Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

"Representación dual de medidas de riesgo de valor conjunto"

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Presentada por:

Nildo Sinche Chocca

Asesor:

Dr. Abelardo Jordán Liza

Jurado:

Dra. Yboon Victoria García Ramos

Dra. Loretta Betzabe Rosa Gasco Campos

LIMA-PERÚ

2020

Agradecimientos

Deseo agradecer profundamente a mi asesor el Dr. Abelardo Jordan por su paciencia, comprensión y sugerencias que llevaron a enriquecer y completar la presente tesis. También deseo agradecer a los jurados por sus revisiones y sugerencias prácticas, las cuales también enriquecieron esta tesis.
Por otro lado, deseo dedicar este trabajo a mi madre Herminia, a mi padre, a Elder y a todos mis hermanos. Gracias por su apoyo.

Resumen

En las últimas décadas se ha desarrollado la construcción de una teoría matemática, de base probabilística, sobre las medidas de riesgo, debido a la necesidad de administrar el riesgo de una posición financiera. En la presente tesis se hace una presentación exhaustiva de las medidas de riesgo de valor conjunto, conjuntos de aceptación y la conexión biunívoca entre ellas. Luego, se expone de manera rigurosa una representación dual de las medidas de riesgo de valor conjunto. Con esa finalidad, se despliegan las herramientas necesarias como el análsis convexo de las aplicaciones de valor conjunto.

Índice general

Introducción . . . 5

1. Retículos y definiciones preliminares **10**

1.1. Relaciones y retículos . . . 10

1.2. Espacios colineales ordenados . . . 14

1.3. Un concepto de solución de un problema de minimización . . . 19

1.3.1. Concepto de solución de un problema de minimización de funciones de valor vectorial bajo el enfoque de retículo completo . . . 20

1.3.2. Concepto de solución de un problema de minimización de aplicaciones de valor conjunto bajo el enfoque de retículo completo . . . 21

2. Análisis convexo de aplicaciones de valor conjunto **24**

2.1. Aplicaciones de valor conjunto . . . 24

2.2. Escalarización de aplicaciones de valor conjunto . . . 30

2.3. Conjugada de Fenchel para aplicaciones de valor conjunto . . . 38

2.4. Derivadas direccionales y subdiferenciales . . . 44

3. Medida de riesgo de valor conjunto **58**

3.1. Medida de riesgo de valor escalar . . . 58

3.2. Medida de riesgo de valor conjunto . . . 63

4. Representación dual de una medida de riesgo **72**

4.1. Representación dual de una medida de riesgo escalar . . . 72

4.2. Representación dual de una medida de riesgo de valor conjunto . . . 74

5. Conclusiones **91**

A. Espacio vectorial topológico real **92**

A.1. Espacio vectorial real 92

A.2. Espacios topológicos 93

A.3. Espacio vectorial topológico 94

A.4. Conjugada de Fenchel y subdiferenciales en $\mathbb{R}^n$ 96

Bibliografía **98**

Introducción

En el mercado financiero se comercializan activos cuyos resultados futuros son inciertos e incluyen riesgo para los inversionistas, por lo que gestionar tales riesgos es de mucha importancia. Desde hace 60 años aproximadamente se ha estado desarrollando la teoría del riesgo financiero al observarse la gran importancia de no sólo estudiar el rendimiento de una posición financiera sino también el riesgo que conlleva. Una posición financiera se ve como una variable aleatoria que asigna a cada estado de la naturaleza w un número real, este número es el valor de la posición financiera cuando ocurre el estado w. Las medidas de riesgo están diseñadas para tener en cuenta la compensación entre las magnitudes de los valores que puede tomar una posición, y el riesgo o la variabilidad de estos valores. Matemáticamente, son asignaciones de un espacio de variables aleatorias a los reales. La elección de la medida de riesgo determina un perfil de riesgo de inversión.
En el año 1999 Artzner, Delbaen, Eber y Heath [1] presentaron las medidas de riesgo coherentes al enunciar cuatro axiomas que debería cumplir cualquier medida de riesgo razonable, esto implicó que no es posible establecer una función arbitraria como medida de riesgo.
Jouini, Meddeb y Touzi [11] extendieron la noción de medida de riesgo coherente para permitir portafolios aleatorios con valores en $\mathbb{R}^d$, cada componente de este portafolio corresponde a un mercado de valores diferente. Se considera portafolios valoradas en $\mathbb{R}^d$, pues en general los inversores no pueden agregar su portafolio debido a problemas de liquidez y/o costos de transacción entre los diferentes mercados. Jouini, Meddeb y Touzi introdujeron el concepto de medidas coherentes de riesgo de valor conjunto. La pregunta básica a responder para el estudio de medidas de riesgo de valor conjunto es cómo evaluar el riesgo financiero de un portafolio multivariado en términos de más de un instrumento de referencia, por ejemplo, si el regulador acepta depósitos en más de una moneda. Esto es de particular importancia si se deben pagar los costos de transacción por cada transacción entre activos.

Por otro lado, en [1] Artzner, Delbaen, Eber y Heath muestran que cualquier medida de riesgo coherente surge como el supremo del valor negativo esperado del portafolio, para alguna colección de “escenarios ”. En términos matemáticos, ellos demuestran que una medida de riesgo coherente ρ puede representarse como:

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathscr{P}} (E^Q[-X])$$

para alguna colección $\mathscr{P}$ de medidas de probabilidad en un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, donde X es un portafolio definida sobre $(\Omega, \mathscr{F})$. Esta representación puede extenderse a medidas de riesgo convexa, de hecho, Föllmer y Schied [3] muestran que cada medida de riesgo convexa y semicontinua inferior puede expresarse como la conjugada de alguna función de "penalización", definida en un espacio de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a alguna probabilidad de referencia. De forma precisa, este resultado es

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{P}} (E^Q[-X] - \alpha(Q))$$

para alguna colección $\mathscr{P}$ de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a alguna probabilidad P.
Las representaciones que acabamos de mencionar se denominan representación dual o robusta de la medida de riesgo y entre otras cosas son usadas para calcular portafolios óptimos y evaluar su valor de flexibilidad (Lüthi y Doege, 2005). Por ejemplo, la composición de un portafolio óptimo con respecto a su CVaR puede calcularse utilizando la representación dual de esta medida de riesgo (Rockafellar y Uryasev, 2000; Shapiro et al., 2009). Además, las representaciones son empleadas para definir medidas de riesgo a partir de otras funciones que son de interés y característica particular, por ejemplo ver el capítulo 4.4 de [3].
Teniendo en cuenta la relevancia de las medidas de riesgo de valor conjunto y la importancia de las representaciones duales, los objetivos de esta tesis son:

- Desarrollar la extensión, al caso de valor conjunto, de algunos conceptos clásicos del análisis convexo de funciones reales.
- Hacer una presentación exhaustiva de las medidas de riesgo de valor conjunto, conjuntos de aceptación y la conexión entre ellas.
- Exponer de manera detallada una representación dual de las medidas de riesgo de valor conjunto.

En ese sentido, en el capítulo 1 de esta tesis presentamos la construcción de los retículos completos y los espacios colineales que emplearemos para discutir conceptos de solución de un problema de minimización bajo el enfoque de retículo completo, para extender y desplegar resultados clásicos del análisis convexo a aplicaciones de valor conjunto y para representar el espacio imagen de las medidas de riesgo de valor conjunto.

En el capítulo 2 desarrollamos definiciones y resultados preliminares de las aplicaciones de valor conjunto; dentro de eśtos se encuentran una caracterización de las aplicaciones semicontinuas inferiores, y una "extensión" del teorema clásico de Weierstrass. Luego, presentamos las escalarizaciones de aplicaciones de valor conjunto y demostramos de manera exaustiva las caracterizaciones de las aplicaciones de valor conjunto mediante estas funciones escalares. Seguidamente, definimos las conjugadas de Fenchel, demostramos las principales propiedades de estas y probamos el teorema de Fenchel-Moreau para aplicaciones de valor conjunto. Después, desarrollamos la extensión al caso de valor conjunto de las derivadas direccionales y las subdiferenciales. Finalizamos este capítulo caracterizando los "infimizadores" de aplicaciones de valor conjunto.

En el capítulo 3 presentamos como prefacio las medidas de riesgo de valor escalar, seguidamente estudiamos las medidas de riesgo de valor conjunto, los conjuntos de aceptación y demostramos la relación biunívoca de estos últimos.

En el capítulo 4 como preámbulo hacemos un resumen de las representaciones duales para medidas de riesgo de valor escalar. Luego, presentamos las aplicaciones "lineales"que sustituirán a las esperanzas en la representación dual del caso escalar y se demuestran algunas propiedades de estas aplicaciones dentro de las cuales se encuentran la aditividad y la homogeneidad positiva. Seguidamente, definimos las conjugadas de una aplicación en el sentido Legendre - Fenchel, y demostramos de manera detallada las caracterizaciones de estas mediante su escalarización. Finalmente, calculamos la conjugada en el sentido Legendre - Fenchel de las medidas de riesgo convexa y desarrollamos una representación dual de las medidas de riesgo de valor conjunto.
Esta tesis está basado principalmente en los trabajos de Hamel, Heyde [6] y Hamel, Heyde, Löhne [9].

Notaciones

En este trabajo se usarán las siguientes notaciones:

- X, Z: Espacios vectoriales topológicos.
- X^*: Espacio dual topológico de X.
- $C \subseteq Z$: Cono convexo.
- $C^+ \subseteq Z^*$: Cono dual positivo de C.
- $A \preceq_C B \leftrightarrow B \subseteq A + C$.
- $\mathscr{P}(Z)$: Conjunto potencia de Z.
- $P(Z, C) := \{A \in \mathscr{P}(Z) : A = A + C\}$.
- $\mathscr{A} \subseteq P(Z, C)$
- $\operatorname{ínf} \mathscr{A} := \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$.
- $\sup \mathscr{A} := \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$.
- $A \dot{-} B := \operatorname{ínf}\{D \in P(Z, C) : A \supseteq B + D\}$.
- $\mathscr{F}(Z, C) := \{A \in \mathscr{P}(Z) : A = cl(A + C)\}$.
- $\mathscr{G}(Z, C) := \{A \in \mathscr{P}(Z) : A = clco(A + C)\}$.
- $\overline{\mathbb{R}}$: Los reales extendidos.
- $MinA$: Conjunto de elementos minimales de A.
- $\sigma_A^{\Delta}(z^*) := \operatorname{ínf}\limits_{z \in A} z^*(z)$.
- $\varphi_{f,z^*}(x) := \operatorname{ínf}\limits_{z \in f(x)} z^*(z)$.
- $S_{(x^*, z^*)}(x) := \{z \in Z : x^*(x) \leq z^*(z)\}$.
- $H^+(z^*) := \{z \in Z : z^*(z) \geq 0\}$.
- $E[X]$: Esperanza de X.

- $L_d^p := \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d \; v.a. : E[|X|^p] < +\infty\}$.
- $L_d^p(K) := \{X \in L_d^p : \; X \in K \text{ c.t.p.}\}$.

Capítulo 1

Retículos y definiciones preliminares

En este capítulo presentamos la construcción de dos estructuras algebraicas y de orden que son una opción ideal como espacio imagen de aplicaciones de valor conjunto, estos son lo denominados retículos completos denotados por $\mathscr{F}(Z, C)$ y $\mathscr{G}(Z, C)$. Estos conjuntos destacan entre muchos conceptos en las teorías de problemas de optimización de valor conjunto y la teoría de dualidad en el esquema de aplicaciones de valor conjunto. Además, las medidas de riesgo de valor conjunto a tratar serán tales que tomarán valores en $\mathscr{G}(Z, C)$.
Por otro lado, siguiendo [9], hacemos una breve introducción a un concepto de solución del problema de optimización aplicaciones de valor conjunto, caso minimización.

1.1. Relaciones y retículos

En esta sección presentamos el estudio de relaciones de orden, en ciertas colecciones de conjuntos, generados por un cono convexo. Estas relaciones permiten la construcción de los retículos.
Sea Z un espacio vectorial real (Apéndice A.1) y $C \subset Z$ cono convexo con $0 \in C$. Este cono permite definir una relación $\preceq_C$ en Z que es reflexiva y transitiva, mediante:

Definición 1.1.1. *Dados z_1, z_2 en Z, $z_1 \preceq_C z_2 \leftrightarrow z_2 - z_1 \in C$*

Esta relación es compatible con la estructura vectorial de Z debido a:

- Dado $z \in Z$ y $z_1 \preceq_C z_2$, entonces $z_1 + z \preceq_C z_2 + z$.

- Dado $t \geq 0$ y $z_1 \preceq_C z_2$, entonces $tz_1 \preceq_C tz_2$

Definición 1.1.2. *Dados A, B y D subconjuntos de Z*

1. *La suma de Minkowski de A con B, denotado por $A + B$, es definida como*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

   y por convención $A + \emptyset = \emptyset + A = \emptyset$ y $A - B = A + (-B)$, donde $-B = \{-b : b \in B\}$.

2. *Para $t \in \mathbb{R}$ definimos el conjunto $t \cdot D = \{t \cdot d : d \in D\}$, con las convenciones $t \cdot \emptyset = \emptyset$, cuando $t \neq 0$ y $0 \cdot \emptyset = \{0\}$.*

La relación presentada en la Definición 1.1.1 tiene dos extensiones canónicas en el conjunto potencia $\mathscr{P}(Z)$.

Definición 1.1.3. *Dados A, B en $\mathscr{P}(Z)$, definimos las relaciones $\preceq_C$ y $\preceq^C$ mediante*

- *$A \preceq_C B \leftrightarrow B \subseteq A + C$.*
- *$A \preceq^C B \leftrightarrow A \subseteq B - C$.*

Estas relaciones cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 1.1.1.

1. *Las relaciones $\preceq_C$ y $\preceq^C$ son reflexivas y transitivas.*
2. *$A \preceq_C B \leftrightarrow -B \preceq^C -A$*
3. *$A \preceq_C B \leftrightarrow A + C \supseteq B + C$; $A \preceq^C B \leftrightarrow A - C \subseteq B - C$.*

Prueba. Como ilustración solamente probamos 1 y 3

1. La relación $\preceq_C$ es reflexiva, pues siempre se cumple $A \subseteq A + C$.
   Además, si $A \preceq_C B$ y $B \preceq_C D$, entonces $D \subseteq B + C \subseteq A + C$ de aquí $A \preceq_C D$. La prueba para $\preceq^C$ es similar.

3. Es claro que $A \preceq_C B \leftrightarrow B \subseteq A + C \leftrightarrow B + C \subseteq A + C$.

□

Observaciones 1.1.1. *Las relaciones $\preceq_C$ y $\preceq^C$ no son antisimétricas en general, por ejemplo si $Z = \mathbb{R}$, $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ y $C = \mathbb{R}_+$ se tiene $A \preceq_C B$ y $B \preceq_C A$, pero $A \neq B$.*

La relación $\preceq_C$ define una relación de equivalencia en $\mathscr{P}(Z)$ y por ende conjuntos de clases de equivalencia.

Definición 1.1.4. *Para $\preceq_C$ consideramos la relación $\sim_C$ en $\mathscr{P}(Z)$, definida por:*

$$A \sim_C B \leftrightarrow (A \preceq_C B \wedge B \preceq_C A)$$

Es claro que $\sim_C$ es una relación de equivalencia.
Dado $A \in \mathscr{P}(Z)$ si $[A]$ denota la clase de equivalencia de A, se verifica que $[A] = \{B \in \mathscr{P}(Z) : B + C = A + C\}$. Además, denotamos por $\mathscr{C}$ al conjunto de clases de equivalencia, es decir $\mathscr{C} = \{[A] : A \in \mathscr{P}(Z)\}$.

Observaciones 1.1.2.

1. *Si $P(Z, C) = \{A \in \mathscr{P}(Z) : A = A + C\}$ la función $\phi : \mathscr{C} \to P(Z, C)$ definida por $\phi([A]) = A + C$ es una biyección entre $\mathscr{C}$ y $P(Z, C)$, pues:*

   - *Si $[A] = [A']$ entonces $A + C = A' + C$. Esto implica $\phi([A]) = \phi([A'])$. Luego ϕ está correctamente definida.*
   - *Dado $\phi([A]) = \phi([B])$ se tiene $A + C = B + C$, esto implica $[A] = [B]$. Luego ϕ es inyectiva.*
   - *Dado $A \in P(Z, C)$ se tiene $A = A + C$, tomando la clase de equivalencia de A tenemos $\phi([A]) = A + C = A$. En consecuencia ϕ es sobreyectiva.*

   debido a esta biyección se dice que $P(Z, C)$ es el conjunto de clases de equivalencia generado por la relación $\sim_C$.

2. *Sean A, B en $P(Z, C)$ es claro que $A \preceq_C B \leftrightarrow B \subseteq A + C \leftrightarrow B \subseteq A$. En consecuencia*

   $$A \preceq_C B \leftrightarrow A \supseteq B \tag{1.1}$$

   Debido a esto la relación $\preceq_C$ puede ser reemplazado con $\supseteq$ cuando se trabaja en $P(Z, C)$.

Dado un conjunto no vacío W, una relación $\preceq$ en W se denomina relación de orden parcial si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. En esta situación se dice que W es parcialmente ordenado por $\preceq$ y en tal caso se hace referencia a la dupla $(W, \preceq)$.

Definición 1.1.5. *Dado $(W, \preceq)$ parcialmente ordenado. El ínfimo de $V \subseteq W$, V no vacío, es un elemento $\overline{w} \in W$ que cumple:*

- $\overline{w} \preceq v$, *para todo* $v \in V$.

- *Si* $w \preceq v$ *para todo* $v \in V$, *entonces* $w \preceq \overline{w}$.

El supremo de un conjunto también se define de forma usual (como la "menor de las cotas superiores"), no será necesario escribir su definición. Por otro lado, resaltamos que el ínfimo de $V \subset W$ si existe es único y será denotado con $\inf V$.

Definición 1.1.6. *Un conjunto* $(W, \preceq)$ *parcialmente ordenado, se denomina:*

1. ***retículo*** *si* $\inf\{w_1, w_2\}$ *pertenece a* W, *para todo* $w_1, w_2 \in W$.

