PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE EL COSTO MARGINAL PARA ESTUDIANTES DE ADMINISTRACIÓN

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Juan Rodolfo Viza Fernández

ASESORA

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Mayo, 2021

RESUMEN

La presente tesis es una investigación de carácter cualitativo y tiene su concepción en nuestra preocupación por el aprendizaje de la derivada en estudiantes de nivel superior, que, de acuerdo con investigaciones realizadas por la comunidad científica en Enseñanza de las Matemáticas, se centra sobre todo en las reglas de derivación, dejando de lado demás interpretaciones de la derivada, como la geométrica o como la de razón de cambio. Este hecho no es ajeno a estudiantes de nivel superior de carreras de administración, más precisamente en su aprendizaje sobre el costo marginal, en el que la concepción basada en las reglas de derivación no permite interpretar sus resultados, lo que representa un problema importante, pues el costo marginal permite una mejor toma de decisiones en los administradores.

Por otro lado, la coyuntura actual por la COVID-19 obliga a brindar clases a distancia, lo que, si bien es cierto que representa dificultades, también puede verse como una oportunidad de explorar herramientas tecnológicas desarrolladas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Es en este contexto que la presente tesis se desarrolla con el objetivo de plantear una propuesta didáctica para la gestión de una clase virtual sobre el costo marginal para estudiantes de carreras de administración. Para esto, se consideran nociones teóricas de la Aproximación Instrumental y sobre todo de la Orquestación Instrumental, las cuales nos permiten establecer una propuesta didáctica sobre el costo marginal para estudiantes de administración.

Especialmente en lo que respecta a la Orquestación Instrumental, en la presente investigación se proponen dos tipos de orquestación en los que se analizan dos fases de las tres que esta tiene, ya que nuestra investigación por ser propuesta didáctica, y en el actual contexto de pandemia no podrá ser experimentada.

Palabras clave: Costo marginal, Derivada, Aproximación Instrumental, Orquestación Instrumental.

ABSTRACT

This thesis is a qualitative research and has its conception in our concern for the learning of the derivative in higher-level students that, according to research carried out by the scientific community in Mathematics Teaching, focuses mainly on the derivation rules, leaving aside other interpretations of the derivative such as the geometric one or as the rate of change. This fact is not alien to upper-level administration students, more precisely in their learning about marginal analysis in which the conception based on the derivative rules does not allow the interpretation of its results, which represents an important problem since analysis marginal allows decision-making in administrators.

On the other hand, the current situation due to COVID-19 forces the provision of distance classes which, although it is true it represents difficulties, can also be seen as an opportunity to explore technological tools developed to support student learning.

It is in this context that the present thesis is developed with the objective of proposing a didactic proposal for the management of a virtual class on marginal cost for administration students. For this, theoretical notions of Instrumental Approach and Instrumental Orchestration are considered, which allow us to establish a didactic proposal on marginal cost for management students.

Especially concerning to Instrumental Orchestration, two types of orchestration are proposed in this research, in two phases of the three that it has, since our research, being a didactic proposal, and in the current context of pandemic, cannot be experimented.

Keywords: Marginal Cost, Derivatives, Instrumental Approach, Instrumental Orchestration.

A mis padres, quienes, desde que era muy pequeño me inculcaron el valor del esfuerzo y el cariño por las matemáticas, y a mis hermanos, por su inagotable apoyo y por motivarme a ser mejor día a día.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su paciencia, orientación y soporte. Mi total gratitud y admiración por el tiempo compartido durante el desarrollo de esta investigación.

A los miembros del jurado, Dra. Verónica Neira Fernández y Mg. Flor Isabel Carrillo Lara, cuyas importantes observaciones y sugerencias me permitieron mejorar la investigación realizada.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por sus valiosas enseñanzas, en especial a la Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, por expandir mi visión sobre las matemáticas.

A la Escuela de Posgrado de la PUCP, por el apoyo brindado a través de la beca Aristóteles.

A todos mis compañeros de clases, con los que compartí momentos de aprendizaje y esparcimiento durante la maestría.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El costo marginal, constituye una de las nociones importantes para estudiantes de carreras de Administración, pues es una herramienta determinante en la toma de decisiones. Esta noción se les suele enseñar a dichos estudiantes en los primeros ciclos, en cursos en los que se abordan temas de Cálculo Diferencial y tiene mucha relación con la derivada. Debemos indicar también que el costo marginal como derivada de la función costo no es lo más importante, pues su verdadera importancia radica en la interpretación de este resultado.

Es por eso por lo que en esta investigación tenemos como uno de nuestros objetivos diseñar una propuesta didáctica en medios virtuales sobre el costo marginal para estudiantes de carreras de administración.

Dada la actual coyuntura que atraviesa el planeta por la pandemia del COVID-19, planteamos esta propuesta para ser desarrollada en entornos de aprendizaje virtual. En este sentido, nuestro objetivo general es analizar cómo organizar una clase virtual sobre el costo marginal para estudiantes de administración con base en la Orquestación Instrumental.

En el primer capítulo, en el que se expondrán las investigaciones de referencia, la justificación, los aspectos teóricos considerados en esta tesis, la pregunta y los objetivos de investigación y los aspectos metodológicos.

En el segundo capítulo se analizará el desarrollo histórico-epistemológico de la derivada, por ser esta noción fundamental en el desarrollo del costo marginal, y se analizará la forma en la que es presentado el costo marginal en distintos textos de consulta de cursos en los que se enseña el costo marginal en universidades peruanas.

En el tercer capítulo se analizará la propuesta didáctica en términos de los marcos teóricos de la Aproximación y la Orquestación instrumentales en busca de la génesis instrumental del costo marginal en estudiantes de carreras de Administración y Negocios. En este capítulo se presentarán dos orquestaciones instrumentales basadas en los tipos de orquestación instrumental identificados por Şay y Akkoç (2016) adaptadas a entornos virtuales.

Finalmente, se presentan las conclusiones en las que se detallarán los posibles resultados de esta investigación, así como las limitación y recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo presentamos inicialmente investigaciones de referencia, las cuales se encuentran basadas en la literatura actual, para luego pasar a la justificación del problema de investigación. Después presentaremos los aspectos teóricos, que servirán de soporte en esta tesis; posteriormente la pregunta y los objetivos de la investigación, y, por último, los aspectos metodológicos a seguir.

A continuación, presentamos investigaciones realizadas en relación con el objeto matemático denominado derivada, pues es la base del costo marginal.

1.1 Investigaciones de referencia

Como ya se mencionó, el costo marginal se encuentra estrechamente relacionado con la derivada; es por esta razón que las investigaciones de referencia que presentaremos se encuentran enfocadas en este objeto matemático. Estas investigaciones de referencia se encuentran organizadas en dos criterios temáticos, que se detallan enseguida. En el primer criterio se mostrarán investigaciones relacionadas con el desarrollo histórico-epistemológico de la noción de derivada, las que permitirán establecer los problemas que motivaron el desarrollo de este objeto matemático, mientras que en el segundo criterio temático se exhibirán investigaciones acerca de la enseñanza de la derivada y cómo el apoyo de medios tecnológicos contribuye a su comprensión. A continuación, se desarrollará el primer criterio temático:

Investigaciones relacionadas con el desarrollo histórico-epistemológico de la derivada

Este criterio temático mostrará las investigaciones realizadas por Vrancken y Engler (2013) y García, Moreno, Badillo y Azcárate (2011), cuyo objetivo fue analizar la evolución histórica-epistemológica de la derivada a lo largo de la formación de su definición.

En la investigación realizada por Vrancken y Engler (2013) se muestra la evolución histórica de la noción de función y de la noción de derivada enfocada desde la variación y el cambio. Partiendo desde el mundo antiguo, con civilizaciones como la babilónica —quienes a través de sus tablas mostraron interés por fenómenos de cambios— y la griega —quienes se interesaron en el estudio de las rectas tangentes—, Vrancken y Engler (2013) describen que, después de definiciones como las de velocidad uniforme y movimiento uniformemente variado, se presentaron problemas como el de determinar la velocidad de un cuerpo en movimiento y el problema de hallar máximos y mínimos de una función. Según Vrancken y Engler (2013), fue Fermat quien, en su obra *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum,* publicada en 1637, enunció que en los lugares donde una función alcanza su máximo o mínimo la recta tangente al gráfico es horizontal.

En el siglo XVII, de acuerdo con las autoras, Newton, en su búsqueda de una solución al problema de la velocidad instantánea asoció este problema al de la pendiente de la recta tangente en su obra *Método de las fluxiones*, publicada en 1736, desarrollando el método que hoy en día conocemos para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva. Años más tarde, en 1823, Cauchy realizó la definición formal de la derivada de $f(x)$ como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$; fue durante esta época que el cálculo fue dejando de lado la parte geométrica a favor de un trabajo más de índole algebraico.

La idea central de la investigación realizada por Vrancken y Engler (2013) es mostrar cómo el estudio de la variación tuvo una gran importancia en la aparición de la definición de la derivada a través del estudio de la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea. En cuanto a las conclusiones, las investigadoras afirman que el camino recorrido por la derivada podría ser adaptado para su enseñanza. Es decir, se podría iniciar estudiando la variación media de una función para luego pasar a estudiar la variación instantánea, y, a partir de actividades como esta, pasar finalmente a la definición de la derivada.

Por otro lado, García, Moreno, Badillo y Azcárate (2011) muestran el recorrido del concepto de la derivada partiendo desde su descubrimiento por parte de Newton y Leibniz: el primero desde el punto de vista de la velocidad instantánea y el segundo desde su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de una función. Los autores también reconocen los aportes en la formación de la definición de este tópico matemático por parte de Euler, al introducir la noción de función; de Lagrange, quien llegó a concluir que la derivada de una función es otra función e introdujo la notación f' y los aportes de Cauchy y Weierstrass, quienes, según García et al. (2011), terminaron por definir formalmente la derivada de una función en términos de límites.

Los investigadores muestran, también, la relación que tiene la derivada con las ciencias económicas y afines mediante el análisis marginal y el estudio de la elasticidad de la demanda. Se establece que, por ejemplo, el costo marginal $C'(x)$ es aproximadamente igual al costo de producir una unidad adicional $(x+1)$ y que esto tiene mucha relevancia en la economía pues permite pronosticar lo que sucedería si se produce una unidad adicional.

Además, García et al. (2011) muestran el estudio de la oferta y la demanda en términos de la cantidad, y detallan que usualmente la demanda es decreciente y la oferta creciente; esto permite relacionar dichos conceptos con la primera derivada. Los autores señalan que, en la presentación de la derivada a estudiantes de economía, se suele dejar de lado su desarrollo histórico como estrategia didáctica. Por último, esta investigación explica una forma de introducir la derivada desde un enfoque económico, iniciando por el costo promedio para pasar luego a la introducción del costo marginal, esto es, haciendo un paralelismo con la velocidad media y la velocidad instantánea. Otra propuesta de los investigadores de este artículo es diseñar actividades para determinar si una función representa la oferta o la demanda apoyándose en el signo de la derivada.

En seguida se procederá a mostrar las investigaciones de referencia que conforman el segundo criterio temático:

Investigaciones acerca de la enseñanza de la derivada apoyadas en medios tecnológicos

Se mostrará a continuación una serie de investigaciones centradas en la enseñanza de la derivada y apoyadas en algunos medios tecnológicos como los *software*s GeoGebra, Modellus, entre otros.

En su investigación, Sari, Hadiyan y Antari (2018) diseñaron una trayectoria hipotética de aprendizaje para explorar los conceptos de derivada apoyándose en la característica dinámica de GeoGebra. La investigación se realizó con 44 estudiantes inscritos en un curso de cálculo diferencial y la pregunta que guio la investigación fue cómo se puede usar la herramienta GeoGebra para explorar los conceptos de la derivada al proporcionar visualizaciones dinámicas del concepto.

Sari et al. (2018) dividieron su investigación en tres fases: la primera fue de diseño y preparación; la segunda, del experimento de enseñanza, y la tercera, de análisis retrospectivo. Los investigadores comenzaron preguntando a los estudiantes qué sabían acerca de la derivada, obteniendo respuestas basadas sobre todo en las reglas de derivación. Luego de esto se realizó una actividad, apoyada en GeoGebra, mediante la cual los estudiantes lograron obtener una noción de la definición de la derivada mediante la recta tangente como el límite de la recta secante, logrando un avance considerable respecto de las nociones que tenían al principio.

En la siguiente actividad, los autores buscaron lograr que los estudiantes relacionen el gráfico de una función con el gráfico de su derivada. Esta actividad pretendía establecer que, si una función era creciente (decreciente), su derivada era positiva (negativa).

Una de las conclusiones a las que llegaron Sari et al. (2018) fue que los estudiantes necesitaban una mayor experiencia en el uso de la derivada y que el entorno proporcionado por GeoGebra permite a los estudiantes conocer distintas representaciones de este objeto matemático.

Otra investigación importante es la realizada por Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa (2018); el objetivo de esta investigación fue identificar cómo algunos problemas de modelación y el uso de *softwares* contribuyen a la aparición de la noción de derivada mediante la tasa de variación instantánea.

Esta investigación consistió en estudiar la actividad de cuatro estudiantes del curso de Precálculo de un programa de ingeniería en la solución de dos tareas de modelación, a las que llamaron «tarea 1» y «tarea 2», apoyadas con el uso de los *softwares* GeoGebra y Modellus.

La tarea 1 consistió en la modelación del área de un paralelogramo inscrito en un rectángulo haciendo variar uno de sus lados. Las estudiantes que participaron consiguieron una expresión matemática que modelaba el área de dicho paralelogramo: $A(x) = 2x(6 - x)$. Luego, con el uso de GeoGebra, pasaron a estudiar la tasa de variación media a través de una herramienta creada por los investigadores. Esta tarea mostró que hubo dificultades al introducir la tasa de variación instantánea, pues, cuando se estudiaban intervalos muy pequeños, pudieron notar que la tasa de variación se aproximaba a cierto número; pero, cuando el investigador preguntó por la tasa de variación en un punto, las estudiantes se apoyaron en la herramienta, que arrojaba el resultado 0/0, y afirmaron que no existe la tasa de variación en dicho punto.

Por otro lado, la tarea 2 de la investigación realizada por Villa-Ochoa et al. (2018) consistía en el movimiento de un vehículo en función del tiempo; en este caso, las estudiantes consiguieron que la función que modelaba tal problema era $x(t) = 2t(6 - t)$. Los investigadores lograron que las estudiantes relacionaran la variación de la posición respecto de la variación del tiempo con la velocidad del vehículo y, lograron identificar que esta función era la misma que la función hallada en la tarea 1. Después, los investigadores preguntaron a las estudiantes por la velocidad del vehículo en $t = 2$; ellas lograron relacionar esta pregunta con la actividad anterior y establecieron que la velocidad sí existía, logrando apartarse de la respuesta dada en la tarea 1. El uso del *software* Modellus terminó por aclarar algunas dudas al mostrar la representación tabular del límite en cuestión, llegando a conseguir la expresión para la variación instantánea mediante límites.

Durante la investigación se hizo uso de las distintas representaciones de la derivada mediante gráficos y tablas a través del uso de tecnologías digitales. Además, en esta investigación, Villa-Ochoa et al. (2018) llegaron a la conclusión de que la situación a modelar influye en la aparición de la derivada, pues la tarea 2 tuvo mejores resultados con respecto a la tarea 1 al tratarse de una situación de movimiento que es más cercana a las estudiantes que participaron de esta investigación en comparación con la situación planteada en la tarea 1 y que el uso de tecnologías tuvo importancia en la solución de estas tareas.

Una investigación que se centra en la formación de la noción de la derivada mediante el estudio de problemas de optimización es la realizada por Navarro, Robles, Ansaldo y Castro (2016), la investigación fue motivada por el supuesto que se tiene de que las matemáticas no se aplican en lo cotidiano, haciendo que muchos estudiantes la consideren difícil al no presentarse con actividades cercanas a su realidad.

La investigación se hizo con 20 estudiantes de ingeniería del curso Cálculo Diferencial y la actividad diseñada consistió en hallar el volumen máximo de un cilindro y la relación que existe con la recta tangente a la gráfica que modela la función volumen. Se partió de un problema en un entorno físico al formar dos cilindros con dos hojas rectangulares congruentes, un cilindro se construyó al formar la base circular con el ancho de la hoja y el otro al formar la base circular con el largo. Se les pidió que hagan una hipótesis en cuanto al volumen de cada cilindro construido para luego pasar a medir el volumen mediante una taza, que sirvió como unidad de medida, y arroz.

Después, Navarro et al. (2016) plantearon el problema de conseguir el volumen máximo del cilindro que se podría formar manteniendo el área anterior más el área de la base. Para esto, tuvieron que modelizar la situación con una función (volumen en función del radio) y pasaron a usar un archivo elaborado con el *software* GeoGebra mediante el que se haría el análisis del comportamiento tanto de la función volumen como el de la recta tangente mediante un deslizador que hacía variar el radio.

La investigación se realizó bajo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se analizó la actividad en las siguientes cinco fases: análisis de las prácticas matemáticas, análisis de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos, identificación del sistema de normas y meta normas y se hizo una valoración de la idoneidad didáctica.

El objetivo de la investigación realizada por Navarro et al. (2016) fue construir una propuesta didáctica que genere la noción de la derivada mediante un problema de optimización apoyada por tecnologías y desarrolladas en un entorno cercano al estudiante. Los autores indican que es importante que el problema esté basado en la realidad del estudiante porque así se logra darle sentido al estudio de las derivadas y no limitarlas a algo abstracto sin aplicaciones.

Por otro lado, una investigación que se encargó de estudiar las distintas representaciones semióticas de la derivada fue la realizada por Viseu (2017) quien trabajó con estudiantes de bachillerato de Portugal, el objetivo de esta investigación fue conseguir que los alumnos lograran coordinar las distintas representaciones de la derivada como lo son las representaciones gráficas (pendiente de la recta tangente), verbal (tasa de variación instantánea) y simbólica (como límite).

El investigador encontró que sus estudiantes tenían una concepción de la derivada basada sobre todo en las reglas de derivación. Esta investigación usó la Teoría de Registros de Representación Semiótica, como marco teórico para conseguir que sus estudiantes adquirieran una mejor comprensión de la noción de derivada valiéndose de tareas sobre la tasa media de cambio para pasar luego a la tasa de variación instantánea relacionando estas actividades con la obtención de la recta tangente a la gráfica de la función que se estudiaba. Luego, Viseu (2017) terminó planteando una tarea para obtener los extremos relativos de una función. Cabe resaltar que esta investigación se realizó mediante el uso de calculadoras graficadoras.

Los resultados que obtuvo muestran que los estudiantes pueden usar diferentes representaciones, pero tienen complicaciones en establecer relaciones entre ellas, basando sus soluciones, sobre todo, en el uso de una sola representación y algunas veces utilizan simultáneamente dos representaciones, pero con mayor dificultad. El autor concluye, además, que el cambio de representación se da porque los estudiantes al no conseguir dar respuesta a una tarea mediante la representación algebraica optan por otra representación como la gráfica. Esto muestra que el cambio de representación se da por necesidad y no por elección.

En la misma línea, Seidi, Giusti y Vieira (2017) se enfocaron en analizar las ideas que tienen estudiantes de un curso de Licenciatura en Matemática, quienes ya habían llevado el curso de Cálculo Diferencial, sobre la derivada para luego tratar de ampliar estas nociones. La investigación fue motivada porque en la experiencia de los autores, la derivada es usada simplemente aplicando las reglas de derivación dejando de lado la relación que existe entre el gráfico de la función con el gráfico de su derivada.

La investigación utilizó la noción de Imagen de Concepto y de Definición de Concepto desarrolladas por David Tall y Shlomo Vinner. Esta teoría establece que la imagen del concepto son todas las ideas que puede tener una persona con relación a un objeto, esta se va desarrollando en el tiempo a lo largo de la experiencia de cada persona. Por otra parte, de acuerdo con Seidi, Giusti y Vieira (2017), la Definición de Concepto son las palabras que usa una persona para explicar un objeto.

La investigación muestra una fase de las tres realizadas por los autores y consistió en realizar un cuestionario para conocer las concepciones que tienen los estudiantes de una Licenciatura en Matemática acerca de la derivada. En la primera pregunta se da el gráfico de una función y una recta tangente, además de la ecuación de la recta y se pide hallar la derivada en el punto de tangencia, con esto se busca averiguar si el estudiante asocia la noción de derivada con la de la pendiente de la recta tangente. La segunda pregunta pide establecer una relación entre el gráfico de funciones y el gráfico de sus respectivas derivadas, lo que se buscaba en esta pregunta era saber si el estudiante lograba asociar, por ejemplo, que cuando la función derivada es positiva, la función original es creciente. Por último, en la investigación de Seidi et al. (2017), la tercera pregunta pedía que los estudiantes definan con sus propias palabras la derivada.

Esta investigación tuvo como objetivo conseguir enriquecer las ideas de estudiantes de Licenciatura en Matemática con respecto a la derivada. La conclusión a la que llegan los autores es que las imágenes del concepto de derivada que tienen los estudiantes que participaron de esta investigación se centran en las reglas de derivación, dejando de lado las relaciones existentes entre los gráficos de la función y de su derivada, estableciendo una comprensión parcial de esta noción. Además, los autores concluyen que para ampliar estas ideas harán uso de *softwares* como GeoGebra y SimCalc, pero los resultados serán analizados en artículos futuros.

Para terminar con este apartado, se presentará la investigación realizada por García-Cuéllar, Martínez-Miraval y Salazar (2018) quienes tuvieron como objetivo analizar la génesis instrumental de la razón de cambio instantánea en estudiantes de la carrera de administración. Cabe señalar que se siguió la metodología propuesta por la Ingeniería Didáctica y tuvieron como marco teórico la Aproximación Instrumental.

Los investigadores realizaron analizaron tres textos usados en la enseñanza del Cálculo y encontraron que la razón de cambio instantánea es presentada como una aplicación de la derivada y que no se presentan actividades que generen la aparición de la razón de cambio instantánea.

Los investigadores diseñaron dos actividades apoyadas en el *software* GeoGebra. La primera actividad constaba de cinco subactividades, mientras que la segunda contenía tres. La investigación muestra el análisis a priori y a posteriori de dos subactividades de cada actividad, encontrando que los estudiantes lograron pasar de esquemas de uso a esquemas de acción instrumentada al usar conceptos previos como los de recta secante, función, razón de cambio promedio para pasar a la razón de cambio instantánea evidenciando de esta manera la génesis instrumental de la razón de cambio instantánea.

1.2 Justificación

En la presente tesis estamos interesados en presentar una propuesta didáctica sobre el costo marginal para estudiantes de administración y teniendo en cuenta que la base fundamental del costo marginal es la derivada, se presentaron investigaciones acerca de este objeto matemático como las realizadas por Seidi et al. (2017) y Viseu (2017) que detallan que existe una concepción exclusivamente algebraica de la derivada por parte de los estudiantes dejando de lado interpretaciones importantes de esta noción como la gráfica (pendiente de la recta tangente), simbólica (como límite), entre otras. Estas investigaciones demuestran el interés de la comunidad científica en lograr que los estudiantes obtengan una comprensión más integral de la derivada.

Por otro lado, la investigación realizada por Vrancken y Engler (2013) señala que el recorrido histórico de la derivada podría ser adaptado en la enseñanza, es decir, podríamos utilizar problemas como el de la velocidad instantánea partiendo de la velocidad media para introducir las nociones de derivada en los estudiantes. En ese mismo sentido, la investigación realizada por García et al. (2011) se relaciona con las ideas de Vrancken y Engler (2013) en cuanto a la enseñanza de la derivada en estudiantes de Economía o ciencias afines mostrando que, por ejemplo, podría usarse la razón de cambio promedio del costo como inicio para luego llegar a la razón de cambio instantánea del costo y finalmente introducir el costo marginal. Así mismo, la investigación realizada por García-Cuéllar et al. (2018) parte de la razón de cambio promedio y logra la génesis instrumental de la razón de cambio instantánea en estudiantes de primeros ciclos de Administración mostrando buenos resultados bajo el marco teórico de la Aproximación Instrumental.

