

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



Evolución de Schramm-Loewner

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Autor

CHRISTIAN JAIME MAURA LLAURI

Asesor

Johel Victorino Beltrán Ramirez

Jurado

Jonathan Samuel Farfán Vargas

Rudy José Rosas Bazán

Lima Perú
Diciembr2020

EVOLUCIÓN DE SCHRAMM-LOEWNER

Christian Jaime Maura Llauri

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Jonathan Samuel Farfán Vargas, PUCP
(Presidente del jurado)

Dr. Johel Victorino Beltrán Ramirez, PUCP
(Asesor)

Dr. Rudy José Rosas Bazán, PUCP
(Tercer miembro)

Lima - Perú
Diciembre - 2020

Resumen

EVOLUCIÓN DE SCHRAMM LOEWNER

Christian Jaime Maura Llauri

2020

Asesor: Johel Vitorino Beltrán Ramirez

Título obtenido: Magíster en Matemáticas

La Evolución Schramm-Loewner, o SLE por sus siglas en inglés, es una cadena de conjuntos compactos aleatorios que permite generar cualquier curva aleatoria que posea las propiedades de dominio de Markov y de invarianza bajo transformaciones conformes. Su construcción pasa por la solución de una versión aleatoria de la ecuación determinística de Loewner:

$$\begin{aligned}\partial_t g_t(z) &= \frac{2}{g_t(z) - f(t)} \\ g_0(z) &= z\end{aligned}$$

donde la función continua f es reemplazada por un proceso estocástico $\sqrt{k}B$, donde k es una constante positiva y B un movimiento Browniano. Dicha construcción facilita la inclusión de herramientas del cálculo estocástico en el estudio de las curvas que genera la SLE. La presente tesis tiene como objetivo principal brindar una descripción accesible e introductoria de la SLE. Para ello se enuncian y demuestran los teoremas de Loewner que nos permiten establecer biyecciones entre familias de *hulls* y familias de biholomorfismos adecuadamente

normalizados en ∞ , así como entre funciones continuas reales de variable real y familias de *hulls*. Sobre dichas biyecciones se justifica la buena definición de la SLE en tanto familia aleatoria de hulls con ley inducida a través de un movimiento Browniano por intermedio de la ecuación aleatoria de Loewner. Luego se presentan algunas propiedades elementales que la SLE hereda del movimiento Browniano y se demuestra la existencia de la curva que genera la SLE. Finalmente, como una manera de discutir el carácter no trivial de la constante k que aparece delante del movimiento Browniano que da lugar a la SLE, se presenta una demostración de una transición de fase que exhiben las curvas SLE, las cuales pasan de curvas simples a no simples una vez que se pasa de $k \in (0, 4]$ a $k > 4$.

Palabras clave:

ecuación de Loewner

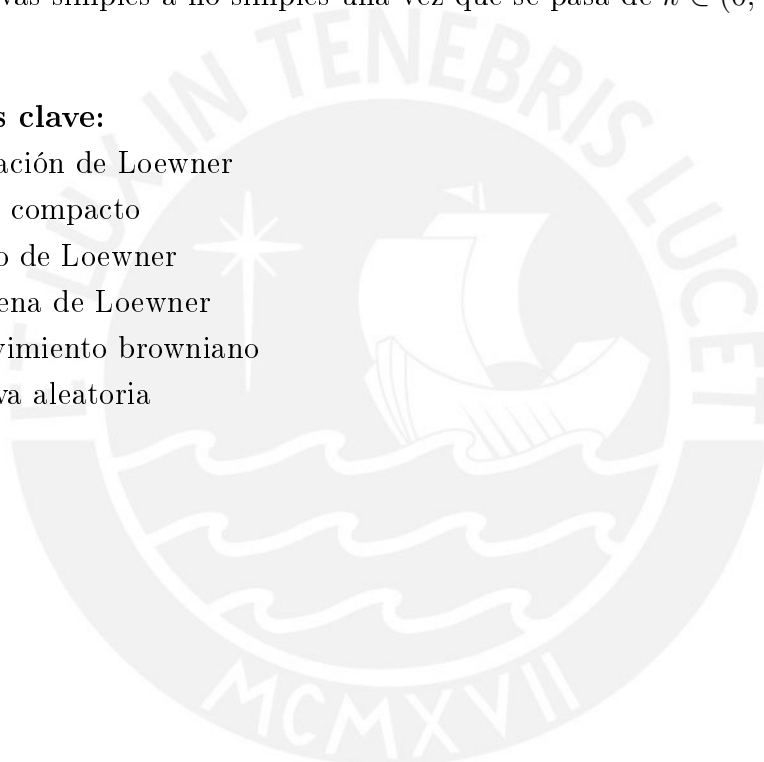
hull compacto

flujo de Loewner

cadena de Loewner

movimiento browniano

curva aleatoria



Abstract

The Schramm-Loewner Evolution, or SLE, is a chain of random compact sets that allows us to generate any random curve that satisfies conformal invariance as well as the domain Markov property. Its construction goes through the solution of a random version of Loewner's deterministic equation:

$$\begin{aligned}\partial_t g_t(z) &= \frac{2}{g_t(z) - f(t)} \\ g_0(z) &= z\end{aligned}$$

where the continuous function f is replaced by a stochastic process $\sqrt{k}B$, where k is a positive constant and B a Brownian motion. This construction enables the inclusion of stochastic calculus tools in the study of the curves generated by the SLE. The main objective of this thesis is to provide an accessible and introductory description of SLE. To do this, Loewner's theorems, which allows us to establish bijections between families of *hulls* and families of biholomorphisms properly normalized in ∞ , as well as between real continuous functions of real variable and families of *hulls*, are enunciated and demonstrated. On these bijections, the good definition of the SLE is justified as a random family of hulls with law induced by a Brownian motion through the Loewner random equation. Then some elementary properties that the SLE inherits from the Brownian movement are presented and the existence of the curve that generates the SLE is demonstrated. Finally, as a way of discussing the non-trivial character of the constant k that appears in front of the Brownian motion that gives rise to the SLE, a demonstration of a phase transition exhibited by the SLE curves is presented, which pass from curves simple to non-simple once you go from $k \in (0,4]$ to $k > 4$.

Key words and phrases. Loewner equation, compact hull, Loewner flow, Loewner chain, Brownian motion, random curve.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 60J67; Secondary 60J65, 30C99.





... para Su.

Índice general

Introducción	1
1 Los teoremas de Loewner	7
1.1 Definiciones preliminares: Familias de <i>hulls</i> , familias de biholomorfismos normalizados y propiedad de crecimiento local.	7
1.2 La transformada de Loewner	18
1.3 El coeficiente $a_1(K)$ y una estimativa de diferenciabilidad	22
1.4 Los teoremas de Loewner	28
2 Preliminares de cálculo estocástico	41
2.1 Movimiento Browniano	41
2.2 Integración estocástica	46
2.3 El lema de Itô para procesos de Itô	53
2.4 Cambio de tiempo	54
3 Evolución de Schramm Loewner	57
3.1 La SLE_k está bien definida	58
3.1.1 La topología de convergencia uniforme en compactos en \mathcal{L}	59
3.1.2 Continuidad de la aplicación $\mathcal{S} : C([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}$	62
3.2 Invarianza de escala, propiedad de Markov y propiedad fuerte de Markov de las SLE_k	67
3.3 Existencia de la curva que induce la SLE_k	69
3.3.1 Condiciones para la existencia de una curva de Loewner	69
3.3.2 Simplificación del problema.	74
3.3.3 Demostración del teorema	77
3.4 Transición de fase en $k = 4$	90

Agradecimiento

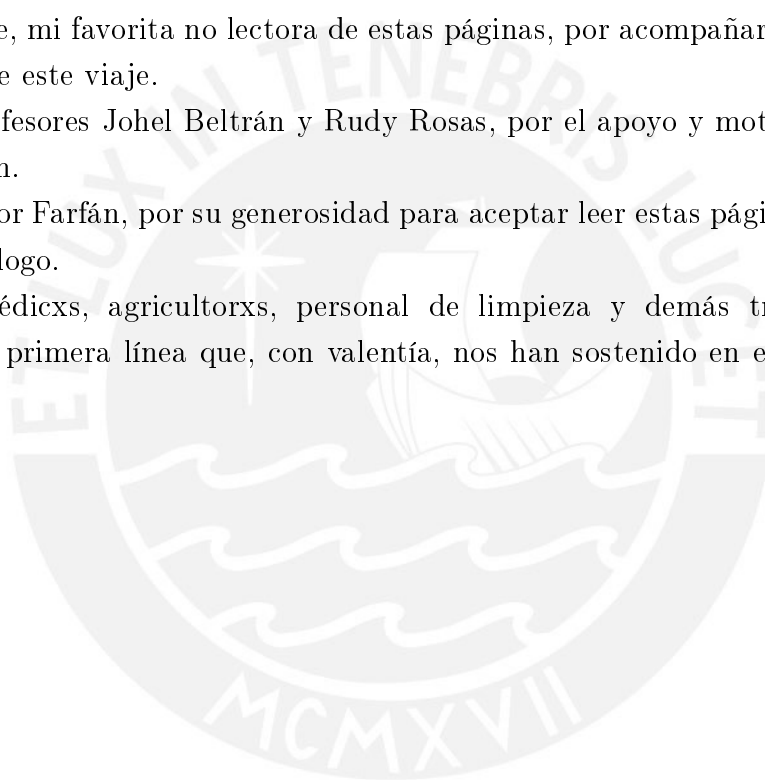
A mis padres por el inmerecido apoyo que me brindaron. Sin ustedes no habría podido iniciar esta maestría en criaturas abstractas.

A Suzzete, mi favorita no lectora de estas páginas, por acompañarme durante gran parte de este viaje.

A los profesores Johel Beltrán y Rudy Rosas, por el apoyo y motivación que me brindaron.

Al profesor Farfán, por su generosidad para aceptar leer estas páginas escritas por un sociólogo.

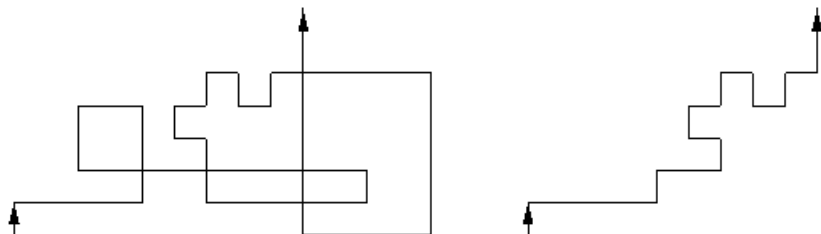
A lxs médicxs, agricultorxs, personal de limpieza y demás trabajadorxs peruanxs de primera línea que, con valentía, nos han sostenido en este año tan difícil.



Introducción

En 1999 Oded Schramm introduce la evolución de Schramm Loewner como una manera rigurosa de generar y estudiar la familia de curvas aleatorias que son de invariantes bajo transformaciones conformes y satisfacen la propiedad de dominio de Markov (*Domain Markov Property*) [Sch00]. Dicha familia contiene justamente a las curvas aleatorias que emergen como límites continuos de interfases críticas de algunos modelos de rejillas (en dos dimensiones) de la física estadística (como el modelo de percolación o el modelo de Ising).

En dicho artículo, Schramm utiliza la SLE en el contexto de estudio de los paseos aleatorios sin bucles (*Loop-Erased Random Walks*). Un LERW (por sus siglas en inglés) se construye a partir de un paseo aleatorio simple $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definido en \mathbb{Z}^2 tras borrar cronológicamente las curvas cerradas que genera, como se puede observar en la siguiente imagen.



Mientras que el teorema de Donskter nos garantiza que $(\frac{X_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}})_{t \geq 0}$ converge en ley a un movimiento Browniano de dimensión 2; Schramm muestra -bajo el supuesto de que existe un exponente de *escala* (*scaling exponent* en inglés) con respecto al cual el límite de la LERW existe y es invariante bajo transformaciones conformes- que el límite de la LERW es una curva SLE_2 . Posteriormente, Lawler, Schramm y Werner demuestran que, en efecto, el límite de las LERW existe y es invariante bajo transformaciones conformes [LSW04].

¿Pero a qué nos referimos con *curvas aleatorias* y con *invarianza conforme* de

curvas aleatorias? ¿De qué propiedad de Markov estamos hablando? Fijemos un espacio de probabilidad (Ω, F, P) ; un conjunto simplemente conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$; y dos puntos α y β , en $\partial\mathcal{U}$, distintos. Consideremos el conjunto compuesto por todas las curvas contenidas en $\bar{\mathcal{U}}$, pero que conectan α con β :

$$\mathcal{U}_\alpha^\beta := \{\gamma : [0, \infty) \rightarrow \bar{\mathcal{U}} : \gamma \text{ es continua, } \gamma(0) = \alpha \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \beta\};$$

y tomemos una variable aleatoria

$$\lambda : (\Omega, F, P) \rightarrow (\mathcal{U}_\alpha^\beta, \mathcal{B}, \mu^{(\mathcal{U}, \alpha, \beta)}),$$

donde \mathcal{B} es el sigma algebra de Borel sobre \mathcal{U}_α^β construido a partir de alguna métrica definida en \mathcal{U}_α^β ; y $\mu^{(\mathcal{U}, \alpha, \beta)}$ es la ley de λ . Entonces, dicho λ es una *curva aleatoria* con ley $\mu^{(\mathcal{U}, \alpha, \beta)}$.

Ahora, supongamos que la siguiente familia de probabilidades:

$$\{\mu^{(\mathcal{U}, \alpha, \beta)} : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \text{ es simplemente conexo, } \alpha, \beta \in \partial\mathcal{U} \text{ y } \alpha \neq \beta\}$$

es la familia de leyes que corresponden a las curvas aleatorias a la cual converge, en el límite de escala, un mismo proceso aleatorio discreto -digamos una LERW- generado en distintos conjuntos simplemente conexos. Entonces, diremos que dicha familia de curvas aleatorias continuas (asociadas a la LERW en este caso) es invariante bajo transformaciones conformes si para todo cuádruple (U, α, β, ϕ) , donde $U \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, $\alpha, \beta \in \partial U$ y ϕ es un mapa holomorfo inyectivo definido en U se cumple que

$$\phi\#\mu^{(U, \alpha, \beta)} = \mu^{\phi(U), \phi(\alpha), \phi(\beta)},$$

donde $\phi\#\mu^{(U, \alpha, \beta)}$ es el pushforward de $\mu^{(U, \alpha, \beta)}$ por parte de ϕ .

Por su parte, sea

$$\{\mu^{(\mathcal{U}, \alpha, \beta)} : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \text{ es simplemente conexo, } \alpha, \beta \in \partial\mathcal{U} \text{ y } \alpha \neq \beta\}$$

una familia de leyes de curvas aleatorias. Diremos que nuestra familia satisface la propiedad de dominio de Markov si para toda curva aleatoria λ con ley $\mu^{(U, a, b)}$ (perteneciente a la familia en cuestión) y filtración natural $\mathcal{F}_t = \lambda((0, t])$ se tiene, para todo $t \geq 0$ (determinístico o \mathcal{F}_t - tiempo de parada),

$$\mu^{(U, a, b)}(\lambda|_{[t, \infty)} \in \mathcal{B} | \mathcal{F}_t) = \mu^{(U \setminus \lambda([0, t]), \lambda(t), b)}(\lambda \in B),$$

para todo B medible.

Resulta que si se puede probar que una curva aleatoria definida en un conjunto simplemente conexo del plano complejo satisface ambas propiedades, entonces puede garantizarse que esta se genera a partir de una evolución de Schramm Loewner [Kem17]. Esto facilita su estudio puesto que la construcción de la SLE lleva en sus entrañas una llave que permite abrirle las puertas a la amplia caja de herramientas provista por el cálculo estocástico, conectándola, de manera natural, con el estudio de estas curvas.

Debido a que las curvas aleatorias que motivan la construcción de la SLE satisfacen la propiedad de invarianza bajo transformaciones conformes, para brindar una exposición general de la *SLE* basta con concentrar nuestro análisis en un conjunto simplemente conexo y dos puntos distintos de su frontera. En particular, trabajaremos en el semiplano complejo superior \mathbb{H} , fijando los puntos 0 y ∞ .

Ahora bien, en aras de hacernos una idea general acerca de la SLE, fijemos una función continua $W \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, tomemos $z \in \mathbb{H}$ y consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{2}{z(t) - W(t)} \\ z(0) &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

Dicha ecuación diferencial es conocida como *ecuación de Loewner*. Ahora, se puede demostrar que existe una única familia de funciones inyectivas y holomorfas $(g_t)_{t \geq 0}$ tal que

- Para todo $z \in \mathbb{H}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \tau(z)) &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto g_t(z) \end{aligned}$$

es diferenciable y es la solución de (1), donde $\tau(z) := \inf\{t \geq 0 : \lim_{s \rightarrow t^-} |g_s(z) - W(s)| = 0\}$.

- Para cada $t \geq 0$, g_t es un biholomorfismo de $H_t := \{z \in \mathbb{H} : \tau(z) > t\}$ sobre \mathbb{H} .

- La familia de conjuntos $(K_t)_{t \geq 0}$ definida como $K_t := \overline{\{z \in \mathbb{H} : \tau(z) < t\}}$ para todo $t \geq 0$ es una familia de *hulls* que *evoluciona con cierta regularidad*.

Este es, grosso modo, el contenido del que llamaremos *teorema 2 de Loewner*. Estamos llamando *hull* a cualquier compacto $K \subset \mathbb{H}$ tal que $\overline{K} \subset \overline{\mathbb{H}}$ y $\mathbb{H} \setminus K$ es simplemente conexo. A su vez, la regularidad en la evolución de la familia de *hulls* obtenida a partir de la ecuación de Loewner se desagrega en la satisfacción de tres propiedades fundamentales: Es estrictamente creciente, en el sentido de que $K_t \subset K_{t+h}$, para todo $t \geq 0$ y todo $h > 0$; *evoluciona continuamente*, en un sentido que definiremos en el primer capítulo bajo el nombre de *propiedad de crecimiento local*; y se encuentra parametrizada de cierta manera adecuada, que es conocida como *parametrización por capacidad en el plano medio superior*, la cual será precisada también en el primer capítulo.

Por otro lado, el camino inverso también es factible. Resulta que toda familia creciente de *hulls* $(K_t)_{t \geq 0}$ que esté parametrizada por capacidad y satisfaga la propiedad de crecimiento local, puede ser asociada a una única familia de biholomorfismos $(g_t)_{t \geq 0}$ (de $\mathbb{H} \setminus K_t$ sobre \mathbb{H} para todo $t \geq 0$) y a una única función continua $W \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ tal que para todo $z \in \mathbb{H}$ $(g_t)_{t \in [0, \tau(z))}$ resuelve la ecuación de Loewner:

$$\begin{aligned} \partial_t g_t(z) &= \frac{2}{g_t(z) - W(t)} \\ g(0) &= z. \end{aligned} \tag{2}$$

En particular, una curva simple

$$\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}},$$

que satisface $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ y $\gamma((0, +\infty)) \subset \mathbb{H}$, genera una familia de *hulls* $(\gamma((0, t]))_{t \geq 0}$ y, por ende, puede ser asociada a una familia de biholomorfismos y a una función real continua que satisfacen la ecuación de Loewner. Este es el que llamaremos *teorema 1 de Loewner*.

En suma, los teoremas de Loewner nos garantizan la existencia de una biyección entre funciones reales continuas y ciertas familias de *hulls* por intermedio de la ecuación de Loewner y de una familia de biholomorfismos. Más aún, si se verifican ciertas condiciones sobre una función continua y sobre el flujo

de biholomorfismos asociado a ella (según la ecuación de Loewner), entonces puede garantizarse que la familia de hulls asociada se encuentre *generada por una curva* en el sentido de que puede encontrarse una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ tal que

- $\gamma(0) = 0$ para todo $t \geq 0$;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$; y
- para todo $t \geq 0$, $\mathbb{H} \setminus K_t$ es la componente no acotada de $\overline{\mathbb{H}} \setminus \gamma([0, t])$.

Ahora bien, la aplicación \mathcal{S} que asigna a cada función continua, la familia de hulls asociada a través de los teoremas de Loewner, es una aplicación continua, bajo cierta topología no trivial. En consecuencia, a través de la ecuación de Loewner podemos inducir una medida de probabilidad en el espacio de *cadena de Loewner*¹ a partir de un proceso estocástico definido en el espacio de funciones continuas. Es así que para cada $k > 0$, la SLE_k se define como la cadena estocástica de Loewner $(K_t)_{t \geq 0}$ cuya ley es inducida a través de la aplicación \mathcal{S} , por el proceso estocástico

$$(W_t)_{t \geq 0} := (\sqrt{k}B_t)_{t \geq 0},$$

donde $k > 0$ y $(B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano real.

Schramm demuestra que toda SLE_k se encuentra *inducida*, casi seguramente, por una curva aleatoria γ . Estas curvas generadas por las SLE_k son, justamente, aquellas a las que nos referiremos como curvas SLE_k y son las que coinciden en distribución, con las curvas aleatorias que motivan toda esta travesía.

Cabe agregar que la intensidad con la que se altera la variación de nuestro movimiento Browniano en la construcción de la SLE_k , es decir el $k > 0$ escogido, no es trivial. Según su valor las curvas aleatorias generadas pueden tener o carecer de ciertas propiedades importantes. En particular, las curvas SLE_k vistas con respecto al parámetro k , exhiben dos transiciones de fase que tienen a $k = 4$ y $k = 8$ como puntos críticos. Si $k \in (0, 4]$, entonces la curva generada por la SLE_k es una curva aleatoria simple casi seguramente. Por su parte, si $k \in (4, 8)$, entonces la curva es casi seguramente no simple, pero no cubre el semiplano

¹que son las familias crecientes de hulls, parametrizadas por capacidad y que satisfacen la propiedad de crecimiento local

complejo superior. Sin embargo, para $k \geq 8$ las curvas generadas por la SLE_k tienen dimensión 2, casi seguramente.

La presente tesis no pretende estudiar modelos de mecánica estadística ni las curvas generadas por los mismos. El objetivo de la tesis es entender y presentar, de manera accesible, la construcción de la SLE así como brindar un esbozo de cómo dicho objeto habilita el uso del cálculo estocástico para el estudio de las curvas que genera. Para ello se ha dividido la exposición en tres capítulos. El capítulo uno está destinado a presentar el contexto determinístico sobre el cual se define la SLE_k . Para ello, y con el apoyo del análisis complejo, se presentan con detalle los conceptos y resultados que nos permitan comprender y exponer las demostraciones de los teoremas 1 y 2 de Loewner. En el segundo capítulo, se brinda una breve exposición de los resultados del cálculo estocástico que nos serán de utilidad para el estudio de la SLE. En el tercer capítulo, la atención recae, finalmente, sobre la evolución de Schramm Loewner con el objetivo principal de esbozar una imagen clara y accesible de dicho objeto. Para ello se justifica la buena definición de la SLE_k ; luego se demuestran algunas propiedades fundamentales que satisfacen las SLE_k ; posteriormente, se demuestra el teorema de existencia de la curva que induce la SLE_k ; y, finalmente, se demuestra la transición de fase que cumplen las curvas SLE_k en $k = 4$ como una manera de esbozar cómo puede emplearse el cálculo estocástico en el estudio de las curvas SLE_k .

Capítulo 1

Los teoremas de Loewner

En el presente capítulo desarrollamos el contexto determinístico que nos ayudará a definir y estudiar las SLE. El objetivo central está en demostrar los teoremas 1 y 2 de Loewner anunciados en la introducción. Para ello comenzamos demostrando que podemos asociar a cada familia de hulls una única familia de biholomorfismos normalizados en ∞ . Luego introducimos la transformada de Loewner, que no es más que la función continua que aparece, posteriormente, en la ecuación de Loewner. Finalmente, se demuestran los teoremas 1 y 2 de Loewner. A lo largo de este capítulo seguimos lo trabajado por [Law05], [Kem17] y [BN].

1.1 Definiciones preliminares: Familias de *hulls*, familias de biholomorfismos normalizados y propiedad de crecimiento local.

Definición 1. Diremos que un compacto $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ es un *hull* siempre que \mathbb{H}/K sea simplemente conexo.

Fijemos un hull K y recordemos el siguiente teorema de Riemann.

Teorema 1. Para todo conjunto simplemente conexo U contenido propiamente en \mathbb{C} , existe un biholomorfismo f de U sobre el disco unitario \mathbb{D} .

Demostración. Ver [Rud87]. □

Gracias a la definición de *hull* y a este teorema sabemos que existe un biholomorfismo g de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} . Sin embargo, dicho mapa no es el único biholomorfismo que deforma analíticamente $\mathbb{H} \setminus K$ en \mathbb{H} . Consideremos la siguiente proposición que resume algunos básicos del análisis complejo.

Proposición 1. Sean φ, χ y ψ automorfismos de \mathbb{D}, \mathbb{H} y \mathbb{C} , respectivamente. Entonces,

1. existen $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que, para todo $z \in \mathbb{D}$

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

2. Existen a, b, c y d en \mathbb{R} tales que $ad - bc > 0$ y para todo $z \in \mathbb{H}$

$$\chi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

3. Existen a y b en \mathbb{C} tales que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\psi(z) = az + b.$$

Demostración. Ver [Lan93]. □

Fijemos un biholomorfismo f de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} y tomemos un biholomorfismo cualquiera $g : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$. Luego definimos χ , tal que

$$\chi(z) = g \circ f^{-1}(z),$$

para todo z en \mathbb{H} . Claramente, χ es un automorfismo de \mathbb{H} . Entonces, por la proposición 1, podemos escoger a, b, c y d en \mathbb{R} tales que $ad - bc > 0$ y $\chi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Más aún, es claro, por construcción, que $\chi \circ f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Es decir, fijando un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} , podemos escribir cualquier biholomorfismo entre ambos dominios simplemente conexos tras componerlo con un automorfismo (adecuado) de \mathbb{H} . En consecuencia, los grados de libertad que tenemos en la selección de biholomorfismos de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} son los grados de libertad del grupo de automorfismos en \mathbb{H} .

Ahora bien, queremos asociar a cada *hull* K un único biholomorfismo bajo un criterio general. Dado que hemos restringido nuestro análisis a las curvas aleatorias que conectan 0 con ∞ , la normalización que se presenta se construye con respecto a ∞ . Consideremos la siguientes definiciones.

Definición 2. Sea g una función holomorfa. Diremos que g tiene una *singularidad aislada en ∞* si existe $R > 0$ tal que g es analítica en $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$. Esto equivale a sostener que existe $R > 0$ tal que la función $f : D_R(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como $f(w) = g\left(\frac{1}{w}\right)$ para todo w en $D_R(0) \setminus \{0\}$, está bien definida y es holomorfa (lo cual implica que tiene una singularidad aislada en 0).

En ese sentido, diremos que g tiene una *singularidad removible (o un polo) en ∞* si f tiene una singularidad removible (o un polo) en 0. En consecuencia, podremos decir que g posee una *expansión en ∞* si y sólo si posee una singularidad aislada en ∞ del tipo removible o del tipo polo.

En particular, si g posee una singularidad del tipo polo en ∞ y

$$f(w) = \frac{a_{-k}}{w^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{w} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

es la expansión de f en 0 con radio de convergencia R , entonces para todo z tal que $|z| > R$,

$$g(z) = a_{-k} z^k + \dots + a_{-1} z + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

es llamada *expansión de g en ∞* .

Estas definiciones, como veremos, podemos extenderlas a funciones definidas en complementos de *hulls* en \mathbb{H} con ayuda del siguiente teorema conocido:

Teorema 2. (*principio de reflexión de Schwarz*) Sea U^+ un abierto conexo y acotado contenido en \mathbb{H} . Suponemos que existe un intervalo abierto no vacío I contenido en $\partial U^+ \cap \mathbb{R}$. Si $f : U^+ \cup I \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $f(I)$ está contenida en \mathbb{R} y $f|_{U^+}$ es holomorfa, entonces f posee una única extensión analítica a $U = U^+ \cup I \cup U^-$ donde U^- es la reflexión de U^+ a través del eje real:

$$U^- := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U^+\}$$

.

