PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Título

VALORACIÓN DE LA PROPUESTA EDUCATIVA DE LOS COLEGIOS INNOVA SCHOOLS PARA EL DESARROLLO DEL RAE A TRAVÉS DE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

RAÚL ALFREDO SUPO ORIHUELA

ASESORA

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

Marzo, 2021

RESUMEN

Esta investigación se desarrolla dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y pretende contribuir a la línea de investigación en Epistemología de las matemáticas. El objetivo es el de valorar la propuesta de la institución Innova Schools en términos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Para ello, en primer lugar, se construye un significado de referencia de la noción de linealidad para el nivel primario y secundario. La elaboración de este significado institucional tiene en cuenta los elementos primarios de la Configuración Ontosemiótica del EOS: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Luego, se realiza una adaptación de los niveles de algebrización propuestos en el EOS. Esta propuesta es particular para los diferentes significados de la linealidad y tiene por finalidad el ser un instrumento de análisis y valoración de la actividad algebraica de los estudiantes al resolver tareas asociadas a dichos significados. Con estos dos elementos teóricos se pretende valorar la propuesta de la institución Innova Schools en dos aspectos: como primer análisis, se determina el significado pretendido por la institución al analizar las situaciones que se proponen en sus sesiones de clase y, como segundo análisis, se determina la evolución del razonamiento algebraico al resolver dichas situaciones. Finalmente, se concluye que la propuesta de la institución Innova Schools, de forma implícita, desarrolla los diferentes significados de la linealidad desde el nivel primario al secundario. De forma gradual, a medida que los diferentes significados aparecen y otros se dejan de lado, también se evidencia una evolución del RAE en las situaciones que dicha institución propone.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico; Razonamiento Algebraico Elemental; Linealidad.

ABSTRACT

This research is developed within the framework of the Onto-semiotic Approach (OSA) and aims to contribute to the line of research in Epistemology of Mathematics. The objective is to assess the proposal of the Institution Innova Schools in terms of the Elementary Algebraic Reasoning (EAR). Firstly, a reference meaning of the notion of linearity is constructed for the primary and secondary level. The elaboration of this institutional meaning considers the primary elements of the Onto-semiotic Configuration of the OSA: situations, languages, concepts, procedures, propositions and arguments. Subsequently, an adaptation of the proposed algebrization levels in the OSA is carried out. This proposal is particular to the different meanings of linearity and aims to be an instrument for analyzing and valuing students' algebraic activity when solving tasks associated with these meanings. With these two theoretical elements it is intended to assess the proposal of the Innova Schools institution in two aspects: as a first analysis, the meaning intended by the institution is determined by analyzing the situations proposed in its class sessions and, as a second analysis, the evolution of algebraic reasoning is determined when solving said situations. Finally, it is concluded that the proposal of the Innova Schools institution, implicitly, develops the different meanings of linearity from primary to secondary level. Gradually, as the different meanings appear and others are set aside, there is also evidence of an evolution of the EAR in the situations proposed by said institution.

Keywords: Onto-semiotic Approach; Elemntary Algebraic Reasoning; Linearity.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, la Dra. Cecilia Gaita, por su sabiduría, tiempo y paciencia dedicado hacia mi cada vez que lo necesité. Gracias a su valiosa guía pude iniciar y culminar este trabajo. ¡Muchas gracias!

A los miembros del jurado, la Dra. Cintya Gonzáles y el Dr. Francisco Ugarte, por su siempre crítica constructiva. Sus sugerencias y aportes han sido de mucha utilidad.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas con los que tuve la dicha de seguir creciendo profesionalmente a través de sus clases.

A la línea de investigación Epistemología de las Matemáticas, en la cual se inscribe esta investigación.

A mis compañeros de la maestría con quienes compartimos ese deseo de superación profesional.

A mis padres, Alberto y Maura, y mis hermanos, Luis y Carolina, por ser siempre mi motivo de superación. Sin su enorme esfuerzo nada de esto sería posible. ¡Esto es por ustedes!

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Desde mi práctica docente he tenido la oportunidad de colaborar directamente en la formación de estudiantes de 12 a 13 años de edad en un colegio privado. Al desarrollar las secuencias didácticas propuestas por la institución, que tiene un enfoque de resolución de problemas, he observado algunos hechos que han despertado interés en mí y que, además, considero lo son para la Didáctica de las Matemáticas. Estos hechos están relacionados con la práctica que realizan los estudiantes al resolver tareas propuestas sobre funciones lineales.

A continuación, se muestra un problema propuesto a estudiantes de primero de secundaria (13 años) y se describen algunos hechos asociados a las prácticas matemáticas de dicho grupo.

Situación problemática: *Nos preparamos para nuestro campeonato*

Nuestro salón necesita comprar camisetas para participar en el campeonato interno del colegio. Las tiendas "Fútbol y más" y "Sí se puede" ofrecen los siguientes presupuestos:

- *"Fútbol y más": 10 soles por camiseta más 50 soles, sin importar el tamaño del pedido.*
- *"Sí se puede": 15 soles por camiseta, sin importar el tamaño del pedido.*

Luego, asociada a dicho enunciado se formulan preguntas entre las que se solicita *determinar a qué tienda acudir si se quieren comprar 4 o 9 camisetas, encontrar una función que del costo al comprar "n" camisetas en las tiendas, graficar dichas funciones en el plano cartesiano, para qué cantidad de camisetas el costo en ambas tiendas es el mismo, qué número de camisetas como mínimo se puede comprar en una tienda de modo que la oferta sea mejor que en la otra.*

Resulta de interés identificar cómo algunos estudiantes al responder a las preguntas planteadas llegan a encontrar dicha *función,* ya sea expresándola verbalmente o escribiéndola, haciendo uso de variables. Así también, luego de graficar las funciones, responden bajo qué cantidad de camisetas conviene una tienda u otra. Lo curioso, por darle un calificativo a las resoluciones de estos estudiantes, es que es la primera vez que ellos se encuentran con el término función y, sin embargo, pueden determinar esa expresión matemática haciendo uso de un lenguaje simbólico – literal o, en otros casos, son capaces de resolver el problema explicando con sus propios términos la dependencia del número de camisetas con el costo.

Por otro lado, hay otro grupo de estudiantes que no pueden encontrar dicha expresión, no entienden el significado "*n" camisetas* o para responder a las últimas preguntas necesitan hacer los cálculos numéricos para cantidades puntuales de camiseta. Es así que estos hechos permiten suponer que el primer grupo de estudiantes ha construido, sin necesidad de haber sido explícito antes, un significado funcional de la linealidad. Principalmente porque dentro de sus argumentos reconocen una relación entre las variables puestas en juego en el problema. En el otro grupo, en cambio, se puede señalar que se ha alcanzado cierto desarrollo en la noción de linealidad, pero sin aún consolidarlo como una función lineal, así como un desarrollo menor en su razonamiento algebraico porque aún necesitan de valores particulares y cercanos.

Considero que, dado que es la primera vez que a estos estudiantes se les presenta una situación sobre función lineal, es posible pensar que las actividades previas y de grados anteriores han contribuido a desarrollar esta noción de linealidad y con ella la de función lineal. En base a ello planteo la siguiente pregunta: ¿la planificación curricular está estructurada de tal forma que se desarrolle la noción de linealidad a través de los años de escolaridad? ¿la propuesta educativa de la institución Innova Schools contribuye al desarrollo de la noción de linealidad? ¿la formación de años anteriores ha contribuido a la construcción del significado funcional de linealidad?

Estas cuestiones e interés propios no son aislados y ajenos a la Didáctica de las Matemáticas. Actualmente hay una concepción diferente de lo que es el *Álgebra,* como señalan Godino y Font (2003). Esta nueva concepción no se restringe a entender el Álgebra como una *aritmética generalizada,* en donde se extiende el trabajo realizado con números a letras que representan números generales o desconocidos. Como señalan dichos autores, las prácticas matemáticas introducidas se caracterizan por la resolución de ecuaciones o el estudio de funciones, no siendo un objetivo que los estudiantes encuentren una expresión general, como $f(x) = 10x + 50$, después de un análisis de una situación en particular. Podríamos pensar que más bien se espera que el estudiante opere con dicha expresión como si se tratase de una aritmética generalizada, en la que las variables e incógnitas son operarlas para hallar un valor desconocido. Es así como estos autores señalan que, bajo una nueva concepción, el Álgebra no es solo escribir y resolver ecuaciones, no es únicamente de enseñar un curso de álgebra. Por el contrario, significa el desarrollo de un *razonamiento algebraico* a lo largo de toda la formación escolar. Sobre este razonamiento algebraico Godino, Aké et al. (2014) afirman: "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (p.4). Creemos que la concepción tradicional del álgebra no tiene en cuenta aspectos que demanda la noción actual del álgebra y qué significa enseñar álgebra. Más aún en un contexto en el que se busca desarrollar competencias en nuestros estudiantes.

Es de esperarse que las actuales propuestas curriculares de las instituciones educativas respondan a esa noción ampliada del Álgebra. Es así como, al hacer una revisión del *Currículo Nacional de la Educación Básica* (MINEDU, 2016) determinamos que en dicha propuesta se consideran desempeños que tienen en cuenta objetos y procesos de carácter algebraico desde los ciclos iniciales. En particular, en la competencia *Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio* se indica lo siguiente:

> Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto a la otra, a través de reglas generales (…) Para esto plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones (…) Así también razona de manera inductiva y deductiva, para

determinar leyes generales (…). (MINEDU, 2016, p.73)

Podemos reconocer en dicha competencia algunos aspectos de lo que es “razonar algebraicamente”. Por lo que es pertinente determinar si efectivamente las propuestas de las instituciones educativas permiten que los estudiantes desarrollen y avancen en dichos conceptos y procesos.

Considerando que desde el Enfoque Ontosemiótico de Construcción e Instrucción Matemática (EOS), desarrollado inicialmente por Godino et al. (2007) y la propuesta de niveles de razonamiento algebraico en Godino, Aké et al. (2014) se tienen herramientas para poder analizar la actividad matemática en torno a los objetos algebraicos, como lo son la función lineal y afín, es que se plantea hacer un análisis teórico de las sesiones de clase que proponen los colegios Innova Schools y determinar si a través de las actividades propuestas, se contribuye al desarrollo de dicho razonamiento.

CAPÍTULO 1: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la problemática de nuestra investigación, teniendo en cuenta antecedentes que dan el soporte y validez necesarios. Así mismo, presentamos los argumentos que justifican esta investigación y determinan su pertinencia y relevancia. Finalmente, se plantea la pregunta de investigación y se determinan el objetivo general y específicos.

1.1 Antecedentes

Dado que en esta investigación se pretende hacer un análisis sobre una propuesta educativa y determinar si en ella se propicia el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en aquellas actividades relacionadas con la linealidad, hemos organizado las investigaciones en torno a dos focos de interés. Primero, se presentan investigaciones cuyo interés ha sido el razonamiento algebraico y luego, se presentan investigaciones cuyo interés de estudio es el desarrollo de la noción de linealidad.

El estudio de la inclusión del razonamiento algebraico en la etapa escolar no es reciente. La investigación realizada por Godino, Castro et al. (2012) da cuenta de ello. En este trabajo, los autores elaboran una descripción de las prácticas matemáticas que son consideradas algebraicas y además presentan algunos grados de algebrización. Para ello, hacen uso de las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, propuesto por Godino (2002) y desarrollado por Godino et al. (2007), como lo son los tipos de objetos y procesos que intervienen en la actividad algebraica. Es así como presentan una primera tipología de los objetos considerados algebraicos, estos son: *relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras y sus tipos.* Además, se presentan las dualidades, en el sentido del EOS, que caracterizan las prácticas algebraicas. Estas dualidades intervienen en toda práctica matemática, no solo la algebraica, y además dependen del contexto. A continuación, en la Figura 1 presentamos un esquema de estas dualidades.

Figura 1. Dualidades de la práctica algebraica.
Fuente: Godino, Castro et al. (2012, p. 494)

Godino, Castro et al. (2012) señalan que, en el caso de las prácticas algebraicas, las dualidades *intensivo-extensivo, sistémico-unitario y ostensivo-no ostensivo*, así como los procesos de *particularización y generalización* cobran una relevancia mayor. Determinamos así la importancia de este trabajo para el nuestro, ya que este nos da las herramientas propias del EOS que serán usadas para analizar las prácticas matemáticas y reconocer cuáles demandan un mayor razonamiento algebraico. Consideramos que nuestra investigación brindará resultados en términos de lo que en la investigación de Godino, Castro et al. (2012) entiende como álgebra escolar.

En ese mismo sentido, las investigaciones realizadas por Godino, Aké et al. (2012) y Godino, Aké et al. (2014) siguen la línea de la investigación anterior. En la primera investigación la problemática de interés es la misma, siguiendo a Godino, Aké et al. (2012): “Las investigaciones sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros niveles de educación primaria no han sido concluyentes” (p.285). Es así como en este trabajo se presenta una síntesis de la propuesta de Godino, Castro et al. (2012), acerca de la visión del álgebra en términos del EOS. Luego se propone un modelo gradual del razonamiento algebraico con algunas implicaciones para los maestros en formación.

La segunda investigación clarifica los 3 niveles de algebrización propuestos y estos se ilustran con ejemplos y soluciones a dichos ejemplos por parte de algunos estudiantes. Ello se hace con la finalidad de que sirva para la formación de maestros y así puedan reconocer estos grados de algebrización en la actividad matemática de sus estudiantes. La propuesta de los niveles de algebrización según Godino, Aké et al. (2014) es la siguiente:

- Nivel 0: Intervienen objetos *extensivos* (particulares) expresados mediante el lenguaje natural, icónico o gestual. Es posible que aparezca algún símbolo que refiera a un valor desconocido. En tareas de generalización donde se reconozca el término siguiente a otro de forma particular no debe indicar la *generalización.* Este nivel es detallado como ausencia de razonamiento algebraico.
- Nivel 1: Intervienen objetos intensivos (generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje distinto al simbólico literal.
- Nivel 2: Intervienen variables expresadas en un lenguaje simbólico literal que refieren a un intensivo identificados, pero ubicadas dentro del contexto del problema. En tareas funcionales se reconoce la generalidad mediante el lenguaje simbólico literal, pero aún no se opera con dichas variables.
- Nivel 3: Se reconoce la generalidad con el uso del lenguaje simbólico-literal y además se opera con dichas variables. Este nivel refiere a un nivel logrado de algebrización.

Esta propuesta de niveles de algebrización permite la valoración de la práctica matemática de estudiantes ante tareas que demanden el uso de los objetos y procesos de carácter algebraico. Es así como estos tienen relevancia en nuestra investigación, dado que las tareas funcionales requieren de procesos algebraicos. Si bien esta propuesta de Godino et al. (2014) ya permite una clasificación de la práctica matemática, estos niveles deberán ser adaptados a nuestra investigación. Esta adaptación es presentada en el capítulo 2 de esta investigación.

La investigación realizada por Godino et al. (2015) sigue a la de Godino, Aké et al. (2014). Este trabajo amplía los tres primeros niveles propuestos para el RAE, pensando esta vez en el nivel secundario. Para ello, primero hacen un análisis de los tres niveles propuestos anteriormente para el nivel primario. Luego, se propone los siguientes tres para el nivel secundario. Esta nueva delimitación de la práctica algebraica en otros tres niveles tiene en cuenta el uso de los parámetros y las transformaciones que se puedan realizar en tareas estructurales y funcionales. De hecho, los autores nos señalan que aún en la secundaria se seguirán manifestando los primeros niveles de algebrización y el completo dominio del nivel 3 debe ser un objetivo central del primer grado de secundaria. A continuación, un resumen de los últimos niveles de algebrización propuestos por este método:

- Nivel 4: En este nivel se hace el uso de los parámetros como registro numérico para expresar familias de ecuaciones y funciones. Este nivel representa el primer encuentro con los parámetros y por lo tanto es concebido en su forma más básica: sirve para registrar un valor constante que no cambia (Drijvers (2003), citado en Godino et al. 2015).
- Nivel 5: En este nivel se realizan operaciones y tratamientos con expresiones en las que intervienen parámetros. Este nivel superior de algebrización implica no solo operar algorítmicamente parámetros, si no comprender qué se obtiene como resultado al hacer tratamientos con ellos.
- Nivel 6: En este nivel se ponen en juego objetos y procesos algebraicos de mayor complejidad. Este estudio se inicia en el bachillerato con el análisis de estructura algebraicas (espacios vectoriales o grupo), el álgebra de funciones

(adición, sustracción, etc.).

Podemos ver que estos 3 niveles exigen una consolidación del nivel 3 de algebrización, ya que en estos intervienen procesos algebraicos de mayor demanda y profundidad que posiblemente no son tratados en el álgebra escolar, ya que en el Diseño Curricular de la Educación Básica (MINEDU, 2016) no es explícito el trabajo con parámetros. Dado que en el nivel 4 se hace mención el uso de parámetros para representar a una familia de funciones, consideramos que también debemos tenerlos en cuenta.

Por otro lado, el trabajo realizado por Castro et al. (2017) es relevante para esta investigación. Primero, es importante señalar que en este se reconoce que el modelo del Razonamiento Algebraico Elemental permite desarrollar dicho razonamiento desde el nivel primario. Pero, además se señala que para lograr tal cometido el profesor debe saber elegir y diseñar tareas que tengan en cuenta esos niveles progresivos de razonamiento. En ese sentido, es importante que el profesor sepa elegir tareas que puedan desarrollar gradualmente el razonamiento en los estudiantes.

Dicha investigación hace uso de los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014) para analizar cinco libros de texto y clasificar las tareas propuestas en ellos y, además, estudiar el desempeño de los estudiantes al resolver un cuestionario elaborado a partir de las tareas de los libros analizados. La investigación se realizó en una institución privada de Colombia, y se consideraron niños desde primer hasta quinto grado de primaria.

En la primera etapa del trabajo se hace el análisis de las tareas propuestas en los libros, buscando características algebraicas en su enunciación. Es así como se obtuvo una primera agrupación en 4 bloques, acorde a los niveles de algebrización 0, 1, 2 y 3. Además, los ejercicios fueron resueltos, identificando así características algebraicas propias de la actividad que se desprende de dicha resolución. En la segunda fase, se diseñó un cuestionario que se aplicó a 50 estudiantes, desde primero a quinto grado de primaria. Para tener una prueba final, primero se elaboró una prueba piloto. Esta se aplicó sobre un grupo determinado, con los resultados y teniendo en cuenta las tareas de los libros se diseñó el cuestionario final que se aplicó a otro grupo de estudiantes.

En la investigación se concluye que la propuesta de los niveles de algebrización es adecuado para reconocer características algebraicas de las tareas matemáticas propuestas en libros, así como para predecir la actividad de los estudiantes al resolver esas tareas de carácter algebraico. Por otro lado, se determina que el nivel algebraico es progresivo con el grado y depende mucho de la propuesta curricular y material utilizado en las actividades escolares. Estos resultados son de interés para nuestro trabajo. Consideramos que nuestra investigación, al igual que la de Castro et al. (2017), es una extensión de la propuesta de Godino, Aké et al. (2014) pues también haremos uso de los niveles de algebrización para analizar una propuesta educativa teniendo como unidad de análisis los textos didácticos y materiales empleados en dicha institución, esto se hará teniendo como foco aquellas tareas relacionadas a la noción de linealidad y se analizará cómo estas permiten a los estudiantes avanzar en el desarrollo de su razonamiento algebraico.

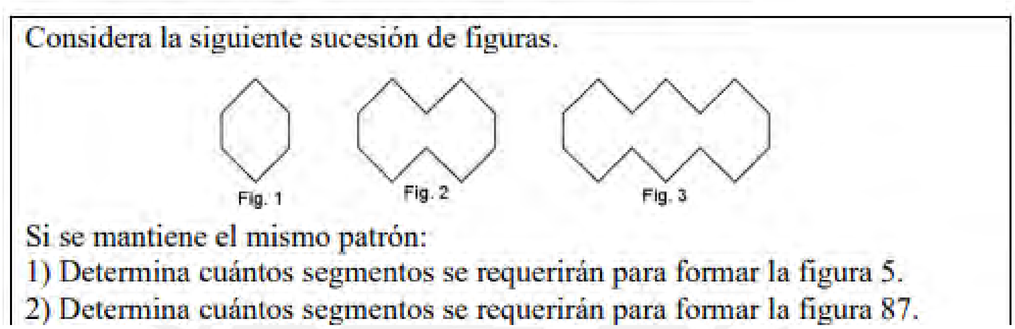
Por otro lado, en los trabajos realizados por García (2018) y Carrillo et al. (2019) se estudian los niveles de algebrización que alcanzan estudiantes de primero de secundaria en una tarea estructural sobre números racionales, que desde el RAE es considerada como objeto algebraico. Para ello toma como marco teórico al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) y el Razonamiento Algebraíco Elemental (RAE). Este trabajo se realizó en un colegio particular de Lima, Perú, a 15 estudiantes de primer grado de secundaria de entre 12 y 13 años.

En el trabajo se concluye que el nivel que predomina del RAE, en respuesta a las tareas propuestas, es el 1 ya que los estudiantes sólo trabajan con valores particulares y cercanos a las tareas asignadas. Por ejemplo, ante una tarea propuesta sobre patrones, la práctica matemática se caracteriza por buscar una generalización para valores cercanos a los ya dados en la tarea. Estas generalizaciones que encuentran las hacen a partir de operaciones aritméticas, predominando un lenguaje verbal y simbólico, aunque con algunas dificultades al traducir expresiones en dichos lenguajes. Si bien las investigaciones (García, 2018; Carillo, et al. 2019) muestran un nivel de algebrización predominante, hay evidencia de que estos estudiantes están próximos a pasar a un nivel superior. Es así como se sugiere que se realicen investigaciones en las que se propongan actividades que desarrollen el Razonamiento Algebraico Elemental, particularmente, para el tema de funciones, las actividades con patrones o situaciones de modelización. Esta idea se verá reforzada con la siguiente investigación.

La investigación realizada por Gaita y Wilhelmi (2019) nos da aportes en lo antes mencionado. En este trabajo se hace uso de los niveles propuestos por Godino, Aké et al. (2014) para valorar la práctica de estudiantes al resolver tareas con patrones. La investigación fue de diseño cuasi-experimental y se realizó mediante un pre-test y post-test sobre un grupo único de 6 estudiantes de 16-17 años, que ya habían terminado su etapa escolar en un colegio rural. La finalidad de las pruebas era la de identificar rasgos de algebrización en su resolución. Cada una de ellas, pre-test y post-test, presentaban una tarea sobre patrones geométricos y su solución esperada. Primero, se elaboraron indicadores que permitan la valoración de la práctica operatoria y discursiva de los estudiantes al resolver las tareas propuestas. Luego, como consecuencia, se diseñó una secuencia que tenga en cuenta las dificultades encontradas en las soluciones.

Este trabajo es importante para nuestra investigación ya que, como bien señalan Gaita y Wilhelmi (2019), las tareas con patrones son un contexto privilegiado para el desarrollo del RAE. Entendemos que son diversas las tareas que permiten el desarrollo del RAE, pero particularmente algunas de las tareas con patrones al parecer aportan al desarrollo de la noción de linealidad. Esto es porque este tipo de tareas llevarán al estudiante a la necesidad de encontrar una regla general y esta expresión puede ser asociada a la función afín como bien señalan

Callejo y Zapatera (citados en Gaita y Wilhelmi, 2019). Es importante señalar que también la expresión general puede ser una expresión cuadrática, veremos que la expresión será lineal cuando se reconozca un aumento constante de cambio entre un término y otro. Para clarificar esto, se presenta la Figura 2 que muestra un problema de recuento de patrones propuesto en la investigación de Gaita y Wilhelmi (2019):


Considera la siguiente sucesión de figuras.

Si se mantiene el mismo patrón:
1) Determina cuántos segmentos se requerirán para formar la figura 5.
2) Determina cuántos segmentos se requerirán para formar la figura 87.

Figura 2. Problema de recuento de patrones
. Fuente: Gaita y Wilhelmi (2019, pp. 271)

Este problema de patrones resulta interesante, Gaita y Wilhelmi (2019) sostienen que problemas de este tipo (ya sean situaciones gráficas o numéricas) son un buen contexto para desarrollar el RAE. Por ejemplo, para responder a la primera pregunta es necesario que el estudiante reconozca el patrón de las figuras y dibuje la figura 5. Pero, para responder a la pregunta 2, ese mismo procedimiento ya no le será de utilidad, no porque no pueda resolverse de esa forma, sino porque "un procedimiento de recuento sería muy costoso" (Gaita y Wilhelmi, 2019, p.280). Es así como esta pregunta lleva al estudiante a la necesidad de encontrar una regla general para determinar, con mayor facilidad, el número de segmentos en la figura 87 y con esto conseguir una consolidación para determinar el número de segmentos para cualquier otra figura.

En el trabajo se presenta la solución de tres estudiantes, en estas se determinan rasgos de niveles de algebrización, por lo que se concluye que tareas de este tipo permiten el desarrollo del RAE. Decimos que esta actividad permite desarrollar la noción de función afín, lo cual resulta de nuestro interés, por la solución del estudiante A:

$$fig. 1: 4 + 2 = 6 \text{ ,}$$
$$fig. 2: 4x2 + 2 = 10 \text{ ,}$$
$$fig. 3: 4x3 + 2 = 14 \text{ ,}$$
$$fig. 5: 4x5 + 2 = 22 \; y$$
$$fig. 87: 4x87 + 2 = 350.$$

Es claro que el estudiante reconoce una regla general que puede ser escrita de la forma $f(x) = 4x + 2$ o incluso puede ser enunciada como *el número de segmentos de una figura x se determina por multiplicar la posición asignada a dicha figura por 4 y de sumarle* 2. Si bien, el estudiante no lo expresa como lo hemos indicado, reconocemos que sí es posible llegar a dichas expresiones. Es por ello que las tareas sobre patrones, y las preguntas que éstas tengan, cobran interés en nuestra investigación ya que la actividad matemática que se demanda en ellas genera que el estudiante haga uso de procesos y objetos algebraicos que están relacionados a la noción de linealidad.

Por otro lado, más allá de la consolidación antes señalada en dicha expresión, resulta de nuestro interés ver que entre las figuras se reconoce un aumento constante.

$$fig. 1: 4 + 2 = 6 \text{ ,}$$
$+4$
$$fig. 2: 4x2 + 2 = 10 \text{ ,}$$
$+4$
$$fig. 3: 4x3 + 2 = 14 \text{ ,}$$

Figura 3. Aumento constante.

Fuente: Elaboración propia

En términos de Acosta (2011) eso es una *razón constante de cambio*, que es una idea germinal de la noción de linealidad. Este aumento constante permite el establecimiento de relaciones entre, por ejemplo, el número de la figura y la cantidad de segmentos necesarios. Este tipo de razonamiento está relacionado con la noción de linealidad, es por ello por lo que aquella expresión general se presenta como una función afín y que en otros casos puede presentarse como una función lineal. Esto resulta importante para nosotros, por lo que dentro del análisis que haremos deberemos tener en cuenta aquellas actividades con patrones en sus distintas formas (gráficas, verbales, numéricas, etc.).

Adicionalmente, Gaita y Wilhelmi (2019) nos presentan los niveles de algebrización de Godino, Aké et al. (2014) adaptados a las tareas sobre patrones. Esta adaptación clasifica la actividad algebraica que emerge de resolver tareas con patrones, de esta propuesta rescatamos lo siguiente:

- Un nivel 0 de razonamiento algebraico es caracterizado por el uso de operaciones aritméticas para hallar un término particular de las sucesiones o secuencias y esto se da en un lenguaje natural, gestual, icónico y numérico.
- Un nivel 1 de razonamiento algebraico se caracteriza por reconocer un patrón de formación a partir del recuento de términos de la sucesión. Esta actividad se limita a términos cercanos de la sucesión, por lo que aún no se determina un patrón general de formación. El trabajo se sigue dando en un lenguaje natural, gestual, icónico y numérico, puede que aparezcan símbolos, pero solo son usados para representar a un término particular y no implica la manipulación simbólica.
- Un nivel 2 de razonamiento algebraico es caracterizado por el reconocimiento de un patrón general de formación a partir de recuentos entre los términos de la sucesión, al relacionar el término con la posición que ocupa en la sucesión. Esta regla general es expresada de forma verbal o numérica, en primer lugar, luego ya es expresada en un lenguaje algebraico. Aunque aún no se han manipulaciones sobre esta expresión.
- En un nivel 3 de razonamiento algebraico se expresa la regla general de manera formal. Ya sea que se haya determinado por el análisis de casos particulares o con el uso de la fórmula de sucesiones, la expresión es manipulada para convertirla en su forma más simple.

Esta propuesta nos servirá para construir una propia con el fin de analizar aquellas actividades con patrones que permiten reconocer una relación lineal entre los términos de la sucesión y la posición que estas ocupen.

Considero que el trabajo realizado por Gaita y Wilhelmi (2019), García (2018) y Gaita, Carrillo & García (2019), son relevantes para esta investigación por las siguientes razones:

- Estas adaptan la propuesta Godino, Aké et al. (2014), ya que esta propuesta tuvo como objetivos presentar un modelo que permita reconocer características algebraicas en las actividades matemáticas del nivel primario y, que, en consecuencia, sirva para la formación de maestros de dicho nivel. Pero, además, las investigaciones han demostrado que también puede ser usado para medir los niveles de desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes, así como sus implicancias en la planificación curricular, aspectos aún no abordados (Godino y Burgos, 2017).
- En estas investigaciones se destaca que las actividades con patrones son un escenario apropiado para el desarrollo del RAE. Esto claramente atiende a lo dicho por Godino, Aké et al. (2014):

> El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades (…). A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. (p.4)

Además de que las tareas con patrones permiten desarrollar la noción de linealidad. Esto es porque, dentro de la actividad que demandan las tareas, el reconocimiento de patrones de formación permite reconocer aumentos constantes entre diferentes términos. Que según Acosta (2011) es una idea germinal de la noción de linealidad, que luego es consolidada como la función lineal $f(x) = kx$.

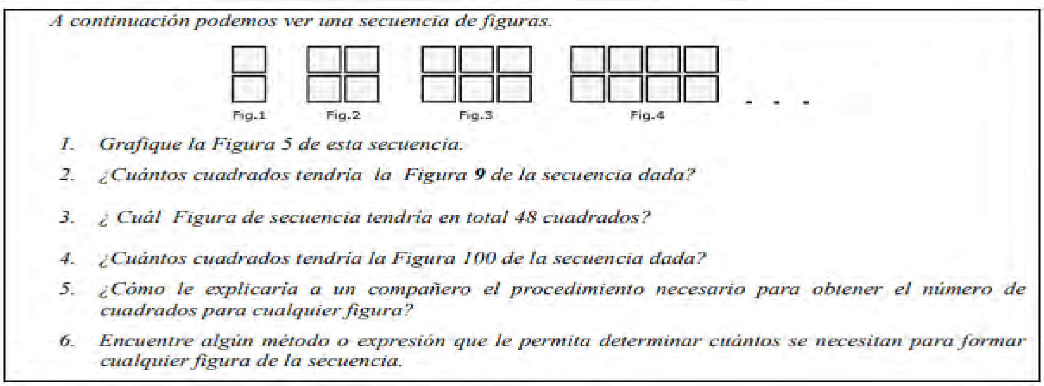
De las investigaciones hasta el momento presentadas rescatamos para nuestra investigación lo siguiente:

- Un marco teórico que nos define aquellos objetos y procesos considerados algebraicos. En este marco teórico reconocemos la importancia de analizar este tipo de actividades por la implicancia en la formación de maestros, así como otros aspectos no abordados como lo son sus implicancias en la planificación curricular y en la medición el desarrollo cognitivo de los estudiantes respecto a los objetos considerados algebraicos.
- Un interés por valorar la actividad escolar de estudiantes ante tareas de índole algebraico y reconocer rasgos de niveles de algebrización en sus procedimientos. Para luego, a partir de lo estudiado, proponer secuencias didácticas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental.
- Las tareas con patrones, aparte de ser un buen contexto para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, como resultado de este razonamiento son generadoras de la noción de la función lineal afín, en particular lo son aquellas tareas en las que se reconozca un aumento constante entre términos de la sucesión. Aspecto para tener en cuenta en la elaboración de un significado de referencia sobre la noción de linealidad.

A continuación, se presentan trabajos que tienen como foco de estudio a la función lineal y la proporcionalidad, algunos desde la mirada del Enfoque Ontosemiótico. En estos se estudia la pertinencia e importancia de dichos objetos en la formación básica regular de los estudiantes, así como el análisis de propuestas didácticas en libros y el qué tener en cuenta al estudiar dicho objeto. Estas investigaciones serán tomadas en cuenta al elaborar un significado de referencia sobre la función lineal, en ese sentido se presentan también investigaciones que muestran cómo es que se desarrolla la noción de función lineal en la formación escolar.

En la tesis de Sánchez (2016) se propuso atender a las dificultades asociadas al aprendizaje de la función lineal y afín. Es así como ella se planteó el construir los objetos mentales variable y dependencia, importantes en la comprensión de la función lineal y afín, a partir de un conjunto de 6 tareas asociadas a este concepto, en el marco de la Educación Matemática Realista. Resulta de nuestro interés las tareas de secuencias figurales y secuencias numéricas, pues este tipo de tareas, según la autora, permite al estudiante el reconocimiento de regularidades entre las magnitudes que intervienen en dichas situaciones, lo que a su vez permitirá determinar una regla general.

Ya sea que estas tareas sean propuestas de forma geométrica, gráfica o numérica, siempre demandarán al estudiante reconocer regularidades y, en algunos casos, harán uso de un lenguaje simbólico – literal, que tendrá la forma de una relación lineal. A continuación, presentamos las Figura 4 y 5 que muestran dos ejemplos de las tareas propuestas por Sánchez (2016):


A continuación podemos ver una secuencia de figuras.

1. *Grafique la Figura 5 de esta secuencia.*
2. *¿Cuántos cuadrados tendria la Figura **9** de la secuencia dada?*
3. *¿ Cuál Figura de secuencia tendria en total 48 cuadrados?*
4. *¿Cuántos cuadrados tendria la Figura 100 de la secuencia dada?*
5. *¿Cómo le explicaria a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?*
6. *Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.*

Figura 4. Problema de secuencia de figuras
Fuente: Sánchez (2016, pp. 59)

En las tareas de secuencia de figuras el recuento de patrones permite la solución a las preguntas 1 y 2. El estudiante puede realizar los gráficos para responder a dichas preguntas. Sin embargo, esto costará más si se razona de la misma manera para la pregunta 3 y 4. Es necesario que las regularidades identificadas por el estudiante le permitan obtener una expresión que le dé respuesta a preguntas en las que el recuento de patrones ya no es tan útil.

Por otro lado, las tareas de secuencias numéricas también representan tareas en las que el estudiante debe reconocer regularidades.

Observe atentamente las siguientes secuencias numéricas y responda.

a) *1, 4, 7, 10, 13,……*

b) *3, 7, 11, 15, 19,……*

1. *El número que ocupa la posición 15 es:*
2. *Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el n-ésimo término de la secuencia numérica dada:*

Figura 5. Problema de secuencias numéricas.
Fuente: Sánchez (2016, pp. 88)

En el capítulo 3 de nuestra investigación propondremos una solución esperada, siguiendo aspectos del modelo propuesto por Gaita y Wilhelmi (2019) con la finalidad de clasificar la actividad algebraica que esta tarea genera en términos del RAE.

Este tipo de tareas están asociadas a la noción de función lineal y función afín, principalmente, porque en este tipo de tareas se identifica un aumento constante de un término respecto al anterior. Esta razón constante de cambio permite establecer relaciones entre la posición que se ocupa y el término en particular, relación que después es expresada formalmente por las formas $f(x) = kx$ o $f(x) = kx + b$. Estas relaciones funcionales no son determinadas en un principio, pero sí aparecen como consecuencia de la actividad que la tarea demanda.

Por otro lado, no todas las tareas de sucesiones y patrones permiten su formalización en una expresión lineal; algunas no tienen un patrón constante y otras corresponden a expresiones cuadráticas. Así pues, serán de nuestro estudio se limitará a aquellas que tengan patrón constante de cambio. En nuestra investigación tendrán el nombre de patrones lineales.

Por otro lado, en la tesis de Escudero (2017) se planteó determinar aquellos conocimientos didácticos matemáticos que el profesor de matemáticas debe poseer para poder identificar rasgos de razonamiento algebraico en sus estudiantes al resolver tareas sobre funciones lineales y cuadráticas. Para lograr ello, la autora usó como marco teórico al EOS, su modelo de conocimientos didácticos-matemáticos (CDM) y el modelo del RAE.

Teniendo en cuenta dichos elementos teóricos se construyó un *significado institucional de referencia* de la función lineal y cuadrática en el nivel secundario. Este significado de referencia, principalmente, caracteriza las situaciones (tareas, problemas, ejercicios) que se presentan a los estudiantes sobre un determinado tema. En el trabajo se señala la importancia de contar con un significado institucional de referencia, pues con él se puede determinar aquellos significados implementados, pretendidos y evaluados por la institución en cuestión. Así mismo, el significado de referencia guiará el trabajo del profesor del curso, pues las situaciones-problemas escogidos como tareas para los estudiantes son en base a dicho significado como también nos indica Parra (2015).

Resulta de nuestro interés y rescatamos el significado de referencia propuesto por Escudero (2017). Este nos servirá de base para elaborar el nuestro para luego, con este significado, poder analizar la propuesta pedagógica de la institución. En el trabajo de Escudero (2017), la elaboración del significado de referencia se hizo para el nivel secundario a partir de las siguientes fuentes:

- Los textos didácticos usados en la secundaria peruana, dirigidos a los estudiantes como a los profesores.
- Textos usados en cursos de pre-cálculo y cálculo de la educación superior.
- Investigaciones didácticas en las que el tema de estudio fue la función lineal y cuadrática.

La construcción del significado de referencia es fundamental desde la perspectiva del EOS. Bien indican Godino, Rivas et al. (2014) que el significado de referencia es un sistema de prácticas operatorias y discursivas usados para elaborar el significado pretendido en todo proceso de instrucción y que la esencia de este significado de referencia debe ser la caracterización de las situaciones – problemas de los contenidos que se pretenden instruir. Los sistemas de prácticas tienen en cuenta todo aquello que pueda surgir dentro de la actividad matemática, esto es la tipología de objetos matemáticos primarios: Lenguaje, situaciones-problemas, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos.

Es así como Escudero (2017) presenta un significado de referencia sobre función lineal y cuadrática que tiene en cuenta la tipología de objetos matemáticos primarios mencionados. Para nuestra investigación se considerarán elementos relacionados con el significado de referencia de la función lineal.

Es importante indicar que la investigación de Godino et al. (2006) fue de referencia para la construcción de la propuesta de Escudero (2017). En el trabajo de Godino et al. (2006) se presenta un significado de referencia de la función, que se muestra en la Figura 6, a partir de un significado global producto de un estudio histórico y epistemológico. Es así como el significado que vamos a proponer seguirá la siguiente configuración epistémica:

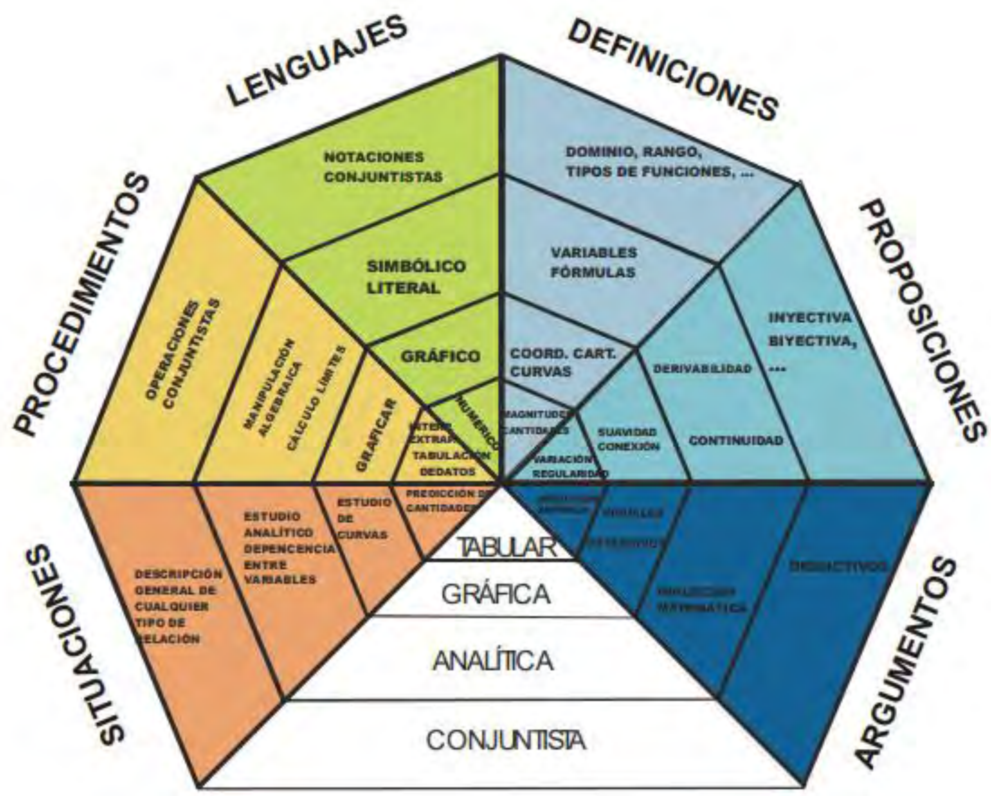


Figura 6. Configuración ontosemiótica de la función

Fuente: Godino et al. (2006, p. 11)

Ya que la función lineal es un objeto de interés en nuestro trabajo, aspectos de este significado guiarán la construcción del nuestro. Pero, además, vamos a tener en cuenta a aquellas tareas relacionadas a los patrones lineales. De este tipo de tareas tenemos la idea inicial de que el reconocimiento de una razón constante puede ser expresado como una relación lineal. Esta relación lineal es expresada formalmente como una función lineal, que en términos del EOS representa un nivel consolidado de algebrización. Aparentemente la noción de linealidad no es considerada desde el EOS, pero dado que el razonamiento algebraico se construye de forma gradual creemos que la función lineal se desarrolla justamente de esa manera. Es decir, el desarrollo de la noción de linealidad se da a partir de aquellas actividades que, luego de muchas etapas, permiten el reconocimiento de una relación lineal como las actividades con patrones lineales.

A continuación, mostramos investigaciones que complementan lo mencionado hasta el momento. En estas se destaca la noción de proporcionalidad como paso previo a la noción de linealidad.

La tesis elaborada por Acosta (2011) presenta un estudio sistémico de la noción de *linealidad* teniendo en cuenta los ejes cognitivo, histórico, epistemológico, sociocultural y didáctico. El estudio histórico que se hace de esta noción ha permitido realizar una resignificación de este concepto, que desde la perspectiva de Acosta (2011) es articuladora de la matemática escolar desde la formación básica hasta la formación superior pues esta noción aparece en sus diferentes niveles de formación académica. Así, en un nivel básico, la proporcionalidad es el primer encuentro con la noción de linealidad. Mientras que, en el nivel superior, la noción de linealidad aparece en el álgebra lineal:

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$
$$F(kx) = kF(x)$$

y en el nivel escolar aparece con la noción de función lineal (afín):

$$f(x) = mx \text{ o } f(x) = mx + b$$

Ambas definiciones, aparentemente son diferentes y no tienen relación entre sí. Pero, en realidad ambas son ejemplos de la noción de linealidad, como señala se señala en el trabajo Acosta (2011). La resignificación, que menciona el autor, de la noción de linealidad permite determinar cierta relación con conceptos previos, estos son los de proporcionalidad directa, razonamiento proporcional, razonamiento multiplicativo y, además, identificar una *ratio mutabilitas constant* o razón de cambio constante como una idea germinal (Cantoral, 2001). Esta noción resulta ser importante, pues es la que permite la construcción de la idea linealidad en sus diversos significados, siendo la proporcionalidad directa el antecedente a la noción de linealidad y, además, la noción de *ratio mutabilitas constant* siempre debe estar presente si se habla de linealidad (Acosta, 2011).