Además, las investigaciones realizadas por Villa-Ochoa et al. (2018) y Navarro et al. (2016) muestran la importancia del problema a modelar en el estudio de la derivada pues los problemas cercanos a la realidad del estudiante logran mejores resultados y muestran la utilidad de la derivada. Por un lado, la investigación de Villa-Ochoa et al. (2018) trató el problema de la recta tangente, mientras que la realizada por Navarro et al. (2016) partió de un problema de máximos y mínimos, cabe resaltar que según Vrancken y Engler (2013) fueron estos problemas los que propiciaron el desarrollo de la derivada.

En adición a esto, la investigación de Sari et al. (2018) muestra el beneficio del uso del *software* GeoGebra en la enseñanza de la derivada dado el carácter dinámico de este. Es importante mencionar que el software GeoGebra estuvo presente en muchas de las investigaciones exhibidas en las investigaciones de referencia, mostrando que su uso favorece una mejor comprensión de la derivada por parte de los estudiantes.

Por otro lado, se realizó una investigación en las mallas curriculares y sílabos de distintas facultades de negocios en universidades peruanas, encontrando que en los cursos Matemática aplicada a los negocios de la Universidad de Lima, Matemática 1 de la Universidad Privada del Norte (UPN), Matemática II de la Universidad San Martín de Porres (USMP) y Cálculo de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) se aborda la enseñanza de la derivada que es preciso recordar que el costo marginal suele verse como una aplicación de la derivada.

En la figura 1, por ejemplo, se muestran las unidades temáticas del curso Cálculo del segundo ciclo de la carrera de Administración y negocios internacionales de la UPC.

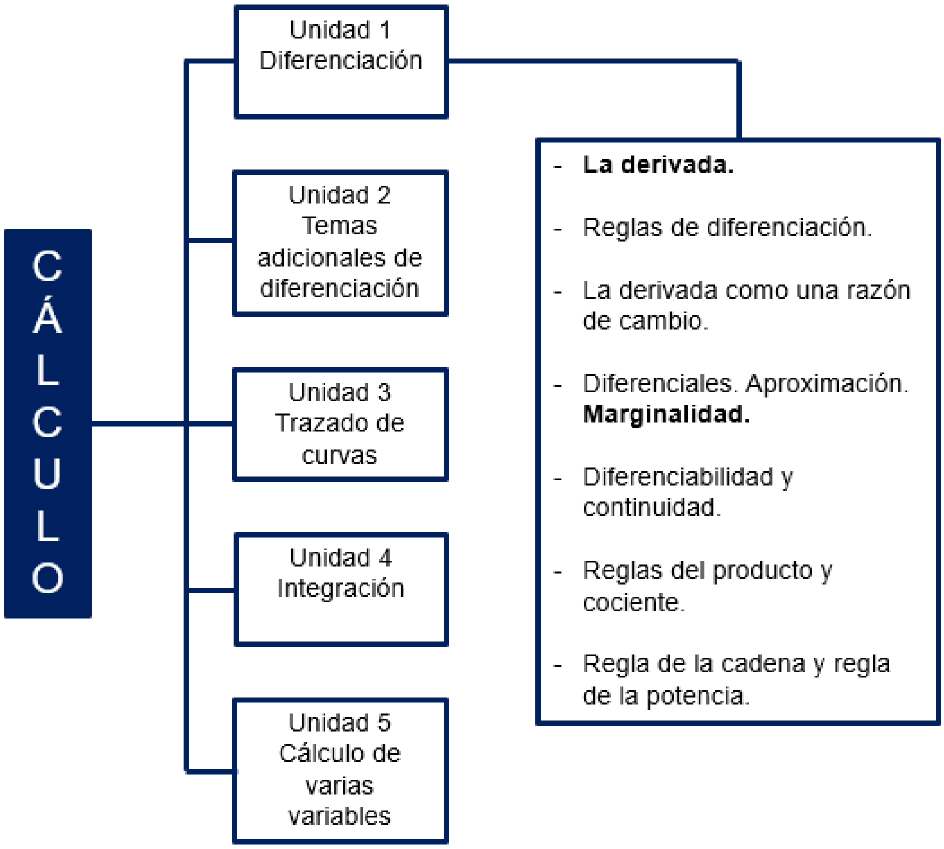

***Figura 1*: Contenido del curso Cálculo de la carrera de Administración y Negocios Internacionales de la UPC**

Fuente: Elaboración basada en https://tinyurl.com/y6l37p24

Se puede observar en la figura 1 que el estudio de la derivada es el primer tema de la unidad 1, después se presentan las reglas de diferenciación, la derivada como una razón de cambio, diferenciales, aproximación y la marginalidad, que es justamente el tema central de esta tesis.

Por otro lado, en la figura 2, se muestra parte de la malla curricular de la carrera de Administración y negocios internacionales de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), se puede notar que el curso Cálculo es requisito para el curso Estadística descriptiva del tercer ciclo y que este otro curso a su vez es requisito de cursos enseñados en ciclos posteriores como por ejemplo Estadística inferencial en el cuarto ciclo y Métodos cuantitativos del quinto ciclo de esta carrera.

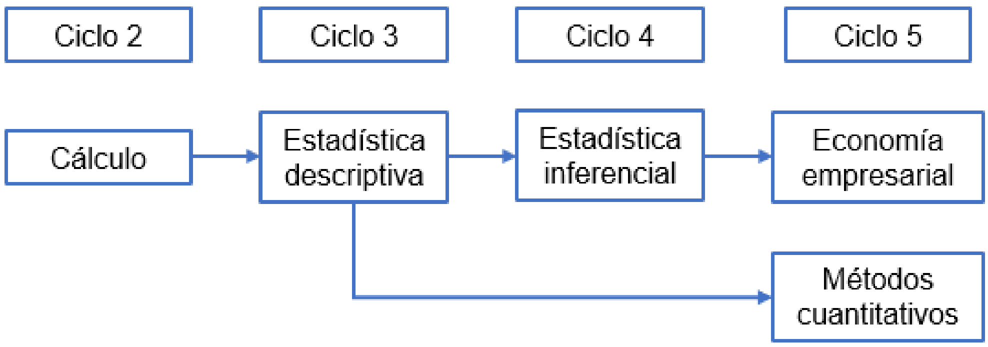

Figura 2: Parte de la malla curricular de la carrera de Administración y Negocios Internacionales de la UPC.

Fuente: Elaboración basada en https://tinyurl.com/y573htpz

Por otro lado, en la figura 3 se muestran las unidades temáticas del curso Matemática II del segundo ciclo de la Universidad San Martín de Porres. Se puede notar que la enseñanza de la derivada se aborda en la unidad 2 y que la enseñanza del análisis marginal del costo, ingreso y utilidad se da en la unidad 3, denominada Aplicaciones de la derivada.

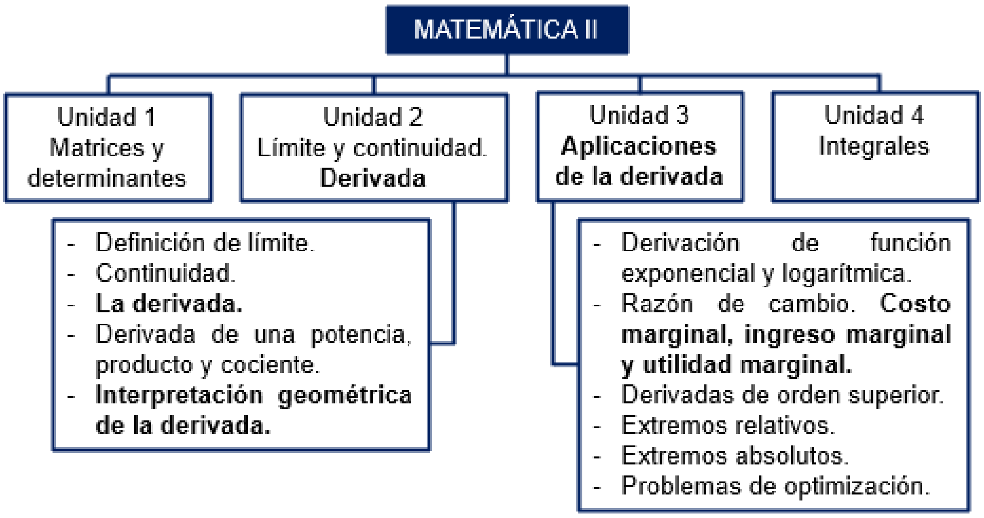

Figura 3: Contenido de las unidades 2 y 3 del curso Matemática II de la carrera de Administración de la USMP.

Fuente: Elaboración basada en https://tinyurl.com/y58qlqzx

Así mismo, en la Figura 4 se muestra parte del plan de estudios de la carrera de Administración de la Universidad San Martín de Porres, se puede observar que este curso es requisito del curso Matemática financiera y este, de la misma manera, será requisito de cursos posteriores.

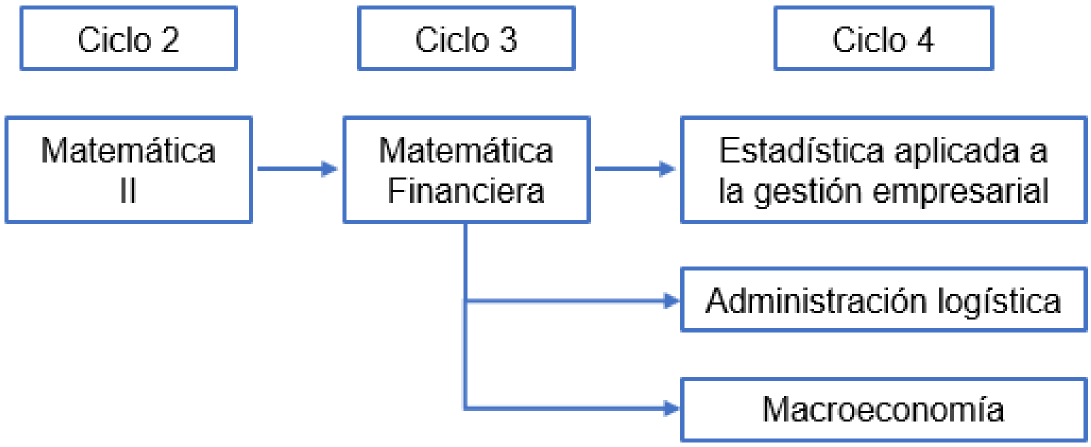

Figura 4: Parte del plan de estudios de la carrera de Administración de la USMP.
Fuente: Elaboración basada en https://tinyurl.com/y3c9dhoq

Las investigaciones de referencia presentadas muestran la preocupación de la comunidad científica en Enseñanza de las Matemáticas por el estudio del objeto matemático derivada, además, la descripción que se hizo acerca de la enseñanza de la derivada en carreras de administración de universidades peruanas, mostrando incluso parte de los sílabos y mallas curriculares, demuestran la importancia del estudio de la derivada en estudiantes de nivel superior de las carreras de administración pues la derivada permite abordar el concepto del costo marginal, el cual es un concepto relevante para estudiantes de esta carrera. En base a todo lo anteriormente señalado, se evidencia la importancia del análisis marginal, en particular del costo marginal, para la formación de futuros administradores, además de las diferentes propuestas que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada, concepto que se encuentra estrechamente relacionado con dicho tópico. Por ello, en la presente investigación pretendemos investigar la manera en que podría organizarse el trabajo en el aula para propiciar la interpretación de la derivada, específicamente en el estudio del costo marginal.

Además, cabe señalar que, por la crisis sanitaria actual ocasionada por la pandemia de la COVID-19, en esta tesis se planteará una propuesta didáctica en la que el medio son los recursos virtuales y se analizaran dos tipos de orquestación instrumental del costo marginal para estudiantes de administración.

Con esa finalidad, utilizaremos aspectos del Abordaje Instrumental (AI) y especialmente de la Orquestación Instrumental (OI) pues son marcos teóricos originados por la innovación de la tecnología en la didáctica de la matemática. Presentamos a continuación los aspectos teóricos.

1.3 Aspectos teóricos

Como la presente investigación, se realizará con la incorporación de medios/recursos tecnológicos (virtualizado), se utilizarán aspectos de la Aproximación Instrumental y Orquestación Instrumental.

Aproximación instrumental

De acuerdo con Artigue (2011), la aproximación instrumental tiene su origen en una investigación realizada para estudiar la integración de los programas de cálculo formal (CAS) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, evidenciando diferencias entre el discurso planteado por especialistas de la época a favor de los CAS y lo que realmente sucedía en las aulas de clase. Según la autora, tres posibles razones de estas diferencias llamaron la atención de los investigadores:

> la oposición entre lo técnico y conceptual que aparecía en la literatura existente y se reflejaba en el discurso de los expertos, la poca atención dada a los cambios en la economía de las prácticas matemáticas inducidas por la utilización de CAS y la subestimación de las cuestiones instrumentales (Artigue, 2011, p. 18).

Años más tarde, en una segunda investigación, se pusieron a prueba las conjeturas planteadas anteriormente. Fue en este contexto que Artigue y sus colaboradores necesitaron de un marco teórico distinto.

> Necesitábamos un discurso que permitiera considerar conceptos y técnicas en sus relaciones dialécticas, un discurso menos centrado en el alumno y que tratara las cuestiones de integración en su dimensión sistémica. De la misma manera debíamos permitirnos considerar la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje (Artigue, 2011, p. 18).

Ahora, dado que el equipo de investigadores que participó de este proyecto tenía conocimientos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y de la Ergonomía Cognitiva, decidieron concatenar ambas teorías para obtener el marco teórico requerido en el desarrollo de esa investigación. De este modo, según Artigue (2011), se dio origen a la Aproximación Instrumental (AI).

A continuación, detallaremos algunos términos de la AI que serán relevantes para esta tesis:

Esquemas de utilización

De acuerdo con Rabardel (1995), un esquema es “la organización invariante de la conducta del sujeto para un tipo de situaciones, a la vez en el plano de la acción y de la actividad simbólica” (p. 87). Además, los esquemas asociados con la utilización de un artefacto reciben el nombre de esquemas de utilización y hacen referencia a dos dimensiones de la actividad:

> Las actividades relativas a las tareas “segundas”, es decir las relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto […]. Las actividades primeras, principales, las que están orientadas hacia el objeto de la actividad, y para las que el artefacto es un medio de realización (Rabardel, 1995, p. 91).

El autor afirma que hay, en un primer momento, dos niveles de esquema en los esquemas de utilización y que estos pueden ser esquemas de uso o de acción instrumentada. En cuanto a los esquemas de uso, estos son

> […] relativos a las tareas segundas […], pueden situarse en el nivel de esquemas elementales (en el sentido de que no pueden descomponerse en unidades más pequeñas susceptibles de responder a una submeta identificable), pero esto no es necesario: pueden ellos mismos están constituidos por totalidades que se articulan en un conjunto de esquemas elementales. Lo que los caracteriza es su orientación hacia las tareas segundas que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto (Rabardel, 1995, p. 91).

En cuanto a los esquemas de acción instrumentada, el autor señala que

> Los esquemas de acción instrumentada, que consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Esos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que los caracteriza es que son relativos a las “tareas primeras”. Constituyen lo que Vigotsky llamaba los “actos instrumentales”, para los cuales hay una recomposición de la actividad dirigida hacia la tarea principal del sujeto, por el hecho de insertar el instrumento (Rabardel, 1995, p. 91).

Así mismo, Rabardel (1995) señala que un esquema puede ser, según la situación, un esquema de uso o un esquema de acción instrumentada dependiendo del estatus en la actividad intencional del sujeto.

Por otro lado, “los usos instrumentales se sitúan a menudo en un contexto de actividad colectiva, en particular, en el trabajo” (Rabardel, 1995, p. 92). Es por esto por lo que se debe considerar un nivel de esquema adicional al cual el autor denomina esquema de actividad colectiva instrumentada que

> debería tener en cuenta, por una parte, la especificación de los tipos de acción o de actividad, de los tipos de resultados aceptables, etc., cuando el colectivo comparte un mismo instrumento o trabaja con una misma clase de instrumentos.

También, debería tener en cuenta, por otra parte, la coordinación de las acciones individuales y la integración de los resultados como contribución para alcanzar las metas comunes (Rabardel, 1995, p. 92).

Resumiremos los tipos de esquemas de utilización en la Figura 5.

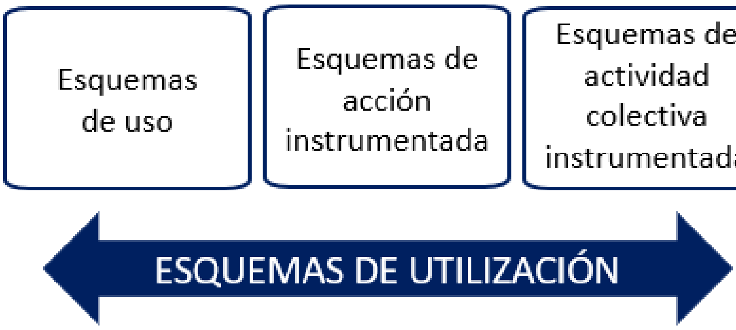

Figura 5: Niveles de esquemas de acción instrumentada

Fuente: Adaptado de Manrique (2020, p. 19)

Además de los esquemas de utilización, otro concepto fundamental para la AI es el de artefacto, el cual se desarrollará a continuación.

Artefacto

Rabardel (1995), define al artefacto como una “cosa susceptible de un uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales” (Rabardel, 1995, p. 49). Como ya se mencionó esta definición incluye por un lado a objetos materiales como el lápiz, papel, una calculadora, etc. y por el otro lado a objetos simbólicos como, por ejemplo, la noción de número, los gráficos, la noción de función, la noción de derivada, entre otros.

En adición a esto, el autor afirma que la intencionalidad es la razón de la existencia del artefacto pues este ha sido creado para el uso de un sujeto con el fin de producir cierta clase de efectos. Podríamos entender esto con el siguiente ejemplo, la derivada de una función diferenciable en un punto (artefacto) es enseñada a los estudiantes (sujetos) con el fin de que puedan encontrar la pendiente de la recta tangente en dicho punto (efecto).

Para la presente tesis, la derivada será el artefacto simbólico sobre el cual trabajaremos. El autor establece una diferencia entre los términos artefacto e instrumento, este último término es otro concepto importante para la AI y se ahondará más en él a continuación.

Instrumento

Rabardel (1995) define en un primer momento al instrumento como “el artefacto en situación de uso, inscrito en un uso, en una relación instrumental con la acción del sujeto, como medio de esta acción” (p. 49). Además, según Béguin y Rabardel (2000), es el sujeto quien atribuye la condición de instrumento a un artefacto al apropiarse de él en su uso. Así mismo, Rabardel (1995) establece que el instrumento es una entidad mixta que tiene por un lado una parte relativa al artefacto y por el otro, una relativa a los esquemas de utilización desarrollados por el sujeto al usar el artefacto en el desarrollo de alguna tarea.

En ese sentido, Trouche (2004) señala que "un instrumento puede ser considerado como una extensión del cuerpo, un órgano funcional compuesto por un componente artefacto (un artefacto o parte de él movilizado en la actividad) y un componente psicológico" (p. 285).

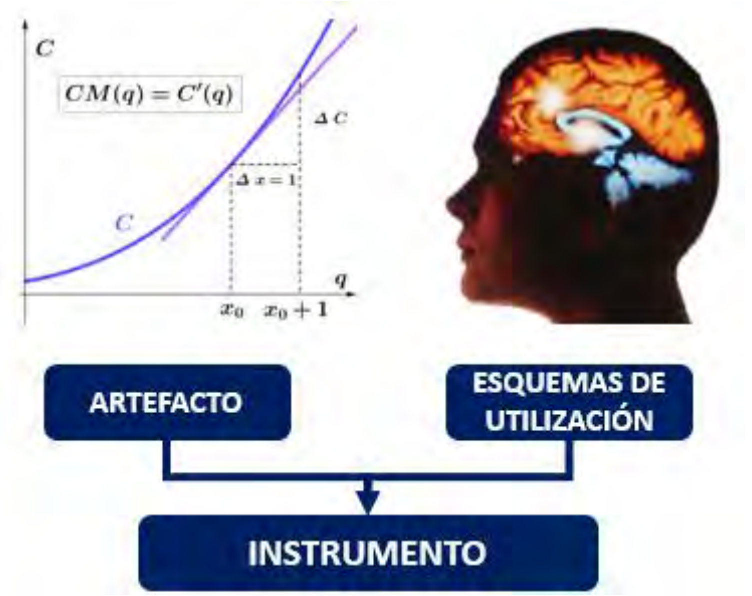

Figura 6: Instrumento como entidad mixta

Fuente: Adaptado de García-Cuéllar (2014, p. 21)

En la figura 6 se tiene que, en un primer momento, la noción costo marginal puede ser un artefacto para un estudiante, pero a medida que este lo utilice irá transformándolo en un instrumento en tanto le asocie esquemas de utilización.

De acuerdo con Salazar (2009), "la aproximación instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que involucran la transformación progresiva del artefacto en instrumento" (p. 64). Esta transformación progresiva es denominada Génesis Instrumental. A continuación, profundizaremos más en esta definición.

Génesis Instrumental

Con el objetivo de comprender la evolución de los artefactos asociados a la actividad del sujeto y la aparición de esquemas, como parte de un proceso de desarrollo instrumental, es que Rabardel (1995) define el proceso de génesis instrumental. La génesis instrumental designa un proceso que concierne tanto al artefacto como al sujeto. Este es el proceso de construcción del instrumento a partir del artefacto por parte del sujeto durante la actividad. Además, según Artigue (2002), la génesis instrumental funciona en dos direcciones, en la primera dirección:

> la génesis instrumental se dirige hacia el artefacto cargándolo progresivamente de potencialidades, y eventualmente lo transforma para usos específicos; llamamos a esto la "instrumentalización" del artefacto (p. 5).

Mientras que, en la segunda dirección, tenemos que:

> La génesis instrumental se dirige hacia el sujeto, y conduce al desarrollo o apropiación de los esquemas de acción instrumentada que progresivamente se constituyen en técnicas que permiten una respuesta efectiva a tareas dadas. Esto último es lo que propiamente se llama "instrumentación" (Artigue, 2002, p. 5).

Podemos resumir los procesos de instrumentalización e instrumentación en la figura 7, en la cual se puede notar la direccionalidad de cada proceso.

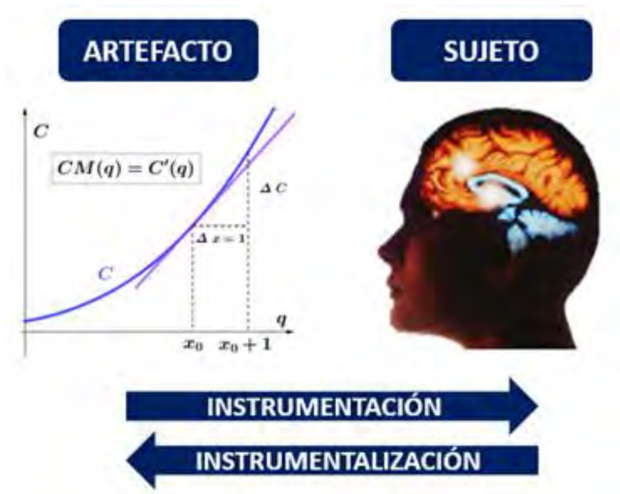

Figura 7: Instrumentalización e instrumentación

Fuente: Adaptado de Truche (2005, p. 101)

En nuestra búsqueda de lograr la génesis instrumental del costo marginal en estudiantes de carreras de administración, estamos interesados en elaborar una propuesta didáctica con base en la Orquestación Instrumental (OI), la cual presentaremos a continuación:

Orquestación Instrumental.

