea, lápiz y papel. Pero, si es mediado con el GeoGebra […] tiene un comportamiento dinámico y creo que podría favorecer bastante.

E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

D2: […] el valor de *a* le daría 1.

E: […] ¿cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar en esta situación propuesta?

D2: Funciones cuadráticas.

E: ¿Qué específicamente de funciones cuadráticas?

D2: Según la forma que tiene ax^2-*5* […] lo que se busca es *y* de acuerdo a las preguntas que aparecen […] es si los puntos pertenecer o no pertenecen o para qué valores de *x* existen valores de *y*, si hay una coordinación entre un elemento de partida y un elemento de llegada.

Resultados de la entrevista del docente 3

<u>Situación 1</u>:

E: […] ¿qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
D3: […] Vanessa dice, yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, o sea, va a una velocidad constante […] de Fabián, dice, esta mañana me fui para el colegio con la bicicleta, bien rápido, o sea, él se fue con una velocidad mayor a la de Vanessa […] ahora Paula, yo salí de mi casa a una misma velocidad en todo el recorrido, o sea, una velocidad constante […], en el caso de Santiago, los primeros 5 minutos avanzó *2* km […] luego, de 5:50 a.m. a 5:55 a.m. se quedó en los 2 km […] descansó. Después, a las 5:55 a.m. […] avanzó a una velocidad rápida y llegó 15 minutos antes de iniciar sus clases.

Es interesante notar, que solo D3 reconoce la expresión mitad de camino y lo asocia al dominio de la función.

E: […] al resolverlo de esa manera […] ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D3: […] la definición de velocidad, distancia y tiempo, de velocidad constante […] En primer lugar, la derivada de la distancia es la velocidad, y la derivada de la velocidad es la aceleración y se está haciendo acá […] tendría que evaluar también la pendiente.

Para D3, las definiciones/propiedad tienen más relación con el contexto donde se lleva a cabo la situación (extra matemático).

E: […] ¿qué crees que usaría?, ¿gráfica de frente?, ¿una tabla antes de graficar?
D3: Usaría tabulación primero […].
E: ¿Qué va a tabular?
D3: […] la distancia y el tiempo, ¿a qué tiempo, cuánta distancia está avanzando? En el caso de Paula su velocidad es constante […] tendrían que hacer una tabla. En el caso del alumno Fabián, la gráfica va a ser inmediata, solo sería una lineal nada más.
E: […] ¿qué conocimientos previos crees tú que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

D3: Debería manejar […] el tema de física, distancia, velocidad por tiempo […] ecuación de la recta y la pendiente […] plano cartesiano […] relaciones […] función lineal […] función lineal afín. Siempre va aquí lo que es la tabulación […] par ordenado.
E: […] de tu experiencia como docente, ¿cuál crees tú que serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D3: ¡Ah ya!, que inviertan el sentido, ¿no?, Sobre todo al momento de graficar.
E: […] en el caso de Santiago, ¿qué error pudiera cometer?
D3: […] diría que de 5:50 a.m. a 5:55 a.m. que tiene una velocidad constante […] cuando la velocidad es cero […] y que mencionen por ahí que la velocidad del primer recorrido es igual a la velocidad del segundo recorrido […].
E: ¿Emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones?
D3: […] Sí.
E: […] ¿en qué momento del proceso de enseñanza incluirías esta propuesta?
D3: En el proceso, después de darle la teoría […] y antes hacerles una retro alimentación […] sería como un ejemplo aplicativo.
E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?
D3: […] represente gráficamente lo que sería la velocidad de Paula con su distancia-recorrido […] hállame la función del recorrido de cada uno de ellos […] con su respectivo dominio […] poniendo datos adicionales. Por ejemplo, los primeros 10 minutos avanzó *3* km […] y de ahí se mantuvo constante hasta llegar al colegio […].
E: ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
D3: Primero, a Vanessa le pondría números y pondría el valor de la distancia que ha recorrido […] a Fabián también le pondría números […] a Paula solamente le daría la velocidad […].
E: Sin añadir ningún dato adicional, hazle una pregunta para que la situación sea más compleja.
D3: […] ¿con qué ejemplo se quedaría Ud. para llegar puntual al colegio? […].
E: ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta? […].
D3: Función por tramos.