Consideramos que el trabajo de Acosta (2011) es de gran importancia para nuestra investigación. El estudio realizado por contribuirá con la construcción de un significado de referencia más completo para la linealidad, ya que las actividades de proporcionalidad y aquellas en la que se identifique una razón de cambio constante, como en patrones lineales, desarrollan esta noción. De esta forma, podremos tener una propuesta más congruente y articulada sobre el desarrollo de la noción de linealidad en la matemática escolar, como bien indica Acosta (2011).

A continuación, señalamos algunos aportes del estudio realizado por Acosta (2011) sobre la noción de linealidad, los que consideramos fundamentales.

- La proporcionalidad es un antecedente a la noción de la linealidad. Los estudios identifican que esta noción aparece en la historia en tres periodos, primero para resolver situaciones cotidianas de cambios, trueques, reparto, etc., luego la proporción se relaciona con las ecuaciones y la progresión aritmética identificando cantidades que varían en una misma razón (*ratio mutabilitas constant)* y, finalmente, aparece en los libros haciendo uso de expresiones simbólicas, tablas de valores y enunciados verbales.

- Existe una fuerte relación conceptual entre la función lineal de la forma $y = mx$ y la proporcionalidad directa.
- La enseñanza de la razón y proporción debe darse de forma temprana empleando figuras, dibujos y expresiones, de tal forma que se desarrollen patrones de percepción.
- Lo anterior permitirá activar el pensamiento proporcional. Para desarrollar este pensamiento proporcional es necesario hacer uso del razonamiento multiplicativo, como bien señala Singh (citado en Acosta, 2011). Este razonamiento permite al estudiante encontrar cantidades grandes, luego de comparar dos magnitudes, mediante la multiplicación y así no recurrir al conteo por unidades.
- Las situaciones geométricas, como la semejanza, permiten abordar la noción de linealidad en el nivel secundario.
- Se ha encontrado una desarticulación en la enseñanza de los conceptos de proporción y linealidad, lo que lleva a que los estudiantes no reconozcan la relación entre dichos conceptos.

Finalmente, del trabajo de Acosta (2011,) presentamos la Tabla 1 en la que se muestra cómo aparece la noción de linealidad en todos los niveles de la formación escolar:

Tabla 1.
La linealidad en los diferentes niveles de formación escolar

Etapa	**Etapa preescolar**	**Educación primaria**	**Educación Secundaria**

Noción o significado de linealidad	Proporción cualitativa *uso de esquemas que desarrollen patrones de percepción*	Proporción cuantitativa *interés simple*	Razonamiento multiplicativo Proporción cuantitativa *igualdad de razones*	Proporcionalidad y función lineal que pasa por el origen de R^2 mediante progresión aritmética	La recta como un lugar geométrico en un sistema coordenado

Fuente: Elaboración propia

El trabajo realizado por Acosta (2011) será considerado en nuestra investigación, en donde buscamos reconocer cómo la noción de linealidad permite el desarrollo del RAE. Esto se hace bajo el supuesto de que la articulación de todos los significados de la linealidad permitirá el diseño de secuencias didácticas que contribuyan al desarrollo del razonamiento algebraico.

Por otro lado, el trabajo de Godino y Burgos (2017) hace uso del modelo de los niveles de algebrización para analizar la resolución de tareas sobre la proporcionalidad, concepto que ha tomado interés en nuestra investigación. De acuerdo con los autores, la proporcionalidad tiene significados diversos y estos aparecen según el contexto de uso, así como de la práctica algebraica que se desprende de la resolución de sus correspondientes tareas.

Es así como aplicando los niveles de algebrización a las prácticas matemáticas sobre la proporcionalidad se distinguen tres significados dentro de la construcción progresiva del razonamiento proporcional. A continuación, se presenta la Tabla 2 que detalla estos significados y el nivel de algebrización que se le puede asociar a partir de la resolución de un problema:

Un paquete de 500 g de café se vende a 5 euros. ¿Cuál es el precio de un paquete de 400g?

Tabla 2.
Significados de la proporcionalidad

Significado	Nivel de RAE asociado a la solución del

<table>
<tr><td></td><td></td><td>problema</td></tr>
<tr><td>Aritmético</td><td>Se caracteriza por la aplicación de cálculos aritméticos (multiplicación, división).</td><td>Al comprar el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte de un producto. El precio a pagar es, respectivamente, el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte.

En el problema. Si 500 g cuestan 5 euros. Entonces
$$500g \div 5 = 100g$$
cuestan
$$5\ euros \div 5 = 1euro$$
Si 100 g cuestan 1 euro. Entonces
$$100g \times 4 = 400g$$
Cuestan
$$1\ euro \times 4 = 4\ euros$$
Nivel de algebrización 0.</td></tr>
<tr><td>Proto-algebraico</td><td>Tiene por característica el uso de la noción de proporción y la resolución de la ecuación que surge a partir de dicha proporción.</td><td>Al reconocer que es una situación en la que, si la cantidad de café se duplica o triple y como consecuencia, el precio también se duplica o triplica. Se determina una relación de proporción directa entre cantidad – precio.

Entonces:
$$\frac{cantidad}{precio} = \frac{500g}{5\ euros} = \frac{400\ g}{x}$$
Lo cual, al resolver multiplicando en aspa:
$$500 \times x = 400 \times 5$$ $$500x = 2000$$ $$x = 2000 \div 500$$ $$x = 4\ euros$$
Por lo tanto, 400 g cuestan 4 euros.

Esta forma de solución tiene como consecuencia la conocida “regla de tres”. Entendida como una forma práctica de resolver situaciones de proporcionalidad directa para hallar un valor desconocido.

Nivel de algebrización 2</td></tr>
<tr><td>Algebraico-funcional</td><td>Se caracteriza por aplicación de la noción de función lineal y sus propiedades:
$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$ $$f(ka) = kf(a)$$</td><td>Al reconocer que es una situación en la que, si la cantidad de café se duplica o triple y como consecuencia, el precio también se duplica o triplica. Se determina que la relación entre el conjunto de las cantidades (Q) y el conjunto de</td></tr>
</table>

los precios (P),

$$f: Q \rightarrow P$$

es lineal.

Por lo que,

$$f(500g) = 5\ euros$$
$$f(5 \times 100g) = 5\ euros$$
$$5 \times f(100g) = 5\ euros$$
$$f(100g) = 5\ euros \div 5$$
$$f(100g) = 1\ euro$$

Entonces,

$$f(400g) = f(4 \times 100g)$$
$$f(400g) = 4 \times f(100g)$$
$$f(400g) = 4 \times 1\ euro$$
$$f(400g) = 4\ euros$$

Por lo tanto, 400 g cuestan 4 euros.

Nivel de algebrización 3

Fuente: Godino y Burgos (2017, pp. 55)

Del análisis de Godino y Burgos (2017) sobre los niveles de algebrización asociadas a las prácticas sobre la proporcionalidad rescatamos lo siguiente:

- El razonamiento proporcional por sí solo no representa un razonamiento algebraico. Esto es claro en la solución en la que esta noción adopta el significado aritmético, ya que el razonamiento proporcional que se ha desarrollado lleva a que se haga uso de operaciones aritméticas (multiplicación, división), por lo cual, no intervienen objetos y procesos algebraicos.

- Si bien el problema se puede desarrollar con procesos aritméticos, determinamos que este puede ser abordado utilizando otros procedimientos. Esto permite clasificar la noción de proporcionalidad en los tres significados mostrados.

- En el significado proto-algebraico reconocemos que interviene, lo que Burgos y Godino (2020) denominan un cuarto significado informal/cualitativo. Esto es la *comparación multiplicativa* que se dio entre las dos razones. Además, este cuarto significado puede aparecer como una *comparación perceptiva*, por ejemplo, en semejanzas geométricas. Esto responde a lo señalado por Acosta (2011), que señala que se deben desarrollar patrones de percepción en los niveles iniciales de formación básica.

- Adicionalmente, siguiendo a Bolea, Bosch y Gascón; Obando, Vasco y Arboledas (citados en Godino y Burgos 2017), determinamos que el razonamiento proporcional pone en juego la noción de función lineal de dos variables de la forma $y = kx$, donde *k* es la constante de proporcionalidad o razón constante o, en términos de Acosta (2011), *ratio mutabilitas constant.* Aunque esa expresión, representa a una función lineal particular para un problema, el uso de esa constante *k* nos acerca a la noción de parámetro. Esto nos da una aproximación a un cuarto nivel de algebrización caracterizado por el uso de parámetros como bien indican Godino et al. (2015).

Consideramos que los aportes de Godino y Burgos (2017) son importantes para nuestro trabajo. Estos se complementan con los de Acosta (2011), determinando así a la proporcionalidad directa como antecedente de la noción de linealidad y, además, que los diversos significados de la proporcionalidad, que intervienen en la práctica matemática, determinan diferentes niveles de algebrización.

El trabajo de Burgos y Godino (2020), extensión del realizado por ellos en años anteriores (Godino y Burgos, 2017), presenta un análisis más elaborado y completo de los diversos significados de la *proporcionalidad* haciendo uso de las herramientas del EOS, como lo son las prácticas operatorias y discursivas y los niveles de razonamiento algebraico. En la investigación se determina la importancia de reconocer la articulación de los diversos significados de la noción de proporcionalidad, teniendo en cuenta los diferentes grados de generalidad y formalización que de dichas prácticas a ese concepto pueden surgir. Según los autores, al tener en cuenta ello se podrá realizar una mejor planificación en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los niveles primaria y secundaria, ya que la proporcionalidad es transversal a todos los grados y a otros cursos.

La investigación de Burgos y Godino (2020) toma los aportes de otras investigaciones en las que el interés ha sido la noción de proporcionalidad. A continuación, presentamos los aportes que los autores destacan en ellas:

- Desde un punto de vista instruccional es recomendable iniciar la enseñanza de la razón y proporción de forma informal y cualitativa, en situaciones aditivas, para ir hacia un conocimiento cuantitativo, en situaciones multiplicativas.
- La proporcionalidad es estudiada desde tres puntos de vista: aritmético (noción de razón y proporción), algebraico (noción de función) y geométrico (noción de semejanza). Identificando una prevalencia del significado aritmético en las propuestas curriculares.
- Comin (2000) estudió a los conceptos relacionados a la proporcionalidad, estos son: magnitudes, cantidades, razones y proporciones. Siendo la función lineal una abstracción y resumen de dichos conceptos, ya que este concepto se presenta como la relación de proporcionalidad entre 2 magnitudes.
- Godino et al. (2017) señalan que los diversos significados de la proporcionalidad se pueden clasificar de acuerdo con el contexto de uso y el nivel de algebrización de sus prácticas.

Si bien los resultados de los estudios realizados permiten tener una visión más general de la proporcionalidad y no limitar su enseñanza a un significado netamente aritmético, Burgos y Godino (2020) consideran que aún se puede ahondar con mayor profundidad en esta noción. Por ello extienden dichos resultados y presentan, en términos del EOS, un significado institucional de la proporcionalidad, atendiendo a la noción de significado global propuesto por Wilhelmi, Godino y Lacasta (citados en Burgos y Godino, 2020). Al tener este significado se podrá lograr articular de mejor manera los significados parciales y lo que a su vez podría emplearse para orientar de mejor manera las propuestas educativas.

A continuación, presentamos los aspectos más importantes de la propuesta de Burgos y Godino (2020) de los diversos significados de la proporcionalidad y el nivel de algebrización que puede asociarse a la práctica matemática al resolver situaciones asociadas a dichos significados.

- La noción de proporcionalidad tiene diferentes significados: intuitivo – cualitativo, aritmético, propiamente como proporcionalidad (razón unitaria, proporciones, ecuación proporcional y funcional (función lineal).
- Estos significados aparecen de forma gradual en la enseñanza escolar, en el orden señalado, y en un nivel superior es consolidado en el uso de aplicaciones lineales (espacios vectoriales).
- Cada significado de la proporcionalidad tiene asociado un determinado nivel de razonamiento algebraico. Siendo así que los significados intuitivo y aritmético no genera el uso de objetos y procesos algebraicos, por lo tanto, hay ausencia de algebrización (nivel 0).
- El significado proporcional, propiamente dicho, permite que la actividad algebraica sea de un nivel 1 o 2, dependiendo de qué argumentos y conceptos se utilicen en las tareas propuestas.
- El significado funcional de la proporcionalidad representa un nivel consolidad del razonamiento algebraico, principalmente porque en este se debe hacer uso de las propiedades de la función lineal al resolver las situaciones propuestas.
- Se destaca el uso de las tablas de proporcionalidad para transitar desde el significado proporcional al funcional. Por lo tanto, las tareas en las que se demande hacer uso de estas tablas son importantes, como las de patrones lineales.
- Las operaciones con las funciones lineales y el uso de parámetros

representan un nivel 4 o 5 de algebrización, principalmente por el uso y manipulación de expresiones matemáticas más formales.

La propuesta de Burgos y Godino (2020) sugiere la necesidad de construir significados previos a la linealidad que permitan su formalización en la función lineal. Los significados de proporcionalidad que los autores proponen parece responder a lo dicho por Acosta (2011), encontramos similitudes en sus estudios: la necesidad de tener un significado intuitivo que desarrolle patrones de percepción, la proporcionalidad, tareas que permitan reconocer patrones constantes con formalización en $y = kx$ y como punto de consolidación la función lineal . Ambas propuestas nos permitirán construir un significado de referencia para la linealidad más completo para la formación básica. Así también, consideramos que nos brinda información valiosa para hacer una adecuación de los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014).

Como mencionamos anteriormente, las tareas con patrones y regularidades lineales son un buen escenario para el desarrollo del razonamiento algebraico ya que generan la necesidad de obtener expresiones algebraicas que podrían relacionarse con funciones lineales y afines A esta idea inicial le sumamos la noción de proporcionalidad que, según Acosta (2011) y Burgos y Gorino (2020), desarrollan la noción de función lineal. Estos referentes serán de gran utilidad para lograr lo que nos proponemos en el siguiente apartado.

1.2 Justificación

Esta investigación tiene sustento en la postura según la cual el álgebra es una herramienta generalizadora. Las recientes investigaciones muestran que esta visión desde la cual el álgebra tiene como una de sus finalidades encontrar regularidades y buscar generalizaciones debería adoptarse para toda la educación básica. Así se señala en *Los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* del NCTM (como se citó en Godino et al., 2004): “se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido (…) con la particularidad de que el bloque del Álgebra se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde los primeros años de escolarización" (p.4). Además, bien mencionan Godino et al. (2004) de la importancia de desarrollar el razonamiento algebraico desde las etapas escolares iniciales.

Con lo mencionado antes reconocemos que el estudio del álgebra desde el nivel primario es importante, así como las consecuencias que de ella se desprende para su debida enseñanza y el correcto aprendizaje por parte de los estudiantes. El desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes debe ser progresivo y esto debe ser un interés común para los profesores y las instituciones educativas.

> la formación del maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos, descubriendo su función central en la actividad matemática. Sólo así serán los maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. (Godino et al., 2014, p.4)

Podemos, ver así, un interés por parte de investigadores-profesores por cómo se da la implementación y desarrollo de este Razonamiento Algebraico Elemental en la educación básica regular desde el nivel primario y sus consecuencias para el nivel secundario. Además, de las implicaciones en niveles de formación superior, particularmente sobre la noción de linealidad, como lo señalan las investigaciones presentadas anteriormente (Acosta, 2011; Burgos; Godino, 2020) que muestran que esta noción se desarrolla, de forma progresiva, desde el nivel primario.

Las investigaciones recientes (Gaita; Wilhelmi, 2019; Sánchez, 2016; Acosta, 2011; Burgos; Godino, 2020) sobre algunos objetos y procesos algebraicos, como actividades con patrones, secuencias gráficas y numéricas, proporción, proporcionalidad directa nos han permitido determinar una estrecha relación entre dichas nociones, siendo así que su correcta articulación permite un mejor entendimiento de la linealidad. Dado que estos objetos son enseñados a lo largo de la formación primaria y tiene su continuación en el nivel secundario, hasta incluso la universidad (Burgos y Godino, 2020) determinamos la importancia de una correcta planificación curricular que permita al estudiante enlazar los diversos significados de la linealidad. Además de que dichos conceptos matemáticos son usados en otras áreas, como la Física.

Por otro lado, el desarrollo del razonamiento algebraico y el desarrollo de la noción de linealidad desde los grados iniciales no es ajeno a nuestro contexto. Las investigaciones revisadas así lo demuestran, siendo que estas nociones se abordan en la educación básica, tal como se señala en el Currículo Nacional (MINEDU, 2016). En este se establecen aquellas competencias, capacidades y estándares de aprendizaje que todo estudiante en la Educación Básica Regular debe lograr a lo largo de su formación. Esto se presenta en ocho niveles, mostrando así los logros esperados al finalizar cada uno de los ciclos ahí propuestos. Específicamente, la competencia *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio,* propone que los estudiantes hagan uso de expresiones algebraicas, que expresen relaciones algebraicas, que puedan encontrar expresiones generales y argumenten sobre relaciones de cambio y equivalencia. Dentro de esta competencia reconocemos procesos y objetos algebraicos tenidos en cuenta dentro de la actividad algebraica propuestos por el EOS, parece ser que nuestros estudiantes deben desarrollar de forma correcta estos procesos para ser competentes en lo que el currículo refiere.

En esta competencia, en el nivel de logro 6, que corresponde a los logros esperados al término del VI ciclo de estudio (primer y segundo grado de secundaria) en el que el estudiante trabaja con los objetos función lineal y función afín y su relación con otros conceptos como lo son proporción directa, la variable como una razón de cambio, etc. Luego, en el nivel de logro 7, se espera que con lo aprendido en el nivel previo se pueda hacer un contraste entre la función lineal de otras, como lo es la función cuadrática. Es decir, es importante que el estudiante consolide esta noción en el nivel 6, pues le será de utilidad en un nivel posterior. Por lo cual creemos que las propuestas curriculares deben tener una planificación que permita que los estudiantes tengan consolidada la noción de función lineal en el primer y segundo grado de secundaria.

Por otro lado, la red de colegios Innova Schools es un grupo de colegios particulares que propone una metodología particular. Tiene su soporte en el socio-constructivismo y a pesar de ser regida por el Ministerio de Educación del Perú, tiene un propio proyecto educativo. En particular en el área de matemática se centra en la resolución de problemas, además de tener sus bases en la matemática realista. Su Diseño Curricular presenta una organización fenomenológica de los contenidos matemáticos en cuatro organizadores. Principalmente en el organizador *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio* se refiere a:

> La identificación, representación, análisis y modelación del cambio en los distintos objetos y sucesos del mundo. Asimismo, al establecimiento de las relaciones en los distintos fenómenos y eventos y su generalización. Pueden ser representadas de muy diversas maneras: verbalmente, de manera numérica, simbólica o gráficamente. Las relaciones matemáticas pueden ser establecidas echando mano a nociones como las funciones, ecuaciones o desigualdades. (Innova Schools, 2019, pp. 10-11)

Determinamos, al igual que en el documento anterior, la generalización es un proceso fundamental para esta propuesta. Esto va acorde con la noción del álgebra como herramienta de modelización matemática (Godino, Aké et al. (2014). Bajo esta noción, no se trata solo de "enseñar el curso de álgebra", si no, implica desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes de forma gradual.

En la propuesta curricular de los colegios Innova Schools el avance académico de los estudiantes se mide por estándares. Por ejemplo, en el 7mo grado se tiene al estándar MAT 7.24, en este se "resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser modeladas mediante relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa) o las funciones lineales y afines, usando tablas, el plano cartesiano y expresiones simbólicas" (Diseño Curricular del Área de Matemática, 2019, p. 19). Cada estándar de cada grado tiene en cuenta aspectos el del año anterior, mostrando así una gradualidad en los conceptos que en estos se detallan.

Es en el 7mo grado en el que se hace explícita a las funciones lineales y afines.

De lo anterior se concluye que es pertinente plantear una investigación relacionada con el RAE en la educación peruana. En particular, será relevante analizar la popuesta educativa de la institución Innova Schools, bajo los niveles de algebrización propuestos por el Enfoque Ontosemiótico, y a partir de este análisis determinar si la propuesta contribuye con el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, centrando la atención en la noción de linealidad.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

De acuerdo con la problemática de investigación descrita y los antecedentes presentados, se plantea la siguiente pregunta:

¿En qué medida la propuesta de los colegios Innova Schools propicia el desarrollo de la noción de linealidad en términos del Razonamiento Algebraico Elemental?

De esta pregunta se desprenden los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar en qué medida la propuesta de los colegios Innova Schools contribuye a desarrollar el Razonamiento Algebraico Elemental, en particular, a través de la construcción de los diferentes significados asociados a la noción de linealidad.

Objetivos Específicos

Para lograr este objetivo general, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Proponer un significado de referencia de la noción de linealidad considerando la institución secundaria peruana.
- Adaptar los niveles de algebrización del Razonamiento Algebraico Elemental a los significados asociados a la linealidad, desde el nivel primario al secundario.
- Identificar el significado pretendido por la institución Innova Schools de la linealidad a través de las situaciones – problemas en términos de los niveles de algebrización del Razonamiento Algebraico Elemental.

- Valorar la propuesta de la institución en términos del desarrollo del RAE sobre la linealidad, desde el nivel primario al secundario.

1.4 Metodología de investigación

En esta investigación consideramos oportuno hacer un análisis a la propuesta educativa de los colegios Innova Schools en términos de su contribución al desarrollo del RAE, particularmente en los diferentes significados de la linealidad. En este sentido, reconocer el significado institucional pretendido sobre dichos objetos algebraicos es el primer paso al analizar la propuesta de la institución, los libros que se proponen, fichas, etc. Esto debe hacerse a partir de un significado de referencia que será producto de este trabajo, dicho significado se caracterizará por tener en cuenta las situaciones – problemas que permiten el desarrollo de la noción de linealidad.

Siendo el análisis de documentos un papel importante para nuestros fines es que haremos uso de lo hecho por Castro et al. (2017). En su investigación se analizó un conjunto de libros en base a los niveles de algebrización, catalogando los ejercicios propuestos en ellos en niveles 0, 1, 2 y 3. A diferencia de Castro et al. (2017) nosotros nos centraremos en analizar aquellas situaciones-problemas que contribuyan a la construcción de los diferentes significados de la linealidad y al desarrollo del RAE.

Por ello, primero propondremos un significado de referencia para dicha noción y con este analizar la propuesta de la institución en el nivel primario y secundario. Con ese fin se revisarán investigaciones realizadas en el Enfoque Ontosemiótico que hayan tenido una finalidad similar, como como lo es la tesis de Escudero (2017), así como otras investigaciones en las que se haya estudiado los diferentes significados de la linealidad como el trabajo de Acosta (2011) y Burgos y Godino (2020).

En segundo lugar, adaptaremos los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014) a las tareas relacionadas con la linealidad que se identificarán en la etapa anterior. Esta adaptación debe permitirnos reconocer rasgos algebraicos en aquellas tareas que estén relacionadas a la noción de linealidad. Finalmente, analizaremos la propuesta de la Institución Innova Schools. Es así como nuestra investigación contempla las siguientes etapas.

Etapa 1: Determinar un significado de referencia para la noción de linealidad.

Etapa 2: Adaptar los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014) y Godino et al. (2015) para analizar la actividad matemática que se desprende de resolver situaciones que desarrollen la noción de linealidad.

Etapa 3: Analizar y determinar el significado pretendido de la institución Innova Schools de la linealidad a través de las sesiones propuestas, el material usado y los libros de texto.

Etapa 4: Analizar los resultados de la etapa 3 en términos del desarrollo y evolución del RAE.

En el siguiente capítulo se desarrolla la Etapa 1 de nuestro trabajo, es así que se propone un significado de referencia para la noción de linealidad en la etapa escolar.

CAPÍTULO 2: PROPUESTA DE SIGNIFICADO DE REFERENCIA PARA LA LINEALIDAD EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

En este capítulo construiremos un significado de referencia para la noción de linealidad, teniendo como base algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Por ello, consideramos importante presentar los elementos teóricos y metodológicos que han sido considerados con ese fin.

2.1 Elementos teóricos considerados en la investigación

En esta investigación adoptamos la definición dada por Godino et al. (2007) sobre práctica matemática, la cual se describe en los siguientes términos: ”toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p.4). Bajo esta definición, el significado de un objeto matemático queda determinado por el sistema de prácticas asociadas a él.

Desde el enfoque ontosemiótico, el significado de referencia es un sistema de prácticas operatorias y discursivas usados para elaborar el significado pretendido en todo proceso de instrucción. Para ello es necesario caracterizar las situaciones – problemas de los contenidos que se pretenden instruir (Godino, Rivas et al., 2014). Los sistemas de prácticas tienen en cuenta todo aquello que pueda surgir dentro de la actividad matemática, a esto se le conoce como configuración ontosemiótica. Los llamados objetos emergentes de las prácticas matemáticas son los siguientes:

- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra o intra-matemáticas, ejemplos, ejercicios, tareas, …)
- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, …) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, simbólico…) para referirse al objeto matemático.

- *Conceptos* (que son introducidos mediante definiciones o descripciones)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos)
- *Procedimientos* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, …)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar un procedimiento o proposición)

Esta configuración ontosemiótica permite analizar la práctica matemática asociada a un objeto matemático en particular, en nuestro caso a la noción de linealidad. Las *situaciones – problemas* asociados a estos objetos cumplen un papel fundamental, ya que estos son la razón de ser de las prácticas.

En esta investigación haremos uso de la noción de configuración ontosemiótica para determinar un significado de referencia asociado a la noción de linealidad para las instituciones de la educación peruana. Siendo así que vamos a proponer *situaciones – problemas* asociadas a esta noción, qué *lenguaje* se emplea, qué *conceptos* se relacionan, qué *proposiciones* y *argumentos* se usan y cuáles son los *procedimientos* que intervienen.

2.2 Significados de referencia de la noción de linealidad

El significado de referencia para la linealidad debe considerar los 6 objetos antes mencionados: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Es decir, el significado que proponemos caracterizará cada uno de dichos objetos para la linealidad, prestando mayor atención a las situaciones – problemas que se deben abordar. Para la construcción de este significado nos apoyaremos en las investigaciones:

- El trabajo de Acosta (2011), en el que se establece la relación entre la proporcionalidad y la linealidad. Siendo importante, para que se establezca dicha relación, el desarrollo de patrones de percepción desde los primeros grados de formación.
- El trabajo de Burgos y Godino (2020), que presentan los diversos significados de la proporcionalidad.

- El trabajo de Escudero (2017), que propone un significado de referencia para la función lineal y afín.
- El trabajo de Sánchez (2016), donde se señala que las tareas con patrones lineales (gráficos y numéricos) pueden formalizarse en funciones lineales y afines. Estas tareas están relacionadas con actividades en las que se deban reconocer una razón constante de cambio (ratio mutabilis constant), como señala Acosta (2011).

El significado de referencia que construiremos no se limitará únicamente a la función lineal y afín, ya que, como se señaló en los antecedentes. la noción de linealidad es construida a lo largo de la etapa escolar. Es así como el significado de referencia de la linealidad que proponemos tendrá en cuenta las nociones de razón, proporción, proporcionalidad directa y patrones lineales, que permiten el reconocimiento de razones constantes de cambio que ayudan en el desarrollo de la linealidad, como bien señala Acosta (2011).

La revisión de los antecedentes nos ha permitido determinar que la noción de linealidad se construye mediante la noción de proporcionalidad y en actividades en las que haya un aumento o razón constante de cambio entre dos magnitudes, como con patrones lineales (gráficos o numéricos).

Del trabajo de Burgos y Godino (2020) existen contextos distintos que permiten que los estudiantes pongan en juego los distintos significados de la proporcionalidad. A continuación, una clasificación de estos significados de acuerdo al contexto en que aparecen:

- Contexto de razonamiento intuitivo – cualitativo
- Contexto de razonamiento numérico
- Contexto de razonamiento proporcional
- Contexto de razonamiento funcional

En nuestra propuesta veremos que estos contextos propician que los estudiantes avancen en el desarrollo de un razonamiento proporcional. Es decir, cada uno de estos contextos permite que el estudiante ponga en juego distintos elementos primarios, en términos del EOS, o significados de la noción de proporcionalidad que luego deberán ser consolidados como una relación funcional, en este caso la función lineal.

En nuestra propuesta será fundamental considerar los diferentes significados de la proporcionalidad, ya que estos se asocian a un avance en la noción de linealidad (Acosta, 2011). Además, estos significados nos permitirán articular a la proporcionalidad y la linealidad de una manera que se deje atrás la ruptura de estos significados. A esto le añadiremos aquellas situaciones – problemas que permitan reconocer razones constantes de cambio; es decir, aquellas situaciones que pueden ser expresadas como patrones lineales.

Para cada una de estas situaciones se elaborará una configuración epistémica, en donde se identificarán lenguajes, procedimientos, proposiciones, conceptos y los argumentos que intervienen en dicha práctica matemática. A continuación, para cada significado de la linealidad se dará una breve descripción y se ejemplificará con situaciones.

2.2.1. Significado informal de la linealidad

Este significado no tiene rigurosidad matemática y debe ser propio de los primeros grados del nivel primario de la formación básica (1er grado en el Currículo Nacional). Debe ser la primera aproximación a la proporcionalidad y linealidad, por lo que se hace uso del sentido intuitivo, al apoyarse en las experiencias de los estudiantes, y la comparación perceptiva, al observar y manipular figuras geométricas al resolver situaciones. La actividad matemática asociada a este significado no debe contemplar aún la medición o el uso de cantidades numéricas de magnitudes en los problemas, por lo tanto, las justificaciones que se usen son informales.

- **Situaciones - problemas**

Las tareas, problemas o ejercicios presentados en este significado tratan sobre realizar comparaciones de forma y lugar entre figuras geométricas y la comparación de magnitudes sin aún usar cantidades. Es decir, si una figura es más o menos grande que otra y describir cómo cambia una magnitud si la otra lo hace. A continuación, presentamos algunos ejemplos de estas situaciones:

Ejemplo 1: Al comparar figuras (patrones de percepción)

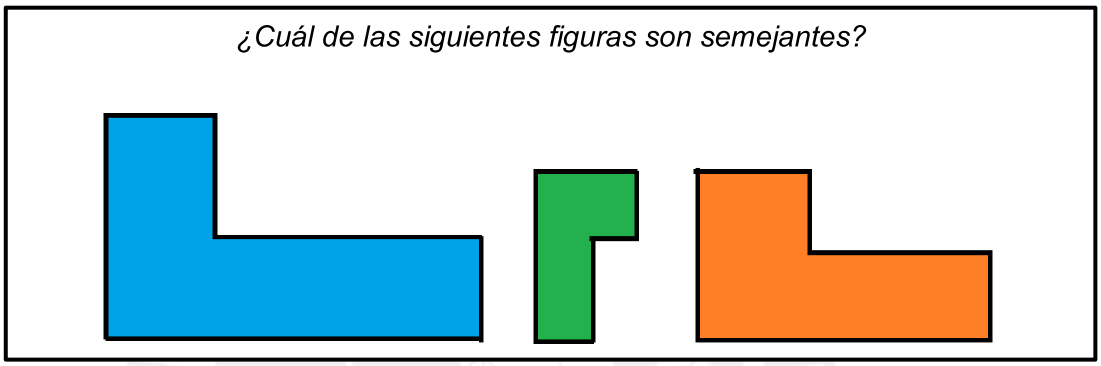


Figura 7. Ejemplo 1

Nota. Adaptado de Burgos y Godino (2020, p.7)

Ejemplo 2: Al comparar magnitudes de forma cualitativa

> *Si Juan mezcla menos concentrado de limón con más azúcar que la que prepara su amiga María, su limonada tendrá un gusto: (a) Más dulce; (b) Menos dulce; (c) Igual de dulce.*

Adaptado de: Burgos y Godino (2020, p.7)

Ejemplo 3

> *En una fiesta infantil se alistaron una cantidad de sillas para recibir a los invitados. Si a la fiesta asisten más invitados de los pensados, necesitaremos: a) menos sillas b) más sillas c) la misma cantidad de sillas*

Fuente: Elaboración propia

- **Lenguajes**

En este tipo de situaciones, como se indicó antes, no se hace uso de algún concepto formal. Por lo que no determinamos un lenguaje particular en el que se presenta al objeto matemático. En todo caso, el lenguaje usado debe ser familiar al estudiante. En la Tabla 3 se muestran dichos lenguajes.

Tabla 3.

Lenguajes en el significado informal

Tipo de lenguaje	Ejemplos
Gráfico	Aparecen figuras geométricas simples y compuestas, pero conocidas por los estudiantes, sin tener en cuenta las medidas de sus dimensiones.
Oral, escrita	Comparación, figuras semejantes, mayor qué, menor qué, más qué, menos qué, a la derecha de, a la izquierda de, arriba de, debajo de.

Fuente: Elaboración propia

- **Conceptos**

En estas situaciones no se hace uso de conceptos formales por parte de los estudiantes. En su lugar, se tienen las nociones, ideas, intuiciones debido a la experiencia del estudiante.

- **Proposiciones - Propiedades**

Asociadas a las nociones propias del estudiante a partir de las comparaciones que realizan:

"A más …, más…", "A más invitados, más sillas", "A menos …, menos…", "A menos invitados, menos sillas"

- **Procedimientos**

En este significado no hay algoritmos de cálculo al resolver las situaciones. En su lugar se tiene la manipulación de las figuras, ya sea mental o con el uso de material concreto, para encontrar similitudes y diferencias entre las figuras geométricas mostradas en la situación. No se espera que se comparen las dimensiones de la figura, solo la forma.

Por otro lado, en situaciones donde se pida comparar magnitudes se espera que el estudiante reconozca cómo se modifica una magnitud si la otra lo hace; es decir, si una magnitud aumenta entonces la otra también lo debe hacer.

- **Argumentos**

Las figuras son semejantes o parecidas porque tienen la misma forma.

Es la misma figura, pero más pequeña o más grande.

Si el jugo tiene más concentrado de limón, se necesitará más azúcar.

Si el jugo tiene menos concentrado de limón, se necesitará menos azúcar.

2.2.2. Significado aritmético de la linealidad

Este significado se caracteriza por el uso de operaciones aritméticas (multiplicación y división) al resolver situaciones en los que se establezcan las primeras relaciones de proporción. En este significado se tiene un primer contacto con la noción de razón entre dos magnitudes, aunque este concepto no es presentado como tal. Este significado representa un paso previo al significado proporcional, es así que este significado es usado en los primeros grados de la formación básica.

- **Situaciones – problemas**

Las situaciones se caracterizan porque se pide hallar un valor desconocido a partir de comparar dos magnitudes, que se halla mediante una multiplicación o división. Muchas veces es para hallar una razón unitaria o a partir de esta hallar otro valor, a veces pueden combinarse ambas tareas. En el enunciado de la tarea no se hace uso de términos matemáticos formales, estos están implícitos en la actividad.

También se presentan situaciones en las que se pida establecer semejanza de figuras en las que se debe atender a sus dimensiones.

Ejemplo 4.

Un paquete de café de 500 g tiene un valor de S/5. ¿Cuál es el precio de un paquete de 100 g?

Ejemplo 5.

Este ejemplo es una variación del ejemplo 2. Ya no es una situación cualitativa, pues ahora se introducen cantidades para las magnitudes.

Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de limón. Mientras que María usa 5 cucharadas de azúcar y 20 de concentrado de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce?

Fuente: Burgos y Godino (2020, p.7)

En este tipo de situaciones se pueden hacer uso de los procedimientos aritméticos de multiplicación y división para resolverlos. La división ayuda a determinar que en ambos casos se usa el cuádruple de cucharadas de concentrado de limón que de azúcar. Esto basta para justificar que en ambos casos el sabor de la limonada es el mismo, sin necesidad de decir que hay una misma razón entre el azúcar y concentrado de limón

Otro tipo de situaciones puede ser en semejanza de figuras en las que se pida trabajar con las dimensiones de las figuras.

Ejemplo 6: En semejanza de figuras

Observa las siguientes figuras y responde: ¿Cuán grande es la figura A respecto a la figura B? ¿Ambas son semejantes? ¿Por qué?

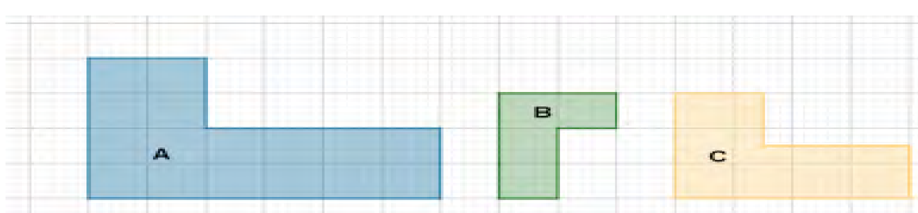


Figura 8: Ejemplo 6

Fuente: Adaptado de Burgos y Godino (2020, p.7)

- **Lenguajes**

En este tipo de situaciones distinguimos los siguientes términos, los que se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4.

Lenguajes en el significado aritmético

Tipo de lenguaje	Ejemplos
Gráfico	Aparecen figuras geométricas simples y compuestas, pero conocidas por los estudiantes. Estas figuras muestran la medida de las dimensiones de las figuras.
Verbal	Misma proporción, misma razón, figuras semejantes, valor faltante.
Aritmético/ Numérico	Con 3 cucharadas de azúcar necesito 12 cucharadas de concentrado de limón. 3 es a 4 como 5 es a 20

Fuente: Elaboración propia

- **Conceptos**

En este significado de la linealidad ya se usan algunos conceptos matemáticos. Estos siguen apareciendo en los siguientes significados, no dejan de ser usados. Estos se muestran en la Tabla 5:

Tabla 5.

Conceptos en el significado aritmético

Término	Concepto
Magnitud	Toda propiedad susceptible de ser cuantificada. Por ejemplo: La longitud, el tiempo, la masa.

Cantidad	El resultado de la medición de una magnitud. Es un par ordenado (medida, unidad), donde la medida es un número real y la unidad se determina por el sistema de unidades usado. Por ejemplo: 3 m, 2 s, 4 kg
Razón	Son las diferentes relaciones que se pueden establecer entre distintos valores de una misma magnitud (internas) o de diferentes magnitudes (externas). Ejemplo: a es a c, b es a d
Figuras semejantes	Dos figuras son semejantes cuando estas se parecen en forma, pero además las dimensiones de sus segmentos son proporcionales.

Fuente: Elaboración propia

- **Proposiciones - propiedades**

Las proposiciones que se utilizan en este tipo de situaciones están relacionadas a la idea de la razón. Al reconocer que dos magnitudes mantienen una misma razón puede decirse que:

3 cucharadas de cucharadas de azúcar es a 12 cucharadas de concentrado de limón como 5 cucharadas de azúcar es a 20 cucharadas de concentrado de limón.

En situaciones de semejanza de figuras:

Las figuras son semejantes porque tienen la misma forma y además las dimensiones de sus lados se duplican, se triplican, es la mitad, etc. de la otra.

- **Procedimientos**

Mediante operaciones aritméticas.

Se utilizan las operaciones de división y multiplicación para identificar una misma relación entre las cantidades dadas. Por ejemplo:

Al dividir la cantidad de cucharadas de concentrado de limón con la cantidad de cucharadas de azúcar:

$$12 \div 3$$

Se determina una razón entre estas magnitudes. La cual es la misma al realizar la división de las otras cantidades:

$$20 \div 5$$

Por otro lado, al resolver situaciones de semejanza de figuras se utiliza la medición de las dimensiones de las figuras, a partir de ello se establecen relaciones y se determina si las figuras son semejantes o no. Esto se muestra en la Figura 9:

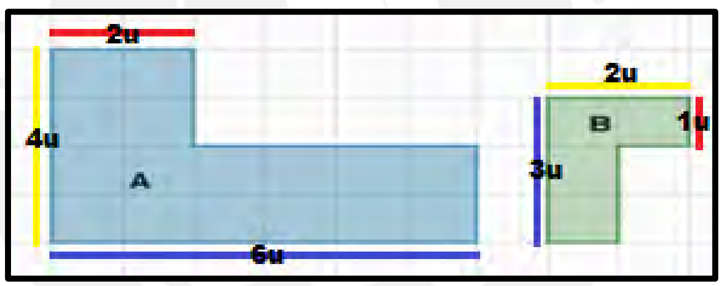


Figura 9. Medidas del ejemplo 6

Fuente: Elaboración propia

De esta manera se establece que la figura A es el doble de la figura B.

- **Argumentos**

Hay una misma razón entre las magnitudes, si una magnitud aumenta entonces la otra también lo hace, pero en la misma razón. O, si una magnitud disminuye la otra también lo hace, pero en la misma razón.

Las figuras son semejantes porque tienen la misma forma y las dimensiones de una guardan una misma razón con la otra, son el doble, el triple, la mitad, etc.

2.2.3. Significado proporcional de la linealidad

En este significado de la linealidad ya se usan conceptos formales como razón unitaria, proporciones como igualdad de razones, proporción directa, ecuación proporcional, magnitudes directamente proporcionales; así como las propiedades que surgen de la igualdad de dos razones como el producto en aspa. Este significado debe aparecer en los grados 3ro, 4to, 5to y 6to de primaria de la formación básica.

- **Situaciones - problemas**

Las situaciones de este significado pueden ser abordados usando diferentes conceptos de la proporcionalidad. Por lo que las situaciones que se presenten en este significado deben tratar sobre establecer relaciones de proporcionalidad directa entre dos magnitudes, el uso de la proporcionalidad como la igualdad entre dos magnitudes y la razón unitaria. Presentamos una situación que permite el uso de los diversos conceptos asociados a la proporcionalidad.

Ejemplo 7

Se va a preparar una torta para un cumpleaños usando la siguiente receta: *Torta de Chocolate (4 personas)* • *24 galletas* • *6 huevos* • *100 g de mantequilla* • *300 g de chocolate* *a) ¿Cuántas galletas son necesarias por persona? ¿Qué cantidad de galletas se necesita para 5 personas? ¿Podrías determinar la cantidad de galletas para un número determinado de personas?* *b) ¿Qué cantidad de huevos se necesita para 6 personas?*

Fuente: Adaptado de Burgos y Godino (2020, p.8).

Una situación como la presentada permite el uso de las diferentes nociones matemáticas asociadas a la proporcionalidad y con esto distintos procedimientos (algoritmos) de solución:

Reducción a la unidad (razón unitaria)

Las tareas deben permitir el uso de la reducción a la unidad para determinar una razón unitaria entre dos magnitudes y, a partir de esta, encontrar valores desconocidos de alguna de las magnitudes. Esto marca una diferencia entre este significado y el aritmético, en el que determinar esta razón unitaria no tiene un uso luego de hallarlo.

Proporciones

Las situaciones dentro de este significado también deben permitir el uso de proporciones, la igualdad de razones, tablas de proporcionalidad y fracciones equivalentes.

Ecuación proporcional

El uso de las proporciones, como igualdad de dos razones, permite el uso de las incógnitas cuando se quiere hallar un valor faltante como es el caso de la situación presentada. Este tipo de actividad permite el planteamiento de una ecuación de primer grado y el uso de la igualdad como equivalencia de dos expresiones.

Tablas de proporcionalidad y secuencias proporcionales

El uso de las tablas, de acuerdo con Burgos y Godino (2020), son un puente entre el significado proporcional y significado funcional de la linealidad. El uso de estas tablas aparece en situaciones en las que se reconocen secuencias numéricas proporcionales.

En el significado funcional veremos que además estas tablas proporcionales permiten el reconocer propiedades de la función lineal que le dan ese carácter *lineal*

- **Lenguajes**

En este tipo de situaciones distinguimos los siguientes términos y representaciones que se muestran en la Tabla 6:

Tabla 6.