Demostración. Ver [Lan93]. □

Dicho esto enunciamos la proposición más importante de la presente sección:

Proposición 2. Para todo compacto $K \subset \bar{\mathbb{H}}$ que sea un *hull* existe un único biholomorfismo $g : \mathbb{H}/K \rightarrow \mathbb{H}$ que cumple $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \infty$ y $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) - z$

$= 0$. Es decir, existe un único biholomorfismo g_K tal que para todo $|z| > R$ con $R = \sup_{w \in K} |w|$ la expansión de g_K en ∞ es de la forma

$$g_K(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad (1.1)$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ son números reales.

Antes de demostrar esta proposición que nos brinda la normalización en ∞ que utilizaremos para identificar biunívocamente *hulls* con biholomorfismos, enunciaremos algunos resultados de análisis complejo que utilizaremos en la prueba.

Definición 3. (aproximación a la frontera) Sean U , un conjunto abierto, y $(z_n)_{n \geq 0}$ una sucesión contenida en U . Diremos que $(z_n)_{n \geq 0}$ se aproxima a la frontera de U si para todo compacto C contenido en U , existe un $N > 0$ tal que para todo $n > N$, z_n no se encuentra en C .

Lema 1. Sean U y V dos conjuntos simplemente conexos en \mathbb{C} . Sea f un biholomorfismo de U sobre V . Si $(z_n)_{n \geq 0}$ una sucesión contenida en U que se aproxima a la frontera de U , entonces $(f(z_n))_{n \geq 0}$ es una sucesión que se aproxima a la frontera de V .

Demostración. Ver [Lan93]. □

Ejemplo 1. Sea U un conjunto simplemente conexo contenido propiamente en \mathbb{C} . Sean f un biholomorfismo de U sobre \mathbb{D} ; y $(z_n)_{n \geq 0}$ una sucesión contenida en U que converge a la frontera de U . Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = 1$.

Ejemplo 2. Sea U un conjunto simplemente conexo contenido propiamente en \mathbb{C} . Sean g un biholomorfismo de U sobre \mathbb{H} ; y $(z_n)_{n \geq 0}$ una sucesión contenida en U que converge a la frontera de U . Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(g(z_n)) = 0$ o $(g(z_n))_{n \geq 0}$ deviene arbitrariamente grande.

Definición 4. (Punto accesible) Sea U un conjunto abierto y α un punto en ∂U . Decimos que α es *accesible* si para toda sucesión $(z_n)_{n \geq 0}$, contenida en U , que satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$, existen una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma([0, 1)) \subset U$, pero $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = \alpha$; y una sucesión $(t_n)_{n \geq 0}$ estrictamente creciente contenida en $[0, 1]$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ y $\gamma(t_n) = z_n$, para todo $n \geq 0$.

Teorema 3. Sea U un conjunto acotado y simplemente conexo. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa. Si $\alpha \in \partial U$ es un punto accesible, entonces f puede extenderse continuamente a $U \cup \{\alpha\}$.

Demostración. Ver [Rud87]. □

Demostremos la proposición.

Demostración. (de la proposición 2) Dividimos la demostración en 3 partes. Primero se demuestra que para todo hull K , existe un biholomorfismo $g : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \infty$. Luego nos apoyamos en el principio de reflexión de Schwarz y mostramos que, por intermedio de la extensión analítica de cierta restricción de g y una composición con un automorfismo adecuado, podemos construir un biholomorfismo $g_K : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ cuya expansión en ∞ es como en (1.1). Finalmente, argumentamos que dicho biholomorfismo es único.

Fijamos un hull $K \subset \bar{\mathbb{H}}$. Como $\mathbb{H} \setminus K$ es simplemente conexo, el teorema 1 nos permite tomar un biholomorfismo g_1 de $\mathbb{H} \setminus K$ al disco unitario \mathbb{D} . Puesto que K es compacto, podemos escoger $r > 0$ tal que $K \subset D_r(0)$, donde $D_r(0)$ es el disco de radio r centrado en 0. Luego, definimos la siguiente función:

$$f : D_r(0) \cap \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto g_1 \left(\frac{-r^2}{z} \right). \quad (1.2)$$

Notemos que $\partial(D_r(0) \cap \mathbb{H}) \cap \mathbb{R}$ es un conjunto de puntos accesibles con respecto a $D_r(0) \cap \mathbb{H}$. Entonces, por el teorema 3 podemos extender f a $\partial(D_r(0) \cap \mathbb{H}) \cap \mathbb{R}$ continuamente. En particular, podemos extender continuamente f a 0. Denotamos como f^* a dicha extensión; escogemos $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f^*(0) = e^{i\theta}$; y consideramos el biholomorfismo $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ definido como

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}.$$

Entonces,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(z) = e^{i\theta},$$

lo cual implica que

$$\lim_{|w| \rightarrow 0} \varphi^{-1} \circ f(w) = \infty.$$

Ahora bien, sea $g := \varphi^{-1} \circ g_1$. Es claro que g es un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} . A su vez, debido a (1.2), tenemos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_1(z) = \lim_{|w| \rightarrow 0} f(w) = e^{i\theta},$$

lo cual implica que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi^{-1} \circ g(z) = \infty.$$

Tras culminar la primera parte de la prueba, pasamos a mostrar que podemos construir un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} cuya expansión en ∞ sea como en (1.1).

Denotamos por \mathbb{H}^- al semiplano complejo inferior y definimos

$$h : D_r(0) \cap \mathbb{H}^- \rightarrow \mathbb{H}^- \quad (1.3)$$

$$z \mapsto \frac{1}{g\left(\frac{r^2}{z}\right)}.$$

Dado que

$$[-r, r] = \partial(D_r(0) \cap \mathbb{H}^-) \cap \mathbb{R}$$

es un conjunto de puntos accesibles con respecto a $D_r(0) \cap \mathbb{H}^-$; entonces, por el teorema 3, h puede extenderse continuamente a $(D_r(0) \cap \mathbb{H}^-) \cup [-r, r]$. Además, gracias al lema 1 podemos afirmar que $h([-r, r])$ está contenido en \mathbb{R} . Luego, por el principio de reflexión de Schwarz, podemos extender h a $D_r(0)$ *analíticamente*. Denotamos por \tilde{h} a dicha extensión analítica.

De (1.3) se sigue que $\tilde{h}(z) = \frac{1}{g\left(\frac{r^2}{z}\right)}$ para todo z en $D_r(0) \cap \mathbb{H}^-$. Entonces, $\tilde{h}(0) = 0$, ya que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \infty$. Por ende, $\frac{1}{h}$ tiene un polo en $z = 0$, el cual debe ser simple, ya que \tilde{h} es inyectiva.

Sea

$$\frac{1}{\tilde{h}}(z) = \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \quad (1.4)$$

la expansión de $\frac{1}{\tilde{h}}$ en 0. Sea $f : \mathbb{C} \setminus D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{\tilde{h}\left(\frac{r^2}{z}\right)}.$$

Como $\frac{1}{h}$ tiene un polo simple en $z = 0$, entonces f tiene un polo simple en ∞ . Luego, por (1.4), obtenemos la siguiente expansión en ∞ para f :

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{r^2} z + b_0 + \frac{b_1 r^2}{z} + \frac{b_2 r^4}{z^2} + \dots,$$

donde z es cualquier complejo tal que $|z| > r$. Además, notemos que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{H} \setminus (D_r(0) \cap \mathbb{H})$. Entonces, para todo $|z| > r$ obtenemos que

$$g(z) = \frac{b_{-1}}{r^2}z + b_0 + \frac{b_1 r^2}{z} + \frac{b_2 r^4}{z^2} + \dots, \quad (1.5)$$

Ahora, definimos $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\phi(z) = \frac{r^2}{b_{-1}}z - \frac{b_0 r^2}{b_{-1}}$ para todo $z \in \mathbb{H}$. De la proposición 1 se sigue que ϕ es un automorfismo de \mathbb{H} . Entonces,

$$g_K := \phi \circ g$$

es un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K$ a \mathbb{H} . Sea $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{C}$ tal que:

$$a_1 = \frac{r^2}{b_{-1}}b_1 r^2, \quad a_2 = \frac{r^2}{b_{-1}}b_2 r^4, \quad \dots, \quad a_n = \frac{r^2}{b_{-1}}b_n r^{2n}, \quad \dots$$

Luego, de (1.5) y la definición de ϕ se sigue que

$$g_K(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

para todo $|z| > r$ en \mathbb{H} . Por ende,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_K(z) - z = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{z^i} = 0.$$

Notemos, por el lema 1, que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Queda probar que g_K es única. Sea $g : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ un biholomorfismo que satisface las propiedades de la proposición en cuestión. Sea

$$\psi := g \circ g_K^{-1}.$$

Dado que ψ es un automorfismo de \mathbb{H} , podemos escoger a, b, c y d en \mathbb{R} tales que $ad - bc > 0$ y $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ahora, como

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_K(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \infty,$$

entonces $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \psi(z) = \infty$. Luego, $c = 0$, lo cual implica que $\psi(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Sean \tilde{a} y \tilde{b} reales tal que $\tilde{a} = \frac{a}{d}$ y $\tilde{b} = \frac{b}{d}$. Entonces, $\psi(z) = \tilde{a}z + \tilde{b}$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Luego,

$$\tilde{a}g_K(z) + \tilde{b} = \psi(g_K(z)) = g(z),$$

lo cual implica que $\tilde{a} = 1$ y $\tilde{b} = 0$, ya que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) - z = 0$. Es decir, ψ es la identidad. Por lo tanto, $g = g_K$. \square

En adelante, si $K \subset \bar{\mathbb{H}}$ es un hull, denotaremos como g_K al único biholomorfismo normalizado como en la proposición 2. Mostremos ahora algunas propiedades de dichos biholomorfismos normalizados.

Corolario 1. Sea $K \subset \bar{\mathbb{H}}$ un hull. Entonces, para todo $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $g_{rK}(z) = rg_K\left(\frac{z}{r}\right)$
- $g_{K+x}(z) = g_K(z - x) + x$

Demostración. Tomamos $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Es claro que rK y $K + x_0$ son hulls. Consideremos los mapas

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{H} \setminus rK &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto rg_K\left(\frac{z}{r}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} \setminus K + x_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto g_{K+x_0}(z - x_0) + x_0. \end{aligned}$$

Queremos probar que ϕ y ψ son biholomorfismos sobre \mathbb{H} normalizados en ∞ como en la proposición 2. Es claro que ϕ y ψ son holomorfos e inyectivos. Además, notemos que

$$\frac{1}{r}(\mathbb{H} \setminus rK) = \mathbb{H} \setminus K$$

y

$$(\mathbb{H} \setminus K + x_0) - x_0 = \mathbb{H} \setminus K.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{H} \setminus rK) &= rg_K\left(\frac{1}{r}(\mathbb{H} \setminus rK)\right) \\ &= rg_K(\mathbb{H} \setminus K) \\ &= r\mathbb{H} \\ &= \mathbb{H} \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbb{H} \setminus K + x_0) &= g_K((\mathbb{H} \setminus K + x_0) - x_0) + x_0 \\
 &= g_K(\mathbb{H} \setminus K) + x_0 \\
 &= \mathbb{H} + x_0 \\
 &= \mathbb{H}.
 \end{aligned}$$

Por ende, ϕ y ψ son biholomorfismos sobre \mathbb{H} .

Sea

$$g_K(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

la expansión de g_K en ∞ . Notemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi(z) - z &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} r g_K\left(\frac{z}{r}\right) - z \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} r \left(\frac{z}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{r^n}{z^n} \right) - z \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{z^n} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \lim_{|z| \rightarrow \infty} \psi(z) - z &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} (g_K(z - x_0) + x_0) - z \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(z - x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - x_0)^n} + x_0 \right) - z \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - x_0)^n} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 2 podemos concluir que ϕ y ψ son los biholomorfismos asociados a los *hulls* rK y $K + x_0$, respectivamente. Por ende,

$$g_{rK}(z) = \phi(z) = r g_K\left(\frac{z}{r}\right)$$

y

$$g_{K+x_0}(z) = \psi(z) = g_{K+x_0}(z - x_0) + x_0$$

para todo z en sus respectivos dominios. □

Corolario 2. Sean K_1 y K_2 dos hulls contenidos en $\overline{\mathbb{H}}$. Si $K_1 \subset K_2$, entonces para todo $z \in \mathbb{H} \setminus K_2$ se cumple

$$g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}(z) = g_{K_2}(z),$$

donde $K_{1,2} = g_{K_1}(K_2 \setminus K_1)$.

Demostración. Es claro que $K_{1,2}$ es un hull. Como $g_{K_{1,2}}$ y g_{K_1} son mapas conformes, entonces $g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}$ también lo es. Además, por definición de $K_{1,2}$ tenemos que

$$g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}(\mathbb{H} \setminus K_2) = \mathbb{H}.$$

Es decir, $g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}$ es un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K_2$ sobre \mathbb{H} . A su vez, como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_{K_{1,2}}(z) = \infty$ y $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_{K_1}(z) = \infty$, entonces

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}(z) = \infty.$$

Sean

$$g_{K_1}(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

y

$$g_{K_{1,2}}(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k},$$

las expansiones en ∞ de g_{K_1} y $g_{K_{1,2}}$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}(z) - z &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[\left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right) + b_1 \left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right)^{-1} + \dots \right] - z \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} + b_1 \left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right)^{-1} + b_2 \left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right)^{-2} \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

En suma, $g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}$ es un biholomorfismo de $\mathbb{H} \setminus K_2$ a \mathbb{H} tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}(z) - z = 0$. Como g_{K_2} también es un biholomorfismo con dichas propiedades, concluimos, por la proposición anterior, que $g_{K_2} = g_{K_{1,2}} \circ g_{K_1}$. \square

Observación. Sean $T \in (0, \infty]$ y $\gamma : [0, T) \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ una curva simple tal que $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ y $\gamma((0, T)) \subset \mathbb{H}$. Entonces, para todo $t \in [0, T)$, $\gamma([0, t])$ es un hull. Es decir, γ induce la familia de hulls $(\gamma([0, t]))_{0 \leq t < T}$. Asimismo, gracias a la proposición 2, podemos asociar a esta curva una única familia de biholomorfismos normalizados en ∞ $(g_t)_{t \in [0, T)}$ de modo que para cada $t \in [0, T)$

$$g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t]) \rightarrow \mathbb{H}$$

es el único biholomorfismo que cumple $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_t(z) - z = 0$.

En general, si $(K_t)_{t \geq 0}$ es una familia de Hulls, tendremos asociada a ella, y de manera unívoca, una familia de biholomorfismos $(g_{K_t})_{t \geq 0}$ normalizados en ∞ que deforma analíticamente el complemento de cada hull en el semiplano complejo superior. Ahora bien, cabe precisar que no estamos interesados en cualquier tipo de familia de hulls. Queremos que sean tales que su versión aleatoria nos permita estudiar las curvas SLE_k .

Definición 5. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia de hulls. Diremos que dicha familia es creciente si dados t_1 y t_2 en $[0, \infty)$ se cumple $K_{t_1} \subset K_{t_2}$, siempre que $t_1 \leq t_2$.

Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls. Denotamos para todo $t \in [0, \infty)$ y $h > 0$

$$K_{t, t+h} := \overline{g_{K_t}(K_{t+h} \setminus K_t)}. \quad (1.6)$$

Es claro que $K_{t, t+h}$ es un hull.

Definición 6. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls. Diremos que dicha familia satisface la *propiedad de crecimiento local* si para todo $T < \infty$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{Rad}(K_{t, t+h}) = 0,$$

uniformemente en $[0, T]$, donde

$$\text{Rad}(K) := \inf\{s > 0 : K \subset s\mathbb{D} + x_0, x_0 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.7)$$

Como veremos más adelante, el teorema 1 de Loewner versa sobre familias crecientes de hulls que satisfacen la propiedad de crecimiento local.

1.2 La transformada de Loewner

El objetivo de la presente sección es mostrar que a partir del registro de la "variación", con respecto al tiempo, de una familia de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local se define, de manera natural, una función continua real de variable real que deviene en uno de los ingredientes de mayor importancia para la construcción de la SLE. Norris llama a esta función "Transformada de Loewner". Como veremos, además de aparecer en la ecuación de Loewner, la transformada de Loewner: (i) Es todo lo que se necesita para generar, de manera unívoca, una familia de hulls. (ii) Si la familia de hulls asociada (a la transformada) puede, además, ser generada por una curva (en un sentido que veremos en tercera sección del capítulo 3), entonces veremos que, en cierto sentido, la transformada de Loewner "guía" la curva.

Comenzaremos demostrando una proposición que nos brinda una estimativa sobre la "distorsión" que generan los biholomorfismos (definidos a partir de hulls según la proposición 2) en términos del radio de los hulls con los cuales se encuentran asociados. La demostración que exponemos sigue el argumento presentado por [Kem17]. Luego pasaremos a demostrar la existencia y buena definición de la transformada de Loewner para lo cual nos apoyaremos en [BN].

Lema 2. Sean $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva. Si

$$f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad |z| > 1,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 \leq 1$$

Demostración. Ver [Law05] □

Proposición 3. Sea $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ un hull. Entonces, para todo $z \in \mathbb{H} \setminus K$ se cumple

$$|g_K(z) - z| \leq 5\text{Rad}(K).$$

Demostración. Afirmamos que si la proposición se cumple para todo hull $\tilde{K} \subset \overline{\mathbb{H}} \cap \overline{\mathbb{D}}$ tal que $\text{Rad}(\tilde{K}) = 1$, entonces se cumple para K . En efecto, escojamos $r > 0$ tal que $r = \text{Rad}(K)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $K \subset D(x_0, r)$. Supongamos, primero, que la proposición se cumple para todo $\tilde{K} \subset D_r(0)$. Tomemos $z \in \mathbb{H} \setminus K$. Como

$$z - x_0 \in \mathbb{H} \setminus K - \{x_0\},$$

$$\text{rad}(K - \{x_0\}) = r$$

y

$$K - \{x_0\} \subset r\mathbb{D},$$

entonces

$$|g_K(z) - z| = |g_{K-\{x_0\}}(z - x_0) - (z - x_0)| \leq 5r,$$

donde la igualdad se sigue del corolario 1. Es decir, si la proposición se cumple para todo $\tilde{K} \subset D_r(0)$, entonces se cumple para K . Esto nos permite asumir que $K \subset \text{Rad}(K)\mathbb{D}$. Ahora bien, supongamos que la proposición se cumple para todo \tilde{K} con $\text{Rad}(\tilde{K}) = 1$. Tomemos $z \in \mathbb{H} \setminus K$. Como $\text{Rad}(\frac{1}{r}K) = 1$, entonces podemos observar que

$$|g_K(z) - z| = |rg_{\frac{1}{r}K}(\frac{z}{r}) - z| = r|g_{\frac{1}{r}K}(\frac{z}{r}) - \frac{z}{r}| \leq 5r,$$

donde la primera igualdad se sigue del corolario 1 y la desigualdad se sigue de la hipótesis. Esto finaliza la prueba de la afirmación.

Suponemos que $K \subset \overline{\mathbb{H}} \cap \overline{\mathbb{D}}$ y $\text{Rad}(K) = 1$. Sea g_K el biholomorfismo normalizado asociado a K . Notemos que la aplicación

$$h(z) = \frac{1}{g_K(\frac{1}{z})}$$

es una función holomorfa definida en $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}^-$ que puede extenderse continuamente a $(-1, 1)$ gracias al teorema 3. Más aún, como $h((-1, 1)) \subset \mathbb{R}$, entonces podemos usar el principio de reflexión de Schwarz para extender h a \mathbb{D} . Denotando como h a dicha extensión podemos observar que, por la definición de h y de g_K , tenemos $h(z) = 0$, lo cual implica que la aplicación $\frac{1}{h(z)}$ tiene un polo simple en 0 y está definida en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Luego, la aplicación $\frac{1}{h(\frac{1}{z})}$, además de coincidir con g_K en $\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}$, satisface las condiciones del lema 2. Sea

$$g_K(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

la expansión de g_K en infinito. Entonces, del lema 2 se sigue que $a_k \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, tomemos $z \in \mathbb{H} \setminus K$ y observemos que

$$|g_K(z) - z| = |z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - z| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z^k|}. \quad (1.8)$$

Suponga que $|z| \geq 2$. Entonces, de (1.8) se sigue que $|g_K(z) - z| \leq \frac{1}{|z|-1} \leq 1$. En particular, tenemos $g_K(\partial D_2(0)) \subset D_3(0)$, lo cual implica

$$g_K(D_2(0)) \subset D_3(0). \quad (1.9)$$

Por su parte, si $|z| < 2$, entonces, gracias a (1.9) tenemos que

$$|g_K(z) - z| \leq |g_K(z)| + |z| \leq 5,$$

con lo cual queda demostrada la proposición. \square

Apoyándonos en la proposición anterior, mostramos ahora que la familia de biholomorfismos asociada a una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local varía continuamente.

Proposición 4. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Para todo $0 < T < \infty$ y para todo $z \in \mathbb{H} \setminus K_T$ la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : [0, T] &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto g_{K_t}(z) \end{aligned}$$

es continua

Demostración. Fijamos $0 < T < \infty$ y $z \in \mathbb{H} \setminus K_T$. Como $(K_t)_{t \geq 0}$ es creciente, entonces $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$, para cualquier $t \in [0, T]$. Luego, la función

$$\begin{aligned} \phi : [0, T] &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto g_{K_t}(z) \end{aligned}$$

está bien definida.

Tomamos $\epsilon > 0$ y, apoyados en definición de la propiedad de crecimiento local, escogemos $\delta > 0$ tal que para todo $h \in [0, \delta)$ se cumple que $\text{Rad}(K_{t,t+h}) < \frac{\epsilon}{5}$. Tomamos $t \in [0, T - \delta)$ y $h \in [0, \delta)$. Luego, utilizando la proposición 3 tenemos que

$$|g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z)) - g_{K_t}(z)| \leq 5 \text{Rad}(K_{t,t+h}) < \epsilon.$$

Ahora bien, por el corolario 2 tenemos que $g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z)) = g_{K_{t+h}}(z)$. Entonces,

$$|g_{K_{t+h}}(z) - g_{K_t}(z)| < \epsilon.$$

Es decir, ϕ es uniformemente continua por la derecha. Por lo tanto, ϕ es continua. \square

Dicho esto podemos mostrar cómo construir la función continua que se asocia, de manera natural, a una familia de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local.

Teorema 4. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Entonces, para todo $t \geq 0$ existe un único $W_t \in \mathbb{R}$ tal que $W_t \in \overline{K_{t,t+h}}$ para todo $h > 0$. Más aún, la aplicación $t \rightarrow W_t$ es continua.

Demostración. Tomamos un $t \geq 0$. Dado que $(K_t)_{t \geq 0}$ es creciente, entonces $K_{t,t+h_1} \subset K_{t,t+h_2}$ siempre que $0 < h_1 \leq h_2$. Además, como cada $\overline{K_{t,t+h}}$ es compacto y

$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Rad}(K_{t,t+h}) = 0$ (por la definición de crecimiento local) y $K_{t+h} \neq \emptyset$ para todo $h > 0$, entonces podemos afirmar que

$$\bigcap_{h>0} \overline{K_{t,t+h}} \neq \emptyset$$

y que dicha intersección posee un único elemento. Llamamos W_t a dicho elemento.

Queda probar que, para todo $t \in [0, \infty)$, la aplicación $t \mapsto W_t$ es continua. Fijamos $\epsilon > 0$. Asimismo, tomamos $T > 0$ y, apoyándonos en la definición de crecimiento local, escogemos $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, se cumple $\text{Rad}(K_{t,t+h}) < \frac{\epsilon}{9}$, siempre que $h \in (0, \delta)$. Fijamos $t \in [0, T - 2\delta]$, $h \in (0, \delta)$ y tomamos $z \in K_{t+h,t+2h}$. Notemos que $g_{K_t}(z) \in K_{t,t+2h}$ y

$$g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z)) = g_{K_{t+h}}(z) \in K_{t+h,t+2h}.$$

Luego,

$$|W_t - g_{K_t}(z)| \leq 2\text{Rad}(K_{t,t+h})$$

y

$$|g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z)) - W_{t+h}| \leq 2\text{Rad}(K_{t+h,t+2h})$$

Además, por la proposición 3, tenemos que

$$|g_{K_t}(z) - g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z))| \leq 5\text{Rad}(K_{t,t+h}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |W_t - W_{t+h}| &\leq |W_t - g_{K_t}(z)| + |g_{K_t}(z) - g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z))| + |g_{K_{t,t+h}}(g_{K_t}(z)) - W_{t+h}| \\ &\leq 2\text{Rad}(K_{t,t+h}) + 5\text{Rad}(K_{t,t+h}) + 2\text{Rad}(K_{t+h,t+2h}) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Definición 7. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Llamamos transformada de Loewner a la función continua $W : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como en el teorema anterior.

Observación. La definición que estamos usando es tomada de [BN] . Por su parte en [Kem17] y [Law05] dicha función es llamada *driving function* por el rol que juega en la construcción de la curva asociada a las cadenas de hulls generada a partir de la ecuación de Loewner (y que pueden ser *inducidas* por una curva), así como en la construcción de la curva aleatoria asociada a una SLE_k . Esto lo veremos con mayor detalle en la sección 3.3 del tercer capítulo.

1.3 El coeficiente $a_1(K)$ y una estimativa de diferenciabilidad

El objetivo principal de la presente sección es exponer una prueba de la siguiente desigualdad

Proposición 5. Existe una constante $C > 0$ con la siguiente propiedad: Para todo $r > 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$ se cumple que si $K \subset \overline{D(\xi, r)} \cap \mathbb{H}$ es un hull y $z \in \mathbb{H}$ es tal que $|z - \xi| \geq Cr$, entonces

$$\left| f_K(z) - z + \frac{a_1(K)}{z - \xi} \right| \leq \frac{Cra_1(K)}{|z - \xi|^2}$$

donde $f_K(z) = g_K^{-1}(z)$, y $a_1(K)$ es el coeficiente asociado a z^{-1} en la expansión de g_K .

Esta proposición es utilizada por Kemppainen en [Kem17] para demostrar el teorema 1 de Loewner. Es, justamente, dicho argumento el que pretendemos exponer de manera minuciosa. Por su parte, podemos observar que el coeficiente asociado al término z^{-1} de la expansión en infinito de los biholomorfismos asociados a hulls con los que hemos venido trabajando aparece en dicha desigualdad. Esto motiva a analizar algunas de las propiedades de dicho coeficiente. Comencemos enunciando algunos resultados que nos ayudarán en la prueba de la estimativa de diferenciabilidad.