2. ***retículo completo*** *si cada subconjunto no vacío de* W *tiene un ínfimo en* W.

El conjunto $\mathbb{R}$ con la relación de orden usual es un retículo, mientras que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, con la convención $-\infty < a < +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$, es un retículo completo.
Un retículo de nuestro interés es presentado en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2.

1. *El conjunto* $(P(Z, C), \supseteq)$ *es un retículo completo.*

2. *Dado* $\mathscr{A} \subseteq P(Z, C)$ *no vacío, el ínfimo y el supremo de* $\mathscr{A}$ *con respecto a la relación* $\supseteq$, *vienen dados por* $\inf \mathscr{A} = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ *y* $\sup \mathscr{A} = \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$, *respectivamente.*

Prueba.
Es claro que el conjunto $P(Z, C)$ es parcialmente ordenado por $\supseteq$. Además, el ínfimo de $\mathscr{A} \subseteq P(Z, C)$ es $\inf \mathscr{A} = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ debido a:

- $(\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A) + C = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} (A + C) = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$. De aquí $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A \in P(Z, C)$.

- $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A \supseteq V$ para todo $V \in \mathscr{A}$.

- Sea $B \in P(Z, C)$ tal que $\forall A \in \mathscr{A} : B \supseteq A$ entonces $B \supseteq \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$

El supremo de $\mathscr{A}$ es $\sup \mathscr{A} = \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$, pues:

- $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A \subseteq \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A + C \subseteq \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} (A + C) = \bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$. De esto $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A \in P(Z, C)$.

- $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A \subseteq V$ para todo $V \in \mathscr{A}$.

- Sea $B \in P(Z,C)$ tal que $\forall A \in \mathscr{A}:\ B \subseteq A$ entonces $B \subseteq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$.

$\square$

Por convención asumiremos que si $\mathscr{A} = \emptyset$ entonces ínf $\mathscr{A} = \emptyset$ y sup $\mathscr{A} = Z$. Este supuesto es compatible con lo siguiente: si $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2$ entonces ínf $\mathscr{A}_1 \subseteq$ ínf $\mathscr{A}_2$ y sup $\mathscr{A}_1 \supseteq$ sup $\mathscr{A}_2$, donde $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ son subconjuntos de $P(Z,C)$.
Podemos decir que el "mayor" elemento de $P(Z,C)$ con respecto a $\supseteq$ es $\emptyset$ y el "menor" elemento es Z.

1.2. Espacios colineales ordenados

Siguiendo [9] presentamos el concepto que proporciona el marco algebraico para el análisis del espacio imagen de las aplicaciones de valor conjunto, los denominados espacios colineales.

Definición 1.2.1. *Sea W un conjunto no vacío y dos operaciones, la aditiva $+ : W \times W \to W$ y la multiplicativa $\cdot\ : \mathbb{R}_+ \times W \to W$. El conjunto W junto con estas operaciones se denomina **espacio colineal** si:*

1. *La operación aditiva es asociativa y conmutativa.*

2. *Existe $\theta \in W$ tal que $\theta + w = w$ para todo $w \in W$, θ se denomina elemento neutro.*

3. *La operación multiplicativa verifica:*

   a) $r \cdot (w_1 + w_2) = r \cdot w_1 + r \cdot w_2$; $\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, w_1, w_2 \in W$

   b) $r \cdot (s \cdot w) = (r \cdot s) \cdot w$; $\forall r, s \in \mathbb{R}_+\ \forall w \in W$

   c) $1 \cdot w = w$; $\forall w \in W$

   d) $0 \cdot w = \theta$; $\forall w \in W$

En adelante $(W, +, \cdot)$ denota un espacio colineal.

Definición 1.2.2. *Dado $(W, +, \cdot)$ un espacio colineal y $\preceq$ una relación de orden parcial definido en W. El sistema $(W, +, \cdot, \preceq)$ es llamado **espacio colineal ordenado** si satisface:*

1. *Para todo $w_1, w_2, w \in W$: $w_1 \preceq w_2 \to w_1 + w \preceq w_2 + w$*

2. *Para todo $w_1, w_2 \in W$ y $r \in \mathbb{R}_+$: $w_1 \preceq w_2 \to r \cdot w_1 \preceq r \cdot w_2$.*

Ejemplo 1.2.1. *El conjunto $P(Z,C)$ con las operaciones de Miwkowski según Definición 1.1.2 y con las convenciones $0 \cdot A = C$, $t \cdot \emptyset = \emptyset$ para $A \in P(Z,C)$, $t > 0$ es un espacio colineal cuyo elemento neutro es C.*

La siguiente proposición muestra que el espacio colineal $(P(Z,C),+,\cdot)$ con la relación de orden parcial dada por (1.1) es un espacio colineal ordenado. Esta espacio será donotado por $(P(Z,C),+,\cdot,\supseteq)$

Proposición 1.2.1. *Dados $A, B, C, D \in P(Z,C)$ y $\mathscr{A} \subseteq P(Z,C)$ se verifican:*

1. *Si $A \supseteq B$ y $D \supseteq E$ entonces $A + D \supseteq B + E$.*

2. *Si $A \supseteq B$ entonces $s \cdot A \supseteq s \cdot B$; para todo $s \geq 0$.*

3. $\inf\{\mathscr{A} + B\} = \inf\{\mathscr{A}\} + B$ *;* $\sup\{\mathscr{A} + B\} \supseteq \sup\{\mathscr{A}\} + B$

donde $\mathscr{A} + B = \{A + B : A \in \mathscr{A}\}$

Prueba. Las demostraciones de las afirmaciones 1 y 2 son directas. Probamos la tercera afirmación.

- Dado $A \in \mathscr{A}$ se tiene $A + B \subseteq \inf\{\mathscr{A}\} + B$ esto implica $\inf\{\mathscr{A} + B\} \subseteq \inf\{\mathscr{A}\} + B$. Mientras que para $A \in \mathscr{A}$ se tiene $A + B \subseteq \inf\{\mathscr{A} + B\}$, esto implica $\inf\{\mathscr{A}\} + B \subseteq \inf\{\mathscr{A} + B\}$. Por lo tanto $\inf\{\mathscr{A} + B\} = \inf\{\mathscr{A}\} + B$.

- Por otro lado, si $z \in \sup\{\mathscr{A}\} + B$, entonces $z \in A + B = (A + B)$ para todo $A \in \mathscr{A}$, esto implica que $z \in \sup\{\mathscr{A} + B\}$. Por lo tanto $\sup\{\mathscr{A} + B\} \supseteq \sup\{\mathscr{A}\} + B$.

$\square$

No siempre se cumple $\sup\{\mathscr{A} + B\} = \sup\{\mathscr{A}\} + B$.

Ejemplo 1.2.2. *En $P(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+)$ sean $\mathscr{A} = \{(a,b) + \mathbb{R}^2_+ : a \geq 0, b \geq 0\}$ y $B = \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{R}^2 = \sup\{\mathscr{A} + B\} \supset sup\{\mathscr{A}\} + B = \emptyset$.*

Definición 1.2.3. *Sean $(P(Z,C),+,\cdot,\supseteq)$ y $\mathscr{A} \subseteq P(Z,C)$. El mínimo elemento de $\mathscr{A}$ (si existe) es un $B \in \mathscr{A}$ tal que $B \supseteq A$ para todo $A \in \mathscr{A}$ y el máximo elemento (si existe) es un $B \in \mathscr{A}$ tal que $A \supseteq B$ para todo $A \in \mathscr{A}$.*

En este contexto presentamos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $P(Z,C)$. El conjunto*

$$R_{AB} := \{D \in P(Z,C) : A \supseteq B + D\}$$

tiene un mínimo con respecto a $\supseteq$.

Prueba. Sea $\overline{D} = \inf\{R_{AB}\} = \bigcup_{D \in R_{AB}} D$, tenemos

$$\overline{D} + B = \inf\{R_{AB}\} + B = \inf\{R_{AB} + B\} = \bigcup_{D \in R_{AB}} (D + B) \subseteq A$$

de esto $\overline{D} \in R_{AB}$. Además, es claro que $\overline{D} \supseteq D$, $\forall\ D \in R_{AB}$. Por lo tanto $\overline{D}$ es el mínimo elemento de R_{AB}. □

Una operación entre conjuntos que servirá como sustituto de la "diferencia vectorial usual" se define de la siguiente manera.

Definición 1.2.4. *Sean $A, B \in P(Z,C)$ el inf-residual de A con respecto a B es definido por*

$$A \dot{-} B = \inf\{D \in P(Z,C) : A \supseteq B + D\}$$

Ejemplo 1.2.3. *Sean $Z = \mathbb{R}$ y $C = \mathbb{R}_+$. Dado $D \subseteq \mathbb{R}$ tenemos $D + \mathbb{R}_+ = \bigcup_{d \in D} (d + \mathbb{R}_+)$. De esto*

$$P(Z, \mathbb{R}_+) = \big\{\ [a, +\infty[\ :\ a \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{\ ]a, +\infty[\ :\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

Además, dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $A = a + \mathbb{R}_+$, $B = b + \mathbb{R}_+$, se tiene

$$A \dot{-} B = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \big\{b + r + \mathbb{R}_+ \subseteq a + \mathbb{R}_+\big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \big\{b - a + r + \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}_+\big\} = a - b + \mathbb{R}_+$$

La siguiente proposición establece propiedades elementales de la operación que se acaba de definir. De aquí en adelante Z es un espacio vectorial topológico.

Proposición 1.2.3. *Sea $A, B \in P(Z,C)$ se cumple*

$$A \dot{-} B = \{z \in Z : A \supseteq B + z\}$$

Además, si A es cerrado (convexo) entonces $A \dot{-} B$ es cerrado (convexo).

Prueba. Observamos que $A \dot{-} B$ se puede reescribir así

$$A \dot{-} B = \bigcup_{D \in P(Z,C);\ A \supseteq B + D} D$$

La prueba de $A \dot{-} B = \{z \in Z : A \supseteq B + z\}$ es consecuencia de lo siguiente :

- Si $z \in A \dot{-} B$, entonces $z \in D_0$ para algún D_0 con $D_0 = D_0 + C$ y $A \supseteq B + D_0$. De aquí $A \supseteq B + D_0 \supseteq B + z$. Luego $z \in \{z \in Z : A \supseteq B + z\}$.

- Si $z \in Z$ verifica $A \supseteq B + z$, entonces $z \in D$ con $D = z + C$. Además $A \supseteq B + z = (B + C) + z = B + (z + C) = B + D$ y $D + C = (z + C) + C = z + C = D$, luego $z \in A \dot{-} B$.

Para demostrar la segunda afirmación, notamos que

$$\{z \in Z : B + z \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B} \{z \in Z : z + b \in A\} = \bigcap_{b \in B} \{z \in Z : z \in A + \{-b\}\}$$

De aquí si A es convexo entonces $A + \{-b\}$ es convexo (consecuentemente $A \dot{-} B$ es convexo), si A es cerrado entonces $A + \{-b\}$ es cerrado (consecuentemente $A \dot{-} B$ es cerrado). $\square$

Haciendo un paréntesis presentamos la definición de inf-diferencia en los reales extendidos dada en [15]. Esta operación se empleará en el capítulo 2.

Definición 1.2.5. *Dados $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Definimos la operación inf-diferencia de x con y por*

$$x \dot{-} y := \inf\{z \in \overline{\mathbb{R}} : x \leq y + z\}$$

Esta operación cumple, entre otras, las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.4. *Dado $(\overline{\mathbb{R}}, +, \leq)$. Sean $0 \leq t \in \mathbb{R}$ y $a, b, x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$, entonces:*

1. *$a \dot{-} (+\infty) = -\infty$ y $(-\infty) \dot{-} a = -\infty$.*

2. *$t(a \dot{-} b) = ta \dot{-} tb$.*

3. *Si $a \leq b$, entonces $a \dot{-} x \leq b \dot{-} x$ y $x \dot{-} b \leq x \dot{-} a$.*

4. *$(a + x) \dot{-} (b + x) \leq a \dot{-} b$.*

Prueba. Como ilustración demostraremos 3. Sea $a \leq b$, entonces

$$\{z \in \overline{\mathbb{R}} : b \leq x + z\} \subseteq \{z \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x + z\} \text{ y } \{z \in \overline{\mathbb{R}} : x \leq a + z\} \subseteq \{z \in \overline{\mathbb{R}} : x \leq b + z\}$$

De aquí $a \dot{-} x \leq b \dot{-} x$ y $x \dot{-} b \leq x \dot{-} a$, respectivamente $\square$

Terminamos esta sección presentando dos subespacios colineales de $P(Z,C)$ con los cuales trabajaremos más adelante. La clausura y la envoltura convexa de $A \subseteq Z$ será denotada con $cl(A)$ y $co(A)$, respectivamente. Además, $clco(A)$ denotará la envoltura convexa cerrada de A

Sea $\mathscr{F}(Z,C) := \{A \subseteq Z : A = cl(A+C)\}$. Con respecto a este conjunto tenemos las siguientes observaciones.

Observaciones 1.2.1.

- *$\mathscr{F}(Z,C)$ es subconjunto de $P(Z,C)$, pues $A = cl(A+C) \supseteq A+C \supseteq A$.*

- *La suma de Minkowski no es cerrada en este conjunto, pues si $Z = \mathbb{R}^2$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y = 0\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ se tiene $A, B \in \mathscr{F}(Z,C)$, pero $A+B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \notin \mathscr{F}(Z,C)$.*

De la observación, $\mathscr{F}(Z,C)$ no es colineal con las operaciones suma de Minkowski y la multiplicación usual. El siguiente lema muestra que estas operaciones se pueden extender para conseguir la cerradura en $\mathscr{F}(Z,C)$.

Lema 1.2.1. *Las operaciones, $\oplus : \mathscr{F}(Z,C) \times \mathscr{F}(Z,C) \to \mathscr{F}(Z,C)$, $A \oplus B = cl(A+B)$ y $\odot : \mathbb{R}_+ \times \mathscr{F}(Z,C) \to \mathscr{F}(Z,C)$, $t \odot B = t \cdot B$ (como en la Definición 1.1.2) con las convenciones $0 \odot A = clC$, $t \odot \emptyset = \emptyset$ para todo $A \in \mathscr{F}(Z,C)$ y $t > 0$, $0 \odot \emptyset = clC$, son cerradas en $\mathscr{F}(Z,C)$.*

Prueba.

- Sean $A, B \in \mathscr{F}(Z,C)$, demostremos $A \oplus B = cl(A \oplus B + C)$.

  Como $A \oplus B \subseteq cl(A \oplus B + C)$ basta verificar $A \oplus B \supseteq cl(A \oplus B + C)$.

  Afirmación Se cumple $cl(A+B) \supseteq cl(A+B) + C$, en efecto.

  Sean $w = u+c \in cl(A+B)+C$ con $u \in cl(A+B)$, $c \in C$ y consideremos W una vecindad arbitraria de w, entonces existen dos vecindades V_1 y V_2 de u y c respectivamente, tal que $V_1+V_2 \subseteq W$. Sabemos $c \in C \cap V_2$ y por definición de clausura existe $x \in (A+B) \cap V_1$. De esto

  $$x + c \in (A+B+C) \cap (V_1+V_2) = (A+B) \cap (V_1+V_2) \subseteq (A+B) \cap W$$

  Luego en cada vecindad de w existen elementos de $A+B$, de aquí $w \in cl(A+B)$. Por lo tanto $cl(A+B) \supseteq cl(A+B) + C$.

  Tomando clausura en $cl(A+B) \supseteq cl(A+B) + C$ tenemos $A \oplus B \supseteq cl(A \oplus B + C)$.

- Sea $A \in \mathscr{F}(Z,C)$ debemos demostrar $tA = cl(tA + C)$. De $A = A + C$ tenemos $tA = tA + C$. Tomando clausura $cl(tA) = cl(tA + C)$, de aquí $tcl(A) = cl(tA + C)$ y así $tA = cl(tA + C)$.

$\square$

El siguiente lema muestra que $\mathscr{F}(Z,C)$ junto con las operaciones que se acaban de extender, es un espacio colineal ordenado.

Lema 1.2.2. *El espacio $(\mathscr{F}(Z,C), \oplus, \odot, \supseteq)$ es un espacio colineal ordenado cuyo elemento neutro es $cl(C)$.*

Prueba. La verificación de las propiedades es directa, como ilustración veamos que $cl(C)$ es el elemento neutro. Debemos probar $A \oplus cl(C) = A$, para todo $A \in \mathscr{F}(Z,C)$. De

$$A + cl(C) = cl(A) + cl(C) \subseteq cl(A + C) = A$$

obtenemos $cl(A + cl(C)) \subseteq A$, luego $A \oplus cl(C) \subseteq A$. Además, se cumple $A \subseteq A \oplus cl(C)$ y por lo tanto $A \oplus cl(C) = A$. $\square$

Además, $(\mathscr{F}(Z,C), \supseteq)$ es un retículo completo si definimos para cualquier $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(Z,C)$ el ínfimo y el supremo como

$$\inf_{\mathscr{F}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = cl \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A; \quad \sup_{\mathscr{F}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$$

con la convención: Si $\mathscr{A} = \emptyset$ entonces $\inf\limits_{\mathscr{F}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = \emptyset$ y $\sup\limits_{\mathscr{F}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = Z$

Otro espacio colineal ordenado completo de mucha importancia es presentado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. *Consideremos $\mathscr{G}(Z,C) = \{A \subset Z : A = clco(A + C)\}$ subconjunto de $\mathscr{F}(Z,C)$. Con las operaciones establecidas en el Lema 1.2.1, $(\mathscr{G}(Z,C), \oplus, \odot)$ es un espacio colineal. Además $(\mathscr{G}(Z,C), \supseteq)$ es un retículo completo si hacemos*

$$\inf_{\mathscr{G}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = clco \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A; \quad \sup_{\mathscr{G}(Z,C),\supseteq} \mathscr{A} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$$

1.3. Un concepto de solución de un problema de minimización

En este sección presentamos el concepto de solución de los problemas de minimización de aplicaciones de valor conjunto basado en el "enfoque de retículo completo". Este enfoque se desarrolló en las tesis [13] , [4]. Antes hacemos una breve presentación de este enfoque para el caso de aplicaciones de valor vectorial, esto servirá como preámbulo para fijar las ideas que se establecerán en el caso de valor conjunto.