La orquestación instrumental nos brindará el soporte teórico para desarrollar la propuesta didáctica. De acuerdo con Trouche (2005):

> Una orquestación instrumental es exactamente el arreglo sistemático de elementos (artefactos y humanos) por un agente intencional de un entorno con el fin de implementar una situación dada y, de manera más general, para guiar a los

estudiantes en la génesis instrumental y en la evolución y equilibro de sus sistemas de instrumentos (p. 126).

De acuerdo con el autor, la OI es sistemática pues esta se encuentra organizada con un orden y objetivos establecidos. Además, la OI es intencional pues este arreglo debe ser pensado a priori.

En adición a esto, Bellemain y Trouche (2019) comparan, en la metáfora de orquestación, a los músicos, los instrumentos musicales y la partitura, con los estudiantes, los artefactos y la situación matemática.

Por otro, de acuerdo con Trouche (2005), la OI presenta dos componentes: la configuración didáctica y el modo de ejecución. Adicionalmente, los investigadores Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010) añaden una última, la cual es el desempeño didáctico. Se pueden ver estas tres componentes en la figura 8.

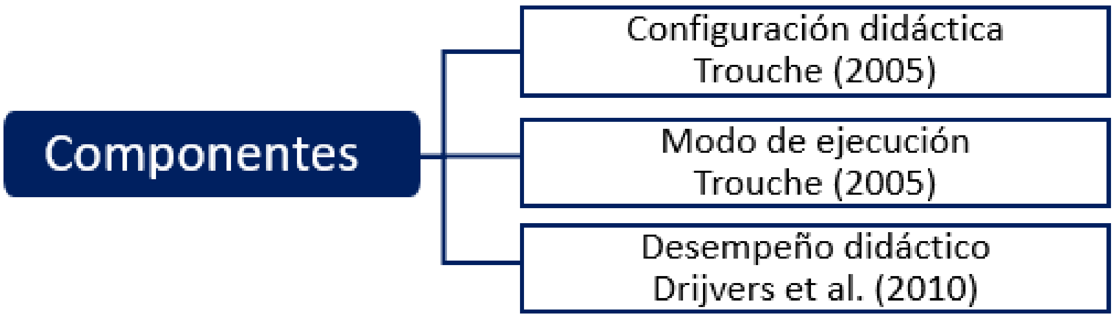

***Figura 8*:** Niveles de esquemas de acción instrumentada

A continuación, desarrollaremos cada una de las componentes de la OI mostradas en la figura 8.

Configuración Didáctica

De acuerdo con Drijvers et al. (2010), la configuración didáctica es la organización que se hace del ambiente de enseñanza y de los artefactos involucrados en él. Además, Drijvers y Trouche (2008) afirman que la configuración didáctica depende del ambiente tecnológico dado y presentan un ejemplo de una configuración didáctica en un ambiente tecnológico dotado de calculadoras y un proyector en el que es posible conectar una de las calculadoras. Esta configuración es denominada estudiante-sherpa y consiste en asignar la labor de proyectar la pantalla de la calculadora a un estudiante (estudiante-sherpa) con el objetivo principal de socializar la génesis instrumental de los estudiantes.

Modo de ejecución

Según Drijvers et al. (2010), el modo de ejecución es la manera en la que el docente decide llevar a cabo la configuración didáctica. Es decir, el modo de introducir el tema, el rol que jugará cada artefacto envuelto; todo con el fin consolidar un discurso matemático coherente.

Desempeño didáctico

De acuerdo con Drijvers et al. (2010), el desempeño didáctico son las decisiones que se toman con un determinado fin durante el modo de ejecución de una configuración didáctica. Por ejemplo, qué preguntas realizar, cómo validar o no las intervenciones de los estudiantes, cómo enfrentar los inconvenientes presentados en el desarrollo del modo de ejecución.

Cabe señalar que, por motivos de la pandemia que atraviesa el

planeta por la COVID-19, en la presente tesis se abordarán la configuración didáctica y el modo de ejecución porque estamos interesados en dar una propuesta sobre la organización del trabajo en el aula en un entorno virtual.

Por otro lado, en los últimos diez años del desarrollo de la OI, se han desarrollado distintos tipos de orquestaciones los cuales presentaremos en el siguiente apartado.

Orquestación instrumental: una tipología

Şay y Akkoç (2016) realizaron dentro de su estudio un estado del arte y detallan, en la siguiente tabla tomada de Tabach (2013), los diferentes tipos de orquestaciones realizadas en investigaciones entre los años 2010 y 2013 con sus respectivas Configuraciones didácticas y Modos de ejecución.

Tabla 1.

Tipos de Orquestación Instrumental.

Tipos de orquestación	Configuración didáctica	Modo de ejecución
Demostración técnica (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	El profesor explica los detalles técnicos para utilizar la herramienta.
Explicar la pantalla (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	La explicación del docente va más allá de las técnicas e involucran contenidos matemáticos.

Vincular el tablero de la pantalla (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	El docente conecta representaciones en la pantalla con representaciones de los mismos objetos matemáticos que aparecen en el libro o en la pizarra.
Sherpa en el trabajo (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	La tecnología está en manos de un estudiante, que guía toda la clase para su debate.
No usar tecnología (Tabach, 2011)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	La tecnología está disponible pero el docente decide no usarla.
Debate en la pantalla (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	La discusión de toda la clase es guiada por el profesor para potenciar la génesis instrumental colectiva.
Detectar y mostrar (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central.	El docente trae a colación el trabajo anterior de un estudiante que había guardado e identificado para su posterior discusión.
Trabajar y caminar (Drijvers, 2012)	Los estudiantes trabajan individualmente o en pares con computadoras.	El docente camina entre los estudiantes que trabajan, monitorea su progreso y brinda orientación según sea necesario.
Discutir la tecnología sin ella (Tabach, 2013)	Cada estudiante tiene su laptop o traen las laptops al aula con vehículos con ruedas.	El docente usa el sistema de transporte móvil si necesita computadoras en la enseñanza.
Monitorear y guiar (Tabach, 2011)		El docente usa un sistema de gestión de aprendizaje para orientar a los estudiantes.

Fuente: Traducido de Tabach (2013) citado en Şay y Akkoç (2016, p. 2710)

Se puede apreciar en la tabla 1 que siete de las diez orquestaciones presentadas en la tabla tienen la misma configuración didáctica, pero estas se distinguen por su modo de ejecución. En la presente tesis, desarrollaremos dos configuraciones didácticas con sus respectivos modos de ejecución en busca de la orquestación de las génesis instrumentales del costo marginal en estudiantes de la carrera de administración.

Por otro lado, las investigaciones de referencia muestran que la enseñanza de la derivada es un problema relevante para la comunidad científica en Enseñanza de las Matemáticas, además, como se vio en los planes calendarios de algunas universidades peruanas, este concepto es fundamental para abordar el costo marginal en estudiantes de administración.

Es por todo lo anterior que presentamos a continuación la pregunta y objetivos de investigación de la presente tesis.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

La pregunta de investigación que guiará la presente tesis es:

¿Cómo organizar una clase virtual sobre el costo marginal para estudiantes de administración con base en la Orquestación instrumental?

En ese sentido, el objetivo general de investigación de esta tesis es:

- Analizar, cómo organizar una clase virtual sobre el costo marginal para estudiantes de administración. con base en la Orquestación instrumental.

Para lograr este objetivo general se considerarán dos tipos de orquestaciones instrumentales adaptadas de Şay y Akkoç (2016) y en base a ellas planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una propuesta didáctica en medios virtuales sobre el costo marginal.
- Organizar dos configuraciones didácticas en base a la propuesta diseñada.
- Plantear dos modos de ejecución que permitan llevar a cabo las dos configuraciones didácticas.

Para mostrar el camino que se seguirá en la presente tesis, mostraremos a continuación los aspectos metodológicos.

1.5 Aspectos metodológicos

Según Monje (2011), la investigación cualitativa se encuentra nutrida epistemológicamente por la hermenéutica y esta se "interesa por la necesidad de comprender el significado de los fenómenos y no solamente de explicarlos en términos de causalidad. Da prioridad a la comprensión y al sentido" (p. 12). Además, el autor señala que los "objetivos de una investigación particular, por ejemplo, pueden orientarse a la descripción, la explicación o la comprensión. Este último propósito es propio de la investigación cualitativa" (p.15). Ahora, teniendo en cuenta que esta investigación está enfocada en la organización o descripción de una clase para estudiantes de administración sobre el costo marginal y acorde con lo señalado anteriormente por Monje (2011), se pude afirmar que la presente tesis es una investigación cualitativa.

En cuanto a los procedimientos metodológicos, la presente tesis considerará algunas de las nueve fases propuestas por Hernández, Fernández y Baptista (2014) mostradas en la figura 9.

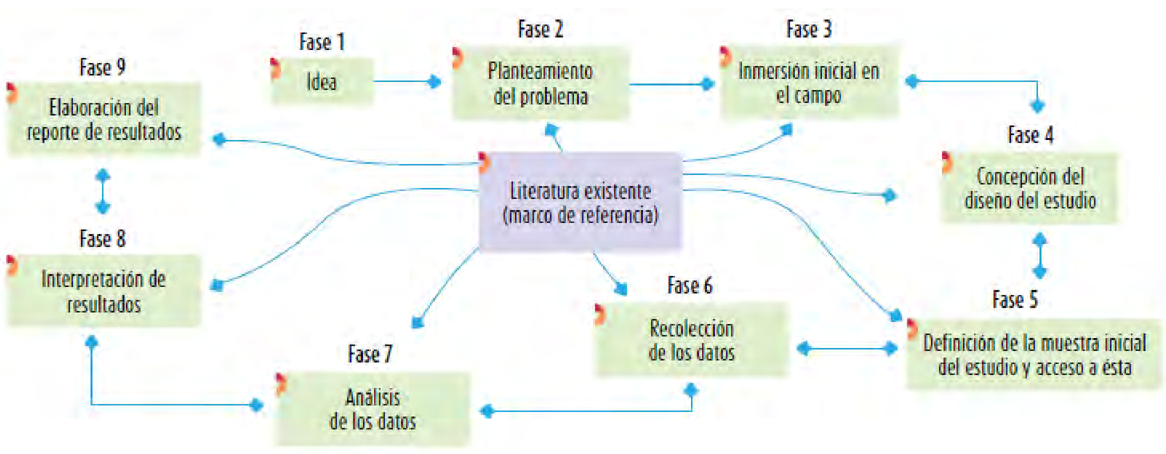

***Figura 9*: Proceso de investigación cualitativa.**

Fuente: Hernández et al. (2014, p. 7)

Cabe señalar que el proceso mostrado en la figura 9 no es lineal, sino más bien circular en el sentido en el que la secuencia no es siempre la misma y que la revisión de literatura puede estar presente durante todo el proceso. Basándonos en esta estructura, el procedimiento metodológico que seguirá la presente tesis se puede ver en la figura 10.

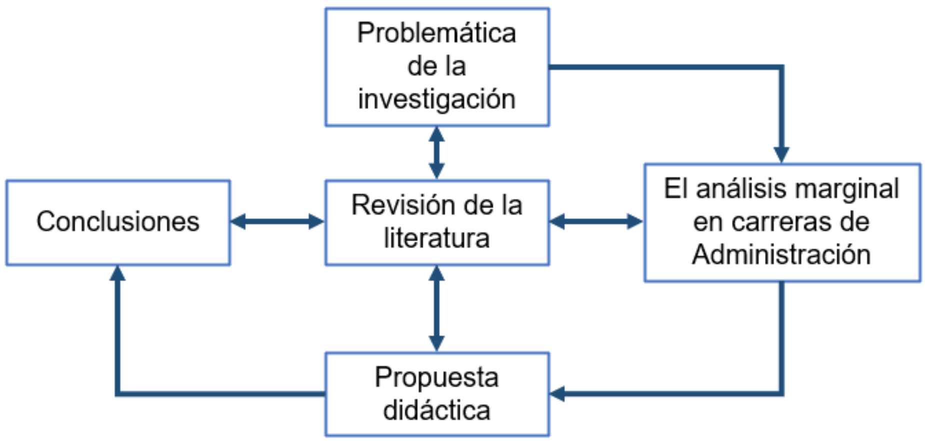

***Figura 10:* Proceso de investigación cualitativa adaptado.**

Fuente: Adaptado de Hernández et al. (2014)

A continuación, explicaremos lo que se realizará en cada una de las fases consideradas en la figura 10.

Fase 1: Problemática de la investigación

En esta fase se presentan las investigaciones de referencia (revisión de la literatura), que junto a la investigación hecha en los sílabos de algunas universidades permiten la justificación de la presente tesis. Además, se presentan los aspectos teóricos incluyendo la tipificación de las Orquestaciones Instrumentales realizada por Şay y Akkoç (2016), la pregunta y objetivos de investigación y los aspectos metodológicos que guiarán a la presente tesis.

Fase 2: El costo marginal en carreras de administración

En esta fase se expondrán los aspectos matemáticos de la derivada relativos al costo marginal y después se hará un análisis didáctico de este tópico en textos que se encuentran en la bibliografía de dos cursos impartidos en programas de administración de dos universidades peruanas.

El desarrollo de esta fase permitirá el diseño de la propuesta didáctica mencionada en el objetivo general.

Fase 3: Propuesta didáctica

En esta fase se presentarán una propuesta didáctica a realizarse en entornos virtuales sobre el costo marginal para estudiantes de administración. La propuesta será trabajada mediante los tipos de orquestación “Sherpa en el trabajo” y “Trabajar y caminar” (ver p. 20) cabe señalar que ambas propuestas fueron escogidas en base a la tipificación hecha por Şay y Akkoç (2016).

Fase 4: Conclusiones

En esta fase se detallarán las potencialidades de la propuesta según los dos tipos de orquestación que desarrollamos en la fase anterior. Es preciso señalar también que se enunciarán recomendaciones para futuras investigaciones que podrían desprenderse como consecuencia de esta tesis.

CAPÍTULO II: EL COSTO MARGINAL EN CARRERAS DE ADMINISTRACIÓN

Dado que el costo marginal se encuentra definido en base al objeto matemático derivada, en este capítulo se presentarán aspectos matemáticos e históricos del costo marginal y luego se presentarán aspectos didácticos del costo marginal ya que estamos interesados en la orquestación de la génesis instrumental de la interpretación de este concepto.

Para los aspectos matemáticos tendremos en cuenta el libro de Thomas (2006), mientras que para los aspectos didácticos se considerarán los libros de Haeussler y Paul (2003) y Arya, Lardner e Ibarra (2009), así como el Manual del estudiante del curso Matemática II de la USMP. Es preciso señalar que los libros de Haeussler y Paul (2003) y Arya et al. (2009) se encuentran en la bibliografía de los cursos Cálculo de la UPC y Matemática II de la USMP.

A continuación, se presentan los aspectos matemáticos e históricos.

2.1 Aspectos históricos y matemáticos del costo marginal

Como ya ha quedado establecido en la investigación realizada por Vrancken y Engler (2013), la aparición de la noción de derivada fue desarrollada por Newton al buscar solución al problema de la velocidad instantánea relacionando este problema con la pendiente de la recta tangente (partiendo de la velocidad promedio). Por otro lado, según García et al. (2011), Leibniz desarrolló también la noción de derivada al encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.

Además, Vrancken y Engler (2013) señalan que esta noción se consolidó más adelante y que fue Cauchy en 1823 quien realizó la definición formal de la derivada en términos de límites tal y como se conoce actualmente $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Las autoras también señalan que es durante esa época que el Cálculo fue dejando de lado su parte geométrica para centrarse en un trabajo más de índole algebraico. Así mismo, García et al. (2011) indican la relevancia que tiene el objeto matemático derivada en las ciencias económicas y afines pues permite el estudio del concepto del análisis marginal, los cuales son de importantes para estudiantes de las carreras mencionadas.

Para presentar los aspectos matemáticos, debemos tener en cuenta que el costo marginal tiene una estrecha relación con la derivada. Por esta razón se empezará por el estudio de este objeto matemático y se tomará como referencia a Thomas (2006).

El autor comienza el estudio de la derivada definiendo una recta tangente al gráfico de una función al considerar las rectas secantes que pasan por un punto *P* de la gráfica de la función y por otros puntos *Q*, de la misma gráfica, cercanos a *P* siguiendo el siguiente proceso:

> 1. Empezamos con lo que podemos calcular, a saber, la pendiente de la secante PQ.
>
> 2. Investigamos el límite de la pendiente de la secante cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva.
>
> 3. Si el límite existe, lo tomamos como la pendiente de la curva en P, y definimos la tangente a la curva en P como la recta que pasa por P con esa pendiente (Thomas, 2006, p. 135).

Este proceso puede ser representado por la figura 11, en el que la variación de la posición del punto Q hace que varíe la posición de la recta secante, hasta convertirse en el límite (el punto Q muy próximo al punto P) en la recta tangente en el punto P.

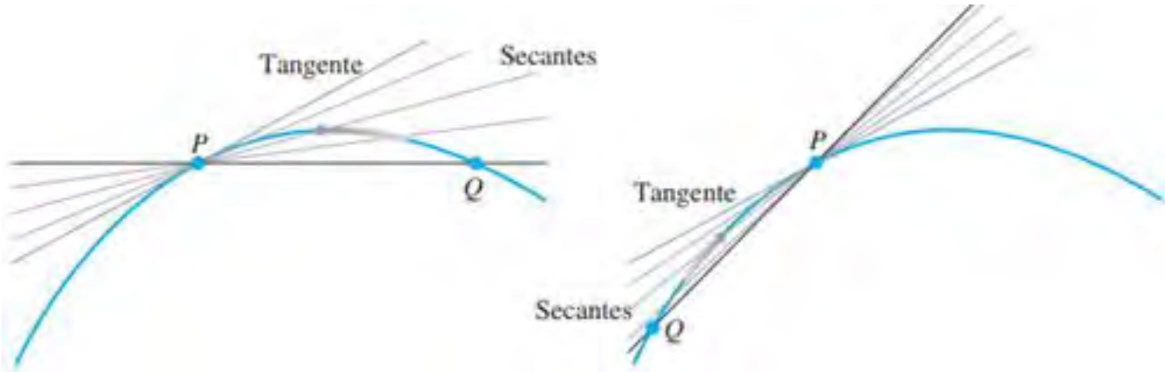

***Figura 11*:** Aproximación dinámica de la tangente

Fuente: Tomado de Thomas (2006, p. 135)

El autor define la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$, siempre y cuando exista, como:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Así mismo, Thomas (2006) define, siempre y cuando exista, la función derivada de la función $f(x)$, denotada por f', en x como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

O de forma equivalente:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Se puede entender a la función derivada de f como aquella en la que la entrada es un valor x_0 y la imagen $f'(x_0)$ es, siempre que sea posible, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0; f(x_0))$.

Por otro lado, el autor establece también que hay diferentes formas de denotar la derivada de una función, como se puede apreciar en la figura 12.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

Figura 12: Notaciones de la derivada de la función f

Fuente: Tomado de Thomas (2006, p. 150)

Luego, el autor muestra las reglas de derivación que permiten calcular la derivada de funciones sin recurrir a su definición, las cuales se pueden apreciar en la figura 13.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}u$$

Figura 13: Reglas de derivación

Fuente: Adaptado de Thomas (2006)

En las reglas de derivación mostradas en la figura 13, se debe considerar que u y v son funciones diferenciables que dependen de la variable x, c es una constante real y n es un número racional diferente de cero.

Además, según el autor, si se interpreta la razón de cambio promedio como el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en el intervalo de x a $x+h$, se puede definir la razón de cambio instantánea de f en x_0 como la derivada de esta función en x_0; es decir, como $f'(x_0)$ siempre y cuando exista.

En cuanto al análisis marginal, el autor comienza definiendo el costo marginal de producción como la razón de cambio instantánea del costo con respecto al nivel de producción. Es decir, si $C(x)$ es la función costo de producir x unidades, el costo marginal de producción es:

$$\frac{dC}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

En adición a esto, el autor señala que el costo marginal suele definirse como el costo de producir una unidad adicional y que esto suele ser aproximadamente igual a la derivada del costo siempre que la pendiente de la función costo no cambie rápidamente como se muestra en la figura 15. En cuanto al ingreso y utilidad marginal, el autor las define de forma análoga a la hecha en el costo marginal.

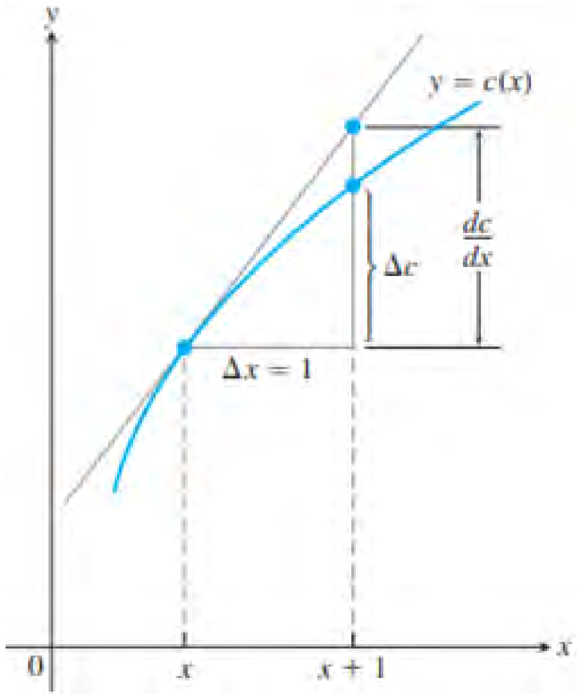

Figura 14: Costo marginal

Fuente: Tomado de Thomas (2006, p. 177)

En adición a esto, Thomas (2006) muestra la regla de la cadena como sigue: Si $f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es diferenciable en x y $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Esta última regla tiene como consecuencia la regla de la cadena de potencias en la que, si u es una función diferenciable en x, entonces $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$.

Con esto se termina el análisis histórico y matemático del costo marginal. En el siguiente apartado, analizaremos los aspectos didácticos del costo marginal de los libros Matemáticas para administración y economía de Haeussler y Paul, Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía de Arya, Lardner e Ibarra; así como los aspectos didácticos del Manual del estudiante de Matemática II de la Universidad San Martín de Porres.

2.2 Aspectos didácticos

Comenzaremos este apartado con base en el libro de Haeussler y Paul (2003), el cual se presenta a continuación.

Matemáticas para Administración y Economía

El análisis marginal se aborda en Haeussler y Paul (2003) en el capítulo 10, más precisamente en la tercera sección de este capítulo. Es preciso señalar que, en las dos secciones anteriores del libro, los autores trabajaron la derivada y las reglas de diferenciación, se puede afirmar, desde la AI, que los estudiantes podrían haber desarrollaron esquemas de utilización asociados al artefacto simbólico derivada para el tipo de tareas relativas a hallar la derivada de una función, la pendiente y ecuación de la recta tangente a un punto de la función.

En cuanto al análisis marginal, los autores lo definen en función a la razón de cambio instantánea, es por esto por lo que presentaremos la forma en la que esta noción matemática es tratada en el libro. Los autores definen en un primer momento la razón de cambio promedio (velocidad promedio) de una función para luego definir mediante límites la razón de cambio instantánea de una función (velocidad instantánea). Como se puede ver en la figura 16, la definición se realiza de forma similar a la realizada por Thomas (2006).