Observación. Sea K un hull. Sea g_K , el biholomorfismo asociado, y

$$g_K(z) = z + \frac{a_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},$$

su expansión en ∞ . Notemos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_K(z) - z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \left(\frac{a_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right) = a_1.$$

Es decir,

$$a_1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_K(z) - z).$$

Lema 3. Sean $K \subset \bar{\mathbb{H}}$ un Hull y g_K el biholomorfismo asociado a K según la proposición 2. Sea

$$g_K(z) = z + \frac{a_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

la expansión de g_K en ∞ . Si $f_K = g_K^{-1}$, entonces

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f_K(z) - z = 0 \quad y$$

$$f_K(z) = z + \frac{b_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$$

es la expansión de f en ∞ . Más aún,

$$b_1 = -a_1$$

Demostración. Sea $f_K = g_K^{-1}$. Por la proposición 2, es claro que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f_K(z) - z = 0$. Entonces, la expansión de f en infinito es de la siguiente forma

$$f_K(z) = z + \frac{b_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}.$$

Ahora, usando la observación anterior notamos que

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(f_K(z) - z) \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_K^{-1}(z) - z) \\ &= \lim_{|w| \rightarrow \infty} g_K(w)(w - g_K(w)) \\ &= \lim_{|w| \rightarrow \infty} w \frac{g_K(w)}{w} (w - g_K(w)) \\ &= -a_1 \end{aligned}$$

□

También nos apoyaremos en la fórmula integral de Schwarz para el plano medio superior:

Lema 4. Sea $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Suponga que para algún $\alpha > 0$, $|z^\alpha f(z)|$ es acotada. Entonces, para todo $z \in \mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re}(f(x))}{x - z} dx.$$

Dicho esto demostramos la proposición:

Demostración. (de la proposición) *Afirmación:* Si la proposición se cumple para $\xi = 0$, entonces se cumple para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

En efecto, suponemos que la proposición se cumple para $\xi = 0$. Escogemos, entonces, una constante C con la propiedad mencionada en la proposición, aunque restringida a nuestra hipótesis. Tomamos $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Tomamos, a su vez, un hull $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ tal que $K \subset \overline{D(x_0, r)} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Sea $f_K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $f_K(z) = g_K^{-1}(z)$, donde g_K es el biholomorfismo asociado a K . Notamos que $K - \{x_0\} \subset r\mathbb{D}$. Luego tomamos $z \in \mathbb{H}$ tal que $|z - x_0| \geq Cr$. Asumamos, por ahora, que se cumple la siguiente igualdad (que será demostrada como parte de la prueba de la siguiente proposición)

$$a_1(K) = a_1(K - x_0).$$

Dicho esto, podemos observar que

$$\begin{aligned} |f_K(z) - z + \frac{a_1(K)}{z - x_0}| &= |f_{K-x_0}(z - x_0) + x_0 - z + \frac{a_1(K - x_0)}{(z - x_0) + x_0 - x_0}| \\ &= |f_{K-x_0}(z - x_0) - (z - x_0) + \frac{a_1(K - x_0)}{(z - x_0)}| \\ &\stackrel{\leq \text{hipótesis}}{\leq} \frac{Cr a_1(K - x_0)}{|z - x_0|^2} \\ &= \frac{Cr a_1(K)}{|z - x_0|^2} \end{aligned}$$

lo cual demuestra la afirmación.

Probemos ahora que la proposición se cumple para $\xi = 0$. Fijamos $r > 0$ y tomamos un hull $K \subset \overline{r\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Sea $f_K = g_K^{-1}$. Denotamos, igualmente, por f_K a la extensión de g_K^{-1} a $\overline{\mathbb{H}}$ (cuya existencia queda garantizada gracias al teorema 3). Consideremos la aplicación $z \mapsto f_K(z) - z$. Puesto que dicha aplicación cumple

con las condición de la formula integral de Schwarz para el semiplano complejo superior (lema 4), podemos escribir

$$f_K(z) - z = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - z} \operatorname{Im}(f_K(\xi)) d\xi$$

Ahora bien, dado que K es acotado, podemos escoger $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} x_1 &= \inf\{\xi \in \mathbb{R} : f_K(\xi) \in \mathbb{H} \cap \partial K\} \\ x_2 &= \sup\{\xi \in \mathbb{R} : f_K(\xi) \in \mathbb{H} \cap \partial K\}. \end{aligned}$$

Luego, si $x \notin [x_1, x_2]$, tendremos que $f_K(x) \in \mathbb{R}$; lo cual implica que $\operatorname{Im}[f_K(x)] = 0$. En consecuencia, denotando $I = [x_1, x_2]$, tenemos:

$$f_K(z) = z + \int_I \frac{1}{\xi - z} \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi$$

Además, por (1.9) en la demostración de la proposición 3 tenemos que $I \subset (-3r, 3r)$. Por consiguiente, si tomamos $z \in \mathbb{H}$ tal que $|z| > 6r$, tendremos que $\frac{1}{\xi - z} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi^{n-1}}{z^n}$. Por ende,

$$f_K(z) = z + \frac{1}{\pi} \int_I \frac{1}{\xi - z} \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi = z - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_I \xi^{n-1} \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi \right) z^{-n}.$$

Ahora bien, por el lema 3, tenemos que

$$f_K(z) = z - \frac{a_1(K)}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

para $z \notin \operatorname{Rad}(K)\mathbb{D}$. Entonces,

$$a_1(K) = \frac{1}{\pi} \int_I \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi \tag{1.10}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| f_K(z) - z + \frac{a_1(K)}{z} \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_I \frac{1}{\xi - z} \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_I \frac{\operatorname{Im} f_K(\xi)}{z} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_I \left(\frac{1}{\xi - z} + \frac{1}{z} \right) \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup \left\{ \left| \frac{1}{x - z} + \frac{1}{z} \right| : x \in I \right\} \frac{1}{\pi} \int_I \operatorname{Im} f_K(\xi) d\xi \tag{1.11} \\ &= a_1(K) \sup \left\{ \left| \frac{1}{x - z} + \frac{1}{z} \right| : x \in I \right\} \\ &= a_1(K) \sup \left\{ \left| \frac{x}{(x - z)z} \right| : x \in I \right\}, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de (1.10). Ahora, notemos que, si tomamos $x \in I$ tenemos

$$\left| \frac{x}{(x-z)z} \right| \leq \frac{x}{(|z|-|x|)|z|} \leq \frac{2x}{|z|^2} \leq \frac{6r}{|z|^2}. \quad (1.12)$$

Entonces, de (1.11) y (1.12) tenemos

$$\left| f_K(z) - z + \frac{a_1(K)}{z} \right| \leq \frac{6ra_1(K)}{|z|^2}$$

que es lo que buscábamos. \square

Veamos ahora algunas propiedades del coeficiente $a_1(K)$.

Proposición 6. Sea K un hull. Entonces, $a_1(K) \geq 0$. Además, $a_1(K) = 0$ si y sólo si g_K es la identidad.

Demostración. Notemos que la prueba se sigue directamente de (1.10) en la demostración de la proposición 5. \square

Proposición 7. Sean $K_0, K_1 \subset \overline{\mathbb{H}}$ hulls, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Suponemos que $K_0 \subset K_1$. Entonces,

- $a_1(K_0 + x_0) = a_1(K)$
- $a_1(rK_0) = r^2 a_1(K_0)$
- $a_1(K_0) \leq a_1(K_0) + a_1(K_{0,1}) = a_1(K_1)$

donde $K_{0,1} = g_{K_0}(K_1 \setminus K_0)$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} a_1(K_0 + x_0) &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_{K_0+x_0}(z) - z) \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z((g_{K_0}(z - x_0) + x_0) - z) \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z((g_{K_0}(z - x_0) - (z - x_0))) \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \left(\frac{a_1(K_0)}{z - x_0} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{(z - x_0)^k} \right) \\ &= a_1(K_0), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del corolario 1. Asimismo, notemos que

$$\begin{aligned}
 a_1(rK_0) &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_{K_0}(z) - z) \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \left(r g_{K_0} \left(\frac{z}{r} \right) - z \right) \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \left[r \left(\frac{z}{r} + \frac{ra_1(K_0)}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k r^k}{z^k} \right) - z \right] \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} rz \left(\frac{ra_1(K_0)}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k r^k}{z^k} \right) \\
 &= r^2 a_1(K_0),
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad también se sigue del corolario 1. Ahora, con respecto al tercer ítem, es claro, por la proposición anterior, que $a_1(K_0) \leq a_1(K_0) + a_1(K_{0,1})$. Por su parte, para comprobar que $a_1(K_0) + a_1(K_{0,1}) = a_1(K_1)$ notemos que

$$\begin{aligned}
 a_1(K_1) &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_{K_1}(z) - z) \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_{K_{0,1}}(g_{K_0}(z)) - z) \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \left(g_{K_0}(z) + \frac{a_1(K_{0,1})}{g_{K_0}(z)} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{g_{K_0}(z)^i} - z \right) \\
 &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(g_{K_0}(z) - z) + z \left(\frac{a_1(K_{0,1})}{g_{K_0}(z)} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{g_{K_0}(z)^i} \right) \\
 &= a_1(K_0) + a_1(K_{0,1}),
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del corolario 2. \square

Recordemos que nuestro interés se encuentra en las familias crecientes de Hulls que satisfacen la propiedad de crecimiento local. Veamos entonces el comportamiento de $a_1(K_t)$ al interior de ellas. Para ello demostremos primero el siguiente lema:

Lema 5. Si K es un hull y $r > 0$ es tal que $K \subset D(x_0, r)$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}$; entonces $a_1(K) \leq r^2$. En particular, $a_1(K) \leq \text{Rad}(K)^2$.

Demostración. Tomemos un hull K y escojamos $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $K \subset D(x_0, r)$. Como $D(x_0, r) = r\mathbb{D} + x_0$, entonces por la proposición 7 tenemos

$$a_1(K) \leq a_1(\overline{r\mathbb{D} \cap \mathbb{H}} + x_0) = a_1(\overline{r\mathbb{D} \cap \mathbb{H}}) = r^2 a_1(\overline{\mathbb{D} \cap \mathbb{H}}).$$

Ahora, sea $K_0 = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{H} \setminus K_0$ tenemos que

$$g_{K_0}(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto, $a_1(K_0) = 1$, lo cual demuestra el lema. \square

Proposición 8. Sea $(K_t)_{t \leq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Sea $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\phi(t) = a_1(K_t)$. Entonces, ϕ es estrictamente creciente y continua.

Demostración. El hecho de que ϕ es creciente se sigue de la definición de familia creciente de hulls junto con el tercer ítem de la proposición 7. Para probar la continuidad de dicha función tomemos $t \geq 0$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis escojamos $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta$, entonces $\text{Rad}(K_{t,t+h}) < \sqrt{\epsilon}$. Luego tomemos $h \in (0, \delta)$ y notemos que

$$|a_1(K_t) - a_1(K_{t+h})| = |a_1(K_{t,t+h})| \leq \text{Rad}(K_{t,t+h})^2 < \epsilon.$$

\square

Observación. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Sean $\varphi(t) = \frac{a(K_t)}{2}$ y $\tau = \varphi^{-1}$. Entonces, definiendo $K'_t = K_{\tau(t)}$, obtenemos una familia creciente de hulls (K'_t) que satisface la propiedad de crecimiento local y cumple $a(K'_t) = 2t$

Definición 8. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una familia creciente de hulls que satisface la propiedad de crecimiento local. Si para todo $t \in [0, \infty)$ tenemos $a_1(K_t) = 2t$, entonces diremos que $(K_t)_{t \geq 0}$ se encuentra parametrizada por capacidad.

1.4 Los teoremas de Loewner

En la presente sección empleamos lo visto hasta ahora en aras de demostrar los teoremas 1 y 2 Loewner. Para la demostración de ambos teoremas nos apoyamos en las ideas expuestas en las demostraciones de [Kem17], [BN] y [Law05]. Cabe mencionar que a partir de ahora trabajaremos con la siguiente notación: Dada una familia creciente de hulls $(K_t)_{t \geq 0}$ que satisface la propiedad de crecimiento local y esté parametrizada por capacidad, denotaremos, siempre que no haya ambigüedad, como $(g_t)_{t \geq 0}$ a la familia de biholomorfismos normalizados en ∞ asociada a $(K_t)_{t \geq 0}$, siendo, entonces, $g_t = g_{K_t}$ para todo $t \geq 0$. A su vez,

escribiremos $g_{t,t+h} := g_{K_{t,t+h}}$. En otras palabras, denotaremos como $g_{t,t+h}$ al único biholomorfismo normalizado asociado a $K_{t,t+h}$ que satisface $g_{t,t+h} \circ g_t = g_{t+h}$.

Comencemos demostrando el siguiente lema

Lema 6. Dado $t_0 > 0$, sea $f : [0, t_0) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Suponga que para todo $t \in [0, t_0)$, la aplicación

$$f'_+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

está bien definida y es continua. Entonces, f es derivable y $f' = f'_+$.

Demostración. Basta mostrar que la función $\phi(t) = f(t) - f(0) - \int_0^t f'_+(s) ds$ es idéntica a 0 para todo $t \in [0, t_0)$. Para ello, basta garantizar que, para todo ϵ y para todo $s \in [0, t_0)$ se cumple $|\phi(s)| \leq \epsilon s$. Tomemos, entonces, $\epsilon > 0$. Sea

$$s_0 = \sup\{t \in [0, t_0) : |\phi(s)| \leq \epsilon s, \text{ para todos } s \in [0, t)\}.$$

Como $\phi(0) = 0$ y $\phi'_+(0) = 0$, entonces $s_0 > 0$. Ahora bien, suponga que $s_0 < t_0$. Entonces,

$$|\phi(s_0)| \leq \epsilon s_0.$$

Sin embargo, como $|\phi'_+(s_0)| = f'_+(s_0) - f'_+(s_0) = 0$, entonces debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|\phi(s) - \phi(s_0)|}{s - s_0} < \epsilon \quad (1.13)$$

para todo $s \in (s_0, s_0 + \delta)$, ya que ϕ'_+ es continua, por hipótesis. Tomemos $s \in (s_0, s_0 + \delta)$. Entonces, por (1.13) tenemos

$$|\phi(s)| < (s - s_0)\epsilon + \phi(s_0) < s_0\epsilon,$$

lo cual entra en contradicción con el modo en el que escogimos s_0 . Luego, $s_0 = t_0$. Por lo tanto, $\phi(t) = 0$ para todo $t \in [0, t_0)$, con lo cual el lema queda verificado. \square

Teorema 5. (*Teorema 1 de Loewner*) Sea $(K_{t \geq 0})_{0 \leq t < \infty}$ una familia creciente de hulls, parametrizada por capacidad, que satisface la propiedad de crecimiento local. Sean $(g_t)_{t \geq 0}$ y $W : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la familia de biholomorfismos y la transformada de Loewner asociados a $(K_t)_{t \geq 0}$. Dado $z \in \mathbb{H}$ definimos

$$\tau(z) = \inf\{t \geq 0 : z \in K_t\}.$$

Entonces, la función

$$\begin{aligned}\phi_z : [0, \tau(z)) &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto g_t(z),\end{aligned}$$

es la solución maximal del siguiente problema de valor inicial (conocido como Ecuación de Loewner):

$$\begin{aligned}\partial z(t) &= \frac{2}{z(t) - W(t)} \\ z(0) &= z.\end{aligned}$$

Demostración. Fijamos $z \in \mathbb{H}$, $T \in (0, \tau(z))$ y $\delta \in (0, \tau(z) - T)$. Tomamos $t \in (0, T)$. Gracias al lema, para demostrar el teorema basta con probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \left(\frac{\phi_z(t+h) - \phi_z(t)}{h} \right) - \frac{2}{\phi_z(t+h) - W(t)} \right| = 0.$$

Sea $(f_s)_{s \geq 0}$ tal que $f_s = g_s^{-1}$, para todo $s \geq 0$. A su vez, sea $f_{t,t+h} = g_{t,t+h}^{-1}$, para todo $h \in (0, \delta)$. Luego, por el corolario 2, tenemos:

$$\begin{aligned}f_{t,t+h}(g_{t+h}(z)) &= f_{t,t+h}(g_{t,t+h} \circ g_t(z)) \\ &= g_{t,t+h}^{-1}(g_{t,t+h} \circ g_t(z)) \\ &= g_t(z).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Además, por la definición de la transformada de Loewner, tenemos que $W(t) \in K_{t,t+h}$, lo cual implica que

$$K_{t,t+h} \subset W(t) + 2\text{Rad}(K_{t,t+h})\mathbb{D}.\tag{1.15}$$

Asimismo, por la proposición 5 podemos escoger una constante $C > 0$ tal que para todo $h \in (0, \delta)$ que cumpla

$$|g_{t+h}(z) - W(t)| \geq C\text{Rad}(K_{t,t+h}),$$

nos garantice que

$$\left| f_{t,t+h}(g_{t+h}(z)) - g_{t+h}(z) + \frac{a_1(K_{t,t+h})}{g_{t+h}(z) - W(t)} \right| \leq \frac{2C\text{Rad}(K_{t,t+h})a_1(K_{t,t+h})}{|g_{t+h}(z) - W(t)|^2}.\tag{1.16}$$

Como $t + h < \tau(z)$ para todo $h \in [0, \delta)$, entonces $|g_{t+h}(z) - W(t)| > 0$ para cualquier $h \in [0, \delta)$. Luego, (1.16) tiene sentido. Ahora bien, gracias a la propiedad de crecimiento local, podemos escoger $h_0 \in (0, \delta)$ de modo que, para todo $h \in (0, h_0)$,

$$|g_{t+h}(z) - W(t)| \geq CRad(K_{t,t+h}).$$

Entonces, de (1.14), (1.15) y (1.16) se sigue que, para todo $h \in (0, h_0)$,

$$\begin{aligned} \left| g_{t+h}(z) - g_t(z) - \frac{a_1(K_{t,t+h})}{g_{t+h}(z) - W(t)} \right| &= \left| g_t(z) - g_{t+h}(z) + \frac{a_1(K_{t,t+h})}{g_{t+h}(z) - W(t)} \right| \\ &= \left| f_{t,t+h}(g_{t+h}(z)) - g_{t+h}(z) + \frac{a_1(K_{t,t+h})}{g_{t+h}(z) - W(t)} \right| \\ &\leq \frac{2CRad(K_{t,t+h})a_1(K_{t,t+h})}{|g_{t+h}(z) - W(t)|^2}. \end{aligned}$$

Fijemos $h \in (0, h_0)$. Por la proposición 7 obtenemos

$$a_1(K_t) + a_1(K_{t,t+h}) = a_1(K_{t+h}).$$

Además, del hecho de que $(K_{t \geq 0})_{0 \geq 0}$ está parametrizada por capacidad se sigue que $a_1(K_{t,t+h}) = 2h$. Por ende, podemos escribir:

$$\left| g_{t+h}(z) - g_t(z) - \frac{2h}{g_{t+h}(z) - W(t)} \right| \leq \frac{4hCRad(K_{t,t+h})}{|g_{t+h}(z) - W(t)|^2}.$$

Luego, dividiendo entre h y reemplazando, según corresponda, por ϕ_z , obtenemos la desigualdad

$$\left| \frac{\phi_z(t+h) - \phi_z(t)}{h} - \frac{2}{\phi_z(t+h) - W(t)} \right| \leq \frac{4CRad(K_{t,t+h})}{|\phi_z(t+h) - W(t)|^2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{\phi_z(t+h) - \phi_z(t)}{h} - \frac{2}{\phi_z(t+h) - W(t)} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4CRad(K_{t,t+h})}{|\phi_z(t+h) - W(t)|^2} = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que nuestra familia de hulls satisface la propiedad de crecimiento local. \square

Tomemos ahora el camino inverso. Para ello fijamos $W \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ y definimos la siguiente aplicación

$$F : [0, \infty) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(t, z) \mapsto \frac{2}{z - W(t)}.$$

Luego fijamos $t \in [0, \infty)$; tomamos $z \in \mathbb{H}$; escogemos $\delta > 0$ tal que $\overline{D_\delta(z)} \subset \mathbb{H}$; y escogemos $C > 0$ tal que

$$C = \sup_{(z_1, z_2) \in D_\delta(z) \times D_\delta(z)} \left| \frac{2}{(z_1 - W(t))(z_2 - W(t))} \right|.$$

Tomemos z_1 y z_2 de $D_\delta(z)$ y notemos que

$$\begin{aligned} |F(t, z_1) - F(t, z_2)| &= \left| \frac{2}{z_1 - W(t)} - \frac{2}{z_2 - W(t)} \right| \\ &= \left| \frac{2(z_2 - z_1)}{(z_1 - W(t))(z_2 - W(t))} \right| \\ &\leq C |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Es decir, F es localmente \mathbb{H} -Lipschitz. Por lo tanto, gracias a los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de EDO así como de dependencia continua de las condiciones iniciales, podemos afirmar que existe una única familia de aplicaciones $(g_t)_{t \geq 0}$ que satisface lo siguiente:

- Para todo $t \geq 0$, g_t es una función continua compleja de variable compleja que tiene como dominio al siguiente conjunto

$$H_t := \{z \in \mathbb{H} : t < \tau(z)\}, \quad (1.17)$$

donde

$$\tau(z) = \inf\{s \geq 0 : |g_s(z) - W(s)| = 0\}. \quad (1.18)$$

- Para todo $z \in \mathbb{H}$, la aplicación $\phi(t) = g_t(z)$, definida en $[0, \tau(z))$, está bien definida; es diferenciable; y es la solución maximal de problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \partial_t z(t) &= \frac{2}{z(t) - W(t)} \\ z(0) &= z. \end{aligned}$$

En suma, para todo $W \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ existe un flujo de funciones continuas complejas, de variable compleja, $(g_t)_{t \geq 0}$ tal que, para todo $z \in \mathbb{H}$, $(g_t(z))_{t \in [0, \tau(z))}$ resuelve la ecuación de Loewner:

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - W(t)}, \quad g_0(z) = z.$$

Antes de demostrar el teorema 2 de Loewner introducimos la ecuación *reversa* de Loewner. Dicha ecuación nos será de utilidad tanto para la demostración del siguiente teorema como para el estudio de las curvas *SLE*. Observe que el argumento que acabamos de exponer nos garantiza que la ecuación reversa de Loewner posee una única solución.

Definición 9. Llamaremos ecuación reversa de Loewner al siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{aligned} \partial_t h_t(z) &= -\frac{2}{h_t(z) - W_t}, \\ h_0(z) &= z, \end{aligned} \tag{1.19}$$

donde $z \in \mathbb{H}$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es una función continua.

Teorema 6. (*Teorema 2 de Loewner.*) Sea $W \in C([0, \infty), \mathbb{R})$. Sea $(g_t)_{t \geq 0}$ la familia de funciones complejas de variable compleja que resuelve la ecuación de Loewner con respecto a W . Entonces, se cumple lo siguiente:

1. Para todo $t \geq 0$, $g_t : H_t \rightarrow \mathbb{H}$ es un biholomorfismo normalizado en ∞ , donde H_t es como en (1.18).
2. Para todo $t \geq 0$, $K_t := \mathbb{H} \setminus H_t$ es un hull. Por ende, $(g_t)_{t \geq 0}$ es la familia de biholomorfismos normalizados asociada a $(K_t)_{t \geq 0}$.
3. $(K_t)_{t \geq 0}$ es una familia creciente de hulls, parametrizada por capacidad y que satisface la propiedad de crecimiento local.
4. W es la transformada de Loewner de $(K_t)_{t \geq 0}$.

Demostración. Dividimos la demostración, siguiendo las pruebas de [Kem17] y [BN], en 4 partes. Comenzamos demostrando que g_t es una función inyectiva, para cualquier $t \geq 0$. Luego, en segundo lugar, apoyándonos en el argumento

que garantiza la inyectividad de cada función del flujo $(g_t)_{t \geq 0}$, mostramos que dichas funciones son, además, holomorfas. Esto nos garantiza que cada g_t es un biholomorfismo sobre su imagen. A partir de ello, mostramos, en tercer lugar, que, para todo $t \geq 0$, la imagen de g_t es \mathbb{H} , lo cual implicaría que H_t es simplemente conexo. Sobre dicha base, resulta claro que para garantizar que $K_t = \overline{\mathbb{H}} \setminus \overline{H_t}$ es un hull basta con mostrar que K_t es acotado. Esta será nuestra cuarta tarea. Luego mostraremos que cada g_t satisface $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_t(z) - z = 0$, lo cual implica, por la proposición 2, que nuestro flujo $(g_t)_{t \geq 0}$ no es sino el flujo de biholomorfismos normalizado en infinito asociado a nuestra cadena de hulls $(K_t)_{t \geq 0}$. Finalmente, mostramos que nuestra cadena de hulls satisface la propiedad de crecimiento local y se encuentra parametrizada por capacidad.

Afirmación 1: Para todo $t \geq 0$, g_t es inyectiva.

En efecto, fijamos $t \geq 0$. Luego tomamos $z_1, z_2 \in H_t$, escogemos $\delta > 0$ tal que $t + \delta < \min\{\tau(z_1), \tau(z_2)\}$ y definimos

$$\begin{aligned} \varphi_{z_1, z_2} : [0, t + \delta) &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto g_s(z_1) - g_s(z_2). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_{z_1, z_2}(t) &= \partial_t (g_t(z_1) - g_t(z_2)) \\ &= \frac{2}{g_t(z_1) - W(t)} - \frac{2}{g_t(z_2) - W(t)} \\ &= \frac{2(g_t(z_2) - g_t(z_1))}{(g_t(z_1) - W(t))(g_t(z_2) - W(t))} \\ &= \frac{-2\varphi_{z_1, z_2}(t)}{(g_t(z_1) - W(t))(g_t(z_2) - W(t))}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\partial_t \varphi_{z_1, z_2}(t) = \frac{-2\varphi_{z_1, z_2}(t)}{(g_t(z_1) - W(t))(g_t(z_2) - W(t))}$$

y

$$\varphi_{z_1, z_2}(0) = z_1 - z_2.$$

Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de EDO obtenemos

$$\varphi_{z_1, z_2}(s) = (z_1 - z_2) \exp\left(-\int_0^s \frac{2dr}{(g_r(z_1) - W(r))(g_r(z_2) - W(r))}\right), \quad (1.21)$$

para todo $s \in [0, t + \delta)$. Por ende, $\varphi_{z_1, z_2}(t) = 0$ si y sólo si $z_1 = z_2$, lo cual implica que g_t es inyectiva.

Afirmación 2: Para todo $t \geq 0$, g_t es holomorfa.

Fijamos $t \geq 0$. Tomamos $z_0 \in H_t$. Luego, de (1.21) se sigue, para todo $z \in H_t$,

$$\frac{g_t(z) - g_t(z_0)}{z - z_0} = \exp\left(-\int_0^t \frac{2dr}{(g_r(z) - W(r))(g_r(z_0) - W(r))}\right).$$

Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g_t(z) - g_t(z_0)}{z - z_0} = \exp\left(-\int_0^t \frac{2dr}{(g_r(z_0) - W(r))^2}\right),$$

lo cual implica que g_t es derivable en z_0 y, por ende, holomorfa en H_t .

De las afirmaciones 1 y 2 se sigue que $(g_t)_{t \geq 0}$ es un flujo de biholomorfismos sobre sus imágenes.

Afirmación 3: Para todo $t \geq 0$, $g_t(H_t) = \mathbb{H}$.

Fijamos $t \geq 0$ y tomamos $z \in H_t$. Notemos que $\text{Im}(g_0(z)) = \text{Im}z$ y

$$\text{Im}(\partial_s g_s(z)) = \text{Im}\left(\frac{2}{g_s(z) - W(s)}\right) = \frac{-2\text{Im}g_s(z)}{|g_s(z) - W(s)|^2},$$

para todo $s \in [0, \tau(z))$. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de EDO,

$$\text{Im}g_t(z) = \text{Im}(z) \exp\left(-\int_0^t \frac{2ds}{|g_s(z) - W(s)|^2}\right).$$

Entonces, $\text{Im}(g_t(z)) > 0$, ya que $\text{Im}z > 0$. Por ende, $g_t(H_t) \subset \mathbb{H}$.

Tomemos $w \in \mathbb{H}$. Sea $V : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida como

$$V(s) = W(t - s),$$

para todo $s \in [0, t]$. Sea $(h_s(w))_{s \in [0, t]}$ la solución de la ecuación reversa de Loewner, con respecto a V , con condición inicial $h_0(w) = w$. Es decir, $(h_s(w))_{s \in [0, t]}$ resuelve:

$$\begin{aligned} \partial_s h_s(w) &= -\frac{2}{h_s(w) - V(s)} \\ h_0(w) &= w. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Sea $z = h_t(w)$.