1.3.1. Concepto de solución de un problema de minimización de funciones de valor vectorial bajo el enfoque de retículo completo

En la teoría de la optimización de valores vectoriales, hay varios conceptos de soluciones, como soluciones eficientes, soluciones débilmente eficientes y soluciones adecuadamente eficientes. En contraste con este enfoque clásico en esta parte presentamos el concepto de solución basado en el enfoque de retículo completo y el "alcance del ínfimo", desarrollados en [14] y [10]

Sean X un conjunto no vacío , $S \subset X$ no vacío y $f : X \to Z$ una función con valores en el espacio vectorial Z, donde $(Z, \preceq)$ es un retículo completo. El problema de optimización es:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in S \end{array} \qquad \text{(Q)}$$

Un concepto estándar de solución es el siguiente.

Definición 1.3.1. *Un elemento $\overline{x} \in S$ se llama una solución eficiente de (Q) si*

$$x \in S \wedge f(x) \preceq f(\overline{x}) \to f(x) = f(\overline{x})$$

El conjunto de soluciones eficientes de Q será denotado por $Eff(Q)$.

Dado $A \subset Z$ el conjunto minimal de A se define por

$$MinA := \{z \in A : (y \in A \wedge y \preceq z) \to y = z\}$$

Un elemento de $MinA$ será denominado elemento minimal de A.
Dado $B \subseteq X$ con la notación $f[B] := \{f(x) : x \in B\}$ es directo ver que $Minf[S] = f[Eff(Q)]$

Ejemplo 1.3.1. *Sean $X = Z = \mathbb{R}^2$ y Z parcialmente ordenado con el orden natural generado por el cono $\mathbb{R}^2_+$ y*

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + 2x_2 \geq 3\}$$

Para la función objetivo $f(x_1, x_2) = (0, x_2)$ el conjunto de elementos eficientes es

$$Eff(Q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 3, x_2 = 0\}$$

Además, que $f(Eff(Q)) = \{(0, 0)\}$.

El concepto de solución basado en el enfoque de retículo completo y el "alcance del ínfimo" es el siguiente.

Definición 1.3.2. *Un subconjunto $\overline{X} \subseteq S$ es una solución de (Q) si se verifican las condiciones:*

i. $f(\overline{X}) = Minf(S)$

ii. $\inf_{x\in\overline{X}} f(x) = \inf_{x\in S} f(x)$

Ejemplo 1.3.2. *Consideremos los conjuntos dados en el ejemplo 1.3.1 y el orden usual de $\mathbb{R}^2$.*

- *Si la función objetivo es $f(x_1, x_2) = (0, x_2)$, entonces*

$$Eff(Q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 3, x_2 = 0\}$$

y cualquier subconjunto no vacío $\overline{X} \subseteq Eff(Q)$ verifica $f(\overline{X}) = (0,0) = Minf[S]$ y $\inf_{x\in\overline{X}} f(x) = (0,0) = \inf_{x\in S} f(x)$. En consecuencia la solución de (Q) no es única.

- *Si la función objetivo es $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, entonces se puede comprobar que $Eff(Q)$ es la única solución.*

A continuación extendemos este concepto de solución a la minimización de aplicaciones de valor conjunto.

1.3.2. Concepto de solución de un problema de minimización de aplicaciones de valor conjunto bajo el enfoque de retículo completo

Recordemos que $(\mathscr{F}(Z,C), \oplus, \odot, \supseteq)$ o $(\mathscr{G}(Z,C), \oplus, \odot, \supseteq)$ son retículos completos y ordenados. Los conceptos de ínfimo y minimal en estos espacios son
Dado $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}(Z,C)$ o $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{G}(Z,C)$

- $\inf \mathscr{A} = cl \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$, $\inf \mathscr{A} = cl\ co \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ cuando $\mathscr{A}$ está en $\mathscr{F}(Z,C)$ o en $\mathscr{G}(Z,C)$ respectivamente.

- El elemento minimal de $\mathscr{A}$ con respecto a $\supseteq$ es un conjunto $B \in \mathscr{A}$ tal que si $A \in \mathscr{A}, A \supseteq B$, implica $A = B$.

El conjunto de elementos minimales de $\mathscr{A}$ será denotado por $Min\mathscr{A}$

Definición 1.3.3. *Dado* $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(Z,C)$ *o* $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}(Z,C)$. *Un subconjunto* $\mathscr{B}$ *de* $\mathscr{A}$ *se llama generador del ínfimo de* $\mathscr{A}$ *si* $\operatorname{ínf} \mathscr{B} = \operatorname{ínf} \mathscr{A}$

En el siguiente ejemplo vemos subconjuntos generadores del ínfimo.

Ejemplo 1.3.3. *Sea* $Z = \mathbb{R}^2, C = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ *y* $\mathscr{A} = \{A_t : t \in [0,1]\}$, *donde* $A_t = [-1+t, t] \times \mathbb{R}_+$. *En esta caso dado* $A_t \in \mathscr{A}$, *si* $A_z \supseteq A_t \rightarrow A_z = A_t$, *cada* A_t *es minimal con respecto a* $\supseteq$; *además* $\operatorname{ínf} \mathscr{A} = A_0 \cup A_1 = [-1,1] \times \mathbb{R}_+$. *Se observa que el ínfimo está generado solo por dos elementos minimales (no todos los elementos minimales se requieren para generar el ínfimo).*

La noción de minimalidad en el enfoque de retículo completo consiste en encontrar un conjunto de minimales que generan el ínfimo de $\mathscr{A}$, es decir dado $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}(Z,C)$ (o $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{G}(Z,C)$) hallar un subconjunto de $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $\operatorname{ínf} \mathscr{B} = \operatorname{ínf} \mathscr{A}$ y $\mathscr{B} \subseteq Min\mathscr{A}$.
Este enfoque se emplea en [9] para dar el siguiente concepto de solución de un problema de minimización.

Definición 1.3.4. *Dado* X *conjunto no vacío y* $f : X \rightarrow \mathscr{F}(Z,C)$ *(o* $f : X \rightarrow \mathscr{G}(Z,C)$ *) una aplicación.*

a) *Un conjunto* $M \subset X$ *se llama un infimizador de* f *si* $\operatorname{ínf} f[M] = \operatorname{ínf} f[X]$

b) *El elemento* $\overline{x} \in X$ *se denomina minimizador de* f *si* $f(\overline{x})$ *es minimal de* $f[X]$.

c) *Un conjunto* $M \subset X$ *es solución del problema:*

$$\begin{array}{ll} Min & f(x) \\ S.A. & x \in X \end{array} \qquad (P)$$

si M *es infimizador de* f *y cada elemento* $\overline{x} \in M$ *es un minimizador de* f, *éste conjunto se llama solución completa si el conjunto* $f[M]$ *contiene todos los elementos minimales de* $f[X]$

Para establecer un resultado inicial mencionamos la siguiente definición.

Definición 1.3.5. *Un conjunto* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}(Z,C)$ *(o* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{G}(Z,C)$*) satisface la propiedad de dominación si para todo* $A \in \mathscr{A}$, *existe* $\overline{A} \in Min\mathscr{A}$ *tal que* $\overline{A} \supseteq A$

Proposición 1.3.1. *Sea* $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ *(o* f*:*$X \to \mathscr{G}(Z, C)$ *) donde* $f[X]$ *satisface la propiedad de dominación, entonces*

$$M = \{x \in X : f(x) \in Minf[X]\}$$

es una solución completa del problema de optimización.

Prueba. De la propiedad de dominación se tiene $\bigcup_{y \in M} f(y) \supseteq \bigcup_{x \in X} f(x)$, además de $M \subset X$ se tiene $\bigcup_{x \in X} f(x) \supseteq \bigcup_{x \in M} f(x)$, luego

$$\text{ínf} f[M] = \text{ínf} f[X]$$

Desde que M es el conjunto minimizadores de $f[X]$, M es solución completa del problema (P). $\square$

Capítulo 2

Análisis convexo de aplicaciones de valor conjunto

En este capítulo daremos resultados importantes del análisis convexo de aplicaciones de valor conjunto, estudiaremos la escalarización de estas aplicaciones y probaremos una caracterización de los infimizadores de f utilizando la subdiferencial. Este capítulo está principalmente basado en [9], [7] y [15].

2.1. Aplicaciones de valor conjunto

Sean X y Z espacios vectoriales topológicos, en adelante N_X, N_Z denotarán una base de vecindades de 0 en X y Z respectivamente y una vecindad de $\bar{x} \in X$ será denotado por $\bar{x}+U$ con $U \in N_X$ o simplemente como $U(\bar{x})$ (abierto que contiene a $\bar{x}$). Siguiendo [9], el objetivo de esta sección es presentar conceptos iniciales de la aplicaciones de valor conjunto y algunos resultados importantes de convexidad para estas aplicaciones, en particular probaremos un teorema similar al clásico teorema de Weierstrass.

Definición 2.1.1. *Dado $f : X \to \mathscr{P}(Z)$.*

1. *La gráfico de f se define como el conjunto $Graf(f) = \{(x, y) \in X \times Z : y \in f(x)\}$*

2. *El dominio de f es el conjunto $Dom(f) = \{x \in X : f(x) \neq \emptyset\}$*

Definición 2.1.2. *La aplicación $f : X \to P(Z, C)$ se denomina:*

1. *Convexa si $Graf(f)$ es un conjunto convexo en $X \times Z$.*

2. *Positivamente homogéneo si $Graf(f)$ es un cono en $X \times Z$.*

3. *Sublineal si $Graf(f)$ es un cono convexo en $X \times Z$.*

4. *Propia si $Dom(f) \neq \emptyset$ y para todo $x \in X,\ f(x) \neq Z$*

En la siguiente proposición presentamos algunas caracterizaciones de las definiciones previas.

Proposición 2.1.1. *La aplicación $f : X \to P(Z, C)$*

a) es convexa si y solo si $\forall x_1, x_2 \in X,\ t \in (0,1) : f(tx_1+(1-t)x_2) \supseteq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

b) es positivamente homogénea si y solo si $\forall x \in X$ y $t > 0 : f(tx) \supseteq tf(x)$.

c) es sublineal si y solo si $\forall x_1, x_2 \in X,\ s, t > 0 : f(sx_1 + tx_2) \supseteq sf(x_1) + tf(x_2)$.

Prueba. La demostración de estas afirmaciones no son complicadas, como ilustración redactamos la prueba de la parte a).

- ($\to$) Debemos probar que $f(tx_1 + (1-t)x_2) \supseteq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X,\ t \in (0, 1)$.
  Sea $z = tu_1 + (1-t)u_2 \in tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, donde $u_1 \in f(x_1)$, $u_2 \in f(x_2)$, por definición $(x_1,\ u_1); (x_2,\ u_2) \in Graf(f)$. De la convexidad de f

$$(tx_1 + (1-t)x_2,\ tu_1 + (1-t)u_2) \in Graf(f)$$

  esto implica $z = tu_1 + (1-t)u_2 \in f(tx_1 + (1-t)x_2)$. Por lo tanto $f(tx_1 + (1-t)x_2) \supseteq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

- ($\leftarrow$) Debemos demostrar que f es convexa.
  Sean $(x_1,\ u_1), (x_2,\ u_2) \in Graf(f)$ y $0 < t < 1$, tenemos

$$tu_1 + (1-t)u_2 \in tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \subseteq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

  De esto $t(x_1,\ u_1) + (1-t)(x_2,\ u_2) \in Graf(f)$. En consecuencia f es convexa.

□

Las aplicaciones convexas tienen las siguientes propiedades

Proposición 2.1.2. *Sea $f : X \to P(Z, C)$ una aplicación convexa, entonces* *a) Para todo $x \in X$, $f(x)$ es convexo (f es de valores convexos)*

b) Para todo $z \in Z$, $L_f(z) = \{x \in X : z \in f(x)\}$ es convexo.

c) $Dom(f)$ es convexo.

Prueba. Como ilustración solamente redactamos la prueba de la parte c).
Sean $x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $t \in]0, 1[$, de la definición de dominio existen $u_1 \in f(x_1)$ y $u_2 \in f(x_2)$. De la proposición anterior

$$tu_1 + (1-t)u_2 \in tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \subseteq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

de aquí $f(tx_1 + (1-t)x_2) \neq \emptyset$. Luego $tx_1 + (1-t)x_2 \in Dom(f)$. □

El conjunto $L_f(z)$ se denominará conjunto de nivel z de f, la parte b) de la proposición anterior dice que este conjunto es convexo cuando f es convexa.

Definición 2.1.3. *La aplicación $f : X \to P(Z, C)$ se denomina:*

1. *de valores cerrados si para todo $x \in X$ el conjunto $f(x)$ es cerrado.*

2. *de nivel cerrado si para todo $z \in Z$, $L_f(z)$ es cerrado.*

3. *cerrada si $Graf(f)$ es un conjunto cerrado de $X \times Z$.*

Observaciones 2.1.1.

- *La función $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ es de nivel cerrado si y solo si para todo $A \in \mathscr{F}(Z, C)$ el conjunto $L_f(A) := \{x \in X : f(x) \supseteq A\}$ es cerrado. Este resultado se deprende de*

$$\{x \in X : f(x) \supseteq A\} = \bigcap_{a \in A} \{x \in X : a \in f(x)\}$$

Recordemos que la intersección de un familia de conjuntos cerrados es cerrado.

Toda aplicación cerrada tiene niveles cerrados (como se demostrará más adelante) pero lo recíproco no siempre es cierto en general, el siguiente ejemplo justifica esto.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $X = \mathbb{R}$,$Z = \mathbb{R}^2$, $C = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ y*

$$f(x) = \begin{cases} (x,\ x+1) + C & si\ 0 \leq x < 1 \\ (1,\ 4) + C & si\ x = 1 \\ \emptyset & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.1}$$

Si $x_k = 1 - 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$ tenemos $f(x_k) = \{(1-1/k,\ 2-1/k+t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$, de aquí $z_k = (1-1/k,\ 2-1/k) \in f(x_k)$ y así $(x_k, z_k) \in Graf(f)$. Además $z_k \to (1, 1/2)$ y $x_k \to 1$ pero $(1, 1/2) \notin f(1)$. Por lo tanto el gráfico no es cerrado.
Por otro lado el conjunto de nivel $z = (z_1, z_2)$ de f

$$L_f(z_1, z_2) = \begin{cases} \{z_1\} & si\ 0 \leq z_1 < 1; z_2 > z_1 + 1 \\ \{1\} & si\ z_1 = 1, z_2 \geq 4 \\ \emptyset & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.2}$$

es cerrado. Luego, la aplicación no es cerrada pero es de nivel cerrado.

Proposición 2.1.3. *Si $f : X \to P(Z, C)$ es cerrada, entonces es de valores cerrados y de nivel cerrado.*

Prueba. Consideremos el conjunto $Graf(f)$ cerrado en $X \times Z$.

- Sea $x \in Dom(f)$ y $z \in (f(x))^c$ entonces $(x, z) \notin Graf(f)$. Existen $U(x)$ (vecindad de x) y $V(z)$ (vecindad de z) tales que

  $$\{x\} \times V(z) \subset U(x) \times V(z) \subset (Graf(f))^c$$

  De donde $V(z) \subset (f(x))^c$. Por lo tanto $(f(x))^c$ es abierto y en consecuencia $f(x)$ es cerrado.

- Sea $x \in (L_f(z))^c$ entonces $(x, z) \notin Graf(f)$, de aquí existen $U(x)$ (vecindad de x) y $V(z)$ (vecindad de z) tales que

  $$U(x) \times \{z\} \subset U(x) \times V(z) \subset (Graf(f))^c$$

  De aquí $U(x) \subset (L_f(z))^c$. De esta manera $(L_f(z))^c$ es abierto y en consecuencia $L_f(z)$ es cerrado.

$\square$

Esta proposición muestra que una función cerrada con valores en $P(Z, C)$ en realidad cae en $\mathscr{F}(Z, C)$. Por lo tanto, podemos restringir la discusión de aplicaciones cerradas a aplicaciones de valores en $\mathscr{F}(Z, C)$.
El límite inferior de $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ en $\bar{x} \in X$ se define como

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \sup_{U \in N_X} \inf_{x \in \bar{x} + U} f(x)$$

De la definición de ínfimo y supremo en $\mathscr{F}(Z, C)$ tenemos

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \bigcap_{U \in N_X} cl(\bigcup_{x \in \bar{x}+U} f(x))$$

Definición 2.1.4. *La función $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ se denomina retículo-semincontinua inferior (retículo s.c.i) en $\bar{x} \in X$ si*

$$f(\bar{x}) \supseteq \liminf_{x \to \bar{x}} f(x)$$

Diremos que f es retículo-semicontinua inferior si es retículo semicontinua inferior en cualquier punto de X.

Una definición similar se tiene para aplicaciones con valores en $\mathscr{G}(Z, C)$. Además de las definiciones de ínfimo y supremo

$$f(\bar{x}) \supseteq \liminf_{x \to \bar{x}} f(x) \leftrightarrow f(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} f(x) \tag{2.3}$$

Definición 2.1.5. *Una función $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ se denomina retículo -semincontinua superior (retículo- s.c.s.) en $\bar{x} \in X$ si*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} f(x) = \inf_{U \in N_X} \sup_{x \in \bar{x}+U} f(x) = cl \bigcup_{U \in N_X} \bigcap_{x \in \bar{x}+U} f(x) \supseteq f(\bar{x})$$

La aplicación se denomina retículo- semicontinua superior (retículo-s.c.s.) si es retículo-s.c.s para todo $x \in X$.