Lenguajes en el significado proporcional

<table>
<tr><th>Tipo de lenguaje</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Razón unitaria, razón constante de cambio, proporcionalidad, proporción, proporción directa, igualdad de razones, constante de proporcionalidad, fracciones equivalentes, ecuación proporcional, incógnitas.</td></tr>
<tr><td>Aritmético/ Numérico</td><td>Uso de proporciones
$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$</td></tr>
<tr><td>Simbólico literal</td><td>De la proporción
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow d = \frac{bc}{a}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow x = \frac{bc}{a}$$</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td><table>
<tr><td>Número</td><td>a</td><td>c</td><td>e</td><td>g</td><td>i</td><td>…</td><td>axk</td></tr>
<tr><td>Posición</td><td>b</td><td>d</td><td>f</td><td>h</td><td>j</td><td>…</td><td>bxk</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

- **Conceptos**

Al igual que en la situación anterior, en este tipo de situaciones los conceptos matemáticos son presentados de forma más formal. Estos siguen apareciendo en los siguientes significados, no dejan de ser usados. Se muestran estos conceptos en la Tabla 7:

Tabla 7.

Conceptos en el significado proporcional

Término	Concepto
Fracciones equivalentes	Como un concepto previo, las fracciones equivalentes son diferentes grupos de fracciones que se hallan mediante la ampliación o reducción por multiplicación o división de una determinada fracción. $$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$$
Magnitud	Toda propiedad susceptible de ser cuantificada. Por ejemplo: La longitud, el tiempo, la masa.
Cantidad	El resultado de la medición de una magnitud. Es un par ordenado (medida, unidad), donde la medida es un número real y la unidad se determina por el sistema de unidades usado. Por ejemplo: 3 m, 2 s, 4 kg
Razón	Son las diferentes relaciones que se pueden establecer entre distintos valores de una misma magnitud (internas) o de diferentes magnitudes (externas). Ejemplo: a es a c, b es a d
Proporción	Es una relación de igualdad de dos razones. Ejemplo: la comparación de las razones a es a c como b es a d se escribe como la igualdad de las fracciones: $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$
Magnitudes directamente proporcionales	Si dos magnitudes A y B son directamente proporcionales, se cumple que dos pares de valores de dichas magnitudes determinan fracciones equivalentes: $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Fuente: Elaboración propia

- **Proposiciones**

Las proposiciones que se utilizan en este tipo de situaciones están relacionadas a la noción de proporción y razón. Estas proposiciones pueden ser:

Si dos fracciones son equivalentes, el producto cruzado de estas tiene el mismo resultado:

$$\text{Si } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ entonces } a \times d = c \times b$$

Las razones entre dos magnitudes proporcionales son iguales

Si para 4 personas se necesitan 24 galletas, entonces para 6 personas se necesitan x galletas. Entonces:

$$\frac{4}{24} = \frac{6}{x}$$

- **Procedimientos**

Reducción a la unidad

El procedimiento usado consta de, luego de establecer una relación entre dos magnitudes, hallar cómo cambia una magnitud por una unidad de la otra. Por ejemplo:

Si para 4 personas se necesitan 24 galletas. Entonces

$$\text{Para } 4 \div 4 = 1\ persona$$

Se necesitan

$$24 \div 4 = 6\ galletas$$

Es decir, 6 galletas por 1 persona.

Proporcionalidad

El procedimiento consta de establecer igualdades entre las razones encontradas para dos magnitudes y luego, mediante el producto en aspa o las fracciones equivalentes, hallar el valor faltante. Por ejemplo:

Dado que se necesitan 24 galletas para 4 personas podemos hacer uso de la fracción para representar esta relación:

$$\frac{24\ galletas}{4\ personas}$$

Haciendo uso de fracciones equivalentes podemos escribir diferentes proporciones:

$$\frac{24\ galletas}{4\ personas} = \frac{6\ galletas}{1\ persona}\ , \qquad \frac{6\ galletas}{1\ persona} = \frac{30\ galletas}{5\ personas}$$

El producto en aspa permite afirmar que dichas fracciones son equivalentes o son proporcionales, pues al multiplicar los extremos y medios se obtiene el mismo resultado:

$$Si\frac{24}{4} = \frac{6}{1}\ entonces\ 24 \times 1 = 4 \times 6$$

Luego, para responder a la pregunta b) *¿Qué cantidad de huevos se necesita para 6 personas?:*

$$Si\ \frac{6\ huevos}{4\ personas} = \frac{?}{6\ personas}\ entonces\ 6 \times 6 = 4 \times ?$$

$$Así\ \ ? = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Proporcionalidad: Ecuación proporcional

La pregunta b) del problema se puede resolver de la siguiente manera:

Dado que se ha identificado una proporcionalidad directa entre “el número de personas y “el número de galletas, huevos, etc.” por lo que, si para 4 personas se usan 24 galletas, para 6 personas se usarán x galletas. Entonces:

Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Entonces

$$x = \frac{bc}{a}$$

$$\frac{4}{24} = \frac{6}{x} \rightarrow 4x = 6 \times 24 \rightarrow x = \frac{6 \times 24}{4} \rightarrow x = 36$$

Proporcionalidad: Regla de tres

Si

$$\begin{aligned} a &\rightarrow c \\ b &\rightarrow x \end{aligned}$$

Entonces

$$x = \frac{bc}{a}$$

Proporcionalidad: Uso de tablas

Las tablas de proporcionalidad se usan para registrar la relación entre las magnitudes encontrada, como se muestra en la Tabla 8. De forma parecida a escribirlo como fracciones equivalentes, pero con la ventaja de que de esta manera se pueden reconocer con mayor facilidad regularidades y, a partir de ello, encontrar una generalidad. Por ejemplo:

Tabla 8.

Tablas de proporcionalidad

Personas	4	2	3	1	6	8	…	x
Galletas	24	12	18	6	36	48	…	y

Fuente: Elaboración propia

Establecemos una relación proporcional entre la magnitud “galletas” y “personas”, esta relación puede ser expresada como una secuencia numérica proporcional de dichas magnitudes. Para esto se recurren a nociones previas, como el establecer la razón unitaria o fracciones equivalentes

El uso de las tablas permite que el estudiante reconozca regularidades entre las cantidades de las magnitudes, esto es suficiente para decir que para 5 personas es necesario 30 galletas. Además, la razón unitaria es vista como la constante de proporcionalidad, estableciendo así que podemos hallar el número de galletas para cualquier cantidad de personas multiplicando por 6. Esto puede ser expresado haciendo uso de un lenguaje simbólico – literal como $y = 6x, x \in \mathbb{N}$. por lo que se dice que estas tablas son un puente entre el significado proporcional y funcional de la linealidad.

- **Argumentos**

En este caso, los argumentos usados son dados en base a la razón encontrada entre las magnitudes, la igualdad de dichas razones (proporción) y a las ecuaciones que se puedan formar.

- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces dos pares de valores numéricos de dichas magnitudes, determinan fracciones equivalentes.
- Si dos magnitudes son directamente proporcionales y una de dichas magnitudes aumenta, entonces la otra también aumenta en la misma razón.
- Si dos magnitudes son directamente proporcionales y una de dichas magnitudes disminuye, entonces la otra también disminuye en la misma razón.
- La razón unitaria indica cómo varía una magnitud por una unidad de la otra magnitud.

2.2.4. Significado funcional de la linealidad

La función lineal es una función real de variable real cuya relación se expresa así $f(x) = kx$ o $y = kx$, esta relación nos muestra que la variación entre "*y*" y "*x*" es constante. Es decir, un cambio en la variable "*x*" implica un cambio directo y proporcional en la variable "*y*". Está función lineal cumple con las siguientes propiedades:

La función lineal es aditiva

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

La función lineal es homogénea

$$f(ka) = kf(a)$$

Por otro lado, la función afín o función lineal afín es definida como una traslación "b" de la función lineal $f(x) = kx$. Esta queda definida así $g(x) = kx + b$. En esta función ya no se cumplen las propiedades antes mencionadas, sin embargo, aún se sigue cumpliendo esa relación de cambio entre las variables "*y*" y "*x*".

Este significado de la linealidad, propio del nivel secundario de la formación básica, establece que la noción de proporcionalidad entre magnitudes ahora debe ser entendida como una relación proporcional entre variables, "*x*" e "*y*". Además, aquello que debe caracterizar a este significado es la aplicación de la función lineal para representar situaciones (modelar) y el uso de las propiedades antes mencionadas al resolverlas.

Estas propiedades que otorgan un carácter lineal son observadas desde las tablas de proporcionalidad, he ahí la importancia de las tablas de proporcionalidad, como señalan Burgos y Godino (2020).

- **Situaciones – problemas**

Las situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad deben exigir encontrar una expresión general de forma simbólica que muestre la regla o patrón general hallado en la relación de dos magnitudes. Estas magnitudes deben tener una relación directamente proporcional y la expresión hallada debe mostrar cómo se relacionan dichas magnitudes, que ahora serán entendidas como la relación entre dos variables.

Es importante señalar, que en este significado estamos incluyendo a las tareas de patrones lineales. Estas tareas demandan el reconocer un patrón de formación que, dependiendo del grado en que se aborde, puede requerir solo reconocerlo y, en otros, expresarlo en lenguaje alfanumérico.

A continuación, presentamos ejemplos en diferentes contextos que muestren lo mencionado. Es importante señalar que en el último Currículo Nacional de la Educación Básica (MINEDU, 2016) no se especifica qué contextos o representaciones deben ser usados para abordar a las funciones lineales. En su lugar, se señala que el estudiante debe usar lenguaje matemático y diferentes representaciones.

Ejemplo 8. Contexto tabular

Observa la siguiente tabla:

Tabla 9.

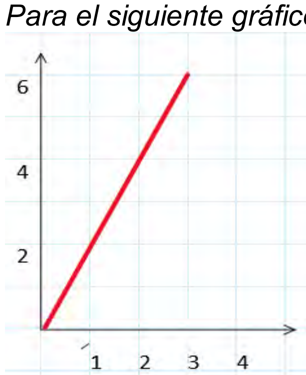
Ejemplo de contexto tabular

Número de cuadrados	*2*	*4*	*6*	*8*	***10***	*…*	*y*
Figura	*1*	*2*	*3*	*4*	***5***	*…*	*x*

¿Existe una relación lineal entre la Figura y el Número de cuadrados?
De ser así, ¿Cuál sería la expresión que la represente?

Ejemplo 9. Contexto gráfico

Para el siguiente gráfico:



¿Cuál es el valor de Y cuando X toma el valor de 6?
La gráfica, ¿muestra una relación lineal? ¿cuál sería su expresión analítica?

Figura 10. Ejemplo 9

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 10. Contexto conjuntista

De acuerdo a Godino et al. (como se citó en Escudero, 2017) la noción de función se formaliza con los pares ordenados, entonces las situaciones deben aparecer en un contexto como el siguiente:

Determinar si $f = \{(1;2), (2;4), (3;6), (4;8), (a;50)\}$ *es una función lineal.* *De ser así, ¿cuál es el valor de "a"?*

Ejemplo 11. Contexto analítico (situaciones con contexto)

En este tipo de situaciones se pide reconocer la expresión analítica de la función lineal o es necesario hallarla para resolver las preguntas del problema. Una situación que ejemplifique esto:

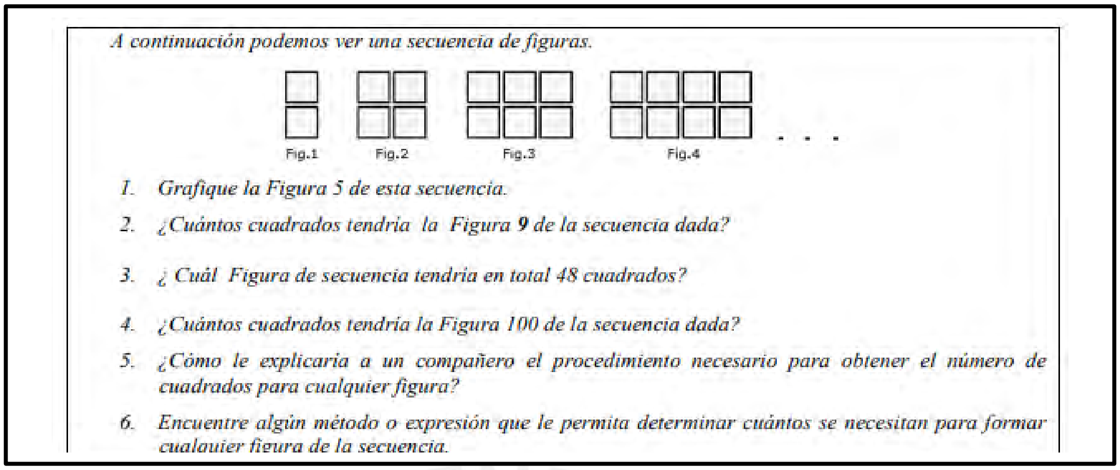
Nuestro salón necesita comprar camisetas para participar en el campeonato interno del colegio. Las tiendas "Fútbol y más" y "Sí se puede" ofrecen los siguientes presupuestos:

- *"Fútbol y más": 10 soles por camiseta más 50 soles, sin importar el tamaño del pedido.*
- *"Sí se puede": 15 soles por camiseta, sin importar el tamaño del pedido.*

¿A qué tienda acudir si se quieren comprar 4 o 9 camisetas?
Encontrar una función que dé el costo al comprar "n" camisetas en las tiendas.
Graficar dichas funciones en el plano cartesiano,
¿Para qué cantidad de camisetas el costo en ambas tiendas es el mismo?
¿Qué número de camisetas como mínimo se puede comprar en una tienda de modo que la oferta sea mejor que en la otra?

El estudio realizado en nuestros antecedentes nos ha permitido determinar que las tareas de patrones demandan encontrar razones constantes de cambio y regularidades. Es necesario indicar, que solo se tendrán en cuenta aquellas tareas que tienen un patrón de cambio constante y de primer orden, ya que hay una diversidad de tareas de patrones numéricos cuya generalización no es lineal.

Ejemplo 12. Contexto de patrones lineales



A continuación podemos ver una secuencia de figuras.

1. *Grafique la Figura 5 de esta secuencia.*
2. *¿Cuántos cuadrados tendria la Figura* ***9*** *de la secuencia dada?*
3. *¿ Cuál Figura de secuencia tendria en total 48 cuadrados?*
4. *¿Cuántos cuadrados tendría la Figura 100 de la secuencia dada?*
5. *¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?*
6. *Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.*

Figura 11. Ejemplo 12

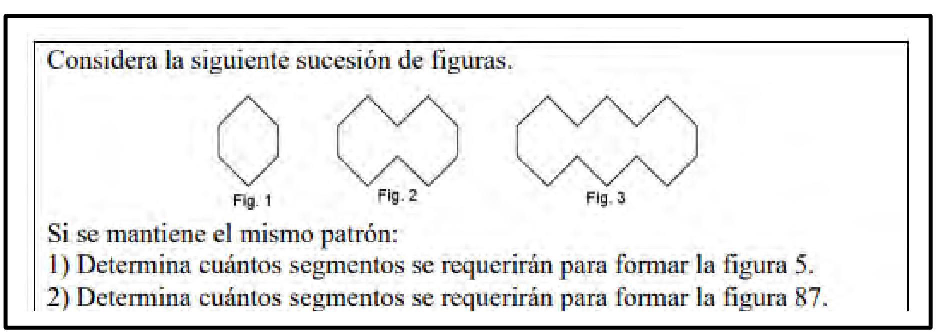
Fuente: Sánchez (2016, p.59)

La tarea mostrada presenta diferentes preguntas, el grado de complejidad aumenta cada vez.

- Reconocemos preguntas que demandan solo reconocer el patrón de formación para hallar un término cercano.
- También hay preguntas que demandan hallar términos lejanos de la sucesión.
- Por último, preguntas que demandan hacer explícito el patrón de formación en un lenguaje alfanumérico.

Así también hay tareas en las que la regla de formación sea una expresión lineal afín.

Ejemplo 13. Contexto de patrones lineales



Considera la siguiente sucesión de figuras.

Si se mantiene el mismo patrón:
1) Determina cuántos segmentos se requerirán para formar la figura 5.
2) Determina cuántos segmentos se requerirán para formar la figura 87.

Figura 12. Ejemplo 13

Fuente: Gaita y Wilhelmi (2019, p.271)

Así también, este tipo de tareas se presentas en secuencias numéricas.

Ejemplo 14. Contexto de patrones lineales

Observe atentamente las siguientes secuencias numéricas y responda.

a) *1, 4, 7, 10, 13,……..*

b) *3, 7, 11, 15, 19,……*

1. *El número que ocupa la posición 15 es:*
2. *Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el n-ésimo término de la secuencia numérica dada:*

Figura 13. Ejemplo 14

Fuente: Sánchez (2016, p.88)

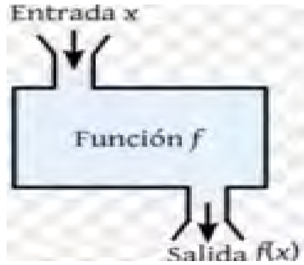
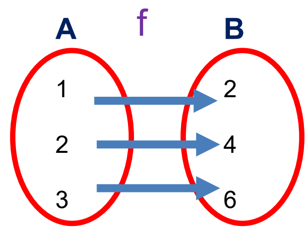
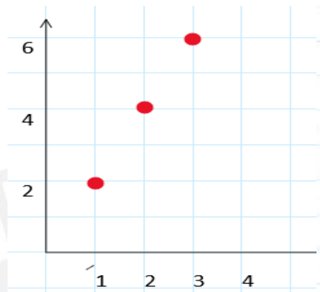
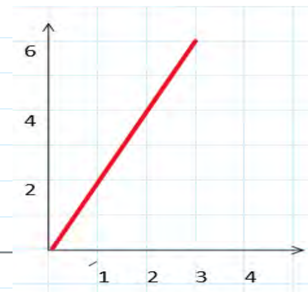
El tener presente el cambio de la noción de proporción al de función lineal implica entrar en el universo de las relaciones funcionales (Burgos y Godino, p. 14), esto significa que ahora las situaciones hacen uso de términos y propiedades propios de las funciones que mostraremos a continuación.

- **Lenguajes**

Tabla 10.

Lenguajes en el significado funcional

<table>
<tr><th>Tipo de lenguaje</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Función lineal, magnitud, relación, función afín, dependencia, variable dependiente, variable independiente, par ordenado, pendiente, dominio, rango, conjunto de partida, conjunto de llegada.</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td><table><tr><td>Y</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Gráfico</td><td>Diagrama</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>Plano cartesiano</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Simbólico - literal</td><td>Analítica</td><td colspan="2">De la función lineal y sus propiedades
$$y = kx$$ $$f(x) = kx$$ De la función afín
$$y = kx + b$$ $$f(x) = kx + b$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Conjuntista</td><td colspan="2">$f = \{(x, y) : y = f(x)\}$
$f: A \rightarrow B$
$f = \{(1,2); (2,4); (3,6); (4,8); \dots\}$
$Dom\ (f) = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$Ran\ (f) = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Escudero (2017, p. 53)

- **Conceptos**

Tabla 11.

Conceptos en el significado funcional

Término	**Concepto**
Dominio	Es el conjunto de valores a los cuales se aplica la función. Se denota por: $$Dom\ f$$

Rango	Son los valores que adopta la variable dependiente. Se denota por: $$Ran\ f$$
Pendiente	En la representación gráfica de la función lineal es la razón de cambio entre dos puntos de la recta, Es decir: $$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ En la función afín $f(x) = kx + b$, k es la pendiente.
Función lineal	Es una función de variable real $f: R \rightarrow R$ en la que la relación queda definida por: $$f(x) = kx$$ Siendo *k* la constante de proporcionalidad.
Función lineal afín	La función afín: $$f(x) = kx + b$$ Es una traslación de una función lineal $g(x) = kx$

Fuente: Adaptado de Escudero (2017, p. 68)

- **Procedimientos**

Los procedimientos usados al resolver situaciones sobre función lineal pueden ser ordenados de la siguiente manera:

- Establecer relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes y expresarlas como una relación funcional entre dos variables.
- Reconocer un cambio constante entre las magnitudes mediante tablas de proporcionalidad
- Cualquiera que sea el contexto en que se presente la tarea (tabular, conjuntista, gráfico, analítico o en patrones) expresar la relación hallada en un lenguaje algebraico como la expresión $f(x) = kx$.
- Usar las propiedades de la función lineal para responder a la tarea.

- **Proposiciones**

En la función lineal, un cambio constante en la variable “x” corresponde a un cambio constante en la variable “y”.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una función es homogénea

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea si, dado un $k \in R$ se cumple que:

$$f(kx) = kf(x), \forall\, x \in R$$

Una función es aditiva

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva si:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \text{ para cualquier } a, b \in Dom\, f$$

Una función es monótona:

a) Decreciente

Si un aumento en la variable independiente provoca una mantención o disminución en la variable dependiente. Es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Por ejemplo, una función afín $f(x) = kx + b$, donde $k \leq 0$

b) Estrictamente decreciente

Si un aumento en la variable independiente provoca una disminución en la variable dependiente. Es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Por ejemplo, una función afín $f(x) = kx + b$, donde $k < 0$

c) Creciente

Si un aumento en la variable independiente provoca una mantención o aumento en la variable dependiente. Es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Por ejemplo, una función afín $f(x) = kx + b$, donde $k \geq 0$

d) Estrictamente Creciente

Si un aumento en la variable independiente provoca una mantención o aumento en la variable dependiente. Es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Por ejemplo, una función afín $f(x) = kx + b$, donde $k > 0$

Una función es inyectiva

Si $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$

Por ejemplo, la función lineal $f(x) = kx$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$kx_1 = kx_2$$
$$x_1 = x_2$$

Por ejemplo, la función afín $f(x) = kx + b$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$kx_1 + b = kx_2 + b$$
$$x_1 = x_2$$

- **Argumentos**

Los argumentos surgen a partir de las definiciones y proposiciones antes detalladas al resolver situaciones de funciones lineales, así también de las propiedades de función aditiva y homogénea de la función lineal.

Hemos construido un significado de referencia de la noción de linealidad para la educación básica, lo que no implica que estos tengan rigurosidad matemática. Por ejemplo, el significado informal no demanda el uso de conceptos matemáticos propiamente dichos. Esta construcción ha sido en base a la configuración ontosemiótica del EOS, mostrando situaciones que ejemplifiquen cada significado. Este significado será utilizado en nuestro siguiente capítulo para adaptar los niveles de razonamiento algebraico para una propuesta para la educación básica.

En el siguiente capítulo presentaremos una adaptación de los niveles de algebrización de Godino et al. (2014) a los diferentes significados que permiten desarrollar la noción de linealidad.

CAPÍTULO 3: ADAPTACIÓN DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN A LA NOCIÓN DE LINEALIDAD EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

En este capítulo presentaremos los elementos teóricos del Razonamiento Algebraico Elemental que son relevantes en nuestra investigación. Luego, realizaremos una adaptación de la descripción de los niveles del razonamiento algebraico de la actividad matemática al resolver situaciones asociadas a la linealidad. Para lograr esto, analizaremos qué objetos y procesos algebraicos aparecen en la actividad matemática asociada a dichas actividades. A continuación, mencionaremos cuáles son estos elementos.

3.1. Elementos teóricos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)

En Godino, Aké et al. (2014) se propone un modelo que permite valorar la práctica matemática y clasificarla en distintos niveles, de acuerdo a rasgos de razonamiento algebraico que se desprende de una determinada práctica. Esta clasificación es a partir de identificar procesos y objetos matemáticos que intervienen al resolver una determinada tarea. El estudio realizado nos ha ayudado a determinar aquellos procesos y objetos que intervienen en la práctica matemática de carácter algebraica. A continuación, presentamos aquellos objetos y procesos:

Objetos matemáticos propios de la práctica algebraica

En Godino, Aké et al. (2014) se presentan los siguientes objetos de tipo algebraico:

- Relaciones binarias, de equivalencia y de orden las cuales tienen sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva, simétrica, etc.).
- Operaciones y sus propiedades, definidas sobre diversos objetos. Por ejemplo, las ecuaciones y los procedimientos de eliminación, factorización para obtener expresiones equivalentes.
- Funciones, las operaciones realizadas sobre ellas, los distintos tipos de funciones, los diferentes elementos propios de las funciones (variables,

fórmulas, parámetros, etc.).

- Estructuras, sus tipos y propiedades, como son los monoides, espacios vectoriales, anillos, etc.

Procesos que caracterizan la práctica algebraica

Godino, Aké et al. (2014) señalan aquellos procesos que aparecen en la actividad matemática de tipo algebraica, estos son:

- **Particularización - Generalización**, al determinar o inferir extensivos e intensivos, respectivamente. Por ejemplo:

  Ante la siguiente secuencia numérica: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

  El hallar el siguiente término, 32, muestra un proceso de particularización, dicho término particular recibe el nombre de extensivo. Por otro lado, el encontrar la regla de formación, en cualquier forma de expresión, por ejemplo: *para encontrar cualquier término de la sucesión se debe duplicar la posición que dicho término ocupa* o *la regla es "2n".* Esto muestra un proceso de generalización, este elemento recibe el nombre de intensivo.

- **Unitarización**, al reconocer un intensivo como una entidad unitaria. Del ejemplo anterior, el conjunto de números inicialmente dado cambia y ya no es solo un conjunto de números, pues se ha mostrado un proceso que nos permite encontrar cualquier elemento de dicho conjunto: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2n$. Se ha realizado una unitarización.

- **Formalización y ostensión**, al nombrar dichos objetos mediante expresiones simbólico – literales. Esto está relacionado al hecho de formalizar la regla de formación encontrada. En el ejemplo dado, este proceso viene representado por la expresión "*2n*". Este objeto es un ostensivo.

- **Transformación**, al usar dichos objetos representados en el cálculo algebraico y en nuevas generalizaciones. En el ejemplo anterior, sobre la expresión hallada "*2n*" se pueden realizar operaciones para representar a otra sucesión numérica.

Estos procesos y objetos propios de la actividad matemática de carácter algebraico permiten definir grados de algebrización. Estos niveles del razonamiento algebraico, permiten valorar la actividad realizada sobre una tarea en particular a partir de reconocer rasgos de los procesos antes mencionados en situaciones en donde intervienen objetos algebraicos. A continuación, presentamos estos niveles para el nivel primario y secundario.

Niveles del razonamiento algebraico

En los trabajos de Godino, Aké et al. (2014) y Godino et al. (2015) se definen los niveles del razonamiento algebraico para el nivel primario y secundario respectivamente. A continuación, presentamos los niveles:

- Nivel 0: Intervienen objetos *extensivos* (particulares) expresados mediante el lenguaje natural, icónico o gestual. Es posible que aparezca algún símbolo que refiera a un valor desconocido. En tareas de generalización donde se reconozca el término siguiente a otro de forma particular no es un indicador de *generalización.* Este nivel es detallado como ausencia de razonamiento algebraico.

- Nivel 1: Intervienen objetos intensivos (generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden aparecer símbolos que se refieran a algunos intensivos reconocidos, aunque sin operar con ellos. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje distinto al simbólico literal.

- Nivel 2: Intervienen variables expresadas en un lenguaje simbólico literal que refieren a un intensivo identificado, pero ubicada dentro del contexto del problema. En tareas funcionales se reconoce la generalidad mediante el lenguaje simbólico literal, pero aún no se opera con dichas variables. Se pueden resolver ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$.

- Nivel 3: Se reconoce la generalidad con el uso del lenguaje simbólico-literal y además se opera con dichas variables realizando tratamientos para hallar expresiones equivalentes. Se pueden resolver ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Además, se hallan de forma descontextualizadas expresiones para funciones y patrones. Este nivel refiere a un nivel logrado de algebrización.

- Nivel 4: En este nivel se hace el uso de los parámetros como registro numérico para expresar familias de ecuaciones y funciones. Este nivel representa el primer encuentro con los parámetros y por lo tanto es concebido en su forma más básica: sirve para registrar un valor constante que no cambia (Drijvers (2003), citado en Godino et al. 2015).
- Nivel 5: En este nivel se realizan operaciones y tratamientos con expresiones en las que intervienen parámetros. Este nivel superior de algebrización implica no solo operar algorítmicamente parámetros, si no comprender qué se obtiene como resultado al hacer tratamientos con ellos.
- Nivel 6: En este nivel se ponen en juego objetos y procesos algebraicos algebraicos de mayor complejidad. Este estudio se inicia en el bachillerato con el análisis de estructura algebraicas (espacios vectoriales o grupo), el álgebra de funciones (adición, sustracción, etc.).

Es importante señalar que estos niveles son propuestos para cualquier práctica algebraica, no para un objeto en particular, por lo que representan una caracterización general. Es por ello que, como parte de nuestro trabajo, nos proponemos adaptar estos niveles a situaciones que desarrollan la noción de linealidad.

3.2. Adaptación de los niveles de razonamiento algebraico para la noción de la linealidad en la educación básica

En esta sección presentamos una propuesta de los niveles de algebrización adaptados a las tareas relacionadas a la noción de linealidad. Para la construcción de esta propuesta se han tomado los aportes del trabajo de Burgos y Godino (2020), en el que ellos determinan que cada significado de la proporcionalidad se asocia a un nivel diferente de razonamiento algebraico. Esta asociación es en base al tipo de lenguaje usado, qué representación y grado de generalización que surge de resolver las situaciones que en la investigación se presentan. A continuación, mostramos la relación entre significado de proporcionalidad y nivel de algebrización de su propuesta:

- Nivel 0: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al resolver situaciones de los significados cualitativo y aritmético. Dado que las situaciones asociadas a dicho significado no demandan un proceso algebraico.
- Nivel 1: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al resolver situaciones del significado proporcional, en las que se hace uso del procedimiento de reducción a la unidad. Para los autores, la reducción a la unidad es un grado de generalización inferior, en el que aún no se usa el lenguaje algebraico.
- Nivel 2: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al resolver situaciones del significado proporcional, en las que se hace uso de las proporciones, ecuaciones proporcionales y las tablas de proporcionalidad. La propuesta de los autores indica que resolver ecuaciones de la forma $Ax + B = C$, como una ecuación proporcional, es característico de este nivel.
- Nivel 3: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al resolver situaciones del significado funcional, en el que aparece explícitamente la función lineal y sus propiedades. Aquellas actividades que demanden encontrar la expresión de la forma $y = kx$ y el uso de sus propiedades.
- Nivel 4: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al estudiar las familias de funciones lineales. Para los Burgos y Godino (2020), un grado mayor de generalización se da cuando se estudian las familias de funciones lineales, ya que esto implica el uso de parámetros.
- Nivel 5: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al realizar operaciones con funciones lineales. Según los autores, las operaciones con funciones

lineales demandan que se realicen operaciones con parámetros y variables. Esto, establece una diferencia de solo operar con variables, es así que esto implica un mayor nivel de algebrización

- Nivel 6: Este nivel de razonamiento algebraico aparece al entrar a nociones algebraicas más complejas y generales, tales como espacios vectoriales. Eso es propio del álgebra superior, trabajada en un nivel universitario.

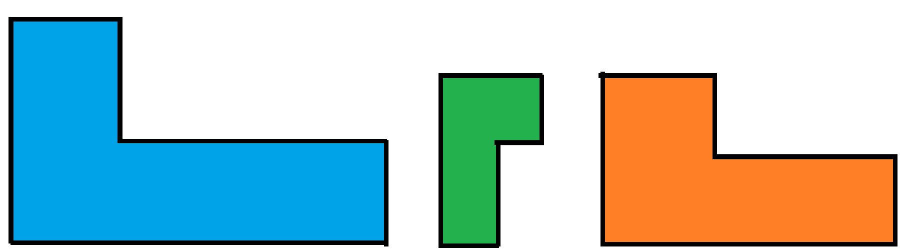
La propuesta de Burgos y Godino (2020) parte de reconocer procesos algebraicos en un determinado significado de la proporcionalidad. Nuestra propuesta tomará aspectos de este trabajo y será complementada con un análisis de los procesos algebraicos implicados en las situaciones de patrones lineales.

A continuación, se presentará una descripción general de los rasgos de algebrización que se puede asociar a los ejemplos propuestos para cada significado en el capítulo II. Esto se logrará en base a la solución esperada de los ejemplos que presentamos en cada significado. Así, finalmente, presentaremos una adaptación de los niveles propuestos por Godino, Aké et al. (2014) y Godino et al. (2015) para la noción de linealidad.

a) Rasgos de algebrización en la actividad matemática desarrollada al abordar situaciones asociadas al significado informal de la linealidad

Al resolver el ejemplo 1 (Figura 7):

¿Cuál de las siguientes figuras son semejantes?



Nota. Adaptado de Burgos y Godino (2020)

Solución esperada por estudiantes del nivel primario:

Para responder a la pregunta se puede percibir relaciones proporcionales sin recurrir a relaciones cuantitativas entre los segmentos. Es decir, el hecho de percibir que las tres figuras tienen la misma forma “L”, pero en distintas posiciones representa un primer acercamiento a la noción de proporcionalidad. No hay necesidad de decir cuán grande es una figura respecto a la otra (es el doble, es la mitad, etc.).

Al resolver el ejemplo 2**:**

Si Juan mezcla menos concentrado de limón con más azúcar que la que prepara su amiga María, su limonada tendrá un gusto:

(a) Más fuerte; (b) Menos fuerte; (c) Exactamente el mismo gusto

Solución esperada por estudiantes del nivel primario:

La experiencia del individuo y un razonamiento informal, sin necesidad de recurrir a un razonamiento multiplicativo, llevan a pensar que “a más limón, más azúcar”. En este tipo de situaciones se recurre al conocimiento del individuo, se aboca a la noción que se tiene para decir que si se aumenta una cantidad de esto (limón), entonces deberé aumentar una cantidad de lo otro (azúcar).

Rasgos de algebrización

Dado que en este tipo de situaciones no se hace uso de algún tipo de razonamiento matemático o proceso algebraico, sino más bien recurre a la percepción (en el caso de la semejanza de figuras) y a la experiencia previa del individuo (en el caso del concentrado de limón). Determinamos que en las situaciones del significado informal de la linealidad no hay rasgos de algebrización, por lo que este significado se asocia con un nivel 0 de algebrización.

b) Rasgos de algebrización en la actividad matemática desarrollada al abordar situaciones asociadas al significado aritmético de la linealidad

Al resolver el ejemplo 4:

Un paquete de café de 500 g tiene un valor de S/5. ¿Cuál es el precio de un paquete de 400 g?

Solución esperada por estudiantes del nivel primario:

En este tipo de situaciones se asume que una cantidad menor de gramos de café tiene un menor precio. Por lo que si 500 g cuesta S/.5, entonces $500\ g \div 5 = 100\ g$ cuestan $S/.5 \div 5 = S/.1$. Así, 400 g cuestan $S/.1 \times 4 = S/.4$.

Al resolver el ejemplo 5:

Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de limón. Mientras que María usa 5 cucharadas de azúcar y 20 de concentrado de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce?

Solución esperada por estudiantes del nivel primario:

Al utilizar la división se determina que en ambos casos se usa el cuádruple de cucharadas de concentrado de limón que de azúcar.

$$12 = 3 \times 4 \;\; y \;\; 20 = 5 \times 4$$

Esto basta para justificar que en ambos casos el sabor de la limonada es el mismo.

Rasgos de algebrización

Como solo se han utilizado operaciones aritméticas para resolver el problema y no ha sido necesario el recurrir a algún proceso algebraico. Se determina que las situaciones que abordan el significado aritmético de linealidad pueden asociarse a un nivel de algebrización 0.

c) Rasgos de algebrización en la actividad matemática desarrollada al abordar situaciones asociadas al significado de la linealidad como proporcionalidad

Al resolver el ejemplo 7:

Se va a preparar una torta para un cumpleaños usando la siguiente receta: *Torta de Chocolate (4 personas)* • *24 galletas* • *6 huevos* • *100 g de mantequilla* • *300 g de chocolate* *a) ¿Cuántas galletas son necesarias por persona? ¿Qué cantidad de galletas se necesita para 5 personas? ¿Podrías determinar la cantidad de galletas para un número determinado de personas?* *b) ¿Qué cantidad de huevos se necesita para 6 personas?*

Solución esperada por estudiantes del nivel primario (4to y 5to grado):

La técnica de hallar la razón unitaria o reducción a la unidad determina una regla general para hallar cualquier valor, es así que con este valor unitario podemos calcular el valor para cualquier otra cantidad deseada. De hecho, las preguntas de la parte a) permiten esto. Veamos cómo abordar esta situación:

Dado que, según la receta, para 4 personas son necesarias 24 galletas, entonces para 2 personas se necesitan 12 galletas. Por lo tanto, para 1 persona se necesitan 6 galletas. Este razonamiento puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\frac{24\ galletas}{4\ personas} = \frac{12\ galletas}{2\ personas} = \frac{6\ galletas}{1\ persona}$$

La comparación de las magnitudes y establecer una relación entre ellas permite determinar fracciones equivalentes y con esto hallar la razón unitaria. Esta razón hallada es un objeto intensivo, ya que esto permite hallar:

Para 5 personas, se usarán $6x5 = 30\ galletas$.

Para 20 personas, se usarán $6x20 = 120\ galletas$.

Para cualquier número de personas, se debe multiplicar dicho número por 6.

Por lo que es posible concluir que, para un número “n” de personas, se usarán “$6n$” galletas.

Rasgos de algebrización

En los procedimientos mostrados aparecen objetos y procesos algebraicos tales como generalización, unitarización y, en algunos casos, formalización. Particularmente, la razón unitaria muestra ello.

- El reconocer la razón unitaria, por ejemplo $\frac{6\ galletas}{1\ perona}$ y con esta hallar la cantidad de galletas para 5, 10, 24, etc. personas representa un nivel 1 de razonamiento algebraico pues se reconoce el objeto intensivo, pero aún no es expresado en un lenguaje alfanumérico.
- El reconocer dicha razón unitaria y expresarla como "$6n$" para una cantidad "n" de personas representa un nivel 2 de razonamiento algebraico pues el objeto intensivo reconocido es formalizado en el ostensivo “*6n*”.

Solución esperada por estudiantes del nivel primario (6to grado):

Por otro lado, los procedimientos anteriores no son los únicos que se pueden usar, antes mencionamos que la situación permite usar diferentes nociones de la proporcionalidad. Por ejemplo, las proporciones para hallar un valor desconocido. Para responder la pregunta b) puede que el hallar una razón unitaria no tenga tanto sentido para el estudiante por la aparición de una expresión decimal y el tipo de magnitud que se está trabajando (1,5 huevos):

$$\frac{6\ huevos}{4\ personas} = \frac{3\ huevos}{2\ personas} = \frac{1{,}5\ huevos}{1\ persona}$$

Por lo que recurrir a las propiedades que se establecen al igualar dos fracciones (producto en aspa) es una alternativa de solución, veamos:

$$\frac{6\ huevos}{4\ personas} = \frac{x}{6\ personas} \rightarrow\ x = \frac{6 \times 6}{4} = 9\ personas$$

Vemos que, el no encontrarle un sentido la razón unitaria entre estas magnitudes, puede hacer que aparezcan las incógnitas para representar un valor desconocido. Este procedimiento es también usado y presentado como “regla de tres”:

$$4\ personas \rightarrow 6\ huevos$$
$$6\ personas\ \rightarrow x$$

Rasgos de algebrización

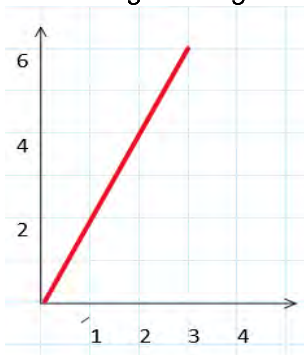
Usar la igualdad de dos razones como fracciones equivalentes y el uso de una incógnita representa un nivel 2 de razonamiento algebraico, de acuerdo con Burgos y Godino (2020). Establecer una proporción genera que se deba resolver una ecuación de la forma $Ax = B$.

d) Rasgos de algebrización en la actividad matemática desarrollada al abordar situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad

En nuestra propuesta de un significado de referencia de la linealidad hemos determinado que en el significado funcional aparecen situaciones caracterizadas por los contextos: tabular, gráfico, conjuntista, analítico y patrones lineales. En cualquier caso, las situaciones deben solicitar el expresar la función lineal en su forma analítica. A continuación, presentamos una solución esperada a algunos de los ejemplos antes mostrados para el significado funcional:

Al resolver el ejemplo 9 (contexto gráfico)

Para el siguiente gráfico:



¿Cuál es el valor de Y cuando X toma el valor de 6?
La gráfica, ¿muestra una relación lineal? ¿cuál sería su expresión analítica?

Solución esperada por estudiantes del nivel secundario (1ro y 2do grado):

En el ejemplo 12, para responder a "¿Cuál es el valor de *Y* cuando *X* toma el valor de 6?". Una forma de que el estudiante evidencie un nivel consolidado de algebrización sería con el siguiente argumento:

$$Si\ f(3) = 6\ \rightarrow 2f(3) = f(2 \times 3) = 2 \times 6 = 12,$$
$$\therefore\ f(6) = 12$$

Para responder a "La gráfica, ¿muestra una relación lineal?". Una forma de que el estudiante evidencie un nivel consolidado de algebrización sería con el siguiente argumento:

$$Sí, es\ una\ función\ lineal, porque\ f(1) + f(2) = f(3).$$
$$Y\ la\ relación\ de\ proporcionalidad\ se\ expresa\ de\ la\ forma\ f(x) = 2x$$

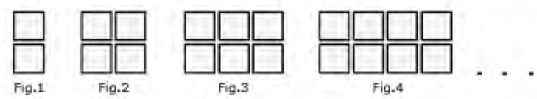
Rasgos de algebrización

Las preguntas del tipo "¿Cuál sería la expresión que la represente?", "¿cuál sería su expresión analítica?" demandan encontrar una expresión general que debe ser expresada en un lenguaje alfanumérico; es decir, están presentes los procesos de generalización y formalización. Por lo que se asocia un nivel 2 del razonamiento algebraico a este tipo de situaciones.

Por otro lado, las otras preguntas de estas situaciones “¿la gráfica muestra una relación lineal?”, “¿existe una relación lineal entre la figura y el número de cuadrados?” demandan una actividad mayor si dentro de los argumentos utilizados aparecen las propiedades de la función lineal. Según Burgos y Godino (2020), el usar estas propiedades determina un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) pues dichas propiedades muestran una formalidad mayor en el razonamiento algebraico.

Al resolver el ejemplo 12 (patrones lineales)

A continuación podemos ver una secuencia de figuras.



1. *Grafique la Figura 5 de esta secuencia.*
2. *¿Cuántos cuadrados tendria la Figura **9** de la secuencia dada?*
3. *¿ Cuál Figura de secuencia tendria en total 48 cuadrados?*
4. *¿Cuántos cuadrados tendria la Figura 100 de la secuencia dada?*
5. *¿Cómo le explicaria a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?*
6. *Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.*

Solución esperada por estudiantes del nivel primario (6to grado) y secundario (1ro y 2do):

Para responder a las preguntas 1 y 2, el estudiante puede recurrir al recuentro de patrones. Esto es:

Figura 1: 2 cuadraditos, Figura 2: 2+2=4 cuadraditos.

Figura 3: 4+2=6 cuadraditos, Figura 4: 6+2=8 cuadraditos,

Figura 5: 8+2=10 cuadraditos, Figura 6: 10+2=12 cuadraditos,

Figura 7: 12+2=14 cuadraditos, Figura 8: 14+2=16 cuadraditos,

Figura 9: 16+2=18 cuadraditos.

Sin embargo, esto demandará más tiempo si se razona de la misma manera para dar respuesta a las preguntas 3 y 4. Por lo que se demanda encontrar alguna relación entre los cuadrados de la figura y la posición que ocupa, esto es más fácil de determinar si se usan tablas de proporcionalidad.

Tabla 9:

Ejemplo de contexto tabular

Número de cuadraditos	2	4	6	8	10	12	**48**	…	**200**	**2x**
Figura	1	2	3	4	5	6	**24**	…	100	x

Fuente: Elaboración propia

La tabla 9 permite reconocer regularidades:

"Un aumento constante en la variable *x* (figura) implica un aumento constante en la variable *y* (Número de cuadraditos)"

Este argumento, característico de la función lineal, permite reconocer la relación entre las dos variables en cuestión. El patrón de formación puede ser mencionado de la siguiente manera:

- A la figura anterior se le suman dos cuadraditos.