Afirmación 3.1: Para todo $s \in [0, t]$, $h_{t-s}(w) = g_s(z)$

Tomemos $s \in [0, t]$. Dado que

$$\operatorname{Im}(\partial_s h_s(w)) = \frac{2\operatorname{Im}(h_s(w))}{|h_s(w) - W(t-s)|^2},$$

entonces

$$\operatorname{Im}(h_s(w)) = \operatorname{Im}(w) \exp\left(\int_0^s \frac{2dr}{|h_r(w) - W(t-r)|^2}\right).$$

Luego, la aplicación $s \mapsto \operatorname{Im}h_s(w)$ es creciente. Entonces, como $h_0(w) = w$ y $w \in \mathbb{H}$, se sigue que $h_s(w) \in \mathbb{H}$. En particular, $z \in \mathbb{H}$. Ahora bien, sabemos que $(g_s(z))_{s \in [0, \tau(z))}$ resuelve

$$\begin{aligned} \partial_s g_s(z) &= \frac{2}{g_s(z) - W(s)} \\ g_0(z) &= z. \end{aligned} \tag{1.23}$$

No obstante, podemos observar que

$$\begin{aligned} \partial_s h_{t-s}(w) &= -\left[\frac{-2}{h_{t-s}(w) - V(t-s)}\right] = \frac{2}{h_{t-s}(w) - W(s)} \\ h_t(w) &= z. \end{aligned}$$

Es decir, $(h_{t-s}(w))_{s \in [0, t]}$ también resuelve (1.23). Luego, por el teorema de existencia y unicidad de EDO, $g_s(z) = h_{t-s}(w)$, para todo $s \in [0, t]$. En particular, $g_t(z) = h_0(w) = w$. Entonces, $g_t(H_t) = \mathbb{H}$, lo cual prueba la afirmación.

Gracias a la afirmación 3, tenemos garantizado que $(g_t)_{t \geq 0}$ es un flujo de biholomorfismos sobre \mathbb{H} . Por ende, para cada $t \in [0, \infty)$ podemos afirmar que H_t es simplemente conexo, ya que \mathbb{H} lo es. En consecuencia, $(K_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de conjuntos cerrados cuyos complementos son simplemente conexos.

Afirmación 4: Para todo $t \geq 0$ (K_t) es acotado

Fijemos $t \in (0, \infty)$. Sea

$$r = \max\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |W(s) - W(0)|, \sqrt{t}\right\} \tag{1.24}$$

y fijemos

$$R \geq 4r. \tag{1.25}$$

Mostremos que todo $z \in \mathbb{H}$ que cumpla $|z - W(0)| \geq R$, se encuentra en H_t . Es decir, por (1.17), mostremos que todo $z \in \mathbb{H}$ que cumple $|z - W(0)| \geq R$, también satisface $\tau(z) > t$. Tomemos $z \in \mathbb{H}$ tal que $|z - W(0)| \geq R$. Definimos

$$\tau^* = \min\{\inf\{t \in [0, \tau(z)) : |g_t(z) - z| = r\}, t\} \quad (1.26)$$

y tomamos $s \in (0, \tau^*]$. Dado que $g_0(z) - z = 0$ y $\tau^* < \tau(z)$ (por definición de τ^*), entonces, $|g_s(z) - z| < r$. Asimismo, de (1.24) se sigue que $|W(s) - W(0)| < r$. Entonces,

$$\begin{aligned} |g_s(z) - W(s)| &= |g_s(z) - z + z - W(0) + W(0) - W(s)| \\ &\geq |z - W(0)| - |g_s(z) - z| - |W(0) - W(s)| \\ &\geq R - 2r \\ &\geq 2r, \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde la última desigualdad se sigue de (1.25). Luego, notemos que

$$\begin{aligned} |g_s(z) - z| &= \left| \int_0^s \frac{2dr}{g_r(z) - W(r)} \right| \\ &\leq \int_0^s \left| \frac{2}{g_r(z) - W(r)} \right| dr \\ &\leq \int_0^s \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{s}{r}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ahora, por la definición de τ^* es claro que no puede ocurrir que $\tau^* > t$. Por su parte, supongamos que $\tau^* < t$. Entonces,

$$\frac{\tau^*}{r} < \frac{t}{r} \leq r,$$

donde la segunda desigualdad se sigue de (1.24). Luego, de (1.28) se sigue

$$|g_{\tau^*}(z) - z| < r.$$

No obstante, por la definición de τ^* debería ocurrir $|g_{\tau^*}(z) - z| = r$. Por ende, τ^* no puede ser menor que t . Entonces, $\tau^* = t$, lo cual implica que $t < \tau(z)$, que es lo que buscábamos. Entonces, K_t es acotado y, por lo tanto, un *hull*.

Gracias a la afirmación 3 y a la proposición 2, podemos asociar a $(K_t)_{t \geq 0}$ una única familia de biholomorfismos normalizados en ∞ . Sea $(g_{K_t})_{t \geq 0}$ dicha familia.

Afirmación 5: Para todo $t \geq 0$, $g_t = g_{K_t}$.

En efecto, fijamos $t \geq 0$. Sean r y τ^* como en (1.24) y (1.26). Tomemos $z \in H_t$ tal que $|z - W(0)| \geq 4r$. Entonces,

$$|g_t(z) - z| = \left| \int_0^t \frac{2ds}{g_s(z) - W(s)} \right| \leq \int_0^t \frac{2ds}{|g_s(z) - W(s)|} \leq \frac{t}{|z - W(0)| - 2r},$$

donde la última desigualdad se sigue del argumento esbozado al final de la justificación de la afirmación 4. Entonces,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g_z - z| \leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{t}{|z - W(0)| - 2r} = 0,$$

lo cual implica, por la proposición 2, que $g_t = g_{K_t}$. Más aún, observemos que si tomamos $z \in \mathbb{H}$ tal que $|z - W(0)| > 4r$ tenemos

$$\begin{aligned} |z(g_t(Z) - z) - 2t| &= \left| \int_0^t \frac{2z}{g_s(z) - W(s)} ds - 2t \right| \\ &= \left| \int_0^t \frac{2z}{g_s(z) - W(s)} ds - 2 \int_0^t \frac{g_s(z) - W(s)}{g_s(z) - W(s)} ds \right| \\ &= 2 \left| \int_0^t \frac{z - g_s(z) + W(s)}{g_s(z) - W(s)} ds \right| \\ &\leq 2 \int_0^t \frac{|z - g_s(z)| + |W(s) - W(0)| + |W(0)|}{|g_s(z) - W(s)|} ds \\ &\leq 2 \int_0^t \frac{2r + |W(0)|}{R - 2r} ds \\ &= \frac{(4r + 2|W(0)|)t}{|z - W(0)| - 2r}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z(g_t(Z) - z) - 2t| \leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{(4r + 2|W(0)|)t}{|z - W(0)| - 2r} = 0,$$

lo cual implica, por la primera observación de la sección anterior, que $a_1(K_t) = 2t$ para todo $t \geq 0$.

Queda mostrar que $(K_t)_{t \geq 0}$ es creciente, satisface la propiedad de crecimiento local y tiene a W como su transformada de Loewner.

El hecho de que $(K_t)_{t \geq 0}$ es creciente se sigue inmediatamente de las definiciones de H_t , $\tau(z)$ y K_t . Y es que, si tomamos $t_1 \leq t_2$ y $z \in K_{t_1}$, entonces tendremos $\tau(z) \leq t_1 \leq t_2$, lo cual implica que $z \in K_{t_2}$.

Ahora mostremos que $(K_t)_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de crecimiento local. Para ello fijamos $s \in [0, \infty)$ y definimos la función $V(t) = W(s+t)$. Lo avanzado hasta ahora en la prueba nos garantiza la existencia de una única familia de hulls $(K_t^*)_{t \geq 0}$ y un único flujo de biholomorfismos $(g_t^*)_{t \geq 0}$ asociados a V a través de la ecuación de Loewner. Tomemos $h > 0$ y observemos que

$$g_{s,s+h} = g_{s+h} \circ g_s^{-1}$$

ya que, por el corolario 2,

$$g_{s,s+h} \circ g_s = g_{s+h}$$

. Luego, para todo $z \in \mathbb{H} \setminus K_{s,s+h}$ tenemos:

$$\partial_h g_{s,s+h}(g_s^{-1}(z)) = \frac{2}{g_{s+h}(g_s^{-1}(z)) - W(s+h)} = \frac{2}{g_{s+h}(g_s^{-1}(z)) - V(h)}$$

Por ende,

$$g_{s+h} \circ g_s^{-1} = g_h^*$$

Entonces, por la demostración de la afirmación 4, podemos observar que, para todo $z \in K_{s,s+h}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |z - W(s)| &= |z - V(0)| \leq 4 \max\left\{ \sup_{0 \leq t \leq h} |V(t) - V(0)|, \sqrt{h} \right\} \\ &= 4 \max\left\{ \sup_{0 \leq t \leq h} |W(s+t) - W(s)|, \sqrt{h} \right\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Rad}(K_{s,s+h}) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0$$

uniformemente en compactos. Es decir, $(K_t)_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de crecimiento local. Esto implica, por el teorema 5, que W es la transformada de Loewner de $(K_t)_{t \geq 0}$. \square

En suma, observamos que existe una biyección entre el conjunto de familias de hulls crecientes que satisfacen la propiedad de crecimiento local y el conjunto de funciones continuas reales con dominio $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Asimismo, gracias a la primera proposición, también podemos poner el acento en la existencia de una biyección entre las familias de biholomorfismos que satisfacen la ecuación de Loewner y funciones reales continuas con dominio $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Con esto en mente consideremos las siguientes definiciones:

Definición 10. Llamaremos cadena de Loewner a cualquier familia creciente de Hulls que satisfaga la propiedad de crecimiento local y se encuentre parametrizada por capacidad.

Definición 11. Llamaremos flujo de Loewner a la familia de biholomorfismos asociada a una cadena de Loewner.

Definición 12. Llamaremos flujo reverso de Loewner a la familia de biholomorfismos generada por la ecuación de Loewner.

Definición 13. Llamaremos flujo inverso de Loewner al flujo compuesto por las funciones inversas asociadas a un flujo de Loewner.



Capítulo 2

Preliminares de cálculo estocástico

En el presente capítulo presentamos una lista de resultados elementales del cálculo estocástico que nos serán de utilidad en la exposición de la SLE que desarrollamos en el capítulo 3. Comenzamos con la definición y exposición de algunas de las propiedades principales del movimiento Browniano. Luego nos centramos en la construcción de la integral estocástica y enunciamos brevemente los principales resultados que subyacen a la construcción de la integral de Itô. Después presentamos la fórmula de Itô con respecto al movimiento Browniano y con respecto a procesos de Itô, y enunciamos el teorema de caracterización de Lévy. Finalizamos el capítulo con una proposición referente al cambio de tiempo de procesos de Itô, proposición que nos será de gran utilidad en la prueba de la existencia de la curva SLE. Los resultados del presente capítulo se exponen, salvo algunas excepciones, sin prueba. Con respecto a la sección sobre el movimiento Browniano, nos basamos en [MP10]. Por su parte, los resultados de las secciones 2 y 3 sobre la integral y le lema de Itô son tomados de [Gal13] y [SP12]. Finalmente, para la sección 4 sobre cambio de tiempo nos basamos en [RY05], [Dur84] y [Mil].

2.1 Movimiento Browniano

Sea $T \in (0, \infty]$. Sea (E, \mathcal{E}) un espacio métrico medible donde \mathcal{E} es el σ -álgebra de Borel. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ llamamos *proceso estocástico* a una colección de variables aleatorias $(X_t)_{t \in [0, T]}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ con valores en (E, \mathcal{B}) . De manera alternativa, podemos ver un proceso estocástico como un mapa

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (E^{\mathcal{I}}, \mathcal{B}^{[0,T]}),$$

donde $(E^{\mathcal{I}}, \mathcal{B}^{\mathcal{I}})$ es un espacio de funciones medibles de $[0, T]$ a E .

Fijamos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Llamamos *filtración* a una familia de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ contenidos en \mathcal{F} tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s} \subset \mathcal{F}$ para cualesquiera $t \in [0, T], s \in [0, T - t)$. Decimos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, T]}$ se encuentra adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ o es \mathcal{F}_t -adaptado si X_t es \mathcal{F}_t -medible para todo $t \in [0, T]$. A su vez, decimos que una filtración es *continua por la derecha* si para todo t se cumple $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$. Asimismo, diremos que una filtración satisface las *condiciones usuales* si es continua por la derecha y \mathcal{F}_0 posee todos los conjuntos de medida nula de \mathcal{F} . En adelante trabajaremos solamente con filtraciones que satisfacen las condiciones usuales.

En el contexto de procesos estocásticos podemos debilitar la noción de igualdad de funciones en los siguientes 3 conceptos de *similitud* entre procesos:

Definición 14. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Sean X e Y dos procesos estocásticos definidos en dicho espacio.

1. Diremos que Y es una *modificación* de X si, para todo $t \geq 0$ se tiene que $\mathcal{P}(\{X_t = Y_t\}) = 1$.
2. En caso se cumpla $\mathcal{P}(\{X_t = Y_t : \text{para todo } t \in [0, \infty)\}) = 1$, entonces diremos que X e Y son *indistinguibles*.

Definición 15. Sean X e Y dos procesos estocásticos definidos en los espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{P}})$, respectivamente. Supongamos que ambos tienen el mismo espacio de estados (i.e. conjunto de llegada) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Diremos que X e Y tienen las mismas *distribuciones finito dimensionales* si, dado $n \in \mathbb{N}$, para selección finita y creciente de reales no negativos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ y para todo evento $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se cumple

$$\mathcal{P}(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\}) = \tilde{\mathcal{P}}(\{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A\}).$$

Definamos ahora las propiedades que van a caracterizar al movimiento Browniano:

Definición 16. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ y $(X_t)_{t \geq 0}$ un espacio de probabilidad filtrado y un proceso estocástico adaptado. Entonces, diremos que

- $(X_t)_{t \geq 0}$ es *estacionario* si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes en ley bajo traslaciones temporales. Es decir, si

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),$$

para cualesquiera $n \geq 1; t_1, \dots, t_n \geq 0$ y $h \geq 0$.

- $(X_t)_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \dots < t_n$ y $h > 0$ se cumple que

$$(X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{d}{=} (X_{t_2+h} - X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h})$$

- $(X_t)_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $0 < t_1 < \dots < t_n$, se cumple que $\{X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\}$ son variables aleatorias independientes.

Definición 17. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado. Llamamos movimiento Browniano a un proceso estocástico adaptado $(B_t)_{t \geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$, cs.
2. Para cada $0 \leq s \leq t$, la variable aleatoria $B_t - B_s$ es normal con varianza igual a $t-s$.
3. Tiene incrementos estacionarios e independientes.
4. Tiene trayectorias continuas, casi seguramente.

A continuación brindamos algunas propiedades del movimiento Browniano. Comenzamos con algunas propiedades de invarianza que, como veremos más adelante, serán, de cierta manera, heredadas por la SLE.

Teorema 7. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento browniano. Entonces, los siguientes procesos también son movimientos Brownianos:

- (*Propiedad de reflexión*) $(W_t)_{t \geq 0}$ tal que $W_t = -B_t$, para todo $t \geq 0$.
- $(W_t)_{t \geq 0}$ tal que, fijado un $T > 0$ cualquiera, $W_t = B_T - B_{T-t}$, para todo $0 \leq t \leq T$.

- (*Invarianza de escala*) $(W_t)_{t \geq 0}$ tal que $W_t = \lambda^{\frac{1}{2}} B_{\lambda t}$, para todo $t \geq 0$, donde $\lambda > 0$ es una constante cualquiera.

Teorema 8. (*Propiedad de Markov*) Fijado un $T > 0$ cualquiera el proceso $(W_t)_{t \geq 0}$ tal que $W_t = W_{T+t} - B_T$, para todo $t \geq 0$, es un movimiento Browniano. Más aún, $(W_t)_{t \geq 0}$ es independiente de \mathcal{F}_T .

Teorema 9. (*Propiedad de Markov Fuerte*) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_{t \geq 0})_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado y $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento browniano adaptado. Sea τ un \mathcal{F}_t -tiempo de parada. Entonces, el proceso $(W_t)_{t \geq 0}$ definido como $W_t = B_{\tau+t}$ es un movimiento Browniano independiente del σ -álgebra \mathcal{F}_τ .

Por su parte, también nos serán de utilidad algunos resultados conocidos sobre las trayectorias del movimiento Browniano.

Teorema 10. (Módulo de continuidad de Lévy) Casi seguramente se cumple:

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1.$$

Demostración. Ver Mörters y Peres. □

El módulo de continuidad de Lévy implica el siguiente resultado que emplearemos en la demostración de la existencia de la curva que induce la SLE.

Corolario 3. Existe una variable aleatoria no negativa y casi seguramente finita C tal que para todo $t \in [0, 1)$ y para todo $s \in (0, 1-t] \cap (0, \frac{1}{4}]$ se cumple

$$|B_{t+s} - B_t| \leq C \sqrt{s \log(1/s)}.$$

Demostración. Gracias al teorema anterior podemos escoger un evento $A \in \mathcal{F}$, de medida total, tal que, para todo $\omega \in A$,

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1. \quad (2.1)$$

Fijemos $\epsilon_0 \in (0, 1)$ y $\omega \in A$. Gracias a (1) escojamos $h_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \leq 1 + \epsilon_0,$$

para todo h en $(0, h_0)$. Luego, podemos afirmar que para todo $h \in (0, h_0)$ se cumple

$$|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)| \leq C \sqrt{h \log(1/h)}, \quad (2.2)$$

para todo t en $(0, 1 - h]$, donde $C = \sqrt{2}(1 + \epsilon_0)$.

Ahora, escogemos $\tilde{h} = \min\{h_0, \frac{1}{4}\}$; fijamos $t \in (0, 1)$ y tomamos $s \in (0, 1 - t] \cap (0, 1/4]$. Si $t \in [1 - \tilde{h}, 1)$, entonces $s < \tilde{h}$ y $t \leq 1 - s$. Luego, de (2) se sigue que

$$|B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega)| \leq C\sqrt{s \log(1/s)}.$$

Por su parte, si $t \leq 1 - \tilde{h}$ y $s \leq \tilde{h}$, entonces

$$|B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega)| \leq C\sqrt{s \log(1/s)}.$$

Suponemos, entonces, que $t \leq 1 - \tilde{h}$ y $s \in (\tilde{h}, 1/4]$. Sea n un entero positivo tal que $n = \left\lceil \frac{1}{\tilde{h}} \right\rceil$. Escogemos i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ y $t+s \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$. Sea l un entero positivo tal que $l = j - i + 1$. Consideremos $\{t_0, t_1, \dots, t_l\} \subset [0, 1]$ tales que $t_0 = t$, $t_l = t + s$ y $t_k = \frac{i+k-1}{n}$, para todo $k \in \{1, \dots, l-1\}$. Luego,

$$|B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega)| = \left| \sum_{i=1}^l B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega) \right| \leq \sum_{i=1}^l |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|. \quad (2.3)$$

Derivando puede observarse que la aplicación $h \mapsto \sqrt{h \log(1/h)}$ es creciente en $(0, e^{-1})$. Por ende, de (2) y (3) se sigue que

$$|B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega)| \leq lC\sqrt{\tilde{h} \log(1/\tilde{h})} \leq nC\sqrt{\tilde{h} \log(1/\tilde{h})} \leq \tilde{C}\sqrt{s \log(1/s)},$$

donde $\tilde{C} = nC$. En suma, dado que $C < \tilde{C}$ tenemos

$$|B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega)| \leq \tilde{C}\sqrt{s \log(1/s)},$$

para todo $t \in (0, 1)$ y para todo $s \in (0, 1 - t] \cap (0, 1/4]$. Dado que $0 < \tilde{C} < \infty$ y depende únicamente de ω , el cual fue tomado arbitrariamente de un conjunto de medida total, el corolario queda verificado. \square

La siguiente proposición nos dice que cada punto de la recta es casi seguramente alcanzado por el movimiento Browniano.

Proposición 9. Dados $\epsilon > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ se cumple

1. $\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty$, c.s.
2. $\liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty$, c.s.

Finalmente,

Teorema 11. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico continuo con incrementos independientes y estacionarios. Entonces, existe un movimiento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ y constantes reales α y β tales que $X_t = \alpha B_t + \beta t$.

2.2 Integración estocástica

Fijamos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ con el cual trabajaremos a lo largo de esta subsección.

Definición 18. Sea $(X_{t \geq 0})$ un proceso estocástico continuo (es decir, con trayectorias continuas). Decimos que X es un proceso de variación limitada si para todo $T > 0$ y para todo $\omega \in \Omega$ la aplicación $t \mapsto X_t(\omega)$ definida en $[0, T]$ es de variación limitada. Es decir, si para todo $T > 0$, las trayectorias de $X_{t \in [0, T]}$ son funciones de variación limitada.

Debido a esta definición, si fijamos $T > 0$, tomamos una función continua $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ cualquiera y tomamos un proceso de variación limitada adaptado $(A_t)_{t \geq 0}$, entonces para todo $\omega \in \Omega$ la trayectoria $A_t(\omega)_{t \in [0, T]}$ de A nos brinda la integral de *Lebesgue – Stieltjes*

$$\int_0^T f(t) dA_t(\omega).$$

En dicha línea, dado un proceso continuo adaptado $(H)_{t \in [0, T]}$ y un $t \in [0, T]$ arbitrario podemos definir la integral estocástica de H EN el intervalo $[0, t]$ y con respecto al proceso A como la variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible $I_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$I_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Más aún, el proceso $(I_t)_{t \in [0, T]}$ también es un proceso de variación limitada.

Ahora, puesto que el movimiento Browniano *no* es un proceso de variación limitada, el procedimiento anterior no funciona para definir una integral estocástica que tenga como integrador al movimiento Browniano. Otra estrategia es necesaria. Fijemos $T \in (0, \infty]$ y denotemos por \mathcal{M}_T^2 al conjunto de martingalas $(M_t)_{t \in [0, T]}$ continuas (es decir, de trayectorias continuas) adaptadas y cuadrado integrables.

Proposición 10. Dada una martingala continua y cuadrado integrable $M \in \mathcal{M}_T^2$ existe un proceso creciente, denotado por $(\langle M \rangle_t)_{t \in [0, T]}$, tal que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ es una martingala. Más aún, para todo $t \in [0, T)$ tenemos que si $(p_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de particiones anidadas de $[0, t]$ (es decir, para todo $n \geq 1$

$p_n := \{t_0^n, \dots, t_{k_n}^n\}$ donde $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = t$, entonces

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2,$$

donde la convergencia es tomada en probabilidad.

Definición 19. Dada una martingala $M \in \mathcal{M}_T^2$, llamamos *variación cuadrática de M* al proceso creciente $(\langle M \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ descrito en la proposición anterior.

Proposición 11. Si B es un movimiento Browniano adaptado, entonces para todo $t \geq 0$ tenemos $\langle B \rangle_t = t$.

Con ayuda de la definición de variación cuadrática podemos construir, para todo $t \in [0, T)$, la siguiente aplicación

$$(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle_t := \frac{1}{2}(\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t),$$

donde $M, N \in \mathcal{M}_T^2$

Proposición 12. Dadas M y N en \mathcal{M}_T^2 :

1. $(\langle M, N \rangle_t)_{t \in [0, T]}$ es el único proceso de variación limitada tal que

$$(M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)_{t \in [0, T]}$$

es una martingala.

2. Si M y N son martingalas acotadas en L^2 , entonces

- (a) $\langle M, N \rangle_T = \lim_{t \rightarrow T} \langle M, N \rangle_t$, en probabilidad.

- (b) $\langle M, N \rangle_T \in L^2$.

- (c) $E[M_T N_T] = E[M_0 N_0] + E[\langle M, N \rangle_T]$.

Teorema 12. Denotemos por $\mathcal{M}_{0, T}^2$ al espacio vectorial de martingalas continuas con índice igual a $[0, T]$, acotadas en L^2 , y tales que $M_0 = 0$. Considere la aplicación

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{\mathcal{M}_{0, T}^2} : \mathcal{M}_{0, T}^2 \times \mathcal{M}_{0, T}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) &\mapsto (M, N)_{\mathcal{M}_{0, T}^2} := E[\langle M, N \rangle_T]. \end{aligned}$$

Entonces, $(\mathcal{M}_{0, T}^2, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{M}_{0, T}^2})$ es un espacio de Hilbert.

La integral de Itô se define a partir de un operador adecuado que tiene como conjunto de llegada al espacio de Hilbert que acabamos de presentar. En aras de definir la clase de integrandos sobre la cual dicho operador se aplica, consideremos algunas definiciones.

Hasta ahora hemos definido la medibilidad de procesos estocásticos con respecto al σ -álgebra \mathcal{F} del universo Ω en el cual están definidos. Sin embargo, podemos pedir un criterio de medibilidad más fuerte. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y un mapa $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$, donde E es un espacio métrico, diremos que X es *medible* si es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -medible.

Proposición 13. Considere una aplicación $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ donde E es un espacio métrico. Suponga que existe un conjunto de medida total en Ω tal que para todo $\omega \in \Omega$, la aplicación $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ es continua por la derecha. Entonces, X es \mathcal{F} -medible si y sólo si X es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -medible.

En el mismo sentido, podemos restringir la noción de proceso adaptado a una filtración definiendo un criterio más fuerte.

Definición 20. Sea X un proceso adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Diremos que X es un proceso *progresivo* si para todo $t \geq 0$ la aplicación $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$, definida en $\Omega \times [0, t]$, es $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ -medible.

De la proposición anterior y de la definición de proceso progresivamente medible se sigue que todo proceso adaptado que posea, casi seguramente, trayectorias continuas por la derecha es un proceso progresivo.

Definición 21. Definimos al σ -álgebra progresivo como la siguiente familia de conjuntos

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)_{\mathcal{P}} := \{A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) : 1_A : \Omega \times \mathbb{R}_+ \text{ es progresivo}\}.$$

Resulta que no solamente el σ -álgebra progresivo es, en efecto, un σ -álgebra, sino que los procesos medibles con respecto a éste, son justamente los procesos progresivos.

Proposición 14. Dado un proceso estocástico X , se cumple que X es progresivo si y sólo si X es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)_{\mathcal{P}}$ -medible.

Tras este breve recorrido, podemos definir el espacio de los integrandos de la integral de Itô. Denotemos con $L^2_{\mathcal{P}}(\lambda_T \otimes \mathcal{P})$ al conjunto de clases de equivalencias en $L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \otimes \mathcal{P})$ que tienen algún representante *progresivamente* medible, donde λ_T es la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}([0, T])$.

Proposición 15. Dado $T \in (0, \infty]$, $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}), (\cdot, \cdot)_{L^2(\lambda \otimes \mathcal{P})})$ es un espacio de Hilbert.

Ahora bien, la integral de Itô tiene como integrador al movimiento Browniano y como integrandos a los procesos pertenecientes a $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$. Además, como veremos, se define a partir de un operador determinado que genera martingalas cuadrado integrables y acotadas en L^2

$$I : (L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}), (\cdot, \cdot)_{L^2(\lambda \otimes \mathcal{P})}) \rightarrow (\mathcal{M}_{0,T}^2, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{M}_0^2}).$$

De manera análoga a la construcción de la integral de Lebesgue, para definir la integral con respecto a un movimiento Browniano partimos definiéndola para una clase de integrandos *simples* contenida en $L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P})$ y luego extendemos tomando límites acordes a la estructura de nuestros espacios de Hilbert. Es decir, definiremos I para un subespacio denso de $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$ y luego lo extendemos a su clausura.

Definición 22. Llamaremos *procesos simples* a aquellos procesos estocásticos $(H)_{t \in [0, T]}$ con valores reales que puedan escribirse de la siguiente manera

$$H_t(\omega) = \sum_{j=1}^n \phi_{j-1}(\omega) 1_{[s_{j-1}, s_j)}(t),$$

para todo $\omega \in \Omega$, donde $n \in \mathbb{N}$, $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq T$ (siendo la última desigualdad estricta en caso $T = \infty$) y ϕ_j es una variable aleatoria acotada \mathcal{F}_{s_j} -medible, para $j = 0, 2, \dots, n$. A su vez, denotaremos como $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ a la clase de procesos simples con respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$.

Proposición 16. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ es un subespacio denso de $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$.

Tomamos un movimiento Browniano $(B_t)_{t \in [0, T]}$ y definimos la aplicación I en $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ de modo que para todo $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, con representación

$$H_s(\omega) = \sum_{j=1}^n \phi_{j-1}(\omega) 1_{[s_{j-1}, s_j)}(s),$$

$I(H)$ es tal que

$$I(H)_t := \sum_{j=1}^n \phi(s_{j-1})(B_{s_j \wedge t} - B_{s_{j-1} \wedge t}).$$

para todo $t \in [0, T]$.