El siguiente resultado muestra la equivalencia entre aplicaciones retículo-semincontinua inferior y aplicaciones cerradas con valores en $\mathscr{F}(Z, C)$

Proposición 2.1.4. *La función $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ es un retículo s.c.i si y solo si es cerrada.*

Prueba. La equivalencia resulta al reescribir la cerradura de $Graf(f)$ y la semicontinuidad inferior de f en $\bar{x}$ en términos de vecindades.
Notamos que $Graf(f)$ es cerrado si y solo si $cl(Graf(f)) \subseteq Graf(f)$. De aquí

$$cl(Graf(f)) \subseteq Graf(f) \Leftrightarrow [(\bar{x}, \bar{z}) \in cl(Graf(f)) \to \bar{z} \in f(\bar{x})]$$

Luego

$$cl(Graf(f)) \subseteq Graf(f) \Leftrightarrow [\big(\forall\, U(\bar{x}),\ \forall\, V(\bar{z})\ \exists\, x \in U(\bar{x}),\ \exists\, z \in V(\bar{z}) : z \in f(x)\big) \to \bar{z} \in f(\bar{x})] \tag{2.4}$$

Por otro lado, la semicontinuidad inferior en $\bar{x}$ es: $\bar{z} \in \liminf_{x \to \bar{x}} f(x) \to \bar{z} \in f(\bar{x})$, esto es equivalente a

$$(\forall\, U(\bar{x}) : \bar{z} \in cl \bigcup_{x \in U(\bar{x})} f(x)) \to \bar{z} \in f(\bar{x})$$

en consecuencia s.c.i. equivale a

$$(\forall\, U(\bar{x}),\ \forall\, V(\bar{z})\ \exists\, x \in U(\bar{x}),\ \exists\, z \in V(\bar{z}) : z \in f(x)) \to \bar{z} \in f(\bar{x})$$

Luego por (2.4), s.c.i. es equivalente a la cerradura de f $\square$

La siguiente proposición permite demostrar un resultado similar al teorema de Weierstrass para aplicaciones escalares.

Proposición 2.1.5. *Sea $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ una aplicación de nivel cerrado con dominio compacto, entonces $f[X]$ satisface la propiedad de dominación.*

Prueba. Dado $x \in X$ debemos encontrar un $\bar{A} \in Minf[X] : \bar{A} \supseteq f(x)$.
Dado $x \in X$ fijo y arbitrario. Sea $A = f(x)$ y consideremos el conjunto

$$f(L_f(A)) = \{y \in f(X) : y \supseteq A\}$$

Basta probar que $f(L_f(A))$ tiene un mimimal, en efecto

- Sea B minimal de $f(L_f(A))$, se tiene $B \supseteq A$.
  Si $f(x) \supseteq B$ entonces

  $$f(x) \supseteq A \Rightarrow f(x) \in f(L_f(A)) \text{ y } f(x) \supseteq B \Rightarrow f(x) = B$$

  Esto quiere decir que $B \in Minf[X]$ con $B \supseteq A$.

Para probar que $f(L_f(A))$ tiene minimal, por el Lema de Zorn hay que verificar que toda cadena de $f(L_f(A))$ tiene una cota inferior.
Por otro lado, toda cota inferior en $f(X)$, de alguna cadena de $f(L_f(A))$, pertenece a $f(L_f(A))$; luego basta probar que toda cadena de $f(X)$ tiene una cota inferior.
Demostremos esto.
Sea W una cadena de $f[X]$, note que W tiene una cota inferior si y solo si el conjunto

$$\{x \in Domf(X) : \forall w \in W : f(x) \supseteq w\} = \bigcap_{w \in W} L_f(w)$$

es no vacío. La intersección de una familia finita de conjuntos del tipo $L_f(w)$ es

$$\bigcap_{w\in\{w_1,w_2,...w_n\}} L_f(w) = \{x \in Domf : \forall w \in \{w_1, w_2, ...w_n\} : f(x) \supseteq w\}$$

este conjunto es no vacío pues toda cadena finita tiene al menos una cota inferior. Luego como el dominio es compacto y cualquier intersección finita es no vacío, $\bigcap_{w\in W} L_f(w)$ no es vacío. Por lo tanto W tiene una cota inferior. □

Teorema 2.1.1. *Sea $f : X \to \mathscr{F}(Z, C)$ una aplicación de nivel cerrado tal que $Dom(f)$ es compacto, entonces el problema de optimización (P)(definido en el capítulo anterior) tiene una solución completa.*

Prueba. De la proposición anterior $f[X]$ tiene la propiedad de dominación, luego de la proposición 1.3.1 el conjunto $M = \{x \in X : f(x) \in Minf[X]\}$ es una solución completa del problema de optimización (P) □

2.2. Escalarización de aplicaciones de valor conjunto

El propósito de esta sección es estudiar ciertas funciones escalares asociadas a las aplicaciones de valor conjunto. Estas funciones, en cierto sentido, heredan algunas propiedades de las aplicaciones de valor conjunto y pueden caracterizar a las aplicaciones.
En adelante X, Z representarán a espacios topológicos lineales localmente convexos cuyos duales topológicos se denotarán con X^* y Z^* respectivamente. Además, para un cono convexo C de Z consideraremos el conjunto $C^+ = \{z^* \in Z^* : \forall z \in C,\ z^*(z) \geq 0\}$ denominado dual topológico positivo de C. La noción geométrica de este conjunto es representado en la figura 2.1.

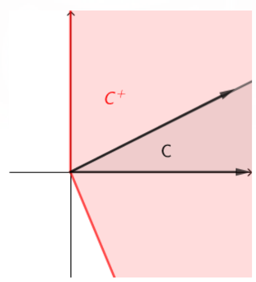

Figura 2.1: C^+

Para cualquier conjunto $A \subseteq Z$ presentamos la siguiente función.

Definición 2.2.1. *Dado $A \subset Z$, definimos $\sigma_A^{\Delta} : Z^* \to \overline{\mathbb{R}}$, $\sigma_A^{\Delta}(z^*) = \inf\limits_{z \in A} z^*(z)$*

La función σ_A^{Δ} verifica las propiedades demostradas en los siguientes dos lemas.

Lema 2.2.1. *Sea $A, B \subset \mathscr{G}(Z, C)$, se verifican:*

$$\sigma_{A \oplus B}^{\Delta}(z^*) = \sigma_A^{\Delta}(z^*) + \sigma_B^{\Delta}(z^*) \tag{2.5}$$

$$A \in \mathscr{G}(Z, C) \leftrightarrow A = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma_A^{\Delta}(z^*) \leq z^*(z)\} \tag{2.6}$$

Prueba.

- Es claro que $\inf\limits_{z \in cocl(A)} z^*(z) = \inf\limits_{z \in A} z^*(z)$. Luego, la ecuación (2.5) resulta de

$$\inf_{z \in A+B} z^*(z) = \inf_{z \in A} z^*(z) + \inf_{z \in B} z^*(z)$$

- Sea $A \in \mathscr{G}(Z, C)$. Dado $z \in A$ es claro que $\inf\limits_{z \in A} z^*(z) \leq z^*(z)$ para todo $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, esto implica $z \in \bigcap\limits_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma_A^{\Delta}(z^*) \leq z^*(z)\}$.

  Supongamos que existe $z_0 \in \bigcap\limits_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma_A^{\Delta}(z^*) \leq z^*(z)\}$ tal que $z_0 \notin A$. De estos supuestos en primer lugar tenemos

$$\inf_{z \in A} z^*(z) \leq z^*(z_0),\ \forall\ z^* \in C^+ \setminus \{0\} \tag{2.7}$$

  y en segundo lugar, por el teorema de separación existen $z_1^* \in Z^* \setminus \{0\}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$z_1^*(z_0) < r < z_1^*(z) \ \ \forall z \in A \tag{2.8}$$

  Además, si $z_1^* \notin C^+ \setminus \{0\}$ entonces existe $x_1 \in C$ tal que $z_1^*(x_1) < 0$. De aquí $z_1^*(tx_1) < 0$ y $z + tx_1 \in A + C = A$ para todo $t > 0$ y algún $z \in A$. Así $\inf\limits_{z \in A} z_1^*(z) = -\infty$, esto es una contradicción con (2.8). En consecuencia $z_1^* \in C^+ \setminus \{0\}$.
  Luego, de las ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos

$$\inf_{z \in A} z_1^*(z) \leq z_1^*(z_0) < r \leq \inf_{z \in A} z_1^*(z)$$

  lo anterior es una contradicción.

  Si $A = \bigcap\limits_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma_A^{\Delta}(z^*) \leq z^*(z)\}$, es claro que A es cerrado y convexo. Por lo tanto $A \in \mathscr{G}(Z, C)$.

$\square$

Lema 2.2.2. *Si* $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}(Z, C)$ *entonces*

a) Para todo $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$*;* $\sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) = \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$

b) Para todo $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$*;* $\sigma^{\Delta}_{\sup \mathscr{A}}(z^*) \geq \sup\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$

Además

$$\text{ínf}\,\mathscr{A} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \inf_{A \in \mathscr{A}} \sigma^{\Delta}_{A}(z^*) \leq z^*(z)\} \tag{2.9}$$

$$\sup \mathscr{A} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sup_{A \in \mathscr{A}} \sigma^{\Delta}_{A}(z^*) \leq z^*(z)\} \tag{2.10}$$

Prueba.

a) Para todo $A \in \mathscr{A}$, $\sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) = \text{inf}_{z \in \text{ínf}\,\mathscr{A}}\, z^*(z) \leq \text{ínf}_{z \in A}\, z^*(z) = \sigma^{\Delta}_{A}(z^*)$. Tomando ínfimo $\sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) \leq \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$

Sea $A \in \mathscr{A}$ arbitrario, si $z \in A$ entonces $z^*(z) \geq \sigma^{\Delta}_{A}(z^*) \geq \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$. Luego para todo $z \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ se tiene

$$z^*(z) \geq \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$$

Tomando ínfimo en la desigualdad se tiene $\sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) \geq \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$, recordemos que $\displaystyle\inf_{z \in clco(\bigcup A)} z^*(z) = \inf_{z \in \bigcup A} z^*(z)$.

Por otro lado, si hacemos $A = \text{ínf}\,\mathscr{A}$ en la ecuación (2.6) tenemos

$$\text{ínf}\,\mathscr{A} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) \leq z^*(z)\}$$

reemplazando $\sigma^{\Delta}_{\inf \mathscr{A}}(z^*) = \text{ínf}\{\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) : A \in \mathscr{A}\}$, obtenemos la ecuación (2.9).

b) Sabemos que para todo $A \in \mathscr{A}$, $\displaystyle\inf_{z \in \sup \mathscr{A}} z^*(z) \geq \inf_{z \in A} z^*(z)$. Se completa la prueba de *b)* tomando supremo con respecto a A en esta desigualdad.

Por otro lado, si hacemos $A = \sup \mathscr{A}$ en la ecuación (2.6) tenemos

$$\sup \mathscr{A} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \sigma^{\Delta}_{\sup \mathscr{A}}(z^*) \leq z^*(z)\}$$

usando la relación que acabamos de probar obtenemos (2.10).

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que la igualdad en la parte $b)$ del lema anterior no siempre se verifica.

Ejemplo 2.2.1. *Sean* $Z = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}^2_+$, $\mathscr{A} = \{(a_1, a_2) + \mathbb{R}^2_+ : a_1 + a_2 = 1, a_1, a_2 \geq 0\} \subset \mathscr{G}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+)$ *y* $z^* = (1, 1)$. *En la figura 2.2 vemos que* $\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) = \inf\limits_{(x_1,x_2)\in A} z^*(x_1 + x_2) = 1$ *y* $\sigma^{\Delta}_{\sup \mathscr{A}}(z^*) = \inf\limits_{(x_1,x_2)\in \sup \mathscr{A}} z^*(x_1 + x_2) = 2$

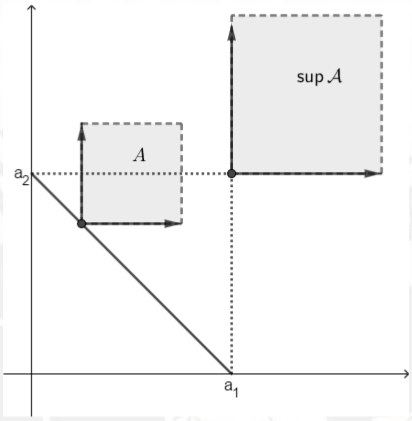

Figura 2.2:

La escalarización de las aplicaciones de valor conjunto es definido de la siguiente manera.

Definición 2.2.2. *Dado* $f : X \to P(Z, C)$ *y* $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, *la función* $\varphi_{f,z^*} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *definida por*

$$\varphi_{f,z^*}(x) := \inf_{z\in f(x)} z^*(z)$$

se denomina escalarización de f.

Notamos que $\varphi_{f,z^*}(x) = \sigma^{\Delta}_{f(x)}(z^*)$, además cuando $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$, de la ecuación (2.6), tenemos

$$\forall\, x \in X; f(x) = \bigcap_{z^*\in C^+\setminus\{0\}} \{z \in Z : \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\} \tag{2.11}$$

Muchas propiedades de las aplicaciones con valores en $\mathscr{G}(Z, C)$ admiten su equivalente en su escalarización, se menciona algunas en el siguiente lema.

Lema 2.2.3. *Dado* $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$.

1. f *es convexa si y solo si para todo* $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, φ_{f,z^*} *es convexa.*

2. *f es positivamente homogénea si y solo si para todo $z^* \in C^+\setminus\{0\}$, φ_{f,z^*} es positivamente homogénea.*

3. *f es (sub) aditiva si y solo si para todo $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, φ_{f,z^*} es (sub) aditiva.*

4. *f propia si y solo si existe $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que φ_{f,z^*} es propia.*

5. *Para todo $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, $Dom(f) = Dom(\varphi_{f,z^*})$.*

Prueba. Como ilustración redactamos la prueba de 1, 2 y 5.

1. Supongamos que f es convexa y sean $t \in (0,1)$ y $x, y \in X$, luego $\varphi_{f,z^*}(tx + (1-t)y) = \inf\limits_{z\in f(tx+(1-t)y)} z^*(z) \leq \inf\limits_{z\in tf(x)+(1-t)f(y)} z^*(z) = \inf\limits_{z\in tf(x)} z^*(z) + \inf\limits_{z\in(1-t)f(y)} z^*(z) = t\varphi_{f,z^*}(x) + (1-t)\varphi_{f,z^*}(y)$.

   Sea φ_{f,z^*} convexa para todo $z^* \in C^+\setminus\{0\}$. Si f no es convexa existen $t \in (0,1)$, $x, y \in X$ y $z \in Z$ tales que $z \in tf(x) + (1-t)f(y)$ y $z \notin f(tx + (1-t)y)$. Como $f(tx + (1-t)y)$ es convexo y cerrado, por el teorema de separación existe $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que

   $$z^*(z) < \varphi_{f,z^*}(tx + (1-t)y) \leq t\varphi_{f,z^*}(x) + (1-t)\varphi_{f,z^*}(y) \tag{2.12}$$

   Por otro lado, como $z \in tf(x)+(1-t)f(y)$ se tiene $z = tu+(1-t)v$ para algún $u \in f(x)$ y $v \in f(y)$, luego $z^*(z) = tz^*(u) + (1-t)z^*(v)$. De esto

   $$z^*(z) \geq t\varphi_{f,z^*}(x) + (1-t)\varphi_{f,z^*}(y)$$

   Esta relación contradice (2.12). Por lo tanto f es convexa.

2. Supongamos que f es positivamente homogénea, entonces

   $$\varphi_{f,z^*}(tx) = \inf_{z\in f(tx)} z^*(z) = \inf_{\frac{z}{t}\in f(x)} z^*(z) = t \inf_{\frac{z}{t}\in f(x)} z^*(\frac{1}{t}z) = t\varphi_{f,z^*}(x)$$

   Esto demuestra que φ_{f,z^*} es positivamente homogénea.
   Sea $\varphi_{f,z^*}(x)$ positivamente homogénea y supongamos que f no es positivamente homogénea, entonces existen $t \in (0,1)$, $x \in X$ y $z \in Z$ tales que $z \in tf(x)$ y $z \notin f(tx)$. Por el teorema de separación existe $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que

   $$z^*(z) < \inf_{u\in f(tx)} z^*(u) = \varphi_{f,z^*}(tx) \tag{2.13}$$

y $z = tu$ para algún $u \in f(x)$. Luego

$$z^*(z) = tz^*(u) \geq t \inf_{u \in f(x)} z^*(x) = t\varphi_{f,z^*}(x) = \varphi_{f,z^*}(tx)$$

Esto contradice (2.13).

5. Si $x \in Dom(f)$ entonces $f(x) \neq \emptyset \rightarrow \varphi_{f,z^*}(x) < +\infty$ y en consecuencia $x \in Dom(\varphi_{f,z^*})$. Sea $x \in Dom(\varphi_{f,z^*})$ y supongamos que $f(x) = \emptyset$ esto implica $\varphi_{f,z^*}(x) = +\infty$, que es un absurdo pues $x \in Dom(\varphi_{f,z^*})$. Por lo tanto $Dom(f) = Dom(\varphi_{f,z^*})$

□

El siguiente resultado es consecuencia de los lemas anteriores.

Corolario 2.2.1. *Sea $f : X \rightarrow \mathscr{G}(Z, C)$ y $\bar{x} \in Dom(f)$ tal que f es retículo semicontinua inferior en $\bar{x}$, entonces*

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \left\{z \in Z : \forall\, z^* \in C^+ \setminus \{0\}; \liminf_{x \to \bar{x}} \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\}$$

Prueba. Aplicando la ecuación (2.10) a la familia $\mathscr{A} = \left\{ \inf_{x \in \bar{x}+U} f(x)\right\}_{U \in N_X}$, con $A = \inf_{x \in \bar{x}+U} f(x)$, tenemos

$$\sup_{U \in N_X} \mathscr{A} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \left\{z \in Z : \sup_{U \in N_X} [\sigma^{\Delta}_{A}(z^*)] \leq z^*(z)\right\}$$

De $\sigma^{\Delta}_{A}(z^*) = \sigma^{\Delta}_{\inf\limits_{x \in \bar{x}+U} f(x)}(z^*) = \inf_{x \in \bar{x}+U} \sigma^{\Delta}_{f(x)}(z^*)$

$$\sup_{U \in N_X} [\inf_{x \in \bar{x}+U} f(x)] = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \left\{z \in Z : \sup_{U \in N_X} [\inf_{x \in \bar{x}+U} \sigma^{\Delta}_{f(x)}(z^*)] \leq z^*(z)\right\}$$

reemplazando $\sigma^{\Delta}_{f(x)}(z^*) = \varphi_{f,z^*}(x)$

$$\sup_{U \in N_X} [\inf_{x \in \bar{x}+U} f(x)] = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \left\{z \in Z : \sup_{U \in N_X} [\inf_{x \in \bar{x}+U} \varphi_{f,z^*}(x)] \leq z^*(z)\right\}$$

De la definición de límite inferior para aplicaciones de valor conjunto y de valor escalar.