Este argumento responde a un razonamiento en el que sí se reconoce un patrón de formación, pero limitado a conocer el inmediato anterior. Por otro lado, el siguiente argumento es más general.

- Para obtener el número de cuadrados debemos multiplicar el número de la figura por 2 y, una expresión que nos permita hacer esto, sería $\#cuadrados = 2 \times \#de\ la\ figura$ lo que usando un lenguaje simbólico literal es $y = 2x$.

Por tal motivo, las tareas con patrones numéricos y gráficos permiten reconocer relaciones funcionales.

Rasgos de algebrización

El reconocer un patrón de formación en secuencias gráficas determina una actividad algebraica de nivel 1, pues es una forma de generalización, aunque sin hacer uso de un lenguaje alfanumérico. Si el reconocimiento de dicho intensivo es formalizado, mediante una relación entre la figura y la posición que ocupa, por una expresión algebraica, se determina un nivel de algebrización 2. Por otro lado, es posible que la actividad matemática se limite al reconocimiento del término siguiente de los ya dados en la secuencia mediante adiciones (nivel 0).

Al resolver el ejemplo 14 (patrones lineales):

Observe atentamente las siguientes secuencias numéricas y responda.

a) *1, 4, 7, 10, 13,……*

b) *3, 7, 11, 15, 19,……*

1. *El número que ocupa la posición 15 es:*
2. *Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el n-ésimo término de la secuencia numérica dada:*

Sobre la primera secuencia numérica:

Solución esperada por estudiantes del nivel primario (6to grado) y secundario (1ro y 2do):

Al igual que en la situación anterior, el problema puede ser abordado al establecer una relación funcional entre “posición” y “número”:

“Un aumento constante en la posición implica un aumento constante en el número”.

Esta relación puede encontrarse de la siguiente manera:

$$Pos. 1 = 1,$$
$$Pos. 2 = Pos. 1 + 3 = 1 + 3 = 4,$$
$$Pos. 3 = Pos. 2 + 3 = 1 + 3 + 3 = 7,$$
$$Pos. 4 = Pos. 3 + 3 = 1 + 3 + 3 + 3 = 10, etc.$$

Esa cadena de sumas de 3 puede resumirse como una multiplicación

$$Pos.2 = Pos.1 + 3 = 1 + 3 \times 1 = 4,$$
$$Pos.3 = Pos.2 + 3 = 1 + 3 \times 2 = 7,$$
$$Pos.4 = Pos.3 + 3 = 1 + 3 \times 3 = 10, etc.$$

Esto permitirá establecer una relación entre la posición de la figura y su multiplicación por el número 3, de lo cual se puede concluir que si se quiere hallar el número de la *posición 4* se debe multiplicar a la *posición 3* por 3 y luego sumarle 1. ¿Para la posición 15? Se debe multiplicar a la posición 14 por 3 y luego sumarle 1:

$$Pos.15 = 1 + 3 \times 14$$

¿Para una posición cualquiera? Sea *n* dicha posición:

$$Pos.n = 1 + 3 \times (n - 1)$$

Es posible hacer las manipulaciones hasta obtener la expresión de una función afín:

$$Pos.n = 1 + 3 \times (n - 1)$$
$$Pos.n = 1 + 3 \times n - 3 \times 1$$
$$Pos.n = 1 + 3n - 3$$
$$Pos.n = 3n - 2$$

Rasgos de algebrización

Esta situación, a diferencia de la situación anterior, exige un razonamiento mayor. La relación entre los términos y su posición no se establece de forma inmediata y, además, una vez hallada esta expresión puede hacerse transformaciones para convertirla en una expresión equivalente más sencilla, que es la expresión analítica de una función afín. Dado que tiene esta actividad adicional, que puede realizarse o no en la solución, es posible asociarle un nivel 3 de razonamiento algebraico.

Al resolver el ejemplo 11

El siguiente ejemplo presenta una situación en la que se exige hallar la expresión de dos funciones, una lineal y otra afín, que luego deberán ser igualadas como parte del análisis para responder a las preguntas.

Nuestro salón necesita comprar camisetas para participar en el campeonato interno del colegio. Las tiendas "Fútbol y más" y "Sí se puede" ofrecen los siguientes presupuestos:

- *"Fútbol y más": 10 soles por camiseta más 50 soles, sin importar el tamaño del pedido.*
- *"Sí se puede": 15 soles por camiseta, sin importar el tamaño del pedido.*

¿A qué tienda acudir si se quieren comprar 4 o 9 camisetas?
Encontrar una función que dé el costo al comprar "n" camisetas en las tiendas.
Graficar dichas funciones en el plano cartesiano,
¿Para qué cantidad de camisetas el costo en ambas tiendas es el mismo?
¿Qué número de camisetas como mínimo se puede comprar en una tienda de modo que la oferta sea mejor que en la otra?

Solución esperada por estudiantes del nivel secundario (1ro y 2do):

Presentamos una solución de la cual determinaremos rasgos de algebrización y así, luego asociarle un nivel de algebrización al significado funcional

Los enunciados "10 soles por camiseta más 50 soles, sin importar el tamaño del pedido" y "15 soles por camiseta, sin importar el tamaño del pedido" le dan al estudiante la regla para hallar el costo de las camisetas a comprar. Siendo así que, para responder a la primera pregunta, el cálculo numérico es suficiente:

$$Fútbol\ y\ más: 10 \times 4 + 50 = 40 + 50 = 90$$
$$Sí\ se\ puede: 15 \times 4 = 60$$

Si se desean comprar 4 camisetas, la tienda "Sí se puede" es la mejor opción.

$$Fútbol\ y\ más: 10 \times 9 + 50 = 90 + 50 = 140$$

$$Sí\ se\ puede: 15 \times 9 = 135$$

Aparentemente, la segunda tienda es la mejor opción para comprar las camisetas. Sería pertinente solicitar una compra de 12 camisetas para dar cuenta de que esto no es así, en cierta forma las otras preguntas validan esta idea inicial.

La segunda pregunta solicita expresar la regla de formación en un lenguaje algebraico, las cuales serían:

$$Fútbol\ y\ más: f(n) = 10n + 50$$

$$Sí\ se\ puede: g(n) = 15n$$

Para hallar las gráficas de estas funciones halladas, primero tabularíamos algunos valores de estas funciones. Esto se muestra en la Tabla 12:

Tabla 12.

Tabulación de f(n) y g(n)

$\boldsymbol{f(n)}$	50	60	70	80	90	100	$\boldsymbol{g(n)}$	0	15	30	45	60	75
$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5

Fuente: Elaboración propia

Siendo así que las gráficas serían:

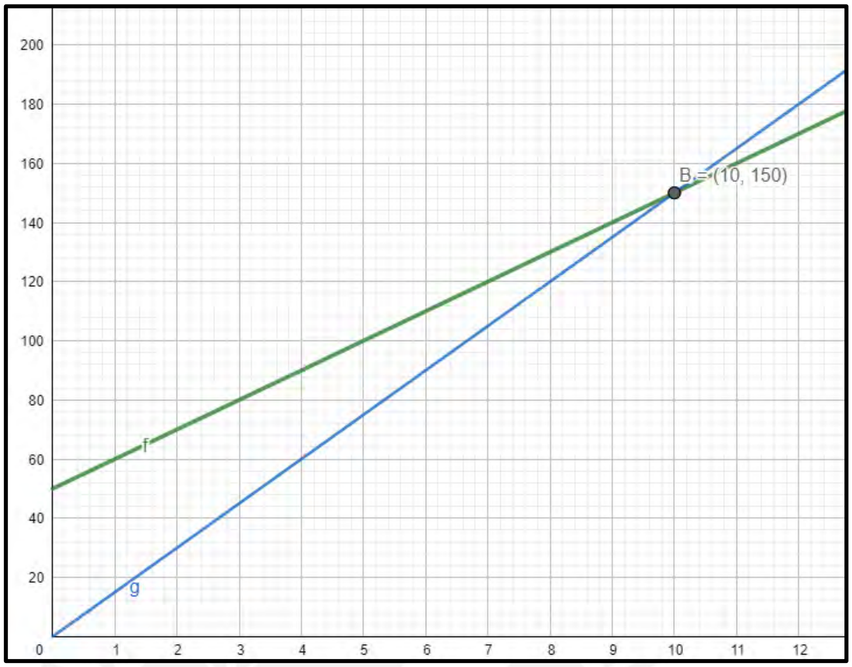


Figura 14. Gráfico de las funciones f(n) y g(n)

Fuente: Elaboración propia.

La gráfica de las funciones ayudará a que el estudiante determine que no siempre la segunda tienda será la mejor opción, pues a medida que se compran más camisetas el costo a pagar en la segunda tienda será mayor al de la primera. En la misma gráfica se puede responder a la pregunta "*¿Para qué cantidad de camisetas el costo en ambas tiendas es el mismo?",* en el punto en el que estas gráficas coinciden el precio total a pagar será el mismo. Eso puede ser expresado en lenguaje algebraico con las expresiones de las funciones halladas:

$$f(n) = g(n)$$

$$10n + 50 = 15n$$

$$50 = 15n - 10n$$

$$50 = 5n$$

$$10 = n$$

Siendo así que cuando se compren 10 camisetas se pagará el mismo precio total en ambas tiendas. Este valor hallado determina que a partir de una compra de 11 camisetas conviene ir a la tienda “Fútbol y más” y en una compra de hasta 9 camisetas conviene la tienda “Sí se puede”.

Este ejemplo demanda que el estudiante inicie con un cálculo aritmético, luego expresar en lenguaje algebraico una regla de formación y, además, hacer manipulaciones a las expresiones halladas. La actividad algebraica corresponde a un nivel 3 de algebrización, aunque, no se halla hecho uso de las propiedades de función lineal antes señaladas.

Rasgos de algebrización

En una solución esperada para este tipo de situación se espera que aparezcan los procesos de generalización al reconocer las expresiones generales (intensivos) y formalización al expresarlas como $f(n) = 10n + 50$ y $g(n) = 15n$. Además, es posible que se realicen transformaciones sobre dichas expresiones alfanumérica. Por lo que la actividad algebraica se puede catalogar de nivel 3 del RAE. Sin embargo, es de esperarse que no todos los estudiantes realicen dichos procesos algebraicos y su actividad se limite a un proceso de generalización, al reconocer cómo se comporta la función, pero no formalizarla en una expresión alfanumérica. Por lo que también se asocia un nivel 2 del RAE.

Para la construcción de una propuesta de niveles de algebrización para los significados de la linealidad hemos presentado soluciones de las situaciones de cada significado presentadas en el capítulo anterior, teniendo en cuenta los rasgos de algebrización que Burgos y Godino (2020) reconocen en su clasificación para los significados de la proporcionalidad y los aportes de Gaita y Wilhelmi (2019) para las situaciones con patrones.

En nuestra propuesta, cada significado tiene un nivel de razonamiento algebraico característico. Ya que la noción de la linealidad aparece de forma gradual, los objetos y procesos que se usen también lo hacen. Por lo que determinamos que cada significado es posible asociarse a un determinado nivel del razonamiento algebraico:

- Significado informal: Ausencia de rasgos algebraicos (nivel 0).
- Significado aritmético: Ausencia de rasgos algebraicos (nivel 0).
- Significado proporcional: Rasgos algebraicos de nivel 1 y 2.
- Significado funcional: Dependiendo del tipo de solución del problema puede asociarse el nivel 2 y 3.

A continuación, presentamos una adaptación de los niveles de razonamiento algebraico a los significados de linealidad.

NIVEL 0

Este nivel está asociado al significado informal, aritmético y algunas situaciones de patrones lineales. El razonamiento para reconocer semejanzas o situaciones proporcionales no se sustenta en argumentos matemáticamente formales. La actividad matemática se limita a operaciones aritméticas (multiplicación y división) con cantidades particulares (extensivos) mediante un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual al hallar valores desconocidos. (Ver ejemplo de la página 71)

En tareas de patrones lineales, la determinación de términos particulares (extensivos) se da mediante operaciones numéricas en un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden aparecer símbolos, pero estos surgen para representar a un objeto extensivo y no supone una manipulación simbólica. En este nivel no se realizan generalizaciones, formalizaciones o transformaciones. (Ver ejemplo de la página 77)

NIVEL 1

Este nivel está asociado al significado aritmético, proporcional y algunas situaciones de patrones lineales. Aparecen procesos como la generalización al hallar una razón unitaria en situaciones de proporcionalidad, aunque sin el uso explícito de un lenguaje alfanumérico. No se presentan los procesos de formalización o transformación.

Se hace uso de la igualdad como equivalencia al reconocer fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La operación de producto en aspa de la equivalencia determinada se sustenta en las propiedades de los números naturales. Esto se da en un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. (Ver ejemplo de la página 73).

En tareas de patrones lineales, la determinación de términos particulares se da mediante el reconocimiento de un patrón a partir de recuentos explícitos hechos mediante el cálculo numérico o representaciones gráficas, aún no en lenguaje alfanumérico. Esto se da para términos cercanos a los dados en la sucesión, por lo que aún no se determina el patrón general de formación. (Ver ejemplo de la página 77)

NIVEL 2

En este nivel aparecen procesos de generalización y formalización, ya que se usan expresiones simbólicas – literales para determinar un valor desconocido en una proporción. También, se resuelven ecuaciones de la forma $Ax = B$. Esto aparece al expresar una razón unitaria en un lenguaje alfanumérico, por ejemplo "$6n$" y al igualar dos fracciones equivalentes, generando una ecuación proporcional $x = \frac{bc}{d}$. El análisis se da en un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual al principio, luego se trabaja haciendo uso de expresiones simbólico – literales, aunque sin hacer transformaciones a las expresiones halladas. (Ver ejemplo de la página 74)

En patrones lineales, debe darse la generalización y formalización al determinar una relación entre el término y el lugar que ocupa en la secuencia. Esto debe expresarse de forma simbólico – literal, aunque aún no se hacen manipulaciones en este registro (transformaciones). (Ver ejemplos de las páginas 78 y 79).

NIVEL 3

Este nivel es característico del significado funcional, son inherentes los procesos de generalización, formalización y transformación. La proporcionalidad debe consolidarse como una relación funcional entre dos variables que se expresa formalmente como la función lineal $f(x) = kx$, donde *k* es un valor constante. Así también aparece la función afín $g(x) = kx + b$, donde *k* y *b* son parámetros constantes. Además, en este nivel se hacen uso de las propiedades de la linealidad: $f(a + b) = f(a) + f(b)\ y\ f(\gamma a) = \gamma f(a)$ y la monotonía de las funciones lineales, como una formalización de lo trabajado en el significado informal llevado al significado funcional (un aumento en la variable *x* implica un aumento en la variable *y)*. En situaciones funcionales o previas a estas, como el caso de problemas de patrones lineales, se realizan transformaciones a las expresiones halladas; es decir, se resuelven ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. (Ver ejemplos de las páginas 76 y 82).

NIVEL 4

Este nivel es asociado a las situaciones del significado funcional, con la diferencia de que el grado de generalidad que se requiere es mayor. El uso de los parámetros es característico un ejemplo de ello. Estos aparecen al querer representar familias de funciones lineales $\{f_a: R \to R/\ f_a = ax; a \in R\}$, por ejemplo. En este nivel se da el primer contacto con los parámetros en sus diferentes significados, según Drijvers (como se citó en Godino et al., 2015):

- Como registro numérico: el parámetro como un valor constante que no cambia. Por ejemplo, al asignar un valor particular de "a" en $f(x) = ax$ y ver qué gráfico se obtiene. La actividad no trata de encontrar el valor del parámetro, sino de asignarle uno fijo.
- Como cantidad cambiante: el parámetro adquiere un valor cambiante

que afecta a la fórmula o gráfica. Por ejemplo, al ver cómo el cambio de "a" en $f(x) = ax$ afecta al cambio de la gráfica.

- Como incógnita: el parámetro como una incógnita que debe ser encontrada. Por ejemplo, al resolver ecuaciones con parámetros.
- Como generalizador: el parámetro como un generalizador de fórmulas, soluciones o de casos concretos. Por ejemplo al determinar que la expresión general de una función afín es $f = ax + b$. Donde "x" es la única incógnita y los coeficientes "a" y "b" tienen un significado para dicha función.

Nuestra propuesta de niveles de algebrización para los significados de la linealidad solo es contemplada hasta un nivel 4 de razonamiento algebraico. Los niveles 5 y 6 son propios de objetos y procesos de mayor generalidad que, por lo general, se dan en el nivel superior de formación académica. Nuestra propuesta nos permitirá poder valorar la propuesta educativa de los colegios Innova Schools, desde el nivel primario hasta el nivel secundario.

En el siguiente capítulo presentaremos el análisis hecho a la propuesta de los colegios Innova Schools. Este análisis se centrará en las situaciones (tareas, problemas, ejercicios) para determinar qué tipo de significado de la linealidad la institución pretende impartir a sus estudiantes, así como el nivel de razonamiento algebraico que puede asociarse a la actividad matemática que se desprende de cada situación.

CAPÍTULO 4: VALORACIÓN DE UNA PROPUESTA EDUCATIVA

En este capítulo se analizará la propuesta de una institución educativa siguiendo dos criterios: el desarrollo de la noción de linealidad y la evolución del RAE. Para lograr esto, mencionaremos algunos aspectos del contexto de la Educación Básica Regular en el Perú en donde se enmarca la propuesta de la institución y luego, se detallarán aspectos importantes de la propuesta curricular de dicha institución.

4.1. Sobre la Educación Básica Regular

El Currículo Nacional de la Educación Básica es el documento base para los diversos programas educativos en el Perú. Este documento establece los aprendizajes que los estudiantes deben lograr gradualmente hasta el final de su etapa de escolaridad. Además, se establece el perfil de egreso de los estudiantes, el cual se va consolidando en toda la etapa escolar con miras a formar ciudadanos que respondan a las necesidades del mundo actual.

De acuerdo al perfil de egresado esperado, el diseño curricular se sustenta en tres nociones curriculares: Competencias, Capacidades y estándares de aprendizaje. Según el MINEDU (2016), estos conceptos pueden definirse:

- Competencia, es el conjunto de capacidades que moviliza una persona para lograr resolver una situación particular con sentido ético y de forma pertinente.
- Capacidad, son los recursos con los que cuenta una persona para actuar de forma competente. Estos se conformar de los conocimientos, habilidades y actitudes.
- Estándares de aprendizaje, son indicadores de desarrollo de una competencia de forma gradual y creciente. Estos se organizan en 8 niveles.

El desarrollar el perfil de egreso de los estudiantes implica el desarrollar sus capacidades y con esto las competencias. Para lograr esto, el Currículo Nacional propone 29 competencias, de las cuales 4 están dirigidas a las matemáticas:

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Cada una de estas competencias exige a los estudiantes el combinar sus respectivas capacidades. La competencia matemática asociada al desarrollo del razonamiento algebraico o que tiene en cuenta contenidos matemáticos considerados algebraicos es *Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio.* Se hace esta afirmación teniendo en cuenta su definición:

> Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto a otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre un fenómeno. Para esto plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante ejemplos, propiedades y contraejemplos. (MINEDU. 2016, pp. 73)

Así, notamos que en la descripción de la competencia se hace referencia a que los estudiantes puedan establecer generalidades, reconocer razones de cambio y el uso de conceptos algebraicos. La propuesta del Diseño Curricular plantea que el logro de las competencias se mida mediante los estándares de aprendizaje, estos indicadores de aprendizaje permiten valorar el avance de los estudiantes en las distintas competencias. Un primer análisis de los estándares de la competencia en mención nos permite concluir que en la propuesta nacional se busca desarrollar los diferentes significados asociados a la linealidad, como lo son patrones de percepción, la proporcionalidad, progresiones aritméticas y función lineal. Esto sigue a lo establecido en la investigación de Acosta (2011), es así que afirmamos que la propuesta curricular nacional implícitamente busca desarrollar la noción de linealidad. A continuación, presentamos los estándares mencionados en la Tabla 13:

Tabla 13.

Estándares de logro de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio

Nivel	Descripción de desarrollo de la competencia
8	Resuelve problemas en los que debe reconocer cambios continuos o discontinuos de cambio expresándolas en expresiones algebraicas que pueden incluir la regla general de sucesiones convergentes o divergentes, funciones seno o coseno y ecuaciones exponenciales. Utiliza el lenguaje formal para expresar la comprensión sobre las propiedades de inecuaciones lineales, ecuaciones exponenciales y funciones en tramos. Utiliza procedimientos y diversos recursos para interpolar, extrapolar y calcular el valor máximo y mínimo de sucesiones notables, funciones trigonométricas o funciones por tramos. Realiza afirmaciones sobre las relaciones que encuentra y las sustenta en demostraciones o argumentos que demuestran un gran dominio de conceptos.
7	Resuelve problemas en los que debe analizar cambios periódicos o regularidades entre magnitudes expresándolas en expresiones algebraicas. Estas pueden ser reglas generales de sistemas lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Expresa su comprensión sobre dichas expresiones y reconoce diferencias entre la función lineal y una función cuadrática y exponencial. Usa estrategias para hallar el valor desconocido en progresiones geométricas, ecuaciones lineales y cuadráticas. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales en expresiones algebraicas mediante ejemplos, contraejemplos y propiedades.
6	Resuelve problemas en los que debe reconocer regularidades o razones de cambio entre magnitudes expresándolas en patrones gráficos o numéricos, progresiones aritméticas, ecuaciones, funciones lineales y afín, y relaciones de proporción directa. Además, expresa la relación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. Comprueba si la expresión encontrada reproduce las condiciones del problema. Realiza afirmaciones en base a propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones, inecuaciones, función lineal y afín. Justifica sus argumentos y el de otros en base a propiedades y ejemplos.
5	Resuelve problemas en los que se reconoce regularidades entre dos magnitudes traduciéndolas en ecuaciones, desigualdades, relaciones de proporcionalidad directa y patrones de formación cuya regla de formación asocia la posición de sus

	elementos. Expresa su comprensión sobre el término general de un patrón y de la proporción como un cambio constante mediante lenguaje matemático. Usa estrategias para hallar el valor desconocido en ecuaciones, en relaciones de proporción y para crear, continuar o completar patrones. Realiza afirmaciones sobre patrones y los elementos no cercanos mediante ejemplos y propiedades.
4	Resuelve problemas en los que se reconoce equivalencias o regularidades entre dos magnitudes. Eso lo expresa en igualdades o en patrones aditivos o multiplicativos. Expresa su comprensión de la regla de formación de un patrón. Describe la relación de cambio de una magnitud respecto de otra mediante el lenguaje matemático. Usa la descomposición de números o el cálculo mental para crear, continuar o completar patrones. Realiza afirmaciones sobre los patrones y la equivalencia de expresiones.
3	Resuelve problemas en los que se reconoce regularidades. Eso lo expresa en igualdades, patrones de percepción o aditivos. Expresa su comprensión de las regularidades y patrones encontrados mediante material concreto u otras representaciones. Usa la descomposición de números o el cálculo sencillo para continuar o completar patrones.
2	Resuelve problemas referidos a relacionar objetos de su entorno en base a su percepción, ordenar hasta el quinto lugar, comparar cantidades de objetos y pesos. Realiza representaciones con su cuerpo, material concreto o dibujo.
1	Explora por iniciativa su entorno y los objetos que se encuentran ahí. Reconociendo así relaciones y características.

Fuente: MINEDU (2016)

Creemos que el desarrollo de la noción de linealidad tiene relación con el desarrollo de los diferentes niveles de logro de esta competencia. El estudio preliminar realizado nos ha permitido establecer que esta noción se construye gradualmente a partir de la noción de proporcionalidad y que se consolida, en el nivel secundario, como la función lineal. Esta construcción gradual se observa en los niveles de logro que se propone para la competencia mencionada.

Es en este contexto en el que se enmarcan las diferentes propuestas educativas, como la de Innova Schools. En la siguiente sección detallaremos la propuesta de dicha institución.

4.2. Sobre la institución Innova Schools

Innova Schools es una red de colegios que se fundó en el año 2005 y que actualmente cuenta con 63 sedes en Lima y provincias, además de que actualmente ha decidido expandirse en el extranjero, iniciando por México.

La institución desarrolla la metodología Blended Learning para el nivel primario y secundario. Esta metodología propone un trabajo grupal complementado con un trabajo autónomo, es así que desde el 4to de primaria, los estudiantes trabajan de forma grupal en las aulas mediante el trabajo colaborativo y, esto se complementa con un trabajo autónomo mediante los recursos digitales que la institución les brinda.

La institución propone un perfil de salida en sus estudiantes, con esto busca desarrollar competencias en sus estudiantes con el fin de que al final de su etapa escolar puedan enfrentar situaciones del mundo actual. Siendo de nuestro interés la competencia matemática.

La institución Innova Schools cuenta con su propio diseño curricular del área de matemáticas. En este se detalla la postura de la institución frente a qué se entiende por matemática, qué significado tiene competencia, cómo se desarrollará esta y cómo es la organización curricular de la institución. En esta investigación determinaremos si la propuesta de dicha institución tiene relación con la del MINEDU. Por lo que para esta investigación se ha solicitado el acceso al diseño curricular del Área de Matemática y las sesiones de clase de todos los grados. Estos documentos serán fundamentales pues serán los que analizaremos para lograr nuestros objetivos. A continuación, presentamos una breve descripción del diseño curricular del Área de Matemática de Innova Schools.

Descripción del Diseño Curricular del área de Matemática de Innova Schools

A continuación, presentamos los aspectos más importantes del Diseño Curricular del área de Matemática de Innova Schools (2019):

a) Concepción de la matemática

La noción que la institución adopta sobre las matemáticas es la siguiente: La matemática es una herramienta de uso cotidiano de forma inherente, es por ello que los estudiantes deben desarrollar las competencias y actitudes matemáticas que lo lleven a enfrentarse a situaciones reales de forma idónea. Es así que, desde los primeros grados, los estudiantes se deben enfrentar a situaciones que demanden desarrollar su competencia matemática (Innova Schools, 2019).

Según Miguel de Guzmán (citado en Innova Schools, 2019):

La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas. (p. 5)

Es así que la noción de la Matemática que adopta la institución es que sus estudiantes sean formados en los procesos sobre los contenidos matemáticos, pues estos les permitirán desarrollar una competencia matemática para que puedan desenvolverse en el mundo actual.

b) La resolución de problemas

El área de Matemática se fundamenta en la resolución de problemas, para la institución los problemas son las situaciones ideales para desarrollar la competencia matemática. Según Innova Schools (2019) un problema se define como:

Una situación (asociada a un contenido matemático) que se presenta al resolutor (y que este asume como problema) y ante la cual no cuenta con una manera conocida de llegar a la respuesta; por lo que debe buscar una manera de resolverlo, apelando a su conocimientos y experiencia. (p. 7)

En el enfoque que adopta la institución sobre los problemas, se propicia que estos sean parte fundamental del proceso de enseñanza – aprendizaje. No son presentados al final de la clase para evaluar lo que el estudiante aprendió; más bien, estos son usados para introducir y desarrollar una noción matemática por lo que son usados en el inicio de todas las sesiones de clase.

Por otro lado, la forma de como el estudiante debe abordar el problema se da mediante los pasos de Polya. Según Innova Schools (2019) estos son:

- Comprensión del problema, de lo que trata la situación planteada.
- Búsqueda de estrategia, buscar los caminos para resolver la situación planteada.
- Ejecución de la estrategia, seguir el camino antes trazado, de ser posible, y si no lo es regresar al paso anterior y escoger otro camino de solución.
- Visión retrospectiva, revisar y evaluar el camino escogido para futuras situaciones.

Esta propuesta de *resolución de problemas* es aplicada desde el 3er grado de primaria hasta el 11mo grado (5to de secundaria). En los niveles de 1ro y 2do grado se utiliza la Propuesta Singapur.

c) La Competencia Matemática

La propuesta de la institución Innova Schools busca desarrollar una competencia general en el área de matemática, esta *Competencia Matemática* es definida de la siguiente manera: "Formula, emplea e interpreta la matemática en distintos contextos (personal, social, ocupacional y científico), a través del uso de diferentes nociones, con el fin de resolver problemas de su entorno" (Innova Schools, 2019, p. 2).

Esta competencia matemática está dentro un grupo de siete competencias que el estudiante, al terminar el 5to grado de secundaria, debe desarrollar, con el objetivo de formar ciudadanos que sepan tomar decisiones y que estas den apoyo al desarrollo de la sociedad mediante las nociones matemáticas aprendidas.

La definición de competencia matemática adoptada por la institución busca que sus estudiantes puedan tomar decisiones a partir de los conocimientos, procedimientos y estrategias como herramientas para enfrentar el mundo actual. Esta competencia se compone de cuatro organizadores que adoptan la clasificación fenomenológica de los contenidos dados por PISA. Esta clasificación que propone Innova Schools (2019) tiene muchas similitudes con la propuesta del MINEDU (2016), en ambas propuestas se hace referencia a un enfoque de resolución de problemas. Aunque esto no es explícito en la propuesta nacional.

A continuación, en la Tabla 14presentamos los organizadores de la competencia matemática:

Tabla 14.

Organizadores de la competencia matemática en Innova Schools

Organizador **Resuelve problemas de**	**Descripción**
Cantidad	Referido al tratamiento de los conjuntos numéricos en sus distintas formas de representación, sus gráficos y operaciones; la medición de magnitudes como tiempo, masa y temperatura. Es decir, se trata de la cuantificación de los objetos del mundo real, empleando distintos sistemas de medida.
Regularidad, equivalencia y cambio	Referido a la identificación, representación, análisis y modelación del cambio en los distintos objetos y sucesos del mundo. Asimismo, al establecimiento de las relaciones en los distintos fenómenos y eventos y su generalización. Pueden ser representadas de muy diversas maneras: verbalmente, de manera numérica, simbólica o gráficamente. Las relaciones matemáticas pueden ser establecidas echando mano a nociones como las funciones, ecuaciones o desigualdades.
Movimiento, forma y localización	La forma es un término que posee un vínculo muy estrecho con la geometría, pero en este caso va mucho más allá de estos significados y métodos. Este organizador está relacionado además con las formas reales, su representación gráfica y analítica y la interpretación de la información visual. Asimismo, está referido a los patrones geométricos, la ubicación, trayectoria y las transformaciones espaciales.
Gestión de datos e incertidumbre	Referido a estos dos tópicos muy relacionados. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad, respectivamente. Los conceptos y actividades que son importantes en esta área son la recolección de datos, el análisis e interpretación de datos y sus representaciones. Asimismo, la probabilidad y la inferencia y el tratamiento de la incertidumbre.

Fuente: Innova Schools (2019, pp. 10-11)

La relación entre ambas propuestas parece ser la misma. Mientras que la propuesta nacional apunta a desarrollar 4 competencias, la propuesta de Innova Schools apunta a desarrollar una sola competencia mediante 4 organizadores. Además de que ambas propuestas apuestan por un enfoque de resolución de problemas.

Por otro lado, la propuesta de la institución propone una clasificación dentro de cada organizador, llamados aspectos, que tiene por objetivo clasificar los contenidos trabajados en cada competencia. A continuación, en la Tabla 15 mostramos los aspectos de cada competencia.

Tabla 15.
Aspectos de los organizadores de la competencia matemática en Innova Schools

Organizador Resuelve problemas de	Descripción
Cantidad	Noción y uso de los números: Abarca desde la noción de número natural y, pasando por sus características (factores, múltiplos, teoría de números); la noción de fracción (como parte de la unidad y como parte de un conjunto), hasta los diferentes conjuntos numéricos (Z, Q, I, R) para interpretar, y comunicar información de contenido numérico y para resolver situaciones problemáticas de razonamiento numérico.
	Noción y uso de las operaciones: Contempla desde los campos aditivo y multiplicativo de los números naturales (en sus diferentes ámbitos), y va incorporando los diferentes conjuntos numéricos y operaciones (potenciación y radicación), el significado y las propiedades de las operaciones, y las habilidades de estimación y cálculo (mental, escrito y con ayudas tecnológicas).
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones: Contempla identificación de regularidades (geométricas y numéricas), así como series y sucesiones.
	Noción y uso de las igualdades y desigualdades: Nociones de igualdad, equivalencia, incógnita, variable, ecuaciones e inecuaciones.
	Noción y uso de las relaciones y funciones: Nociones de relación, función, dominio y rango definidas en diferentes conjuntos numéricos.
Forma, movimiento y localización	Orientación y movimiento: Ubicación y desplazamiento de objetos y puntos en el medio circundante y en el plano (escalas de representación). Transformaciones rígidas (rotación, ampliación, reflexión). Transformaciones isométricas (ampliación y reducción).

	Visualización y relaciones geométricas: Objetos geométricos (figuras y sólidos), sus elementos, relaciones y propiedades (espaciales y métricas).

Fuente: Innova Schools (2019, p.11)

Estos aspectos son importantes en nuestro análisis pues permitirán identificar los contenidos trabajados en un determinado organizador. Teniendo en cuenta nuestro significado de referencia, tenemos una primera noción de qué organizadores analizar.

Dadas las descripciones de los cuatro organizadores, para lograr los fines de esta investigación tenemos como idea a priori la de analizar los documentos y sesiones que apuntan a desarrollar la competencia *Resolver problemas de regularidad, equivalencia y cambio.* Sin embargo, miraremos también las otras competencias pues, como hemos visto, la linealidad aparece como diversos significados y estos pueden ser trabajados en distintos organizadores.

4.3. Análisis de los documentos de Innova Schools

En esta sección realizaremos el análisis planificado a los documentos de la institución Innova Schools. Estos son: El diseño Curricular del Área de Matemática y las sesiones presentadas en el Teacher Resource Center (https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/contenido).

4.3.1. Documentos considerados para el análisis y criterios de análisis

Como indicamos antes, se ha tenido acceso al significado pretendido/implementado de la linealidad de la institución Innova Schools mediante documentos curriculares de dicha institución. A continuación, presentamos los documentos considerados para nuestro análisis:

- El Diseño curricular del Área de Matemática de la institución

  Del cual se analizará la organización curricular de la institución para determinar qué sesiones de aprendizaje abordan las competencias de nuestro interés.

- El Teacher Resource Center (TRC)

  Con el cual se podrá tener acceso a todas las sesiones de la institución. En esta plataforma virtual se detallan las sesiones de clase de cada grado, con lo cual sabremos qué noción matemática se desarrolla en cada clase y a qué competencia apunta dicha sesión. Además, de tener acceso a las fichas de ejercicios y problemas a usarse en las sesiones.

El análisis que realizaremos será teniendo en cuenta el significado de referencia sobre la noción de linealidad que hemos construido en esta investigación y los niveles de algebrización adaptados a esa noción. Con estos elementos determinaremos cómo presenta la institución los distintos significados de la noción de linealidad desde el primer hasta el décimo grado.

Para lograr esto nos guiaremos de algunos aspectos del trabajo de Castro et al. (2017), siendo así que:

- En primer lugar, determinaremos cuáles de las sesiones de clase buscan desarrollar la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Para lo cual analizaremos los estándares que la institución declara en el Cuadro organizador de estándares del diseño Curricular del Área de Matemática, y así determinaremos qué estándares trabajan, por su enunciación, los diferentes significados de la linealidad.
- Luego, teniendo en cuenta los estándares seleccionados, identificaremos en qué sesiones se abordan dichos estándares en los grados mencionados. Esto se hará desde la página web de la institución (TRC) en donde se encuentran todas las sesiones de cada grado. De cada sesión clasificaremos las situaciones – problemas presentados de acuerdo a los diversos significados de linealidad.

Finalmente, analizaremos las situaciones – problemas presentadas para determinar en qué medida la institución Innova Schools propicia el desarrollo del razonamiento algebraico mediante actividades que desarrollan la linealidad.

4.3.2. Estándares seleccionados desde el 1er al 10mo grado

En primer lugar, presentamos los estándares que hemos determinado desarrollan los diferentes significados de la linealidad. Estos estándares están organizados por el aspecto que se trabaja y el grado en que se trabaja.

- En el 1er grado

  En el primer grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

  MAT.1.21: "Resuelve situaciones que demanda crear, continuar, interpretar, identificar y graficar patrones geométricos y numéricos con números naturales de hasta dos cifras (naturales)" (Innova Schools, 2019, p.14).

  MAT.1.33: "Resuelve situaciones que demandan representar y describir las posiciones y movimientos de un objeto empleando hasta una referencia" (Innova Schools, 2019, p.14).

  La Tabla 16 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

  Tabla 16.
  Estándares analizados en el primer grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.1.21
Forma, movimiento y localización	Orientación y movimiento	MAT.1.33

  Fuente: Elaboración propia

- En el 2do grado

  En el segundo grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.2.21: “Resuelve situaciones que demanda crear, continuar, interpretar, identificar y graficar patrones geométricos y numéricos con números naturales de hasta dos cifras” (Innova Schools, 2019, p.15).

MAT.2.14: “Resuelve situaciones problemáticas con números naturales y de una o más etapas en el campo aditivo (…); en el campo multiplicativo (arreglos e inicios de proporcionalidad simple, incluyendo reparto y agrupación)” (Innova Schools, 2019, p.15).

MAT.2.31: “Resuelve situaciones geométricas que demandan identificar, clasificar y graficar figuras y objetos atendiendo a sus atributos geométricos y estableciendo relaciones geométricas a nivel perceptual” (Innova Schools, 2019, p.15).

La Tabla 17 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 17.
Estándares analizados en el segundo grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.2.21
Cantidad	Noción y uso de las operaciones	MAT.2.14
Forma, movimiento y localización	Visualización y relaciones geométricas	MAT.2.31

Fuente: Elaboración propia

- En el 3er grado

En el tercer grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.3.21: “Resuelve situaciones que demanda crear, continuar, interpretar, explicar, identificar y graficar patrones geométricos y numéricos con números naturales" (Innova Schools, 2019, p.16).

MAT.3.23: "Resuelve situaciones con material concreto que demanden identificar y explicar las relaciones de cambio entre dos magnitudes y las representa" (Innova Schools, 2019, p.16).

MAT.3.14: "Resuelve situaciones problemáticas con números naturales y de una o más etapas, en el campo aditivo (…); en el campo multiplicativo (proporcionalidad simple, producto de medidas, arreglos), así como problemas que involucran al campo aditivo y multiplicativo" (Innova Schools, 2019, p.16).

MAT.3.31: "Resuelve situaciones geométricas que demandan identificar, clasificar y graficar figuras y objetos atendiendo a sus atributos geométricos y estableciendo relaciones geométricas a nivel perceptual" (Innova Schools, 2019, p.16).

La Tabla 18 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 18.

Estándares analizados en el tercer grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.3.21
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.3.23
Cantidad	Noción y uso de las operaciones	MAT.3.14
Forma, movimiento y localización	Visualización y relaciones geométricas	MAT.3.31

Fuente: Elaboración propia

- En el 4to grado

En el cuarto grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.4.21: “Resuelve situaciones que demanda crear, continuar, interpretar, explicar, identificar y graficar patrones aditivos y multiplicativos, estableciendo la relación entre el valor de uno de sus términos y su posición” (Innova Schools, 2019, p.17).

MAT.4.23: “Resuelve situaciones con material concreto que demanden identificar y explicar las relaciones de cambio entre dos magnitudes” (Innova Schools, 2019, p.17).

MAT.4.31: “Resuelve situaciones geométricas que demandan identificar, clasificar y graficar figuras y objetos atendiendo a sus atributos geométricos y estableciendo relaciones geométricas a nivel perceptual” (Innova Schools, 2019, p.17).

La Tabla 19 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 19.
Estándares analizados en el cuarto grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.4.21
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.4.23
Forma, movimiento y localización	Visualización y relaciones geométricas	MAT.4.31

Fuente: Elaboración propia

- En el 5to grado

En el quinto grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.5.21: “Resuelve situaciones que demandan establecer la regularidad entre los términos de sucesiones con patrones geométricos y numéricos, relacionando el valor de sus términos según su posición” (Innova Schools, 2019, p.18).

MAT.5.23: “Resuelve situaciones de cambio que demanden establecer relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, usando tablas o el plano cartesiano” (Innova Schools, 2019, p.18).

MAT.5.33: “Localiza objetos en el plano cartesiano, se orienta de acuerdo a puntos cardinales y representa transformaciones rígidas en el plano” (Innova Schools, 2019, p.18).

La Tabla 20 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 20.
Estándares analizados en el quinto grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.5.21
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.5.23
Forma, movimiento y localización	Orientación y movimiento	MAT.5.33

Fuente: Elaboración propia

- En el 6to grado

En el sexto grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.6.21: “Resuelve situaciones que demandan establecer la regularidad entre los términos de sucesiones con patrones geométricos y numéricos, relacionando el valor de sus términos según su posición” (Innova Schools, 2019, p.19).

MAT.6.23: “Resuelve situaciones susceptibles de ser modeladas mediante relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa), usando tablas, el plano cartesiano y expresiones simbólicas” (Innova Schools, 2019, p.19).

MAT.6.33: “Resuelve situaciones que demandan identificar, describir y representar transformaciones rígidas (traslación, rotación y reflexión), ampliaciones y reducciones de figuras bidimensionales en cuadrículas” (Innova Schools, 2019, p.19).

La Tabla 21 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 21.
Estándares analizados en el sexto grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.6.21
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.6.23
Forma, movimiento y localización	Orientación y movimiento	MAT.6.33

Fuente: Elaboración propia

- En el 7mo grado

En el séptimo grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.7.24: "Resuelve situaciones susceptibles de ser modeladas mediante relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa) o las funciones lineales y afines, usando tablas, el plano cartesiano y expresiones simbólicas" (Innova Schools, 2019, p.19).

MAT.7.32: "Resuelve situaciones que demandan interpretar, identificar, graficar y justificar la semejanza de dos figuras y sus transformaciones rígidas, ampliaciones y reducciones, en el plano cartesiano" (Innova Schools, 2019, p.20).

La Tabla 22 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 22.
Estándares analizados en el séptimo grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.7.24
Forma, movimiento y localización	Orientación y movimiento	MAT.7.32

Fuente: Elaboración propia

- En el 8vo grado

En el octavo grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.8.23: "Resuelve situaciones susceptibles de ser modeladas mediante relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa), función lineal o afín, o la función cuadrática, expresiones simbólicas y el plano cartesiano" (Innova Schools, 2019, p.20).

MAT.8.21: "Resuelve situaciones problemáticas que demanden establecer y representar – de forma concreta, gráfica y simbólica – patrones de crecimiento o decrecimiento, la relación entre sus términos y la suma de los mismos, a partir de la posición que ocupa" (Innova Schools, 2019, p.20).

La Tabla 23 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 23.

Estándares analizados en el octavo grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.8.23
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.8.21

Fuente: Elaboración propia

- En el 9no grado

En el noveno grado se han determinado que los siguientes estándares trabajan significados de la linealidad:

MAT.9.21: "Resuelve situaciones problemáticas que demandan establecer y representar patrones de variación lineal y geométrica, la relación entre sus términos y la suma de los mismos, a partir de la posición que ocupa" (Innova Schools, 2019, p.21).

MAT.9.23: "Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser modeladas mediante funciones lineales o cuadráticas que impliquen graficar, interpretar, tabular, simplificar o calcular" (Innova Schools, 2019, p.21).

La Tabla 24 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponden estos estándares.

Tabla 24.

Estándares analizados en el noveno grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Interpretación y generalización de patrones	MAT.9.21
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.9.23

Fuente: Elaboración propia

- En el 10mo grado

En el décimo grado se han determinado que el siguiente estándar trabajan significados de la linealidad:

MAT.10.22: “Resuelve situaciones problemáticas que demandan interpretar, identificar, graficar, recodificar, modelar, optimizar y definir, usando funciones algebraicas” (Innova Schools, 2019, p.21).

La Tabla 25 muestra en qué organizador y a qué aspecto corresponde este estándar.

Tabla 25.

Estándares analizados en el décimo grado

Organizador	Aspecto	Estándar
Regularidad, equivalencia y cambio	Noción y uso de las relaciones funcionales	MAT.10.22

Fuente: Elaboración propia

Hemos determinado aquellos estándares, desde el 1er hasta el 10mo grado, que por su descripción abarcan algunos contenidos relacionados a los diferentes significados de la linealidad. Estos estándares nos ayudarán a escoger, del Teacher Resource Center de Innova Schools, las sesiones con mayor facilidad pues en esta plataforma se indica qué estándar se trabaja en cada sesión.