E: […] ¿podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados? […]
D3: Definitivamente, sí […].
E: Y ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué? […].
D3: ¿Qué comportamiento tendría la recta si modificamos la pendiente? […] para que los alumnos vean el comportamiento de la recta cuando la pendiente sea diferente […].
Situación 2:

E: ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
D3: Primero, lo igualaría a cero […] para ver el ingreso nulo.
E: Y ¿qué más haría?
D3: El ingreso máximo, la derivada.
E: ¿En el colegio se enseña derivada?
D3: ¿Para qué grado es?
E: […] ¿para qué grado tú crees que estaría propuesta la situación 1?
D3: Para 4to y 5to de secundaria.
E: Volviendo a la situación 2, a tu criterio, para ciertos grados, ¿qué cosa haría? […].
D3: Si es para 5to de secundaria, hoy en día la derivada se está enseñando […] dependiendo del colegio […] si es para 4to, vamos a completar cuadrados.

En este caso, es importante señalar que el procedimiento que D3 indica para la resolución del problema tiene relación directa con el nivel educativo donde se sitúa.

E: Al resolverlo de esa manera, […] ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D3: Binomio al cuadrado.
E: […] ¿tú crees que usaría algún gráfico?, ¿alguna tabla? ¿O solamente haría manipulaciones algebraicas?
D3: No, no, álgebra no más […] si sabe, lo haría por gráfica […] pero, no, se complicaría bastante.

E: […] ¿qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
D3: Indiscutiblemente, productos notables […] también aspa simple.
E: De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D3: Que al h le pongan igual a cero […] es que te dicen nulo […] los chicos van a pensar que es $h=0$ […] y, es más, cuando es máximo, también le pondrían $h=0$, porque creen que el término independiente es el máximo.
E: […] ¿emplearías esta situación si tuvieras que enseñar funciones?
D3: Claro […].
E: ¿en qué nivel educativo de los estudiantes lo emplearías?
D3: 3ero o 4to de secundaria.
E: […] ¿en qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación?
D3: […] en ejemplo aplicativo.
E: […] ¿qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?
D3: […] daría la fórmula del costo […] que tiene que ser lineal. Y luego te pido la utilidad, sabiendo que la utilidad es el ingreso menos costo y te preguntaría, ¿estoy perdiendo o estoy ganando?
E: Y ¿si no tendrías que mover nada?
D3: […] ¿la gráfica de la función cuadrática es hacia arriba o hacia abajo? […] o hállame su vértice.
E: ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
D3: […] le quitaría el h^2 […] y le preguntaría […] ¿cuánto sería el ingreso para *7* 000 huevos empacados?
E: […] ¿cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con esta situación?
D3: […] asuntos comerciales, función de oferta y demanda […] funciones especiales […] función cuadrática.
E: Y ¿qué de la función cuadrática crees tú que podamos enseñar con este tipo de situación?

D3; ¡Ah! el aspa simple […] se puede dar el inicio de la derivada […].

E: ¿Tú crees que podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?

D3: Solamente analítico.

E: […] ¿qué preguntas podrían hacerse y para qué?

D3: […] halle la discriminante […] para ver si la función es positiva o negativa dependiendo del valor de *h* […] y ahí te va salir por qué por un lado crece y por el otro lado decrece.

Situación 3:

E: […] ¿qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?

D3: […] en la d), si $a=0$, sería $f(x)=-5$ y sería una función constante".

E: […] al resolverlo de esa manera, ¿el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?

D3: Diferencia de cuadrados.

E: […] ¿qué crees que usarían los alumnos para resolver este tipo de problemas?, ¿un gráfico?, ¿una tabla?, ¿manipulaciones algebraicas?

D3: Solamente hacerlo de forma analítica […].

E: Manipulación algebraica, ¿sería no?

D3: Ya, ok.

E: ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

D3: Primero, productos notables, saber potencia […] racionalización […] números reales […].

E: De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?

D3: ¡Ah ya! por ejemplo […] $x^2=4$ de frente lo ponen que $x=2$ y a no ser que en la parte c) me digan que *a* no existe.

E: […] ¿emplearías esta situación si tuvieras que enseñar funciones?

D3: Claro […].

E: Y ¿en qué nivel educativo lo emplearías?

D3: […] 3ero de secundaria.

E: ¿En qué momento del proceso?

D3: Lo haría como motivación […] para que ellos lo reemplacen y ellos mismo lo hallen.

E: […] ¿qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

D3: […] Encontrar el vértice cuando *a* es negativo y cuando *a* es positivo […]

E: Y ¿cuál sería el cambio que harías tú para que la situación sea más compleja?

D3: […] le agregaría la variable *x* […] y sea más dificultoso para hallar el vértice.

E: ¿Qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

D3: […] Quitarle el -5.

E: ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con esta situación? […].

D3: Teorema de Cardano […].

Resultados de la entrevista del docente 4

Situación 1:

E: […] ¿cuál crees que sería el procedimiento de este alumno?

D4: […] para responder la a) […] lo primero que haría a la hora de plantear o poder hacer una gráfica, es que, si llega sin ningún inconveniente a su destino […] podrá imaginarse que va a hacer una línea recta […].