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa promedio de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \\ \text{en el intervalo de } x \text{ a} \\ x + \Delta x \end{cases}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x. \end{cases} \quad (2)$$

Figura 15: Razón de cambio

Fuente: Haeussler y Paul (2003, p. 462)

En adelante, los autores llamarán razón de cambio a la razón de cambio instantánea. En cuanto a la interpretación que hacen Haeussler y Paul (2003) de la razón de cambio, señalan que cuando el cambio en x es muy pequeño (Δx tiende a cero) se tiene en la ecuación (2) de la figura 16 que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}, \text{ de donde } \Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Lo que quiere decir que el cambio en y es aproximadamente igual al producto de la derivada de y respecto a x multiplicada por el cambio en x. Además, los autores señalan que si x cambia en una unidad ($\Delta x = 1$), el cambio en y es aproximadamente igual a $\frac{dy}{dx}$, podemos resumir esto último en la figura 16.

si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es $\frac{dy}{dx}$.

Figura 16: Razón de cambio instantánea cuando $\Delta x = 1$

Fuente: Tomado de Haeussler y Paul (2003, p. 462)

Después de esto, Haeussler y Paul (2003) presentan aplicaciones de la razón de cambio a la economía y definen al costo marginal como la razón de cambio de la función costo respecto de la cantidad producida o, en términos de derivadas, el costo marginal es la derivada de la función costo respecto a número de unidades producidas. Es decir, el costo marginal es igual a $C'(q)$, donde C representa la función costo en función del número de cantidades producidas.

En cuanto al ingreso marginal, Haeussler y Paul (2003) definen el ingreso marginal como la razón de cambio del ingreso r con respecto a la cantidad de unidades vendidas q y, de modo similar al costo marginal, se concluye que el ingreso marginal es la derivada de la función ingreso r con respecto a la cantidad de unidades vendidas q, es decir, $r'(q)$.

Una vez definidos el costo y el ingreso marginales, los autores presentan ejemplos como el mostrado a continuación en la figura 17.

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde c está en dólares y q en libras. Entonces,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Esto es, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, *interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.* [El costo real de producir una libra adicional más allá de 4 es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$.]

Figura 17: Ejemplo de costo marginal

Fuente: Tomado de Haeussler y Paul (2003, p. 465)

Desde la AI, se puede apreciar que en la figura 17 se usó al artefacto simbólico derivada junto con los esquemas de utilización que podrían haberse desarrollado en las dos primeras secciones del capítulo 10 pues se emplean las reglas de diferenciación además de tratar a la derivada de c como una función pues esta se evalúa en $q = 4$.

Además, los autores hacen una interpretación de este resultado, y establecen que el costo marginal es aproximadamente el costo de producir la quinta unidad. Aunque no se hace explícito en la solución del ejemplo, entendemos que la interpretación hecha por Haeussler y Paul (2003) se logra a partir del resultado plasmado en la figura 16 en el que la derivada de una función es aproximadamente igual al cambio en la función cuando la variable independiente cambia en una unidad. Tanto para la resolución del problema como para la interpretación, podemos inferir desde la AI que es necesario instrumentalizar al artefacto simbólico derivada en problemas de reglas de diferenciación y razón de cambio pues este proceso es útil en la resolución de problemas sobre el costo marginal.

Los autores presentan también un ejemplo para acerca del ingreso marginal, el cual se presenta en la figura 18.

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Supóngase que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q.$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2,$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos, ya que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

***Figura 18*:** Ejemplo de ingreso marginal

Fuente: Tomado de Haeussler y Paul (2003, p. 466)

En el ejemplo mostrado en la figura 18 se aprecia que el procedimiento es similar al realizado en la figura 17 pues se halla la derivada de la función ingreso con respecto a la cantidad. Sin embargo, en este ejemplo se puede comprobar fácilmente que el ingreso marginal da una buena aproximación del ingreso por una unidad adicional pues en este caso en concreto son iguales porque la función ingreso es lineal.

Finalmente, Haeussler y Paul (2003) presentan ejercicios de los cuales, por los fines de la presente tesis, nos concentraremos en los relacionados con el análisis marginal como podemos ver en la figura 19.

En los problemas del 15 al 20 se dan funciones de costo, donde c es el costo de producir q unidades de un producto. Para cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?

15. $c = 500 + 10q$; $q = 100$.

16. $c = 5000 + 6q$; $q = 36$.

17. $c = 0.3q^2 + 2q + 850$; $q = 3$.

18. $c = 0.1q^2 + 3q + 2$; $q = 3$.

19. $c = q^2 + 50q + 1000$; $q = 15, q = 16, q = 17$.

20. $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700$; $q = 10, q = 20, q = 100$.

En los problemas del 25 al 28, r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

25. $r = 0.7q$; $q = 8, q = 100, q = 200$.

26. $r = q(15 - \frac{1}{30}q)$; $q = 5, q = 15, q = 150$.

27. $r = 250q + 45q^2 - q^3$; $q = 5, q = 10, q = 25$.

28. $r = 2q(30 - 0.1q)$; $q = 10, q = 20$.

Figura 19: Problemas sobre el análisis marginal

Fuente: Tomado de Haeussler y Paul (2003, pp. 468-469)

Desde la AI, se puede afirmar que los ejercicios planteados en la figura 19 se enfocarían sobre todo en asociar los posibles esquemas de utilización desarrollados en tareas en las que se pide derivar una función con el análisis marginal pues los ejercicios planteados siguen el mismo procedimiento mostrado en el ejemplo de la figura 17, es decir, primero se deriva la función (costo o ingreso) y luego se evalúa en los valores pedidos. Se debe resaltar también que los ejercicios planteados dejan de lado la interpretación del costo marginal.

En la figura 20, mostramos un ejercicio planteado en el que consideramos que sí se usa la interpretación del costo marginal como el costo aproximado de la unidad adicional pues la solución se desliga de los esquemas preexistentes en relación con las tareas de derivar una función y evaluar en un punto porque no se tiene de forma explícita la regla de correspondencia de la función costo.

47. Costo Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

***Figura 20*:** Problema sobre la interpretación del costo marginal

Fuente: Tomado de Haeussler y Paul (2003, p. 470)

Desde nuestro punto de vista, es recomendable plantear problemas como los de la figura 20 pues, desde la AI, podrían permitir desarrollar esquemas de utilización diferentes a los esquemas desarrollados en tareas en las que se halla la derivada de una función y se evalúa en un punto. Además, son problemas como este los que permiten explorar la potencialidad del artefacto simbólico derivada.

A continuación, se presenta el libro de Arya, Lardner e Ibarra (2009).

Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía

Antes de exhibir el análisis marginal, Arya, Lardner e Ibarra (2009) presentan a la derivada en términos de variaciones para luego introducir la representación gráfica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. Es preciso señalar también que los autores presentan algunas reglas de diferenciación.

En cuanto al análisis marginal, los autores definen al costo marginal “como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero” (Arya et al., 2009, p. 474). En adición a esto, según los autores, es equivalente definir el costo marginal como la derivada del costo. Podemos ver esto último en la figura 21.

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}}$$

Figura 21: Definición del Costo marginal

Fuente: Tomado de Arya et al. (2009, p. 474)

En la figura 21, Δx representa la variación de la cantidad x o $(x_1 - x)$ y ΔC representa la variación en la función costo C y, como se puede apreciar en la figura 21, se tiene que $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$.

De forma similar, Arya et al. (2009) definen el ingreso marginal como la derivada de la función ingreso respecto de la cantidad de unidades vendidas. Además, se estable que el “ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos” (Arya et al. 2009, p. 477).

Finalmente, los autores definen la utilidad marginal como la derivada de la utilidad respecto de la cantidad de artículos producidos y vendidos. Los autores establecen además que la utilidad marginal representa el cambio en la utilidad por artículo si la cantidad sufre un incremento pequeño.

En cuanto a los ejemplos presentados en el libro, mostramos en la figura 22 un ejemplo relativo al costo marginal y su respectiva solución presentada por Arya et al. (2009).

EJEMPLO 1 *(Costo marginal)* Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50$, $x = 100$ y $x = 150$.

Solución Deseamos evaluar $C'(x)$. La función dada $C(x)$ es una combinación de potencias de x y así puede derivarse por medio de la fórmula para las potencias que se presentó en la última sección. Obtenemos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}(0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000) \\ &= 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 40(1) + 0 \\ &= 0.003x^2 - 0.6x + 40 \end{aligned}$$

Esta función, el costo marginal, da el costo promedio por artículo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se han producido x artículos. Cuando se han producido 50 unidades, el costo marginal de los artículos extra está dado por

$$C'(50) = (0.003)(50)^2 - (0.6)(50) + 40 = 7.5 - 30 + 40 = 17.5$$

Figura 22: Ejemplo sobre el costo marginal

Fuente: Tomado de Arya et al. (2009, p. 475)

En la solución del ejemplo mostrado en la figura 22, podemos apreciar que se establece textualmente que se desea evaluar $C'(x)$ y se logra esto mediante las reglas de derivación. Esto nos permite afirmar, desde la AI, que en la solución se podrían movilizar esquemas preexistentes desarrollados entorno al artefacto simbólico derivada con relación a las tareas acerca de derivar una función y evaluarla en un punto.

Luego de derivar la función costo en la figura 22, Arya et al. (2009) interpretan el costo marginal al establecer que representa el costo promedio por artículo dada una variación infinitesimal en la cantidad x.

Debemos rescatar además que, al final de la solución de este ejemplo, se presenta otra interpretación de los resultados obtenidos, tal como se muestra en la figura 23.

Informalmente podemos decir que el costo de producir el artículo número 51 es de \$17.50, el artículo número 101 tiene un costo de \$10 y el artículo número 151 cuesta \$17.50. (Afirmaciones como ésta no son lo *bastante* precisas, dado que la derivada de la tasa de un incremento infinitesimalmente pequeño en la producción, no para un incremento unitario). ☛ 19

Figura 23: Interpretación del costo marginal

Fuente: Tomado de Arya et al. (2009, p. 475)

En la figura 23, Arya et al. (2009) hacen la salvedad acerca de interpretación de los resultados pues no es correcto afirmar que, por ejemplo, el costo de la unidad 51 es $17.50 pues esta afirmación es cierta cuando la variación en la cantidad tiende a cero y no cuando esta es igual a uno. Consideramos que lo correcto podría ser afirmar que el costo de la unidad 51 es aproximadamente igual a $17.50.

Debemos señalar que en los demás ejemplos mostrados por Arya et al. (2009) siempre muestran la interpretación de los resultados, esto logra generar esquemas nuevos en comparación a los esquemas desarrollados en tareas sobre derivar una función y evaluarla en un valor.

En cuanto a los ejercicios planteados por los autores con relación al costo marginal, debemos señalar que los ejemplos desarrollados sirven de una buena base para resolverlos. Desde la AI podríamos considerar que estos ejercicios sirven para consolidar los esquemas desarrollados en los ejemplos. Por otro lado, debemos apuntar que en los ejercicios propuestos se deja de lado la interpretación ya sea del costo, ingreso o utilidad marginal reduciendo las tareas a hallar la función a derivar y luego evaluarla en un valor.

Por último, presentamos el Manual del estudiante del curso Matemática II de la Universidad San Martín de Porres (USMP).

Matemática II: Manual del estudiante

El manual del estudiante que se va a analizar fue desarrollado por el equipo de docentes del curso Matemática II de la USMP y se encuentra disponible en la página web de la universidad.

En cuanto al análisis marginal, el manual define al costo marginal como la razón de cambio del costo con respecto a las unidades producidas, o de forma equivalente como la derivada de la función costo con respecto a la cantidad. Además, el manual establece que el costo marginal se interpreta como el costo aproximado de producir una unidad adicional.

De forma análoga, se define el ingreso marginal como la derivada del ingreso con respecto a la cantidad de productos vendidos y la interpretación que se le da es la del ingreso por vender una unidad adicional.

El manual define también a la utilidad marginal como la razón de cambio de la función utilidad respecto a la cantidad de productos producidos y vendidos. Además, se establece que la utilidad marginal se interpreta como la utilidad generada por la producción y venta de una unidad adicional.

En la figura 24 mostramos un ejemplo relativo al costo marginal y su solución.

Ejemplo 1.

El costo total en dólares de producción de q libras de cierta sustancia química está dado por $C=45+5q^2$. Determine el costo marginal cuando se producen 3 libras de dicha sustancia.

Solución:

Derivamos la función costo: $C'=10q$ entonces $C'(3)=10(3)=30$, es decir, si la producción se incrementa de 3 a 4 libras, el costo se incrementa aproximadamente en 30 dólares.

Figura 24: Ejemplo del costo marginal

Fuente: Tomado de USMP (2019, p. 75)

Se puede apreciar en la solución del ejemplo que además de hallar el costo marginal pedido, el manual presenta la interpretación de este resultado lo que genera nuevos esquemas en el estudiante y no se queda solo en los esquemas desarrollados en problemas de derivar funciones.

Algo que diferencia a este manual respecto de los libros de Haeussler y Paul (2003) y Arya et al. (2009) es que en los ejercicios propuestos se pide interpretar el resultado de hacer un análisis marginal como se puede apreciar en la figura 25.

2. La función de costo promedio de una fábrica que produce ventiladores de mano, está dada por: $\overline{C}=0{,}002q^2-0{,}4q+50+\dfrac{10000}{q}$, donde $\overline{C}$ está en dólares. Determine el costo marginal de producir 40 unidades. Interprete el resultado. **Defienda o critique** la opinión del dueño de la fábrica quien afirma que el costo aproximado de producir el ventilador # 41 es aproximadamente $ 27,6.

Figura 25: Ejercicio del costo marginal

Fuente: Tomado de USMP (2019, p. 80)

En la figura 25, además de pedir explícitamente que se interprete el resultado, el ejercicio permite validar la interpretación hecha por el estudiante al confrontarla con una afirmación hecha en el ejercicio, la cual el estudiante tiene que defender o criticar.

Debemos destacar nuevamente que, en todos los ejercicios de análisis marginal del manual se pide hacer la interpretación de los resultados. Como ya se ha mencionado anteriormente, este tipo de tareas implicará que el alumno desarrolle nuevos esquemas y no se limite solo a reforzar los esquemas conseguidos en tareas de derivar una función y evaluar en un valor.

Con esto se termina el análisis didáctico de textos. Como conclusión podemos afirmar que los libros Haeussler y Paul (2003) y Arya et al. (2009) presentan ejemplos en los que se interpreta los resultados producto del análisis marginal ya sea del costo, ingreso o utilidad, pero en los ejercicios propuestos se deja de lado la interpretación esto encasilla el análisis marginal en los mismos esquemas empleados en tareas de derivar una función mediante las reglas de derivación y luego evaluarla en un punto. Por otro lado, es destacable que en el manual del estudiante del curso Matemática II de la USMP sí se pide en los ejercicios hacer la interpretación de resultados en problemas de análisis marginal.

CAPÍTULO III: PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo presentaremos una propuesta didáctica que será orientada por la Orquestación instrumental (OI) y buscará generar, en términos de la Aproximación instrumental (AI), posibles esquemas de utilización en estudiantes de carreras de administración con relación al artefacto simbólico costo marginal.

El análisis de los aspectos didácticos hecho en el capítulo anterior nos permitió observar las tareas sobre el análisis marginal, en particular sobre el costo marginal, propuestas en distintos textos de consulta. Estas tareas, en su mayoría, estuvieron orientadas posiblemente a reforzar los esquemas de utilización de los estudiantes en torno a tareas sobre las reglas de derivación, pues, en esencia, estas consistían en derivar, por ejemplo, la función costo total y evaluarla en un punto, obviando muchas veces la interpretación de los resultados. Consideramos que, si bien es cierto que estos esquemas son muy importantes para los estudiantes de carreras de administración, las tareas presentadas en los textos analizados dejan de lado las representaciones gráficas de la derivada, las cuales, a nuestro parecer, podrían contribuir al desarrollo de esquemas que faciliten la interpretación del costo marginal. Es por esta razón que la propuesta didáctica que presentaremos se centrará en las representaciones gráficas de funciones y de la derivada.

Además, es preciso señalar que la situación sanitaria actual generada por la pandemia obliga a brindar clases virtuales para mantener el aislamiento social, por lo que la propuesta didáctica que se presentará está planeada para desarrollarse en medios virtuales, como pueden ser Google Meet, Zoom, Blackboard Collaborate, entre otros. Desde nuestro punto de vista, este contexto representa una oportunidad de explorar nuevos caminos en la enseñanza y los potenciales beneficios de herramientas virtuales como, por ejemplo, el *software* GeoGebra.

En lo que respecta a la propuesta didáctica, la hemos dividido en dos actividades y consideramos que cada actividad debería ser abordada en dos sesiones de videoconferencia diferentes.

Denominaremos Actividad 1 a la primera actividad, y tendrá como finalidad identificar o consolidar los esquemas preexistentes de los estudiantes con respecto a la función costo y su interpretación. Asimismo, se busca identificar los esquemas de utilización referidos a la interpretación de la derivada, gráficamente y como razón de cambio.

En cuanto a la segunda actividad, la llamaremos Actividad 2 y se pretende que los estudiantes de administración desarrollen esquemas para la interpretación del costo marginal. Además, tanto la Actividad 1 como la Actividad 2 serán abordadas por adaptaciones de dos de los diez tipos de Orquestaciones instrumentales (ver p. 20) identificadas por Şay y Akkoç (2016), los cuales presentamos en la tabla 2.

Tabla 2.

Tipos de OI que se trabajarán en esta tesis.

Tipos de orquestación	Adaptación propuesta	Configuración didáctica	Modo de ejecución
Sherpa en el trabajo (Drijvers et al., 2010)	Presentador en el trabajo	Entorno de clase completa, una pantalla central.	Un estudiante proyecta su pantalla y mediante su actividad guía a la clase para fomentar el debate.
Trabajar y caminar (Drijvers, 2012)	Trabajar y recorrer	Los estudiantes trabajan en grupos.	Se crean grupos en la sala de videoconferencia principal, y el profesor recorre los grupos creados para monitorear el progreso y brindar orientación.

Fuente: Adaptado de Şay y Akkoç (2016, p. 2710)

Los tipos de orquestación mostrados en la tabla 2, denominadas Sherpa en el trabajo y Trabajar y caminar, servirán de base para la propuesta didáctica y las adaptaremos a medios virtuales.

A continuación, desarrollaremos el análisis de las actividades planteadas en la propuesta didáctica:

3.1 Actividad 1

Como ya mencionamos anteriormente, la Actividad 1 tendrá como finalidad reconocer o, en todo caso, consolidar los esquemas de utilización preexistentes de los estudiantes, sobre todo los esquemas que, a nuestra consideración, son relevantes para abordar el costo marginal. Consideramos que la Actividad 1 debería ser llevada a cabo en una primera sesión, con una duración aproximada de 45 minutos.

Esta actividad está dividida en dos tareas: la primera se centra en indagar o consolidar los esquemas preexistentes de los estudiantes con respecto a la función costo, que depende de la cantidad de unidades producidas y su interpretación; mientras que la segunda tarea busca explorar los posibles esquemas de utilización desarrollados por los estudiantes acerca de la derivada y sus interpretaciones (la geométrica y la de razón de cambio).

Debemos señalar también que, en nuestra propuesta, al término de esta actividad, el docente-investigador tendría que desarrollar una actividad de cierre en la que podría brindar una retroalimentación que permita consolidar los esquemas que esta actividad pretende desarrollar. Podemos resumir todo lo anterior en la tabla 3, la cual presentamos a continuación.

Tabla 3.

Actividad 1.

Tarea N°	Conocimientos involucrados	Duración estimada
Tarea 1	Función costo y su interpretación.	15 minutos
Tarea 2	Interpretaciones de la derivada (gráfica y como razón de cambio).	20 minutos
Cierre	Formalización de los resultados esperados por parte del docente-investigador.	10 minutos

Como podemos notar en la tabla 3, la duración estimada de las dos tareas es de 35 minutos en total, y, dado que la Actividad 1 durará en total 45 minutos, planteamos usar los 10 últimos minutos para que el profesor brinde una formalización de los resultados que se esperan al culminar esta actividad, pues serán de suma importancia para llevar a cabo la Actividad 2.

En seguida analizaremos en detalle cada una de las tareas que conforman la Actividad 1.

Tarea 1 de la Actividad 1

La Tarea 1 tiene por objetivo que los estudiantes generen esquemas de utilización que les permitan observar gráficamente el costo real de producir una determinada unidad mediante la manipulación de un deslizador de un *applet* creado con GeoGebra. Se debe señalar que la intervención del docente-investigador será importante para guiar a los estudiantes a lograr el objetivo planteado, pues algunas preguntas podrían generar distintas interpretaciones por parte de los estudiantes. En lo que respecta a la tarea, está compuesta por tres ítems.

El ítem 1 se apoyará en un *applet* creado con GeoGebra que muestra el gráfico de una función costo C que depende de la cantidad de unidades producidas y tiene por objetivo explorar si el artefacto gráfico de una función tiene la categoría de instrumento para el estudiante; es decir, si el estudiante ha desarrollado esquemas de utilización relacionados con el artefacto simbólico gráfico de una función.

En la primera pregunta de este ítem 1 se le pide al estudiante hallar el valor de $C(12)$, mientras que en la segunda pregunta se busca que los estudiantes movilicen sus esquemas preestablecidos sobre la interpretación de la gráfica de la función costo; los cuales, por ejemplo, les permitan interpretar $C(12)$ como el costo de producir las primeras 12 unidades.

El resultado esperado en este ítem es que los estudiantes, al arrastrar el deslizador, obtengan, por ejemplo, la figura 26 que mostramos en seguida:

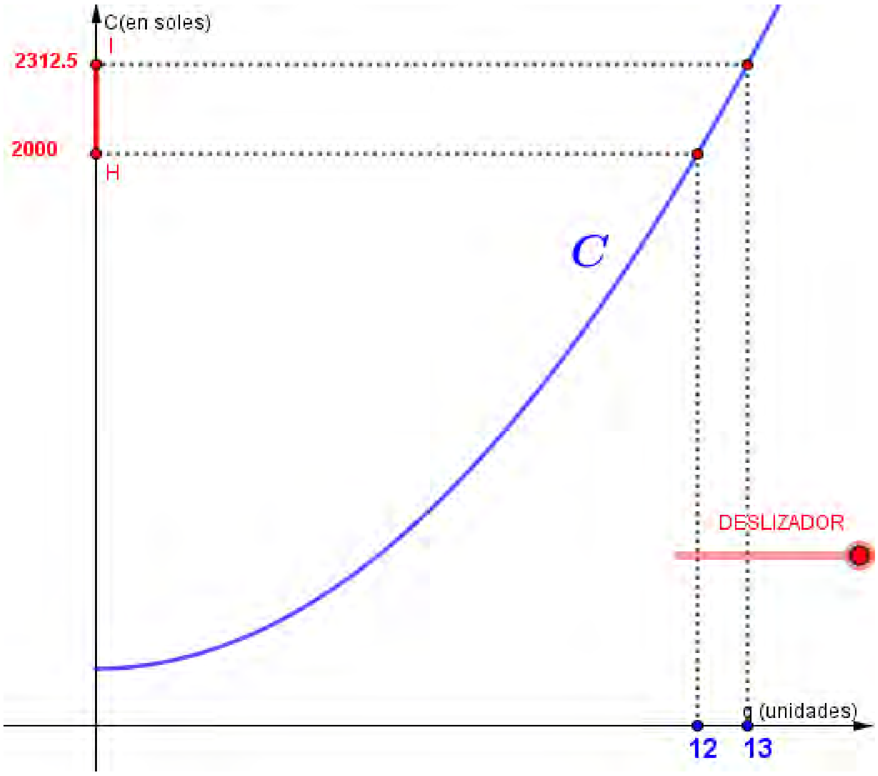

Figura 26: *Applet* del ítem 1 de la Actividad 1

En la figura 26 se puede apreciar que $C(12) = 2000$ soles, y se espera que los estudiantes tal vez interpreten este resultado con la siguiente afirmación: a la empresa le cuesta 2000 soles producir las primeras 12 unidades. Un posible resultado errado es que los estudiantes interpreten $C(12)$ como el costo de producir únicamente la unidad número 12 y es por posibles respuestas como esta que planteamos que, al final de la Actividad 1, el docente-investigador realice una retroalimentación para establecer las respuestas correctas de este ítem y consolidar esquemas en los estudiantes.