En el siguiente apartado clasificaremos las situaciones – problemas que permiten el desarrollo de la linealidad de acuerdo al significado de referencia que hemos elaborado.

4.4. Valoración de la propuesta de Innova Schools en términos del desarrollo de la noción de linealidad

En esta sección se presenta el análisis a la propuesta de la institución en términos del desarrollo de la noción de linealidad. Es decir, evaluaremos de qué manera la propuesta de la institución Innova Schools atiende a los diferentes significados de la linealidad.

4.4.1. Clasificación de las situaciones – problemas según los significados de linealidad desde el 1er al 10mo

En esta sección clasificaremos las situaciones – problemas que propone Innova Schools en sus sesiones de clase en los grados desde 1ro hasta el 10mo grado en relación a los diferentes significados de la linealidad. Por ello, se tendrá como base de análisis el significado de referencia elaborado previamente en esta investigación: informal, aritmético, proporcional, patrones lineales y funcional. Es importante mencionar que se está considerando a los patrones lineales como un significado previo al funcional.

Este significado nos ha permitido caracterizar situaciones para cada significado de la linealidad teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas desarrolladas al resolverlas. A partir de ello, en cada grado, se identificarán situaciones representativas asociadas a un mismo significado. En la sección de Anexos, se adjuntarán la totalidad de situaciones analizadas para cada grado, así como sus soluciones esperadas.

Para lograr los objetivos de esta sección, seguiremos los siguientes procedimientos:

- Escogeremos y analizaremos aquellas situaciones que pertenezcan a las sesiones que abordan los estándares identificados en el análisis de la sección anterior.

- Clasificaremos las situaciones según los diferentes significados de la linealidad del significado de referencia. Se tendrá en cuenta la caracterización de las situaciones para cada significado y los procedimientos que intervienen en sus soluciones. Se elegirán las situaciones que cumplan con dichas descripciones a modo de ejemplo.

Clasificación de las situaciones en el 1er grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.1.21 y MAT.1.33. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: informal y en patrones lineales. A continuación, presentamos algunas situaciones representativas que se ajustan a la descripción hecha en el significado de referencia, así mismo estas situaciones están organizadas según los significados de linealidad elaborados.

Ejemplo de una situación asociada al significado informal de la linealidad

La situación presentada se ajusta a lo descrito en el significado de referencia ya que lo solicitado en la tarea demanda recurrir a la percepción para reconocer características en figuras geométricas.

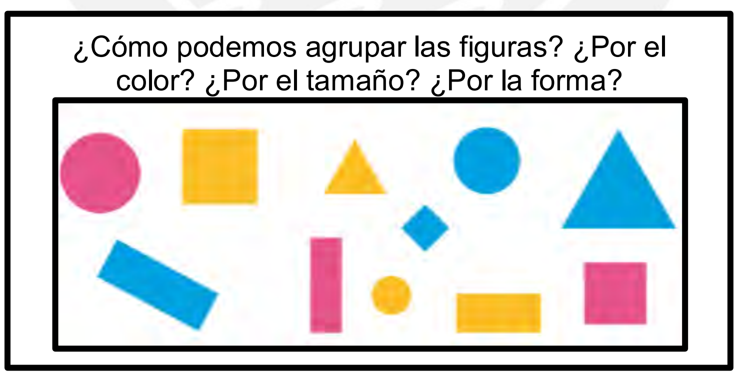


Figura 15. Situación 1

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado de la linealidad en patrones

lineales

Estas tareas se ajustan a la descripción de este significado de la linealidad, pues demandan completar una secuencia numérica a partir de reconocer un patrón de formación. La tarea puede o no demandar el decir cuál es el patrón, en el segundo ejemplar sucede ello.

12. Completa la secuencia:

18 ; 15 ; 12 ; ______ ; 6 ; ______

Figura 16. Situación 2

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

¿Qué observas en la serie de números horizontales? ¿Qué observas en la serie de números verticales? ¿Podemos usar un patrón para determinar el número que sigue en la serie?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24		26	27	28	29	30
31	32		34	35	36		38	39	40

Figura 17. Situación 3

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones en el 2do grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.2.21, MAT.2.14 y MAT.2.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético y en patrones lineales.

Ejemplos de situaciones asociadas al significado de la linealidad en tareas de patrones lineales

Estas situaciones sobre secuencias numéricas permiten que los estudiantes reconozcan una regularidad entre los términos (patrón). Las tareas se limitan a completar términos cercanos en la secuencia. A diferencia de otras situaciones, en la situación 4 se solicita hacer explícito la regla de formación en un lenguaje natural.

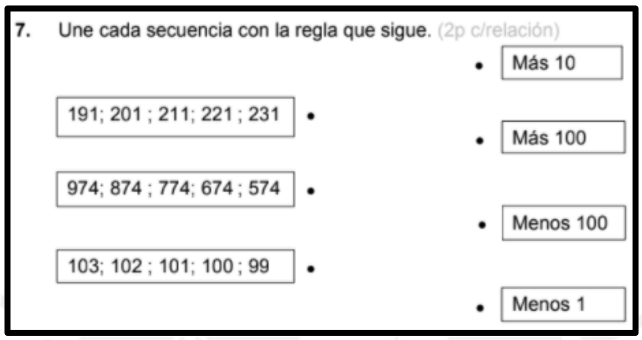


Figura 18. Situación 4

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

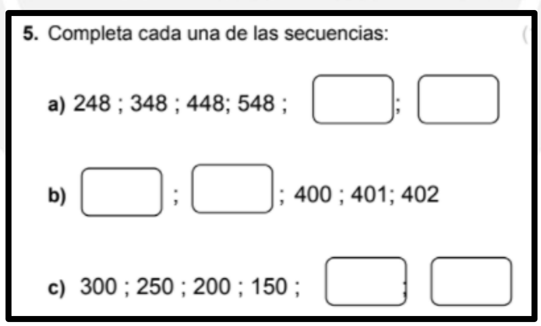


Figura 19. Situación 5

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

4. Completa las siguientes secuencias.

a. 36 ; 32 ; 28 ; 24 ; ___ ; ___ ; ___

b. ___ ; 12 ; 15 ; 18 ; ___ ; ___

Figura 20. Situación 6

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado aritmético de la linealidad

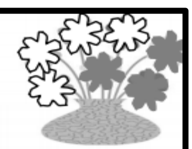
Estas situaciones representan un primer acercamiento con la noción de razón, pues buscan que el estudiante establezca una relación entre dos magnitudes, no se limita a realizar operaciones de multiplicación y división. La solución requiere realizar dichas operaciones, pero también implica determinar cómo cambia una magnitud al hacerlo la otra y hallar un valor desconocido luego de reconocer cuál es la razón unitaria entre las magnitudes que intervienen.

7. Jaime elabora un juguete para niños usando un par de botellas de plástico. ¿Cuántos juguetes podrá elaborar con 24 botellas de plástico?

Figura 21. Situación 7

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

6. Se hacen arreglos florales con flores blancas y oscuras como se muestra. Según ello resuelve.



a. 28 flores blancas. ¿Para cuántos arreglos florales alcanzan?

b. Para armar 3 de esos arreglos florales. ¿Cuántas flores se usan en total?

Figura 22. Situación 8

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones en el 3er grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.3.21, MAT.3.23, MAT.3.14 y MAT.3.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético, proporcional y en patrones lineales.

Ejemplo de situaciones asociadas al significado de la linealidad en tareas de patrones lineales

Como en los grados anteriores, estas situaciones piden completar una secuencia numérica a partir de reconocer cuál es el patrón. Por otro lado, el segundo ejemplar es una sucesión gráfica en el que se solicita hallar un valor desconocido no cercano a los términos ya presentados y en el que determinamos que es necesario relacionar la posición que se ocupa en la sucesión.

1. Observa la serie numérica y completa el espacio en blanco.

325 ; 350 ; 375 ; 400 ; _______ ; 450

2. Observa la serie numérica y completa el espacio en blanco.

6 831 ; 6 731 ; 6 631 ; 6 531 ; 6 431 ; _______ ; 6 231

Figura 23. Situación 9

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Figura 24. Situación 10

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado aritmético de la linealidad

Las situaciones escogidas en el grado se ajustan a la descripción hecha de este significado de la linealidad. Estas situaciones demandan realizar operaciones aritméticas a partir de establecer relaciones proporcionales entre las magnitudes involucradas en el problema: cantidad – precio, número de envases – cantidad de huevos para hallar un valor desconocido. El uso de la razón unitaria está implícito en estas actividades, no es presentado como tal.

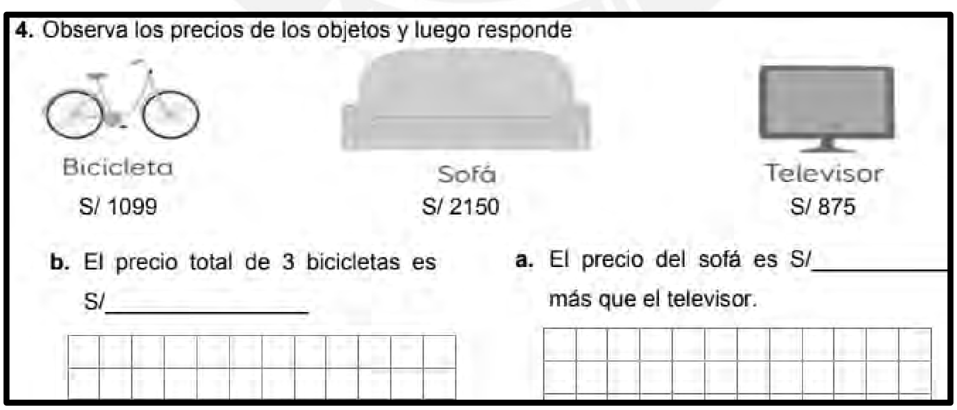


Figura 25. Situación 11

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Figura 26. Situación 12
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,
https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de una situación asociada al significado proporcional de la linealidad

La situación presentada encaja dentro de la descripción de este significado de la linealidad, se hace uso de fracciones equivalentes. Esta noción es usada para hallar valores desconocidos en proporciones.

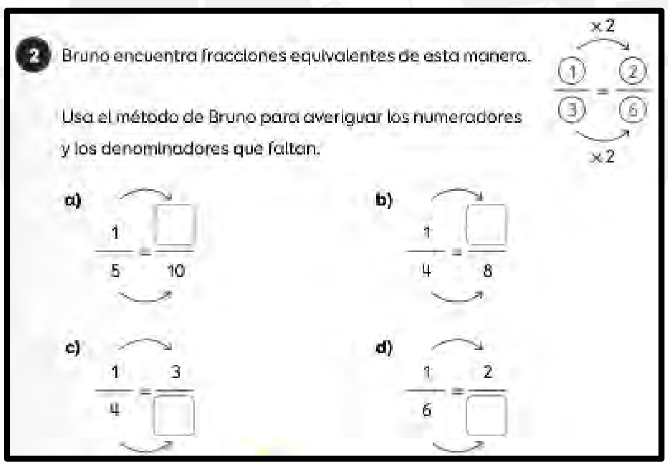


Figura 27. Situación 13
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,
https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones – problemas en el 4to grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.4.21, MAT.4.23, y

MAT.4.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético, proporcional, en patrones lineales y funcional.

Ejemplo de una situación asociada al significado aritmético de la linealidad

La situación escogida se ajusta a la descripción de este significado, ya que demanda hallar un valor desconocido a partir de establecer la relación entre precio – cantidad de madejas de lana, cuestión que se resuelve con una división.

5. María recibió S/ 24 por vender 6 madejas de lana.
¿A cuánto vendió cada madeja de lana?

Figura 28. Situación 14

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de una situación asociada al significado proporcional de la linealidad

El problema demanda establecer relaciones de equivalencia entre diferentes magnitudes, luego hallar valores desconocidos a partir de las relaciones encontradas.

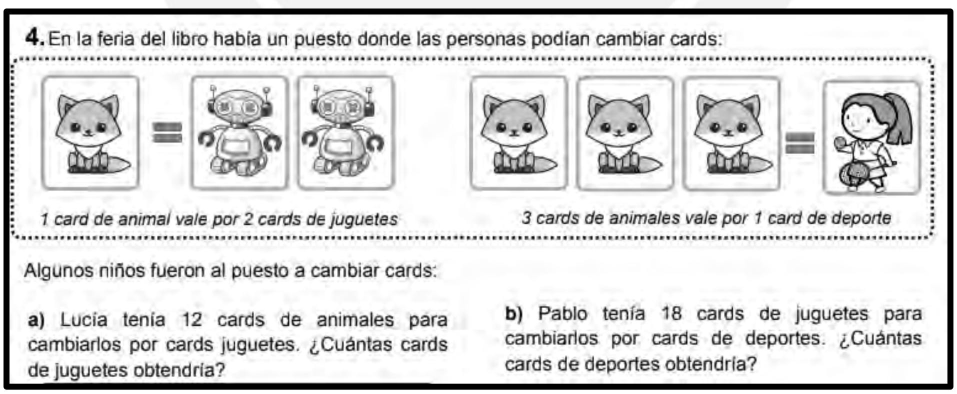


Figura 29. Situación 15

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado de la linealidad en tareas de

patrones lineales

En estas situaciones la actividad es reconocer el patrón y con este hallar los valores solicitados, pero ahora están contextualizadas en un problema. Una diferencia entre las situaciones de este grado con los anteriores es que ahora las tareas demandan hacer explícito el patrón de la sucesión.

Marco tenía ahorrado una cierta cantidad de dinero. Cierto día decidió comprar una computadora, y desde ese día ahorró S/ 21 diarios. Seis días después, Marco tuvo S/ 975 ahorrados.

a. ¿Cuánto dinero tenía Marco antes de ahorrar S/21 diarios? ¿Qué hiciste para saberlo?
b. ¿Cuál es el patrón en la sucesión? Explica tu respuesta
c. ¿En cuántos días tendrá S/ 1 038?
d. Si la computadora que se quiere comprar Marco cuesta S/ 1 050 y sigue ahorrando S/ 21 diarios, ¿en cuántos días tendrá el dinero para comprarse la computadora? Justifica tu respuesta

Figura 30. Situación 16

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

1. María recibió el lunes en la mañana S/ 250 para sus gastos de alimentación y movilidad de la semana. Ella registra el dinero que tiene al iniciar cada día. Si cada día gasta lo mismo, ¿cuánto dinero tendrá al iniciar el domingo? Completen el patrón.

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
S/ 250	S/ 220	S/ 190				

Responde.

a) ¿Cada día gasta la misma cantidad?____________ ¿Cuánto? ____________
b) ¿Cuánto dinero le quedará al iniciar el día jueves? ____________________
c) Escribe con tus palabras la regla que expresa esta secuencia numérica.

Figura 31. Situación 17

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad

Estas situaciones encajan dentro del significado funcional dado que se reconocen términos usados en dicho significado: regla que se aplica a un valor dado, valor entrante, valor saliente. Esta es una manera, dado el grado en que se presenta, de trabajar con la noción de función. Además, se hace uso del registro tabular.

Esta es una máquina en la que ENTRA un valor, se le aplica una regla y SALE el valor resultado.

Los valores de la máqui

- En cada tabla observa el valor que ingresa y el valor que sale.
- Adivina la regla y escríbela en la línea correspondiente.
- Completa, según la regla, los números que faltan en los espacios en blanco.

Entra	2	3	5	9	12		20	
Sale	4	6	10	18		30		62

Regla: ____________________

Entra	5	16	8	13	20		18	
Sale	12	23	15	20		31		50

Regla: ____________________

Figura 32. Situación 18

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

b)

Entra	2	7	11			
Sale				26	29	89

La regla es: **"El triple de un número y le quito 1"**

Figura 33. Situación 19

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones en el 5to grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.5.21, MAT.5.23, y MAT.5.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: informal, aritmético y proporcional.

Ejemplos de situaciones asociadas al significado informal de la linealidad

Estos problemas atienden al significado intuitivo. La tarea demanda reconocer ampliaciones y reducciones, sin tener en cuenta en qué medida.

Figura 34. Situación 20

Figura 35. Situación 21

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado aritmético de la linealidad

A diferencia de los ejemplares anteriores, en esta oportunidad se hace explícito en qué medida (mitad, tercio, etc.) se quiere reducir una determinada figura geométrica.

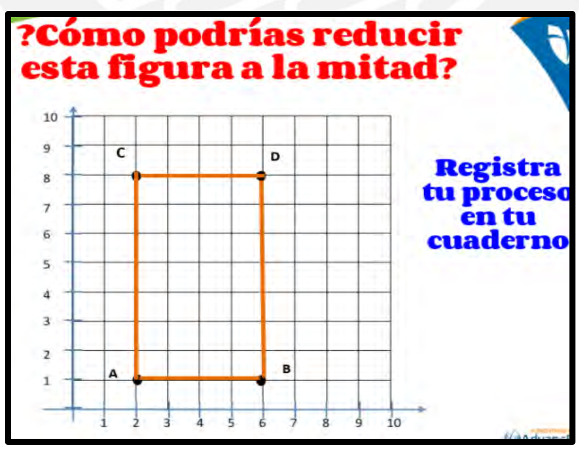


Figura 36. Situación 22

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Raquel ha representado un terreno en la cuadrícula como se muestra en el dibujo. Luis hizo una nueva representación. Si la representación de Raquel es la de Luis reducida a su tercera parte de sus dimensiones, grafica la representación que hizo Luis.

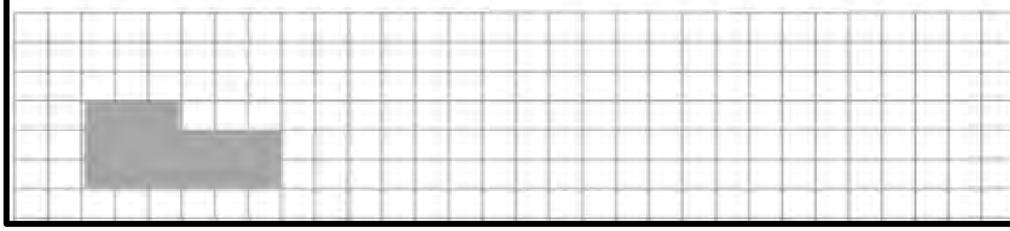


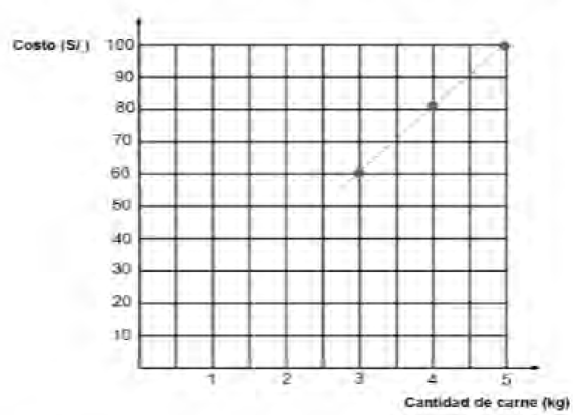
Figura 37. Situación 23

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado proporcional de la linealidad

Las situaciones escogidas demandan, a partir de un gráfico o tabla, reconocer la relación proporcional entre las magnitudes y, luego, responder a preguntas a partir de ese razonamiento. Son muy cercanas al significado funcional, sin embargo, la tarea no demanda que dicha relación funcional sea expresada.

La gráfica nos muestra la relación entre la cantidad de kilogramos (kg) de carne de parrillada que se ofrece en una carnicería y su costo en soles (S/).



Según la gráfica mostrada, responde:

a. ¿Cuánto cuesta un kilogramo de carne para parrilla?
b. ¿Cuánto se pagará por 2 kg de este tipo de carne?
c. Teresa pagó 90 soles por la carne que compró. ¿Cuántos kilogramos de carne habrá comprado Teresa?
d. Ricardo realizará una parrillada y comprará 55 kg de este tipo de carne. ¿Cuánto pagará por toda la carne comprada?

Figura 38. Situación 24

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Esta situación demanda completar una tabla de proporcionalidad, luego de reconocer la relación entre dos magnitudes.

b) Roy vende casacas siempre al mismo precio. Él organiza la información de sus ventas así:

Número de casacas	3	4	5	8		20
Precio (S/)	135		225		450	

- Completa la tabla.
- Según la información de la tabla, ¿es posible que Roy recaude S/ 700 de forma exacta? ¿Por qué?

Figura 39. Situación 25

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

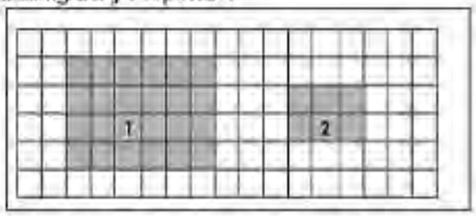
Clasificación de las situaciones en el 6to grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.6.21, MAT.6.23, MAT.6.33 y MAT.6.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético, proporcional y en patrones lineales.

Ejemplos de situaciones asociadas al significado aritmético de la linealidad

La primera situación demanda realizar una comparación entre dos figuras teniendo en cuenta sus dimensiones, establecer una reducción/ampliación y con ello determinar si son semejantes. El segundo ejemplar se ajusta a la descripción del significado aritmético porque la actividad demanda encontrar cómo se relacionan las magnitudes y con esto, mediante una operación aritmética, encontrar el valor pedido.

1. Observa cada figura y responde:



*¿Cuántos cuadrados de ancho mide la figura 1? ___________
*¿Cuántos cuadrados de ancho mide la figura 2? ___________
*¿Cuántos cuadrados de largo mide la figura 1? ___________
*¿Cuántos cuadrados de largo mide la figura 2? ___________
*¿Qué forma tiene la figura 1? _______________
*¿Qué forma tiene la figura 2? _______________
*¿La figura 2 es una ampliación o una reducción de la figura 1? ¿Por qué? ¿Cuál crees que fue el criterio matemático (escala)?

Figura 40. Situación 26

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

1. Delia ha recibido una mercadería de paquetes de hojas bond para vender en su librería. Ayúdala a hacer algunos cálculos:

RETO 1: Si el precio de una docena de paquetes es de 240 soles. ¿Cuál es el precio de un paquete? ¿A cuánto debería vender un paquete si quiere ganar un céntimo por hoja?

Figura 41. Situación 27

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado proporcional de la linealidad

Estos ejemplares se ajustan al significado porque demandan determinar si algunas cantidades guardan relación proporcional, hallar un valor desconocido a partir de una razón dada, completar tablas de proporcionalidad y hacer uso de la razón unitaria para hallar otro valor.

En un mercado se observan los siguientes carteles :

El costo del tomate es proporcional al peso comprado? ¿Y el de la papa? Justifica

Tomate
2 kg por S/. 7
4 kg por S/. 13
5 kg por S/. 15

Papa
4 kg por S/. 6
6 kg por S/. 9
8 kg por S/. 12

Figura 42. Situación 28

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Reto 1

La razón entre la cantidad de mujeres y hombres en una clase es de 6:5. Si la cantidad de mujeres es 18, calcula la cantidad hombres.

Figura 43. Situación 29

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Realiza lo solicitado.

a) Completa la tabla de proporcionalidad.

Naranjas (kg)	5	10		20	25	
Costo (S/.)	4		16			80

b) Resuelve.

Si 8 donuts cuestan 24 soles, ¿cuánto se pagará por 5 donuts similares?, ¿y por una docena y media?

Figura 44. Situación 30

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

2. Observa la siguiente imagen y responde las siguientes preguntas:

a. Construye una tabla para hallar el valor unitario.

b. Halla la constante de proporcionalidad.

c. Redacta una expresión matemática que relacione el número de lápices con su precio.

Figura 45. Situación 31

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Los padres de familia de una institución educativa se pusieron de acuerdo para pintar las aulas. Pablo, que es pintor y tiene experiencia, afirmó que con 2 galones de pintura se pueden pintar 80 m² de pared. Si las paredes que se pintarán tienen un área de 40 m², 160 m², 200 m² y 400 m², respectivamente, ¿cuántos galones de pintura hacen falta para toda la obra?

a. Comenten, ¿para pintar 40 m² de pared se necesitarán más o menos de 2 galones de pintura? ¿Por qué?

b. Analicen lo que dicen Patty y Paco. Luego completen la tabla.

Con 2 galones se pintan 80 m². Entonces, para pintar 40 m² necesitaré…

Con 2 galones se pintan 80 m². Entonces, para pintar 160 m² necesitaré…

	Cantidad de galones de pintura	Superficie en metros cuadrados	
÷ 2		40	÷ 2
	2	80	
× 2		160	× 2
		200	
		400	

c. Respondan.

• ¿Qué relaciones emplearon para calcular el número de galones necesarios para pintar 200 m² y 400 m2?

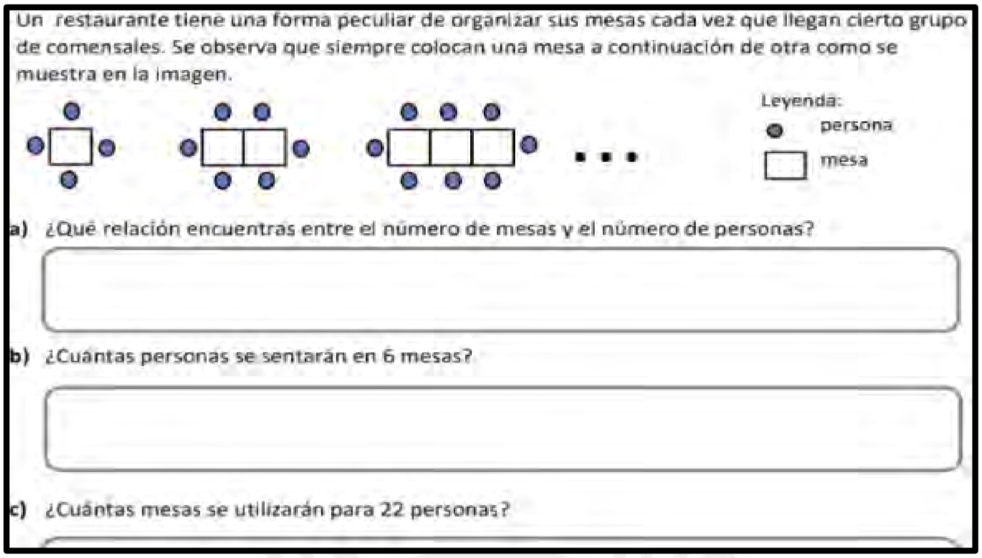
• ¿Qué relación existe entre el número de galones de pintura y la superficie pintada?

Figura 46. Situación 32

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado de la linealidad en tareas de patrones lineales

Estas situaciones solicitan reconocer un patrón de cambio, que es constante entre términos, y con él hallar términos de la sucesión lejanos. En el segundo ejemplar, a diferencia del primero, la tarea requiere que se halle una expresión algebraica que generalice el patrón de formación.



Un restaurante tiene una forma peculiar de organizar sus mesas cada vez que llegan cierto grupo de comensales. Se observa que siempre colocan una mesa a continuación de otra como se muestra en la imagen.

Leyenda:
persona
mesa

a) ¿Qué relación encuentras entre el número de mesas y el número de personas?

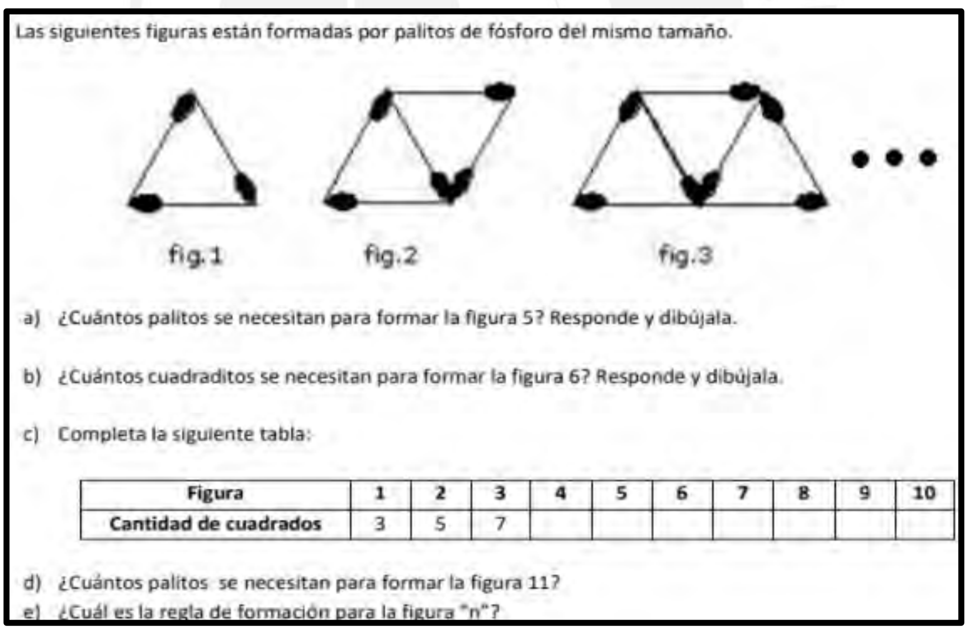
b) ¿Cuántas personas se sentarán en 6 mesas?

c) ¿Cuántas mesas se utilizarán para 22 personas?

Figura 47. Situación 33

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil



Las siguientes figuras están formadas por palitos de fósforo del mismo tamaño.

fig.1 fig.2 fig.3

a) ¿Cuántos palitos se necesitan para formar la figura 5? Responde y dibújala.

b) ¿Cuántos cuadraditos se necesitan para formar la figura 6? Responde y dibújala.

c) Completa la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	3	5	7							

d) ¿Cuántos palitos se necesitan para formar la figura 11?

e) ¿Cuál es la regla de formación para la figura "n"?

Figura 48. Situación 34

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones – problemas en el 7mo grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.7.24, MAT.7.32 y MAT.7.31. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético, proporcional y funcional.

Ejemplo de una situación asociada al significado aritmético de la linealidad

Los ejemplares seleccionados piden determinar figuras semejantes a partir de que se compare forma y dimensiones de las figuras mostradas, esto se ajusta a la descripción de este significado.

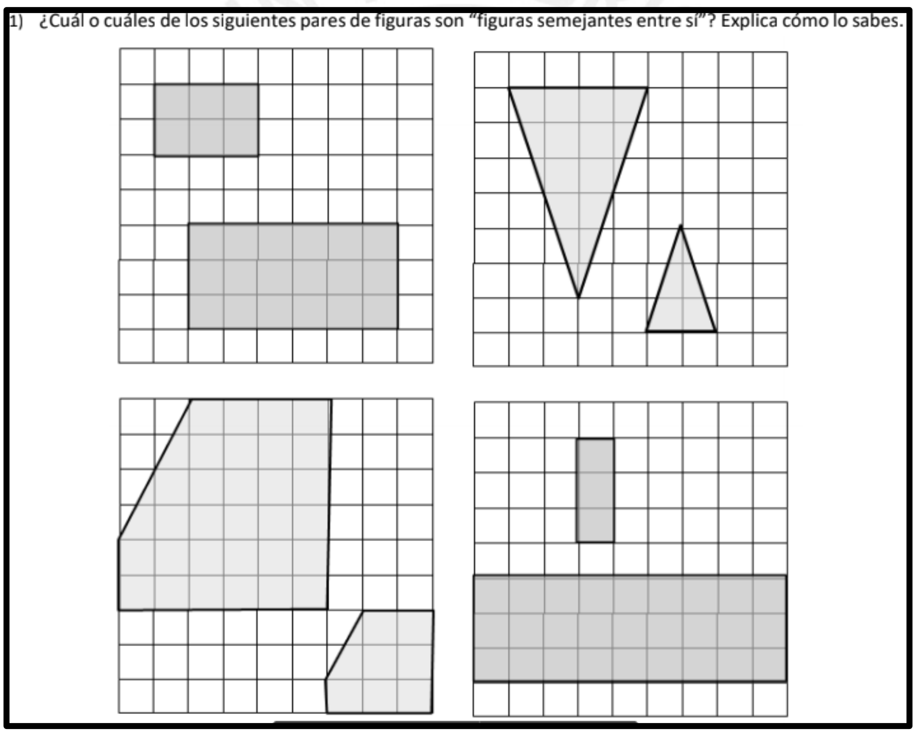


Figura 49. Situación 35

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado proporcional de la linealidad

Las situaciones mostradas demandan establecer relaciones de proporcionalidad, hallar una razón unitaria entre magnitudes, completar tablas de proporcionalidad y hallar valores desconocidos en ellas. El primer ejemplar, busca establecer relaciones de proporción en una tarea de escalas. Los siguientes ejemplares presentan situaciones en las que se debe relaciones magnitudes, ambas presentadas en un lenguaje diferente. Vemos que en el tercer ejemplar, se hace uso de incógnitas, a diferencia de las otras situaciones.

En un plano de un colegio elaborado en una escala 1:50 las medidas de la sala de profesores son 7 centímetros y 12 centímetros. ¿Cuáles son las medidas reales de la sala?

Figura 50. Situación 36

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Jessica prepara chocolate para elaborar sus chocotejas. Para preparar 50 chocotejas utiliza la siguiente receta:

- ¿Cuál es la razón entre la cantidad de azúcar impalpable y la de mantequilla?
- Si Jessica quiere preparar 100 chocotejas, ¿la razón entre los vasos de agua y de cocoa variará?

RECETA:
250 g de azúcar impalpable.
200 g de mantequilla.
4 vasos de agua
6 vasos de cocoa.

Figura 51. Situación 37

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

En la siguiente tabla, las magnitudes A y B son directamente proporcionales.

A	2	4	8	N
B	M	20	40	100

Calcula el valor de "M+N"

Figura 52. Situación 38

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad

Las situaciones mostradas responden a los diferentes contextos en las que aparece la función lineal, ya que estas piden representar las funciones de forma tabular, gráfica y analítica. Además, cada ejemplar trabaja aspectos diferentes de las funciones: comparar funciones, por su gráfico o su expresión, interpretar el dominio y encontrar la expresión analítica.

Figura 53. Situación 39

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

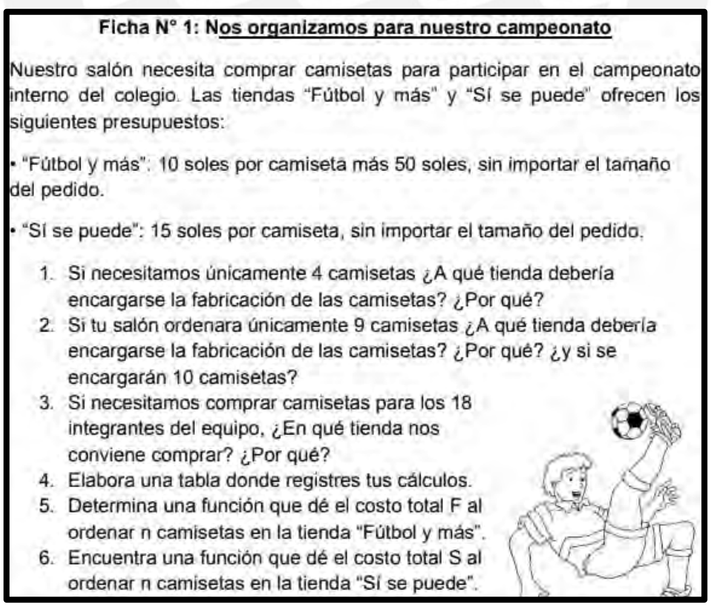


Figura 54. Situación 40

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

7. Grafica en un mismo plano las dos funciones.
   Decide qué significa la abscisa **x** y la ordenada
   y para cada función.
8. Mira las gráficas que realizaste y contesta: ¿cuántas camisetas se deben ordenar para que el costo total de la orden sea el mismo en ambas tiendas?
9. ¿Hasta cuántas camisetas se podrían pedir a la tienda "Sí se puede" de tal forma que la compra resulte mejor que en la otra tienda?
10. ¿Cuál es el número mínimo de camisetas que deberán solicitarse a la tienda "Fútbol y más" para que sea una mejor oferta? En esta actividad queremos encontrar un valor de n para el cual

$$F(n) = S(n).$$

Figura 55. Situación 40

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Arturo, Miguel y Juan desean solicitar los servicios de diferentes compañías telefónicas. Observa:

- ✓ La compañía A: Tiene un servicio que tiene una cuota fija de S/ 15 más S/ 0,15 por minuto de llamadas.
- ✓ La compañía B: tiene un servicio que cobra solo por los minutos de llamadas realizadas, S/ 0,25 por minuto de llamadas.
- ✓ La compañía C: tiene un servicio que cuesta S/ 27 soles mensuales independientemente de la cantidad de llamadas y de los minutos usados.

El promedio mensual de minutos hablados por teléfono de Arturo es 100 minutos, de Miguel 200 minutos y de Juan 240 minutos.

a) ¿Qué compañía les convendría contratar a cada uno de ellos considerando sus promedios mensuales de minutos hablados?
b) Suponiendo que contratan a la empresa que más les conviene, ¿cuántos minutos deben consumir Miguel y Arturo para pagar lo mismo?
c) Grafica en un plano cartesiano la relación entre el costo de las llamadas y los minutos de llamadas que proponen cada una de las compañías.

Figura 56. Situación 41

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

LA VENTA DE TICKETS

La gráfica abajo muestra la relación entre el número de tickets vendidos para un concierto de bandas y el monto de dinero en dólares, obtenido de la venta de los primeros 30 tickets.

a. De acuerdo a los datos presentados en la gráfica, elabora una tabla que resuma esta información

b. ¿Las magnitudes son directamente proporcionales? Explica tu respuesta.

c. Si en un momento se recaudó $ 30, ¿cuántos tickets fueron vendidos?

d. Si en otro momento se recaudó $ 46, ¿cuántos tickets fueron vendidos?

e. Si se llega recaudar $148, ¿cuántos tickets fueron vendidos?

f. ¿Cuánto cuesta cada ticket? Explica cómo lo encontraste.

g. Puedes explicar por qué hay puntos y no es una línea continua?

Figura 57. Situación 42

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones – problemas en el 8vo grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.8.23 y MAT.8.21. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: aritmético, proporcional y en patrones lineales.

Ejemplo de una situación asociada al significado aritmético de la linealidad

La descripción de la tarea seleccionada se ajusta a la del significado aritmético.

Luis desea bordar esa imagen en la tela. Quiere que las medidas de la imagen sean cuatro veces la medida del molde. Dibuja sobre la tela la imagen que va a bordar Luis.
(2 p)

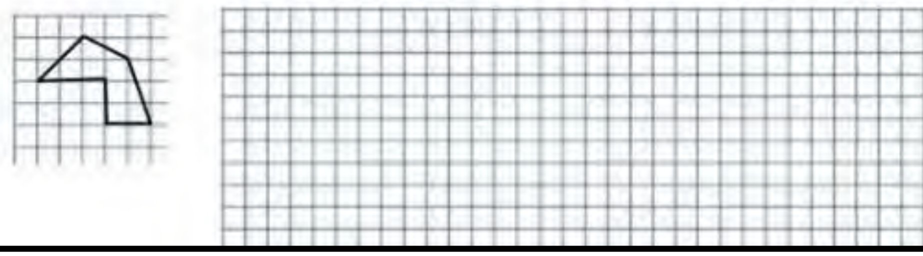


Figura 58. Situación 43
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado proporcional de la linealidad

En estas situaciones se pide hallar valores desconocidos a partir de reconocer relaciones directamente proporcionales, hallar valores unitarios y con estos hallar un valor desconocido, así como completar tablas de proporcionalidad. Estas nociones son los trabajadas en el significado proporcional.

Rubén ha pagado S/ 42,5 por cinco entradas para el circo. ¿Cuánto pagará su amigo Bernabé por tres entradas?
Carmen ha pagado S/ 3,99 por un melón que pesaba 2,28 Kg. ¿Cuánto pagará Rodrigo por otro melón que pesa 3,04 Kg?

Figura 59. Situación 44
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Completa cada tabla escribiendo los números que faltan.
a) Cada par de números está a razón de 1: 5.

2	3	4	5		7			12
10				30		40	50	

Figura 60. Situación 45
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Lilian tiene una fábrica de alfajores artesanales. Sabe que para fabricar 30 alfajores de chocolates son necesario 0,5 kg de harina; 1,2 kg de dulce de leche y 0,6 kg de chocolate. Si quiere preparar 170 alfajores, ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesita?

Figura 61. Situación 46
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Dos magnitudes M y N son directamente proporcionales (DP). Cuando M es igual a 8, N es igual 24. ¿Cuál será el valor de M cuando N sea 27?

Figura 62. Situación 47
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

"A" y "B" son dos magnitudes D.P. Cuando el valor inicial de "B" se triplica, el valor de "A" aumenta en 10 unidades. Cuando el nuevo valor de "B" se divida entre 5, ¿qué sucederá con el valor de "A" respecto al inicial?

Figura 63. Situación 48
Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplo de situaciones asociadas al significado de la linealidad en tareas de patrones lineales

En estas situaciones es necesario hallar la regla de formación general, dado que se solicita hallar términos de la sucesión muy lejanos. Esto se ajusta a la descripción de este significado de la linealidad.

Las figuras que se muestran están construidas con palitos negros y blancos, los palitos negros en los bordes y los palitos blancos en el interior. Si todas las figuras corresponden a un rectángulo 3 filas por n columnas, ¿Cuántos palitos blancos se han utilizado en la figura 2011?

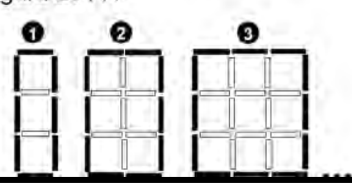


Figura 64. Situación 49

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

5) En la siguiente secuencia de figuras, ¿cuántos círculos sombreados hay en la figura 101? Y ¿en la figura "n"?

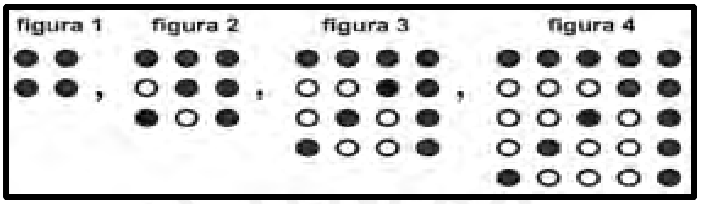


Figura 65. Situación 50

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad

Estas situaciones son muy parecidas a las del grado anterior, las situaciones se presentan en un contexto, de forma gráfica y tabular. Pero, determinamos que la actividad matemática para resolver las tareas es superior, esto lo veremos al proponer una solución esperada a las tareas.

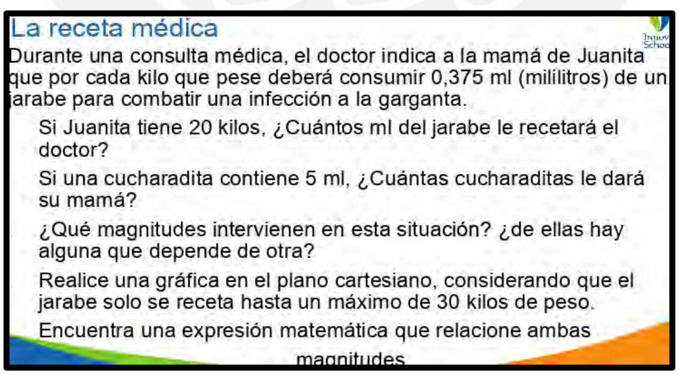


Figura 66. Situación 51

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

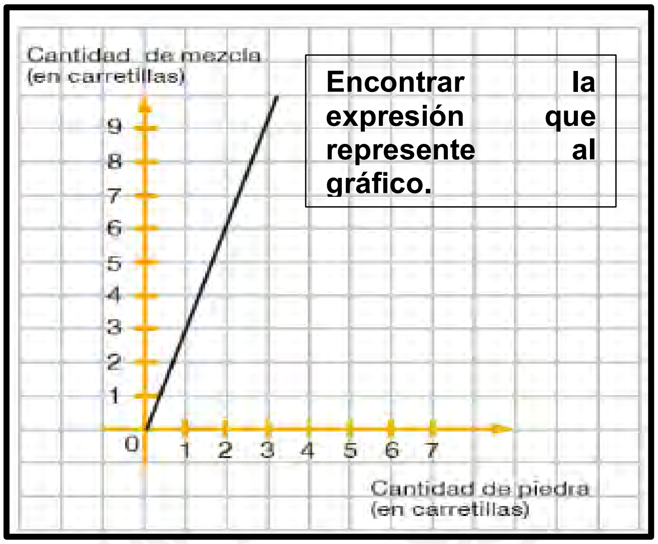


Figura 67. Situación 52

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Fernanda recorre en su bicicleta 2 kilómetros en 10 minutos. Responder:

a) Si mantiene la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en una hora?
b) ¿La distancia y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales?, ¿por qué? Justifica tu respuesta.
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que encuentras entre ambas magnitudes?, ¿qué significa?

d) ¿Cuál es la función que representa dicha situación?
e) Grafica la situación.
f) ¿A qué conjunto numérico podrían pertenecer los valores del tiempo y el espacio recorrido?