Proposición 17. Dados $X, Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ así como $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple:

1. $(I(X))_{t \in [0, T]} \in (\mathcal{M}_0^2, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{M}_0^2})$
2. $I(aX + bY) = aI(X) + bI(Y)$.
3. $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t |X_s|^2 ds$
4. $\|I(X)\|_{\mathcal{M}_0^2} = \mathbb{E}[I(X)_T^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_s|^2 ds\right] = \|X\|_{L^2(\lambda_T \otimes \mathcal{P})}$.

La proposición anterior nos dice, en otras palabras, que I no sólo es un operador lineal, sino que es una isometría de $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ sobre su imagen en \mathcal{M}_0^2 . Luego, puesto que $\overline{\mathcal{E}_{\mathcal{T}}} = (L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$, entonces podemos extender I a $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$. Denotando igualmente por I a dicha extensión llegamos finalmente a la definición de la integral de Itô.

Definición 23. Para todo $X \in L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P})$ llamaremos *integral de Itô* de X al proceso $I(X)$. Además, para todo $t \in [0, T]$ usaremos la siguiente notación

$$\int_0^t X_s dB_s := I(X)_t.$$

Lo afirmado en la proposición 17 también se cumple para integral de Itô definida en $L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P})$. A su vez, tenemos

Proposición 18. Dados un tiempo de parada τ y un proceso $X \in L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P})$ se cumple

$$\int_0^{t \wedge \tau} X_s dB_s = \int_0^t X_s dB_{s \wedge \tau} = \int_0^t X_s 1_{[0, \tau)} dB_s.$$

Ahora bien, en el siguiente capítulo trabajaremos con un clase de procesos más general que la conformada por $L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P})$. Debido a ello, necesitamos extender la definición de la *integral de Itô*. Esto lo haremos con ayuda de cierto método de *localización*. Comencemos considerando la siguiente proposición:

Proposición 19. Dados un \mathcal{F}_t -tiempo de parada τ y dos procesos X e Y en $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$ tales que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo (ω, t) tal que $t \leq \tau(\omega)$, entonces para casi todo ω

$$\int_0^t X_s dB_s(\omega) = \int_0^t Y_s dB_s(\omega),$$

para todo $t \leq \tau(\omega)$.

Luego, definimos la clase de integrandos sobre la cual definiremos la *integral de Itô extendida*.

Definición 24. Diremos que $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ si existe una sucesión $(\tau_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{F}_t -tiempos de parada tal que $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ casi seguramente, y $X1_{[0, \tau_n]} \in (L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$ para todo $n \geq 0$. La sucesión $(\tau_n)_{n \geq 0}$ es llamada *sucesión de localización*.

Observación. Todo proceso progresivamente medible $(X_t)_{[0, T]}$ que cumpla

$$\int_0^t X_s^2 ds < \infty$$

para todo $t \in [0, T]$ pertenece a $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$. Para notarlo, basta verificar que la siguiente sucesión de tiempos de parada es, en realidad, una sucesión de localización

$$\tau_n := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ : \int_0^t X_s^2 ds \geq n \right\}.$$

Notemos que si tomamos $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$, escogemos una sucesión de localización $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y denotamos $X^n := X1_{[0, \tau_n]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo $t \in [0, T]$, $\int_0^t X_s^n dB_s$ es una integral de Itô bien definida. Más aún, como $X_t^n(\omega) = X_t^m(\omega)$ para todo $t \leq \tau_n \wedge \tau_m(\omega)$, entonces, por la proposición anterior tenemos, para casi todo ω ,

$$\int_0^t X_s^n(\omega) dB_s(\omega) = \int_0^t X_s^m(\omega) dB_s(\omega)$$

para todo $t \leq \tau_n \wedge \tau_m(\omega)$.

Dicho esto podemos definir la *integral de Itô extendida*.

Definición 25. Para todo $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$, definimos la integral de Itô *extendida* con respecto a X como el proceso estocástico continuo $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ tal que

$$Y_t = \int_0^t X_s 1_{[0, \tau_n]} dB_s,$$

donde n es cualquier entero positivo tal que $\tau_n \geq t$. Dicho proceso es denotado, de manera análoga a la integral de Itô, como $\int_0^t X_s dB_s := \int_0^t X_s 1_{[0, \tau_n]} dB_s$.

Así como los procesos en $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ pueden *localizarse* en procesos en $(L_{\mathcal{P}}^2(\lambda \otimes \mathcal{P}))$ para poder definir la integral de Itô extendida, la proposición 18 implica que también podemos localizar dicha integral extendida en martingalas contenidas

en $\mathcal{M}_{0,T}^2$. En otras palabras, si $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ y $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de localización de X , entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\int_0^t X_s dB_s \right)_{t \in [0, T]}^{\tau_n}$$

pertenece a $\mathcal{M}_{0,T}^2$.

Definición 26. Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ un proceso adaptado con trayectorias continuas y $M_0 = 0$ casi seguramente. Decimos que M es una *martingala local* si existe una sucesión de tiempos de parada $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

- $T_n \leq T_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$, casi seguramente.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, el proceso $M^{T_n} := (M_t^{T_n})_{t \geq 0}$ es una martingala.

Si cada M^{T_n} es una martingala continua cuadrado integrable, entonces diremos que M es una martingala local cuadrado integrable.

Observación. Las integrales de Itô extendidas son martingalas locales.

Observación. La proposición 10 sobre variación cuadrática de martingalas se aplica de manera casi idéntica al caso de martingalas locales cuadrado integrables, con la salvedad de que el proceso $\langle M \rangle$, en caso M sea una martingala local cuadrado integrable, es el único proceso creciente tal que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ es una martingala local.

Finalizamos esta subsección con un lema que nos será de utilidad en la prueba de la existencia de la curva que induce la SLE_k

Lema 7. Sean N_0 una constante y $(N_t)_{t \geq 0}$ una martingala local tal que

$$N_t = N_0 + \int_0^t A_s N_s dB_s.$$

Si para todo $t > 0$ existe una constante $c(t)$ tal que $|A_s| < c(t)$ para todo $s \in [0, t]$, entonces N es una martingala.

Demostración. Ver [Kem17]. □

2.3 El lema de Itô para procesos de Itô

Enunciamos ahora algunas fórmulas que nos permitirán simplificar los cálculos con integrales de Itô (extendidas y no extendidas).

Teorema 13. (Lema de Itô para el movimiento Browniano). Sea B un movimiento Browniano. Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $t \geq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \quad f'(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \quad \text{y} \quad f''(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

existen y son continuas. Entonces, casi seguramente se cumple

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) ds + \int_0^t f'(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(s, B_s) ds,$$

para todo $t \geq 0$.

Es decir, el lema de Itô nos permite escribir funciones de movimientos Brownianos, siempre que estas sean suficientemente regulares, como la suma de una integral de Itô (posiblemente extendida) y una integral de Riemann. Es decir, como una suma de un proceso de variación limitada y una martingala local. Entre sus aplicaciones se encuentra la demostración de siguiente teorema de caracterización de Lévy:

Teorema 14. Sea X una martingala local con $X_0 = 0$ casi seguramente. Si $\langle X \rangle_t = t$ para todo $t \in [0, \infty)$, entonces X es un movimiento Browniano.

Ahora bien, en el siguiente capítulo tendremos que trabajar con procesos compuestos por funciones aplicadas en procesos más generales que el movimiento Browniano. Debido a eso, consideramos la siguiente definición:

Definición 27. Llamaremos *procesos de Itô* a los procesos estocásticos $(X_t)_{t \in [0, T]}$ tales que para todo $t \in [0, T]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s,$$

donde $T \in [0, \infty]$, $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ y $b \in L^1([0, T, \lambda])$ (o $b \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ en caso $T = \infty$).

Observación. Notemos que la fórmula de Itô nos dice que las funciones suficientemente regulares aplicadas en un movimiento Browniano dan lugar a

un proceso de Itô. Además, notemos que todo proceso de Itô se encuentra compuesto por la suma de un proceso de variación limitada y una martingala local. Los procesos que pueden ser representados de esa manera son llamados *semimartingalas*.

Introducimos ahora la notación de diferenciales estocásticos que nos van a permitir abreviar el modo el que expresamos los procesos de Itô.

Definición 28. Sea $X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s$ un proceso de Itô, donde $b, \sigma \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$. Entonces, diremos que X tiene el diferencial estocástico

$$dX_t = bdt + \sigma dB_t$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Enunciemos ahora la fórmula del producto y el lema de Itô para procesos de Itô

Teorema 15. Sean $dX_1 = b_1dt + \sigma_1dB_t$ y $dX_2 = b_2dt + \sigma_2dB_t$ los diferenciales estocásticos de dos procesos de Itô, donde $b_i, \sigma_i \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ para $i = 1, 2$. Entonces,

$$d(X_1X_2) = X_2dX_1 + X_1dX_2 + \omega_1\sigma_2dt.$$

Teorema 16. (Lema de Itô para procesos de Itô). Sea X un proceso de Itô que escribiremos como

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s,$$

para todo t . Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como en el teorema anterior. Entonces, casi seguramente

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + f'(s, X_s)b(s) + \frac{1}{2}f''(s, X_s)\sigma^2(s) \right] ds + \int_0^t f'(s, X_s)\sigma(s)dB_s.$$

2.4 Cambio de tiempo

Teorema 17. Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala local de la forma

$$M_t = \int_0^t X_s dB_s,$$

donde $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$. Sea $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un conjunto de tiempos de parada tal que

$$\sigma_t = \inf\{r \geq 0 : \langle M \rangle_r \geq t\}.$$

Supongamos que, casi seguramente, $\langle M \rangle_t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, el proceso \tilde{B} definido como

$$\tilde{B}_t = M_{\sigma_t},$$

es un movimiento Browniano con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{\sigma_t})_{t \geq 0}$.

Observación. El teorema anterior tiene una versión más general que sostiene que toda martingala local puede escribirse como un movimiento Browniano tras un cambio de tiempo.

Proposición 20. Sean $(M_t)_{t \geq 0}$ y $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ una martingala local y una sucesión de tiempos de parada definidos, ambos, como en el teorema anterior y satisfaciendo las mismas condiciones. Sea $Y \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$. Entonces, el proceso $\tilde{Y}_t = Y_{\sigma_t}$ es \mathcal{F}_{σ_t} -adaptado, pertenece a $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ y satisface, casi seguramente,

$$\int_0^{\sigma_t} Y_s X_s dB_s = \int_0^t \tilde{Y}_r d\tilde{B}_r,$$

donde \tilde{B} es el movimiento Browniano generado tras el cambio de tiempo de M como en el teorema anterior.

Ahora bien, como veremos en el próximo capítulo, en ocasiones tendremos que trabajar en contextos donde la variación cuadrática de nuestra martingala local no tiende a infinito. Para lidiar con esa situación en el contexto particular en el que trabajaremos, basta con definir los procesos generados por un cambio tiempo solamente hasta un instante aleatorio determinado por su variación cuadrática.

Definición 29. Un proceso estocástico localmente definido es un par (X, τ) compuesto por un tiempo de parada τ y un mapa $X : \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty) : t \leq \tau(\omega)\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Las definiciones que hemos estado utilizando se aplican de manera coherente a los procesos estocásticos localmente definidos (Ver [Mil]).

Definición 30. Diremos que un proceso localmente definido (X, τ) es continuo casi seguramente si la aplicación $t \mapsto X_t$ es casi seguramente continua en $\{t \leq \tau\}$. A su vez, denotando $\Omega_t := \{\omega \in \Omega : t < \tau(\omega)\}$ diremos que (X, τ) es adaptado

si $X_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{F}_t -medible para todo t . Asimismo, diremos que (X, τ) es una martingala local *definida localmente* si existe una sucesión de tiempos de parada $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo casi seguramente a τ y tal que X^{τ_n} es una martingala para cada n .

Llegamos entonces a la siguiente proposición, tomada de [Kem17], que nos será de gran utilidad en la tercera sección del siguiente capítulo

Proposición 21. Sea A un proceso en $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$. Sean

$$S_t = \int_0^t X_s^2 ds, \quad \sigma(r) = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq r\}.$$

Sea $\tau^* := \lim_{t \rightarrow \infty} S_t$ y defina el proceso $\tilde{B}_{t \in [0, \tau^*)}$ tal que

$$\tilde{B}_t := \int_0^{\sigma(t)} A_s d\tilde{B}_s.$$

Entonces, $\tilde{B}_{t \in [0, \tau^*)}$ es un movimiento Browniano con respecto a $(\mathcal{F}_{\sigma(t)})_{t \in [0, \tau^*)}$. Además, para todo $X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ se cumple

$$\int_0^t X_{\sigma(s)} d\tilde{B}_s = \int_0^{\sigma(t)} X_s A_s dB_s.$$

A su vez, si $(Y_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Itô tal que $dY_t = H_t dt + X_t dB_s$, donde $H \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2$, entonces $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$, tal que $\tilde{Y}_t = Y_{\sigma(t)}$, es un proceso de Itô con respecto a $(\mathcal{F}_{\sigma(t)})_{t \in [0, \tau^*)}$ y \tilde{B} que satisface

$$d\tilde{Y}_t = \frac{H_t}{A_t^2} dt + \frac{X_t}{A_t} d\tilde{B}_t.$$

Capítulo 3

Evolución de Schramm Loewner

En el capítulo uno mostramos que existe una biyección entre el conjunto de funciones continuas reales $C([0, \infty), \mathbb{R})$ y el conjunto de cadenas de Loewner, que denotaremos por \mathcal{L} . Vimos que dicha biyección se encuentra mediada por el flujo de biholomorfismos, normalizados en infinito, que resuelve la ecuación de Loewner. En particular, demostramos que para toda W en $C([0, \infty), \mathbb{R})$ existe una única cadena $(K_t)_{t \geq 0}$ en \mathcal{L} definida como $K_t := \{z \in \mathbb{H} : \tau(z) \leq t\}$, donde $\tau(z)$ es el supremo del intervalo maximal de la solución de la ecuación de Loewner con respecto a W y con $g_0(z) = z$ como condición inicial. Ahora bien, si denotamos como

$$\mathcal{S} : C([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L} \tag{3.1}$$

a la aplicación que asigna a cada transformada de Loewner su respectiva cadena de Loewner llegamos a la siguiente definición:

Definición 31. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ y $(X_t)_{t \geq 0}$ un espacio de probabilidad filtrado y un proceso estocástico continuo y adaptado, respectivamente. Llamamos *cadena estocástica de Loewner* al proceso estocástico $\mathcal{S}((X_t)_{t \geq 0})$.

A su vez, dado que estamos interesados en aquellas curvas aleatorias que satisfacen cierta invarianza de escala y propiedad de Markov, resulta natural que la definición de la SLE contemple procesos estocásticos que posean propiedades acordes. Llegamos entonces a la definición de la *SLE*.

Definición 32. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, un espacio de probabilidad; $(B_t)_{t \geq 0}$, un movimiento Browniano; y $k > 0$. Consideremos el proceso $(W_t)_{t \geq 0} = (\sqrt{k}B_t)_{t \geq 0}$. Llamaremos evolución de Schramm-Loewner con parámetro k o SLE_k a la cadena estocástica de Loewner inducida por $(W_t)_{t \geq 0}$ a través de \mathcal{S} . En otras palabras, la SLE_k es la familia aleatoria de cadenas de Loewner $(K_t)_{t \geq 0}$ definida de modo que, para cada $t \geq 0$, $K_t := \{z \in \mathbb{H} : \tau(z) \leq t\}$, donde, para todo z en \mathbb{H} , $\tau(z)$ es el supremo del intervalo maximal de la solución de la ecuación estocástica de Loewner

$$\begin{aligned}\partial_t g_t(z) &= \frac{2}{g_t(z) - W_t} \\ g_0(z) &= z.\end{aligned}$$

Ahora, garantizar que la SLE_k está bien definida demanda demostrar que la aplicación \mathcal{S} que lleva funciones reales continuas a sus respectivas cadenas de Loewner es medible. Ese es el objetivo de la primera sección del capítulo. En la segunda sección, por su parte, se demuestra que la SLE satisface la propiedad de invarianza de escala, así como las propiedades de dominio de Markov débil y fuerte. Luego, en la tercera sección, se demuestra que toda SLE_k se encuentra casi seguramente inducida por una curva. Finalmente, cerramos el capítulo demostrando que una curva SLE_k es casi seguramente simple si y sólo si $k \in (0, 4]$. A lo largo del capítulo nos basamos en [Law05], [Kem17] y [BN].

3.1 La SLE_k está bien definida

Demostrar que la SLE_k está bien definida se reduce a garantizar que la función \mathcal{S} es medible. A su vez, podremos afirmar que \mathcal{S} es medible si demostramos que es continua. Naturalmente, demostrar la continuidad de \mathcal{S} demanda definir una topología en $C([0, \infty), \mathbb{R})$ y una en \mathcal{L} . En la presente sección definimos topologías adecuadas en $C([0, \infty), \mathbb{R})$ y en \mathcal{L} que garanticen la continuidad de la aplicación \mathcal{S} y, con ello, la buena definición de la SLE_k .

3.1.1 La topología de convergencia uniforme en compactos en \mathcal{L} .

Sea \mathcal{K} el conjunto de todos los *huls* en \mathbb{H} . Para definir una topología en \mathcal{L} comenzaremos definiendo una métrica $d_{\mathcal{K}}$ en \mathcal{K} de modo que \mathcal{L} pueda ser entendido como un subespacio del espacio de aplicaciones continuas $(C([0, \infty), (\mathcal{K}, d)), \tau)$ cuya topología τ viene dada por la convergencia uniforme en compactos. Los siguientes resultados los tomamos de [Mun14].

Definición 33. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Dados $f \in Y^X$, $C \subset X$ compacto, y $\epsilon > 0$ considere:

$$B_{C,\epsilon}(f) := \{g \in Y^X : \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in C\} < \epsilon\}.$$

Entonces, los conjuntos $B_{C,\epsilon}(f)$ definen una base de una topología τ sobre Y^X . Esta topología es llamada *topología de convergencia uniforme en compactos*.

A su vez, sobre el mismo contexto de la definición anterior tenemos el siguiente resultado:

Teorema 18. Una sucesión $f_n : X \rightarrow Y$ converge a f en la topología de convergencia en compactos si y sólo si para cada subespacio compacto C de X , la sucesión $f_n|_C$ converge uniformemente a $f|_C$.

Demostración. Ver [Mun14]. □

Cabe agregar que cuando nos restringimos a conjuntos de funciones continuas, la topología de convergencia en compactos no depende de la métrica del espacio de llegada. En otras palabras:

Teorema 19. Sea Y un espacio topológico metrizable y sea X un espacio topológico. Entonces, la topología de convergencia uniforme en compactos en $C(X, Y)$ no depende de la métrica de Y .

Demostración. Ver [Mun14]. □

Denotemos como $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ al espacio de funciones holomorfas definidas en \mathbb{H} con imagen en \mathbb{H} . Puesto que \mathbb{H} es un espacio métrico, podemos dotar a $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ de la topología de convergencia uniforme en compactos. Ahora bien, si este espacio fuera metrizable, podríamos escoger una métrica cualquiera que genere la

topología de convergencia uniforme en compactos en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$, digamos d , y definir una métrica en \mathcal{K} , digamos $d_{\mathcal{K}}$ de modo que

$$d_{\mathcal{K}}(K_1, K_2) = d(g_{K_1}^{-1}, g_{K_2}^{-1}), \quad (3.2)$$

para cualesquiera K_1 y K_2 en \mathcal{K} . Con ello podríamos definir una topología de convergencia uniforme en compactos sobre $C([0, \infty), (\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}}))$.

Proposición 22. El espacio $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ dotado de la topología de convergencia uniforme en compactos es metrizable.

Demostración. Comenzamos definiendo una métrica en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$. Dicha métrica la construiremos como el supremo de un conjunto de métricas adecuadas. Denotemos, $C_n := \overline{D_n(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > \frac{1}{n}\}}$, para todo n en \mathbb{N} mayor que 1, mientras que para $n = 1$ definimos $C_1 := \overline{\mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > \frac{1}{2}\}}$. Luego definimos

$$\rho_n(f, g) := \sup_{x \in C_n} |f(x) - g(x)|,$$

para cualesquiera f y g en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$. Fijamos n en \mathbb{N} . Como $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ está compuesto de funciones holomorfas definidas en \mathbb{H} y \mathbb{H} es abierto y conexo, el principio de identidad nos garantiza que $\rho_n(f, g) = 0$ si y sólo si $f = g$. Asimismo, es claro que ρ_n es simétrica y satisface la desigualdad triangular. A su vez, como toda función contenida en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ es continua, entonces $\sup_{x \in C_n} |f(x)| < \infty$, para todo f en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$, ya que C_n es compacto. En consecuencia, para todo f y g en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$, $\rho_n(f, g) < \infty$. Es suma, para todo n en \mathbb{N} , ρ_n es una métrica en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Ahora, normalizamos $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Para todo n en \mathbb{N} consideramos

$$\tilde{\rho}_n(f, g) = \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)},$$

y definimos la métrica buscada como

$$d(f, g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\tilde{\rho}_n(f, g)}{2^n} \right\}, \quad (3.3)$$

para cualesquiera f y g en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Queda mostrar que d induce la topología de convergencia uniforme en compactos en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Fijemos $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$. Tomemos un compacto $C \subset \mathbb{H}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset C_n$. Luego, dado $\epsilon \in (0, 1)$ notemos que

$$\begin{aligned} \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : \sup_{z \in C} |f(z) - g(z)| < \epsilon\} &\supset \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : \rho_n(f, g) < \epsilon\} \\ &\supset \left\{ g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : \tilde{\rho}_n(f, g) < \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right\} \\ &\supset \left\{ g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : d(f, g) < 2^{-n} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Por ende, la topología de convergencia uniforme en compactos se encuentra contenida en la topología inducida por d .

Tomamos ahora $\epsilon \in (0, 1)$. Sea $B_\epsilon(f) := \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : d(f, g) < \epsilon\}$. Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \epsilon$. Luego tomamos $h \in \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) : \sup_{z \in C_n} |f(z) - g(z)| < 2^{-n}\}$. Tomemos $m \geq n$. Entonces,

$$2^{-m} \tilde{\rho}_m(f, h) \leq 2^{-m} < 2^{-n} < \epsilon.$$

Asimismo, tomemos $m < n$ y notemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m(f, h) &< \tilde{\rho}_n(f, h) \\ &< \rho_n(f, h) \\ &= \sup_{z \in C_n} |f(z) - h(z)| < 2^{-n} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(f, h) < \epsilon$, lo cual implica que la topología inducida por la métrica d se encuentra contenida en la topología de la convergencia uniforme en compactos. En suma, la métrica d induce la topología de convergencia uniforme en compactos. \square

Gracias a la proposición podemos definir el espacio $C([0, \infty), (\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}}))$, con la topología de convergencia en compactos, donde $d_{\mathcal{K}}$ es la métrica definida en (3.2) y d es una métrica cualquiera que induce la topología de convergencia en compactos en $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Proposición 23. \mathcal{L} está contenido en $(C([0, \infty), (\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}})))$.

Demostración. Fijamos una cadena de Loewner $(K_t)_{t \geq 0}$. Sea $(f_t)_{t \geq 0}$ el flujo de Loewner inverso asociado a $(K_t)_{t \geq 0}$. Fijamos un compacto $C \subset \mathbb{H}$ y un $\epsilon > 0$. Tomamos $t \geq 0$. Como f_t es continua, entonces es uniformemente continua en

C . Por ende, podemos escoger $\delta > 0$ tal que $|f_t(z) - f_t(w)| < \epsilon$, siempre que $|z - w| < \delta$. A su vez, como $(K_t)_{t \geq 0}$ es una cadena Loewner, satisface la propiedad de crecimiento local. Por ende, podemos escoger $h_0 > 0$ tal que, para todo h en $(0, h_0)$, se cumple $Rad(\tilde{K}_{t,h}) < \frac{\delta}{5}$, donde $\tilde{K}_{t,h} = g_t(K_{t+h} \setminus K_t)$. Ahora, fijamos h en $(0, h_0)$ y denotamos por $\tilde{g}_{t,h}$ al único biholomorfismo, normalizado en infinito, de $\mathbb{H} \setminus \tilde{K}_{t,h}$ sobre \mathbb{H} . Por el corolario 2 del capítulo 1, sabemos que $\tilde{g}_{t,h} \circ g_t(z) = g_{t+h}(z)$ para todo z en H_{t+h} . Luego, $f_{t+h} \equiv f_t \circ \tilde{f}_{t,h}$, donde $\tilde{f}_{t,h} \equiv \tilde{g}_{t,h}^{-1}$. Luego, tomamos $z \in C$ arbitrario, escogemos $w = \tilde{f}_{t,h}(z)$, y notamos, gracias a la proposición 3 del capítulo 1, que

$$|\tilde{g}_{t,h}(w) - w| \leq 5Rad(\tilde{K}_{t,h}) < \delta.$$

Por lo tanto,

$$|f_{t+h}(z) - f_t(z)| = |f_t(\tilde{f}_{t,h}(z)) - f_t(z)| = |f_t(w) - f_t(\tilde{g}_{t,h}(w))| < \epsilon.$$

□

En suma, la topología que definimos en \mathcal{L} es la topología de convergencia uniforme heredada de $C([0, \infty), (\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}}))$. Además, si para cada $\epsilon > 0$, $(K_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}$ y compacto $C \subset [0, \infty)$ definimos

$$B_{C,\epsilon}((K_t)_{t \geq 0}) := \{(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L} : \sup_{t \in C} d_{\mathcal{K}}(K_t, M_t) < \epsilon\}, \quad (3.4)$$

entonces la familia

$$\{B_{C,\epsilon}((K_t)_{t \geq 0}) \subset \mathcal{L} : (K_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}, \epsilon > 0 \text{ y } C \subset [0, \infty) \text{ compacto}\} \quad (3.5)$$

constituye una base para la topología de \mathcal{L} . Por su parte, la topología que definimos sobre $C([0, \infty), \mathbb{R})$ también es la topología de convergencia uniforme en compactos.

3.1.2 Continuidad de la aplicación $\mathcal{S} : C([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}$.

Para demostrar que la SLE está bien definida recurrimos nuevamente a la ecuación reversa de Loewner. Veremos que podemos usar la solución de dicha ecuación para poder observar y manipular la variación del flujo inverso de Loewner. La ventaja

de emplear el flujo reverso radica en que contamos con una expresión clara de su variación en el tiempo, la cual, además, incorpora a la transformada de Loewner permitiéndonos controlar la variación de la primera a partir de la segunda. Esta estrategia la encontramos en [Kem17] y es, en particular, de dicha fuente que tomamos los siguientes dos lemas y la idea de sus demostraciones.

Lema 8. Sea W una función continua real con dominio $[0, \infty)$. Sea $(f_t)_{t \geq 0}$ el flujo inverso de Loewner asociado a W . Dado $T > 0$ definimos la función $\tilde{V}(t) = W(T - t)$ para todo t en $[0, T]$. Sea $(h_t)_{t \in [0, T]}$ el flujo reverso de Loewner asociado a \tilde{V} . Entonces, $f_T = h_T$.

Demostración. Tomemos $z \in \mathbb{H}$. Sea $w = h_T(z)$. En la demostración del teorema 2 de Loewner mostramos que, para todo t en $[0, T]$,

$$h_{T-t}(z) = g_t(w),$$

donde $(g_t)_{t \geq 0}$ es el flujo de Loewner asociado a W . Luego, $g_T(w) = z$; lo cual implica que $f_T(z) = w = h_T(z)$. \square

Lema 9. Dados $T > 0$ y $\delta > 0$ existe una constante $C > 0$ que satisface lo siguiente: Si $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$ y $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ son dos funciones continuas y $(h_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(h_2(t))_{t \in [0, T]}$ son sus respectivos flujos de Loewner, entonces, para todo t en $[0, T]$,

$$|h_1(t, z_1) - h_2(t, z_2)| \leq C(\|W_1 - W_2\|_{\infty, [0, T]} + |z_1 - z_2|), \quad (3.6)$$

para cualesquiera z_1 y z_2 tales que $\text{Im}(z_1), \text{Im}(z_2) > \delta$.