En el ítem 2 se pide hallar $C(13) - C(12)$ y que los estudiantes respondan lo que representa este valor en el contexto del problema. En este segundo ítem se podrían consolidar los esquemas de utilización sobre la gráfica de una función los cuales les permitan determinar las imágenes de la función costo cuando $q = 12$ y $q = 13$, logrando posiblemente que, dichos esquemas pasen de ser esquemas de acción instrumentada a ser esquemas de uso. Los estudiantes —con los datos obtenidos de la figura 26— podrían obtener que $C(13) = 2312.5$ soles y con el resultado del ítem anterior ($C(12) = 2000$ soles) podrían hallar $C(13) - C(12)$, que en este caso es igual a 312.5 soles. En cuanto a la interpretación de este resultado, se espera que los estudiantes logren que sus esquemas de utilización sobre la función costo alcancen el nivel de esquemas de uso y noten que, si al costo de producir las primeras 13 unidades se le resta el costo de producir las primeras 12, se obtiene el costo de producir únicamente la unidad número 13. Es decir, un razonamiento esperado de $C(13) - C(12) = 312{,}5$ soles es que el costo de producir la unidad número 13 es 312.5 soles.

Para terminar con esta primera tarea, el ítem 3 busca afianzar los esquemas desarrollados en el segundo y que se vayan consolidando como esquemas de uso, pero para otros valores obtenidos al manipular el deslizador. En este ítem se pide que los estudiantes arrastren el deslizador y completen los datos de una figura proporcionada y que interpreten la medida del segmento $\overline{HI}$ en el contexto del problema. Por ejemplo, los estudiantes, al arrastrar el deslizador, podrían obtener la figura 27.

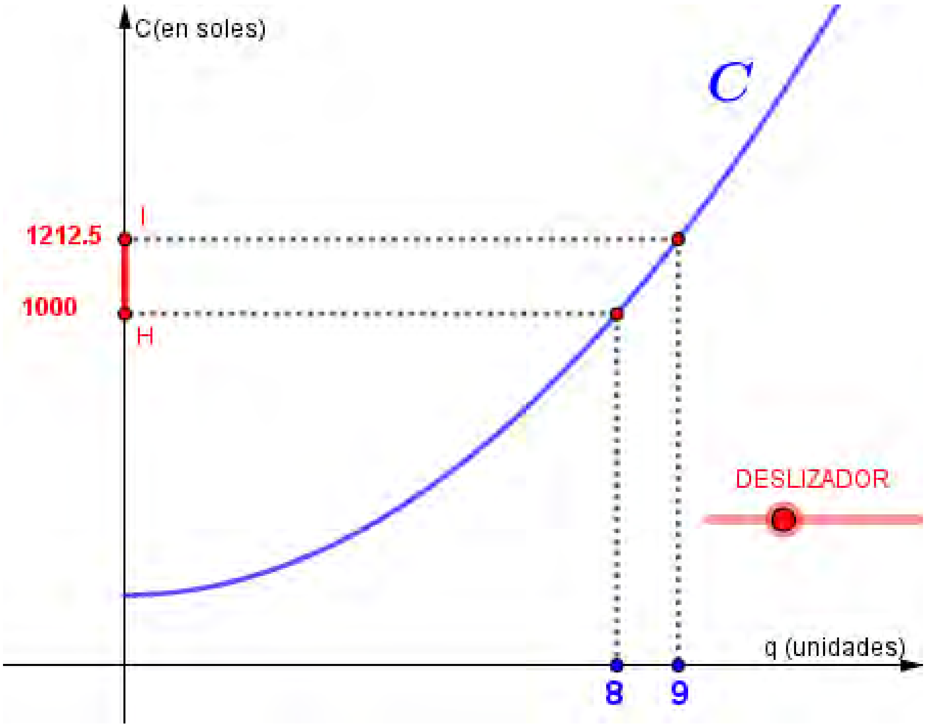

Figura 27: *Applet* del ítem 3 de la Actividad 1

En este caso particular se espera que, con base en los posibles nuevos esquemas desarrollados en las preguntas anteriores relacionados a tareas sobre gráficos de funciones e interpretación de la gráfica de la función costo, los estudiantes concluyan que la medida del segmento $\overline{HI}$ representa el costo de producir la unidad número 33, que, de acuerdo con los datos de la figura 27, sería 212.5 soles. Es importante que el docente-investigador enfatice en la interpretación de la medida del segmento $\overline{HI}$, pues el desarrollo de esquemas en torno a esa interpretación permite que el estudiante observe gráficamente el costo real de producir una unidad específica, el desarrollo de este nuevo instrumento es importante pues será utilizado en la Actividad 2 de esta propuesta didáctica.

Tarea 2 de la Actividad 1

La Tarea 2 se encuentra apoyada en un *applet* desarrollado con GeoGebra y se plantea asumiendo que los estudiantes ya han desarrollado esquemas con respecto a la derivada, como pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de una función y como razón de cambio.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta tarea es que los estudiantes desarrollen un nuevo instrumento el cual permita que los estudiantes interpreten gráficamente la medida de un segmento vertical como el valor de la derivada de la función costo en un punto, cuando el cambio en la variable independiente es de una unidad. Para ello, los estudiantes deberían movilizar los posibles esquemas de utilización preexistentes, ya sean esquemas en el nivel de acción instrumentada o esquemas de uso, sobre la pendiente de una recta y sobre la interpretación geométrica de la derivada de una función.

Esta segunda tarea se encuentra dividida en tres ítems. El primero de ellos consiste en manipular un *applet* que muestra la gráfica de la función costo C y completar una tabla en la que se debe establecer una relación entre un segmento $\overline{AB}$ y la derivada del costo C en un valor dado. Por ejemplo, si los estudiantes, al arrastrar el deslizador, obtienen la figura 28, se espera concluyan que la medida del segmento $\overline{AB}$ coincide con el valor de $C'(26)$. Para esto, deberán movilizar sus esquemas preexistentes relacionados con la pendiente de una recta y los de la interpretación gráfica de la derivada como la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función.

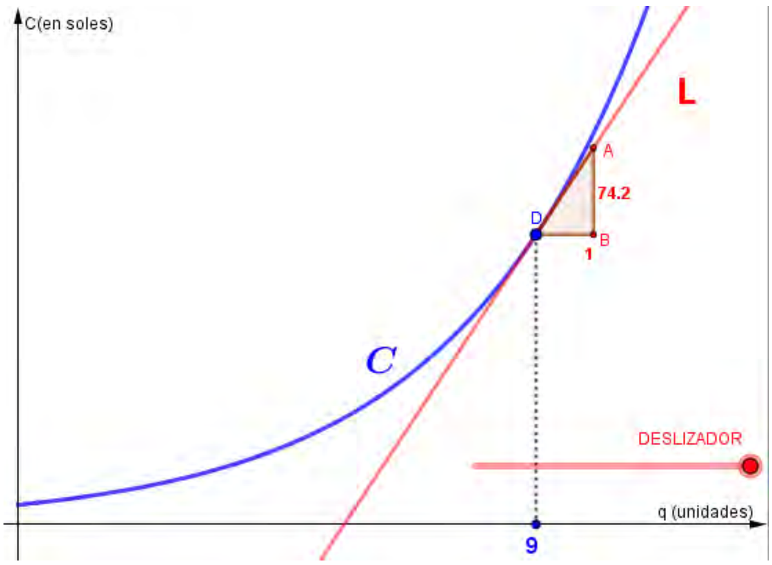

Figura 28: *Applet* de la tarea 2 de la Actividad 1

Como se puede observar en la figura 28, la pendiente de la recta L se puede obtener como el cociente entre la medida de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$, y, dado que la medida del segmento $\overline{DB}$ es una unidad, se tiene que el valor de la pendiente de la recta L coincide con el valor de la medida del segmento $\overline{AB}$. Ahora, como L es la recta tangente a la gráfica de C en $q = 9$, se tendrá que la pendiente de L es $C'(9)$; es decir, el valor de $C'(9)$ coincide con el valor de la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Con los datos de la figura 28, un posible resultado esperado es que los estudiantes completen la tabla como se muestra a continuación en la figura 29.

Valor de q en el eje horizontal	Relación entre el valor de $C'(q_i)$ y el de la medida del segmento $\overline{AB}$
$q_3 = \quad 9$	$C'(9) = m_L = \frac{AB}{DB} = \frac{74.2}{1} = 74.2$ y $AB = 74.2$ Se tiene que el valor de $C'(9)$ coincide con el valor de la medida del segmento $\overline{AB}$.

Figura 29: Posible solución del ítem 1 de la Tarea 2

De forma similar, se espera que se llenen las otras dos filas de la tabla presentada en el ítem 2. Al término la solución de este ítem, se espera que los estudiantes logren desarrollar un nuevo instrumento el cual les permitan identificar que el valor de la derivada de la función costo coincide con el valor de la medida del segmento vertical $\overline{AB}$. Además, será preciso que el docente-investigador deje en claro que este resultado se obtiene porque la medida del segmento horizontal $\overline{DB}$ es una unidad.

El segundo ítem de la Tarea 2 se centra en los datos obtenidos en la tercera columna de la tabla presentada en el ítem 1 y se busca que los estudiantes movilicen sus esquemas desarrollados previamente acerca de la derivada como razón de cambio. En este ítem se pide que los estudiantes hallen razón de cambio instantánea del costo para el valor de q obtenido en la tercera fila de la tabla del ítem 1. Por ejemplo, suponiendo que los datos que van a trabajar en este segundo ítem sean los mostrados en la figura 29, un posible resultado esperado es:

$$RCI = C'(9)\,\frac{\text{soles}}{\text{unidad}} = 74.2\,\frac{\text{soles}}{\text{unidad}}$$

Además, en este ítem también se espera que los estudiantes movilicen los esquemas preexistentes en cuanto a interpretación de la razón de cambio instantánea. Una posible interpretación sería la siguiente: cuando se han producido 9 unidades, el costo aumenta a razón de 74.20 soles por unidad, aproximadamente.

Finalmente, para terminar con la Tarea 2 de la Actividad 1, en el ítem 3 se pide que los estudiantes hallen, a partir del resultado obtenido en el ítem 2, el cambio en el costo cuando la cantidad de unidades producidas aumenta en una unidad. Esto es, dado que, cuando se producen 9 unidades, el costo cambia aproximadamente a razón de 74.20 soles por unidad, se espera que el estudiante concluya que, al producir una unidad adicional a las 9 unidades iniciales, el costo aumentará en 74.20 soles, aproximadamente. Este resultado es importante, pues nos da pie al estudio del costo marginal, el cual abordaremos más ampliamente en la Actividad 2 de esta propuesta didáctica.

En resumen, al término de la Actividad 1, en términos de la Aproximación Instrumental se espera que los estudiantes logren desarrollar instrumentos que les permitan observar gráficamente el costo real de producir una determinada unidad y observar que, cuando la variable independiente de una recta cambia en una unidad, la variable dependiente coincide con el valor de la pendiente. Posiblemente estos instrumentos estén asociados a esquemas que alcanzan el nivel de acción instrumentada, esperamos que, en el desarrollo de la Actividad 2, dichos esquemas logren alcanzar el estatus de esquemas de uso. A continuación, mostraremos el análisis de la Actividad 2:

3.2 Actividad 2

La Actividad 2 tiene por objetivo que los estudiantes logren convertir en instrumento al costo marginal, y se desarrollará mediante representaciones gráficas brindadas por *applets* desarrollados en el *software* GeoGebra. En lo que respecta a su duración, estimamos que podría ser llevada a cabo en una hora y está divida en dos tareas y un cierre como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4.

Actividad 2.

Tarea N°	Conocimientos involucrados	Duración estimada
Tarea 1	Costo real, derivadas	Una hora
Tarea 2	Costo marginal	
Cierre	Formalización de los resultados esperados por parte del docente-investigador.	

En la Tarea 1 presentada en la tabla 4 se busca que los estudiantes movilicen los posibles esquemas desarrollados en la Actividad 1, y en la Tarea 2 se pretende averiguar si los estudiantes lograron desarrollar esquemas sobre el costo marginal. En adición a las dos tareas de esta actividad, se plantea una actividad de cierre para que el docente-investigador consolide los conocimientos abordados en esta actividad.

Tarea 1 de la Actividad 2

La Tarea 1 de esta actividad se encuentra dividida en cuatro ítems cuyos desarrollos están ligados a los esquemas que posiblemente se hayan desarrollado al término de la Actividad 1. Esta tarea está apoyada en un *applet* desarrollado en el *software* GeoGebra, el cual muestra la gráfica de la función costo C, que depende de la cantidad de unidades producidas. Inicialmente, en la Tarea 1 se pide al que se manipule el deslizador mostrado por el *applet* hasta que se obtenga el caso particular en el que la cantidad sea 8 unidades en el eje horizontal. Luego, en el primer ítem se les pide a los estudiantes activen la casilla HG y que interpreten la medida del segmento $\overline{HG}$ en el contexto de la tarea como podemos ver en la figura 30 que mostramos a continuación:

ACTIVIDAD 2

TAREA 1

En el siguiente enlace A2 Tarea1 – GeoGebra encontrará el gráfico de la función costo C en soles de una empresa, por la producción de q unidades en la que la parte discontinua del gráfico representa la proyección de la función C. Arrastre el deslizador hasta que la cantidad sea 8 unidades y siga las siguientes instrucciones:

1. Haga clic en la casilla HG, ¿qué representa la medida del segmento $\overline{HG}$ en el contexto de la tarea?

Figura 30: Desarrollo del ítem 1 de la Tarea 1

Al seguir las instrucciones mostradas en la figura 30 y luego de manipular el deslizador mostrado por el *applet*, los estudiantes podrían obtener los datos mostrados en la figura 31.

De acuerdo con los datos presentados en la figura 31, nuestra hipótesis es que los estudiantes, al movilizar el instrumento posiblemente desarrollado en la resolución de la Tarea 1 de la Actividad 1, logren interpretar la medida del segmento $\overline{HG}$ como el costo real de producir únicamente la unidad número 9 que de acuerdo con los datos de la figura 30 es 27.13 soles. A continuación, presentamos la figura 31:

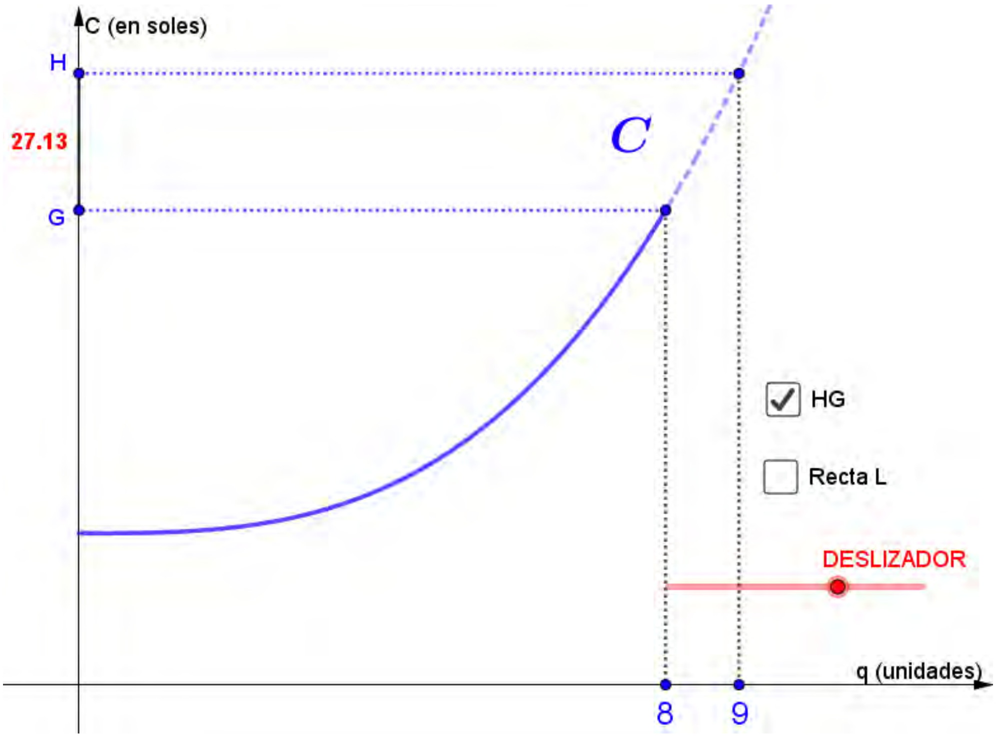

Figura 31: Desarrollo del ítem 1 de la Tarea 1

En el segundo ítem se les indica a los estudiantes que desmarquen la casilla HG y se marque la casilla denominada Recta L y en la pregunta de este ítem se les pide a los estudiantes que respondan qué representa el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ con respecto a la función costo C, podemos observar este segundo ítem a continuación en la figura 32.

2. Desmarque la casilla HG y haga clic en la casilla Recta L, ¿qué representa el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ con respecto a la función costo C?

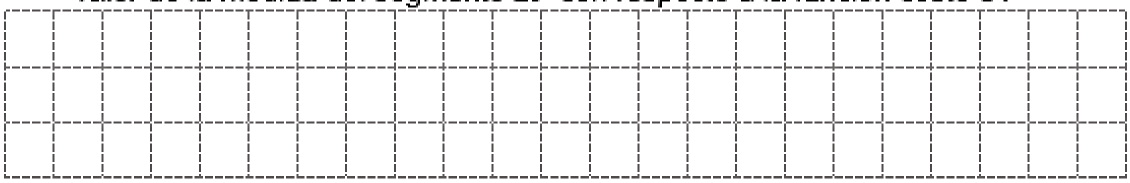

Figura 32: Ítem 2 de la Tarea 1

Al seguir las indicaciones, los estudiantes obtendrán la recta tangente a la función costo C cuando $q = 8$, así como la longitud del segmento $\overline{FE}$ y que la variación en la variable independiente es igual a una unidad, como se puede observar en la figura 33 que mostramos a continuación:

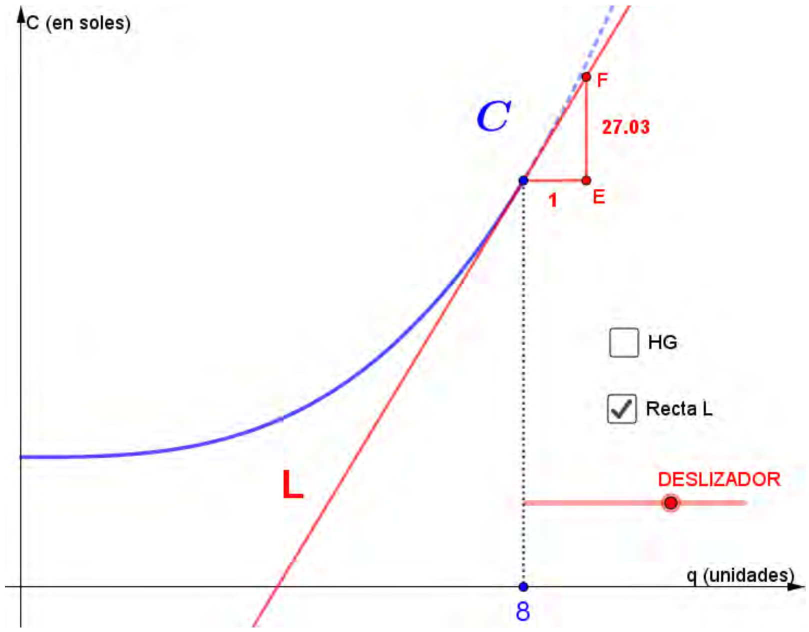

Figura 33: Desarrollo del ítem 2 de la Tarea 1

Esperamos que los estudiantes logren movilizar el instrumento desarrollado en la Tarea 2 de la Actividad 1, y un posible resultado esperado es que los estudiantes concluyan que el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ coincide con el valor de la derivada de la función costo C cuando $q = 8$, que, de acuerdo con la figura 31, es igual a 27.03. Para lograr este resultado, planteamos que el docente-investigador realice preguntas como, por ejemplo, ¿cuál es el valor de $C'(8)$, de acuerdo con los datos del gráfico?; ¿qué se puede concluir con respecto a los valores de la medida del segmento $\overline{EF}$ y de $C'(8)$? Estas y demás interacciones por parte del docente se detallarán cuando abordemos los tipos de orquestación a desarrollar en esta investigación.

En el tercer ítem se pide que nuevamente se active la casilla HG y que respondan cómo interpretan el valor de $C'(8)$, en soles, en el contexto de la tarea. Se muestra a continuación el tercer ítem de esta Tarea 1 en la figura 34.

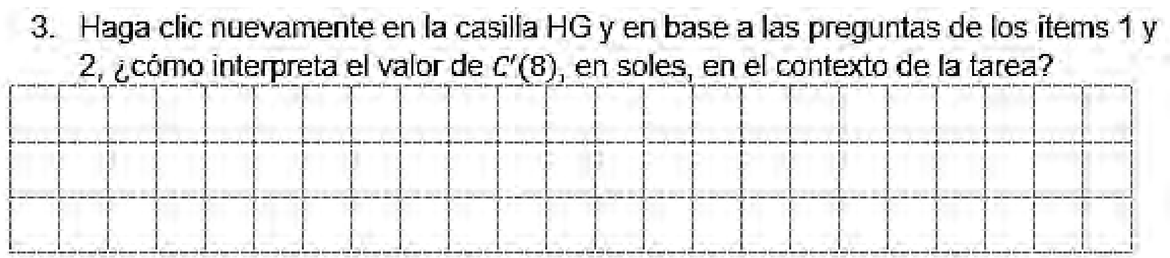
3. Haga clic nuevamente en la casilla HG y en base a las preguntas de los ítems 1 y 2, ¿cómo interpreta el valor de $C'(8)$, en soles, en el contexto de la tarea?

Figura 34: Desarrollo del ítem 3 de la Tarea 1.

Nuestra finalidad en este ítem es que los estudiantes relacionen los esquemas de utilización movilizados en el desarrollo de los ítems 1 y 2 de esta Actividad 2 y para que, mediante la gráfica proporcionada por el *applet*, interpreten el valor de $C'(8)$, en soles, en el contexto de la tarea. Después de seguir las instrucciones dadas en este ítem, el applet mostrará los datos que observamos enseguida en la figura 35:

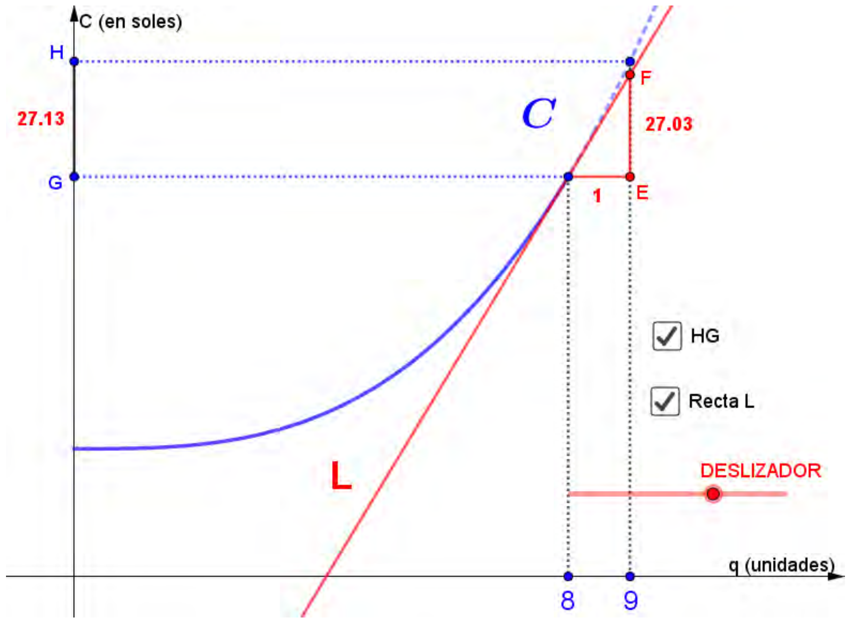

Figura 35: Desarrollo del ítem 3 de la Tarea 1.