Figura 68. Situación 53

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ahora, escriba en la pizarra las siguientes funciones: f(x) = 0,75x y g(t) = 2t. Pregunte a los estudiantes que semejanzas y diferencias encuentra en ambas expresiones. (Tenga en cuenta los posibles errores de los estudiantes). Luego pregunte, Si el dominio para la función *f* es el conjunto de números enteros positivos, ¿Cuál será su rango? (Lo mismo haga para *g*)

Finalmente, presente un papelote los siguientes ejercicios que permitan reforzar la idea de valor numérico de una función.

Calcular: f(20), f(100), f(8/3), g(12), g(0,25) y g(3/2).

Figura 69. Situación 54

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

14. Dos empresas de transporte hacen envíos de paquetes al interior del país. Su tarifa incluye un monto fijo y además, un monto adicional que depende del peso del paquete a enviar. En la siguiente tabla se muestra el detalle:

Empresa	Cargo fijo por envío	Costo por kilogramo enviado
"Camioneros SAC"	S/. 4	S/. 3
"Encomienda segura SA"	S/. 0	S/. 6

Si C(x) representa el monto que cobra "Camioneros SAC" y E(x) representa el monto que cobra "Encomienda segura SA". Señale la alternativa que corresponde a las funciones C y E. (6 p)

a) $C(x) = 3x + 4$; $E(x) = 6x$
b) $C(x) = 7x$; $E(x) = 6x$
c) $C(x) = 3 + 4x$; $E(x) = 6x$
d) $C(x) = 3 + 4x$; $E(x) = 6$

Figura 70. Situación 55

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Una empresa de transporte lanza dos promociones por aniversario:

Promoción 1: Cuota fija de S/. 52 más S/. 1 por cada km recorrido.

Promoción 2: S/. 14 por km recorrido (sin costo fijo).

a) Escribe la función $C(x)$ que relaciona el costo C con el número x de km recorridos.
b) Cuantos kilómetros deben ser recorridos para que en ambas promociones se page lo mismo.
c) Si tuvieran que recorrer 9 km ¿Qué promoción me convendría?
d) ¿Cuándo conviene usar la primera promoción?
e) ¿Cuándo conviene escoger la segunda promoción?

Figura 71. Situación 56

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

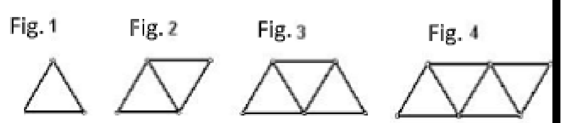
Clasificación de las situaciones – problemas en el 9no grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas a los estándares: MAT.9.21 y MAT.9.23. En este grado identificamos que las situaciones empleadas por la institución desarrollan los siguientes significados de la linealidad: en patrones lineales y el significado funcional.

Ejemplos de situaciones asociadas al significado en tareas de patrones lineales

En este grado las situaciones se presentan de forma gráfica o numérica. La tarea demanda que se encuentren términos específicos de la sucesión, en su mayoría términos lejanos. En algunos casos la tarea pide específicamente hallar una expresión general.

Observa la cantidad de palitos que forman cada figura:



a) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura 5 y 6?
b) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura 10?
c) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura "n"?

Figura 72. Situación 57

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

A partir de la siguiente sucesión:

10 ; 17 ; 24 ; 31 ; 38 ; ......

Si el último término fuera 108, ¿Cuántos términos tendría la sucesión?

a) 7
b) 10
c) 14
d) 15

Figura 73. Situación 58

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Dada la siguiente progresión: **2; 5; 8; 11; ....**

a) Determina el término 6
b) Determina el término 13
c) Determina el término "n"

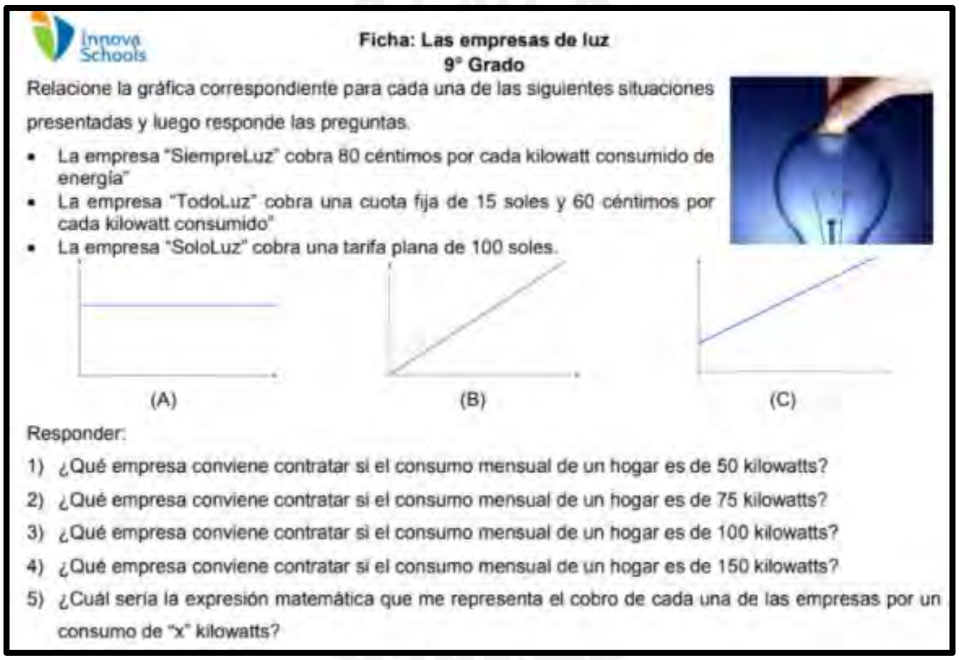
Figura 74. Situación 59

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Ejemplos de situaciones asociadas al significado funcional

Estas situaciones demandan al estudiante encontrar la expresión algebraica de la función lineal o afín. Estas situaciones propuestas aún se presentan en el contexto de un problema y la actividad algebraica que demanda es muy parecida a la del 8vo grado.



Innova Schools

Ficha: Las empresas de luz
9° Grado

Relacione la gráfica correspondiente para cada una de las siguientes situaciones presentadas y luego responde las preguntas.

- La empresa "SiempreLuz" cobra 80 céntimos por cada kilowatt consumido de energía"
- La empresa "TodoLuz" cobra una cuota fija de 15 soles y 60 céntimos por cada kilowatt consumido"
- La empresa "SoloLuz" cobra una tarifa plana de 100 soles.

(A) (B) (C)

Responder:

1) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 50 kilowatts?
2) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 75 kilowatts?
3) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 100 kilowatts?
4) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 150 kilowatts?
5) ¿Cuál sería la expresión matemática que me representa el cobro de cada una de las empresas por un consumo de "x" kilowatts?

Figura 75. Situación 60

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

1) Una tienda de alquiler de bicicletas tiene la siguiente tarifa:

Alquiler S/ 5 más S/ 1,50 por cada hora transcurrida.

Para la siguiente situación:

a) Escribe la notación algebraica que indique la cantidad de dinero a pagar después de h horas.
b) Representa gráficamente la función en el plano cartesiano.
c) Indica qué elementos de la situación corresponden a la pendiente y al intercepto con el eje y.
d) Si Pedro tiene S/ 16 para pagar el alquiler de la bicicleta. ¿Cuántas horas como máximo podrá alquilar?

2) Otra tienda que alquila bicicletas tiene la siguiente tarifa:

Alquiler S/ 3,00 por hora.

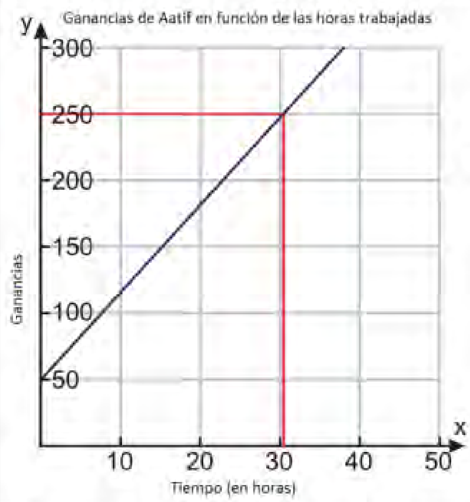
Para la siguiente situación:

a) Escribe la notación algebraica que indique la cantidad de dinero a pagar después de h horas.
b) Representa gráficamente la función en el plano cartesiano.
c) Indica qué elementos de la situación corresponden a la pendiente y al intercepto con el eje y.
d) Si Juana tiene S/ 20 para pagar el alquiler de la bicicleta en esta tienda. ¿Cuántas horas como máximo podrá alquilar?
e) ¿En qué casos me conviene alquilar bicicleta en esta segunda tienda? Explícalo con el gráfico.

Figura 76. Situación 61

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Aatif es una empresa dedicada al rubro de farmacia y bioquímica. El gráfico que se muestra representa la ganancia, en miles de dólares, por el tiempo de producción de fármacos, en horas. (8p)



Realiza lo pedido.

a) Determina la ecuación que represente la ganancia de la empresa e indica cuál es la pendiente e intercepto.

b) Responde. ¿Cuánto será la ganancia si la empresa ha tenido un tiempo de producción de 300 horas?

Figura 77. Situación 62

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Si Juan, un luchador de sumo, decide empezar una dieta que le garantiza que mensualmente subirá 6 kg de forma constante. Si él pesa inicialmente 100 kg, responde:

a) Encontrar una expresión matemática que relacione el peso del luchador con la cantidad "m" de meses.

b) Si el luchador quiere pesar 154 kg ¿en cuántos meses lo logrará?

c) Grafica la situación en el plano cartesiano.

En relación a la situación anterior. Su hermano Luis, quien pesa 80 kg, decide iniciar una dieta distinta a la de Juan. Esta dieta le garantiza subir de forma constante 8kg.

a) ¿Dentro de cuántos meses ambos tendrán el mismo peso? Grafica la función y compruébalo.

b) ¿Quién sube de peso más rápido? Luego de 1 año ¿quién pesa más?

Figura 78. Situación 63

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Clasificación de las situaciones – problemas en el 10mo grado

Para la clasificación de las situaciones – problemas hemos analizado las sesiones que sí abordan actividades asociadas al estándar: MAT.10.22. En este grado identificamos que solo se aborda el significado funcional de la linealidad y la mayoría de las situaciones presentadas se dan de forma intramatemática.

Ejemplos de situaciones asociadas al significado funcional de la linealidad

Hemos seleccionado algunas situaciones representantes para el grado. Con esta elección se quiere mostrar la variedad en lo que demandan las tareas, pues hay tareas que demandan encontrar dominios, rangos, evaluar funciones por tramos, hallar el valor de parámetros, determinar si la función es decreciente y hallar interceptos

2. Halla el dominio de la función $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 4/x\}$.
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R} - \{0\}$
   c) $\langle -\infty; 2\rangle$
   d) $\langle -\infty; -2\rangle$
   e) $\langle -5; 5\rangle$

3. Halla el rango de la función $f(x) = -2x + 5; x > 3$.
   a) $\langle -\infty; -1\rangle$
   b) $\langle -\infty; 2]$
   c) $\langle -\infty; +\infty\rangle$
   d) $\langle -\infty; -2]$
   e) $\langle -\infty; 7]$

Figura 79. Situación 64

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Sea f una función definida

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; x < 2 \\ x - 1; x \geq 2 \end{cases}$$

Calcula $S = f(f(-2)) + f(f(4))$.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Figura 80. Situación 65

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Se define la función

$$F(x) = \begin{cases} 7 + 2ax; 0 \leq x \leq 4 \\ x - 6b; x > 4 \end{cases}$$

Calcula $\sqrt{a - b}$ si $F(3) + F(5) = 36$.

a) 0
b) 2
c) 3
d) 1
e) 4

Figura 81. Situación 66

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Sea la función $f(x) = -6x - 5$.

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. La función es decreciente

II. La recta correspondiente a la función interseca al eje Y en el punto $(-5; 0)$.

III. El punto $(1; -11)$ pertenece a la función.

a) Solo I

b) Solo II

c) Solo III

d) I y III

e) II y III

Figura 82. Situación 67

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Si $f(x) = 4x - 1$ y

$g(x) = 2x + 13$,

halla el valor de $f(g(-7))$.

a) -1

b) -2

c) -3

d) -4

e) -5

Figura 83. Situación 68

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.,

https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Dadas las funciones:

$h(x) = ax + b \wedge g(x) = bx + a$, se sabe que $h(2) = g(3) \wedge h(1) = 3$. Calcula el valor de $h(1) + g(-1)$.

a) 0

b) 4

c) 2

d) 3

e) 6

Figura 84. Situación 69

Nota. Tomado de Teacher Resource Center, s.f., https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

Como parte de nuestro análisis hemos estudiado las situaciones presentadas por la institución Innova Schools en los estándares señalados, que por su enunciación desarrollan los significados de la linealidad. Siguiendo los criterios, presentados al inicio de este análisis, hemos clasificado algunas situaciones representativas en cada grado educativo de acuerdo a los diferentes significados de la linealidad determinados en nuestra propuesta de significado de referencia.

4.4.2. Valoración de la propuesta de Innova Schools respecto al desarrollo de la noción de linealidad

Nuestro análisis nos permite determinar que la propuesta de la institución Innova Schools, desde el primer hasta el décimo grado, atiende a los diferentes significados de la linealidad que en esta investigación se han propuesto: informal, aritmético, proporcional y funcional. Todos estos significados aparecen en un orden y mostrando una gradualidad esperada, lo siguiente resume ello:

- El significado funcional en patrones lineales aparece en todos los grados del nivel primario. En secundaria, sigue apareciendo, pero en menor medida.
- Los significados informal y aritmético aparecen en los primeros grados con mayor énfasis. Estos están presentes en los siguientes grados, pero el foco de la actividad está en otros significados.
- El significado proporcional aparece a medida que se deja de lado el significado aritmético. Este significado proporcional es el punto de partida para abordar el significado funcional.
- En el nivel secundario aparece con mayor énfasis el significado funcional, aunque en los grados 7mo y 8vo aún se evidencia la presencia del significado proporcional y situaciones en contexto de patrones lineales. Es en los grados superiores, 9no y 10mo en los que la atención se centra en el significado funcional.

Determinamos que la propuesta de la institución Innova Schools desarrolla, en cada grado, diferentes significados de la linealidad. En los primeros grados, los significados giran en torno al informal y aritmético. Por otro lado, en los siguientes grados aún se trabajan dichos significados, pero son complementados con los otros. Reconociendo así una evolución en el significado de la linealidad presentado a los estudiantes a lo largo de su formación académica, aunque en los grados finales se va dejando de lado los primeros significados y el trabajo se centra en el significado funcional.

Aún falta determinar en qué medida la propuesta de Innova Schools permite la evolución del razonamiento algebraico de los estudiantes. En el siguiente apartado presentamos una asociación entre los niveles de razonamiento algebraico y las situaciones presentadas en cada grado. Esto se logrará según los rasgos de algebrización que identifiquemos de sus enunciados y soluciones. Así podremos lograr nuestro último objetivo de investigación.

4.5. Valoración de la propuesta de Innova Schools en términos de la evolución del RAE

En esta sección se presenta el análisis realizado a la propuesta de la institución en términos de la evolución del RAE. Este análisis se da en dos momentos: primero, se asocia cada situación presentada en la sección anterior con los niveles de razonamiento algebraico y segundo, se determina si hay una evolución de razonamiento algebraico para situaciones de un mismo significado en diferentes grados de 1ro a 10mo.

4.5.1. Nivel de razonamiento algebraico asociado a las situaciones – problemas que desarrollan la linealidad desde el 1er al 10mo grado

Con los análisis hasta el momento realizados hemos identificado cómo se aborda la noción de linealidad desde el 1er al 10mo grado en la institución Innova Schools.

Ahora, determinaremos en qué medida las situaciones que propone dicha institución propician el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes teniendo como foco de atención la linealidad. Por lo que determinaremos qué nivel de algebrización puede asociarse a la actividad matemática que se desprende de las situaciones descritas en el apartado anterior. Para lograr esto tomaremos algunos aspectos de la investigación hecha por Castro et al. (2017), por lo que nuestro análisis se basará en los siguientes criterios:

- La asociación de las situaciones se hará de acuerdos a los niveles de algebrización que hemos adaptados de Godino et al. (2014) y Godino et al. (2015) para la noción de linealidad en la formación escolar básica.
- Se resolverán las situaciones ya señaladas en la sección anterior, con esto reconoceremos rasgos algebraicos que se desprenden de las soluciones. Además, se tendrá en cuenta qué objetos algebraicos se reconocen en el enunciado de las tareas.

A continuación, presentamos los resultados del análisis realizado a las situaciones de cada grado. Los cuadros muestran el nivel de razonamiento algebraico y a qué significado pertenece cada situación. En los anexos se adjuntan las soluciones de dichas situaciones, las cuales sustentan el análisis descrito a continuación.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el primer grado

La Tabla 26 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el primer grado.

Tabla 26.
Clasificación de las situaciones para el primer grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal	Situación 1				
Aritmético					

Proporcional	
Patrones lineales	Situación 2 y 3
Funcional	

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos del nivel 0 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 1 requiere reconocer similitudes entre figuras geométricas a partir de su forma, no hay necesidad de comparar las dimensiones de dichas figuras. No hay rasgos de objetos o procesos algebraicos, por lo que se determina ausencia de razonamiento algebraico.
- Las situaciones 2 y 3 requieren hallar el valor desconocido de una secuencia numérica. Estos valores son cercanos y se hallan al reconocer el aumento o decremento en la secuencia numérica. La actividad es puramente aritmética y no es necesario generalizar, por lo que determinamos ausencia de razonamiento algebraico.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el segundo grado

La Tabla 27 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el segundo grado.

Tabla 27.
Clasificación de las situaciones para el segundo grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					

Aritmético		Situación 7 y 8
Proporcional		
Patrones lineales	Situación 5 y 6	Situación 4
Funcional		

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos del nivel 0 y 1 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 4 requiere reconocer la regla o patrón de formación en las secuencias mostradas. Esto se determina a partir de reconocer el aumento o decremento en la secuencia de números mostrada. La tarea no demanda usar objetos algebraicos. Sin embargo, sí es necesario reconocer la regla de formación en un lenguaje natural, por lo que se determina un nivel 1 del razonamiento algebraico.
- Las situaciones 5 y 6 requieren hallar valores desconocidos de secuencias numéricas. Estos valores son cercanos y se hallan mediante el cálculo numérico por el recuento de patrones. No hay rasgos de objetos o procesos algebraicos, por lo que se determina ausencia de razonamiento algebraico.
- Las situaciones 7 y 8 pertenecen al significado aritmético de la linealidad y demandan hallar un valor desconocido al comparar dos magnitudes. En el enunciado de los problemas no se menciona, pero sí está implícito, el usar la razón unitaria entre las magnitudes que intervienen. Eso permitirá, mediante una operación de multiplicación o división, hallar el valor desconocido. Estos rasgos son propios de un nivel 1 de razonamiento algebraico.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el tercer grado

La Tabla 28 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el tercer grado.

Tabla 28.
Clasificación de las situaciones para el tercer grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					
Aritmético		Situación 11 y 12			
Proporcional	Situación 13				
Patrones lineales	Situación 9	Situación 10			
Funcional					

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0 y 1 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 9 es similar a la de los grados anteriores, se deba hallar el valor desconocido de una secuencia numérica. Esto se logra mediante el recuento para valores cercanos. No hay rasgos de razonamiento algebraico.
- La situación 10 es la primera situación, en el significado de secuencias gráficas de la linealidad, en el que se debe buscar que los términos de la sucesión se relacionen con la posición que ocupan. Al menos esto ocurre en la solución esperada por parte de los estudiantes. Aún no es necesario

expresar la regla de formación, por lo que la actividad se limita a rasgos de nivel 1 de algebrización.

- Las situaciones 11 y 12 pertenecen al significado aritmético de la linealidad y demandan hallar un valor desconocido luego de interpretar la razón unitaria entre las magnitudes que intervienen, aunque esto no es explícito en el enunciado del problema. La tarea se resuelve mediante una operación aritmética, esto permitirá hallar el valor solicitado. Dado que se solicita hacer explícita la razón unitaria o representarla, determinamos un nivel 1 de razonamiento algebraico.
- La situación 13 encaja dentro del significado propiamente proporcional dado que se hace uso de una noción necesaria para desarrollar dicho significado: fracciones equivalente. La tarea se resuelve por operaciones de multiplicación, es aritmética, por lo que hay ausencia de razonamiento algebraico.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el cuarto grado

La Tabla 29 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el cuarto grado.

Tabla 29.
Clasificación de las situaciones para el cuarto grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					
Aritmético	Situación 14				
Proporcional		Situación 15			

Patrones lineales	Situación 16 y 17
Funcional	Situación 18 y 19

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0 y 1 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 14 encaja dentro del significado aritmético de la linealidad. Se solicita hallar el costo por una unidad, lo cual se determina mediante una división. La situación no demanda realizar otra actividad.
- La situación 15 demanda establecer relaciones de equivalencia entre los cards presentados. Con las relaciones establecidas se deben hallar valores desconocidos para dichas relaciones, lo cual puede ser resuelto usando fracciones equivalentes.
- La situación 16 y 17 demandan interpretar el contexto del problema para que sea resuelto con secuencias numéricas. Se deben hallar valores desconocidos no cercanos a partir de reconocer la razón de cambio entre los términos de la sucesión, se pide indicar cuál es la regla de formación sin necesidad de recurrir a expresiones simbólicas. Por lo que la actividad moviliza rasgos del nivel 1.
- Las situaciones 18 y 19 demandan completar tablas de proporcionalidad a partir de reconocer una regla de formación en situaciones de funciones. Se solicita hallar la regla de formación usando un lenguaje natural, la tarea no demanda reconocer o mostrar expresiones simbólicas.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el quinto grado

La Tabla 30 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el quinto grado.

Tabla 30.
Clasificación de las situaciones en el quinto grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal	Situación 20 y 21				
Aritmético	Situación 22 y 23				
Proporcional		Situación 24 y 25			
Patrones lineales					
Funcional					

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0 y 1 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- Las situaciones 20 y 21 demandan reconocer si las imágenes mostradas han sido reducidas o ampliadas, a partir de mostrar sus semejantes sin atender a en qué medida.
- Las situaciones 22 y 23 demandan ampliar o reducir figuras geométricas, por lo que se indica en qué medida debe darse esto. Esta actividad, a diferencia de las situaciones 20 y 21, se resuelve al hacer las operaciones aritméticas y luego graficar lo solicitado.
- La situación 24 demanda reconocer la constante de proporcionalidad a partir

de un gráfico que muestra una relación directamente proporcional entre dos magnitudes. Luego, a partir de dicha razón unitaria, hallar otros valores solicitados, que puede realizarse usando ecuaciones proporcionales $x = \frac{a.b}{c}$. La tarea no demanda expresar la relación entre las magnitudes en expresión simbólica o en otro lenguaje, aunque sí es necesario saber qué relación existe para responder a las preguntas.

- La situación 25 demanda completar una tabla de proporcionalidad a partir de identificar qué relación tienen las dos magnitudes mostradas. La tarea se centra en hallar valores desconocidos ($x = \frac{a.b}{c}$), por lo que reconocer la relación es fundamental (razón unitaria). Sin embargo, no se pide mostrar esa generalidad en expresiones simbólicas u otro lenguaje.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el sexto grado

La Tabla 31 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el sexto grado.

Tabla 31.
Clasificación de las situaciones en el sexto grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					
Aritmético	Situación 26 y 27				
Proporcional		Situación 28, 29 y 30(a)	Situación 30(b), 31 y 34		
Patrones lineales		Situación 32	Situación 33		

Funcional

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0, 1 y 2 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 26 demanda comparar dos figuras geométricas a quienes se les ha aplicado una ampliación y reducción, atendiendo a las dimensiones y formas de estas. La pregunta requiere decir en qué medida se amplió o redujo la imagen. No se hacen uso de objetos o procesos algebraicos, es una actividad aritmética.
- La situación 27 requiere relaciones entre dos magnitudes (número de paquetes y costo) y a partir de ello hallar el valor unitario. La tarea no demanda otra actividad, por lo que se limita a una operación aritmética. Aunque puede ser resuelto mediante una ecuación proporcional ($x = \frac{a.b}{c}$).
- La situación 28 demanda determinar si las magnitudes son directamente proporcionales, lo cual se puede responder hallando la razón unitaria o escribiendo las expresiones fraccionarias y luego comparar dichas fracciones. La actividad no es solo aritmética.
- La situación 29 requiere hallar un valor desconocido en una proporción. Este valor se halla mediante fracciones equivalentes ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$),
- La situación 30 (a) requiere completar una tabla de proporcionalidad en la cual ya se muestra cómo se relacionan las magnitudes ahí presentadas, por lo que la tarea se resuelve hallando fracciones equivalentes.
- La situación 30 (b) puede resolverse de dos maneras, hallando la razón unitaria o usando ecuaciones proporcionales ($x = \frac{a.b}{c}$), dependiendo de cuál se use se determina un nivel diferente de algebrización.

- La situación 31 demanda hallar la razón unitaria y qué relación existe entre dos magnitudes (cantidad de lápices y costo). Luego, se solicita escribir esa relación en una expresión matemática. Esta tarea demanda el uso de expresiones algebraicas para expresar una generalización, por lo que demanda un razonamiento de nivel 2.
- Las situaciones 32 y 33 muestran sucesiones gráficas en las que se debe reconocer la generalización que exprese cómo se relaciona la figura con la posición que ocupa en la sucesión. Esa generalización puede ser expresada en lenguaje simbólico, como en la situación 33. No es necesario en la situación 32.
- La situación 34 demanda reconocer la relación que existe entre dos magnitudes, completar una tabla de proporcionalidad y expresar dicha relación en una expresión matemática. Además, en esta tarea el reconocer la razón unitaria tiene un rol importante para responder a la pregunta "c".

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el séptimo grado

La Tabla 32 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el séptimo grado.

Tabla 32.
Clasificación de las situaciones en el séptimo grado según el RAE

	0	1	2	3	4
Informal					
Aritmético	Situación 35				
Proporcional		Situación 36, 37 y 38			

Patrones lineales		
Funcional	Situación 39 y 42	Situación 40 y 41

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0, 1 y 3 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 35 requiere justificar si un par de figuras son semejantes entre sí, por lo que será necesario el comparar las dimensiones y la forma de dichas figuras. En este sentido, la actividad es aritmética.
- La situación 36 demanda interpretar la relación de proporcionalidad que existe en un plano a escala y, a partir de ello, hallar dos valores desconocidos. Para hallar el valor desconocido se puede hacer uso de fracciones equivalentes o despejar una incógnita, aunque esto no es necesario por lo que la actividad demanda rasgos de un nivel 1 de algebrización.
- La situación 37 requiere hallar la razón unitaria entre dos magnitudes y determinar si esta cambia al duplicar valores de dos magnitudes. La determinación de esta razón unitaria demanda una actividad de nivel 1 de algebrización.
- La situación 38 requiere hallar valores desconocidos de una tabla de proporcionalidad. En esta tarea sí se presentan incógnitas, por lo que será necesario resolver ecuaciones de la forma $Ax = B$, aunque esto no determina un nivel 2 de algebrización porque dichas incógnitas no representan una generalización.
- La situación 39 requiere construir un gráfico y una tabla de proporcionalidad

a partir de la razón constante de cambio entre dos magnitudes. Esa razón constante es una generalización de cómo se relacionan dichas magnitudes y, además, la actividad demanda hacer explícita esa relación en un lenguaje natural.

- La situación 40 demanda hallar la relación entre dos magnitudes, graficarlas, expresarlas en lenguaje simbólico – literal como dos funciones. Además, una de las preguntas demanda resolver una ecuación de la forma $Ax + B = Cx$ por lo que esta tarea demanda un nivel 3 del razonamiento algebraico.
- La situación 41 requiere una actividad similar a la anterior, en esta tarea se trabajan con las expresiones de la función lineal, afín y constante. En la tarea es necesario encontrar las expresiones funcionales que muestren la relación entre costo y minutos de llamada, así se puede responder de forma idónea a las preguntas que la tarea plantea. Al igual que en la situación anterior la actividad matemática evidencia rasgos de nivel 3 de algebrización.
- La situación 42 demanda interpretar la relación entre dos magnitudes a partir del gráfico que muestra dicha relación, hallar valores desconocidos y justificar por qué la gráfica toma valores discretos, trabajando la noción de dominio de la función. En la actividad no es necesario recurrir al lenguaje algebraico, por lo que reconocemos rasgos de nivel 1 de algebrización.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el octavo grado

La Tabla 33 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el octavo grado.

Tabla 33.
Clasificación de las situaciones en el octavo grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					

Aritmético	Situación 43			
Proporcional		Situación 45	Situación 44, 46, 47 y 48	
Patrones lineales			Situación 49 y 50	
Funcional			Situación 51, 52, 53 y 55	Situación 54 y 56

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 0, 1, 2 y 3 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 43 demanda graficar una figura semejante a otra a partir de indicarse qué relación entre sus dimensiones existe. La tarea no demanda procesos algebraicos más complejos, por lo que se determina un nivel 1 del razonamiento algebraico.
- La situación 44 demanda hallar el valor desconocido a partir de reconocer la relación proporcional entre las magnitudes de la tarea. Ese valor desconocido puede hallarse a partir de, primero, encontrar la razón unitaria o al resolver una ecuación proporcional de la forma $Ax = B$. Por lo tanto, esta actividad demanda un nivel 2 de razonamiento algebraico. En las situaciones 46 y 47 sucede lo mismo.
- La situación 45 requiere completar tablas de proporcionalidad a partir de una razón dada entre dos magnitudes. Los valores faltantes en la tabla se obtienen de hallar fracciones equivalentes, no hay necesidad de recurrir a

ecuaciones proporcionales. Determinamos rasgos de algebrización de nivel 1.

- La situación 48 demanda trabajar con ecuaciones proporcionales $\frac{A}{B} = \frac{3A}{3B}$ y encontrar cómo cambian estas al modificar dichas proporciones. Además, dentro de la actividad es necesario resolver ecuaciones de la forma $Ax = Cx + B$, por lo que esta actividad tiene rasgos del nivel 2 de algebrización.
- Las situaciones 49 y 50 demandan encontrar una expresión que muestre la regla de formación en las secuencias mostradas, esta debe relacionar la posición que ocupa la figura en la secuencia. Luego de encontrar esta expresión es necesario trabajar con ella para hallar un valor determinado en la secuencia, que no es cercano. Se evidencian rasgos de nivel 3 de algebrización.
- La situación 51 demanda hallar la relación entre dos magnitudes y escribir la expresión algebraica que muestre dicha relación. Con dicha relación funcional, luego, hallar su gráfico y algunos valores desconocidos. La actividad no demanda manipular dicha expresión, por lo que tiene rasgos de un nivel 2 de razonamiento algebraico.
- La situación 52 requiere, a partir de un gráfico que muestra una proporción directa, encontrar la expresión algebraica que muestre dicha relación.
- La situación 53 demanda encontrar la expresión de la función lineal de dos magnitudes, hallar valores desconocidos, dominio y rango y graficar dicha función. De forma parecida a la situación 51 no es necesario realizar transformaciones a la función, por lo que se determina un nivel 2 de algebrización.
- La situación 54 demanda manipular dos funciones al comparar sus pendientes y el valor de dichas funciones dado un valor del dominio. El lenguaje que propone la tarea es algebraico, por lo que la tarea demanda un nivel consolidado de algebrización para poder manipular las expresiones

mostradas. Por otro lado, hay un ligero acercamiento al trabajo con patrones al comparar las pendientes de las funciones mostradas.

- La situación 55 requiere encontrar dos funciones, una lineal y otra afín, a partir de reconocer cómo es la razón de cambio, lo que es un dato en la tarea. La actividad se limita a encontrar dichas expresiones, por lo que se determina un nivel 2 de razonamiento algebraico.
- La situación 56 requiere encontrar dos funciones y hacer manipulaciones con dichas expresiones, por lo que se resuelve ecuaciones de la forma $Ax + b = Cx$. Al igual que las situaciones anteriores se determina un nivel consolidado de algebrización.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el noveno grado

La Tabla 34 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el octavo grado.

Tabla 34.
Clasificación de las situaciones en el noveno grado según el RAE

	0	1	2	3	4
Informal					
Aritmético					
Proporcional					
Patrones lineales			Situación 57	Situación 58 y 59	
Funcional			Situación 63	Situación 60, 61 y 62.	

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 2 y 3 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis, reconocemos las siguientes características:

- La situación 57 demanda determinar la expresión algebraica de una secuencia gráfica, para ello el estudiante debe hallar para valores cercanos lo que se resuelve con un cálculo aritmético. Sin embargo, para poder representar la formación de forma algebraica debe reconocer el patrón de formación. La actividad se limita a hallar la expresión, por lo que se encuentran rasgos de nivel 2 de algebrización.
- La situación 58 demanda hallar a qué término de una sucesión numérica pertenece un valor determinado. Para ello es necesario hallar la expresión general y con esta hallar a qué término de la sucesión corresponde. La actividad demanda manipular la expresión algebraica, por lo que se determina un nivel 3 de algebrización.
- La situación 59 demanda hallar términos cercanos de la sucesión aritmética mostrada, así mismo es necesario encontrar la expresión general para el término n-ésimo. Esto se puede lograr utilizando la fórmula general para el término n-ésimo, puede que se hagan manipulaciones a la expresión para expresarla como se muestra en la solución.
- La situación 60 requiere hallar las expresiones de 3 funciones: lineal, afín y constante. Además de reconocer cómo son sus gráficas. Dentro de la actividad es necesario reemplazar valores en dichas expresiones, por lo que determinamos un nivel 3 de algebrización.
- La situación 61 demanda encontrar las expresiones algebraicas de dos funciones: lineal y afín. Luego, hallar el valor de la variable independiente para un valor dado de la variable dependiente, lo ideal sería trabajar con las expresiones encontradas. Aunque es posible que el estudiante recurra al cálculo aritmético. Por otro lado, la última pregunta puede ser aprovechada

para trabajar el uso de parámetros. Sin embargo, la actividad no demanda ello, pues se solicita que se haga un análisis gráfico para responder a la pregunta. Se determina un nivel 3 de algebrización.

- La situación 62 pide reconocer los elementos de una función lineal, como pendiente e intercepto, a partir de su gráfica, además de determinar su expresión. La última pregunta demanda manipular la expresión al evaluar dicha función para un cierto valor, por lo tanto, determinamos un nivel 3 de algebrización.
- La situación 63 demanda encontrar las expresiones algebraicas de dos funciones lineales, luego analizar sus gráficas de tal manera que ambas tengan el mismo valor. La actividad puede determinar un mayor nivel de algebrización si la tarea no pidiera analizar las gráficas, en su lugar invitar a igualar las expresiones algebraicas. Por lo que se determina un nivel 2 de algebrización.

Nivel de razonamiento algebraico identificado en las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver las situaciones en el décimo grado

La Tabla 35 muestra la clasificación según los niveles del razonamiento algebraico de las situaciones que desarrollan la linealidad en el octavo grado.

Tabla 35.
Clasificación de las situaciones en el décimo grado según el RAE

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Informal					
Aritmético					
Proporcional					
Patrones lineales					

Funcional	Situación 64, 65, 67 y 68	Situación 66, 69

Fuente: Elaboración propia

En este grado identificamos que las situaciones muestran rasgos de niveles 3 y 4 del razonamiento algebraico. De acuerdo a nuestro análisis hecho, reconocemos las siguientes características:

- La situación 64 requiere hallar el dominio y rango de funciones lineales, dentro de la tarea es necesario manipular inecuaciones. El trabajo se da en un lenguaje algebraico en todo momento, por lo que se determina un nivel 3 de algebrización.
- La situación 65 presenta una actividad diferente a las vistas hasta ahora, esta requiere operar con funciones (adición). El trabajo se da en un lenguaje netamente algebraico al interpretar cómo se comporta una función por tramos, por lo que se deben operar con expresiones de la forma $Ax + B = Cx + D$ lo que es un rasgo del nivel 3 de algebrización.
- La situación 66 es parecida a la situación anterior, pero en esta oportunidad aparece la actividad con parámetros en su significado como incógnita. Por lo que determinamos un nivel 4 de algebrización.
- La situación 67 demanda el utilizar las propiedades de la función lineal (decreciente), por lo tanto, la actividad se da dentro del lenguaje algebraico. Así también, se hacen manipulaciones a la expresión lineal dada para hallar valores de ella. Determinamos un nivel 3 de algebrización.
- En la situación 68 se presenta una tarea en la que es necesario utilizar la composición de funciones, aunque esto se da para valores particulares de dichas funciones. En la actividad no interviene la noción de parámetro, por lo que determinamos rasgos de un nivel 3 de algebrización.

- La actividad 69 demanda realizar operaciones de adición con funciones, dentro de la actividad se deben resolver ecuaciones para hallar los valores constantes, parámetros, en dichas funciones. De forma similar a la situación 66, se determina un nivel 4 de algebrización.

Hemos realizado una asociación de las situaciones propuestas por la Institución Innova Schools, desde el nivel primario hasta el secundario (1mo a 10mo), con los diferentes niveles de algebrización que presentamos en el capítulo III. En la siguiente sección analizaremos si hay una evolución de RAE para un mismo significado en diferentes grados.

4.5.2. Evolución del RAE para un mismo significado de linealidad en diferentes grados de formación básica

En la sección anterior hemos determinado que un mismo significado de la linealidad se aborda en diferentes grados escolares. Por ejemplo, el significado funcional aparece en el 5to, 7mo, 8vo, 9no y 10mo grado. Sin embargo, es de esperarse que la actividad matemática asociada a las situaciones de cada grado no sea la misma y que el grado de complejidad sea cada vez mayor.

En esta sección presentamos los resultados de dicho análisis que ya tuvo un inicio en la sección anterior, en la que se asignó un nivel de RAE a cada situación en cada grado. Estos resultados tienen sustento en las soluciones de cada situación que se presentan en los Anexos.

Evolución del RAE en situaciones del significado informal de la linealidad

En las secciones anteriores se determinó que el significado informal se promueve en el 1er y 5to grado de la institución Innova Schools. Es de esperarse que dichas situaciones no demanden una evolución del RAE, pese a estar en grados diferentes, ya que en el capítulo III determinamos que el significado informal está asociado a la ausencia de RAE.

La situación 1 (1er grado) al igual que las situaciones 20 y 21 (5to grado) no demandan movilizar objetos o procesos algebraicos. Determinamos que no hay una evolución en este significado en diferentes grados.

Evolución del RAE en situaciones del significado aritmético de la linealidad

Este significado aparece en los grados 2do, 3er, 4to, 5to, 6to, 7mo y 8vo. Al igual que en el significado anterior, es de esperarse que las situaciones de este significado no demanden una evolución del RAE. El análisis de la sección anterior nos muestra que:

- Las situaciones 7 y 8 (2do) y 11 y 12 (3er) demandan actividad algebraica de nivel 1. Estas requieren interpretar la razón unitaria dada de forma implícita y con dicho valor hallar otra cantidad.
- Por otro lado, las situaciones 14 (4to), 22 y 23 (5to), 26 y 27 (6to), 35 (7mo) y 43 (8vo) demandan actividad de nivel 0. Principalmente estas tareas demandan hacer una comparación de figuras geométricas.

Por lo tanto, en este significado no se observa una evolución del RAE. De hecho, es en los grados menores que hay una mayor exigencia.

Evolución del RAE en situaciones del significado proporcional de la linealidad

Este significado aparece en los grados 3ro, 4to, 5to, 6to, 7mo y 8vo. De acuerdo a nuestra propuesta de niveles de algebrización, este significado puede demandar actividad algebraica de nivel 0, 1 y 2. Por lo que es de esperarse sí encontrar una evolución del RAE a través de los diferentes grados en que se trabaja. Veamos los resultados:

- En el 3er grado, la situación 13 no demanda actividad algebraica (nivel 0).
- En el 4to grado, la situación 15 demanda actividad algebraica de nivel 1. Se empiezan a establecer relaciones de equivalencias entre magnitudes.
- En el 5to grado, la actividad se centra en reconocer relaciones de proporcionalidad directa. La razón unitaria tiene su uso para hallar valores desconocidos, es posible aunque no obligatorio resolver ecuaciones de la

forma $x = \frac{ab}{c}$. Por lo que la actividad es de nivel 1.

- En el 6to grado, las situaciones 28, 29 y 30(a) demandan una actividad similar a las del 5to grado. Sin embargo, las actividades 31 y 34 requieren encontrar una expresión general en lenguaje alfanumérico. Por lo que la actividad es de nivel 2.
- En el 7mo grado, las actividades 36 y 37 requieren trabajar con la razón unitaria de dos magnitudes para encontrar un valor desconocido, por lo que la actividad es de nivel 1. Por otro lado, pese a que la situación 38 involucra el trabajo con incógnitas, éstas no son usadas para generalizar alguna relación. Por lo que la actividad sigue siendo de nivel 1.
- En el 8vo grado, hay presencia de situaciones que demandan el trabajo necesario con incógnitas (situaciones 47 y 48). Por lo que se determina un nivel 2 de algebrización, pese a no ser necesaria una formalización en alguna expresión general. Es necesario resolver ecuaciones de la forma $x = \frac{ab}{c}$.

Por lo tanto, en este significado sí determinamos una evolución del RAE a medida que se avanza en los grados. La actividad matemática se enmarca en los niveles 0, 1 y 2 .

Evolución del RAE en situaciones de contexto de patrones lineales

Las situaciones en el contexto de patrones aparecen en los grados 1er, 2do, 3er, 4to, 6to, 8vo y 9no. A partir del análisis en la sección anterior presentamos resultados que evidencian la evolución del RAE:

- En el 1er grado, las actividades 2 y 3 demandan hallar valores cercanos en un patrón lineal de formación. No hay actividad de carácter algebraico (Nivel 0).
- En el 2do grado, la actividad 4 demanda reconocer el patrón de formación en un lenguaje natural. Por lo que se determina actividad algebraica de nivel 1.

- En el 3er grado, aún se evidencia actividad de nivel 0 de algebrización pues hay actividades para encontrar valores cercanos en un patrón lineal. Sin embargo, en este grado se presenta la primera situación en la que se debe establecer relaciones entre posición y término. Esta generalización es evidencia de un nivel 1 del RAE.
- En el 4to grado, se evidencia actividad algebraica de nivel 1. Las tareas demandan expresar el patrón de formación, no en lenguaje alfanumérico, y con dicho patrón hallar términos lejanos.
- En el 6to grado, las tareas requieren encontrar el patrón de formación para encontrar términos lejanos en la secuencia gráfica. En una de las tareas se solicita expresar dicha regla de formación en un lenguaje alfanumérico, por lo que se evidencia rasgos de nivel 2 del RAE.
- En el 8vo grado, las situaciones requieren que se halle una expresión generalizadora en un lenguaje alfanumérico. Por lo que se evidencian rasgos de nivel 2 de algebrización.
- En el 9no grado, las situaciones demandan encontrar la expresión general de formación. Adicionalmente, parte de la actividad para resolver los problemas demandan que se manipulen las expresiones halladas. Por lo que se evidencian rasgos de nivel 3 del RAE.