E: Y ¿para Santiago?

D4: Bueno, según Santiago es que a recorrido, pero ha pasado un inconveniente […] y se ha transcurrido un tiempo. Seguro le ha pasado algo, y después a continuado hasta llegar a su destino […] sin ninguna interrupción […]. Primero que sale con tranquilidad y despacio, después empieza a pedalear más de prisa, me ha ayudado a poder hacer la gráfica de Vanessa.

E: […] al resolver el alumno […] ¿crees que estaría usando alguna propiedad? O ¿alguna definición?
D4: Sí […] la pendiente de la recta […] cuándo es una función constante.
E: ¿qué crees que usaría […] ¿gráfico?, ¿tabla?, ¿par ordenado? […].
D4: Bueno, gráfica sí, porque hay que graficar […] par ordenado.
E: […] ¿qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver ese tipo de situación?
D4: […] la proporcionalidad, la gráfica de una recta, cuándo es una función constante, representar pares ordenados en el plano cartesiano, […] saber cómo empieza a variar esa pendiente según la relación, en este caso, de distancia vs. tiempo […].
E: De tu experiencia […] ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D4: […] primero, darse cuenta si llegó temprano o no llegó temprano […] a la hora de graficar […] reconocer cómo varía la distancia según el tiempo.
E: […] ¿emplearías este problema si tuvieras que enseñar funciones?
D4: […] si es funciones, no creo.
E: ¿Por qué?
D4: Bueno, si yo trabajo primero funciones, el estudiante primero tendría reconocer algunos conceptos de funciones, por ejemplo […] qué es una variable independiente, cuándo es una variable dependiente […] poder representar el par ordenado en un plano cartesiano.
E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
D4: […] no le pondría le sucedió algo […] por ejemplo, se malogró la bicicleta […] entonces camino […] empezaría a pedalear más despacio, le quitaría […] le pondría, sale con tranquilidad y despacio y llega antes de la hora.
E: […] ¿cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta? […].
D4: Cuando es una función lineal […] pendiente, la inclinación de la pendiente.
E: ¿Tú crees que podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?
D4: Claro […].

E: ¿Qué preguntas harías?
D4: […] ¿qué es lo que pasa de tal tiempo a tal tiempo?, ¿qué es lo que pasa de este par ordenado a este par ordenado?, ¿qué es lo que pasa con su distancia?
E: ¿Para qué harías esas preguntas?
D4: Por ejemplo, que me digan de que, de un tiempo a un tiempo, si la inclinación es un poco más grande o más abierta, que ha empleado poco tiempo en una menor distancia […] que se den cuenta cómo varía la distancia según el tiempo.

Situación 2:

E: ¿Qué procedimiento crees que emplearía el alumno para resolver la situación?
D4: Representar esta función es una forma […].
E: Como completar cuadrados.
D4: Ajá.
E: […] resolviendo de esta manera, ¿crees que el estudiante estaría usando alguna propiedad? ¿alguna definición?
D4: Sí, por ejemplo, la definición de las raíces de una ecuación cuadrática […] la gráfica de una ecuación cuadrática, elementos de la gráfica de una ecuación cuadrática […] el coeficiente principal […] darse cuenta de si es negativo es cóncava hacia abajo […] tiene máximo […] si es positivo, es cóncava hacia arriba, tiene mínimo.
E: […] ¿tú qué crees que usaría, gráfico?, ¿una tabla? […]
D4: Sí, yo creo que sí tiene que necesitar par ordenado, grafica también […].
E: ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?
D4: […] ver lo que es funciones […] gráfica de una función cuadrática […] cuándo es máximos y mínimos […].
E: De tu experiencia […] ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación?
D4: […] graficar […] esta función cuadrática, asociarla a su forma […].
E: ¿Manipulación algebraica?

D4: Ajá […] también, para poder hallar las raíces de la ecuación cuadrática, para ver cuando el ingreso es nulo.
E: ¿Emplearías tú este problema si tuvieras que enseñar funciones?
D4: […] sí, sí lo emplearía.
E: ¿En qué nivel educativo lo situarías? […].
D4: […] 3ero de secundaria.
E: ¿En qué momento del proceso de enseñanza incluirías la situación propuesta?
D4: Al inicio […] como situación significativa, pero no lo resuelvo. Después intervengo los conocimientos que necesita, después vuelvo al problema y trato de ver si podemos solucionarlo.
E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?
D4: […] hallar la gráfica […] generalmente los estudiantes llegan a 3ro con muchas dificultades en graficar […] por ejemplo, han hallado […] estos ingresos nulos […] pero no lo sepan asociar a la gráfica, qué cosa viene a ser estos elementos nulos en la gráfica.
E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?
D4: Primero le quitaría los dos ceros que están ahí […] en vez de negativo podría positivo.
E: ¿Cuál crees tú que sea el concepto o propiedad que se pretende enseñar con esta situación?
D4: Funciones cuadráticas […] los interceptos […] cuando es máximo y cuando es mínimo, cuando es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo […].
E: ¿Crees tú que podría ayudar emplear un programa como el software GeoGebra para consolidar los conocimientos abordados?
D4: […] Sí, sí ayudaría bastante.
E: Ya, ¿y qué preguntas le harías al alumno?
D4: ¿qué pasa cuando el coeficiente principal sea positivo? o ¿qué pasa cuando el coeficiente principal sea negativo? […] para que se dé cuenta cómo es la gráfica de la función […] si tiene máximos, si tiene mínimos con respecto a la gráfica.