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \{z \in Z : \forall\, z^* \in C^+ \setminus \{0\}; \liminf_{x \to \bar{x}} \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*\}$$

□

Antes de presentar una caracterización de las aplicaciones de valor conjunto cerradas, convexas y propias con valores en $\mathscr{F}(Z,C)$ mediante su escalarización, mencionamos la definición de envoltura convexa semicontinua inferior.

Definición 2.2.3. *Dada* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *definimos la función* $clcof : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, denominada envoltura convexa semicontinua inferior de* f*, por*

$$Epi(clcof) = clco(Epi(f))$$

donde $Epi(f) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$

Teorema 2.2.1. *Sea* $f : X \to \mathscr{F}(Z,C)$ *con* $Domf \neq \emptyset$*. La función* f *es cerrada, convexa, y o bien propia o bien la función constante igual a* Z*, si y solo si*

$$\forall x \in X : \; f(x) = \bigcap_{z^* \in E} \left\{ z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z) \right\} \tag{2.14}$$

donde $E = \{z^* \in C^+ \setminus \{0\} : clco\varphi_{f,z^*} : X :\to \overline{\mathbb{R}}$ *es propia*$\}$

Prueba.

$(\Leftarrow)$ Si el conjunto E es vacío, entonces

$$f(x) = \bigcap_{z^* \in E = \emptyset} \left\{ z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z) \right\} = Z$$

Si E no es vacío, para $z^* \in E$ definimos la aplicación $\beta_{z^*} : X \to \mathscr{F}(Z,C)$ por

$$\beta_{z^*}(x) = \{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\}$$

Afimación β_{z^*} es convexa y cerrada. En efecto:

1. Dado $x_1, x_2 \in X$ y $t \in]0,1[$ fijos, sea $u = tu_1 + (1-t)u_2$ con $u_1 \in \beta_{z^*}(x_1)$ y $u_2 \in \beta_{z^*}(x_2)$, entonces

$$clco\varphi_{f,z^*}(x_1) \leq z^*(u_1) \;\text{ y }\; clco\varphi_{f,z^*}(x_2 \leq z^*(u_2)$$

de estas dos desigualdades tenemos

$$clco\varphi_{f,z^*}(tx_1 + (1-t)x_2) \leq z^*(tu_1 + (1-t)u_2)$$

Por lo tanto $u = tu_1 + (1-t)u_2 \in \beta_{z^*}(tx_1 + (1-t)x_2)$, β_{z^*} es convexa.

2. Sea $(x_0, z_0) \in [Graf(\beta_{z^*})]^C$ entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$z^*(z_0) < t < clco\varphi_{f,z^*}(x_0)$$

Como z^* es una funcional continua y $clco\varphi_{f,z^*}$ es semicontinua inferior existe vecindades U de x_0 y V de z_0 tales que $U \times V \in [Graf(\beta_{z^*})]^C$ y en consecuencia $Graf(\beta_{z^*})$ es cerrado. De aquí β_{z^*} es cerrada.

Como $Graf(f) = \bigcap_{z^* \in E} Graf(\beta_{z^*})$, entonces f es convexa y cerrada.
Por otro lado, si f no es propia existe $x \in X$ tal que $f(x) = Z$. De la ecuación (2.14)

$$Z = \{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\}, \ \ \forall z^* \in E$$

De aquí

$$clco\varphi_{f,z^*}(x) = -\infty, \ \forall z^* \in E$$

Esto es una contradicción pues $clco\varphi_{f,z^*}$ es propia.

($\Rightarrow$) Si f es convexa, cerrada y propia, entonces φ_{f,z^*} es convexa y $f(x) = \liminf_{y \to x} f(y), \ \ \forall x \in Dom(f)$. Además, del corolario 2.2.1

$$\forall x \in Dom(f), \ f(x) = \liminf_{y \to x} f(y) = \left\{z \in Z : \liminf_{y \to x} \varphi_{f,z^*}(y) \leq z^*(z), \ \forall \ z^* \in C^+ \backslash \{0\}\right\}$$

Como φ_{f,z^*} es convexa y $clco\varphi_{f,z^*}$ es s.c.i, $\liminf_{y \to x} \varphi_{f,z^*}(y) = clco\varphi_{f,z^*}(x)$. De esto

$$\forall x \in Dom(f), \ f(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \backslash \{0\}} \left\{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\} \tag{2.15}$$

Como $Dom(\varphi_{f,z^*}) \subset Dom(clco\varphi_{f,z^*})$, si $clco\varphi_{f,z^*}$ no es propia existe $x \in X$ tal que $clco\varphi_{f,z^*}(x) = -\infty$, de la proposición (2.2.5) de [16] se tiene

$$clco\varphi_{f,z^*}(x) = -\infty, \ \forall x \in Dom(\varphi_{f,z^*})$$

de esto $\left\{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\} = Z$ para todo $x \in Dom(f) = Dom(\varphi_{f,z^*})$. Luego (2.15) queda

$$\forall x \in Dom(f), \ f(x) = \bigcap_{z^* \in E} \left\{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\}$$

Por otro lado, si $x \notin Dom(f)$ entonces $f(x) = \emptyset$ y $\varphi_{f,z^*}(x) = +\infty = cocl\varphi_{f,z^*}(x)$. Luego $\left\{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\} = \emptyset$ y por lo tanto

$$f(x) = \bigcap_{z^* \in E} \left\{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\right\}$$

La ecuación (2.14) queda probada para todo $x \in X$.

□

2.3. Conjugada de Fenchel para aplicaciones de valor conjunto

En esta parte introducimos las conjugadas duales de las aplicaciones de valor conjunto, dada en [9], y probaremos la versión del teorema de Fenchel-Moreau para estas aplicaciones.

Definición 2.3.1. *Sean $x^* \in X^*$ y $z^* \in Z^*$, definimos la aplicación $S_{(x^*,z^*)} : X \to P(Z)$*

$$S_{(x^*,z^*)}(x) = \{z \in Z : x^*(x) \leq z^*(z)\}$$

Esta aplicación tiene las siguientes propiedades

Proposición 2.3.1. *Dado $(x^*, z^*) \in X^* \times Z^* \setminus \{0\}$, entonces*

1. *Para todo $t > 0$, $S_{(x^*,z^*)}(tx) = tS_{(x^*,z^*)}(x)$.*

2. *Para todo $x_1, x_2 \in X$, $S_{(x^*,z^*)}(x_1 + x_2) = S_{(x^*,z^*)}(x_1) + S_{(x^*,z^*)}(x_2)$.*

3. *$\forall x \in X$, $S_{(x^*,z^*)}(x) \in \mathscr{G}(Z, C)$ si y solo si $z^* \in C^+$*

4. *$S_{(x^*,z^*)}(x)$ es un semiespacio cerrado con normal z^* si y solo $z^* \neq 0$. Además $S_{(x^*,0)}(x) \in \{Z, \emptyset\}$*

5. *Si existe $\bar{z} \in Z$ tal que $z^*(\bar{z}) = 1$ entonces $S_{(x^*,z^*)}(x) = x^*(x)\bar{z} + S_{(x^*,z^*)}(0)$, $\forall\, x \in X$*

Prueba.

1. La prueba es consecuencia de

$$z \in S_{(x^*,z^*)}(tx) \leftrightarrow x^*(tx) \leq z^*(z) \leftrightarrow x^*(x) \leq z^*(\frac{1}{t}z) \leftrightarrow z \in tS_{(x^*,z^*)}(x)$$

2. La prueba de $S_{(x^*,z^*)}(x_1) + S_{(x^*,z^*)}(x_2) \subseteq S_{(x^*,z^*)}(x_1 + x_2)$ es directa.
   Mientras que, dado $z \in S_{(x^*,z^*)}(x_1 + x_2)$, tenemos $x^*(x_1) \leq z^*(z) - x^*(x_2)$. Como z^* es no nulo existe $z_2 \in Z$ con $z^*(z_2) = x^*(x_2)$. De aquí

$$x^*(x_1) \leq z^*(z) - z^*(z_2) = z^*(z - z_2)$$

   esto implica $z - z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x_1)$ y además es claro que $z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x_2)$. Así

$$z = (z - z_2) + z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x_1) + S_{(x^*,z^*)}(x_2)$$

3. ($\Leftarrow$) Sea $z^* \in C^+$, para $x \in X$ basta verificar $S_{(x^*,z^*)}(x) + C \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$.
   Dado $z = z_1 + z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x) + C$ con $z_1 \in S_{(x^*,z^*)}(x)$, $z_2 \in C$ se tiene

$$x^*(x) \leq z^*(z_1) \text{ y } z^*(z_1) \leq z^*(z_1) + z^*(z_2)$$

   De esto $x^*(x) \leq z^*(z)$ y así $z \in S_{(x^*,z^*)}(x)$.

   ($\Rightarrow$) Por contradicción, si $z^* \notin C^+$ existe $z_0 \in C$ tal que $z^*(z_0) < 0$.
   Como $S_{(x^*,z^*)}(x) + C \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$, para algún $u \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ tenemos

$$u + t(z_0) \in S_{(x^*,z^*)}(x),\ \forall\, t > 0$$

   esto implica $x^*(x) \leq z^*(u) + tz^*(z_0)$, $\forall t > 0$, de aquí $x^*(x) = -\infty$. Esto es una contradicción.

4. Es claro que, para $x \in$ fijo, $S_{(x^*,z^*)}(x)$ es un semiespacio cerrado con normal z^* si y solo $z^* \neq 0$. Además, $S_{(x^*,0)}(x) = \{z \in Z : x^*(x) \leq 0\}$ es $\emptyset$ o Z dependiendo del signo de $x^*(x)$.

5. Sea $\bar{z}$ tal que $z^*(\bar{z}) = 1$, entonces

$$z \in S_{(x^*,z^*)}(x) \leftrightarrow 0 \leq z^*(z) - 1 \cdot x^*(x) \leftrightarrow 0 \leq z^*(z - \bar{z}x^*(x)) \leftrightarrow z - \bar{z}x^*(x) \in S_{(x^*,z^*)}(0)$$

   Por lo tanto $S_{(x^*,z^*)}(x) = x^*(x)\bar{z} + S_{(x^*,z^*)}(0)$.

$\square$

Proposición 2.3.2. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ una aplicación, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) Existe $(x^*, z^*) \in X^* \times C^+ \setminus \{0\}$ tal que $f(x) = S_{(x^*,z^*)}(x)$

b) La gráfica de f es un semiespacio cerrado y cono de $X \times Z$ y $f(0) \neq Z$.

Prueba.

$a) \Rightarrow b)$ es directa.

$b) \Rightarrow a)$El conjunto $Graf(f)$ es un semiespacio cerrado y cono si y solo si existe $(x^*, z^*) \in X^* \times Z^* \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$Graf(f) = \{(x,z) \in X \times Z : x^*(x) - z^*(z) \leq 0\}$$

De esto $f(x) = S_{(x^*,z^*)}(x)$. Además, de $C \subseteq f(0) + C \subseteq f(0)$ tenemos $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$.

$\square$

Definimos la conjungada y la biconjugada de Fenchel de las aplicaciones de valor conjunto, donde las aplicaciones $S_{(x^*,z^*)}(x)$ desempeñan el papel de "lineales".

Definición 2.3.2. *Dada la aplicación $f : X \to P(Z, C)$.*

1. *La conjugada de Fenchel f es $f^* : X^* \times C^+ \setminus \{0\} \to P(Z, C)$, definida por*

$$f^*(x^*, z^*) := \sup_{x \in X} \{S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x)\}$$

Esto es

$$f^*(x^*, z^*) = \bigcap_{x \in X} \{S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x)\} \tag{2.16}$$

2. *La biconjugada de f es $f^{**} : X \to P(Z, C)$, definida por*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f^*(x^*, z^*)\}$$

También

$$f^{**}(x) = \bigcap_{x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}} (S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f^*(x^*, z^*)) \tag{2.17}$$

Lema 2.3.1. *Dada la aplicación $f : X \to P(Z, C)$, se verifica*

$$\forall x^* \in X^*, \forall z^* \in C^+ \setminus \{0\};\ f^*(x^*, z^*) = \{z \in Z : \varphi^*_{f,z^*}(x^*) \leq z^*(z)\} \tag{2.18}$$

Prueba. Si $z \in f^*(x^*, z^*)$, de (2.16) y la proposición (1.2.3) tenemos $f(x) + z \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$, $\forall x \in X$. Si fijamos $x \in X$ $u + z \in S_{(x^*,z^*)}(x)$ para todo $u \in f(x)$. De aquí

$$x^*(x) - \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z), \ \ \forall x \in X$$

Tomando conjugada $\varphi^*_{f,z^*}(x^*) \leq z^*(z)$. En consecuencia $z \in \{z \in Z : \varphi^*_{f,z^*}(x^*) \leq z^*(z)\}$. Reciprocamente, si $z \in \{z \in Z : \varphi^*_{f,z^*}(x^*) \leq z^*(z)\}$ entonces $x^*(x) - \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)$, $\forall$ $x \in X$. Para x fijo tenemos

$$x^*(x) \leq z^*(z) + \varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z) + z^*(u) = z^*(z+u), \ \forall u \in f(x)$$

De aquí $z + f(x) \subset S_{(x^*,z^*)}(x)$, y entonces $z \in S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $z \in f^*(x^*, z^*)$. □

La conjugada y la biconjugada satisfacen las propiedades agrupadas en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. *Dadas $f, g : X \to P(Z, C)$ se cumplen las afirmaciones:*

1. *Para cada $x \in X$, $x^* \in X^*$, $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ se tiene*

$$f^*(x^*, z^*) \subseteq S(x^*, z^*)(x) \dot{-} f(x) \Leftrightarrow f^*(x^*, z^*) + f(x) \subseteq S(x^*, z^*)(x)$$

2. *Si $\forall \ x \in X$, $f(x) \supseteq g(x)$, entonces $\forall$ $(x^*, z^*) \in X^* \times C^+ \setminus \{0\}$, $g^*(x^*, z^*) \supseteq f^*(x^*, z^*)$.*

3. *f^* tiene valores en $\mathscr{G}(Z, C)$, además $f^*(x^*, z^*)$ es un semiespacio cerrado con normal z^* o bien es vacío o es Z.*

4. *Para todo $x \in X$; $f^{**}(x) \supseteq f(x)$ y f^{**} es propia, convexa y cerrada con valores en $\mathscr{G}(Z, C)$.*

Prueba.

1. $(\Rightarrow)$ Dado $z \in f^*(x^*, z^*)$ se tiene $f(x) + z \subset S(x^*, z^*)(x)$, de esto $f(x) + f^*(x^*, z^*) \subseteq S(x^*, z^*)(x)$

   $(\Leftarrow)$ Si $f^*(x^*, z^*) + f(x) \subseteq S(x^*, z^*)(x)$ por definición del operador $\dot{-}$

$$f^*(x^*, z^*) \subseteq S(x^*, z^*)(x) \dot{-} f(x)$$

2. Supongamos que $\forall$ $x \in X$, $f(x) \supseteq g(x)$. Sea $z \in f^*(x^*, z^*)$, de (2.16) y la proposición (1.2.3) $f(x) + z \subseteq S_{x^*,z^*}(x)$, $\forall x \in X$. De aquí $g(x) + z \subseteq S_{x^*,z^*}(x)$, $\forall x \in X$. Por lo tanto $z \in g^*(x^*, z^*)$.

3. De la proposición (1.2.3), $S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x)$ es convexo y cerrado, de aquí $f^*(x^*,z^*)$ es convexo y cerrado. Además, del lema 2.3.1 $f^*(x^*,z^*)$ es un semiespacio cerrado con normal z^* o bien $\emptyset$ o Z, dependiendo de los valores de $\varphi^*_{f,z^*}(x^*)$.

4. Dado $x \in X$, por el item 1, $f^*(x^*,z^*) + f(x) \subseteq S(x^*,z^*)(x)$, $\forall x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ de aquí

$$f(x) \subseteq S(x^*,z^*)(x) \dot{-} f^*(x^*,z^*),\ \forall x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}$$

Luego $f(x) \subseteq f^{**}(x)$.

Probemos que f^{**} es convexa y cerrada. Para cada $x^* \in X^*$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, definimos la aplicación $\Gamma_{(x^*,z^*)}(x) = S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f^*(x^*,z^*)$

Afirmación 1: $\Gamma_{(x^*,z^*)}$ es convexa. En efecto, dados $(x_1,z_1),(x_2,z_2) \in Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})$ y $t \in]0,1[$, tenemos $z_1 \in S_{(x^*,z^*)}(x_1) \dot{-} f^*(x^*,z^*)$ y $z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x_2) \dot{-} f^*(x^*,z^*)$. De aquí

$$f^*(x^*,z^*) + z_1 \in S_{(x^*,z^*)}(x_1) \text{ y } f^*(x^*,z^*) + z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(x_2)$$

Multiplicando por t y sumando

$$f^*(x^*,z^*) + tz_1 + (1-t)z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(tx_1 + (1-t)x_2)$$

Luego, $tz_1 + (1-t)z_2 \in S_{(x^*,z^*)}(tx_1 + (1-t)x_2) \dot{-} f^*(x^*,z^*) = \Gamma_{(x^*,z^*)}(tx_1 + (1-t)x_2)$ y en consecuencia $t(x_1,z_1) + (1-t)(x_2,z_2) \in Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})$

Afirmación 2: $\Gamma_{(x^*,z^*)}$ es cerrada. En efecto

Sea $(x_0,z_0) \in [Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})]^C$ se tiene

$$f^*(x^*,z^*) + z_0 \nsubseteq S_{(x^*,z^*)}(x_0)$$

De aquí, existe $z_1 \in f^*(x^*,z^*)$ con $z_1 + z_0 \notin S_{(x^*,z^*)}(x_0)$. De esto $x^*(x_0) > z^*(z_1 + z_0)$, así existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x^*(x_0) - z^*(z_0) > t > z^*(z_1)$.