Demostración. Tomamos $T > 0$ y $\delta > 0$. Sean $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$ y $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ funciones continuas y $(h_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(h_2(t))_{t \in [0, T]}$ sus respectivos flujos reversos de Loewner. Fijamos z_1 y z_2 en \mathbb{H} de modo que $\text{Im}(z_1), \text{Im}(z_2) > \delta$. Definimos la aplicación

$$\varphi(t) = h_1(t, z_1) - h_2(t, z_2) \quad (3.7)$$

para todo $t \in [0, T]$. Luego, como h_1 y h_2 son flujos reversos de Loewner:

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t) &= \frac{-2}{h_1(t, z_1) - W_1(t)} + \frac{2}{h_2(t, z_2) - W_2(t)} \\ &= 2 \frac{(h_1(t, z_1) - h_2(t, z_2)) + (W_2(t) - W_1(t))}{(h_1(t, z_1) - W_1(t))(h_2(t, z_2) - W_2(t))}. \end{aligned}$$

Sean $H : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ y $A : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $t \in [0, T]$,
 $H(t) = \frac{2}{(h_1(t, z_1) - W_1(t))(h_2(t, z_2) - W_2(t))}$ y $A(t) = W_2(t) - W_1(t)$. Entonces, podemos escribir

$$\partial_t \varphi(t) = H(t)\varphi(t) - H(t)A(t). \quad (3.8)$$

Luego, usando un factor integrante obtenemos
 $(e^{-\int_0^t H(s)ds} \varphi(t))' = -e^{-\int_0^t H(s)ds} H(t)A(t)$. Entonces,

$$e^{-\int_0^t H(s)ds} \varphi(t) - \varphi(0) = - \int_0^t e^{-\int_0^s H(r)dr} H(s)A(s)ds \quad (3.9)$$

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t H(s)ds} \varphi(0) - \int_0^t e^{\int_s^t H(r)dr} H(s)A(s)ds. \quad (3.10)$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq e^{\int_0^t |H(s)|ds} |\varphi(0)| + \|A\|_{\infty, [0, T]} \int_0^t e^{\int_s^t H(r)dr} H(s)ds \\ &\leq e^{\int_0^t |H(s)|ds} |\varphi(0)| + \|A\|_{\infty, [0, T]} \left(e^{\int_0^t |H(s)|ds} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ahora, por la definición de H y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t |H(s)|ds &= \int_0^t \frac{2}{|h_1(s, z_1) - W_1(s)| |h_2(s, z_2) - W_2(s)|} ds \\ &\leq \left(\int_0^t \frac{2}{|h_1(s, z_1) - W_1(s)|^2} ds \int_0^t \frac{2}{|h_2(s, z_2) - W_2(s)|^2} ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sea $k \in \{1, 2\}$. Notemos que

$$\operatorname{Im}(\partial_t h_k(t, z_k)) = \frac{2\operatorname{Im}(h_k(t, z_k))}{|h_k(t, z_k) - W_k(t)|^2} \leq \frac{2}{\operatorname{Im}(h_k(t, z_k))}, \quad (3.13)$$

Entonces, para todo t en $[0, T]$,

$$\operatorname{Im}(h_k(t, z_k)) \leq \sqrt{y^2 + 4t},$$

donde $y = \max\{\operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Im}(z_2)\}$. Luego,

$$\log \frac{\operatorname{Im}(h_k(t, z_k))}{y} \leq \log \frac{\sqrt{y^2 + 4t}}{y}.$$

Ahora bien, como $\partial_t \log \operatorname{Im}(h_k(t, z_k)) = \frac{2}{|h_k(t, z_k) - W_k(t)|^2}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{2}{|h_k(s, z_k) - W_k(s)|^2} ds &= \log \frac{\operatorname{Im}(h_k(t, z_k))}{\operatorname{Im}(z_k)} \\ &\leq \log \frac{\sqrt{y^2 + 4t}}{y} \\ &\leq \log \frac{\sqrt{\delta^2 + 4t}}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En suma, de (3.11), (3.12) y (3.14) se sigue:

$$|\varphi(t)| \leq \frac{\sqrt{\delta^2 + 4t}}{\delta^2} |\varphi(0)| + \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4t}}{\delta^2} - 1 \right) \|A\|_{\infty, [0, T]}.$$

Finalmente, la conclusión de sigue de la definición de φ y A . \square

Demostremos la continuidad de la aplicación \mathcal{S} .

Teorema 20. La aplicación $\mathcal{S} : C([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}$ es continua.

Demostración. Tomemos una sucesión $(W^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C([0, \infty), \mathbb{R})$ y una función continua real W con dominio $[0, \infty)$. Suponemos que $(W^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a W . Sean $(K_t)_{t \geq 0} = \mathcal{S}(W)$ y $(K_t^n)_{t \geq 0} = \mathcal{S}(W^n)$, para cada n en \mathbb{N} . Fijemos $T > 0$. Queremos mostrar que $((K_t^n)_{t \in [0, T]})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $(K_t)_{t \in [0, T]}$. En otras palabras, queremos probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} d_{\mathcal{K}}(K_t^n, K_t) = 0. \quad (3.15)$$

Para cada n en \mathbb{N} , sea $(f_t^n)_{t \geq 0}$ el flujo inverso de Loewner asociado a $(K_t^n)_{t \geq 0}$. Asimismo, denotemos por $(f_t)_{t \geq 0}$ al flujo inverso de Loewner asociado a $(K_t)_{t \geq 0}$. Por el modo en el que construimos $d_{\mathcal{K}}$, es claro que para mostrar (3.15), basta con garantizar que para todo compacto C en \mathbb{H} se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in C} |f_t^n(z) - f_t(z)| = 0.$$

Fijamos, entonces, un compacto C en \mathbb{H} y escogemos $\delta = \inf_{z \in C} \operatorname{Im}(z)$. Fijamos, a su vez, $t \in [0, T]$ y definimos

$$\begin{aligned}\tilde{V}^n : [0, t] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto W^n(t - s),\end{aligned}$$

para todo natural n . Dado n en \mathbb{N} , sea $(h_s^n)_{s \in [0, t]}$ el flujo reverso de Loewner asociado a \tilde{V}^n . Asimismo, definimos $\tilde{V}(s) = W(t - s)$ para todo s en $[0, t]$; y denotamos como $(h_s)_{s \in [0, t]}$ al flujo reverso de Loewner asociado a \tilde{V} . Luego, gracias a los lemas 8 y 9 podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\sup_{z \in C} |f_t^n(z) - f_t(z)| &= \sup_{z \in C} |h_t^n(z) - h_t(z)| \\ &\leq c_{\delta, T} \sup_{s \in [0, T]} |W^n(t) - W(t)|,\end{aligned}$$

donde $c_{\delta, T}$ es una constante que depende únicamente de δ y de T . Por ende, para todo n ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in C} |f_t^n(z) - f_t(z)| \leq c_{\delta, T} \sup_{s \in [0, T]} |W^n(t) - W(t)|.$$

Ahora bien, dado que hemos asumido que $(W^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a W , entonces obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in C} |f_t^n(z) - f_t(z)| = 0.$$

Por lo tanto, \mathcal{S} es continua. \square

La proposición anterior garantiza la buena definición de las SLE_k . Por su parte, los mapas que llevan funciones continuas a los respectivos flujos de Loewner y flujos reversos de Loewner también son continuos, bajo las topologías inducidas por la convergencia de Carathéodory y la convergencia uniforme en compactos [Law05], [Kem17]. Debido a ello, llegamos a las siguientes definiciones:

Definición 34. Sean $k > 0$ y $(K)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Luego, llamaremos flujo estocástico de Loewner a la familia *aleatoria* de biholomorfismos normalizados asociada a $(K_t)_{t \geq 0}$. De manera análoga definimos el *flujo inverso estocástico de Loewner* y el *flujo reverso estocástico de Loewner*. A su vez, en general denotaremos a estas familias aleatorias de biholomorfismos como $(g_t)_{t \geq 0}$, $(f_t)_{t \geq 0}$ y $(h_t)_{t \geq 0}$, respectivamente.

Observación. Sabemos que si $(B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano, entonces $B_0 = 0$. Esto implica que para todo $k > 0$, si $(K_t)_{t \geq 0}$ es una SLE_k , entonces $K_0 = 0$.

3.2 Invarianza de escala, propiedad de Markov y propiedad fuerte de Markov de las SLE_k

En la presente sección demostramos 3 propiedades fundamentales de las SLE_k . Como veremos, la SLE_k hereda dichas propiedades de su transformada estocástica: el movimiento Browniano.

Teorema 21. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado y $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k con respecto a $(W_t)_{t \geq 0} = (\sqrt{k}B_t)_{t \geq 0}$. Entonces, $(K_t)_{t \geq 0}$ satisface las siguientes propiedades:

1. (*Invarianza de escala*). Para todo $\lambda > 0$, $(\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0}$ y $(K_t)_{t \geq 0}$ tienen la misma distribución.
2. (*Propiedad de dominio de Markov*). Dado $T \geq 0$, sea $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0} := \overline{(g_T(K_{T+s} \setminus K_T) - W_T)_{s \geq 0}}$. Entonces, $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0}$ es independiente de \mathcal{F}_T ; y $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} (K_s)_{s \geq 0}$.
3. (*Propiedad de dominio de Markov fuerte*). Sea \mathcal{T} cualquier tiempo de parada con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, pero finito, casi seguramente. Consideremos

$$(\tilde{K}_{\mathcal{T},s})_{s \geq 0} := \overline{(g_{\mathcal{T}}(K_{\mathcal{T}+s} \setminus K_{\mathcal{T}}) - W_{\mathcal{T}})_{s \geq 0}}.$$

Entonces, $(\tilde{K}_{\mathcal{T},s})_{s \geq 0}$ es independiente de $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$; y $(\tilde{K}_{\mathcal{T},s})_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} (K_s)_{s \geq 0}$.

Demostración. Fijemos $\lambda > 0$. Gracias a la propiedad de invarianza de escala del movimiento Browniano podemos afirmar que $\lambda(W_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0}$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ tienen la misma distribución. Por ende, $\mathcal{S}((W_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0})$ y $\mathcal{S}((W_t)_{t \geq 0})$ también se encuentran igualmente distribuidas. Ahora bien, recordemos que $\mathcal{S}((W_t)_{t \geq 0})$ es la SLE_k cuyo flujo estocástico resuelve, para todo $z \in \mathbb{H}$ y para todo $t \leq \tau(z)$,

$$\begin{aligned} \partial_t g_t(z) &= \frac{2}{g_t(z) - W_t}, \\ g_0(z) &= z. \end{aligned}$$

Fijemos z en \mathbb{H} . Gracias al corolario 1 del capítulo 1 tenemos que

$$g_{\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}}}(z) = \lambda g_{K_{\frac{t}{\lambda^2}}}\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \lambda g_{\frac{t}{\lambda^2}}\left(\frac{z}{\lambda}\right),$$

para todo $t < \tau(z)$. Luego, fijando una trayectoria continua cualquiera de $(W_t)_{t \geq 0}$ tenemos, por el teorema 1 de Loewner,

$$\begin{aligned} \partial_t g_{\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}}}(z) &= \partial_t \lambda g_{\frac{t}{\lambda^2}}\left(\frac{z}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{2}{g_{\frac{t}{\lambda^2}}\left(\frac{z}{\lambda}\right) - W_{\frac{t}{\lambda^2}}} \\ &= \frac{2}{g_{\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}}}(z) - \lambda W_{\frac{t}{\lambda^2}}}. \end{aligned}$$

Por ende, $\mathcal{S}((\lambda W_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0}) = (\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0}$. Por lo tanto, $(K_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (\lambda K_{\frac{t}{\lambda^2}})_{t \geq 0}$.

Fijemos ahora $T > 0$. Por la propiedad de Markov del movimiento Browniano sabemos que $(W_{T+s} - W_T)_{s \geq 0}$ es un movimiento Browniano independiente de (F_T) . Por ende, $\mathcal{S}((W_{T+s} - W_T)_{s \geq 0})$ también es independiente de (F_T) , y $\mathcal{S}((W_{T+s} - W_T)_{s \geq 0}) \stackrel{d}{=} \mathcal{S}((W_t)_{t \geq 0})$. Sea $(\tilde{g}_{T,s})_{s \geq 0}$ tal que

$$\tilde{g}_{T,s}(z) = g_{T+s} \circ g_T^{-1}(z + W_T) - W_T$$

. Gracias a los corolarios 1 y 2 del capítulo 1 podemos afirmar que $(\tilde{g}_{T,s})_{s \geq 0}$ es el flujo estocástico asociado a $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0}$. Ahora bien, fijamos z y una trayectoria continua cualquiera de $(W_t)_{t \geq 0}$. Entonces, empleando el teorema 1 de Loewner obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_s \tilde{g}_{T,s}(z) &= \partial_s g_{T+s} \circ g_T^{-1}(z + W_T) - W_T \\ &= \frac{2}{g_{T+s} \circ g_T^{-1}(z + W_T) - W_{T+s}} \\ &= \frac{2}{g_{T+s} \circ g_T^{-1}(z + W_T) - W_T - (W_{T+s} - W_T)} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_{T,s}(z) - (W_{T+s} - W_T)}. \end{aligned}$$

Por ende, $\mathcal{S}((W_{T+s} - W_T)_{s \geq 0}) = (\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0}$. Por lo tanto, $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0}$ es independiente de \mathcal{F}_T ; y $(\tilde{K}_{T,s})_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} (K_s)_{s \geq 0}$.

El tercer ítem se demuestra de manera análoga al segundo, con la salvedad de que en él se emplea la propiedad de Markov fuerte del movimiento Browniano. \square

3.3 Existencia de la curva que induce la SLE_k

El objetivo de la presente sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 22. Si $k \neq 8$, entonces la SLE_k es, casi seguramente, inducida por una curva aleatoria.

Para ello la hemos dividido en tres partes. En la primera demostramos un resultado para el caso determinístico que nos será de gran utilidad para simplificar el problema. Luego, con ayuda del resultado presentado en la primera sección, mostramos que el problema puede reducirse a verificar que la derivada del proceso estocástico *reverso* de Loewner puede acotarse de cierta manera adecuada. Finalmente, en la tercera sección construimos procesos de Itô adecuados que nos permitan, mediante el uso del cálculo estocástico, garantizar la estimativa deseada sobre el primer momento del flujo reverso de Loewner. A lo largo de esta sección desarrollamos, fundamentalmente, las ideas y pruebas de [Law05] y [Kem17]. La prueba para el caso de la SLE_8 puede encontrarse en [LSW04].

3.3.1 Condiciones para la existencia de una curva de Loewner

Definición 35. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Loewner. Sea $(g_t)_{t \geq 0}$ el flujo de Loewner asociado a $(K_t)_{t \geq 0}$. Diremos que $(K_t)_{t \geq 0}$ es generada por una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ si para todo $t \in [0, \infty)$ el dominio de g_t es la componente no acotada de $\mathbb{H} \setminus \gamma((0, t])$.

Si bien no es cierto que toda cadena de Loewner esté inducida por una curva (Ver [Law05], p104), cuando pasamos al contexto de las SLE sí podemos afirmar, al menos casi seguramente, que toda SLE_k es inducida por una curva aleatoria. A diferencia del caso determinístico, las propiedades que la SLE_k hereda del movimiento *Browniano* permiten relajar las condiciones suficientes que garantizan que una cadena de Loewner se encuentre inducida por una curva. Como veremos en la siguiente sección, la estrategia de la demostración de la existencia de una curva SLE_k para toda SLE_k se plantea a partir de un resultado que se muestra en la presente sección para el caso determinístico.

Comenzamos enunciando el siguiente teorema que brinda una condición suficiente para que una cadena de Loewner esté inducida por una curva.

Teorema 23. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Loewner. Sean $(g_t)_{t \geq 0}$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ un flujo y la transformada de $(K_t)_{t \geq 0}$. Sean $(f_t)_{t \geq 0}$ y $(\tilde{f}_t)_{t \geq 0}$ tales que para todo $t \geq 0$ y para todo $z \in \mathbb{H}$, $f_t(z) = g_t^{-1}(z)$ y $\tilde{f}_t(z) = f_t(z + W_t)$. Consideremos la siguiente función continua

$$F: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, y) \mapsto \tilde{f}_t(iy).$$

Si F puede extenderse continuamente a $[0, \infty) \times [0, \infty)$, entonces $(K_t)_{t \geq 0}$ es inducido por la curva γ , que se define como $\gamma(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \tilde{f}_t(iy)$, para todo $t \geq 0$.

En aras de entender este teorema delineamos brevemente un contexto que nos permita vincular con precisión la condición pedida sobre la función F y la curva γ que induce a la cadena de Loewner. Fijamos un flujo de Loewner $(g_t)_{t \geq 0}$ y sus respectivas transformada y cadena de hulls $(W_t)_{t \geq 0}, (K_t)_{t \geq 0}$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $K_0 = 0$. Para todo $t \geq 0$ denotemos:

$$J_t = K_t \setminus \bigcup_{s < t} K_s.$$

Definición 36. Dado $z \in \mathbb{H}$, diremos que z es un punto t -accesible si $z \in J_t$ y existe una curva $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\beta(0) = z$ y $\beta((0, 1]) \subset H_t$.

Notemos que si las condiciones del teorema se cumplen, entonces para todo $t \geq 0$ se cumple que $\gamma(t)$ es un punto t -accesible. En consecuencia, el teorema se sigue de la siguiente proposición:

Proposición 24. Para todo $t \geq 0$ existe a lo más un punto t -accesible. Además, $\partial H_t \cap \mathbb{H}$ está contenido en $\overline{\bigcup_{s < t} T_s}$, donde $T_s := \{z \in \mathbb{H} : z \text{ es } s\text{-accesible}\}$.

La prueba de la proposición puede encontrarse en [Law05] y pasa por encontrar algunas estimativas adecuadas con ayuda de la *medida armónica*.

Finalizamos el capítulo demostrando una condición que nos permite garantizar una extensión continua de la función F al conjunto $[0, 1]^2$. Como veremos en la siguiente sección, la propiedad de invarianza de escala de la SLE_k permite que baste con garantizar la continuidad de F en dicho conjunto para demostrar la existencia de la curva SLE_k . Para esto nos apoyamos en los siguientes dos lemas tomados de [Kem17].

Lema 10. (Teorema de distorsión de Koebe en \mathbb{H}) Existe una constante $C > 0$ tal que si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es un biholomorfismo sobre su imagen, entonces

$$C^{-1}|f'(iy)| \leq |f'(isy)| \leq C|f'(iy)| \quad (3.16)$$

$$C^{-1}(1+x^2)^{-3}|f'(iy)| \leq |f'(xy+iy)| \leq C(1+x^2)^3|f'(iy)|, \quad (3.17)$$

para cualquiera $s \in [\frac{1}{2}, 2]$ e $y > 0$.

Demostración. Ver [Kem17] □

Lema 11. Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier flujo de Loewner $(g_t)_{t \geq 0}$ y para cualesquiera $x + iy \in \mathbb{H}$, $t \in [0, \infty]$ y $s \in [0, y^2]$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$C^{-1}|f'_t(x+iy)| \leq |f'_{t+s}(x+iy)| \leq C|f'_t(x+iy)| \quad (3.18)$$

$$|f_{t+s}(x+iy) - f_t(x+iy)| \leq Cy^2|f'_t(x+iy)|, \quad (3.19)$$

donde $f_t = g_t^{-1}$.

Demostración. Ver [Kem17] □

Enunciamos y demostramos el teorema anunciado.

Teorema 24. Sean $(W_t)_{t \geq 0}$ y $(g_t)_{t \geq 0}$ una función continua y el flujo de Loewner asociado a ella, respectivamente. Sea $(f_t)_{t \geq 0}$ el flujo inverso de Loewner asociado a $(g_t)_{t \geq 0}$. Suponemos que se cumple lo siguiente:

- Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $s \in (0, 1-t] \cap (0, \frac{1}{4}]$

$$|W_{t+s} - W_t| \leq C\sqrt{s \log\left(\frac{1}{s}\right)}. \quad (3.20)$$

- Existen $\theta, C > 0$ tales que, para todo $t \in \{\frac{j}{2^n} : j = 1, \dots, 2^n\}$,

$$|f'_t(2^n i + W_t)| \leq C2^{n(1-\theta)}, \quad (3.21)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, la aplicación

$$V(t, y) = \begin{cases} f_t(iy + W_t) & (t, y) \in [0, 1] \times (0, 1] \\ \lim_{y \rightarrow 0} f_t(iy + W_t) & (t, y) \in [0, 1] \times \{0\} \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Puesto que la aplicación V es claramente continua en $[0, 1] \times (0, 1]$, la tarea consiste en mostrar que el límite $\lim_{y \rightarrow 0} f_t(iy + W_t)$ existe para todo $t \in [0, 1]$ y que la aplicación $t \mapsto \lim_{y \rightarrow 0} f_t(iy + W_t)$ es continua en $[0, 1]$. En consecuencia, basta con mostrar que

$$\lim_{y_1, y_2 \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, 1]} |V(t, y_1) - V(t, y_2)| = 0.$$

Fijamos $y \in (0, \frac{1}{2})$ y $t \in [0, 1]$. Sean $n = \lceil \log_2(\frac{1}{y}) \rceil$ y $t_0 = \lfloor t2^{2n} \rfloor 2^{-2n}$. Luego,

$$2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \quad (3.22)$$

$$t_0 \leq t < t_0 + 2^{-2n}. \quad (3.23)$$

Como $t - t_0 \leq 2^{-2n} \leq y$, entonces, gracias al lema 11, podemos escoger $C_1 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} |f'_t(iy + W_t)| &= |f'_{t_0+(t-t_0)}(iy + W_t)| \\ &\leq C_1 |f'_{t_0}(iy + W_t)|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definamos ahora $\tilde{f}_{t_0}(z) := f_{t_0}(z + W_{t_0})$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Puesto que \tilde{f}_{t_0} es claramente un biholomorfismo sobre su imagen, empleamos el lema 10 y obtenemos

$$\begin{aligned} |f'_{t_0}(iy + W_t)| &= |f'_{t_0}(iy + (W_t - W_{t_0}) + W_{t_0})| \\ &= |\tilde{f}'_{t_0}(W_t - W_{t_0} + iy)| \\ &\leq C_2 \left(1 + \left(\frac{W_t - W_{t_0}}{y} \right)^2 \right)^3 |\tilde{f}'_{t_0}(iy)| \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde C_2 es como en el lema.

Ahora escogemos $y_0 = 2^{-n}$. Como $\frac{y_0}{y} \in [\frac{1}{2}, 2]$, entonces podemos emplear nuevamente el lema 10 para obtener

$$C_3^{-1}|\tilde{f}'_{t_0}(iy)| \leq |\tilde{f}_{t_0}(iy_0)| \leq C_3|\tilde{f}'_{t_0}(iy_0)|,$$

donde C_3 es la constante positiva del lema. Entonces, de (3.25) y de la definición de \tilde{f}_{t_0} se sigue que

$$\begin{aligned} |f'_{t_0}(iy + W_t)| &\leq C_3 C_2 \left(1 + \left(\frac{W_t - W_{t_0}}{y}\right)^2\right)^3 |\tilde{f}'_{t_0}(iy_0)| \\ &\leq C_3 C_2 \left(1 + \left(\frac{W_t - W_{t_0}}{y_0}\right)^2\right)^3 |\tilde{f}'_{t_0}(iy_0)| \\ &= C_3 C_2 \left(1 + \left(\frac{W_t - W_{t_0}}{y_0}\right)^2\right)^3 |f'_{t_0}(iy_0 + W_{t_0})| \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puesto que t_0 es diádico y $y_0 = 2^{-n}$, utilizamos las hipótesis y obtenemos

$$C_2 C_3 \left(1 + \left(\frac{W_t - W_{t_0}}{y_0}\right)^2\right)^3 |f'_{t_0}(iy_0 + W_{t_0})| \leq C C_2 C_3 \left(1 + \frac{c(t - t_0) \log\left(\frac{1}{t - t_0}\right)}{y_0^2}\right)^3 2^{n(1-\theta)}.$$

Donde C es tomada según (3.21) y c es tomada según (3.20). Para simplificar la notación escribimos $C := C C_2 C_3$. Ahora bien, de la definición de n , de (3.22), (3.23) y de la definición de y_0 obtenemos

$$\begin{aligned} C \left(1 + \frac{c(t - t_0) \log\left(\frac{1}{t - t_0}\right)}{y_0^2}\right)^3 2^{n(1-\theta)} &\leq C \left(1 + \frac{c y_0^2 \log\left(\frac{1}{y_0^2}\right)}{y_0^2}\right)^3 2^{n(1-\theta)} \\ &\leq C(1 + c \log_2(y_0^{-2}))^3 2^{n(1-\theta)} \\ &= C(1 + c 2n)^3 2^{n(1-\theta)} \\ &\leq \tilde{C}_1 n^3 2^{n(1-\theta)} \\ &\leq \tilde{C}_2 \log_2^3\left(\frac{1}{y}\right) 2^{(\log_2(\frac{1}{y})+1)(1-\theta)} \\ &\leq \tilde{C} y^{\theta-1} \log_2^3\left(\frac{1}{y}\right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 y \tilde{C} son constantes positivas que no dependen de y . En suma, de (3.24), (3.25), (3.26) y (3.27) se sigue:

$$|f'_t(iy + W_t)| \leq \tilde{C}y^{\theta-1} \log_2^3 \left(\frac{1}{y} \right). \quad (3.28)$$

para cualesquiera $t \in [0, 1], y \in (0, \frac{1}{2})$. Tomamos ahora $0 \leq y_1 < y_2 < y$. Dado que $|f_t(iy_2 + W_t) - f_t(iy_1 + W_t)| = |\int_{y_1}^{y_2} f'_t(iu + W_t) du| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f'_t(iu + W_t)| du$, entonces de (3.28) se sigue que

$$|f_t(iy_2 + W_t) - f_t(iy_1 + W_t)| \leq \int_0^y \tilde{C}u^{\theta-1} \log_2^3 \left(\frac{1}{u} \right) du \leq \mathcal{C}y^\theta (\log^3 \left(\frac{1}{y} \right) + 1),$$

para cierta constante $\mathcal{C} > 0$ que no depende de y . Es decir,

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f_t(iy_2 + W_t) - f_t(iy_1 + W_t)| \leq \mathcal{C}y^\theta (\log^3 \left(\frac{1}{y} \right) + 1).$$

Dado que $\lim_{y \rightarrow 0} \mathcal{C}y^\theta (\log^3 \left(\frac{1}{y} \right) + 1) = 0$, entonces concluimos que V es continua en $[0, 1]^2$. \square

3.3.2 Simplificación del problema.

Fijamos un $k > 0$ distinto de 8. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Sea $(f_t)_{t \geq 0}$ el flujo estocástico inverso asociado a $(K_t)_{t \geq 0}$. Gracias al teorema 23 sabemos que para demostrar que $(K_t)_{t \geq 0}$ se encuentra casi seguramente inducida por una curva, basta con garantizar que existe un evento $A \in \mathcal{F}$ de medida total, tal que

$$F(\omega) : [0, \infty] \rightarrow \overline{\mathbb{H}} \\ t \mapsto \lim_{y \rightarrow 0^+} f_t(iy + W_t, \omega) \quad (3.29)$$

está bien definido y es continuo para todo $\omega \in A$.