<u>Situación 3</u>:

E: […] si es con GeoGebra, ¿cómo el alumno haría la parte a)?

D4: […] empezaría a deslizar el *a* y ubico […] el punto en (2,3). Empiezo a movilizar y cuando la gráfica concuerda con el punto me da el valor de *a* y la vista algebraica me dice que *a* vale *2*.

E: En la parte b) ¿sería lo mismo?

D4: Sí se puede, pero […].

E: ¿En la parte c)?

D4: […] mover, deslizar y ubicar en el punto 5 y -5 […] pero con 10 y -10 no se puede […] creo que tendría, el deslizador, agrandar, ¿no?, o sea el valor de *a* […] igualito en […] b) yo he tenido que cambiar para poder encontrar el valor de *a*.

E: ¿En la parte d?

D4: […] Yo creo que el alumno no podría explicar esa parte […] porque cuando se ve este tema una de las cosas que se tiene que añadir antes es que el coeficiente principal tiene que ser diferente de cero.

E: Y ¿eso no lo van a saber los chicos?

D4: Claro, porque uno generalmente cuando enuncia la función cuadrática, a veces no se pone o no se da cuenta el estudiante.

E: Para la e) y en la f) ¿qué clase del procedimiento desarrollaría el alumno?

D4: […] con la recta […].

E: Cuando el estudiante lo resuelve con el GeoGebra, ¿qué propiedad crees que estaría utilizando? […]

D4: Están de manera implícita […] cuando tiene puntos de corte, cuando no tiene puntos de corte. Cuando tiene máximo, cuando tiene mínimo. Cómo se abre la gráfica, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; dependiendo del valor de *a* que tome.

E: Si lo hace de manera manual, ¿emplearía los mismo conceptos y propiedades?

D4: No, ya sería diferente. Por ejemplo, en el c) tendría que emplear […] cómo construir la función cuadrática a partir de las dos raíces que tiene […] en el e) y en el f) tienen que saber que ese punto pertenece a la gráfica de la función.

E: […] ¿tú crees que usaría una tabla? […] ¿algo adicional? […].

D4: No emplearía nada más.

E: ¿Si es manualmente?

D4: Necesitaría varías gráficas.

E: ¿Qué conocimientos previos crees que debe de necesitar el alumno para resolver la situación?

D4: Ecuaciones, definición de función, par ordenado dentro de una gráfica […] conocer […] la primera componente […] la segunda componente. También, a partir de las raíces, reconstruir lo que es la gráfica de la función cuadrática.

E: De tu experiencia, ¿cuáles serían los errores más comunes que tendría el alumno al resolver la situación? […]

D4: Graficar, reconstruir la ecuación cuadrática a partir de las raíces […] cómo reemplazar el par ordenado dentro de la función.

E: ¿Emplearías tú este tipo de problema para enseñar funciones? […].

D4: Sí […].

E: ¿En qué nivel educativo lo propondrías?

D4: 4to.

E: ¿En qué proceso?, ¿iniciando?, ¿mitad? […].

D4: Al último […] para que el alumno ya pueda aplicar las propiedades y corroborar de que las propiedades que ha utilizado también se pueda comprobar mediante un programa, como en este caso es el GeoGebra.

E: ¿Qué preguntas adicionales propondrías para que la situación sea más compleja?

D4: Le añado al *f(x)* [...] el factor lineal […] va a tener la dificultad de hallar el vértice […] en el GeoGebra […] las raíces le pongo cantidades imaginarias.

E: […] ¿qué cambios realizarías al contexto para que la situación sea más sencilla?

D4: Le podría solamente que la función dependa del término cuadrático.

E: Muy bien, ¿Cuál crees es el concepto o propiedad que se pretende enseñar con la situación propuesta?

D4: Funciones cuadráticas […] las raíces de una función cuadrática, puntos de corte, concavidad.