Como x^* y z^* son continuas, existen vecindades $U(x_0)$ y $V(z_0)$ tales que

$$x^*(x) - z^*(z) > t > z^*(z_1),\ \ \forall x \in U(x_0), z \in V(z_0)$$

Esto implica $z_1 + z \notin S_{(x^*,z^*)}(x)$, $\ \forall x \in U(x_0), z \in V(z_0)$, de aquí

$$f^*(x^*,z^*) + z \nsubseteq S_{(x^*,z^*)}(x),\ \ \forall x \in U(x_0), z \in V(z_0)$$

Luego, $U(x_0) \times V(z_0) \subseteq [Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})]^C$ y en consecuencia $Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})$ es cerrado.

Como $Graf(f^{**}) = \displaystyle\bigcap_{x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}} Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})$ y $Graf(\Gamma_{(x^*,z^*)})$ es cerrado y convexo, entonces f^{**} es convexa y cerrada.

$\square$

La biconjugada se puede caracterizar mediante la biconjugada de su escalarización.

Lema 2.3.2. *Dada $f : X \to P(Z, C)$ se tiene:*

$$\forall x \in X;\ f^{**}(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \varphi^{**}_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\} \tag{2.19}$$

Prueba. De la proposición (2.3.3) la función f^{**} es cerrada, convexa y propia. Aplicando la ecuación (2.15) $f^{**}(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : clco\varphi_{f^{**},z^*}(x) \leq z^*(z)\}$.

Del teorema (2.3.4) de [16]

$$f^{**}(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \varphi^{**}_{f^{**},z^*}(x) \leq z^*(z)\}$$

Además como $\varphi^{**}_{f,z^*} = \varphi^{**}_{f^{**},z^*}$, tenemos

$$\forall x \in X;\ f^{**}(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \varphi^{**}_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\}$$

$\square$

El siguiente resultado es la versión, para aplicaciones con valor conjunto, del teorema de Fenchel- Moreau.

Teorema 2.3.1. *Sea $f : X \to P(Z, C)$ una aplicación. Entonces $f = f^{**}$ si y solo si f es propia, cerrada y convexa.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Si $f = f^{**}$ de la proposición (2.3.3) f es convexa, cerrada y propia.

($\Leftarrow$) Sea f convexa, cerrada y propia. De (2.14) y el teorema (2.3.4) de [16], tenemos

$$f(x) = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : clco\varphi_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\} = \bigcap_{z^* \in C^+ \setminus \{0\}} \{z \in Z : \varphi^{**}_{f,z^*}(x) \leq z^*(z)\}$$

De esta ecuación y (2.19) tenemos $f(x) = f^{**}(x)$.

$\square$

2.4. Derivadas direccionales y subdiferenciales

En esta sección estudiamos las derivadas direccionales, las subdiferenciales, y probaremos una caracterización de los infimizadores de una aplicación de valor conjunto. Las derivadas direccionales juegan un papel importante en el análisis convexo de valores reales, una versión (presentada en [9]) para aplicaciones de valor conjunto es el siguiente.

Definición 2.4.1. *La derivada direccional inferior de* $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ *con respecto a* $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ *en* $\bar{x} \in X$ *en la dirección de* $x \in X$ *es definida por*

$$f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[(f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*)) \dot{-} f(\bar{x})]$$

Esto es

$$f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \bigcap_{s>0} cl \bigcup_{0<t<s} \frac{1}{t}[(f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*)) \dot{-} f(\bar{x})]$$

Donde $H^+(z^*) := \{z \in Z : z^*(z) \geq 0\}$. La noción geométrica de este conjunto es representado en la figura 2.3.

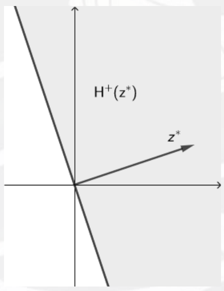

Figura 2.3: $H^+(z^*)$

Mencionamos también la adecuación de la derivada direccional de aplicaciones escalares cuando se sustituye la diferencia usual en los reales con la operación inf-diferencia definido en el primer capítulo.

Definición 2.4.2. *Dada la función* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, la derivada direccional en* $\bar{x}$ *en la dirección de* x *es definida por*

$$\varphi'(\bar{x}, x) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[\varphi(\bar{x} + tx) \dot{-} \varphi(\bar{x})]$$

Antes de mostrar algunas características de las derivadas direccionales presentamos las siguientes propiedades de las operaciones $\oplus$ y $\dot{-}$.

Proposición 2.4.1. *Sean* $A, B, D \subseteq \mathscr{G}(Z, C)$ *y* $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, *se tiene*

a) $A \oplus H^+(z^*) = \left\{z \in Z : z^*(z) \geq \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} z^*(u)\right\}.$

b) $A \supseteq B \Rightarrow [A \oplus H^+(z^*) \dot{-} D] \supseteq [B \oplus H^+(z^*) \dot{-} D]$

c) $A \oplus H^+(z^*) \dot{-} A = \begin{cases} H^+(z^*) & , \ A \oplus H^+(z^*) \notin \{Z, \emptyset\} \\ Z & , \ A \oplus H^+(z^*) \in \{Z, \emptyset\} \end{cases}$

d) Si $s_1 + s_2 = 1$ *con* $s_1, s_2 \geq 0$, *entonces*

$$(s_1 A \oplus s_2 B) \oplus H^+(z^*) \dot{-} D \supseteq s_1(A \oplus H^+(z^*) \dot{-} D) \oplus s_2(B \oplus H^+(z^*) \dot{-} D)$$

e) $A \oplus H^+(z^*) \supseteq B \oplus H^+(z^*) \Leftrightarrow H^+(z^*) \dot{-} B \supseteq H^+(z^*) \dot{-} A$

f) $(A \oplus B) \oplus H^+(z^*) \dot{-} B \supseteq A \oplus H^+(z^*)$. *La inclusión estricta aplica si y solo si* $[\ A = B = \emptyset\ ]$ *o* $[\ A \oplus H^+(z^*) \notin \{Z, \emptyset\}$ *y* $B \oplus H^+(z^*) \in \{Z, \emptyset\}\ ]$

g) $A \oplus H^+(z^*) \supseteq [(A \oplus H^+(z^*)) \dot{-} B] \oplus B$. *La inclusión estricta aplica si y solo si* $[\ A \neq B = \emptyset\ ]$ *o* $[\ A \oplus H^+(z^*) \notin \{Z, \emptyset\}$ *y* $B \oplus H^+(z^*) = Z\ ]$

h) $[(A \oplus H^+(z^*)) \dot{-} D] \oplus B \subseteq (A \oplus B) \oplus H^+(z^*) \dot{-} D$. *La inclusión estricta aplica si y solo si* $[\ B = D = \emptyset\ ]$ *o* $[\ B \oplus H^+(z^*) = D \oplus H^+(z^*) = Z$ *y* $A \oplus H^+(z^*) \neq \{Z, \emptyset\}\ ]$

Prueba. Como ilustración probamos *a*) y *d*)

a) Si $A = \emptyset$, la igualdad es clara. Supongamos $A \neq \emptyset$ y consideremos $w = a + z \in A + H^+(z^*)$, entonces $z^*(w) = z^*(a) + z^*(z) \geq z^*(a) \geq \inf\limits_{u \in A} z^*(u) = \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} z^*(u)$
Luego, $w \in \left\{z \in Z : z^*(z) \geq \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} z^*(u)\right\}$.
Recíprocamente, supongamos que existe z_0 tal que $z^*(z_0) \geq \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} z^*(u)$ con $z_0 \notin A \oplus H^+(z^*)$, entonces existe $w^* \in C^+ \setminus \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$w^*(z_0) < t < \inf_{u \in A \oplus H^+(z^*)} w^*(u) \tag{2.20}$$

Luego $a + H^+(z^*) \subseteq \{z \in Z : w^*(z) \geq \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} w^*(u)\}$, para algún $a \in H^+(z^*)$; es decir el semiespacio $a + H^+(z^*)$ con normal z^* está incluido en un semiespacio con normal w^*. De aquí $w^* = rz^*$ para algún $r > 0$. Reemplazando en (2.20) obtenemos $z^*(z_0) < \inf\limits_{u \in A \oplus H^+(z^*)} z^*(u)$, esto es una contradicción.

d) Sea $w = s_1a + s_2b$ con $D + a \subseteq (A \oplus H^+(z^*))$ y $D + b \subseteq (B \oplus H^+(z^*))$. Se tiene

$$\begin{aligned} D + s_1a + s_2b &\subseteq s_1(A \oplus H^+(z^*)) + s_2(B \oplus H^+(z^*)) \\ &= (s_1A) \oplus H^+(z^*) + (s_2B) \oplus H^+(z^*) \\ &\subseteq (s_1A \oplus s_2B) \oplus H^+(z^*) \end{aligned}$$

De aquí $s_1a + s_2b \in (s_1A \oplus s_2B) \oplus H^+(z^*) \dot{-} D$. Esto implica $d)$.

$\square$

El siguiente lema expone algunas propiedades de las derivadas direcccionales.

Lema 2.4.1. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ una aplicación convexa, $\bar{x} \in X$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. *Se verifica* $f'(\bar{x}, 0) = \begin{cases} H^+(z^*) & , \ f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \notin \{Z, \emptyset\} \\ Z & , \ f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \in \{Z, \emptyset\} \end{cases}$

2. *Para todo $x \in X$,* $f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \inf\limits_{t>0} \dfrac{1}{t}[f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$

3. *La función $x \longmapsto f'_{z^*}(\bar{x}, x)$ es sublineal con valores en $\mathscr{G}(Z, C)$.*

4. *Si $\bar{x} \in Dom(f)$, entonces $Dom(f'_{z^*}(\bar{x}, *)) = cone(Dom(f) - \bar{x})$*

Prueba.

1. La prueba es aplicación inmediata de la afirmación $c)$, de la proposición 2.4.1, en $f'(\bar{x}, 0)$.

2. Sean $x \in X$ y consideremos $g_{z^*}(t, x) = \frac{1}{t}[f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$, $t > 0$.
   Afirmación Si $0 < t \leq s$ entonces $g_{z^*}(t, x) \supseteq g_{z^*}(s, x)$. En efecto:
   Como f es convexa , de $0 < \frac{t}{s} \leq 1$ y $\bar{x} + tx = \frac{t}{s}(\bar{x} + sx) + \frac{s-t}{s}\bar{x}$ se tiene

$$f(\bar{x} + tx) \supseteq \frac{t}{s} f(\bar{x} + sx) + \frac{s - t}{s} f(\bar{x})$$

   Por la afirmación $c)$ de la proposición 2.4.1

$$f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq [\frac{t}{s} f(\bar{x} + sx) + \frac{s - t}{s} f(\bar{x})] \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$$

   Por la propiedad $d)$ de la proposición 2.4.1

$$f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq \frac{t}{s}[f(\bar{x}+sx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] \oplus \frac{s - t}{s}[f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$$

Como $[f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] \supseteq H^+(z^*)$, proposición 2.4.1) item c).

$$f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq \frac{t}{s}[f(\bar{x}+sx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] \oplus [H^+(z^*)] \supseteq \frac{t}{s}[f(\bar{x}+sx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$$

En consecuencia $f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq \dfrac{t}{s}[f(\bar{x}+sx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$
Multiplicando por $\frac{1}{t}$, tenemos $g_{z^*}(t,x) \supseteq g_{z^*}(s,x)$.

Hemos probado $\frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq \frac{1}{s}[f(\bar{x}+sx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}), \forall\, 0 < t < s$.
De aquí, para un $s > 0$ fijo

$$\bigcup_{0<t<s} \frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) = \bigcup_{t>0} \frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$$

de esto $f'_{z^*}(\bar{x},x) = \inf\limits_{t>0} \dfrac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$.

3. La homogeneidad positiva de $f'(\bar{x}, *)$ se justifica con

$$\lambda \bigcup_{t>0} \frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] = \bigcup_{t>0} \frac{1}{t}[f(\bar{x}+t\lambda x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})],\ \forall \lambda > 0$$

y además del hecho $cl(\lambda A) = \lambda cl(A), \forall A \subset Z, t > 0$
Probemos la subaditividad, sean $x_1, x_2 \in X$ y $t > 0$. De $\bar{x} + t(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}[\bar{x} + 2tx_1] + \frac{1}{2}[\bar{x} + 2tx_2]$, tenemos

$$f(\bar{x} + t(x_1 + x_2)) \supseteq \frac{1}{2} f(\bar{x} + 2tx_1) + \frac{1}{2} f(\bar{x} + 2tx_2)$$

Por la proposición 2.4.1 item d).

$$\frac{1}{t} f(\bar{x}+t(x_1+x_2)) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \supseteq \frac{1}{2t} f(\bar{x}+2tx_1) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) + \frac{1}{2t} f(\bar{x}+2tx_2) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$$

De esto $f'_{z^*}(\bar{x}, x_1 + x_2) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x_1) + f'_{z^*}(\bar{x}, x_2)$.

4. Sea $\bar{x} \in Dom(f)$. Si $x \notin Dom f'(\bar{x}, *)$ entonces $f'(\bar{x}, x) = \emptyset$, luego

$$\forall t > 0,\ f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) = \emptyset$$

Como $f(\bar{x}) \neq \emptyset$ se tiene $f(\bar{x}+tx) = \emptyset$, $\forall t > 0$. De aquí $x \notin cono(Dom(f) - \bar{x})$.
Si $x \notin cono(Dom(f) - \bar{x})$ entonces $f(\bar{x}+tx) = \emptyset$ para todo $t > 0$. Como $f(\bar{x}) \neq \emptyset$ tenemos

$$f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) = \emptyset,\ \forall t > 0$$

De esto $x \notin Dom f'(\bar{x}, *)$.

$\square$

Definición 2.4.3. *Dado $M \subset X$ el interior algebraico del conjunto M es el conjunto*

$$coreM := \{a \in X : \forall x \in X, \exists\, \delta > 0 \; tal \;\; que \; a + \lambda x \in A, \forall \lambda \in [0, \delta]\}$$

Teorema 2.4.1. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ convexa y $\bar{x} \in core(domf)$. Si f es propia, existe $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que $f'_{z^*}(\bar{x}, x) \notin \{Z, \emptyset\}$ para todo $x \in X$.*

Prueba. Como $f(\bar{x}) \neq Z$ por el teorema de separación existe $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que

$$f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \neq Z (\neq \emptyset)$$

Por la proposición anterior $f'(\bar{x}, 0) = H^+(z^*)$.
Sea $x \in X$ arbitrario, como $\bar{x} \in core(Domf)$ existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{x} \pm tx \in Dom(f)$ para todo $t \in [0, t_0]$. De aquí $\pm x \in Domf'(\bar{x}, *)$ y $f'(\bar{x}, x) \neq \emptyset$, $f'(\bar{x}, -x) \neq \emptyset$.
Por otro lado

$$H^+(z^*) = f'(\bar{x}, 0) \supseteq f'(\bar{x}, x) \oplus f'(\bar{x}, -x)$$

De esto $f'(\bar{x}, x) \neq Z$, $f'(\bar{x}, -x) \neq Z$. Por lo tanto $f'_{z^*}(\bar{x}, x) \notin \{Z, \emptyset\}$ para todo $x \in X$. $\square$

Dado una aplicación convexa definimos la subdiferencial usando las aplicaciones colineales y las derivadas direccionales.

Definición 2.4.4. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ convexa, $\bar{x} \in X$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$. El conjunto*

$$\partial f_{z^*}(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : \forall\, x \in X; S_{(x^*, z^*)}(x) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)\}$$

es llamado el z^*-subdiferencial de f en $\bar{x}$.

En una proposición posterior probaremos algunas conexiones entre las derivadas direccionales de aplicaciones de valor conjunto y las derivadas direccionales de su escalarización, además se presenta una relación entre sus subdiferenciales, antes de esto veamos los siguientes lemas.

Lema 2.4.2. *Sean $A, B \in P(Z, C)$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$, entonces*

$$A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B = \{z \in Z : z^*(z) \geq [\inf_{a \in A} z^*(a) \dot{-} \inf_{b \in B} z^*(b)]\} \tag{2.21}$$

Además

$$\inf_{u \in A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B} z^*(u) = \inf_{a \in A} z^*(a) \dot{-} \inf_{b \in B} z^*(b) \tag{2.22}$$

Prueba. Como $A \oplus H^+(z^*) = \{z \in Z : z^*(z) \geq \inf\limits_{u\in A} z^*(u)\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B &= \big\{z \in Z : B + z \subseteq A \oplus H^+(z^*)\big\} \\
&= \big\{z \in Z : \forall b \in B; z^*(z) + z^*(b) \geq \inf_{u\in A} z^*(u)\big\} \\
&= \big\{z \in Z : z^*(z) + \inf_{b\in B} z^*(b) \geq \inf_{u\in A} z^*(u)\big\} \\
&= \big\{z \in Z : z^*(z) \geq [\inf_{a\in A} z^*(a) \dot{-} \inf_{b\in B} z^*(b)]\big\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $r = \inf\limits_{a\in A} z^*(a) \dot{-} \inf\limits_{b\in B} z^*(b)$

- Si $r \in \mathbb{R}$ existe $u_0 \in Z$ tal que $z^*(u_0) = r$. De aquí $u_0 \in A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B$ y se cumple (2.22).
- Si $r = +\infty$, tenemos $A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B = \emptyset$ y también se verifica (2.22).
- Si $r = -\infty$, entonces $A \oplus H^+(z^*) \dot{-} B = Z$ y en consecuancia se satisface (2.22).

$\square$

Lema 2.4.3. *Dada la aplicación $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ convexa y $\bar{x}, x \in X$, $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ se tiene*

$$\frac{1}{t}[f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] = \big\{z \in Z : \frac{1}{t}[\varphi(\bar{x} + tx) \dot{-} \varphi(\bar{x})] \leq z^*(z)\big\} \;\; \forall\, t > 0$$

Prueba.