Sin embargo, la propiedad de invarianza de escala de la SLE_k y el corolario 1 del capítulo 1 implican que, dado $\lambda > 0$,

$$\lambda f_{\frac{t}{\lambda^2}} \circ \phi_\lambda \stackrel{d}{=} f_t,$$

donde $\phi_\lambda(z) = \frac{z}{\lambda}$, para todo z en \mathbb{H} . A su vez, por la propiedad de invarianza de escala del movimiento Browniano tenemos que $\frac{W_t}{\lambda} \stackrel{d}{=} W_{\frac{t}{\lambda^2}}$. Por ende, si garantizamos que

$$\begin{aligned}
F : [0, 1] &\rightarrow \overline{\mathbb{H}} \\
t &\mapsto \lim_{y \rightarrow 0^+} f_t(iy + W_t)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

es un proceso bien definido y continuo casi seguramente, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
F : [0, 1] &\rightarrow \overline{\mathbb{H}} \\
t &\mapsto \lim_{y \rightarrow 0^+} \lambda f_{\frac{t}{\lambda^2}} \left(i \frac{y}{\lambda} + W_{\frac{t}{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

también está bien definido y es casi seguramente continuo. Consecuentemente, (3.30) implica (3.29). Por lo tanto, para demostrar el teorema, basta con verificar que (3.30) se cumple casi seguramente.

Ahora bien, gracias al teorema 24 sabemos que para obtener (3.30) basta demostrar que se cumple lo siguiente:

- Existe una constante aleatoria, casi seguramente finita y \mathcal{F}_1 -medible $C > 0$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $s \in (0, 1 - t] \cap (0, \frac{1}{4}]$ se cumple

$$|W_{t+s}(\omega) - W_t(\omega)| \leq C(\omega) \sqrt{s \log \left(\frac{1}{s} \right)}, \tag{3.31}$$

para todo $\omega \in A$ donde A es un conjunto de medida total contenido en \mathcal{F}_1 .

- Existen una constante determinística $\theta > 0$ y una constante aleatoria, casi seguramente finita y \mathcal{F}_1 -medible $C > 0$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in \{\frac{j}{2^n} : j = 1, \dots, 2^n\}$,

$$|f'_t(2^n i + W_t, \omega)| \leq C(\omega) 2^{n(1-\theta)}, \tag{3.32}$$

para todo $\omega \in A$ donde A es un conjunto de medida total contenido en \mathcal{F}_1 .

Gracias al corolario 3 que demostramos en el capítulo 2 sabemos que la transformada de toda SLE_k satisface (3.31). Por su parte, podemos obtener (3.32) si verificamos, para algún $\theta > 0$, que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathcal{D}_{2^n}} \mathcal{P}(\{|f'_t(i2^{-n})| \geq 2^{n(1-\theta)}\}) < \infty, \tag{3.33}$$

donde $\mathcal{D}_{2n} = \{\frac{j}{2^n} : j = 1, \dots, 2^n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Y es que si definimos

$$A_n = \bigcup_{t \in \mathcal{D}_{2n}} \{|\tilde{f}'_t(i2^{-n})| \geq 2^{n(1-\theta)}, t \in \mathcal{D}_{2n}\},$$

entonces (3.33) implicaría que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(A_n) < \infty,$$

lo cual, por el lema de Borel-Cantelli, nos garantizaría

$$\mathcal{P}(\{\limsup A_n\}) = 0.$$

Es decir, si (3.33) se cumple, entonces tendremos garantizada la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$|\tilde{f}'_t(i2^{-n})| \leq 2^{n(1-\theta)},$$

para todo $t \in \mathcal{D}_{2n}$. Luego, escogiendo

$$C = \sup_{n \in \{1, \dots, N-1\}} \sup_{t \in \mathcal{D}_{2n}} |\tilde{f}'_t(i2^{-n})|$$

obtendríamos (3.32). Por ende, demostrar (3.32) se reduce a encontrar un $\epsilon > 0$, así como un $\theta > 0$ y una constante positiva $c > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in \mathcal{D}_{2n}$ se cumpla:

$$\mathcal{P}(\{|\tilde{f}'_t(i2^{-n})| \geq 2^{(1-\theta)n}\}) \leq c2^{-(2+\epsilon)n}. \quad (3.34)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la relación entre el flujo inverso de Loewner y la solución de la ecuación reversa de Loewner, podemos aproximarnos a demostrar (3.34) (y, por ende, el teorema) estudiando el flujo reverso de Loewner. En ese sentido, consideremos el siguiente lema:

Lema 12. Sea $k > 0$ y $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Sea $(h_t)_{t \geq 0}$ una solución de la ecuación reversa de Loewner con transformada $(W_t)_{t \geq 0}$ tal que $W_t = \sqrt{k}B_t$ para todo $t \geq 0$. Sean $(f_t)_{t \geq 0}$ tal que $f_t = g_t^{-1}$ para todo $t \geq 0$, donde $(g_t)_{t \geq 0}$ es una SLE_k , y $(F_t)_{t \geq 0}$ tal que $F_t = \tilde{f}_t - W_t$, para todo $t \geq 0$. Entonces, para todo $T \geq 0$ tenemos que $h_T \stackrel{d}{=} F_T$. En particular, $\tilde{f}'_T \stackrel{d}{=} h'_T$.

Demostración. Fijemos $T \geq 0$. Definimos $(\tilde{h}_t)_{t \in [0, T]}$ tal que

$$\tilde{h}_t(z) = g_{T-t}(\tilde{f}_T(z)) - W_T,$$

para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $z \in \mathbb{H}$. Tomemos $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{H}$ y notemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{h}_t(z) &= \partial_t g_{T-t}(\tilde{f}_T(z)) - W_T \\ &= -\frac{2}{g_{T-t}(\tilde{f}_T(z)) - W_{T-t}} \\ &= -\frac{2}{g_{T-t}(\tilde{f}_T(z)) - W_T - (W_{T-t} - W_T)} \\ &= -\frac{2}{\tilde{h}_t - (W_{T-t} - W_T)}. \end{aligned}$$

Ahora, de tercera propiedad de invarianza del movimiento Browniano del teorema 14 se sigue que $(\tilde{h}_s)_{s \in [0, T]}$ es un flujo estocástico inverso de Loewner con transformada $(\sqrt{k}\tilde{B}_s)_{s \in [0, T]}$, donde $\tilde{B}_s = W_{T-s} - W_T$. Luego, $\tilde{h}_T \stackrel{d}{=} h_T$. Finalmente, como $\tilde{h}_T(z) = \tilde{f}_T(z) - W_T$ para todo $z \in \mathbb{H}$, concluimos que $h_T \stackrel{d}{=} F_T$. En particular, $h'_T \stackrel{d}{=} \tilde{f}'_T$. □

Por lo tanto, basta encontrar un $\epsilon > 0$ así como un $\theta > 0$ y una constante $c > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in \mathcal{D}_{2n}$ se cumple:

$$\mathcal{P}(\{|h'_t(i2^{-n})| \geq 2^{(1-\theta)}\}) \leq c2^{-(2+\epsilon)n}. \quad (3.35)$$

3.3.3 Demostración del teorema

Fijamos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, un movimiento Browniano adaptado $(B_t)_{t \geq 0}$ y un $k > 0$ distinto de 8. Sea

$$(W_t)_{t \geq 0} = (-\sqrt{k}B_t)_{t \geq 0}.$$

Como $(B_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (-B_t)_{t \geq 0}$, entonces $\mathcal{S}(W) = (K_t)_{t \geq 0}$ es una SLE_k .

Sea $(h_t)_{t \geq 0}$ el flujo reverso estocástico asociado a $(W_t)_{t \geq 0}$. Definimos, a su vez, $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ tal que

$$\hat{h}_t(z) = \frac{h_t(\sqrt{k}z)}{\sqrt{k}}. \quad (3.36)$$

Es claro que $(h_t)_{t \geq 0}$ satisface (3.35) si y sólo si $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ satisface (3.35). Por lo tanto, por lo discutido en la subsección anterior, si $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ satisface (3.35), entonces tendremos garantizado que la SLE_k se encuentra inducida, casi seguramente, por una curva. En ese sentido, en la presente subsección se muestra, mediante la construcción de procesos de Itô y martingalas reales adecuadas, que $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ satisface (3.35).

Fijamos un $z \in \mathbb{H}$ y consideramos el proceso $(Z_t^z)_{t \geq 0}$ definido como

$$Z_t^z = \hat{h}_t(z) + B_t.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Z_t^z &= \frac{h_t(\sqrt{k}z)}{\sqrt{k}} + B_t \\ &= z - \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^t \frac{2}{h_s(\sqrt{k}z) - (-\sqrt{k}B_s)} ds + B_t \\ &= z - \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{k} \hat{h}_s(z) + B_s} \frac{2}{Z_s} ds + B_t \\ &= z - \int_0^t \frac{2/k}{Z_s} ds + B_t. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Como vimos en la prueba del segundo teorema de Loewner, la aplicación

$$t \mapsto \text{Im}(h_t(z))$$

es estrictamente creciente. Luego, $|Z_t^z| > 0$ para todo t . Por ende, $(Z_t)_{t \geq 0}$ está bien definida.

Para simplificar la notación escogemos un real positivo a , tal que $a = \frac{2}{k}$. Luego,

$$\partial_t \hat{h}_t(z) = -\frac{a}{\hat{h}_t(z) + B_t} \tag{3.38}$$

y

$$Z_t^z = z - \int_0^t \frac{a}{Z_s} ds + B_t, \tag{3.39}$$

para todo $t \geq 0$.

Por su parte, dado que

$$\begin{aligned}
\log(h'_t(z)) &= \int_0^t \partial_s \log(h'_s(z)) ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{h'_s(z)} \partial_s h'_s(z) ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{h'_s(z)} \left(\frac{-a}{h_s(z) + B_s} \right)' ds \\
&= \int_0^t \frac{a}{(Z_s^z)^2} ds,
\end{aligned}$$

entonces

$$|h'_t(z)| = e^{\operatorname{Re}(\log(h'_t(z)))} = \exp \left(\int_0^t \frac{a((X_s^x)^2 - (Y_s^y)^2)}{((X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2)^2} ds \right); \quad (3.40)$$

donde $x + iy = z$; y $X_t^x = \operatorname{Re}(Z_t^z)$ e $Y_t^y = \operatorname{Im}(Z_t^z)$, para todo $t \geq 0$.

A su vez, de (3.37) se sigue que

$$X_t^x = x - \int_0^t \frac{aX_s^x}{(X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2} ds + B_t \quad (3.41)$$

$$Y_t^y = y + \int_0^t \frac{aY_s^y}{(X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2} ds. \quad (3.42)$$

Como

$$\left(\operatorname{Re} \left(\int_0^t \frac{a}{Z_s^z} ds \right) \right)_{t \geq 0} = (\operatorname{Re}(\hat{h}_t(z)))_{t \geq 0}$$

y las trayectorias de $(\operatorname{Re}(\hat{h}_t(z)))_{t \geq 0}$ son C^1 , entonces $\left(\operatorname{Re} \left(\int_0^t \frac{a}{Z_s^z} ds \right) \right)_{t \geq 0}$ es un proceso *real* de variación limitada. Análogamente, $\left(\operatorname{Im} \left(\int_0^t \frac{a}{Z_s^z} ds \right) \right)_{t \geq 0}$ también es un proceso *real* de variación limitada. Por lo tanto, de (3.41) y (3.42) se sigue que $(X_t^x)_{t \geq 0}$ y $(Y_t^y)_{t \geq 0}$ son, respectivamente, un proceso de Itô y un proceso de variación limitada reales. En suma, hemos escrito $|h'_t(z)|$ como una aplicación diferenciable compuesta con un proceso de Itô y un proceso de variación limitada reales.

Ahora simplificamos las fórmulas presentadas con ayuda de un cambio de tiempo. Sean

$$S(t) = \int_0^t \frac{ds}{(X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2} \quad (3.43)$$

$$\sigma(t) = S^{-1}(t), \quad (3.44)$$

Denotamos

$$\tau^* := \left\langle \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2}} dB_s \right\rangle_\infty$$

y definimos $(\tilde{Z}_t^z)_{t \in [0, \tau^*]}$, $(\tilde{X}_t^x)_{t \in [0, \tau^*]}$ y $(\tilde{Y}_t^y)_{t \in [0, \tau^*]}$ tales que, para todo $t \in [0, \tau^*)$,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t^z &= Z_{\sigma(t)}^z, \\ \tilde{X}_t^x &= X_{\sigma(t)}^x, \\ \tilde{Y}_t^y &= Y_{\sigma(t)}^y. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Luego, como $\sigma'(t) = (X_{\sigma(t)}^x)^2 + (Y_{\sigma(t)}^y)^2$ observamos que

$$d\tilde{Y}_t^y = dY_{\sigma(t)}^y = \frac{aY_{\sigma(t)}^y}{(X_{\sigma(t)}^x)^2 + (Y_{\sigma(t)}^y)^2} \sigma'(t) dt = aY_{\sigma(t)}^y dt = a\tilde{Y}_t^y,$$

lo cual implica que, para todo $t \in [0, \tau^*)$,

$$\tilde{Y}_t^y = ye^{at}.$$

Es decir, $(\tilde{Y}_t^y)_{t \in [0, \tau^*)}$ es creciente y determinística.

Análogamente, con respecto a la parte real obtenemos, tras aplicar la proposición 21 del capítulo 2:

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^x &= dX_{\sigma(t)}^x \\ &= -aX_{\sigma(t)}^x dt + \sqrt{(X_{\sigma(s)}^x)^2 + (Y_{\sigma(s)}^y)^2} d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

donde $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano localmente definido tal que $\tilde{B}_t = \int_0^{\sigma(t)} \frac{1}{\sqrt{(X_s^x)^2 + (Y_s^y)^2}} dB_s$, para todo $t \geq \tau^*$.

En suma, tenemos

$$\tilde{X}_t = x - \int_0^t a\tilde{X}_s^x ds + \int_0^t \sqrt{(\tilde{X}_s^x)^2 + (\tilde{Y}_s^y)^2} d\tilde{B}_s, \tag{3.46}$$

$$\tilde{Y}_t^y = ye^{at}. \tag{3.47}$$

Ahora bien, definimos $(\tilde{h}_t(z))_{t \in [0, \tau^*)}$ tal que

$$\tilde{h}_t(z) = \hat{h}_{\sigma(t)}(z). \tag{3.48}$$

Entonces, por (3.40) tenemos la siguiente igualdad

$$|\tilde{h}'_t(z)| = \exp\left(a \int_0^t \frac{(\tilde{X}_s^x)^2 - (\tilde{Y}_s^y)^2}{(\tilde{X}_s^x)^2 + (\tilde{Y}_s^y)^2} ds\right) = e^{-at} \exp\left(2a \int_0^t \frac{(\tilde{X}_s^x)^2}{(\tilde{X}_s^x)^2 + (\tilde{Y}_s^y)^2} ds\right). \quad (3.49)$$

Lema 13. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado y B un movimiento Browniano adaptado. Sea $k > 0$ diferente de 8 y $a = \frac{2}{k}$. Sean r y b constantes no negativas tales $r^2 - (2a + 1)r + ab = 0$. Dado $z = x + iy$ en \mathbb{H} sean $(\tilde{Z}_t^z)_{t \in [0, \tau^*)}$ y $(\tilde{Y}_t^y)_{t \in [0, \tau^*)}$ como en (3.46); y $(\tilde{h}_t(z))_{t \in [0, \tau^*)}$, como en (3.49). Entonces, el proceso $(\mathcal{M}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$ definido como

$$\mathcal{M}_t := \tilde{Y}_t^{b - \frac{r}{a}} \left(\frac{|\tilde{Z}_t^z|}{\tilde{Y}_t} \right)^{2r} |\tilde{h}'_t(z)|^b$$

es una martingala acotada.

Demostración. Fijamos $z = x + iy$ en \mathbb{H} . Sean $(\tilde{Z}_t^z)_{t \in [0, \tau^*)}$, $(\tilde{X}_t^x)_{t \in [0, \tau^*)}$ y $(\tilde{Y}_t^y)_{t \in [0, \tau^*)}$ como en (3.45). Sea $(\tilde{h}_t(z))_{t \in [0, \tau^*)}$ como en (3.48). Consideremos $(\tilde{K}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$ y $(\tilde{N}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t &= \frac{\tilde{X}_t^x}{\tilde{Y}_t^y} = \frac{\tilde{X}_t^x}{ye^{at}} \\ \tilde{N}_t &= \frac{(\tilde{X}_t^x)^2}{(\tilde{X}_t^x)^2 + (\tilde{Y}_t^y)^2} = \frac{\tilde{K}_t^2}{\tilde{K}_t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Por (3.49), notemos que

$$|\tilde{h}'_t(z)| = e^{-at} \exp\left(2a \int_0^t \tilde{N}_s ds\right) \quad (3.50)$$

Entonces, podemos reescribir \mathcal{M}_t de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &= (ye^{at})^{b - \frac{r}{a}} \left(\frac{|\tilde{Z}_t^z|}{\tilde{Y}_t} \right) e^{-abt} e^{2ab \int_0^t \tilde{N}_s ds} \\ &= y^{b - \frac{r}{a}} e^{-rt} \left(\frac{\tilde{X}_t^2 + \tilde{Y}_t^2}{\tilde{Y}_t^2} \right)^r e^{2ab \int_0^t \tilde{N}_s ds} \\ &= y^{b - \frac{r}{a}} e^{-rt} (1 - \tilde{N}_t)^{-r} e^{2ab \int_0^t \tilde{N}_s ds}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Demostremos, entonces, que

$$(\mathcal{M}_t)_{t \in [0, \tau^*)} = \left(y^{b-\frac{r}{a}} e^{-rt} (1 - \tilde{N}_t)^{-r} e^{2ab \int_0^t \tilde{N}_s ds} \right)_{t \in [0, \tau^*)} \quad (3.52)$$

es una martingala acotada.

Para ello emplearemos el lema de Itô para calcular $d\tilde{N}_t$. Luego, con ayuda de dicho resultado, aplicamos la regla del producto para simplificar (3.52) y demostrar el teorema.

Consideremos

$$\begin{aligned} \phi : [0, \infty) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \tilde{x}) &\mapsto \frac{\tilde{x}}{ye^{at}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x} &\mapsto \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{x}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Notemos que $\phi(t, \tilde{X}_t) = \tilde{K}_t$; \tilde{X} es una semimartingala y ϕ es de clase C^2 . Entonces, por el lema de Itô y (3.46) tenemos:

$$\begin{aligned} d\tilde{K}_t &= d\phi(t, \tilde{X}_t^x) \\ &= \partial_t \phi(t, \tilde{X}_t^x) dt + \phi'(t, \tilde{X}_t^x) d\tilde{X}_t^x + \frac{1}{2} \phi''(t, \tilde{X}_t^x) ((\tilde{X}_t^x)^2 + (\tilde{Y}_t^y)^2) dt \\ &= -a \frac{\tilde{X}_t^x}{ye^{at}} dt + \frac{1}{ye^{at}} \left(-a \tilde{X}_t^x dt + \sqrt{(\tilde{X}_t^x)^2 + (\tilde{Y}_t^y)^2} d\tilde{B}_t \right) \\ &= -2a \tilde{K}_t dt + \sqrt{\tilde{K}_t^2 + 1} d\tilde{B}_t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A su vez, $\psi(\tilde{K}_t) = \tilde{N}_t$; \tilde{K} es una semimartingala y ψ es de clase C^2 . Luego, aplicando nuevamente el lema de Itô y usando (3.53) obtenemos:

$$\begin{aligned}
d\tilde{N}_t &= d\psi(\tilde{K}_t^x) \\
&= \psi'(\tilde{K}_t)d\tilde{K}_t + \frac{1}{2}\psi''(\tilde{K}_t)(\tilde{K}_t^2 + 1)dt \\
&= \frac{2\tilde{K}_t}{(\tilde{K}_t^2 + 1)^2} \left(-a\tilde{K}_t dt + \sqrt{\tilde{K}_t^2 + 1}d\tilde{B}_t \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-6\tilde{K}_t^2 + 2}{(\tilde{K}_t^2 + 1)^3} \right) (\tilde{K}_t^2 + 1)dt \\
&= \left(2a\frac{\tilde{N}_t}{\tilde{K}_t^2 + 1} - \frac{3\tilde{N}_t}{\tilde{K}_t^2 + 1} + \frac{1}{(\tilde{K}_t^2 + 1)^2} \right) dt + 2\sqrt{\tilde{N}_t}\frac{1}{\tilde{K}_t^2 + 1}d\tilde{B}_t \\
&= \left(-2a\tilde{N}_t(1 - \tilde{N}_t) - 3\tilde{N}_t(1 - \tilde{N}_t) + (1 - \tilde{N}_t)^2 \right) dt + 2\sqrt{\tilde{N}_t}(1 - \tilde{N}_t)d\tilde{B}_t \\
&= (1 - \tilde{N}_t)(-4(a + 1)\tilde{N}_t + 1)dt + 2\sqrt{\tilde{N}_t}(1 - \tilde{N}_t)d\tilde{B}_t.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Ahora, definimos:

$$(A_t)_{t \in [0, \tau^*)} = \left(\int_0^t \tilde{N}_s ds \right)_{t \in [0, \tau^*)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 : [0, \infty) \times [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(t, \tilde{x}) &\mapsto y^{b-\frac{r}{a}} e^{-rt} (1 - \tilde{x})^{-r}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varphi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\tilde{x} &\mapsto e^{2ab\tilde{x}}.
\end{aligned}$$

Para todo $t \in [0, \tau^*)$, $\tilde{Y}_t^2 > 0$, ya que $Im(h_t(z)) > 0$. Entonces $\tilde{N}_t < 1$. Luego, $\varphi_1(t, \tilde{N}_t)$ está bien definido. Entonces, podemos escribir

$$\mathcal{M}_t = \varphi_1(t, \tilde{N}_t)\varphi_2(A_t). \tag{3.55}$$

Usando el lema de Itô y (3.54) obtenemos:

$$\begin{aligned}
d\varphi_1(t, \tilde{N}_t) &= -ry^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}dt + ry^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}[-4(a+1)\tilde{N}_t+1]dt \\
&\quad + ry^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-(r+1)}2\sqrt{\tilde{N}_t(1-\tilde{N}_t)}d\tilde{B}_t \\
&\quad + \frac{1}{2}(r+1)ry^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-(r+2)}4\tilde{N}_t(1-\tilde{N}_t)^2dt \\
&= -2(r(2a+1)-r^2)[y^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}\tilde{N}_t]dt \\
&\quad + 2ry_0^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}\sqrt{\tilde{N}_t}d\tilde{B}_t \\
&= -2aby^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}\tilde{N}_tdt \\
&\quad + 2ry^{b-\frac{r}{a}}e^{-rt}(1-\tilde{N}_t)^{-r}\sqrt{\tilde{N}_t}d\tilde{B}_t,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que r y b satisfacen

$$r^2 - (2ab + 1)r + ab = 0. \tag{3.57}$$

Asimismo, por el lema de Itô notemos que

$$d\varphi_2(A_t) = 2abe^{2ab\int_0^t \tilde{N}_s ds} \tilde{N}_t dt. \tag{3.58}$$

Entonces, empleando la fórmula del producto de Itô en (3.55), obtenemos, gracias a (3.56) (3.57) y (3.58):

$$d\mathcal{M}_t = 2r\mathcal{M}_t\sqrt{\tilde{N}_t}d\tilde{B}_t,$$

lo cual implica que $(\mathcal{M}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$ es una martingala local. Finalmente, del lema 7 del capítulo 2 se sigue que $(\mathcal{M}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$ es una martingala acotada. \square

Lema 14. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado y B un movimiento Browniano adaptado. Sean $k > 0$ distinto de 8 y $a = \frac{2}{k}$. Sean r y b constantes no negativas tales $r^2 - (2a + 1)r + ab = 0$. Dado $z = x + iy$ en \mathbb{H} , sea $(\tilde{h}_t(z))_{t \in [0, \tau^*)}$ como en (3.48). Entonces, para todo $\lambda > 0$ se cumple

$$\mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_t(z)| \geq \lambda\}) \leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z|}{y}\right)^{2r} e^{t(r-ab)},$$

para todo $t \in [0, \tau^*)$.

Demostración. Empleando el lema anterior obtenemos, por definición de martingala:

$$E[\mathcal{M}_t] = E[\mathcal{M}_0] = y^{b-\frac{r}{a}} \left(\frac{|z|}{y} \right)^{2r}.$$

A su vez, notando que $\tilde{Y}_t^y > 0$, gracias a (3.47), y, por ende, que $\frac{|\tilde{Z}_t|}{\tilde{Y}_t} \geq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{|\tilde{h}'_t(z)| \geq \lambda\} &\leq \frac{\mathbb{E}[|\tilde{h}'_t(z)|]}{\lambda^b} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\tilde{Y}_t^{b-\frac{r}{a}} |\tilde{h}'_t(z)|]}{\tilde{Y}_t^{b-\frac{r}{a}} \lambda^b} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\mathcal{M}_t]}{\tilde{Y}_t^{b-\frac{r}{a}} \lambda^b} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathcal{M}_0]}{\tilde{Y}_t^{b-\frac{r}{a}} \lambda^b} \\ &= \lambda^{-b} \left(\frac{|z|}{y} \right)^{2r} e^{t(r-ab)} \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de la desigualdad de Chebyshev. \square

Lema 15. Sea $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función holomorfa. Entonces, para todo $z \in \mathbb{H}$,

$$\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im} f(z)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}.$$

Proposición 25. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado y B un movimiento Browniano adaptado. Sean $k > 0$ distinto de 8 y $a = \frac{2}{k}$. Entonces, para todo $r \in [0, 2a + 1]$, existe una constante $c_{a,r}$ que depende de r y a tal que para cualesquiera $t \in [0, 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in (0, 1]$ y $\lambda \in [e^{-1}, y_0^{-1}]$ se cumple

$$\mathcal{P}(\{|\hat{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}) \leq c_{a,r} \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \delta(y_0, \lambda), \quad (3.59)$$

donde $b = \frac{(2a+1)r-r^2}{a} \geq 0$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ es como en () y

$$\delta(y_0, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{\left(\frac{r}{a}\right)-b} & r < ab \\ 1 - \log(\lambda y_0) & r = ab \\ y_0^{b-\left(\frac{r}{a}\right)} & r > ab. \end{cases}$$

Demostración. Fijamos $r \in [0, 2a + 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in (0, 1]$ y $\lambda \in [e^{-1}, y_0^{-1}]$. Sean $(\hat{h}_t)_{t \geq 0}$ y $(\tilde{h}_t(z_0))_{t \in [0, \tau^*)}$ como en (3.36) y (3.48), respectivamente (donde $z_0 = x_0 + iy_0$).

Afirmación 1: Sea $T = \frac{\log \sqrt{2a+1} - \log y}{a}$. Entonces, para todo $t \in [0, 1]$ se cumple

$$\mathcal{P}(\{|\hat{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}) \leq \mathcal{P}(\{\sup_{s \in [0, T]} |\tilde{h}'_s(z_0)| \geq \lambda\}),$$

donde $\tilde{h}'_r(z_0, \omega) = 0$ en caso $\tau^*(\omega) < r$.

En efecto, consideremos $(Y_t)_{t \geq 0}$ y $(\tilde{Y}_t)_{t \in [0, \tau^*)}$ asociados a $(\hat{h}_t(z_0))_{t \geq 0}$ y $(\tilde{h}_t(z_0))_{t \in [0, \tau^*)}$, respectivamente. Tomamos $t \in [0, 1]$. Notemos ahora que

$$Y_t = \int_0^t \frac{aY_s}{X_s^2 + Y_s^2} ds + y_0 \leq \int_0^t \frac{a}{Y_s} ds + y_0,$$

lo cual implica que $Y_t \leq \sqrt{2at + y_0^2} \leq \sqrt{2a + 1}$. Por su parte, de (3.47) se sigue que

$$\tilde{Y}_T = y_0 e^{aT} = \sqrt{2a + 1}.$$

Por ende, si $\omega \in \{|\hat{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}$, entonces podemos escoger $s \in [0, T]$ tal que $\omega \in \{|\tilde{h}'_s(z_0)| \geq \lambda\}$. En suma,

$$\{|\hat{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\} \subset \{\sup_{s \in [0, T]} |\tilde{h}'_s(z_0)| \geq \lambda\},$$

lo cual demuestra la afirmación 1.