Se espera que los estudiantes, de acuerdo con los datos mostrados en la figura 35, puedan observar numérica y gráficamente que los valores de los segmentos $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ son muy próximos. Además, de acuerdo con los instrumentos que esperamos que se hallan desarrollado en la Actividad 1 sobre la interpretación de un segmento como el costo real y la interpretación del segmento $\overline{EF}$ como el valor de la derivada, esperamos que los estudiantes interpreten lo valores de los segmentos $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ como los valores del costo real de producir la unidad 9 y $C'(8)$, respectivamente, el resultado esperado es que los estudiantes logren concluir que el valor de $C'(8) = 27.03$, en soles, es aproximadamente igual al costo real de producir la unidad número 9.

Este resultado, entonces permitiría que los estudiantes interpreten el costo marginal en $q = 8$; es decir, $C'(8)$ en soles, como el costo aproximado de producir la unidad número 9, resultado que es importante dentro de la propuesta didáctica, con la salvedad de que se ha hecho hasta el momento para un caso particular.

Luego, para lograr consolidar los esquemas desarrollados en la resolución del ítem anterior y que estos logren el nivel de esquemas de uso, en el ítem 4 de esta Tarea 1 se pide que los estudiantes manipulen el deslizador y hallen el costo aproximado de producir la unidad número 10 que claramente tiene que ver con la interpretación del costo marginal. Para ello, se espera que los estudiantes, luego de manipular el deslizador mostrado por el *applet*, obtengan la figura 36 que mostramos a continuación.

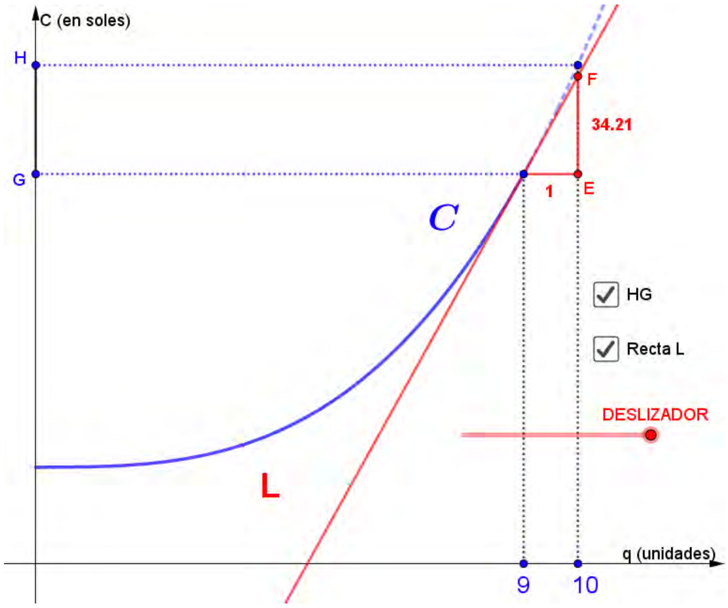

Figura 36: Desarrollo del ítem 4 de la Tarea 1

En el desarrollo de este ítem se espera que los estudiantes consoliden los esquemas que se pudieron haber desarrollado en la resolución del ítem 3, los cuales están referidos a la interpretación del costo marginal y que dichos esquemas logren el nivel de esquemas de uso. Ahora, de acuerdo con la figura 36, se espera que los estudiantes logren concluir que el costo aproximado de producir la unidad número 10 es el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ en soles. Es decir, de acuerdo con la figura 33, se espera que los estudiantes determinen que producir la unidad número 10 cuesta aproximadamente 34.21 soles.

Es así como esperamos que, al término de esta Tarea 1, el estudiante logre desarrollar esquemas que le permitan interpretar el costo marginal en q_0, esto es, $C'(q_0)$, en unidades monetarias, como el costo de producir la unidad $(q_0 + 1)$.

Tarea 2 de la Actividad 2

La Tarea 2 se presenta con la finalidad de indagar si la interpretación del costo marginal tiene la categoría de instrumento para los estudiantes. Esta tarea será desarrollada con el apoyo de un *applet* creado en el *software* GeoGebra, que, en principio, muestra la función costo de una empresa que depende de la cantidad de unidades producidas y algunos datos adicionales, los cuales mostramos en la figura 37.

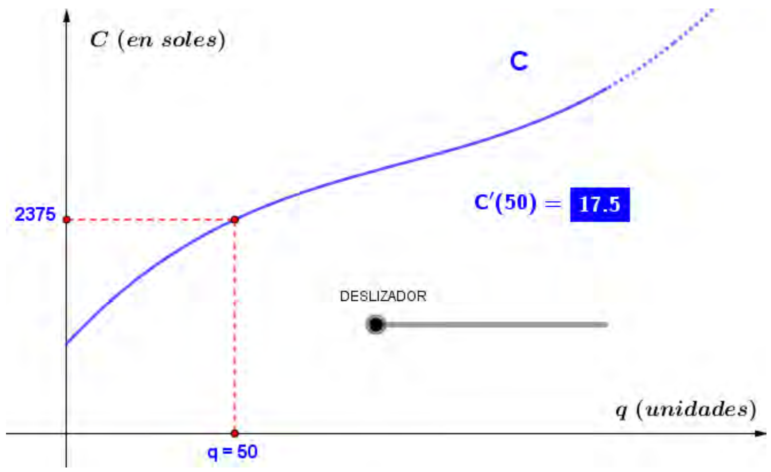

Figura 37: *Applet* de la Tarea 2.

Como se puede apreciar en la figura 37, los estudiantes cuentan con un deslizador, el cual está asociado al valor de q en el eje horizontal; es decir, si se arrastra el deslizador, cambia el valor de q. Además, se cuenta con los valores de $C(50)$ y $C'(50)$, que, según la figura anterior son 2375 y 17.5, respectivamente.

En la Tarea 2 se pide que los estudiantes hallen, aproximadamente, el costo de producir 161 unidades. En ese sentido, esperamos que los estudiantes manipulen el deslizador hasta que la cantidad q en el eje horizontal sea igual a 160, el cual es el tope máximo permitido por el deslizador, y obtengan los datos de $C(160)$ y $C'(160)$, como se puede observar en la figura 38 que mostramos a continuación:

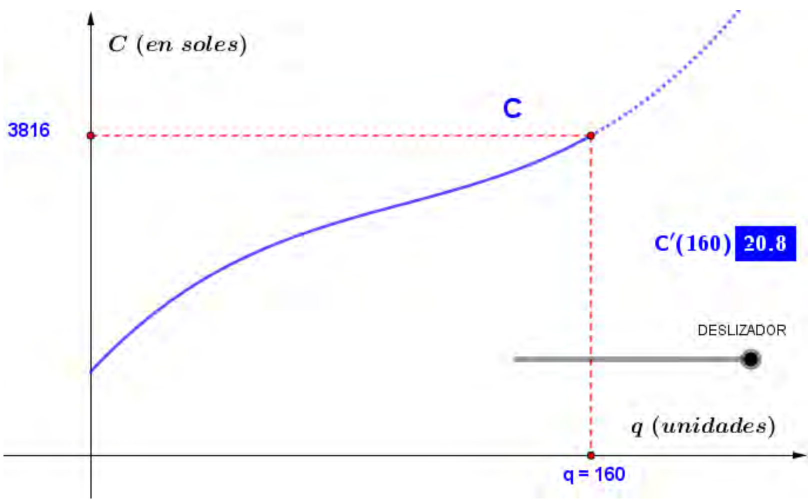

Figura 38: Desarrollo de la Tarea 2

Para resolver esta tarea, los estudiantes podrían movilizar los esquemas desarrollados en la Tarea 1 de la Actividad 1 relacionados con la interpretación de la función costo. Entonces, un posible resultado esperado es que los estudiantes logren obtener el costo de producir las 160 primeras unidades, que, de acuerdo con los datos de la figura 38, es $C(160) = 3816$ soles.

Sin embargo, como la pregunta planteada consiste en determinar el costo aproximado de producir las primeras 161 unidades, lo que faltaría hallar sería el costo aproximado de producir la unidad 161. Por ello, esperamos que los estudiantes, de acuerdo con los esquemas desarrollados en el ítem anterior relacionados a la interpretación de $C'(q_0)$ como el costo aproximado de producir la unidad $(q_0 + 1)$, logren interpretar el costo marginal en 160; es decir, el valor de $C'(160)$, en soles, como el costo aproximado de producir la unidad 161, que según lo mostrado en la figura 38 es 20.8 soles.

Finalmente, se espera que los estudiantes sumen $C(160) + C'(160) = 3816 + 20.8 = 3836.8$ y que su posible respuesta final sea que el costo de producir 161 unidades es aproximadamente 3836,8 soles.

Con esto terminamos el análisis de las actividades que planteamos en nuestra propuesta didáctica. Ahora, tal como se planteó en la presente tesis, esta propuesta será abordada mediante dos adaptaciones de los diez tipos de Orquestaciones Instrumentales identificadas por Şay y Akkoç (2016), que fueron detalladas en la Tabla 2. Para empezar, mostraremos la orquestación a la cual denominamos *Presentador en el trabajo*, que es una adaptación de la orquestación “Sherpa en el trabajo” mostrado en la tabla 1 (ver p. 20).

3.3 Orquestación «Presentador en el trabajo»

Debemos recordar que esta orquestación está basada en la orquestación Sherpa en el trabajo identificada por Şay y Akkoç (2016). En esencia, esta orquestación consiste en hacer que uno de los estudiantes comparta su pantalla para toda la clase y, a través de su actividad, guíe la génesis de esquemas de acción colectiva instrumentada de toda la clase. Además, de acuerdo con Trouche (2005), la Orquestación instrumental presenta dos componentes: la configuración didáctica y el modo de ejecución. La configuración didáctica es la componente en la cual el docente organiza los artefactos, estudiantes y la situación didáctica que usará durante la clase, mientras que el modo de ejecución es la forma en que se utilizarán los artefactos en una configuración didáctica determinada. A continuación, presentaremos ambos componentes para la orquestación Presentador en el trabajo.

Configuración didáctica: Presentador en el trabajo

El docente-investigador debe programar dos sesiones virtuales mediante dos videoconferencias: la primera debe tener una duración aproximada de 45 minutos, mientras que la segunda, una duración de una hora de acuerdo con lo presentado en las tablas 3 y 4 de esta investigación. Para este fin, el docente puede utilizar muchos programas que se encuentran disponibles en internet, como, por ejemplo, Google Meet, Zoom o Blackboard Collaborate. Sugerimos que el docente-investigador escoja aquel programa en el cual él y sus estudiantes tengan más experiencia o en el que alguna vez se haya usado la opción convertir en presentador o moderador a los invitados a la videoconferencia, pues será de esta forma en la que el docente permitirá que uno de los estudiantes comparta su pantalla. Los programas anteriormente mencionados permiten la comunicación vía chat y por medio del micrófono, e incorporan la función levantar la mano para pedir la palabra en un determinado momento.

Con respecto al material que se usará, en los anexos que se encuentran al final de esta tesis se podrá encontrar la propuesta que hemos desarrollado, la cual se encuentra dividida en una Actividad 1, y otra denominada Actividad 2. Plateamos que en la primera videoconferencia programada se lleve a cabo la Actividad 1 y en la segunda, la Actividad 2. Es necesario apuntar que el desarrollo del material construido implica el uso de *applets* de GeoGebra, por lo que se requiere que el docente tenga conocimientos básicos de este *software*.

Por otro lado, la propuesta didáctica está planificada para ser llevada a cabo con estudiantes de los primeros ciclos de carreras de Administración o Negocios que tengan nociones sobre derivadas; para ser más precisos, nociones sobre la interpretación geométrica de la derivada y sobre la derivada como razón de cambio. Además, es conveniente señalar que los estudiantes a los que va dirigida esta propuesta también deben tener conocimientos sobre la función costo, que depende de la cantidad de unidades producidas. Podemos decir, en términos de Aproximación Instrumental, que los estudiantes que participarían de esta propuesta deben haber desarrollado previamente esquemas sobre la función costo y sobre las interpretaciones geométrica y como razón de cambio de la derivada.

Asimismo, para el desarrollo de la propuesta didáctica es necesario que los estudiantes cuenten con algún dispositivo electrónico, como, por ejemplo, una *tablet*, una *laptop*, una computadora de escritorio o un celular inteligente; además, deben tener una conexión a internet, pues, como ya mencionamos anteriormente, la propuesta se dará en medios virtuales porque el contexto de la pandemia exige distancia social. Es importante dejar en claro que, para esta orquestación, es preferible que la propuesta didáctica sea desarrollada por al menos dos de los estudiantes, desde una *laptop* o una computadora de escritorio, pues será uno de los dos quien esté encargado de la proyección de su pantalla y mediante esta labor guíe la clase; asimismo, estos estudiantes deben poder comunicarse mediante el micrófono de su *laptop* o computadora de escritorio. A continuación, presentaremos el modo de ejecución de este tipo de orquestación.

Modo de ejecución: Presentador en el trabajo

En este tipo de orquestación planteamos que, una vez iniciada la sesión de videoconferencia programada por el docente y entregado el material de trabajo, el docente asigne a uno de sus estudiantes el rol de presentador para que este pueda proyectar las acciones que realizará en su pantalla a los demás participantes y guíe el debate en la clase.

En cuanto al desarrollo de la primera tarea de la Actividad 1, el docente debe estar atento a las posibles preguntas de los estudiantes, las cuales podrían ser, por ejemplo, ¿qué es el deslizador?; ¿dónde lo ubico?; ¿cómo arrastro el punto del deslizador? Es por ello por lo que el docente debe estar familiarizado con el *software* GeoGebra.

En el primer ítem de la Tarea 1 se pide que los estudiantes hallen el valor de $C(12)$ e interpreten este valor en el contexto de la tarea. Es posible que en el desarrollo de esta tarea el estudiante presentador se encuentre con los datos de la figura 39, de donde los estudiantes podrían concluir que $C(12) = 2000$ soles.

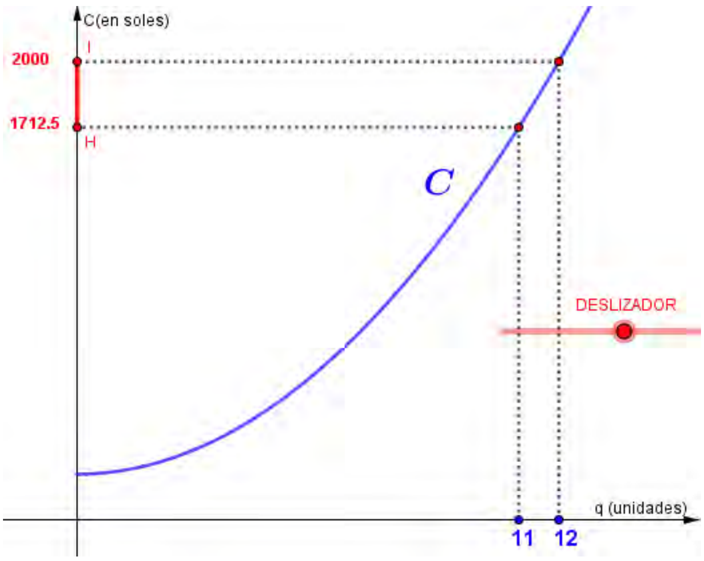

Figura 39: Datos para el desarrollo del ítem 1

En cuanto a la interpretación del valor hallado, el docente-investigador podría preguntar a los estudiantes lo siguiente: ¿$C(12)$ es el costo de producir la unidad número 12 o es el costo de producir las primeras 12 unidades? Esta pregunta se realiza en la búsqueda de indagar si los esquemas entorno a la interpretación de la función costo pueden ser considerados como esquemas de uso o, en su defecto, como esquemas de acción instrumentada. De acuerdo con la discusión que se genere, el docente podría guiar a los estudiantes para que concluyan que $C(12)$ representa el costo de producir las 12 primeras unidades.

Otra pregunta que podría realizar el docente con los mismos datos de la figura 39 es: ¿Cuánto cuesta producir las 11 primeras unidades? Esto permitirá, a nuestro parecer, corroborar si los esquemas sobre la interpretación de la función costo son esquemas de uso. La respuesta que se espera es que los estudiantes concluyan, de acuerdo con los datos de la figura 39, que el costo de producir las primeras 11 unidades es 1712.5 soles.

Para el desarrollo del segundo ítem, el docente-investigador podría preguntar lo siguiente: ¿con los datos de la figura 36 se puede obtener $C(13)$?; ¿qué podríamos hacer para obtener el valor de $C(13)$? Se espera que los estudiantes, al no observar el valor de $C(13)$, le pidan al estudiante presentador que mueva el deslizador para que se obtenga este valor.

En este punto se recomienda que el docente-investigador procure que el estudiante presentador logre conseguir los datos mostrados en la figura 40.

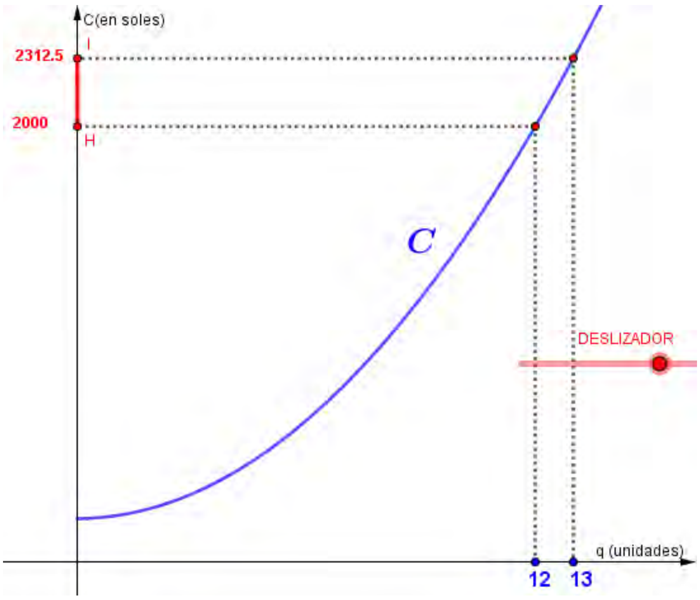

Figura 40: Datos para el desarrollo del ítem 2

En el segundo ítem de esta tarea se pide que los estudiantes hallen $C(13) - C(12)$ y que respondan qué representa este valor en el contexto de la tarea. Nuestra hipótesis es que, si el primer ítem los esquemas desarrollados logran catalogarse como esquemas de uso y no como esquemas de acción instrumentada en cuanto a la interpretación de la función costo, hallar $C(13) - C(12)$ no debería representar mayor problema para los estudiantes, y, de acuerdo con la figura 40, que sería la que el estudiante presentador muestre a toda la clase, se espera que la respuesta de los estudiantes sea que $C(13) - C(12) = 2312.5 - 2000 = 312.5$ soles.

En cuanto a la pregunta referida a la interpretación de este resultado, el docente podría realizar las siguientes preguntas: ¿qué representa $C(13)$?; ¿qué representa $C(12)$? Y los estudiantes podrían responder a estas cuestiones con base en los esquemas desarrollados en el primer ítem; es decir, podrían indicar que $C(13)$ representa el costo de producir las primeras 13 unidades, y $C(12)$, el costo de producir las primeras 12 unidades.

Luego, el docente podría preguntar qué se obtiene si al costo de producir las primeras 13 unidades le restamos el costo de producir las primeras 12. Se espera en este caso que los estudiantes logren concluir que lo que se obtendría sería únicamente el costo de producir la unidad número 13, que en este caso es 312.5 soles.

En el ítem 3, se pide que el estudiante presentador arrastre el deslizador y que interprete la medida del segmento $\overline{HI}$. Después de arrastrar el deslizador, el estudiante presentador podrá obtener nuevos datos, los que podrían ser, por ejemplo, los mostrados en la figura 41.

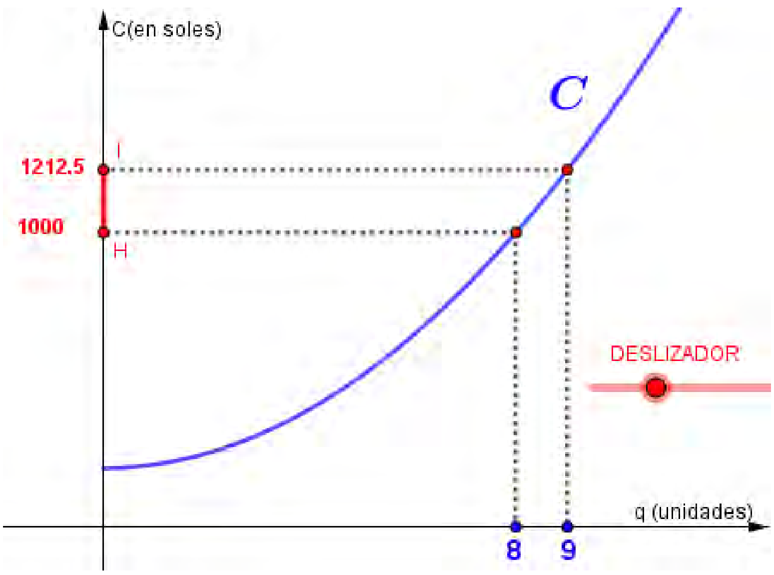

Figura 41: Datos para el desarrollo del ítem 3

Para lograr la interpretación esperada de la medida del segmento $\overline{HI}$ en el contexto de la tarea. El docente podría hacer las siguientes preguntas: ¿cómo se podría hallar la medida del segmento $\overline{HI}$?; ¿qué representan 1212,5 y 1000 en el contexto del problema?

Esperamos que los estudiantes respondan la primera de las preguntas anteriores indicando que la medida del segmento $\overline{HI}$ se puede hallar restando 1212.5 y 1000. En cuanto a la segunda, se espera que los estudiantes respondan que 1212.5 representa el costo de producir las primeras 9 unidades, y 1000, el costo de producir las primeras 8, esto de acuerdo con los esquemas de uso posiblemente alcanzados en la solución del primer ítem.

Entonces, el docente podría acotar lo siguiente: si la medida del segmento $\overline{HI}$ se puede hallar mediante la resta de 1212.5 y 1000, y estos valores representan el costo de producir las primeras 9 y 8 unidades, respectivamente, ¿qué representa la medida del segmento $\overline{HI}$ en el contexto del problema? Se espera que los estudiantes respondan que la medida del segmento $\overline{HI}$ representa el costo de producir únicamente la unidad número 9. Este resultado es fundamental pues se lograría que los estudiantes desarrollen un nuevo instrumento el cual les permitiría interpretar la medida de un segmento como el costo de producir una determinada unidad. Ahora, debemos recordar que para el desarrollo de la Tarea 2 los estudiantes ya tienen conocimientos sobre rectas y derivadas; es decir, los estudiantes ya deberían estar instrumentalizados con respecto a tareas sobre rectas y derivadas.

En cuanto al primer ítem de la Tarea 2, se pide que los estudiantes ingresen a un enlace web en el que encontrarán un *applet* creado con el *software* GeoGebra que muestra la función costo de una empresa en función de la cantidad de unidades producidas y, con los datos mostrados, se llene una tabla.

Durante el desarrollo de esta tarea, en el primer ítem el estudiante presentador tendrá que mover el deslizador en tres momentos, y por cada movimiento deberá completar la tabla presentada. En el caso de que se presenten dudas en cuanto a los valores de la primera columna, el docente podría hacer hincapié en que estos valores se obtienen en el eje q de las cantidades. Por ejemplo, si el estudiante presentador consigue los datos mostrados en la figura 42, el valor que se debe considerar en la primera columna sería 7.