($\Rightarrow$) Sea $z \in \frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})]$, entonces $f(\bar{x}) + tz \subseteq f(\bar{x}+tx) \oplus H^+(z^*)$. De aquí

$$\inf_{u\in f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z^*)} z^*(u) \leq \inf_{u\in f(\bar{x})+tz} z^*(u)$$

de donde $\varphi_{f,z^*}(\bar{x} + tx) \leq \varphi_{f,z^*}(\bar{x}) + z^*(tz)$. De esto

$$\frac{1}{t}[\varphi_{f,z^*}(\bar{x} + tx) \dot{-} \varphi_{f,z^*}(\bar{x})] \leq z^*(z)$$

($\Leftarrow$) Sea z tal que $\dfrac{1}{t}[\varphi_{f,z^*}(\bar{x} + tx) \dot{-} \varphi_{f,z^*}(\bar{x})] \leq z^*(z)$, entonces

$$\varphi_{f,z^*}(\bar{x} + tx) \leq \varphi_{f,z^*}(\bar{x}) + z^*(tz) \leq z^*(u + tz),\; \forall u \,\in f(\bar{x})$$

De aquí, para $u \in f(\bar{x})$ se tiene

$$\inf_{v\in f(\bar{x}+tx)} z^*(v) \leq z^*(u + tz) \tag{2.23}$$

Como

$$f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z*)=\{z\in Z:\inf_{v\in f(\bar{x}+tx)} z^*(v)\leq z^*(z)\}$$

la ecuación (2.23) implica $u+tz\in f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z^*)$, luego $f(\bar{x})+tz\in f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z*)$. Por lo tanto $z\in \frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x})]$.

□

Proposición 2.4.2. *Dada la aplicación $f:X\to\mathscr{G}(Z,C)$ convexa y $\bar{x},x\in X$, $z^*\in C^+\setminus\{0\}$ se tiene*

1. $f'(\bar{x},x)=\{z\in Z:\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)\leq z^*(z)\}$
2. *Para todo* $x\in X$, $\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)=\varphi_{f'_{z^*}(\bar{x},*),z^*}(x)$
3. $\partial f_{z^*}(\bar{x})=\partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})$, *donde* $\partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})=\{x^*\in X^*:\forall x\in X;\ x^*(x)\leq\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)\}$

Prueba.

1. La prueba es directa de lema 2.4.3.
2. Para $x\in X$, del item 1 se tiene $z^*(u)\geq\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)$, $\forall\ u\in f'_{z^*}(\bar{x},x)$. Tomando ínfimo

   $$\varphi_{f'_{z^*}(\bar{x},*),z^*}(x)\geq\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)$$

   Por otro lado,

   $$\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)=\liminf_{t\to 0^+}\frac{1}{t}[\varphi_{f,z^*}(\bar{x}+tx)\dot{-}\varphi_{f,z^*}(\bar{x})]\leq\frac{1}{t}[\inf_{u\in f(\bar{x}+tx)} z^*(u)\dot{-}\inf_{u\in f(\bar{x})} z^*(u)],\ \forall\ t>0$$

   De la ecuación 2.22, para $t>0$.

   $$\begin{aligned}\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x) &\leq \frac{1}{t}[\inf_{u\in f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x})} z^*(u)]\\ &= \inf_{u\in\frac{1}{t}[f(\bar{x}+tx)\oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x})]} z^*(u)\\ &\leq \inf_{u\in f'_{z^*}(\bar{x},x)} z^*(u)\\ &= \varphi_{f'_{z^*}(\bar{x},*),z^*}(x)\end{aligned}$$

3. Sea $x_0^*\in\partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})$, entonces $x_0^*(x)\leq\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x),\forall\ x\in X$.
   Además, si $z\in f'_{z^*}(\bar{x},x)$ del item 1 tenemos $x_0^*(x)\leq\varphi'_{f,z^*}(\bar{x},x)\leq z^*(z)$. De esto $z\in S_{(x_0^*,z^*)}(x)$ y consecuentemente $f'_{z^*}(\bar{x},x)\subseteq S_{(x_0^*,z^*)}(x),\forall\ x\in X$. Por lo tanto

$x_0^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$

Recíprocamente, sea $x_0^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$ entonces $f'_{z^*}(\bar{x}, x) \subseteq S_{(x_0^*, z^*)}(x), \forall\, x \in X$. De aquí

$$x_0^*(x) \leq \inf_{v \in S_{(x_0^*, z^*)}(x)} z^*(v) \leq \inf_{v \in f'_{z^*}(\bar{x}, x)} z^*(v) = \varphi'_{f,z^*}(\bar{x}, x)$$

Esto implica $x_0^*(x) \leq \varphi'_{f,z^*}(\bar{x}, x), \forall\, x \in X$, por lo tanto $x_0^* \in \partial \varphi_{f,z^*}(\bar{x})$.

$\square$

En el caso de aplicaciones escalares se puede reconstruir la derivada direccional desde la subdiferencial. Este resultado se conoce como la fórmula-máxima. Presentamos esta fórmula para aplicaciones escalares y en seguida demostramos la versión para aplicaciones con valor conjunto

Teorema 2.4.2. *Sea $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, propia y continua en $\bar{x} \in Dom(\varphi)$, entonces $\partial\varphi(\bar{x})$ es no vacío, $\varphi'(\bar{x}, *)$ es continua y*

$$\forall\, x \in X; \varphi'(\bar{x}, x) = \sup_{x^* \in \partial\varphi(\bar{x})} x^*(x)$$

Teorema 2.4.3. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ una función convexa , $\bar{x} \in domf$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que la función $x \mapsto f(x) \oplus H^+(z^*)$ es propia y la función $\varphi_{f,z^*} : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es semicontinua superior en $\bar{x}$. Luego $\partial f_{z^*}(\bar{x}) \neq \emptyset$ y*

$$f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \bigcap_{x^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})} S_{(x^*, z^*)}(x)$$

Prueba. Se tiene

$$x \in Dom[f(\cdot) \oplus H^+(z^*)] \leftrightarrow f(x) \neq \emptyset \leftrightarrow \varphi_{f,z^*}(x) < +\infty \leftrightarrow x \in Dom\varphi_{f,z^*}$$

De aquí $Dom[f(*) \oplus H^+(z^*)] = Dom\varphi_{f,z^*}$. Así, la escalarización φ_{f,z^*} es propia, convexa y continua en $\bar{x}$ (toda función escalar convexa y semicontinua superior es continua).
Aplicando el teorema 2.4.2 a la escalarización φ_{f,z^*}, el conjunto $\partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})$ es no vacío y $\varphi'_{f,z^*}(\bar{x}, x) = \sup\limits_{x^* \in \partial\varphi_{f,z^*}} x^*(x)$. Del lema (2.4.2) $\partial f_{z^*}(\bar{x}) = \partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})$ es no vacío y

$$f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \{z \in Z : \varphi'_{f,z^*}(\bar{x}, x) \leq z^*(z)\}$$

Luego

$$f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \{z \in Z : \sup_{x^* \in \partial\varphi_{f,z^*}} x^*(x) \leq z^*(z)\} = \bigcap_{x^* \in \partial\varphi_{f,z^*}(\bar{x})} \{z \in Z : x^*(x) \leq z^*(z)\}$$

Esto es $f'_{z^*}(\bar{x}, x) = \bigcap\limits_{x^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})} S_{(x^*, z^*)}(x)$ $\square$

A continuación demostramos algunas caracterizaciones de la subdiferencial.

Proposición 2.4.3. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ un aplicación convexa y $\bar{x} \in X$. Dados $x^* \in X^*$ y $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) Para todo $x \in X$, $S(x^*, z^*)(x) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)$.

b) Para todo $x \in X$, $S(x^*, z^*)(x - \bar{x}) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$.

Prueba.

a)⇒b) De $S(x^*, z^*)(x) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)$ tenemos $S(x^*, z^*)(tx) \supseteq f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$ para todo $x \in X$ y $t > 0$. De esto $S(x^*, z^*)(x - \bar{x}) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$ para todo $x \in X$.

b)⇒a) De $S(x^*, z^*)(x - \bar{x}) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$ tenemos $S(x^*, z^*)(tx) \supseteq f(\bar{x} + tx) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})$ para todo $x \in X$ y $t > 0$. De aquí $S(x^*, z^*)(x) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)$ para todo $x \in X$.

□

Proposición 2.4.4. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ convexa , $\bar{x} \in X$, $Dom(f) \neq \emptyset$ y $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \neq Z$. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes para $x^* \in X^*, z^* \in C^+ \setminus \{0\}$*

a) $x^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$

b) $\forall x \in X : S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x) \supseteq S_{(x^*,z^*)}(\bar{x}) \dot{-} f(\bar{x})$

Prueba. Si $\bar{x} \notin Dom(f)$, entonces $\partial f_{z^*}(\bar{x}) = \emptyset$ y $S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(\bar{x}) = Z$. De aquí, es directo ver que $a) \Leftrightarrow b)$.

Supongamos que $\bar{x} \notin Dom(f)$, de aquí $f(\bar{x}) \neq \emptyset$ y $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \neq \{Z, \emptyset\}$.

$a) \Rightarrow b)$ Sea $x^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$, de la proposición 2.4.3

$$\begin{aligned} S_{(x^*,z^*)}(x - \bar{x}) &\supseteq f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \\ S_{(x^*,z^*)}(x) + S_{(x^*,z^*)}(-\bar{x}) &\supseteq f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x}) \\ S_{(x^*,z^*)}(x) &\supseteq [f(x) \oplus H^+(z^*) \dot{-} f(\bar{x})] \oplus S_{(x^*,z^*)}(\bar{x}) \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2.4.1 item $h)$ dos veces

$$S_{(x^*,z^*)}(x) \supseteq [S_{(x^*,z^*)}(\bar{x}) \dot{-} f(\bar{x})] \oplus f(x)$$

Por definición de la operación $\dot{-}$, tenemos $S_{(x^*,z^*)}(x) \dot{-} f(x) \supseteq S_{(x^*,z^*)}(\bar{x}) \dot{-} f(\bar{x})$.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos $S_{(x^*,z^*)}(x)\dot{-}f(x) \supseteq S_{(x^*,z^*)}(\bar{x})\dot{-}f(\bar{x})$. De

$$S_{(x^*,z^*)}(x)\dot{-}f(x) = H^+(z^*)\dot{-}[f(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x)]$$

tenemos $H^+(z^*)\dot{-}[f(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x)] \supseteq H^+(z^*)\dot{-}[f(\bar{x}) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-\bar{x})]$. De la proposición 2.4.1, item $e)$ $[f(\bar{x}) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-\bar{x})] \oplus H^+(z^*) \supseteq [f(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x)] \oplus H^+(z^*)$. Luego

$$[f(\bar{x}) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-\bar{x})] \oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x}) \supseteq [f(x) \oplus S_{(x^*,z^*)}(-x)] \oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x}) \quad (2.24)$$

Aplicando la afirmaciones $f)$ y $h)$ de la proposición 2.4.1, tenemos

$$S_{(x^*,z^*)}(-\bar{x}) \supseteq [(f(x) \oplus H^+(z^*))\dot{-}f(\bar{x}) + S_{(x^*,z^*)}(-x)$$

Sumando $S_{(x^*,z^*)}(x)$ se tiene $S_{(x^*,z^*)}(x - \bar{x}) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x})$. Por lo tanto, de la proposición 2.4.3 $x^* \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$.

□

La siguiente proposición describe los puntos que verifican $0 \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$ y será requerida para caracterizar los infimizadores de una aplicación.

Proposición 2.4.5. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ convexa , $z^* \in C^+ \setminus \{0\}$ y $\bar{x} \in Dom(f)$ tal que $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \neq Z$. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $H^+(z^*) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)$ *para todo* $x \in X$

b) $0 \in \partial f_{z^*}(\bar{x})$

c) $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) = [\inf_{x\in X} f(x)] \oplus H^+(z^*)$

d) $\varphi_{f,z^*}(\bar{x}) \leq \varphi_{f,z^*}(x)$ *para todo* $x \in X$

Prueba.

- Como $0 \in \partial f_{z^*}(\bar{x}) \leftrightarrow \forall x \in X; S_{(0,z^*)}(x) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x) \leftrightarrow \forall x \in X; H^+(z^*) \supseteq f'_{z^*}(\bar{x}, x)$, entonces $a) \Leftrightarrow b)$.

- $b) \Leftrightarrow c)$. De la proposición anterior

  $$0 \in \partial f_{z^*}(\bar{x}) \leftrightarrow \forall x \in X;\ S(0, z^*)(x)\dot{-}f(x) \supseteq S(0, z^*)(\bar{x})\dot{-}f(\bar{x})$$

  Además se tiene

  $$\forall x \in X;\ H^+(z^*)\dot{-}f(x) \supseteq H^+(z^*)\dot{-}f(\bar{x}) \leftrightarrow \forall x \in X;\ f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*)$$

  La prueba se completa usando de definición de ínfimo.

- $c) \Rightarrow d)$ Dado $x \in X$ se tiene $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*)$. Luego

$$\inf_{z \in f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*)} z^*(z) \leq \inf_{z \in f(x) \oplus H^+(z^*)} z^*(z)$$

  esto implica $\varphi_{f,z^*}(\bar{x}) \leq \varphi_{f,z^*}(x), \forall \ x \in X$

- $d) \Rightarrow c)$ Como $\inf\limits_{z \in f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*)} z^*(z) \leq \inf\limits_{z \in f(x) \oplus H^+(z^*)} z^*(z)$, de la proposión 2.4.1

$$f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) \supseteq f(x) \oplus H^+(z^*), \forall \, x \in X$$

  De aquí $f(\bar{x}) \oplus H^+(z^*) = [\inf_{x \in X} f(x)] \oplus H^+(z^*)$.

□

En esta parte presentaremos una caracterización de los infimizadores de una aplicación con la subdiferencial, antes definimos la siguiente aplicación.

Definición 2.4.5.
Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ y $M \subseteq X$ no vacío. La aplicación $\hat{f}(*, M) : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ dada por

$$\hat{f}(x, M) = \inf_{u \in M} f(x + u)$$

se denomina la inf-traslación de f en M.

La función inf-traslación satiface las siguientes propiedades

Lema 2.4.4. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ y $M \subset X$ no vacío.*

1. *Si $M \subseteq N \subseteq X$, entonces $\hat{f}(x, M) \subseteq \hat{f}(x, N)$ para todo $x \in X$.*

2. $\inf\limits_{x \in X} f(x) = \inf\limits_{x \in X} \hat{f}(x, M)$

3. *Si f y M son convexas entonces $\hat{f}(*, M) : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ también en convexa y $\hat{f}(x, M) = cl \bigcup\limits_{u \in M} f(x + u)$*

Prueba.

1. Dado $M \subseteq N \subseteq X$ tenemos $\hat{f}(x, M) = clco \bigcup\limits_{u \in M} f(x + u) \subseteq clco \bigcup\limits_{u \in N} f(x + u)$, luego $\hat{f}(x, M) \subseteq \hat{f}(x, N)$.

2. Tenemos las siguientes igualdades que son evidentes

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in X} \hat{f}(x,M) &= \inf_{x\in X}[\inf_{u\in M} f(x+u)] \\
&= \inf_{u\in M}[\inf_{x\in X} f(x+u)] \\
&= \inf_{u\in M}[\inf_{x\in X} f(x)] \\
&= \inf_{x\in X} f(x)
\end{aligned}$$

3. Como $M = tM + (1-t)M$, dado $t \in]0,1[$ y $x_1, x_2 \in X$ tenemos

$$\hat{f}(tx_1+(1-t)x_2, M) = \inf_{u\in M} f(tx_1+(1-t)x_2+u) \supseteq \inf_{m_1,m_2\in M} f(t(x_1+m_1)+(1-t)(x_2+m_2))$$

Además

$$\inf_{m_1,m_2\in M} f(t(x_1+m_1)+(1-t)(x_2+m_2)) \supseteq \inf_{m_1,m_2\in M} tf(x_1+m_1)+(1-t)f(x_2+m_2),$$

de esto concluimos que $\hat{f}$ es convexa.

□

La siguiente proposición dice que mediante la función inf-traslación un infimizador puede ser reducido a un solo punto.

Proposición 2.4.6. *Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z,C)$ y $M \subseteq dom(f)$ no vacío. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

a) *M es infimizador de f.*

b) *$\{0\} \subseteq X$ es un infimizador de $\hat{f}(*, M)$*

c) *$\{0\}$ es un infimizador de $\hat{f}(*, coM)$ y $\hat{f}(0,M) = \hat{f}(0, coM)$*

Prueba.

- $a) \Leftrightarrow b)$ Esto se sigue de

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in M} f(u) &= \inf_{x\in X} f(x) \\
\hat{f}(0,M) &= \inf_{x\in X} \hat{f}(x,M) \\
\inf_{u\in\{0\}} \hat{f}(u,M) &= \inf_{x\in X} \hat{f}(x,M)
\end{aligned}$$

- $a) \Rightarrow c)$ Asumiendo que M es infimizador de f, de lema anterior

$$\begin{aligned} \inf_{u\in M} f(u) &= \inf_{x\in X} f(x) \\ \inf_{u\in coM} f(u) &= \inf_{x\in X} \hat{f}(x, coM) \\ \hat{f}(0, coM) &= \inf_{x\in X} \hat{f}(x, coM) \end{aligned}$$

De aquí, $\{0\}$ es infimizador de $\hat{f}(*, coM)$. Además es claro que $\hat{f}(0, M) = \hat{f}(0, coM)$

- $c) \Rightarrow a)$ Esto se cumple de:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0, coM) &= \inf_{x\in X} \hat{f}(x, coM) \\ \hat{f}(0, M) &= \inf_{x\in X} f(x) \\ \inf_{u\in M} f(u) &= \inf_{x\in X} f(x) \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema caracteriza los infimizadores de una función convexa mediante la subdiferencial de su aplicación inf-traslación, es el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.4.4.
Sea $f : X \to \mathscr{G}(Z, C)$ un aplicación convexa que verifica $I(f) = \inf_{x\in X} f(x) \notin \{Z, \emptyset\}$ entonces f es propia y el conjunto $\Gamma^+(f) = \{z^* \in C^+ \setminus \{0\} : I(f) \oplus H^+(z^*) \neq Z\}$ es no vacío. Además, $M \subseteq X$ es un infimizador de f si y solo si $\hat{f}(0, M) = \hat{f}(0, coM)$ y

$$0 \in \bigcap_{z^*\in\Gamma^+(f)} \partial\hat{f}_{z^*}(*, coM)(0)$$

Prueba.
Es claro que si $\inf_{x\in X} f(x) \notin \{Z, \emptyset\}$ entonces f es propia y $\Gamma^+(f)$ es no vacío. Veamos la equivalencia:

- Asumiendo que M es infimizador de f, de la proposición 2.4.6 y del lema 2.4.6 tenemos que $\{0\}$ es infimizador de $\hat{f}(*, coM)$, ésta aplicación es convexa y $\hat{f}(0, M) = \hat{f}(0, coM)$. Tomando $z^* \in \Gamma^+(f)$ y $\bar{x} = 0$

$$\hat{f}(0, coM) \oplus H^+(z^*) = \inf_{x\in X} \hat{f}(x, coM) \oplus H^+(z^*) \neq Z$$

de esto y la proposición 2.4.6, $0 \in \partial\hat{f}_{z^*}(*, coM)(0)$, $\forall z^* \in \Gamma^+(f)$. Por lo tanto

$$0 \in \bigcap_{z^*\in\Gamma^+(f)} \partial\hat{f}_{z^*}(*, coM)(0)$$

- Supongamos que $0 \in \bigcap_{z^* \in \Gamma^+(f)} \partial \hat{f}_{z^*}(*, coM)(0)$ y $\hat{f}(0, M) = \hat{f}(0, coM)$, entonces $0 \in \partial \hat{f}_{z^*}(*, coM)(0),\ \forall z^* \in \Gamma^+(f)$, luego de la proposición 2.4.6

$$\hat{f}(0, coM) \oplus H^+(z^*) = \inf_{x \in X} \hat{f}(x, coM) \oplus H^+(z^*),\ \forall z^* \in \Gamma^+(f)$$

de esto $\hat{f}(0, coM) = \inf_{x \in X} \hat{f}(x, coM)$. Por lo tanto M es infimizador de f.