Determinamos una evolución del RAE, desde un nivel 0 hasta un nivel 3, en situaciones asociadas a este significado de la linealidad a través de los diferentes grados de formación.

Evolución del RAE en situaciones del significado funcional de la linealidad

Este significado aparece en los grados 4to, 7mo, 8vo, 9no y 10mo. A partir del análisis en la sección anterior presentamos resultados que evidencian la evolución del RAE:

- En el 4to grado, se presenta una primera aproximación a las funciones. No se hace uso del lenguaje algebraico, este usa términos como “Entra un valor”, “Sale un valor” y Regla de formación. La actividad se centra en expresar dicha regla de formación y encontrar valores en una tabla. Por lo que se determina actividad del nivel 1 del RAE.

- En el 7mo grado, se presentan situaciones que demandan expresar la relación entre dos magnitudes mediante el lenguaje natural. Así también, en otras situaciones se pide encontrar las expresiones funcionales (lineal y afín) en lenguaje alfanumérico. Además, es posible que se resuelvan expresiones de la forma $Ax + B = Cx$ al igualar las expresiones halladas. Por lo que se determina actividad de nivel 1, 2 y 3 del RAE.
- En el 8vo grado, las situaciones se presentan en distintos contextos: analíticos, gráficos y tabulares. Las tareas, a diferencia de los grados anteriores, hacen uso del lenguaje propio de las funciones haciendo mención al dominio y rango de la función. Así también, se hace uso del lenguaje algebraico para evaluar funciones lineales en un determinado punto. Por lo que se encuentran rasgos del nivel 3 del RAE.
- En el 9no grado, las situaciones son similares a los del 7mo y 8vo grado. No se observa una diferencia entre ellas, la actividad demanda encontrar la expresión general de la función lineal o afín. Se determinan rasgos del nivel 3 de algebrización.
- En el 10mo grado se observa una evolución respecto a los grados anteriores. Las situaciones ya no se presentan dentro del contexto de un problema, en todo momento se hace uso del lenguaje algebraico. La actividad se centra en encontrar dominios, rangos, analizar funciones por tramos, sumar funciones, utilizar propiedades. Además, algunas actividades presentan la noción de parámetros como valores constantes. Por lo tanto, determinamos actividad algebraica de nivel 4 del RAE.

Se determina una evolución del RAE, que va desde el nivel 1 hasta el nivel 4.

El análisis que se ha presentado en esta sección nos ha permitido determinar que, en los significados proporcional, de contexto en patrones lineales y funcional, sí hay una evolución del RAE.

4.5.3. Valoración de la propuesta de la institución Innova Schools en términos de la evolución del RAE

El análisis hecho en las secciones 4.5.2 y 4.5.3 nos permite valorar, en términos de la evolución del RAE, la propuesta de la institución Innova Schools. Primero, se asoció un determinado nivel de algebrización a la actividad matemática de las situaciones analizadas y, luego, se determinó cómo dichas situaciones en los diferentes grados permiten una evolución del RAE. Los resultados de estos análisis nos permiten afirmar que sí hay una evolución en el desarrollo del RAE a partir de las situaciones que la institución propone. Siendo así que:

- En el primer grado predomina el nivel 0. Esto tiene relación con el significado ahí trabajado: informal.
- En el segundo, tercer, cuarto y quinto grado predominan los niveles 0 y 1. En estos grados se trabajan actividades asociadas a los significados: aritméticos, patrones lineales y proporcionales. Con el adicional de que en el quinto grado aparece el significado funcional.
- En el sexto grado aparecen situaciones que demandan un nivel 1 y 2 del razonamiento algebraico
- En el séptimo, octavo y noveno grado predominan los niveles 2 y 3, aunque también hay actividades de un menor grado de algebrización. La actividad se centra en los significados: funcional y en patrones lineales.
- En el décimo grado la actividad algebraica reconocida pertenece a los niveles 3 y 4. En este grado las tareas pertenecen al significado funcional.

Como vemos, las actividades propuestas por la institución permiten que los estudiantes se enfrenten a situaciones que demandan rasgos de algebrización desde el nivel 0 hasta el nivel 4. Por lo que determinamos que la propuesta permite la evolución del razonamiento algebraico en tareas asociadas a la linealidad. Estas tienen la intención, en muchos de los casos, de buscar que el estudiante generalice, ya sea en un lenguaje natural como en un lenguaje algebraico. Las tareas asociadas a los significados proporcional, de patrones lineales y funcional permiten lograr ello. Esto se observa hasta el 9no grado, en el que se espera que el estudiante ya logre formalizar su generalización en una expresión lineal o afín. En el 10mo grado, la actividad matemática está planteada a que el estudiante manipule esas expresiones consolidadas en los grados previos, es por ello que la actividad formal es más exigente y por lo que hemos determinado rasgos de nivel 4 de algebrización.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Esta investigación partió del interés de conocer cómo es el aprendizaje de la función lineal en la formación básica escolar. El estudio nos ha permitido reconocer que dicho aprendizaje no se limita a las clases que se imparten en las aulas de clase, gran parte de dicho logro tiene su sustento en la correcta articulación de una serie de objetos y procesos algebraicos. Por otro lado, esta articulación debe seguir el rumbo marcado por los documentos oficiales, como el Currículo Nacional de la Educación Básica (MINEDU, 2016) y las propuestas educativas propias de cada institución educativa.

Por tal motivo, nuestra investigación se propuso valorar una propuesta educativa particular en términos del Razonamiento Algebraico Elemental teniendo como foco principal el desarrollo de la noción de linealidad. Para ello, se consideró necesario determinar qué tipos de significados de dicha noción desarrolla la institución educativa Innova Schools. Además, de si bajo dicha noción matemática se propicia la evolución del Razonamiento Algebraico Elemental.

Es así que se determinó pertinente que esta investigación tenga su sustento en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), que brinda herramientas para abordar una problemática como la nuestra. Estas herramientas han sido utilizadas para construir dos aportes teóricos:

- Un significado de referencia de la noción de linealidad que responde a los seis elementos emergentes de una configuración ontosemiótica: situaciones, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Prestando mayor atención al tipo de situaciones de cada significado parcial de la noción de linealidad.
- Una adaptación de los niveles del Razonamiento Algebraico Elemental a la noción de linealidad para la educación básica.

Estos constructos teóricos han sido fundamentales para el logro de nuestros objetivos de investigación, con estos hemos podido valorar la propuesta de la institución Innova Schools.

A continuación, se presentan los resultados en cada uno de nuestros objetivos:

Sobre el primer objetivo

Proponer un significado de referencia de la noción de linealidad considerando la institución secundaria peruana.

Para el logro de este objetivo se ha acudido a la revisión de otros trabajos de investigación, que en su mayoría han sido dentro del marco del EOS. Esta investigación nos ha permitido elaborar un significado de referencia para la noción de linealidad para la educación básica. Este significado responde a la necesidad de articular de mejor manera un significado matemático para su enseñanza, como sostiene Acosta (2011). Así mismo, este significado ha sido elaborado teniendo en cuenta los 6 objetos primarios del EOS: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Prestando mayor atención al tipo de situaciones que aparecen en cada significado:

- Significado informal
- Significado aritmético
- Significado proporcional
- Significado funcional en contexto de patrones lineales
- Significado funcional

Esta propuesta pretende ser una referencia para lograr el desarrollo idóneo de la noción de linealidad en la formación básica escolar. En esta investigación ha sido usado para reconocer el significado pretendido por la institución Innova Schools.

Sobre el segundo objetivo

Adaptar los niveles de algebrización del Razonamiento Algebraico Elemental a los significados asociados a la linealidad, desde el nivel primario al secundario.

Para el logro de este objetivo hemos determinado rasgos de algebrización de las situaciones propuestas en nuestro significado de referencia. Las investigaciones de Godino et al. (2014), Godino et al. (2015), Gaita y Wilhelmi (2019) y Burgos y Godino (2020) han sido un soporte importante. Nuestra propuesta de niveles de algebrización es específica para los diferentes significados de la linealidad, esto implica tareas asociadas a la comparación de figuras y magnitudes, la proporcionalidad, los patrones lineales y las funciones lineales. A continuación, una descripción de estos niveles:

- Nivel 0: Caracterizado por el cálculo aritmético y el uso del lenguaje natural, gestual y numérico. Ausencia de procesos y objetos algebraicos.
- Nivel 1: Un primer grado de generalización aparece en el cálculo de la razón unitaria (razón constante de cambio) en un lenguaje numérico. En tareas con patrones se reconoce la regla de formación, pero para términos cercanos a los ya dados en la sucesión.
- Nivel 2: Un grado mayor de generalización aparece al usar la razón unitaria para determinar expresiones generales. Se resuelven ecuaciones de la forma $Ax = B$. En patrones lineales se reconoce la regla de formación relacionando la posición que ocupa el término de la sucesión. No se realizan transformaciones.
- Nivel 3: Formalización en la expresión $f(x) = kx$ para expresar la función lineal, además se usan las propiedades de la función lineal $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(kx) = kf(x)$. Se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.
- Nivel 4: Primer encuentro con parámetros en sus diferentes significados: como valor fijo, como valor cambiante, como generalizador y como incógnita en tareas de funciones lineales y afines.

Nuestra propuesta de niveles del RAE para la noción de linealidad nos permitió analizar la propuesta de la institución Innova Schools. Así mismo, se espera que esta sea de utilidad y una referencia para futuras investigaciones, así como para el trabajo docente.

Sobre el tercer objetivo

Identificar el significado pretendido por la institución Innova Schools de la linealidad a través de las situaciones – problemas en términos de los niveles de algebrización del Razonamiento Algebraico Elemental.

Para el logro de este objetivo se analizaron los documentos a los que la institución Innova Schools nos permitió el acceso. Para determinar el significado pretendido por la institución en mención hemos prestado atención a las situaciones – problemas que la situación propone a sus estudiantes. Los resultados muestran lo siguiente:

- La propuesta de la institución Innova Schools desarrolla los significados: informal, aritmético, proporcional, patrones lineales y funcional de la linealidad de forma gradual.
- En el nivel primario, la actividad se centra en el significado informal, aritmético, proporcional y en patrones lineales.
- En el nivel secundario, la actividad se centra en el significado funcional, pero se sigue trabajando con los patrones lineales.

Es así que consideramos que la propuesta de la institución busca desarrollar la noción de linealidad por los significados que en su propuesta se trabaja.

Sobre el cuarto objetivo

Valorar la propuesta de la institución en términos del desarrollo del RAE sobre la linealidad, desde el nivel primario al secundario.

Para lograr nuestro último objetivo específico hemos asociado niveles de razonamiento algebraico a las situaciones trabajadas por la institución Innova Schools. Esto se hizo al reconocer rasgos de algebrización en la actividad matemática que se desprende al resolver dichas situaciones. Luego, se determinó si hay una evolución del razonamiento algebraico en un mismo significado de linealidad en diferentes grados escolares.

Los resultados muestran que para diferentes grados escolares:

- No hay evolución del RAE en el significado informal de la linealidad.
- No hay evolución del RAE en el significado aritmético de la linealidad.
- Sí hay evolución del RAE en el significado proporcional de la linealidad. La actividad algebraica se da entre los niveles 1 y 2.
- Sí hay evolución del RAE en contexto de patrones lineales. Esta evolución se da entre los niveles 0, 1, 2 y 3.
- Sí hay evolución del RAE en el significado propiamente funcional. La actividad matemática evidencia niveles 1, 2, 3 y 4 del RAE.

El análisis realizado nos permite valorar la propuesta de la institución Innova Schools, de la que afirmamos que sí propicia la evolución del RAE en sus estudiantes en actividades cuyo foco es la linealidad.

Finalmente, consideramos que los constructos teóricos que en esta investigación se han elaborado deben ser una referencia para futuras investigaciones cuyo foco de interés sea la linealidad, el razonamiento algebraico y la implementación de situaciones didácticas de enseñanza sobre dicha noción. Además de que esta noción no es particular de la formación básica. Esta se trabaja con mayor rigor matemático en la formación superior.

Así también, consideramos que nuestros resultados deben ser de interés para la formación continua del profesor de matemáticas. Esta formación docente muchas veces se centra a aspectos de formación pedagógica, dejando de lado aspectos importantes de la didáctica de la matemática. Es así que nos permitimos hacer las siguientes sugerencias:

- El significado de referencia sobre la linealidad debe ser usado para generar situaciones didácticas de enseñanza en el nivel primario y secundario. Así mismo, esperamos que este sea una herramienta para valorar las propuestas de otras instituciones.
- La adaptación de niveles de razonamiento algebraico de nuestra propuesta

debe ser un indicador, que sin duda está abierto a mejoras, para valorar la actividad algebraica de los estudiantes al enfrentarse a situaciones asociadas a la linealidad y sus diferentes significados.

REFERENCIAS

Acosta, J. A. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural.* (Tesis de doctorado). CICATA-IPN: D.F., México.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática.*

Carrillo, F., Gaita, R. y García, J. (2019). Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales. *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa, 32*(2), 85-93. Obtenido el 2 de diciembre de: http://funes.uniandes.edu.co/14058/1/Carrillo2019Niveles.pdf

Castro, W.F., Martínez-Escobar, J.D. y Pino-Fan, L.R. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT*, *6*(2), 164-191. doi: 10.4471/redimat.2017.1981.

Escudero, P. (2017). *Identificación de conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento de Patrones. *Bolema, 33(*63), 629-689. doi: 10.1590/1980-4415v33n63a13

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/)

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII* (2), 221-252

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 285-294). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletín de Educación Matemática- BOLEMA, 26* (42B), 483-511.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 34(2-3), 167-200.*

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Godino, J. D., Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En Muñoz, J. M., Arnal, A., Beltrán, P., Callejo, M. L. y Carrillo, J. (Eds), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). España, Zaragoza: SEIEM

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.* Recuperado de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Innova Schools. (2019). *Diseño Curricular del Área de Matemática.* Lima, Perú.

MINEDU. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima: MINEDU.

OECD (2012). *Marcos y Pruebas de evaluación de PISA 2012.* OECD Publishing

Parra, Y. E. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función.* (Tesis de maestría). Universidad De Los Lagos, Santiago, Chile.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, XXXVI (*1), 87-109.

Sánchez, D. M. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula.* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Teacher Resource Centrer (s.f.). *Teacher Resource Center.* Recuperado el 15 de noviembre de 2020 de https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/contenido

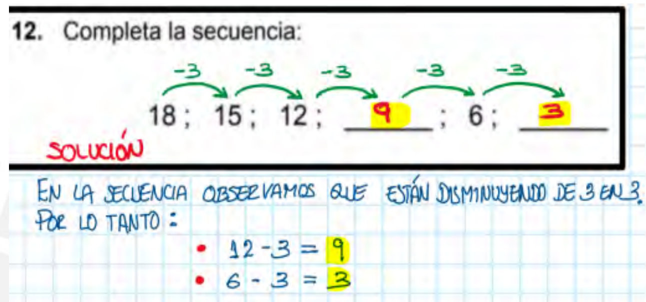
ANEXOS

SOLUCIONES DE LAS SITUACIONES PROPUESTAS POR INNOVA SCHOOLS

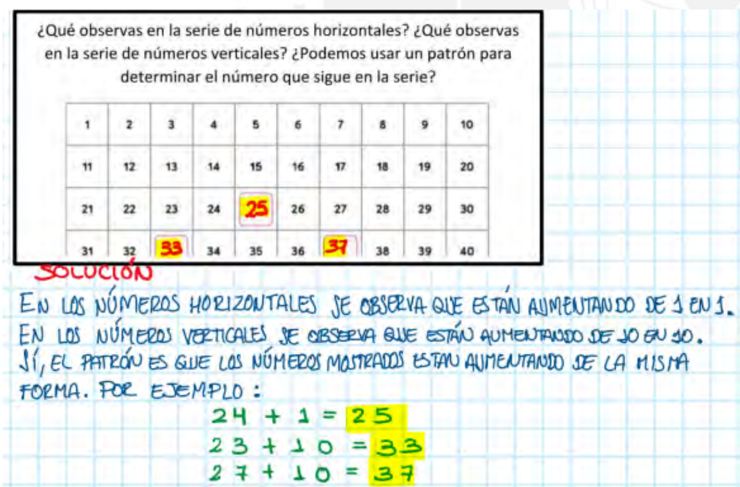
PRIMER GRADO

Situación 1

Situación 2



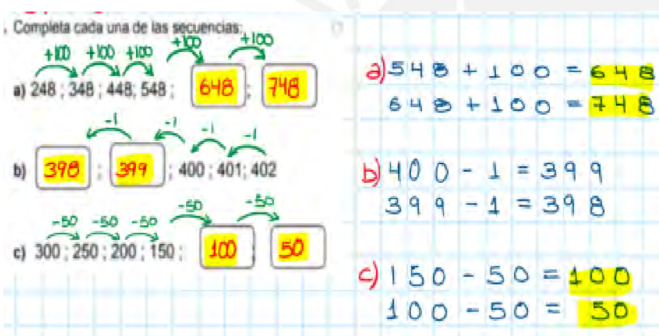
Situación 3



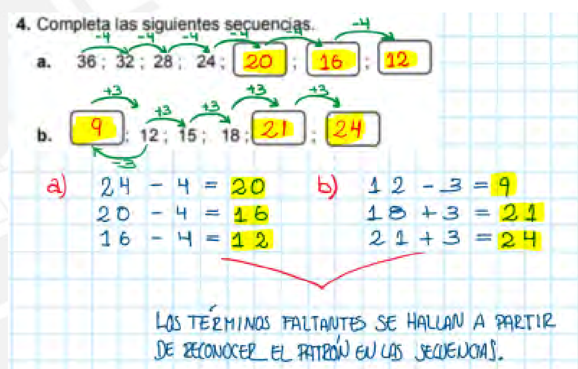
SEGUNDO GRADO

Situación 4

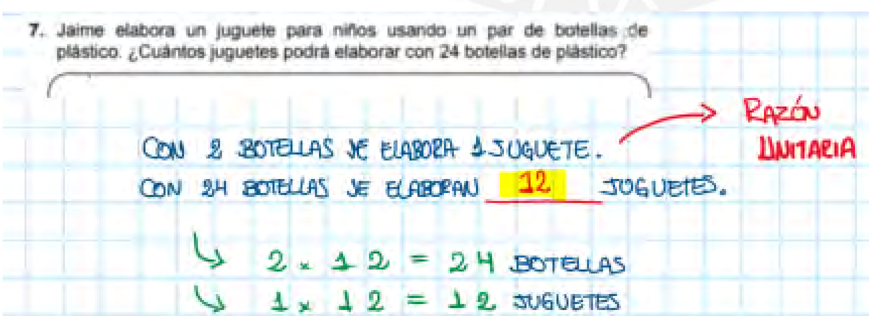
Situación 5



Situación 6



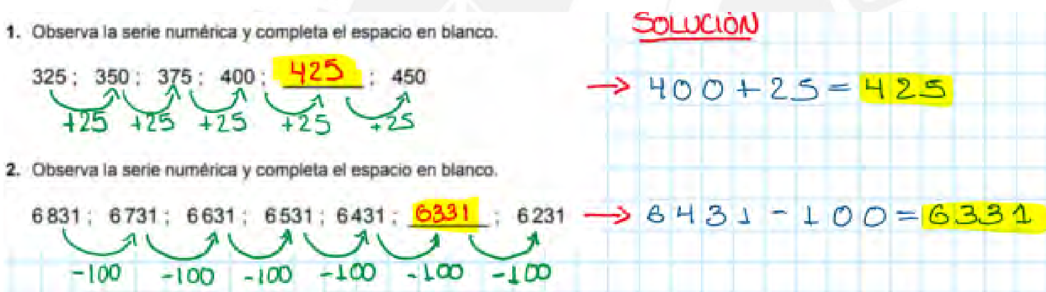
Situación 7



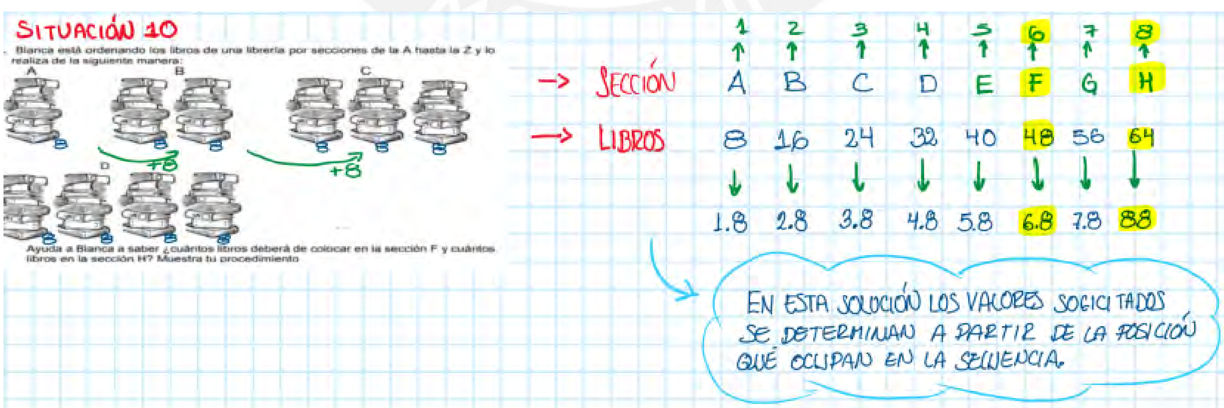
Situación 8

TERCER GRADO

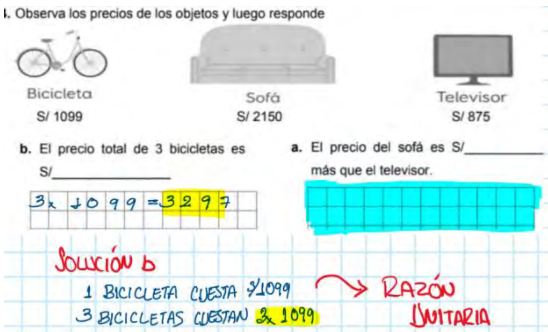
Situación 9



Situación 10

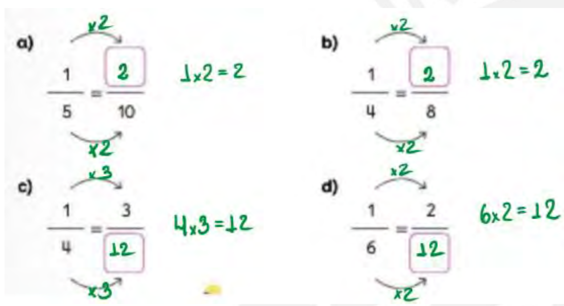


Situación 11



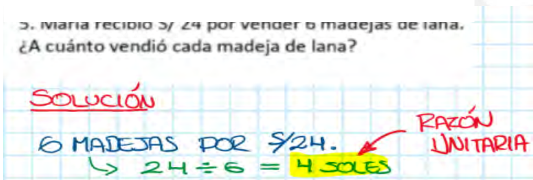
Situación 12

Situación 13

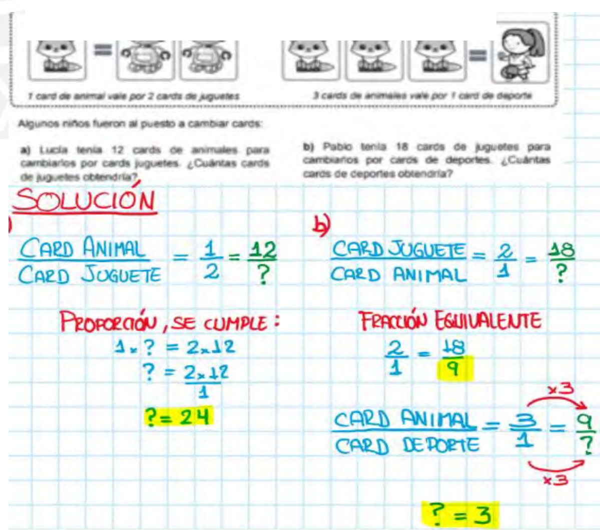


CUARTO GRADO

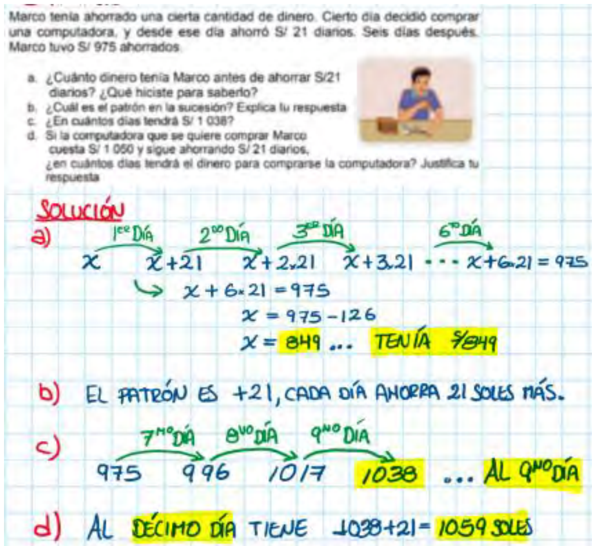
Situación 14



Situación 15



Situación 16


Marco tenía ahorrado una cierta cantidad de dinero. Cierto día decidió comprar una computadora, y desde ese día ahorró S/ 21 diarios. Seis días después, Marco tuvo S/ 975 ahorrados.

a. ¿Cuánto dinero tenía Marco antes de ahorrar S/21 diarios? ¿Qué hiciste para saberlo?
b. ¿Cuál es el patrón en la sucesión? Explica tu respuesta
c. ¿En cuántos días tendrá S/ 1 038?
d. Si la computadora que se quiere comprar Marco cuesta S/ 1 050 y sigue ahorrando S/ 21 diarios, ¿en cuántos días tendrá el dinero para comprarse la computadora? Justifica tu respuesta

SOLUCIÓN

a) 1er DÍA, 2do DÍA, 3er DÍA, 6to DÍA

$x \quad x+21 \quad x+2.21 \quad x+3.21 \cdots x+6.21 = 975$

$x + 6.21 = 975$

$x = 975 - 126$

$x = 849$ ... TENÍA S/849

b) EL PATRÓN ES +21, CADA DÍA AHORRA 21 SOLES MÁS.

c) 7mo DÍA, 8vo DÍA, 9no DÍA

975 996 1017 1038 ... AL 9no DÍA

d) AL DÉCIMO DÍA TIENE 1038+21 = 1059 SOLES

Situación 17


1. María recibió el lunes en la mañana S/ 250 para sus gastos de alimentación y movilidad de la semana. Ella registra el dinero que tiene al iniciar cada día. Si cada día gasta lo mismo, ¿cuánto dinero tendrá al iniciar el domingo? Completen el patrón.

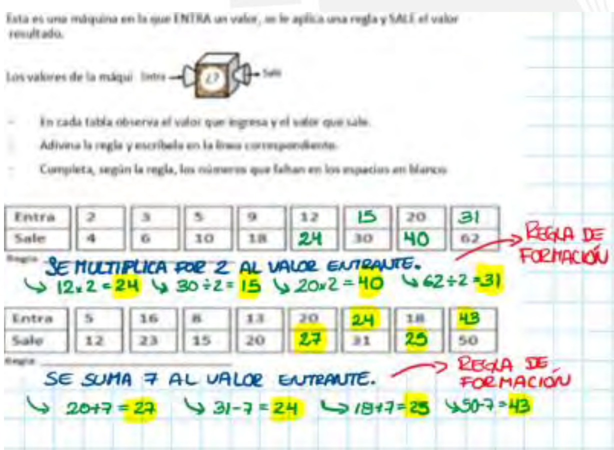
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
S/ 250	S/ 220	S/ 190	160	130	100	70

-30 -30 -30 -30 -30 -30

Responde.

a) ¿Cada día gasta la misma cantidad? SÍ ¿Cuánto? 30 SOLES
b) ¿Cuánto dinero le quedará al iniciar el día jueves? 160 SOLES
c) Escribe con tus palabras la regla que expresa esta secuencia numérica.
DISMINUYE EN 30.

Situación 18


Esta es una máquina en la que ENTRA un valor, se le aplica una regla y SALE el valor resultado.

Los valores de la máqui Entra Sale

- En cada tabla observa el valor que ingresa y el valor que sale.
- Adivina la regla y escríbela en la línea correspondiente.
- Completa, según la regla, los números que faltan en los espacios en blanco

Entra	2	3	5	9	12	15	20	31
Sale	4	6	10	18	24	30	40	62

Regla: SE MULTIPLICA POR 2 AL VALOR ENTRANTE. → REGLA DE FORMACIÓN

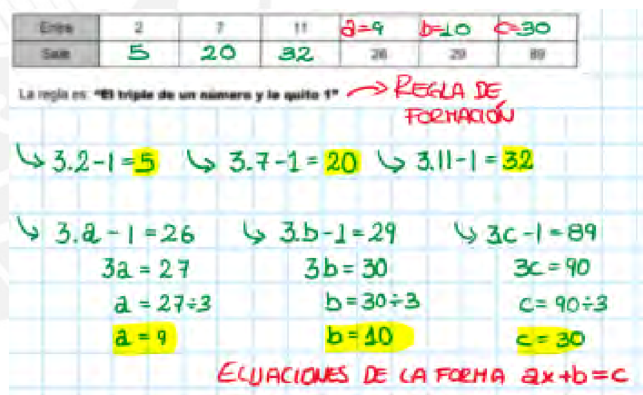
$12 \times 2 = 24$ $30 \div 2 = 15$ $20 \times 2 = 40$ $62 \div 2 = 31$

Entra	5	16	8	13	20	24	18	43
Sale	12	23	15	20	27	31	25	50

Regla: SE SUMA 7 AL VALOR ENTRANTE. → REGLA DE FORMACIÓN

$20+7 = 27$ $31-7 = 24$ $18+7 = 25$ $50-7 = 43$

Situación 19


Entra	2	7	11	a=9	b=10	c=30
Sale	5	20	32	26	29	89

La regla es: **"El triple de un número y le quito 1"** → REGLA DE FORMACIÓN

$3.2 - 1 = 5$ $3.7 - 1 = 20$ $3.11 - 1 = 32$

$3.a - 1 = 26$ $3.b - 1 = 29$ $3c - 1 = 89$

$3a = 27$ $3b = 30$ $3c = 90$

$a = 27 \div 3$ $b = 30 \div 3$ $c = 90 \div 3$

$a = 9$ $b = 10$ $c = 30$

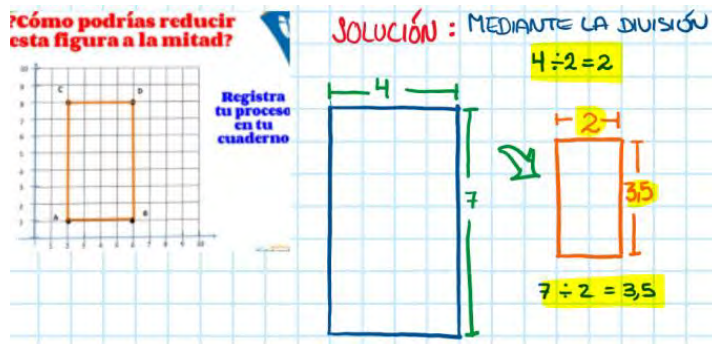
ECUACIONES DE LA FORMA $ax+b=c$

QUINTO GRADO

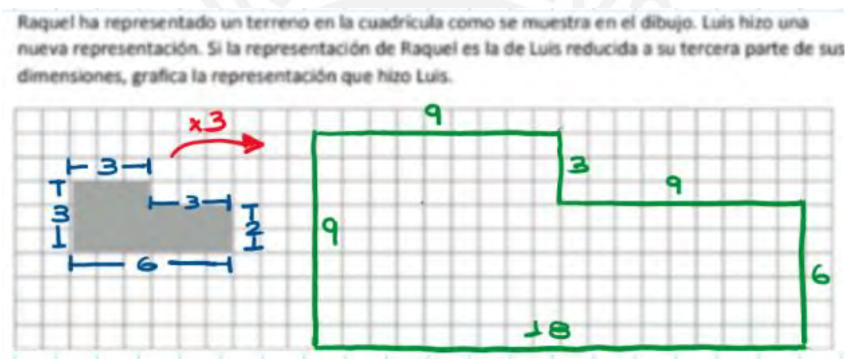
Situación 20

Situación 21

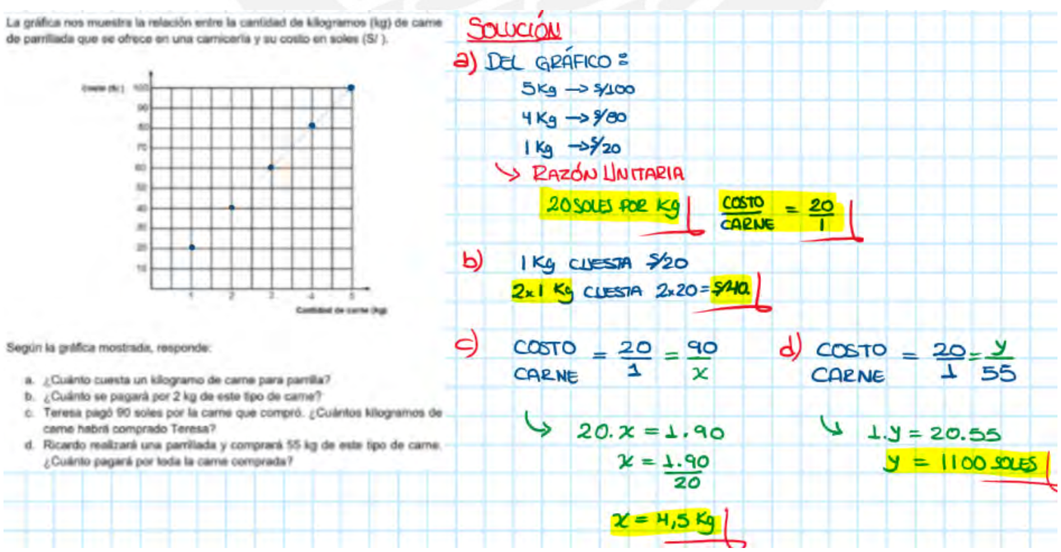
Situación 22



Situación 23



Situación 24



Situación 25

Roy vende casacas siempre al mismo precio. Él organiza la información de sus ventas así:

Número de casacas	3	4	5	8		20
Precio (S/)	135	$x = 180$	225	$y = 360$	450	900

- Completa la tabla.
- Según la información de la tabla, ¿es posible que Roy recaude S/ 700 de forma exacta? ¿Por qué?

b) $\frac{\text{PRECIO}}{\text{\# CASACAS}} = \frac{45}{1} = \frac{700}{?}$

$? = \frac{1 \cdot 700}{45} = 15{,}555\ldots$ (NO ES EXACTO)

SOLUCIÓN

RAZÓN UNITARIA → 45 SOLES POR CASACA

a) $\frac{\text{PRECIO}}{\text{\# CASACAS}} = \frac{135}{3} = \frac{R}{1}$

$R \cdot 3 = 1 \cdot 135$

$R = 135 \div 3$

$R = 45$

↳ PARA 4 CASACAS:
$45 \cdot 4 =$ 180 SOLES

↳ PARA 8 CASACAS:
$45 \cdot 8 =$ 360 SOLES

↳ PARA 20 CASACAS
$45 \cdot 20 =$ 900 SOLES

↳ $\frac{45}{1} = \frac{450}{x}$

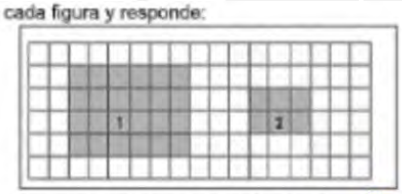
$x = \frac{450 \cdot 1}{45}$

$x =$ 10 CASACAS

SEXTO GRADO

Situación 26

1. Observa cada figura y responde:



*¿Cuántos cuadrados de ancho mide la figura 1? 4
*¿Cuántos cuadrados de ancho mide la figura 2? 2
*¿Cuántos cuadrados de largo mide la figura 1? 6
*¿Cuántos cuadrados de largo mide la figura 2? 3
*¿Qué forma tiene la figura 1? RECTÁNGULO
*¿Qué forma tiene la figura 2? RECTÁNGULO
*¿La figura 2 es una ampliación o una reducción de la figura 1? ¿Por qué? ¿Cuál crees que fue el criterio matemático (escala)?
LA FIGURA 2 ES UNA REDUCCIÓN DE LA FIGURA 1.
HA REDUCIDA A LA MITAD. $(4 \div 2 = 2$ y $6 \div 2 = 3)$

Situación 27

1. Delia ha recibido una mercadería de paquetes de hojas bond para vender en su librería. Ayúdala a hacer algunos cálculos.

RETO 1: Si el precio de una docena de paquetes es de 240 soles. ¿Cuál es el precio de un paquete? ¿A cuánto debería vender un paquete si quiere ganar un céntimo por hoja?

$\frac{\text{PRECIO}}{\text{\# PAQUETES}} = \frac{240}{12} \xrightarrow{\div 12} \frac{12}{1}$ → RAZÓN UNITARIA

R = 20 SOLES

Situación 28

SITUACIÓN 28

En un mercado se observan los siguientes carteles :

Tomate
2 kg por S/.7
4 kg por S/.13
5 kg por S/.15

Papa
4 kg por S/.6
6 kg por S/.9
8 kg por S/.12

El costo del tomate es proporcional al peso comprado?
¿Y el de la papa? Justifica

TOMATE

COSTO (S/.)	7	13	15
PESO (Kg)	2	4	5

SI $\frac{7}{2} = \frac{13}{4} \rightarrow 7 \times 4 = 2 \times 13$
$28 = 26$

RPTA. EL COSTO NO ES PROPORCIONAL AL PESO

PAPA

COSTO (S/.)	6	9	12
PESO (Kg)	4	6	8

SI $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} \rightarrow 6 \times 6 = 4 \times 9$
$36 = 36$

TAMBIÉN $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

RPTA. EL COSTO SÍ ES PROPORCIONAL AL PESO

Situación 29

Reto 1

La razón entre la cantidad de mujeres y hombres en una clase es de 6:5. Si la cantidad de mujeres es 18, calcula la cantidad hombres.

$\frac{\text{MUJERES}}{\text{HOMBRES}} = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{6}{5} \overset{\times 3}{=} \frac{18}{15}$

$x = 15$ HOMBRES

Situación 30

a) Completa la tabla de proporcionalidad.

Naranjas (kg)	5	10	20	20	25	100
Costo (S/.)	4	8	16	16	20	80

×2 ×4 ×5 ×4

b) Resuelve.
Si 8 donuts cuestan 24 soles, ¿cuánto se pagará por 5 donuts similares?, ¿y por una docena y media?

a) $\underbrace{\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{100}{80}}_{\text{FRACCIONES EQUIVALENTES}}$

b) FORMA 1: ECUACIÓN PROPORCIONAL

$\frac{\text{COSTO}}{\text{DONUTS}} = \frac{24}{8} \rightarrow \frac{24}{8} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{24 \times 5}{8}$

$x = 15$ SOLES

$\rightarrow \frac{24}{8} = \frac{y}{18} \rightarrow y = \frac{24 \times 18}{8}$

$y = 54$ SOLES

FORMA 2: RAZÓN UNITARIA

$\frac{\text{COSTO}}{\text{DONUTS}} = \frac{24}{8} = \frac{3}{1} \rightarrow$ 3 SOLES POR DONUT

5 DONUTS $\rightarrow 5 \times 3 =$ 15 SOLES
18 DONUTS $\rightarrow 18 \times 3 =$ 54 SOLES

SITUACIÓN 31

Situación 31

a. Construye una tabla para hallar el valor unitario.

b. Halla la constante de proporcionalidad.

c. Redacta una expresión matemática que relacione el número de lápices con su precio.

a)

PRECIO (€)	1,2	2	3,2
# DE LÁPICES	3	5	8

RAZÓN UNITARIA

$\frac{1,2}{3} = \frac{2}{5} = \frac{3,2}{8} =$ 0,4 € POR LÁPIZ

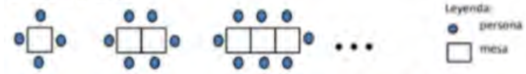
b) $K = 0,4$

c) SEA EL PRECIO (P) y EL NÚMERO DE LÁPICES (L)

$P = 0,4 \times L$

Situación 32

Un restaurante tiene una forma peculiar de organizar sus mesas cada vez que llegan cierto grupo de comensales. Se observa que siempre colocan una mesa a continuación de otra como se muestra en la imagen.



a) ¿Qué relación encuentras entre el número de mesas y el número de personas?

- POR CADA MESA ADICIONAL SE PUEDEN SENTAR 2 PERSONAS MÁS
- EL NÚMERO DE PERSONAS QUE SE PUEDEN SENTAR SE HALLA CON EL DOBLE DEL NÚMERO DE MESAS MÁS DOS.

b) ¿Cuántas personas se sentarán en 6 mesas?

SE SENTARÁN 14 PERSONAS.

c) ¿Cuántas mesas se utilizarán para 22 personas?

SE UTILIZARÁN 10 MESAS.

MESAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PERSONAS	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

Situación 33

Las siguientes figuras están formadas por palitos de fósforo del mismo tamaño.

fig.1 fig.2 fig.3

a) ¿Cuántos palitos se necesitan para formar la figura 5? Responde y dibújala.

b) ¿Cuántos cuadraditos se necesitan para formar la figura 6? Responde y dibújala.

c) Completa la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

+2 +2 +2 +2

d) ¿Cuántos palitos se necesitan para formar la figura 11?

e) ¿Cuál es la regla de formación para la figura "n"?

a)

FIG.5

b) SE NECESITAN 13 PALITOS.

c) SE NECESITAN:

10	11
21	23

+2

23 PALITOS

d)

FIGURA	1	2	3	4	5	...	n
CANTIDAD PALITOS	3	5	7	9	11	...	n.2+1

1.2+1 2.2+1 3.2+1 4.2+1 5.2+1 n.2+1

Rpta. PARA LA FIGURA "n" SE NECESITAN n.2+1

Situación 34

Los padres de familia de una institución educativa se pusieron de acuerdo para pintar las aulas. Pablo, que es pintor y tiene experiencia, afirmó que con 2 galones de pintura se pueden pintar 80 m² de pared. Si las paredes que se pintarán tienen un área de 40 m², 160 m², 200 m² y 400 m², respectivamente, ¿cuántos galones de pintura hacen falta para toda la obra?

a. Comenten, ¿para pintar 40 m² de pared se necesitarán más o menos de 2 galones de pintura? ¿Por qué?

→ PARA PINTAR 80 m² SE USAN 2 GALONES, ENTONCES PARA 40 m² SE DEBEN USAR MENOS (MITAD).
→ SON MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

b. Analicen lo que dicen Patty y Paco. Luego completen la tabla.

Con 2 galones se pintan 80 m². Entonces, para pintar 40 m² necesitaré...

Con 2 galones se pintan 80 m². Entonces, para pintar 160 m² necesitaré...

Cantidad de galones de pintura	Superficie en metros cuadrados
1	40
2	80
4	160
5	200
10	400

÷ 2   × 2   x5   x2

c. Respondan.

- ¿Qué relaciones emplearon para calcular el número de galones necesarios para pintar 200 m² y 400 m2?

A PARTIR DE CONOCER LOS m² POR GALÓN (RAZÓN UNITARIA 40 m²/GALÓN) SE PUEDE CONOCER EL NÚMERO DE GALONES PARA 200 m² y 400 m²

- ¿Qué relación existe entre el número de galones de pintura y la superficie pintada?