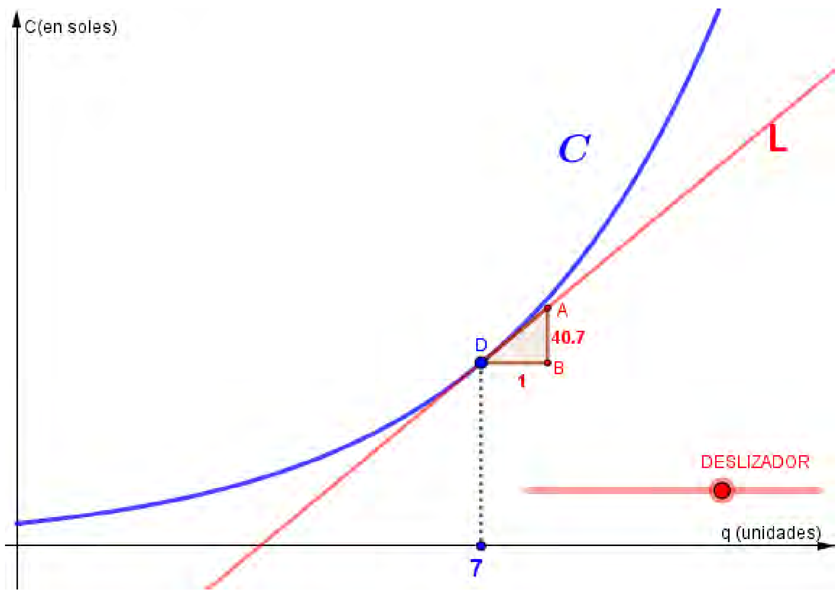

Figura 42: Datos para el desarrollo del ítem 3

Teniendo en cuenta los datos de la figura 42, y para el llenado de lo pedido en la segunda columna, el docente podría preguntarle a la clase si, de acuerdo con la figura, la recta L es tangente o secante al gráfico de la función costo C. Una vez que se haya identificado a la recta L como una recta tangente, el docente-investigador podría preguntar ¿en qué valor de q la recta L es tangente al gráfico de la función costo C? De acuerdo con los datos de la figura 42, se espera que los estudiantes concluyan que L es tangente a C en $q = 7$.

Acto seguido, el docente-investigador podría preguntar por el valor de la pendiente de la recta L, que en este caso es 40.7 para luego consultar por la relación que tiene esta pendiente con la derivada de la función C. Mediante estas preguntas se espera evocar los esquemas preexistentes de los estudiantes con respecto a la interpretación geométrica de la derivada e indagar si estos son esquemas de uso o esquemas de acción instrumentada. Se espera que se concluya que el valor de la pendiente es igual al valor de $C'(7)$.

Estos resultados les permitirán a los estudiantes completar lo pedido en la segunda columna de la tabla propuesta en el ítem 1, y se espera que concluyan que el valor de $C'(7)$ es igual al valor de la medida del segmento $\overline{AB}$. Esperamos que, en este punto, los estudiantes logren desarrollar un nuevo instrumento el cual les permita interpretar la longitud del segmento vertical $\overline{AB}$ como la derivada de la función costo en un valor dado y que conforme a las acciones que realice en la solución de este ítem se logre evidenciar una génesis instrumental.

Para completar las demás filas se podría proceder de manera similar. Sin embargo, es importante que el docente señale que, la igualdad entre el valor de $C'(7)$ y el de la medida del segmento $\overline{AB}$ se da porque el segmento $\overline{DB}$ mide una unidad. Al término del desarrollo de este ítem se espera que los estudiantes logren que sus esquemas que, posiblemente en un inicio sean esquemas de acción instrumentada, alcancen el estatus de esquemas de uso que les permitan interpretar, en este caso, la medida del segmento vertical $\overline{AB}$ de la figura 42 como la derivada de la función costo en un determinado punto.

En el segundo ítem, se les pide a los estudiantes que hallen la razón de cambio del costo con los valores de la tercera columna del ítem 1. Para el desarrollo de este ítem, el docente podría preguntarles a los estudiantes lo siguiente: ¿qué interpretaciones de la derivada, además de la geométrica, recuerdan?; ¿cómo se obtiene la razón de cambio instantánea del costo? Y se espera que los estudiantes movilicen esquemas preexistentes con relación al artefacto simbólico derivada como razón de cambio, los cuales les permitan concluir que la razón de cambio instantánea del costo se obtiene con la derivada de esta función. Si consideramos los datos de la figura 42, se espera que los estudiantes concluyan que la razón de cambio instantánea del costo cuando se han producido 7 unidades es $C'(7) = 40.7\ \frac{\text{soles}}{\text{unidad}}$. Luego, el docente podría acotar los siguiente: cuando se producen 7 unidades, ¿a qué razón crece el costo aproximadamente? Se espera que con la respuesta a esta pregunta los estudiantes logren interpretar la razón de cambio instantánea hallada anteriormente.

En el ítem 3 se pide que los estudiantes hallen el cambio en el costo cuando la cantidad utilizada en el ítem 2 aumenta en una unidad. En el desarrollo de este ítem, se espera que los estudiantes obtengan una conclusión a partir de la solución del segundo ítem. El docente podría intervenir de la siguiente manera: teniendo en cuenta que, cuando se producen 7 unidades, el costo crece a razón de 40.7 soles por unidad, ¿en cuánto cambiaría el costo aproximadamente si se produce la unidad número 8? Esperando que los estudiantes respondan que el costo aumentaría en, aproximadamente, 40.7 soles.

Con esto terminaría el desarrollo de la Actividad 1 de nuestra propuesta; lo siguiente sería pedirle al estudiante presentador que deje de compartir su pantalla para que el docente pueda hacer el cierre de la sesión, en el que se buscaría consolidar los esquemas que permitirán interpretar gráficamente la medida del segmento $\overline{HI}$ de la figura 41 como el costo real de producir una determinada unidad y la medida del segmento $\overline{AB}$ de la figura 42 como el valor de la derivada de la función costo.

Recordemos que el objetivo de esta Actividad 1 es que los estudiantes logren desarrollar nuevos esquemas de acción instrumentada que les permitan observar gráficamente el costo real de producir una determinada unidad e interpretar el cambio en la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta en una unidad en la recta tangente al gráfico de la función costo.

La Actividad 2 se llevará a cabo en la segunda sesión programada por el docente y bajo el tipo de orquestación Presentador en el trabajo que planteamos. El docente podría decidir si será el mismo estudiante el encargado de presentar su pantalla a la clase o si decide encargar este rol a otro estudiante, esto dependiendo de la forma en que se realizó la primera sesión.

En la Tarea 1 de esta segunda actividad, de acuerdo con las instrucciones, el estudiante presentador debería arrastrar el deslizador presentado por el *applet* hasta que la cantidad en el eje horizontal sea igual a 8 para luego hacer clic en la casilla llamada HG y conseguir el gráfico mostrado en la figura 43 que presentamos enseguida.

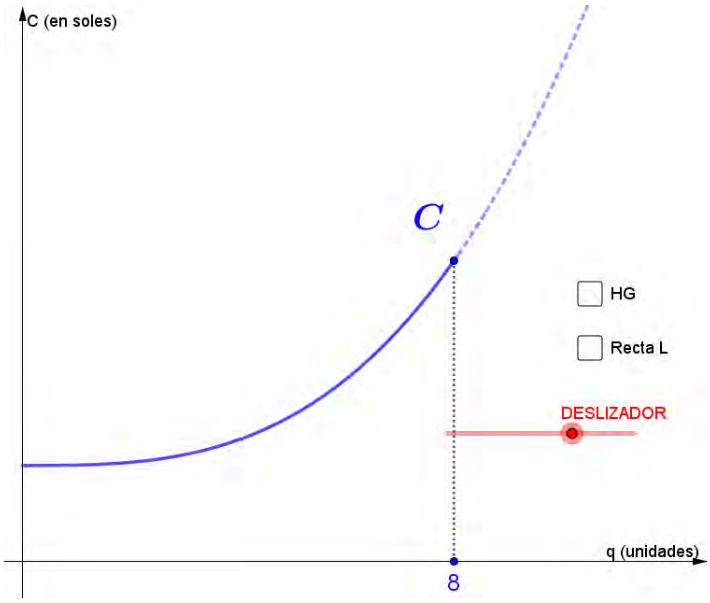

Figura 43: Datos para el desarrollo del ítem 3.

En este punto, el docente podría preguntar cuántas unidades produce la empresa, como máximo, de acuerdo con el gráfico presentado. Y se espera que los estudiantes respondan que la empresa produce, como máximo, 8 unidades. El docente podría apuntar también que las líneas discontinuas representan una proyección de lo que sucedería a futuro con el costo por la producción de más unidades por parte de la empresa.

El primer ítem pide que los estudiantes hagan clic en la casilla HG y realicen la interpretación de la medida del segmento $\overline{HG}$ en el contexto de la tarea. Al hacer clic en la casilla pedida, el estudiante presentador mostrará el gráfico de la figura 44 a toda la clase, en el que se observan los datos de $C(8)$ y $C(9)$, como vemos a continuación:

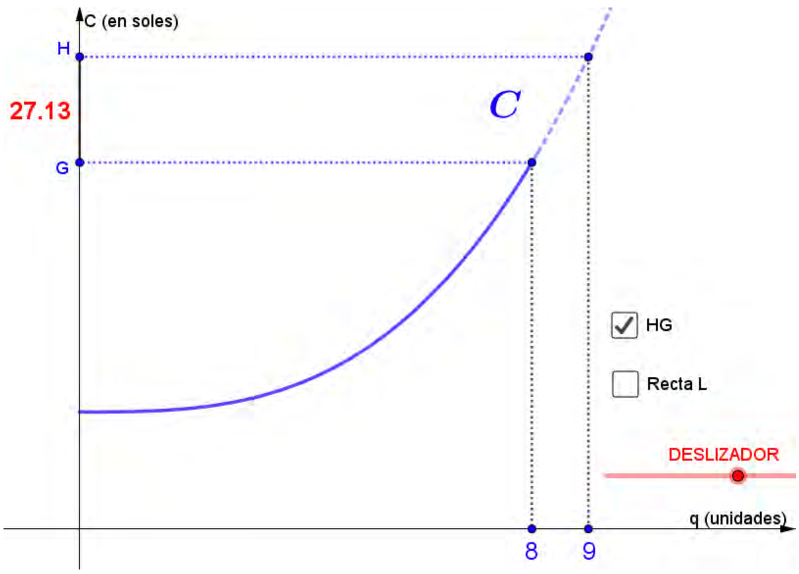

Figura 44: Datos para el desarrollo del ítem 1.

En lo que respecta a la interpretación de la medida del segmento $\overline{HG}$, se espera que los estudiantes movilicen los esquemas de acción instrumentada que se desarrollaron en la Tarea 1 de la Actividad 1 los cuales les permitan interpretar gráficamente la medida del segmento $\overline{HG}$ como el costo real y los empleen tal vez como esquemas de uso dado que es un esquema que ya ha sido empleado en la Actividad 1 en donde inicialmente pudieron ser esquemas de acción instrumentada. En caso de no ser así, el docente podría intervenir realizando las siguientes preguntas: ¿en qué puntos se ubican $C(9)$ y $C(8)$?; ¿cuál es el valor de $C(9) - C(8)$?; ¿qué representa esta resta? Se espera, entonces, que los estudiantes concluyan que el valor de la medida del segmento $\overline{HG}$ representa el costo real de producir únicamente la unidad número 9 de acuerdo con los esquemas posiblemente desarrollados en la Actividad 1.

Para el desarrollo del segundo ítem, el estudiante presentador podría encontrar los datos presentados en la figura 42 que mostramos en seguida:

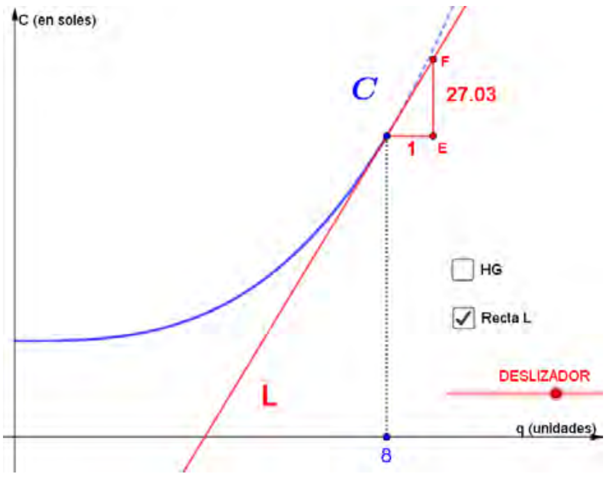

Figura 45: Datos para el desarrollo del ítem 2.

En este segundo ítem se pide que los estudiantes respondan qué representa el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$. Se espera que los estudiantes relacionen este ítem con el primer ítem de la Tarea 2 de la Actividad 1. Los esquemas que posiblemente se hayan desarrollado en ese ítem y que, inicialmente serían esquemas de acción instrumentada dado que anteriormente se trabajaron como tareas principales, en esta tarea podrían ser empleados como esquemas de uso los que permitirían que los estudiantes concluyan que el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ representa el valor de la derivada de la función costo C en $q = 8$. De no ser así, el docente podría realizar las siguientes preguntas: ¿qué representa gráficamente $C'(8)$?; ¿cuál es el valor de $C'(8)$, de acuerdo con los datos del gráfico?; ¿qué se puede concluir con respecto a los valores de la medida del segmento $\overline{EF}$ y de $C'(8)$?

Esperamos que en la primera pregunta los estudiantes respondan que $C'(8)$ representa gráficamente la pendiente de la recta tangente a la gráfica de C en $q = 8$. En cuanto a la segunda pregunta, se espera que los estudiantes hallen el valor de $C'(8)$ mediante el cociente de la medida del segmento $\overline{EF}$ sobre el cambio en la variable independiente, que es 1; es decir, $C'(8) = \frac{27.03}{1} = 27.03$. Finalmente, para la tercera pregunta, esperamos que los estudiantes concluyan que los valores de $C'(8)$ y de la medida del segmento $\overline{EF}$ son iguales.

Para el desarrollo del tercer ítem, el estudiante presentador debe hacer clic nuevamente en la casilla HG y así obtendrá el gráfico mostrado en la figura 46.

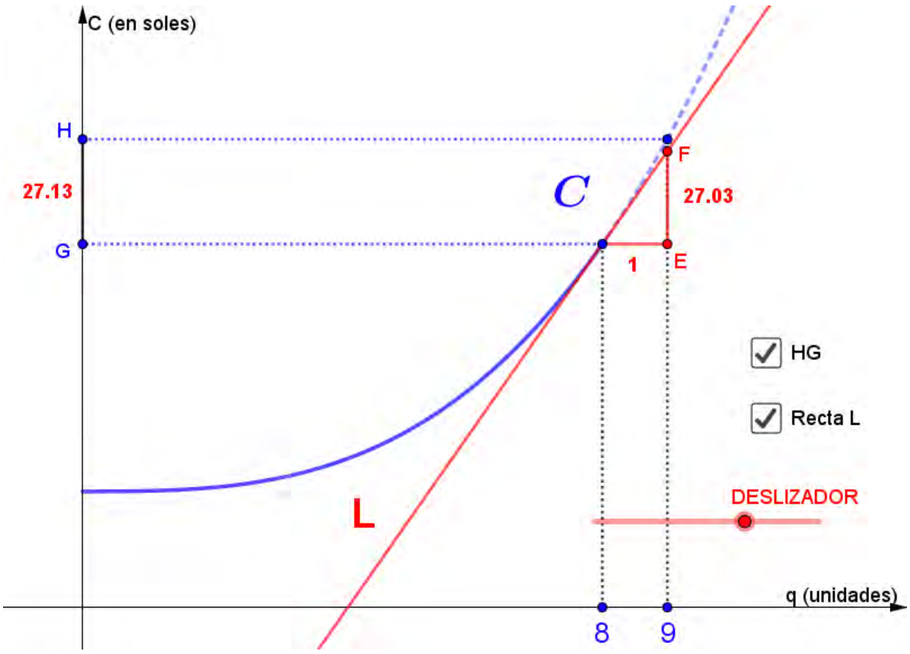

Figura 46: Datos para el desarrollo del ítem 3.

En este ítem se pide que se interprete $C'(8)$, en soles, en el contexto de la tarea. En este punto el docente podría preguntarles a los estudiantes cómo interpretan la medida de los segmentos $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ de acuerdo con lo desarrollado en los ítems anteriores. Además, el docente podría pedir que los estudiantes comparen, según el gráfico mostrado por el estudiante presentador, las medidas de ambos segmentos.

Se espera que los estudiantes respondan que, de acuerdo con el instrumento posiblemente desarrollado en la Tarea 1 de la Actividad 1, el valor de la medida del segmento $\overline{HG}$ representa el costo real de producir la unidad número 9 y que, de acuerdo con el instrumento que esperamos que se haya desarrollado en Tarea 2 de la Actividad 1, el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ es igual al valor de $C'(8)$. Asimismo, los estudiantes podrán comprobar mediante los datos de la figura 43 que estos dos valores son muy próximos; entonces, esperamos que los estudiantes logren interpretar el valor de $C'(8)$ en soles como una aproximación del costo real de producir la unidad número 9.

Para el desarrollo del cuarto ítem, el docente podría preguntarles a los estudiantes lo siguiente: con los datos mostrados por el estudiante presentador, ¿se puede hallar el costo aproximado de producir la unidad número 10?; ¿qué podríamos hacer para obtener más datos? Esperamos que los estudiantes concluyan que se debe mover el deslizador, lo que evidenciaría el desarrollo de esquemas relacionados con el uso de deslizadores del *software* GeoGebra. Una vez que suceda esto y el estudiante presentador mueva el deslizador, toda la clase podrá observar el gráfico mostrado en la figura 47 que presentamos a continuación.

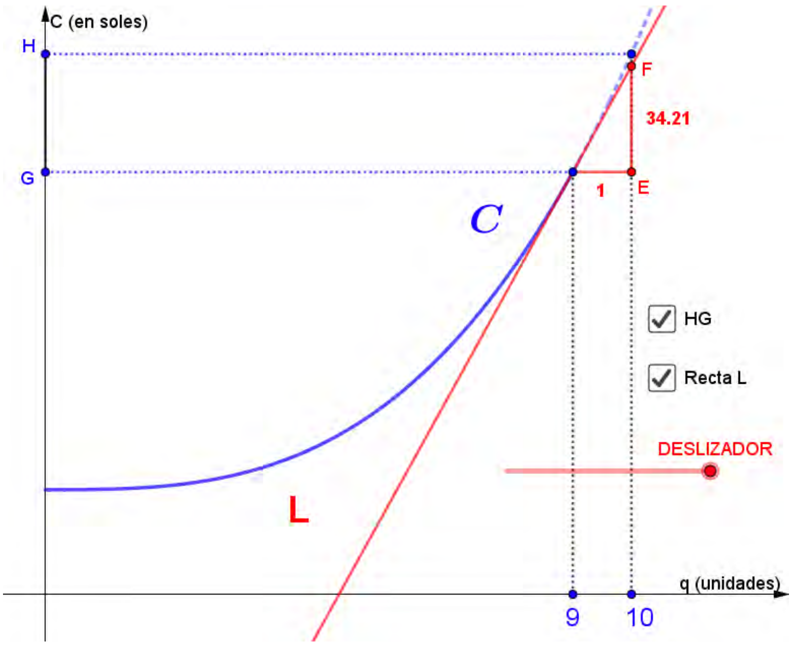

Figura 47: Datos para el desarrollo del ítem 4.

Se espera que, de acuerdo con los esquemas desarrollados en el tercer ítem, los cuales ahora serían empleados como esquemas de uso, los estudiantes logren concluir que el costo aproximado de producir la unidad número 10 es el valor de $C'(9)$, en soles, que en este caso es igual a $\frac{34.21}{1} = 34.21$ soles. El hecho de observar este resultado en las soluciones de los estudiantes, en términos de la Aproximación Instrumental, nos indicaría que se logró la génesis instrumental para la interpretación del costo marginal.

Con esto pasaríamos a la última tarea de la propuesta didáctica, en la cual el estudiante presentador debe ingresar a un enlace y manipular el deslizador hasta obtener el gráfico de la función costo C de una empresa, entre otros datos presentados a continuación en la figura 48:

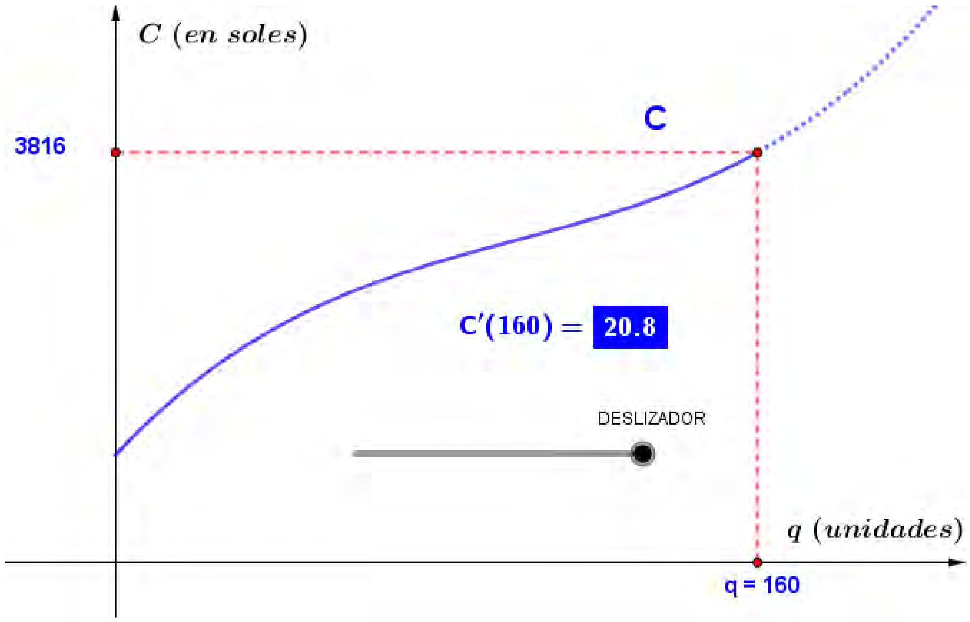

Figura 48: Datos para el desarrollo de la Tarea 2.

En esta tarea se pide que los estudiantes hallen el costo aproximado de producir 161 unidades. El docente podría intervenir en este caso comenzando con la siguiente pregunta: ¿cuál es el costo de producir 160 unidades? Se espera que, con los datos de la figura 45, los estudiantes respondan que el costo de producir las 160 unidades es 3816 soles. Es decir, que se usen los esquemas desarrollados en la Tarea 1 de la Actividad 1 sobre la interpretación de la función costo de una empresa.

En este punto, el docente podría preguntar: ¿cómo se podría obtener aproximadamente el costo de la unidad 161? Esperamos que, con los posibles instrumentos desarrollados hasta el momento en las tareas anteriores, los estudiantes concluyan que el costo de producir la unidad 161 es aproximadamente $C'(160) = 20.8$ soles. El evidenciar este resultado en las soluciones de los estudiantes nos mostrarían que efectivamente se logró la génesis instrumental del costo marginal, más precisamente sobre su interpretación pues se habrían desarrollado esquemas con respecto al artefacto simbólico costo marginal.

Finalmente, el docente podría preguntar qué deberíamos hacer con los dos valores encontrados para obtener, aproximadamente, el costo de producir 161 unidades. Esperamos que los estudiantes indiquen que se deberían sumar; de esta forma, la pregunta planteada en esta tarea habría sido respondida satisfactoriamente.