Afirmación 2:

$$\mathcal{P}(\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}) \leq \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}).$$

En efecto, de (3.50) se sigue

$$\begin{aligned} |\tilde{h}_{t+s}(z_0)| &= e^{-a(t+s)} e^{2a \int_0^{t+s} \tilde{N}_r dr} \\ &= e^{-as} \left(e^{-at} e^{2a \int_0^t \tilde{N}_r dr + \int_t^{t+s} \tilde{N}_r dr} \right) \\ &= e^{-as} e^{2a \int_t^{t+s} \tilde{N}_r dr} |\tilde{h}_t(z_0)| \\ &\leq e^{as} |\tilde{h}_t(z_0)|, \end{aligned} \tag{3.60}$$

para todo $s \geq 0$. Luego,

$$\sup_{t \leq r \leq t+s} |\tilde{h}'_r(z_0)| \leq e^{as} |\tilde{h}'_t(z_0)|,$$

lo cual implica que

$$\mathcal{P}(\{\sup_{t \leq r \leq t+s} |\tilde{h}'_r(z_0)| \geq e^a \lambda\}) \leq \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}),$$

para todo $s \in [0, 1]$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}'_t(z_0)| \geq e^a \lambda\}) &\leq \sum_{j=1}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{\sup_{0 \leq t \leq j} |\tilde{h}'_j(z_0)| \geq e^a \lambda\}) + \mathcal{P}(\{\sup_{\lfloor T \rfloor \leq t \leq T} |\tilde{h}'_t(z_0)| \geq e^a \lambda\}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ahora bien, gracias al lema 15 tenemos $|\tilde{h}'_t(z_0)| \leq \frac{Im(\tilde{h}_t(z_0))}{y_0} = \frac{\tilde{Y}_t}{y_0} = e^{at}$. Luego, $\mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_t(z_0)| \geq \lambda\}) = 0$ para todo $t \in [0, \frac{1}{a} \log \lambda)$. Por ende,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}) \leq \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}), \tag{3.62}$$

con lo cual la afirmación 2 queda verificada.

En suma, de las afirmaciones 1 y 2 obtenemos:

$$\mathcal{P}(\{\hat{h}'_t(z_0) \geq \lambda\}) \leq \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}).$$

Ahora, tomando $b = \frac{(2a+1)r-r^2}{a}$ obtenemos, tras usar el lema 14,

$$\sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} \mathcal{P}(\{|\tilde{h}'_j(z_0)| \geq \lambda\}) \leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} e^{j(r-ab)}.$$

Supongamos que $r > ab$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} e^{j(r-ab)} &= \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} e^{(r-ab)\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil} \sum_{j=0}^{\lfloor T \rfloor - \lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil} e^{j(r-ab)} \\
&= \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} e^{(r-ab)\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil} \left[\frac{1 - e^{(r-ab)(\lfloor T \rfloor - \lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil)}}{1 - e^{r-ab}} \right] \\
&\leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \frac{e^{(r-ab)\lfloor T \rfloor}}{e^{r-ab} - 1} \\
&\leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \left[\frac{(2a+1)^{\frac{r-ab}{2a}}}{e^{r-ab} - 1} \right] y_0^{b-\frac{r}{a}} \\
&= c_{a,r} \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} y_0^{b-\frac{r}{a}}
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $r < ab$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} e^{j(r-ab)} &\leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \frac{e^{\lceil \frac{1}{a} \log \lambda (r-ab) \rceil}}{1 - e^{r-ab}} \\
&\leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \frac{e^{\frac{1}{a} \log \lambda (r-ab)}}{1 - e^{r-ab}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{r-ab}} \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \lambda^{\frac{r}{a}-b} \\
&= c_{a,r} \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \lambda^{\frac{r}{a}-b}.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $r = ab$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \sum_{j=\lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil}^{\lfloor T \rfloor} e^{j(r-ab)} &= \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} (\lfloor T \rfloor - \lceil \frac{1}{a} \log \lambda \rceil) \\
&\leq \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \left(\frac{\log \sqrt{2a+1} + a - \log y\lambda}{a} \right) \\
&\leq c_{a,r} \lambda^{-b} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} (1 - \log y_0 \lambda).
\end{aligned}$$

□

Recordemos que estamos buscando un $\epsilon > 0$ y $\theta > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in \mathcal{D}_{2^n}$ se cumpla:

$$\mathcal{P}(\{|\hat{h}'_t(i2^{-n})| \geq 2^{(1-\theta)}\}) \leq c2^{-(2+\epsilon)n}, \quad (3.63)$$

donde c es una constante finita.

Para ello, fijamos $a > 0$ y definimos $\varphi_a(r) = 2b(r) - \frac{r}{a}$, para todo $r \in [0, 1+2a]$, donde $b(r) = \frac{(2a+1)r-r^2}{a}$. Maximizamos φ_a con $r_0 = a + \frac{1}{4}$ y obtenemos:

$$\varphi_a(r_0) = \frac{2}{a} \left(a + \frac{1}{4} \right)^2, \quad (3.64)$$

lo cual implica que si $a > 0$, entonces $\varphi_a \leq 2$ si y sólo si $a = \frac{1}{4}$. A su vez, como $b(r_0) - \frac{r_0}{a} = \frac{a^2 - \frac{1}{16}}{a}$, entonces $b(r_0) - \frac{r_0}{a} > 0$ si $a > \frac{1}{4}$, mientras que $b(r_0) - \frac{r_0}{a} < 0$ en caso $a < \frac{1}{4}$. Dicho esto, tomamos $a > \frac{1}{4}$ (el caso $a < \frac{1}{4}$ es parecido) y escogemos $\theta_0 \in \left(0, 1 - \frac{2}{\varphi_a(r_0)}\right)$ y $\epsilon = \frac{1}{\varphi_a(r_0)} \left(1 - \frac{2}{\varphi_a(r_0)} - \theta\right)$. Entonces, fijando $n \in \mathbb{N}, t \in \mathcal{D}_{2^n}$ y aplicando la proposición anterior con $\lambda = 2^{n(1-\theta_0)}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{|\hat{h}'_t(i2^{-n})| \geq 2^{n(1-\theta_0)}\}) &\leq 2^{-n(1-\theta_0)b(r_0)} \delta(2^{-n}, 2^{n(1-\theta_0)}) \\ &= 2^{-n(1-\theta_0)b(r_0)} 2^{n(1-\theta_0)\left(\frac{r}{a} - b(r_0)\right)} \\ &= 2^{-n(1-\theta_0)\left(2b(r_0) - \frac{r}{a}\right)} \\ &= 2^{-n(1-\theta_0)\varphi_a(r_0)} \\ &\leq 2^{-n(2+\epsilon)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Con lo cual hemos probado el teorema de existencia de la curva de la SLE_k para todo $k \neq 8$.

Definición 37. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ y $(B_t)_{t \geq 0}$ un espacio de probabilidad filtrado y un movimiento Browniano adaptado, respectivamente. Dado $k > 0$, sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Entonces, llamaremos *curva SLE_k* a la curva aleatoria γ que induce $(K_t)_{t \geq 0}$.

Observación. Notemos que no sólo se ha demostrado que toda SLE_k posee una curva SLE_k , sino que se ha explicitado una manera de escribirla: Si $(K_t)_{t \geq 0}$ es una SLE_k , y W y $(f_t)_{t \geq 0}$ son la transformada y el flujo inverso estocásticos de $(K_t)_{t \geq 0}$, entonces la curva aleatoria γ , definida como

$$\gamma(t) := f_t(W_t), \quad (3.66)$$

es una curva SLE_k .

3.4 Transición de fase en $k = 4$

En la presente sección demostramos que una curva SLE_k es simple si y sólo si k es menor o igual a 4. Como veremos, demostrar que una curva SLE_k es simple casi seguramente equivale a demostrar que, casi seguramente, dicha curva -salvo en el instante 0- no toca la recta real. En consecuencia, nos aproximaremos a la resolución del problema principal de la sección demostrando inicialmente que una curva SLE_k alcanza la recta real si y sólo si $k > 4$. Para ello introducimos en la exposición a los procesos de Bessel de dimensión D y demostramos que estos exhiben una transición de fase que tiene a $D = 2$ como punto crítico. Y es que, como veremos, para todo $k > 0$ podemos construir un proceso de Bessel de dimensión $1 + \frac{4}{k}$ a partir del comportamiento -en la recta real- del flujo de una SLE_k ; de manera tal que la probabilidad de que una curva SLE_k alcance la recta real es igual a la probabilidad de que un proceso de Bessel de dimensión $1 + \frac{4}{k}$ alcance el valor 0. En la demostración de la transición de fase del proceso de Bessel seguimos el argumento presente en [Law05]. Por su parte, para la demostración de la transición de fase en $k = 4$ seguimos la prueba de [Kem17].

Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Loewner. Sean $(g_t)_{t \geq 0}$ y W el flujo y la transformada asociados a $(K_t)_{t \geq 0}$. Recordemos que para todo $t \geq 0$ el hull asociado a g_t satisface

$$K_t = \overline{\{z \in \mathbb{H} : \tau(z) \leq t\}},$$

donde $\tau(z) = \inf\{t \geq 0 : \liminf_{0 \leq s \leq t} |g_s(z) - W_s| = 0\}$. Es decir, $z \in \bigcup_{s \geq 0} K_s$ si y sólo si $\tau(z) < \infty$.

Asimismo, notemos que podemos definir la ecuación de Loewner con condiciones iniciales reales distintas de 0. En efecto, tomemos $x > 0$. Puesto que $K_0 = 0$ y $(K_t)_{t \geq 0}$ es una familia de compactos que satisface la propiedad de crecimiento local, es claro que podemos escoger $\epsilon > 0$ y $t_0 > 0$ tales que $B_\epsilon(x) \cap K_{t_0} = \emptyset$. Por ende, como $(K_t)_{t \geq 0}$ es creciente, podemos extender g_s a $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ -para todo $s \in [0, t_0]$ - de modo que para todo $x_0 \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, $(g_t(x_0))_{t \in [0, \tau(x_0)]}$ está bien definida y satisface:

$$\partial_t g_t(x_0) = \frac{2}{g(x_0) - W_t}, \quad g_0(x_0) = x_0, \quad (3.67)$$

donde $\tau(x_0) = \inf\{t \geq 0 : \liminf_{0 \leq s \leq t} |g_s(x_0) - W_s| = 0\}$.

Por ende, para todo $x \in \mathbb{R}$ podemos afirmar que $x \in \bigcup_{t \geq 0} K_t$ si y sólo si $\tau(x) < \infty$. Es decir, el registro de las singularidades de la ecuación de Loewner con condiciones iniciales reales nos dice si la cadena de Loewner alcanza o no puntos de la recta distintos de 0.

Ahora, regresemos al contexto aleatorio. Fijemos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ y un movimiento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$. Fijemos $k > 0$. Sea W tal que $W_t = -\sqrt{k}B_t$. Sea $(g_t)_{t \geq 0}$ el flujo estocástico de Loewner generado por W . Fijamos $x_0 > 0$ y definimos $(X_t^{x_0})_{t \in [0, \tau(x_0))}$ de modo que, para todo $0 \leq t \leq \tau(x_0)$

$$X_t^{x_0} = \frac{g_t(\sqrt{k}x_0) - W_t}{\sqrt{k}}. \quad (3.68)$$

Luego,

$$\begin{aligned} X_t^{x_0} &= x_0 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2}{g_s(\sqrt{k}x_0) - W_s} ds - \frac{W_t}{\sqrt{k}} \\ &= x_0 + \int_0^t \frac{2/k}{\frac{g_s(\sqrt{k}x_0) + B_s}{\sqrt{k}}} ds + B_t \\ &= x_0 + \int_0^t \frac{2/k}{X_s^{x_0}} ds + B_t. \end{aligned}$$

Definición 38. Sean $x > 0$ y $D > 0$. Llamamos proceso de Bessel de dimensión $D > 0$ con inicio en x a la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = x + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t} + dB_t. \quad (3.69)$$

Denotamos a dicho proceso por $(X_t^x)_{t \in [0, \tau_B(x))}$, donde

$$\tau_B(x) = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}. \quad (3.70)$$

Notemos que para cada $k > 0$ el proceso *real* definido en (3.68) es un proceso de Bessel de dimensión $1 + \frac{4}{k}$. Más aún, notemos que $\tau(x) < \infty$ si y sólo si $\tau_B(x) < \infty$. Por ende, podemos estudiar si una curva SLE_k alcanza o no la recta real a partir del estudio del proceso de Bessel real de dimensión $1 + \frac{4}{k}$.

¹Dicha aproximación queda justificada gracias a que los coeficientes de la ecuación que define el proceso de Bessel son Lipschitz en compactos. Entonces, las soluciones de dicha ecuación satisfacen unicidad en ley y -fijado un espacio de probabilidad filtrado- unicidad de trayectorias (Ver [Mil]p33).

Lema 16. Sean $x_0 > 0$ y $D > 0$ arbitrarios. Suponemos que $(X_t^{x_0})_{t \geq 0}$ es un proceso de Bessel de dimensión D que inicia en x_0 . Entonces, $\tau_B(x_0) = \infty$ si y sólo si $D \geq 2$.

Demostración. Para todo $x > 0$, denotamos por $(X_t^x)_{t \geq 0}$ al proceso de Bessel de dimensión D que inicia en x . Luego consideramos el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x < z < \infty\}$ y definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \inf\{t \geq 0 : X_t^x \in \{y, z\}\}. \end{aligned}$$

Asimismo, trabajamos con la notación $\sigma(x, y, z) = \sigma_{y,z}(x)$, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y, z) &\mapsto \mathcal{P}(\{X_{\sigma_{y,z}(x)}^x = z\}). \end{aligned}$$

y fijamos a y b positivos, tales que $a < x_0 < b$. Queremos hallar una expresión para la función $f_{a,b}(x) = f(x, a, b)$ (definida en el intervalo (a, b)) de manera que resulte transparente qué ocurre cuando enviamos a y b hacia 0 y ∞ , respectivamente.

En aras de encontrar a nuestro candidato, suponemos que $f_{a,b}$ es una función C^2 . Tomamos $x \in (a, b)$, empleamos el lema de Ito y obtenemos:

$$\begin{aligned} df_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) &= f'_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) dX_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x + \frac{1}{2} f''_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) d\langle X^x \rangle_{\sigma_{a,b \wedge t}} \\ &= \left(\frac{D-1}{2} \frac{f'_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x)}{X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x} + \frac{1}{2} f''_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) \right) dt + f'_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) dB_t \end{aligned}$$

Notemos que, para todo $t \geq 0$, $f_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) = E[f_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}}^x) | \mathcal{F}_t]$. Es decir, $(f_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x))_{t \geq 0}$ es una martingala acotada. Esto implica que

$$\frac{D-1}{2} \frac{f'_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x)}{X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x} + \frac{1}{2} f''_{a,b}(X_{\sigma_{a,b \wedge t}}^x) = 0.$$

Por lo tanto, si $f_{a,b}$ es C^2 , entonces satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''_{a,b}(x) + \frac{D-1}{2x}f'_{a,b}(x) &= 0 \\ f_{a,b}(a) &= 0 \\ f_{a,b}(b) &= 1\end{aligned}$$

Ahora, para $D \neq 2$ y $D = 2$ obtenemos, respectivamente, las siguientes soluciones únicas de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{a,b} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^{2-D} - a^{2-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{a,b} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\log(x) - \log(a)}{\log(b) - \log(a)}.\end{aligned}$$

Suponemos que D es distinto de 2 (el caso $D=2$ se desarrolla de manera análoga). Notemos que $(\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x))_{t \geq 0}$ es una martingala acotada. Y es que, tras emplear el lema de Ito podemos observar que:

$$\begin{aligned}d\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x) &= \tilde{f}'_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)dX_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x + \frac{1}{2}\tilde{f}''_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)d\langle X^x \rangle_{\sigma_{a,b}\wedge t} \\ &= \left((2-D) \frac{(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)^{1-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}} \frac{D-1}{2X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x} + \frac{(1-D)(2-D)}{2} \frac{(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)^{-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}} \right) dt \\ &\quad + \frac{(2-D)(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)^{1-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}} dB_t \\ &= \frac{(2-D)(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x)^{1-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}} dB_t,\end{aligned}$$

lo cual implica que $(\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x))_{t \geq 0}$ es una martingala local. Pero como $(\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x))_{t \geq 0}$ está acotada por 1, entonces $(\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}\wedge t}^x))_{t \geq 0}$ debe ser una martingala acotada.

Ahora bien, notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b} \wedge \infty}^x)] &= \mathbb{E}[\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}}^x)] \\
&= \int_{\{X_{\sigma_{a,b}}^x = a\}} \tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}}^x) dP + \int_{\{X_{\sigma_{a,b}}^x = b\}} \tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b}}^x) dP \\
&= \mathcal{P}(\{X_{\sigma_{a,b}}^x = b\}).
\end{aligned}$$

A su vez, gracias al *stopping theorem* sabemos que $\mathbb{E}[\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b} \wedge \infty}^x)] = \mathbb{E}[\tilde{f}_{a,b}(X_{\sigma_{a,b} \wedge 0}^x)] = \tilde{f}_{a,b}(x)$. Luego, para todo $x \in [a, b]$ tenemos:

$$\mathcal{P}(\{X_{\sigma_{a,b}}^x = b\}) = \tilde{f}_{a,b}(x).$$

En particular, si $D \neq 2$ tenemos que $\mathcal{P}(\{X_{\sigma_{a,b}}^{x_0} = b\}) = \frac{x_0^{2-D} - a^{2-D}}{b^{2-D} - a^{2-D}}$, mientras que para $D = 2$ ocurre $\mathcal{P}(\{X_{\sigma_{a,b}}^{x_0} = b\}) = \frac{\log(x) - \log(a)}{\log(b) - \log(a)}$.

Caso 1. Suponemos que $0 < D < 2$. Luego,

$$\mathcal{P}(\{X_{\sigma_{0,b}}^{x_0} = b\}) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \tilde{f}_{a,b}(x_0) = \frac{x_0^{2-D}}{b^{2-D}}.$$

Es decir, la probabilidad de que el proceso de Bessel que inicia en x_0 llegue a b antes que a 0 es $\frac{x_0^{2-D}}{b^{2-D}}$. Entonces,

$$\mathcal{P}(\{\tau_B(x_0) = \infty\}) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x_0^{2-D}}{b^{2-D}} = 0.$$

Caso 2. Suponemos que $D > 2$. Luego, procediendo como en el caso 1 obtenemos

$$\mathcal{P}(\{\tau_B(x_0) = \infty\}) = 1.$$

Caso 3. Suponemos que $D = 2$. Luego, procediendo de manera análoga al caso 1 obtenemos

$$\mathcal{P}(\{\tau_B(x_0) = \infty\}) = 0.$$

□

Es claro que si tomamos x_1 y x_2 positivos y tales que $x_1 \leq x_2$, entonces

$$W_t \leq g_t(x_1) \leq g_t(x_2),$$

lo cual implica que $\tau(x_1) \leq \tau(x_2)$. Luego, del lema anterior se sigue el siguiente resultado.

Lema 17. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Entonces:

- $\mathcal{P}(\{(\bigcup_{t \geq 0} K_t) \cap [0, \infty) = \emptyset\}) = 1$ si y sólo si $k \in (0, 4]$.
- $\mathcal{P}(\{[0, \infty) \subset (\bigcup_{t \geq 0} K_t)\}) = 1$ si y sólo si $k > 4$.

Ahora bien, el siguiente lema nos garantiza que la SLE_k es invariante bajo reflexión con respecto al eje imaginario:

Lema 18. Dado $k > 0$, sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Sea $\mathcal{R} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}(z) = -\bar{z}$. Entonces, $\mathcal{R}((K_t)_{t \geq 0})$ también es una SLE_k .

Demostración. Gracias a la propiedad de invarianza -bajo reflexión con respecto al origen- del movimiento Browniano, basta mostrar que si $(K_t)_{t \geq 0}$ es una cadena determinística de Loewner con transformada W , entonces $\mathcal{R}((K_t))$ es una cadena de Loewner con transformada $-W$.

Sea W una función continua. Sean $(K_t)_{t \geq 0}$ y $(g_t)_{t \geq 0}$ la cadena y flujo de Loewner generados por W . Tomemos $t \geq 0$. Sea $H_t^- := \{z \in \mathbb{H}^- : \bar{z} \in H_t\}$. Gracias al principio de reflexión de Schwarz, podemos definir una extensión analítica g_t^* de g_t a H_t^- , donde $g_t^*(z) = \overline{g_t(\bar{z})}$ para todo z en H_t^- . Además, es claro que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_t^*(z) - z = 0$$

y que $\mathcal{R}(K_t)$ es un *hull*. Entonces, podemos definir el siguiente biholomorfismo normalizado asociado a $\mathcal{R}(K_t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t : \mathbb{H} \setminus \mathcal{R}(K_t) &\rightarrow \mathbb{H} \\ z &\mapsto -g_t^*(-z). \end{aligned}$$

En suma, $(\tilde{g}_t)_{t \geq 0}$ es la familia de biholomorfismos normalizados en ∞ asociada a $(\mathcal{R}(K_t)_{t \geq 0})$. Ahora, para hallar la transformada de Loewner asociada, fijamos $z \in \mathbb{H}$ y, utilizando el teorema 1 de Loewner, notamos que:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{g}_t(z) &= -\partial_t g_t^*(-z) \\ &= -\frac{2}{g_t^*(-z) - W_t} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t(z) - (-W_t)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-W$ es la transformada de Loewner de $\mathcal{R}((K_t)_{t \geq 0})$. \square

Llegamos entonces a la siguiente proposición:

Proposición 26. Sea $(K_t)_{t \geq 0}$ una SLE_k . Si $k \in (0, 4]$, entonces $\mathcal{P}(\{(\bigcup_{t \geq 0} K_t) \cap \mathbb{R} = \emptyset\}) = 1$. Por su parte, si $k > 4$, entonces $\mathcal{P}(\{\mathbb{R} \subset (\bigcup_{t \geq 0} K_t)\}) = 1$.

Demostración. Gracias al lema 17 basta probar que

$$\mathcal{P}\left(\left\{\left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right) \cap (-\infty, 0) = \emptyset\right\}\right) = 1$$

para todo $k \in (0, 4]$; y que

$$\mathcal{P}\left(\left\{(-\infty, 0) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right)\right\}\right) = 1,$$

siempre que $k > 4$.

Ahora, notemos que

$$\left\{\left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right) \cap (-\infty, 0) = \emptyset\right\} = \left\{\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(K_t)\right) \cap (0, +\infty) = \emptyset\right\}$$

y

$$\left\{(-\infty, 0) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right)\right\} = \left\{(0, +\infty) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(K_t)\right)\right\}$$

Además, por el lema 18 sabemos que $\mathcal{R}(K_t)_{t \geq 0}$ es una SLE_k . Por lo tanto, por el lema 17 obtenemos que

$$\mathcal{P}\left(\left\{\left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right) \cap (-\infty, 0) = \emptyset\right\}\right) = \mathcal{P}\left(\left\{\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(K_t)\right) \cap (0, +\infty) = \emptyset\right\}\right) = 1,$$

para todo $k \in (0, 4]$; y que

$$\mathcal{P}\left(\left\{(-\infty, 0) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} K_t\right)\right\}\right) = \mathcal{P}\left(\left\{(0, +\infty) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(K_t)\right)\right\}\right) = 1,$$

siempre que $k > 4$. □

Dicho esto, demostramos el teorema anunciado al inicio de la sección.

Teorema 25. Si $k \in (0, 4]$, entonces la curva SLE_k es casi seguramente simple; mientras que si $k > 4$, entonces la curva SLE_k no es simple casi seguramente.

Demostración. Tomemos $k \in (0, 4]$. Sean γ la curva SLE_k ; $(g_t)_{t \geq 0}$, la SLE_k y W la transformada estocástica de $(g_t)_{t \geq 0}$. Tomemos un racional $r \in \mathbb{Q}$. Consideremos la curva $\tilde{\gamma}_r$ definida como $\tilde{\gamma}_r(s) = g_r(\gamma(r+s)) - W_r$, para todo $s > 0$. Por la propiedad de dominio de Markov, podemos afirmar que $\tilde{\gamma}_r \stackrel{d}{=} \gamma$. Es decir, $\tilde{\gamma}_r$ es una curva SLE_k . Luego, por la proposición 26, sabemos que

$$\mathcal{P}(\{\tilde{\gamma}_r \cap \mathbb{R} \neq \emptyset\}) = 0, \quad (3.71)$$

ya que $\mathcal{P}(\{(\bigcup_{t \geq 0} K_t) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset\}) = 0$. Luego, $\mathcal{P}(\{f_r(\tilde{\gamma}_r([0, +\infty)) + W_r) \cap \gamma(0, r] = \{\gamma(r)\}\}) = 1$. Es decir, $\mathcal{P}(\{\gamma([0, r]) \cap \gamma([r, \infty)) = \{\gamma(r)\}\}) = 1$.

Ahora bien, sea $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{\gamma([0, r]) \cap \gamma([r, \infty)) = \{\gamma(r)\}\}$. Luego, $\mathcal{P}(A) = 1$. Trabajemos en A . Si hubiera $0 < t_1 < t_2$ tales que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, entonces para cada $r \in (t_1, t_2)$ tendríamos $(g_r(\gamma(0, \infty)) + W_r) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ lo cual no puede ocurrir. Lo por lo tanto, γ es simple casi seguramente.

Ahora, tomemos $k > 4$ y consideremos γ la curva SLE_k ; $(g_t)_{t \geq 0}$, la SLE_k y W la transformada estocástica de $(g_t)_{t \geq 0}$. Fijemos $t > 0$. Como $k > 4$, de la proposición se sigue que $\tau(1) < \infty$. Note que para cada realización en un conjunto de medida total en el cual se cumple $\tau(1) < \infty$ podemos escoger $x > 0$ de modo que $x\tau(1) < t$. A su vez, por invarianza de escala tenemos

$$x|g_s(1) - W_s| = |g_{K_{x^2s}}(x) - W_{x^2s}|.$$

Por ende, para todo $t > 0$ y para todo $x_0 \in (0, 1)$.

$$\mathcal{P}(\{ \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, x_0]} \{\tau(r) < t\} \}) = 1, \quad (3.72)$$

lo cual implica que

$$\mathcal{P}(\{\gamma([0, t]) \cap (0, x] \neq \emptyset\}) = 1, \quad (3.73)$$

para todo $t > 0$ y $x > 0$. Fijamos $s_1 < t_0 < s_2$ y escogemos x_1 y x_2 tales que $x_1 < 0 < x_2$ y $[x_1, x_2]$ es la imagen de $\gamma([s_1, t_0])$ bajo $g_{t_0} - W_{t_0}$. Luego, por (3.73) podemos escoger $t_1 \in (t_0, s_2)$ de modo que $g_{t_0}(\gamma(t_1)) - W_{t_0} \in [x_1, 0) \cup (0, x_2]$. Esto implica que podemos escoger $t_2 \in [s_1, t_0)$ de modo que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. \square

Bibliografía

- [BN] Nathaniel Berestycki and James Norris, *Lectures on schramm loewner evolution*.
- [Dur84] Richard Durrett, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, 1984.
- [Gal13] Jean Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, 2013.
- [Kem17] Antti Kemppainen, *Schramm-loewner evolution*, Springer, 2017.
- [Lan93] Serge Lang, *Complex analysis*, Springer, 1993.
- [Law05] Gregory F. Lawler, *Conformally invariant processes in the plane*, American Mathematical Society, 2005.
- [LSW04] Gregory Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, *The Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, 939–995.
- [Mil] Jason Miller, *Stochastic calculus (notas de clase)*.
- [MP10] Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian motion*, Cambridge University Press, 2010.
- [Mun14] James Munkres, *Topology*, Pearson, 2014.
- [Rud87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1987.
- [RY05] Daniel Revuz and Marc Yor, *Continuous martingales and brownian motion*, Springer, 2005.

- [Sch00] Oded Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, *Isr. J. Math* **118** (2000), no. 10, 221–288.
- [SP12] René Schilling and Lothar Partzsch, *Brownian motion: An introduction to stochastic processes*, De Gruyter, 2012.