↳ POR CADA GALÓN SE PUEDE PINTAR 40 m²
↳ HAY UNA RELACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL, QUE PUEDE EXPRESARSE

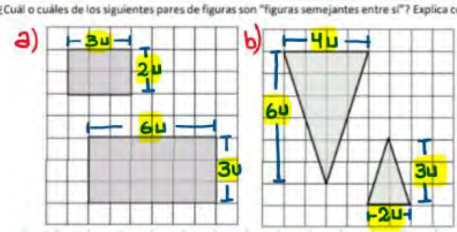
$S = 40G$

S: SUPERFICIE A PINTAR
G: CANTIDAD DE GALONES

SÉPTIMO GRADO

Situación 35

¿Cuál o cuáles de los siguientes pares de figuras son "figuras semejantes entre sí"? Explica cómo lo sabes.



a) NO SON SEMEJANTES, LA AMPLIACIÓN NO ES DE FORMA PROPORCIONAL

b) SÍ SON SEMEJANTES, UNA FIGURA ES EL DOBLE DE LA OTRA.

Situación 36

En un plano de un colegio elaborado en una escala 1:50 las medidas de la sala de profesores son 7 centímetros y 12 centímetros. ¿Cuáles son las medidas reales de la sala?

SEAN LAS MEDIDAS "A" y "B"

PARA LA MEDIDA "A"

$$\frac{\text{PLANO}}{\text{REAL}} = \frac{1}{50} \overset{\times 7}{=} \frac{7}{350}$$

PARA LA MEDIDA "B"

$$\frac{\text{PLANO}}{\text{REAL}} = \frac{1}{50} \overset{\times 12}{=} \frac{12}{600}$$

RPTA. LAS MEDIDAS REALES SON 350 cm y 600 cm.

Situación 37

Jessica prepara chocolate para elaborar sus chocotejas. Para preparar 50 chocotejas utiliza la siguiente receta:

- ¿Cuál es la razón entre la cantidad de azúcar impalpable y la de mantequilla?
- Si Jessica quiere preparar 100 chocotejas, ¿la razón entre los vasos de agua y de cocoa variará?

RECETA:
250 g de azúcar impalpable.
200 g de mantequilla.
4 vasos de agua
6 vasos de cocoa.

→ $\frac{\text{AZÚCAR}}{\text{MANTEQUILLA}} = \frac{250}{200} \xrightarrow{\div 10} \frac{25}{20} \xrightarrow{\div 5} \frac{5}{4}$ (FRACCIONES EQUIVALENTES)

→ RPTA. POR CADA 5g DE AZÚCAR SE USAN 4g DE MANTEQ.

→ PARA 50 CHOCOTEJAS: $\frac{\text{AGUA}}{\text{COCOA}} = \frac{4}{6}$

PARA 100 CHOCOTEJAS SE USARÁ EL DOBLE: $\frac{\text{AGUA}}{\text{COCOA}} = \frac{8}{12}$

$\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ SON EQUIVALENTES, NO VARÍA LA RAZÓN.

Situación 38

En la siguiente tabla, las magnitudes A y B son directamente proporcionales.

A	2	4	8	N
B	M	20	40	100

Calcula el valor de "M+N"

HALLANDO "M"

$\frac{2}{M} = \frac{4}{20}$

$\frac{2 \times 20}{4} = M$

$10 = M$

HALLANDO "N"

$\frac{8}{40} = \frac{N}{100}$

$\frac{8 \times 100}{40} = N$

$20 = N$

↳ $M + N = 10 + 20 = 30$ Rpta.

Situación 40

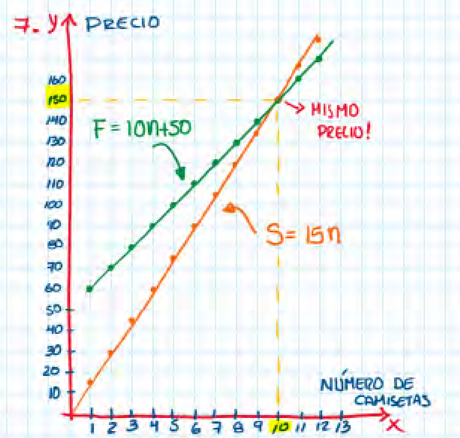
PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS 1, 2, 3 y 4 ELABORAMOS DOS TABLAS QUE REGISTREN EL PRECIO A PAGAR.

1. CONVIENE COMPRAR EN LA TIENDA "SÍ SE PUEDE", YA QUE ES MÁS BARATO
2. PARA UNA ORDEN DE 9 CAMISETAS CONVIENE LA TIENDA "SÍ SE PUEDE".
   PARA UNA ORDEN DE 10 CAMISETAS, AMBAS TIENDAS. EL COSTO ES EL MISMO.
3. LA TIENDA "FÚTBOL Y MÁS" ES LA MEJOR OPCIÓN EN UNA ORDEN DE 18 CAMISETAS.
4. FÚTBOL Y MÁS
   10 SOLES POR CAMISETA, MÁS 50 SOLES.

NÚMERO DE CAMISETAS	PRECIO
1	1.10+50 = 60
2	2.10+50 = 70
3	3.10+50 = 80
4	4.10+50 = 90
9	9.10+50 = 140
10	10.10+50 = 150
18	18.10+50 = 230
⋮	
n	n.10+50

SÍ SE PUEDE
15 SOLES POR CAMISETA

NÚMERO DE CAMISETAS	PRECIO
1	1.15 = 15
2	2.15 = 30
3	3.15 = 45
4	4.15 = 60
9	9.15 = 135
10	10.15 = 150
18	18.15 = 270
⋮	
n	n.15

5. PARA "n" CAMISETAS, EL COSTO "F" ES:
   $F(n) = 10.n + 50$
6. PARA "n" CAMISETAS, EL COSTO "S" ES
   $S(n) = 15.n$
7. 

8. DE LA GRÁFICA:
   SI SE ORDENAN 10 CAMISETAS EL COSTO ES EL MISMO EN AMBAS TIENDAS.
9. ORDENANDO HASTA 9 CAMISETAS LA COMPRA EN LA TIENDA "SÍ SE PUEDE" RESULTA MEJOR. EL PRECIO ES MENOR.
10. SE QUIERE QUE $F(n) = S(n)$

↳ $10n + 50 = 15n$

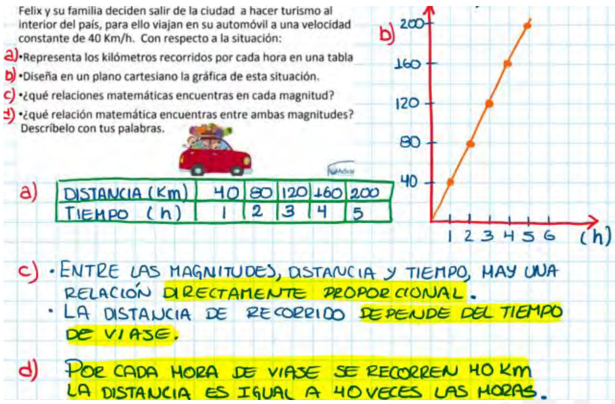
$50 = 15n - 10n$

$50 = 5n$

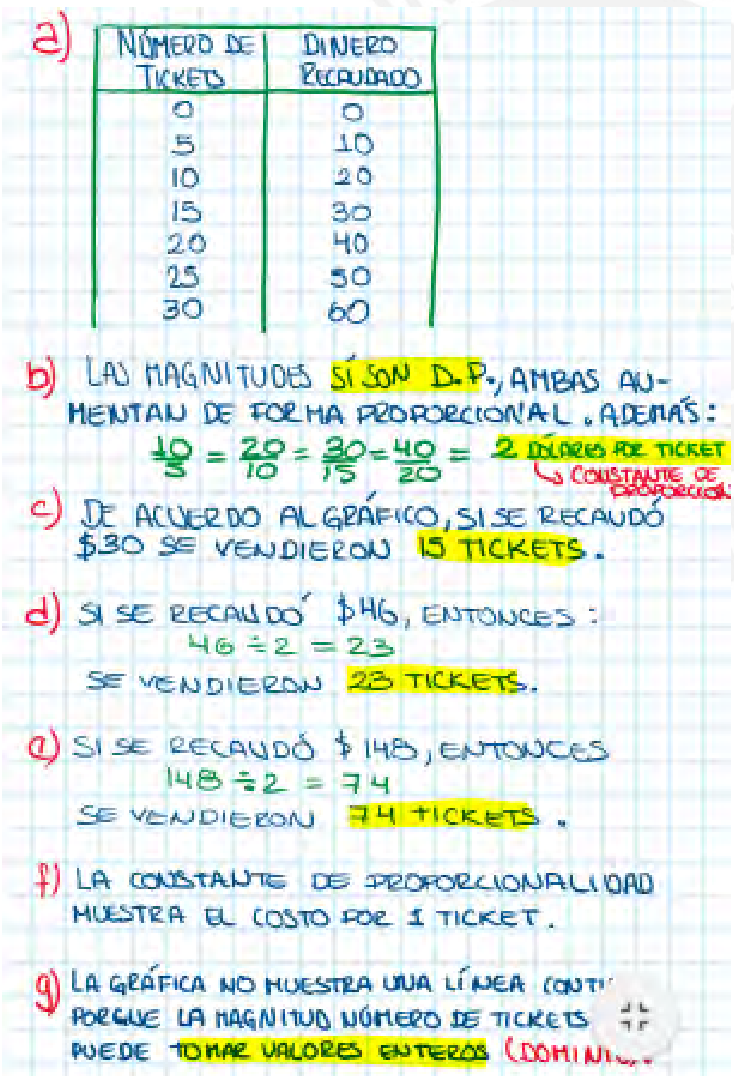
$50 \div 5 = n$

$10 = n$ A PARTIR DE 10 CAMISETAS!

Situación 39



Situación 42

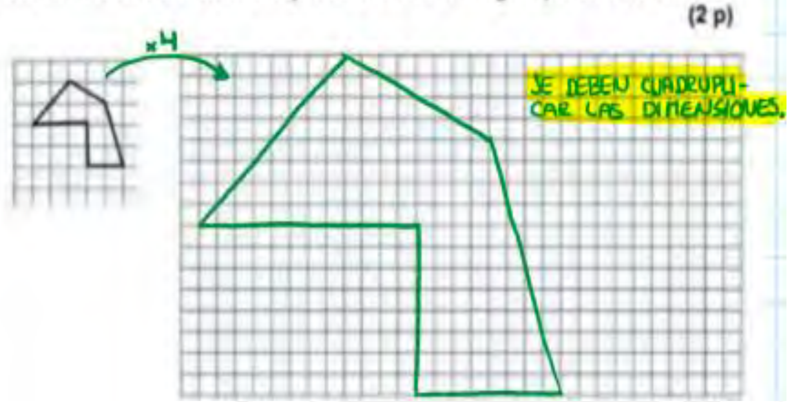


OCTAVO GRADO

Situación 43

Luis desea bordar esa imagen en la tela. Quiere que las medidas de la imagen sean cuatro veces la medida del molde. Dibuja sobre la tela la imagen que va a bordar Luis.

(2 p)



Situación 44

a) Rubén ha pagado S/ 42,5 por cinco entradas para el circo. ¿Cuánto pagará su amigo Bernabé por tres entradas?

b) Carmen ha pagado S/ 3,99 por un melón que pesaba 2,28 Kg. ¿Cuánto pagará Rodrigo por otro melón que pesa 3,04 Kg?

a) SE PUEDE RESOLVER DE 2 FORMAS :

→ RAZÓN UNITARIA

$$\frac{\text{COSTO}}{\text{ENTRADAS}} = \frac{42{,}5}{5} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{8{,}5}{1}$$ → 8,5 SOLES POR ENTRADA

PARA 3 ENTRADAS ⇒ $8{,}5 \times 3 = 25{,}5$ SOLES Rpta.

→ PROPORCIÓN

$$\frac{42{,}5}{5} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{42{,}5 \times 3}{5} = 25{,}5 \text{ SOLES}$$

b)

$$\frac{\text{COSTO}}{\text{PESO}} = \frac{3{,}99}{2{,}28} = \frac{x}{3{,}04} \rightarrow x = \frac{3{,}04 \times 3{,}99}{2{,}28}$$

$$x = 5{,}32$$

Rpta. PAGARÍA S/5,32.

Situación 45

Completa cada tabla escribiendo los números que faltan.

a) Cada par de números está a razón de 1: 5.

2	3	4	5	6	7	8	10	12
10	15	20	25	30	35	40	50	60

HALLANDO LAS FRACCIONES EQUIVALENTES

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{5}{25}=\frac{6}{30}=\frac{7}{35}=\frac{8}{40}=\frac{10}{50}=\frac{12}{60}$$

Situación 46

Lilian tiene una fábrica de alfajores artesanales. Sabe que para fabricar 30 alfajores de chocolates son necesario 0,5 kg de harina; 1,2 kg de dulce de leche y 0,6 kg de chocolate. Si quiere preparar 170 alfajores, ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesita?

- RELACIÓN CANTIDAD DE ALFAJORES Y PESO DE HARINA

$$\frac{\text{ALFAJORES}}{\text{HARINA}}=\frac{30}{0{,}5}=\frac{170}{x} \rightarrow x=\frac{170\times 0{,}5}{30}$$

$$x = 2{,}83\ Kg$$

Rpta. SE USAN 2,83 Kg DE HARINA

- RELACIÓN CANTIDAD DE ALFAJORES Y DULCE DE LECHE.

$$\frac{\text{ALFAJORES}}{\text{DULCE DE LECHE}}=\frac{30}{1{,}2}=\frac{170}{y} \rightarrow y=\frac{170\times 1{,}2}{30}$$

$$y = 6{,}8\ Kg$$

Rpta. SE USAN 6,8 Kg DE DULCE DE LECHE.

- RELACIÓN CANTIDAD DE ALFAJORES Y CHOCOLATE

$$\frac{\text{ALFAJORES}}{\text{CHOCOLATE}}=\frac{30}{0{,}6}=\frac{170}{z} \rightarrow z=\frac{170\times 0{,}6}{30}$$

$$z = 3{,}4\ Kg$$

Rpta. SE USAN 3,4 Kg DE CHOCOLATE.

Situación 47

Dos magnitudes M y N son directamente proporcionales (DP). Cuando M es igual a 8, N es igual 24. ¿Cuál será el valor de M cuando N sea 27?

SI "M" ES DP A "N", ENTONCES:

8 ES A 24 COMO M ES A 27

$$\frac{8}{24}=\frac{M}{27} \rightarrow M=\frac{8\times 27}{24}$$

$M = 9$ Rpta.

Situación 48

"A" y "B" son dos magnitudes D.P. Cuando el valor inicial de "B" se triplica, el valor de "A" aumenta en 10 unidades. Cuando el nuevo valor de "B" se divida entre 5, ¿qué sucederá con el valor de "A" respecto al inicial?

"A" ES D.P. A "B", ENTONCES

$$\frac{A}{B} \xrightarrow{\times 3} \frac{3A}{3B}$$

SI "B" SE TRIPLICA, "A" TAMBIÉN.
PERO, "A AUMENTA EN 10"

$3A = A + 10$

$2A = 10$

$A = 5$

↳ $\frac{3.5}{3B} = \frac{15}{3B}$

SI "B" SE DIVIDE ENTRE 5, "A" TAMBIÉN.

$15 \div 5 = 3$

RPTA. A SE REDUCE A SUS $\frac{3}{5}$.

Situación 49

DEBEMOS ENCONTRAR LA REGLA DE FORMACIÓN GENERAL, ESTO SE PUEDE HACER DE DOS FORMAS:

• SUCESIÓN ARITMÉTICA

FIGURA	1	2	3	4	5
PALITOS BLANCOS	2	7	12	17	22

+5 +5 +5 +5

EL TÉRMINO n-ÉSIMO DE LA SUCESIÓN

$T_n = T_1 + r(n-1)$

$T_n = 2 + 5(n-1)$

$T_n = 2 + 5n - 5.1$

$T_n = 2 + 5n - 5$

$T_n = 5n - 3$

EXPRESIONES EQUIVALENTES

• RELACIÓN ENTRE LA FIGURA Y LA POSICIÓN QUE OCUPA

FIG. 1 → 1.5 − 3 = 2

FIG. 2 → 2.5 − 3 = 7 (+5)

FIG. 3 → 3.5 − 3 = 12 (+5)

⋮

FIG. n → n.5 − 3

PARA CUALQUIER FIGURA "n" SE USAN:

$P(n) = 5n - 3$

DE AMBAS FORMAS SE LLEGA A LA MISMA EXPRESIÓN GENERAL.

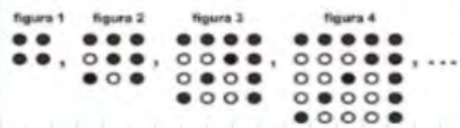
↳ $T(2011) = 5(2011) - 3$

$T(2011) = 10055 - 3$

$T(2011) = 10052$ PALITOS BLANCOS RPTA.

Situación 50

5) En la siguiente secuencia de figuras, ¿cuántos círculos sombreados hay en la figura 101? Y ¿en la figura "n"?



SOLUCIÓN

FIGURA	1	2	3	4
CÍRCULOS SOMBREADOS	4	7	10	13

+3 +3 +3

RAZÓN DE CAMBIO

$T_n = T_1 + r(n-1)$

$T_n = 4 + 3(n-1)$

$T_n = 4 + 3n - 3$

$T_n = 3n+1$ REGLA DE FORMACIÓN GENERAL

RPTA.

• EN LA FIGURA 101

$T_{101} = 3(101)+1$

$T_{101} = 303+1$

$T_{101} = 304$ CÍRCULOS SOMBREADOS RPTA

Situación 51

1. RAZÓN UNITARIA = 0,375 ml/Kg,
PARA 20 Kg ⟶ $0{,}375 \times 20 = 7{,}5$ ml

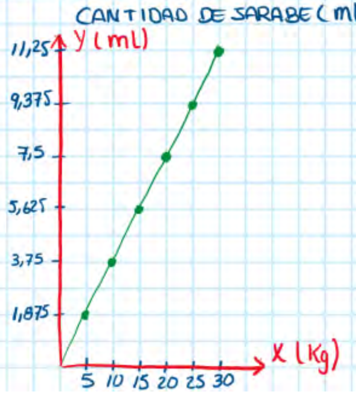
2. $\frac{\text{CUCHARADITA}}{\text{CANTIDAD JARABE (ml)}} = \frac{1}{5} = \frac{x}{7{,}5}$

$x = \frac{1 \cdot 7{,}5}{5}$

$x = 1{,}5$ CUCHARADITAS

3. LAS MAGNITUDES:
CANTIDAD DE JARABE (ml) DEPENDE DEL PESO (Kg).

4.



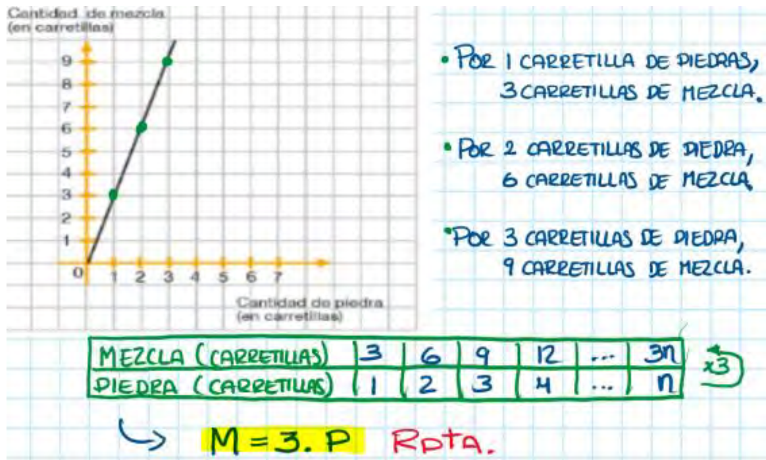
5. SEA:
CANTIDAD DE JARABE (J)
PESO DEL PACIENTE (P)

$J = 0{,}375 \cdot P$ RPTA.

J	0,375	1,875	3,75	7,5
P	1	5	10	20

x0,375

Situación 52



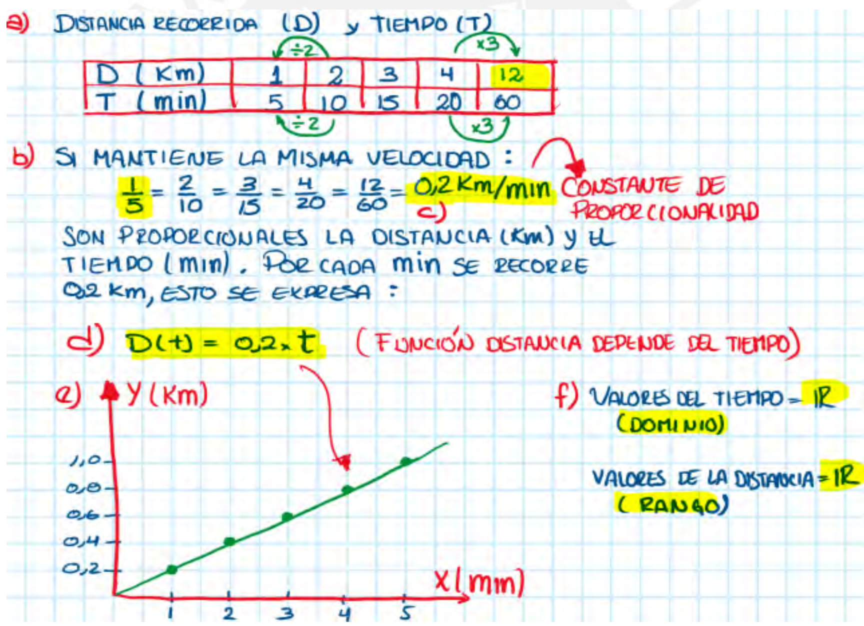
- POR 1 CARRETILLA DE PIEDRAS, 3 CARRETILLAS DE MEZCLA.
- POR 2 CARRETILLAS DE PIEDRA, 6 CARRETILLAS DE MEZCLA.
- POR 3 CARRETILLAS DE PIEDRA, 9 CARRETILLAS DE MEZCLA.

MEZCLA (CARRETILLAS)	3	6	9	12	...	3n
PIEDRA (CARRETILLAS)	1	2	3	4	...	n

x3

$\hookrightarrow$ $M = 3 . P$ Rpta.

Situación 53



a) DISTANCIA RECORRIDA (D) y TIEMPO (T)

D (Km)	1	2	3	4	12
T (min)	5	10	15	20	60

÷2 ÷2 x3 x3

b) SI MANTIENE LA MISMA VELOCIDAD :

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{12}{60} =$ 0,2 Km/min CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

c)

SON PROPORCIONALES LA DISTANCIA (Km) y EL TIEMPO (min). POR CADA min SE RECORRE 0,2 km, ESTO SE EXPRESA :

d) $D(t) = 0{,}2 \times t$ (FUNCIÓN DISTANCIA DEPENDE DEL TIEMPO)

e)

f) VALORES DEL TIEMPO = $\mathbb{R}$ (DOMINIO)

VALORES DE LA DISTANCIA = $\mathbb{R}$ (RANGO)

Situación 54

a) $f(x) = 0{,}75x$ $\quad g(t) = 2t$

DIFERENCIAS = DIFERENTES PENDIENTES

SEMEJANZAS = AMBAS SON FUNCIONES LINEALES DE LA FORMA $f(x) = kx$

b)

x	$f(x) = 0{,}75x$
1	$0{,}75 \times 1 = 0{,}75$
2	$0{,}75 \times 2 = 1{,}5$
3	$0{,}75 \times 3 = 2{,}25$
4	$0{,}75 \times 4 = 3$

t	$g(t) = 2t$
1	$2 \times 1 = 2$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$2 \times 3 = 6$
4	$2 \times 4 = 8$

DOM $(f) = \mathbb{Z}^+$ $\quad$ DOM $(g) = \mathbb{Z}^+$

RAN (f) = MÚLTIPLOS DE 0,75 $\quad$ RAN (g) = NÚMEROS PARES

c) $f(20) = 0{,}75 \times 20 = 15$ $\quad g(12) = 2 \times 12 = 24$

$f(100) = 0{,}75 \times 100 = 75$ $\quad g(0{,}25) = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5$

$f(8/3) = 0{,}75 \times 8/3 = 2$ $\quad g(3/2) = 2 \times 3/2 = 3$

Situación 55

CAMIONEROS SAC

COSTO (S/.)	4	$4+3.1=7$	$4+3.2=10$	$4+3.3=13$
PESO (Kg)	0	1	2	3

$C(x) = 4 + 3x$

MONTO FIJO — COSTO POR Kg.

ENCOMIENDA SEGURA SA

COSTO (S/.)	0	$1.6=6$	$2.6=12$	$3.6=18$	$4.6=24$
PESO (Kg)	0	1	2	3	4

$E(x) = 6x$

COSTO POR Kg.

Situación 56

a) HALLAMOS LAS FUNCIONES PARA CADA PROMOCIÓN

PROMOCIÓN 1

COSTO (S/.)	52	$52+1.1$	$52+1.2$	$52+1.3$	$52+1.4$
DISTANCIA (Km)	0	1	2	3	4

$C_1(x) = 52 + 1.x$

PROMOCIÓN 2

COSTO (S/.)	0	1.14	2.14	3.14	4.14
DISTANCIA (Km)	0	1	2	3	4

$C_2(x) = 14.x$

b) SI EL COSTO ES EL MISMO, ENTONCES:

$$C_1(x) = C_2(x)$$
$$52 + 1.x = 14.x$$
$$52 = 14.x - 1.x$$
$$52 = 13.x$$
$$52 \div 13 = x$$
$$4 = x$$

RPTA. CON UN RECORRIDO DE 4Km.

c) COSTO POR 9Km.

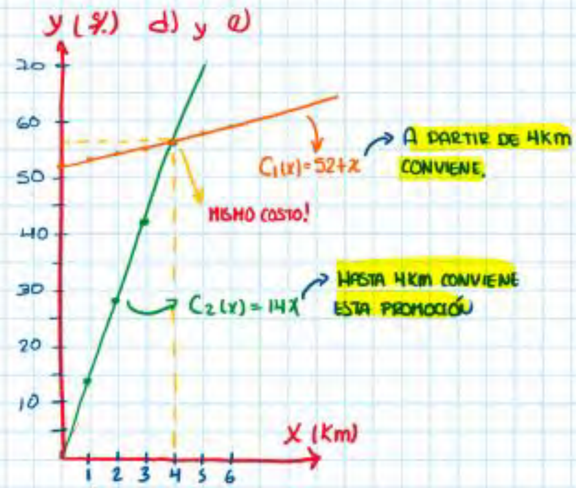
$C_1(9) = 52 + 1.9$

$C_1(9) = 61$

$C_2(9) = 14.9$

$C_2(9) = 126$

RPTA. CONVIENE LA PROMOCIÓN 1



NOVENO GRADO

Situación 57

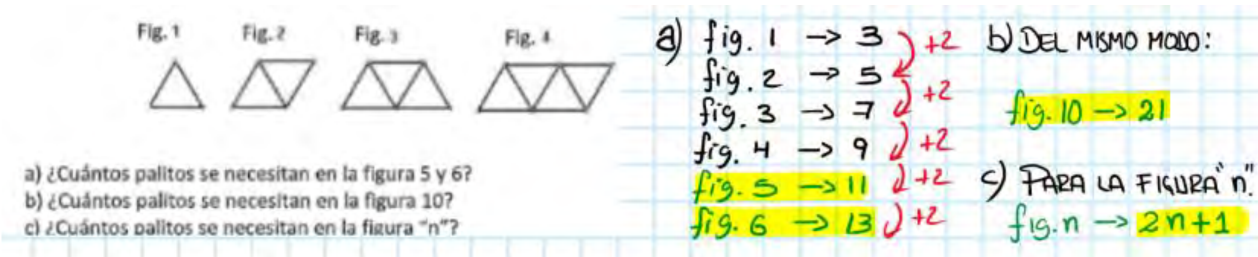


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

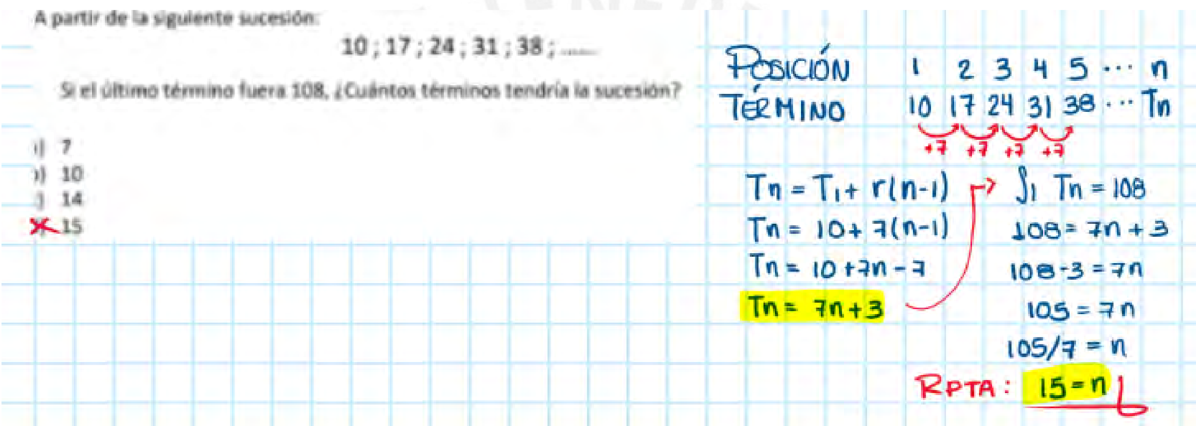
a) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura 5 y 6?
b) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura 10?
c) ¿Cuántos palitos se necesitan en la figura "n"?

a) fig. 1 → 3) +2
fig. 2 → 5) +2
fig. 3 → 7) +2
fig. 4 → 9) +2
fig. 5 → 11) +2
fig. 6 → 13) +2

b) DEL MISMO MODO:
fig. 10 → 21

c) PARA LA FIGURA "n"
fig. n → 2n+1

Situación 58



A partir de la siguiente sucesión:

10 ; 17 ; 24 ; 31 ; 38 ; ......

Si el último término fuera 108, ¿Cuántos términos tendría la sucesión?

i) 7
i) 10
i) 14
✗ 15

POSICIÓN	1	2	3	4	5	···	n
TÉRMINO	10	17	24	31	38	···	Tn

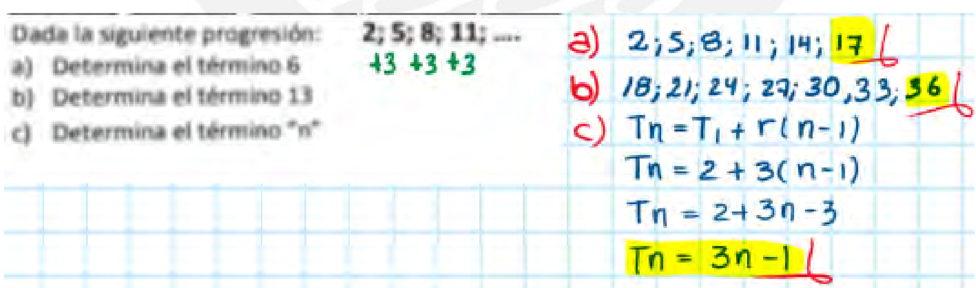
+7 +7 +7 +7

$T_n = T_1 + r(n-1)$
$T_n = 10 + 7(n-1)$
$T_n = 10 + 7n - 7$
$T_n = 7n + 3$

Si $T_n = 108$
$108 = 7n + 3$
$108 - 3 = 7n$
$105 = 7n$
$105/7 = n$

RPTA: $15 = n$

Situación 59

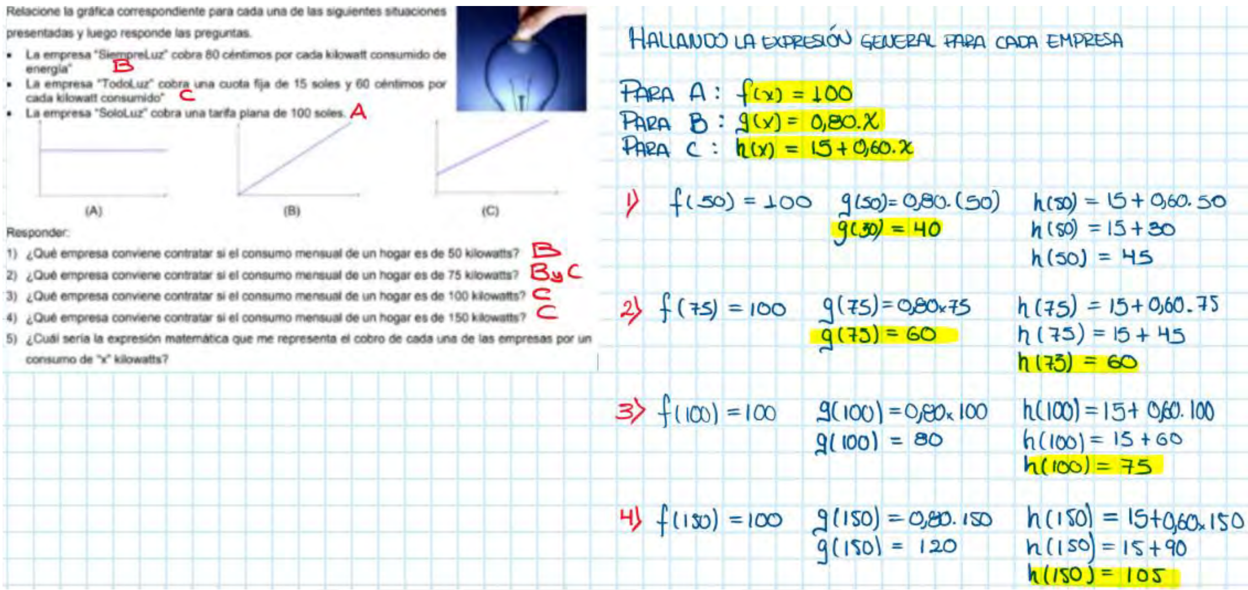


Dada la siguiente progresión: 2; 5; 8; 11; ....
+3 +3 +3

a) Determina el término 6
b) Determina el término 13
c) Determina el término "n"

a) 2; 5; 8; 11; 14; 17
b) 18; 21; 24; 27; 30, 33; 36
c) $T_n = T_1 + r(n-1)$
$T_n = 2 + 3(n-1)$
$T_n = 2 + 3n - 3$
$T_n = 3n - 1$

Situación 60



Relacione la gráfica correspondiente para cada una de las siguientes situaciones presentadas y luego responde las preguntas.

- La empresa "SiempreLuz" cobra 80 céntimos por cada kilowatt consumido de energía" B
- La empresa "TodoLuz" cobra una cuota fija de 15 soles y 60 céntimos por cada kilowatt consumido" C
- La empresa "SoloLuz" cobra una tarifa plana de 100 soles. A

(A) (B) (C)

Responder:

1) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 50 kilowatts? B
2) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 75 kilowatts? B y C
3) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 100 kilowatts? C
4) ¿Qué empresa conviene contratar si el consumo mensual de un hogar es de 150 kilowatts? C
5) ¿Cuál sería la expresión matemática que me representa el cobro de cada una de las empresas por un consumo de "x" kilowatts?

HALLANDO LA EXPRESIÓN GENERAL PARA CADA EMPRESA

PARA A : $f(x) = 100$
PARA B : $g(x) = 0{,}80.x$
PARA C : $h(x) = 15 + 0{,}60.x$

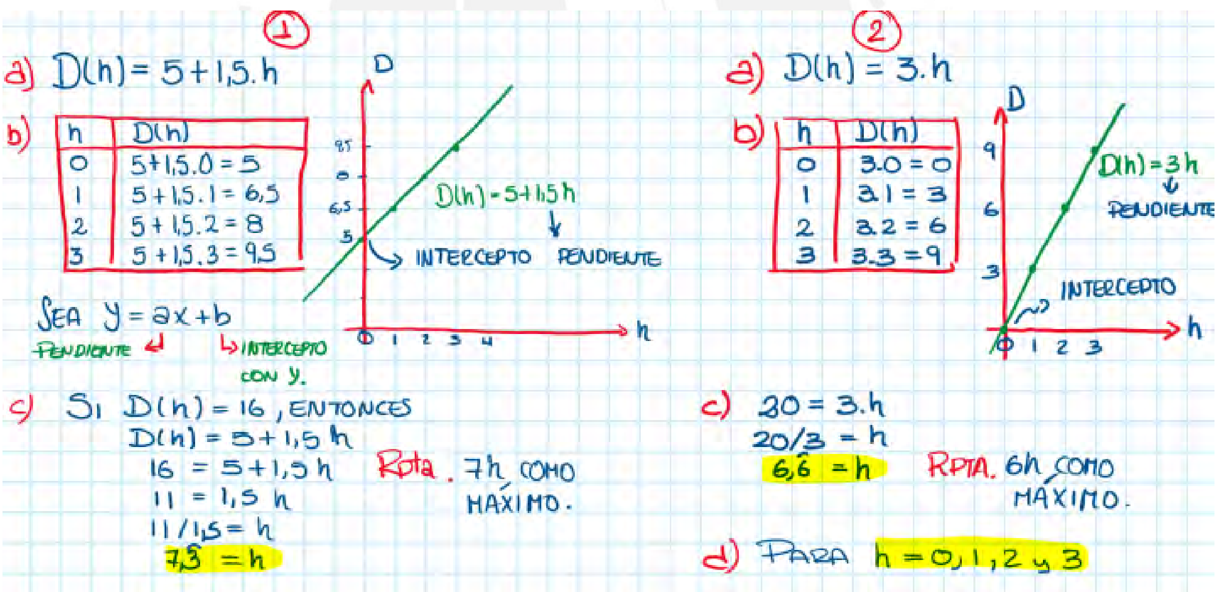
1) $f(50) = 100$ $g(50) = 0{,}80.(50)$ $g(50) = 40$ $h(50) = 15 + 0{,}60.50$ $h(50) = 15 + 30$ $h(50) = 45$

2) $f(75) = 100$ $g(75) = 0{,}80 \times 75$ $g(75) = 60$ $h(75) = 15 + 0{,}60.75$ $h(75) = 15 + 45$ $h(75) = 60$

3) $f(100) = 100$ $g(100) = 0{,}80 \times 100$ $g(100) = 80$ $h(100) = 15 + 0{,}60.100$ $h(100) = 15 + 60$ $h(100) = 75$

4) $f(150) = 100$ $g(150) = 0{,}80.150$ $g(150) = 120$ $h(150) = 15 + 0{,}60 \times 150$ $h(150) = 15 + 90$ $h(150) = 105$

Situación 61



1

a) $D(h) = 5 + 1{,}5.h$

b)

h	D(h)
0	$5 + 1{,}5.0 = 5$
1	$5 + 1{,}5.1 = 6{,}5$
2	$5 + 1{,}5.2 = 8$
3	$5 + 1{,}5.3 = 9{,}5$

SEA $y = ax + b$
PENDIENTE INTERCEPTO CON y.

c) SI $D(h) = 16$, ENTONCES
$D(h) = 5 + 1{,}5\,h$
$16 = 5 + 1{,}5\,h$
$11 = 1{,}5\,h$
$11/1{,}5 = h$
$7{,}\hat{3} = h$

Rpta. 7h COMO MÁXIMO.

2

a) $D(h) = 3.h$

b)

h	D(h)
0	$3.0 = 0$
1	$3.1 = 3$
2	$3.2 = 6$
3	$3.3 = 9$

c) $20 = 3.h$
$20/3 = h$
$6{,}\hat{6} = h$

RPTA. 6h COMO MÁXIMO.

d) PARA $h = 0, 1, 2$ y 3

Situación 63

①

a) $P(m) = 100 + 6m$

b) $P(m) = 154 = 100 + 6m$

$54 = 6m$

$54/6 = m$

$9 = m$

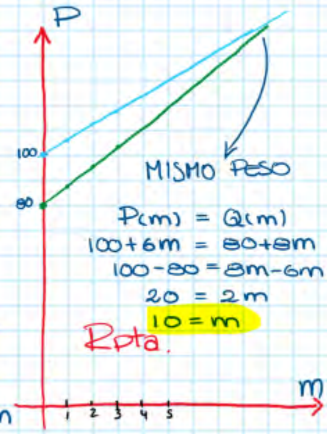
Rpta. EN 9 MESES

②

a)

JUAN		LUIS	
m	P(m)	m	Q(m)
1	100+6 = 106	1	80+8 = 88
2	100+12 = 112	2	80+16 = 96
3	100+18 = 118	3	80+24 = 104

$Q(m) = 80 + 8m$



$P(m) = Q(m)$

$100 + 6m = 80 + 8m$

$100 - 80 = 8m - 6m$

$20 = 2m$

$10 = m$

Rpta.

b) LUIS SUBE DE PESO MÁS RÁPIDO

JUAN : $100 + 6 \times 12 = 172$ Kg

LUIS : $80 + 8 \times 12 = 176$ Kg Rpta.

DÉCIMO GRADO

Situación 64

SOLUCIÓN

Si $y = \frac{4}{x}$

$\frac{4}{x} \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \neq 0$

ENTONCES $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ Rpta

SOLUCIÓN

$x > 3 \rightarrow -2x < -6$

$\rightarrow -2x + 5 < -6 + 5$

$-\infty < f(x) < -1$

$f(x) \in \langle -\infty; -1 \rangle$ Rpta

Situación 65

SOLUCIÓN

Si $x = -2$, ENTONCES

$f(-2) = -2 + 1$

$f(-2) = -1$

Si $x = 4$, ENTONCES

$f(4) = 4 - 1$

$f(4) = 3$

Si $x = -1$, ENTONCES

$f(-1) = -1 + 1$

$f(-1) = 0$

Si $x = 3$, ENTONCES

$f(3) = 3 - 1$

$f(3) = 2$

LUEGO

$S = f(f(-2)) + f(f(4))$

$S = f(-1) + f(3)$

$S = 0 + 2$

$S = 2$ Rpta

Situación 66

Se define la función

$$F(x) = \begin{cases} 7 + 2ax; & 0 \le x \le 4 \\ x - 6b; & x > 4 \end{cases}$$

Calcula $\sqrt{a-b}$ si $F(3) + F(5) = 36$.

SOLUCIÓN

Si $x = 3 \rightarrow F(3) = 7 + 2a(3)$

Si $x = 5 \rightarrow F(5) = 5 - 6b$

LUEGO

$$F(3) + F(5) = 36$$
$$7 + 2.a.3 + 5 - 6b = 36$$
$$7 + 6a + 5 - 6b = 36$$
$$12 + 6(a - b) = 36$$
$$6(a - b) = 24$$
$$a - b = 4$$

FINALMENTE

$\sqrt{a-b} = \sqrt{4} = 2$ RPTA

Situación 67

SOLUCIÓN

I. Si $x_1 < x_2$

$$-6x_1 > -6x_2$$
$$-6x_1 - 5 > -6x_2 - 5$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

DECRECIENTE

II. $(-5; 0) \in f(x)$

$$f(x) = -6x - 5$$
$$0 = -6.(-5) - 5$$
$$0 = 25$$ FALSO

III. $(1; -11) \in f(x)$

$$f(x) = -6x - 5$$
$$-11 = -6.1 - 5$$
$$-11 = -11$$ VERDADERO

Situación 68

Si $f(x) = 4x - 1$ y
$g(x) = 2x + 13$,
halla el valor de $f(g(-7))$.

a) -1
b) -2
c) -3
d) -4
e) -5

SOLUCIÓN

$$g(-7) = 2(-7) + 13$$
$$g(-7) = -14 + 13$$
$$g(-7) = -1$$

$$f(g(-7)) = f(-1) = 4(-1) - 1$$

$f(g(-7)) = -5$ RPTA

Situación 69

Dadas las funciones: $h(x) = ax + b \wedge g(x) = bx + a$, se sabe que $h(2) = g(3) \wedge h(1) = 3$. Calcula el valor de $h(1) + g(-1)$.

Si $h(x) = ax + b \quad \wedge \quad g(x) = bx + a$

$h(2) = g(3)$

$2a + b = 3b + a$

$2a - a = 3b - b$

$a = 2b$

$h(1) = 3$

$a + b = 3$

$2b + b = 3$

$3b = 3$

$b = 1$

$a = 2$

LUEGO

$$h(1) + g(-1)$$
$$3 + b(-1) + a$$
$$3 + 1.(-1) + 2$$
$$3 + -1 + 2$$
$$4$$ Rpta.