Con esto termina nuestra propuesta para el tipo de orquestación que denominamos Presentador en el trabajo en la que hemos mostrado su configuración didáctica y modo de ejecución. Debemos recordar que por la pandemia de la COVID-19 no se pudo llevar a cabo el desempeño didáctico en esta tesis.

A continuación, presentaremos el tipo de orquestación Trabajar y recorrer.

3.4 Orquestación «Trabajar y recorrer»

Este tipo de orquestación es una adaptación a medios virtuales de la orquestación Trabajar y caminar y consistirá en trabajar en grupos creados en la sesión de videoconferencia y el docente tendrá que recorrer por cada grupo para realizar las intervenciones que sean pertinentes para guiar la génesis instrumental de los estudiantes. A continuación, presentamos la configuración didáctica para este tipo de orquestación:

Configuración didáctica: Trabajar y recorrer.

Al igual que en la orquestación anterior, docente debe programar dos sesiones virtuales: la primera de aproximadamente 45 minutos y la otra de una hora. Se sugiere en este caso que el medio por el cual se realice la videoconferencia tenga la opción de crear grupos; esta opción está disponible en Zoom y Blackboard Collaborate, y será necesario que el docente sepa configurar los grupos.

Planteamos que el material de trabajo sea el mismo que en la configuración didáctica Presentador en el trabajo y se podrá acceder a este material en el apartado Anexos al final de esta tesis. Debemos recordar que el material propuesto se apoya en *applets* creadas con el *software* GeoGebra, por lo que se sugiere que el docente tenga conocimientos sobre dicha herramienta.

Asimismo, esta propuesta didáctica está planteada para trabajarse con estudiantes de los primeros ciclos de carreras de administración que tengan nociones sobre la función costo, rectas y derivadas. Con nociones de derivadas nos referimos a conocimientos sobre la interpretación geométrica de la derivada y sobre la derivada como razón de cambio. Además, los estudiantes deberán contar con conexión a internet y con un dispositivo electrónico, como, por ejemplo, una computadora de escritorio, una *laptop*, una *tablet* o un celular inteligente, los cuales les permitan conectarse a la videoconferencia que programará el docente. En adición a esto, será necesario que se procure que al menos un integrante del grupo pueda proyectar su pantalla para presentarla a los demás integrantes.

Enseguida mostraremos el modo de ejecución para este tipo de orquestación:

Modo de ejecución: Trabajar y recorrer.

Planteamos que, en un primer momento, el docente ya debe tener los grupos formados para que se facilite la creación de los grupos en la sala de videoconferencia. Además, el docente debe haber dispuesto que un estudiante por grupo esté a cargo de proyectar su pantalla para que todo el grupo pueda trabajar en equipo y fomentar el desarrollo de esquemas. Es necesario señalar que, en este modo de ejecución los estudiantes no contarán con la presencia permanente del docente-investigador, razón por la cual los estudiantes tendrán mayor autonomía en el desarrollo de la propuesta didáctica, lo que promoverá el trabajo colectivo. Esto último nos indica que, en términos de la Aproximación Instrumental, los esquemas que se desarrollarán tendrán el nivel de esquemas de acción colectiva instrumentada.

Una vez iniciada la primera sesión y creadas las salas de cada uno de los grupos en la videoconferencia, la labor del docente será recorrerlas e intervenir en el caso de que sea necesario. En caso de que sean necesarias las intervenciones del docente en los grupos, las preguntas que sugerimos hacer serán similares a las planteadas en la orquestación Presentador en el trabajo presentada anteriormente.

Recordemos que una diferencia importante es que, bajo este tipo de orquestación y por la autonomía que tendrán los estudiantes, en este modo de ejecución se podrían desarrollar esquemas de actividad colectiva instrumentada, pues serán los estudiantes, en su interacción grupal con los artefactos simbólicos involucrados en el desarrollo de la propuesta didáctica, quienes en conjunto logren desarrollar esquemas.

A continuación, presentamos las posibles interacciones del docente-investigador con los estudiantes en el desarrollo de la propuesta didáctica en la siguiente tabla:

Tabla 5.

Intervenciones del docente en la Actividad 1.

Actividad	Tarea	Ítem	Intervención sugerida
Actividad 1	Tarea 1	Ítem 1	¿$C(36)$ es el costo de producir la unidad 36 o de producir las primeras 36 unidades?
		Ítem 2	¿Qué representan $C(37)$ y $C(36)$? ¿Qué se obtiene si al costo de producir las primeras 37 unidades le restamos el costo de producir las primeras 36?
		Ítem 3	¿Qué representan 1212,5 y 1000 en el contexto del problema?
	Tarea 2	Ítem 1	¿En qué valor de q la recta L es tangente al gráfico de la función costo C? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L?
		Ítem 2	¿Cómo se obtiene la razón de cambio instantánea del costo? ¿A qué razón crece el costo, aproximadamente, cuando se producen 24 unidades?
		Ítem 3	¿En cuánto cambiaría el costo, aproximadamente, si se produce la unidad número 25?

En este modo de ejecución, durante el desarrollo de la Actividad 1, se debe contar con la supervisión del docente-investigador con el fin de lograr desarrollar los instrumentos detallados en la orquestación instrumental Presentador en el trabajo que describimos anteriormente. Es decir, un instrumento que le permita a los estudiantes interpretar gráficamente la medida de un segmento como el costo real de producir una determinada unidad y otro instrumento que permita asociar el valor de la longitud del segmento vertical $\overline{AB}$ de la figura 42 como el valor de la derivada de la función costo (ver página 42).

Al término de la Actividad 1, planteamos que el docente cierre los grupos formados y devuelva a los estudiantes a la sala principal para realizar un cierre en el que pueda consolidar los conocimientos de acuerdo con los objetivos planteados en dicha actividad en busca de lograr que los estudiantes desarrollen, en términos de la Aproximación Instrumental, instrumentos sobre los artefactos simbólicos costo real y derivada, los cuales les permitan interpretar gráficamente el valor de la medida de un segmento como el costo real de producir una unidad y el valor de la medida de un segmento vertical como la derivada de la función cuando la variación de la variable independiente de la recta tangente es igual a una unidad. Es preciso señalar que los instrumentos mencionados son los mismos que se esperar desarrollar en el tipo de orquestación instrumental Presentador en el trabajo descrito anteriormente.

En cuanto al modo de ejecución de la Actividad 2, planteamos nuevamente que el docente cree los grupos en la videoconferencia y los recorra para monitorear el avance o las dificultades que puedan tener los estudiantes. De forma similar al modo de ejecución de la Actividad 1, planteamos que las intervenciones del docente podrían ser similares a las acciones propuestas en el tipo de orquestación Presentador en el trabajo.

Presentamos estas intervenciones en la tabla 6 que mostramos a continuación:

Tabla 6.

Intervenciones del docente en la Actividad 2.

Actividad	Tarea	Ítem	Intervención sugerida
Actividad 2	Tarea 1	Ítem 1	¿En qué puntos se ubican $C(23)$ y $C(22)$? ¿Cuál es el valor de $C(23) - C(22)$? ¿Qué representa esta resta?
		Ítem 2	¿Qué representa gráficamente $C'(22)$? ¿Cuál es el valor de $C'(22)$, de acuerdo con los datos del gráfico?

		¿Qué se puede concluir con respecto a los valores de la medida del segmento $\overline{AB}$ y de $C'(22)$?
	Ítem 3	¿Cómo interpretan la medida de los segmentos $\overline{HG}$ y $\overline{AB}$, de acuerdo con lo desarrollado en los ítems anteriores?
	Ítem 4	Con los datos mostrados por el estudiante presentador, ¿se puede hallar el costo aproximado de producir la unidad número 24?
Tarea 2	Ítem único	¿Cuál es el costo de producir 160 unidades? ¿Cómo se podría obtener, aproximadamente, el costo de la unidad 161? ¿Qué deberíamos hacer con los dos valores encontrados para obtener el costo de producir 161 unidades?

En el desarrollo de la Actividad 2, se espera que los estudiantes evidencien la génesis instrumental del artefacto simbólico costo marginal. Es necesario señalar que el modo de ejecución de la orquestación Trabajar y recorrer es similar al modo de ejecución del tipo de orquestación Presentador en el trabajo, con la diferencia de que se trabajará la propuesta didáctica en más de un grupo y que esto permitirá, en este caso, el desarrollo de esquemas de actividad colectiva instrumentada.

Al término del desarrollo de la Actividad 2, se plantea una actividad de cierre en la cual el docente-investigador podrá afianzar el desarrollo de los esquemas que permitan el desarrollo del instrumento relacionado al artefacto simbólico costo marginal.

Finalmente, se han presentado los dos tipos de Orquestación Instrumental, Presentador en el trabajo y Trabajar y Recorrer, las cuales son adaptaciones a medios virtuales que planteamos de los tipos de orquestación, presentados en la tabla 1, Sherpa en el trabajo y Trabajar y caminar, respectivamente.

Esperamos que estas adaptaciones contribuyan a que los docentes puedan organizar clases para estudiantes de carreras de administración enfocadas en el desarrollo de esquemas de utilización sobre el costo marginal.

CONCLUSIONES

En el desarrollo de la presente tesis, más precisamente en el del capítulo I, pudimos comprobar que, si bien la enseñanza de la derivada es un tema de interés para la comunidad científica en el área de Enseñanza de las Matemáticas, existen pocas investigaciones sobre la enseñanza del costo marginal para estudiantes de nivel superior de carreras de administración. En este contexto, esperamos que esta tesis pueda contribuir en la bibliografía acerca de este tópico y que pueda motivar a más investigaciones sobre la enseñanza del costo marginal en estudiantes de carreras de administración pues esta noción matemática es parte importante de la formación de estos futuros profesionales pues facilita la toma de decisiones.

En cuanto al procedimiento metodológico, la adaptación realizada, en el desarrollo de esta investigación, de las fases del proceso de investigación cualitativa planteada por Hernández et al. (2014) nos permitió nutrir continuamente cada uno de los capítulos de esta tesis al ser un proceso cíclico en el que la revisión de la literatura siempre estuvo presente durante todo el desarrollo de esta investigación.

Por otro lado, el apoyo de la Aproximación instrumental como marco teórico nos permitió establecer la diferencia entre un artefacto y un instrumento, y establecer la terminología que se usó en esta investigación como, por ejemplo, esquemas de uso, esquemas acción instrumentada, esquemas de actividad colectiva instrumentada (todos estos agrupados en los esquemas de utilización) y génesis instrumental. Los artefactos simbólicos abordados en esta propuesta didáctica son la función costo, el costo real, la pendiente de una recta, derivadas y el costo marginal, y esperamos que mediante el desarrollo de la propuesta didáctica dichos artefactos se trasformen en instrumentos mediante el proceso de génesis instrumental.

Además, dado que la pregunta de investigación de la presente tesis está centrada en la organización de una clase virtual sobre el costo marginal para estudiantes de administración, consideramos que el apoyo de la Orquestación Instrumental, como uno de los marcos teóricos, fue fundamental para poder responder nuestra pregunta de investigación dado que en él se plantean tres fases en las cuales se puede organizar una clase. La configuración didáctica nos permitió determinar y organizar los artefactos y la propuesta didáctica envueltos en el desarrollo de la clase, mientras que el modo de ejecución nos permite elaborar una ruta a seguir por el docente-investigador en el desarrollo de la propuesta didáctica. Asimismo, este marco teórico está muy ligado al uso de herramientas tecnológicas, como es el caso del desarrollo de nuestra propuesta didáctica.

En el capítulo II se pudo evidenciar que el abordaje por parte de los textos recomendados en las bibliografías de dos cursos en los que se enseña el análisis marginal, que incluye al costo marginal, para estudiantes de nivel superior de carreras de Administración y Negocios se enfoca sobre todo en reforzar esquemas sobre las reglas de derivación de funciones; por ejemplo, se encontraron ejercicios en los que se pedía hallar el costo marginal cuando $q = 80$ y las tareas consistían básicamente en derivar la función y evaluarla en 80. Este enfoque en los ejercicios deja de lado la interpretación del costo marginal como el costo aproximado de producir una unidad adicional y refuerza únicamente los esquemas desarrollados por los estudiantes en reglas de derivación del artefacto matemático simbólico derivada, lo que, a nuestro parecer, no permite una comprensión más amplia de la noción de derivada, pues se dejan de lado otras interpretaciones, como por ejemplo la geométrica. Es por eso por lo que la propuesta que planteamos trata de enfocarse sobre todo en representaciones gráficas las que abarcan esquemas sobre la interpretación gráfica de la derivada y como razón de cambio.

Asimismo, este análisis hecho, en el Capítulo II de esta investigación, de los textos de consulta de cursos en los que se aborda el costo marginal nos permitió diseñar la propuesta didáctica planteada en la presente tesis y alcanzar el primer objetivo específico planteado en la página 21 de esta investigación.

Además, de acuerdo con dos de los tipos de orquestación encontrados por Şay y Akkoç (2016), más específicamente los tipos de orquestación Sherpa en el trabajo y Trabajar y caminar, se realizaron adaptaciones de estos a medios virtuales a las que denominamos Presentador en el trabajo y Trabajar y recorrer. Con base en la Orquestación instrumental, se lograron organizar dos configuraciones didácticas y modos de ejecución para las adaptaciones planteadas en esta tesis. Esto último permitió alcanzar los dos últimos objetivos específicos planteados en esta investigación.

La propuesta didáctica que planteamos se encuentra dividida en dos actividades. En la primera actividad se plantea establecer un instrumento que permita que los estudiantes interpreten los valores de las medidas de segmentos como el costo real y otro instrumento que permita establecer que cuando el cambio de la variable independiente es de una unidad, el cambio en la variable dependiente de la recta tangente al costo coincide con el valor de la derivada del costo. El desarrollo de estos instrumentos, en los cuales los esquemas posiblemente estén al nivel de esquemas de acción instrumentada, permitiría en nuestra propuesta la génesis instrumental del costo marginal en estudiantes de administración.

La segunda actividad de nuestra propuesta didáctica se encuentra centrada en el costo marginal y utiliza los instrumentos que esperamos que se hayan desarrollado en la primera actividad relacionados a los artefactos simbólicos costo real y derivada. Esta actividad se encuentra dividida en dos tareas, la primera de ellas se centra en el artefacto simbólico costo marginal como la derivada de la función costo, mientras que el artefacto simbólico interpretación del costo marginal como el costo aproximado de producir una unidad adicional.

En cuanto a las orquestaciones que planteamos en esta tesis, Presentador en el trabajo y Trabajar y recorrer, las respectivas configuraciones didácticas son distintas pues en la primera es un único estudiante el que proyecta su pantalla para guiar la génesis instrumental de los demás, mientras que en la segunda se trabaja en grupos creados por el docente-investigador en la sesión de videoconferencia y dentro de cada grupo habrá un estudiante encargado de proyectar su pantalla para el resto de estudiantes que pertenecen al mismo grupo.

Por otro lado, los modos de ejecución son muy similares con la diferencia de que en la orquestación que denominamos Trabajar y recorrer el docente-investigador no podría permanecer de forma permanente con los estudiantes, lo que propiciaría un aprendizaje autónomo y el desarrollo de esquemas de actividad colectiva instrumentada pues serían los estudiantes en su trabajo en conjunto los que desarrollarían la propuesta didáctica con intervenciones del docente en el momento en el que visite sus grupos.

Además, en ambos tipos de orquestaciones se plantean una sesión de cierre para que sea el docente-investigador quien consolide los esquemas que se debieron desarrollar en la solución de las tareas planteadas en la propuesta didáctica.

Por otro lado, consideramos que el carácter dinámico del *software* GeoGebra podría ser fundamental en el desarrollo de la génesis instrumental del costo marginal en estudiantes de administración ya que al mostrar diferentes casos mediante el uso de deslizadores permite la consolidación de esquemas de acción instrumentada propiciando que estos logren alcanzar el nivel de esquemas de uso afianzando de esta manera el desarrollo de los instrumentos necesarios en la génesis instrumental del costo marginal. Además, planteamos que en el desarrollo de la propuesta didáctica los estudiantes desarrollen esquemas de acción instrumentada con respecto al uso de deslizadores pues en el desarrollo de la propuesta didáctica, habrá momentos en los que los estudiantes tengan que decidir si es conveniente o no manipular los deslizadores para lograr responder a las preguntas planteadas en las tareas de la propuesta didáctica.

Finalmente, es necesario señalar que por la actual pandemia que atraviesa el planeta, no se pudo llevar a cabo la tercera fase de la Orquestación Instrumental (el desempeño didáctico) lo que representó una limitación en esta investigación. Es por ello por lo que, consideramos que en una futura investigación se pueda llevar a cabo dicha tercera fase, la cual nos permitiría evaluar la génesis instrumental en los estudiantes y comprobar si bajo esta propuesta el artefacto simbólico costo marginal alcanza el estatus de instrumento para los estudiantes.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* 7(3), pp. 245 274. Recuperado de https://tinyurl.com/y66nbbfx

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (8), pp. 13–33. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948

Arya, J., Lardner, W., y Ibarra, V. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.* México: Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Béguin, P., & Rabardel, P. (2000). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'intelligence artificielle*, *14*, pp. 35-54. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/289883111_Concevoir_pour_les_activites_instrumentees

Bellemain, F., y Trouche, L. (2019). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. Caminhos da Educação Matemática, 9(1), pp. 105-144. Recuperado de https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/300

Drijvers, P., Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research technology and the teaching and learning of mathematics. Cases and perspectives*. (Vol. 2, pp. 363–392). Charlotte: Information Age Publishing.

García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediado por el Geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación Secundaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5651

García-Cuéllar, D., Martínez-Miraval, M., y Salazar, J.V.F. (2018). Génesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), pp. 1876–1883. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/326250601

García, L., Moreno, M., Badillo, E., y Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía*, (31), pp. 137–171. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/1956/195621325006.pdf

Haeussler, E., y Paul, R. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. México: Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Recuperado de https://tinyurl.com/ycj2yj38

Manrique, A. (2020). *Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora gráfica para movilizar la noción de la función cuadrática en estudiantes de nivel secundario*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/755/discover

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa Guía didáctica*. Recuperado de https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J., y Castro, F. (2016). Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (46), pp. 171–187. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/46/09_32-428-2-ED.pdf

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço* (Tesis doctoral, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). Recuperado de https://tinyurl.com/yyspdy4w

Sari, P., Hadiyan, A., y Antari, D. (2018). Exploring Derivatives by Means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *2*(1), pp. 65–78. Recuperado de http://journal.uad.ac.id/index.php/IJEME/article/view/8670/pdf_20

Şay, R., y Akkoç, H. (2016). Beyond orchestration: Norm perspective in technology integration. *Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2709–2715. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289469

Seidi, R., Giusti, V., y Vieira, W. (2017). Enriquecimento da imagem de conceito de derivada de estudantes de licenciatura em matemática. *Acta Latinoamericana de Matematica Educativa*, *30*, pp. 598–605. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12255/1/Seidi2017Enriquecimiento.pdf

Tabach, M. (2013). Developing a general framework for instrumental orchestration. *Proceedings of the 8th Congress of European Research of Mathematics Education*, Antalya, Turkey.

Thomas, G. (2006). *Cálculo una variable. Undécima edición*. México: Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), pp. 281–307. Recuperado de https://tinyurl.com/yyjkfgna

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentisagges mathématiques: necessite des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(1), pp. 91–138. Recuperado de https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/

USMP (2019). *Matemática II: Manual del estudiante*. Recuperado de https://www.usmp.edu.pe/estudiosgenerales/pdf/2019-I/MANUALES/II%20CICLO/MATEMATICA%20II.pdf

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación universitaria*, *11*(2), pp. 25–34. Recuperado de https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetike*, *25*(2), pp. 265–288. Recuperado de https://doi.org/10.20396/zet.v25i2.8649274

Vrancken, S., y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), pp. 53–70. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO9.pdf

ANEXOS

ACTIVIDAD 1

TAREA 1

En el siguiente enlace A1 Tarea1 – GeoGebra encontrará el gráfico de la función costo C en soles de una empresa por la producción de q unidades. Arrastre el punto del deslizador y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el valor de $C(12)$? ¿Cómo interpreta el valor hallado en el contexto de la tarea?

2. Con ayuda del gráfico, halle $C(13) - C(12)$. ¿Qué representa dicho resultado en el contexto de la tarea?

3. Arrastre nuevamente el deslizador y complete los datos obtenidos en los recuadros de rojo de la Figura 1. ¿Qué representa la medida del segmento $\overline{HI}$ del eje vertical en el contexto de la tarea?

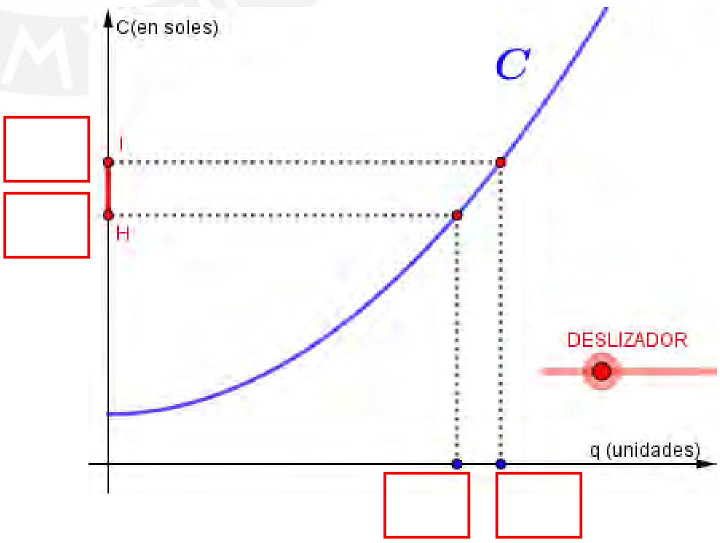

Figura 1

TAREA 2

1. En el siguiente enlace A1 Tarea2 – GeoGebra encontrará el gráfico de la función costo C en soles por la producción de q unidades. Arrastre el deslizador tres veces y por cada arrastre complete la Tabla 1.

Tabla 1

Valor de q en el eje horizontal	Relación entre el valor de $C'(q_i)$ y el de la medida del segmento $\overline{AB}$
$q_1 =$	
$q_2 =$	
$q_3 =$	

2. Halle la razón de cambio instantánea del costo cuando se han producido q_3 unidades e interprete ese resultado en el contexto de la tarea. Considere el valor de q_3 de la Tabla 1.

3. De acuerdo con el resultado hallado en el ítem 2, si la cantidad de unidades producidas aumenta en una unidad, ¿en cuánto cambia el costo aproximadamente?

ACTIVIDAD 2

TAREA 1

En el siguiente enlace [A2 Tarea1 – GeoGebra]() encontrará el gráfico de la función costo C en soles de una empresa, por la producción de q unidades en la que la parte discontinua del gráfico representa la proyección de la función C. Arrastre el deslizador hasta que la cantidad sea 8 unidades y siga las siguientes instrucciones:

1. Haga clic en la casilla HG, ¿qué representa la medida del segmento $\overline{HG}$ en el contexto de la tarea?

2. Desmarque la casilla HG y haga clic en la casilla Recta L, ¿qué representa el valor de la medida del segmento $\overline{EF}$ con respecto a la función costo C?

3. Haga clic nuevamente en la casilla HG y en base a las preguntas de los ítems 1 y 2, ¿cómo interpreta el valor de $C'(8)$ en soles en el contexto de la tarea?

4. Manipule el deslizador y halle el costo aproximado de producir la unidad número 10. Justifique su respuesta.

TAREA 2

El gráfico de los costos de una empresa en función de la cantidad de unidades producidas se encuentra en el siguiente enlace A2 Tarea2 – GeoGebra. Halle aproximadamente el costo de producir 161 unidades mostrando su proceso.