$\square$

Capítulo 3

Medida de riesgo de valor conjunto

En este capítulo, nos centramos en la situación en que los porfolios de riesgo son variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}^d$, cada componente de este portafolio corresponde a un mercado de valor diferente, siendo d el número de mercados. En la primera sección recordamos los conceptos de medidas de riesgo de valor escalar y en la segunda parte, siguiendo [6], presentamos la definición de medida de riesgo de valor conjunto, conjuntos de aceptancia, relaciones entre estos conceptos y algunos ejemplos.

3.1. Medida de riesgo de valor escalar

La incertidumbre en el valor de un portafolio generalmente se describe mediante una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$, donde $(\Omega, \mathscr{F})$ es un espacio medible. El objetivo de determinar un número $\rho(X)$ que cuantifique el riesgo, es que esta cantidad pueda servir como un requerimiento de capital, es decir, como la cantidad mínima de capital que, si se agrega a la posición X y se invierte de una manera libre de riesgo, hace que la posición sea aceptable por algún supervisor o regulador . El enfoque axiomático para tales medidas de riesgo se inició en el caso coherente con Artzner, et al [1]. En toda esta sección recordaremos las medidas de riesgo escalar y la relación con los conjuntos de aceptación, estos resultados se basan en [3]. Aquí L denotará el conjunto de variables aleatorias de Ω en $\mathbb{R}$ y el orden en L se define de la siguiente manera: dados $X, Y \in L$

$$X \leq Y \Leftrightarrow X(w) \leq Y(w), \forall\, w \in \Omega$$

Definición 3.1.1. *Una aplicación $\rho : L \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es denominada medida de riesgo si $\rho(0)$ es finito y ρ satisface las siguientes condiciones para todo $X, Y \in L$.*

1. *Monotonicidad: Si $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$*

2. *Invarianza por traslación: Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X+m) = \rho(X) - m$*

El significado financiero de estas propiedades es:

- La monotonicidad dice que el riesgo a la baja de una posición se reduce si se aumenta el perfil de pago. Esta propiedad también nos indica que aquellas posiciones financieras que son mejores que otras en cualquier escenario, deben tener menor riesgo.

- La invarianza dice que si la cantidad libre de riesgo m se agrega apropiadamente a la posición o al capital económico, entonces el requerimiento de capital para hacer aceptable la posición se reduce en la misma cantidad.

Definición 3.1.2. *Una medida de riesgo ρ se denomina convexa si es convexa como aplicación, es decir para todo $X, Y \in L$ y $t \in (0,1)$ se satisface:*

$$\rho(t(X) + (1-t)Y) \leq t\rho(X) + (1-t)\rho(Y)$$

Para comprender la convexidad consideremos la recopilación de posibles resultados futuros que pueden generarse con los recursos disponibles para un inversionista, una estrategia de inversión conduce a X, mientras que una segunda estrategia conduce a Y. Si uno se diversifica, gastando solo la fracción t de los recursos en la primera posibilidad y usando la parte restante para la segunda alternativa, uno obtiene $tX + (1-t)Y$. Por lo tanto, el axioma de convexidad da un significado preciso a la idea de que la diversificación no debe aumentar el riesgo.

Definición 3.1.3. *Una medida de riesgo convexa ρ se denomina coherente si satisface*

- *Positivamente homogénea: Si $\lambda > 0$, entonces $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.*

Definición 3.1.4. *Una medida de riesgo induce el conjunto $A_\rho = \{X \in L : \rho(X) \leq 0\}$, denominado conjunto de aceptación. Las posiciones en A_ρ no requieren capital adicional para ser admitido por el regulador.*

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades de la relación entre la medida de riesgo y su conjuntos de aceptación inducido.

Proposición 3.1.1. *Sea ρ una medida de riesgo con su conjunto de aceptación A_ρ.*

1. *Si ρ es convexo, entonces A_ρ es convexo.*

2. *Si ρ es positivamente homogénea, entonces A_ρ es un cono. En particular, si ρ es coherente, entonces es un cono convexo.*

3. *A_ρ verifica:*

   i) $A_\rho \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

   ii) $\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A_\rho\} > -\infty$ *para todo* $X \in L$.

   iii) $X \in A_\rho$, $Y \in L$, $Y \geq X$ *entonces* $Y \in A_\rho$.

Prueba. Como ilustración demostramos la tercera afirmación.

i) Como $\rho(\rho(0)) = 0$ y $\rho(0)$ es finito, el portafolio $X = \rho(0) \in A_\rho$. De esto $X \in A_\rho \cap \mathbb{R}$.

ii) Dado $X \in L$, se tiene

$$\{m \in \mathbb{R} : X + m \in A_\rho\} = \{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \leq m\} \tag{3.1}$$

de aquí $\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A_\rho\} > -\infty$.

iii) De la monotonicidad de ρ, tenemos $\rho(Y) \leq \rho(X) \leq 0$ y así $Y \in A_\rho$.

□

El conjunto de aceptación A_ρ determina completamente ρ, pues de (3.1) es claro

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A_\rho\}$$

Se puede tomar un conjunto $A \subseteq L$ de posiciones aceptables como el objeto primario para generar una medida de riesgo, en este sentido presentamos la siguiente definición:

Definición 3.1.5. *Un conjunto $A \subseteq L$ se denomina conjunto de aceptación si verifica:*

i) $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

ii) $\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A\} > -\infty$ *para todo* $X \in L$

iii) $X \in A$, $Y \in L$, $Y \geq X$ *entonces* $Y \in A$

Este conjunto define una medida de riesgo dada por $\rho_A(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A\}$, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Sea A un conjunto aceptación. Entonces la ρ_A verifica las siguientes propiedades.*

1. ρ_A es una medida de riesgo.

2. Si A es convexa, entonces ρ_A es convexa.

3. Si A es un cono, entonces ρ_A es positivamente homogénea. En particular ρ_A es coherente, si A es cono convexo.

Prueba.

1. De $\rho_A(0) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} : m \in A\}$ y $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, tenemos que $\rho_A(0)$ es finito. Además, la propiedad de invarianza por traslaciones y la monotonicidad son directas, en efecto:

   - $\rho_A(X+u) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} : m+u+X \in A\} = \text{ínf}\{z-u \in \mathbb{R} : z+X \in A\} = \text{ínf}\{z \in \mathbb{R} : z+X \in A\} - u = \rho_A(X) - u$
   - Sea $Y \geq X$, como $Y+m \geq X+m$ tenemos

     $$\{m \in \mathbb{R} : m+X \in A\} \subseteq \{m \in \mathbb{R} : m+Y \in A\}$$

     De esto $\rho_A(Y) \leq \rho_A(X)$.

2. Sean $X_1, X_2 \in A$ y $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $m_1 + X_1 \in A$ y $m_2 + X_2 \in A$. Si $t \in]0,1[$, por la convexidad de A tenemos $t(m_1 + X_1) + (1-t)(m_1 + X_2) \in A$. La propiedad $X \in A \Rightarrow \rho_A(X) \leq 0$ y la invarianza por traslaciones, implican

   $$0 \geq \rho_A(t(m_1 + X_1) + (1-t)(m_1 + X_2)) = \rho_A(tX_1 + (1-t)X_2) - [tm_1 + (1-t)m_2]$$

   de aquí $\rho_A(tX_1 + (1-t)X_2) \leq tm_1 + (1-t)m_2$. Tomando ínfimo, $\rho_A(tX_1 + (1-t)X_2) \leq t\rho_A(X_1) + (1-t)\rho_A(X_2)$.

3. Sea $X \in A$ y $m \in \mathbb{R}$ tal que $m + X \in A$. Si $\lambda > 0$, entonces $\lambda m + \lambda X \in A$. Luego $0 \geq \rho_A(\lambda m + \lambda X) = \rho_A(\lambda X) - \lambda m$. De aquí se sigue $\rho_A(\lambda X) \leq \lambda \rho_A(X)$.
   Supongamos que $\rho_A(\lambda_0 X) < \lambda_0 \rho_A(X)$ para algún $\lambda_0 > 0$. Luego existe z tal que $\rho_A(\lambda_0 X) < z < \lambda_0 \rho_A(X)$. De aquí $\frac{z}{\lambda_0} < \rho_A(X)$, entonces $\frac{z}{\lambda_0} + X \notin A$ y en consecuencia $z + \lambda_0 X \notin A$. Así $z < \rho(\lambda_0 X)$, esto es una contradicción. Por lo tanto, ρ_A es positivamente homogénea.

$\square$

Con las definiciones anteriores dado ρ una medida de riesgo, tenemos

$$\rho_{A_\rho}(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} : m + X \in A_\rho\} = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \leq m\} = \rho(X).$$

Antes de terminar la sección presentamos dos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1. *(Medida de riesgo en el peor de los casos) La aplicación*

$$\rho_{\text{máx}}(X) = -\inf_{w\in\Omega} X(w)$$

es una medida riesgo, pues

- *Si* $X \leq Y$ *implica* $\rho_{\text{máx}}(X) \geq \rho_{\text{máx}}(Y)$.
- $\rho_{\text{máx}}(X + m) = -\text{ínf}[X(w) + m] = \rho_{\text{máx}}(X) - m$.

Además su correspondiente conjunto de aceptación es $A_{\rho_{\text{máx}}} = \{X \in L : X \geq 0\}$, *este conjunto es un cono convexo, en consecuencia* $\rho_{\text{máx}}$ *es una medida de riesgo coherente.*

Ejemplo 3.1.2. *Denotemos con* $\mathscr{M}_1$ *al conjunto de todas las medidas de probabilidad definidas en* $(\Omega, \mathscr{F})$ *y sea* $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{M}_1$ *no vacío, además consideramos la aplicación* $\gamma : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ *con* $\sup_{Q\in\mathscr{P}} \gamma(Q) < \infty$. *El conjunto*

$$A = \{X \in L : E^Q[X] \geq \gamma(Q) \text{ para todo } Q \in \mathscr{P}\}$$

es de aceptancia, pues

i) *Tomando* $X = m > \sup_{Q\in\mathscr{P}} \gamma(Q)$ *se tiene* $E^Q[X] = m \geq \gamma(Q)$ *para todo* $Q \in \mathscr{P}$, *luego* $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

ii) *Sea* $X \in L$ *y* $m + X \in A$ *entonces* $E^Q[m + X] \geq \gamma(Q)\ \forall\ Q \in \mathscr{P}$, *en consecuencia* $m \geq \gamma(Q) - E^Q[X]$ *para algún* Q. *De esto* $\text{ínf}\{m : m + X \in A\} > -\infty$.

iii) *Si* $X \in A$ *y* $Y \in L$ *con* $Y \geq X$, *entonces* $E^Q[Y] \geq E^Q[X] \geq \gamma(Q)$ *para todo* $Q \in \mathscr{P}$. *Luego* $Y \in A$.

Además, el conjunto A *es convexo y por tanto la medida de riesgo asociada* ρ_A *es convexa y verifica:*

$$\rho_A(X) = \sup_{Q\in\mathscr{P}} (\gamma(Q) - E^Q(X)) \tag{3.2}$$

En efecto,

- *Es claro* $\rho_A(X) \geq \sup_{Q\in\mathscr{P}} (\gamma(Q) - E^Q(X))$

- *Supongamos que* $\rho_A(X) > \sup_{Q\in\mathscr{P}} (\gamma(Q) - E^Q(X))$, *entonces existe* m *tal que*

$$\rho_A(X) > m > \sup_{Q\in\mathscr{P}} (\gamma(Q) - E^Q(X)) \tag{3.3}$$

  Luego, $E^Q[m+X] \geq \gamma(Q)$, $\forall Q \in \mathscr{P}$ *y en consecuencia* $m+X \in A$. *De aquí* $m \geq \rho_A(X)$, *esto contradice la primera desigualdad de (3.3) .*

Por otro lado, tomando $\alpha(Q) = -\gamma(Q)$ *cuando* $Q \in \mathscr{P}$ *y* $\alpha(Q) = +\infty$ *caso contrario, podemos reescribir la ecuación (3.2) de la siguiente manera*

$$\rho_A(X) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_1} (E^Q(-X) - \alpha(Q)) \tag{3.4}$$

La representación (3.4) se denomina representación dual de ρ_A y la función $\alpha : \mathscr{M}_1 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ se denomina función de penalización, detallaremos estas cuestiones en el siguiente capítulo.

3.2. Medida de riesgo de valor conjunto

En esta sección extendemos la noción de medida de riesgo introducida anteriormente para medir el riesgo de posiciones aleatorias con valores en $\mathbb{R}^d$, el motivo para considerar portafolios valoradas en $\mathbb{R}^d$ es que los inversores en general no pueden agregar su portafolio debido a problemas de liquidez y/o costos de transacción entre los d mercados. Para que un portafolio X sea aceptable en términos de riesgo, el regulador o supervisor recomienda que se agregue cierto portafolio u determinista a la posición. Luego diremos que u cancela el riesgo inducido por X si $X + u$ es aceptable por el regulador o supervisor. La medida de riesgo de la posición X consistirá en la reunión de todas las posiciones deterministas u que cancelan el riesgo.

En adelante trabajaremos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y consideramos los siguientes espacios vectoriales, donde se encuentran los portafolios.

- $L^0_d = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d, \text{v.a.}\}$

- $L^p_d = \big\{X : \Omega \to \mathbb{R}^d, \text{v.a. tal que} \int_\Omega |X(w)|^p dP < +\infty\big\}$, $1 \leq p < +\infty$

- $L^\infty_d = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d, \text{v.a. tal que} \sup_{w\in\Omega} |X(w)| < +\infty\}$

$|*|$ denota la norma usal en $\mathbb{R}^d$, además denotaremos con $E[X]$ a la esperanza por componentes de la variable aleatoria X.
Aunque el regulador o supervisor puede recomendar cualquier portafolio determinista $u \in \mathbb{R}^d$ que cancele el riesgo de X, restringiremos u a un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^d$ de dimensión $m \geq 1$ denotado con M. La introducción de M (como subespacio) está motivada por la idea de que un inversor o regulador acepta compensaciones de riesgo solo en un determinado subconjunto de los d mercados o divisas, vea [11]. Suponemos que $M \cap \mathbb{R}^d_+ \neq \{0\}$ lo cual significa que hay al menos una posición en M con componentes no negativos que se aceptan como compensación de riesgo o depósito.
Las fricciones entre los mercados están modelizadas por un cono convexo cerrado $K \subseteq \mathbb{R}^d$ con $\mathbb{R}^d_+ \subset K$ denominado cono de solvencia. El cono K incluye todas las posiciones que pueden intercambiarse, pagando los costos de transacción, en posiciones con entradas no negativas.
La parte del cono K que es relevante es $K_M = K \cap M$, que también es un cono convexo cerrado. Por $int(K_M)$ denotamos el interior de K_M en el subespacio M. En adelante asumiremos que $int(K_M) \neq \emptyset$, lo cual es equivalente a que existe una base de M cuyos elementos están en K.
Para $1 \leq p \leq +\infty$ el conjunto

$$L^p_d(K) = \{X \in L^p_d : X \in K \text{ c.t.p.}\} \tag{3.5}$$

es un cono convexo cerrado en L^p_d.
Por otro lado, en adelante los espacios colineales $\mathscr{F}(M, K_M)$ y $\mathscr{G}(M, K_M)$ serán denotados por F_M y G_M respectivamente. Presentamos la medida de riesgo de valor conjunto en la siguiente definición.

Definición 3.2.1. *La aplicación $R : L^p_d \to F_M$ de valores conjuntos es una medida de riesgo si verifica las tres siguientes condiciones:*

- $(R0)$ *Normalizada, es decir $K_M \subseteq R(0)$ y $R(0) \cap -int(K_M) = \emptyset$*
- $(R1)$ *M-traslación, es decir si $\forall X \in L^p_d$, $\forall u \in M : R(X + u\mathbb{I}) = R(X) - u$.*
- $(R2)$ *$L^p_d(K)$-monótona, es decir si $\forall X_1\ , X_2 \in L^p_d : X^2 - X^1 \in L^p_d(K) \to R(X^2) \supseteq R(X^1)$.*

donde $\mathbb{I}$ denota la variable aleatoria cuyo valor es uno en casi todo punto con respecto a la medida de probabilidad P

Si R satisface $R0, R1, R2$ y es convexa (respectivamente sublineal), diremos que R es una medida de riesgo convexa (respectivamente coherente) de valor conjunto.
El valor $R(X)$ consta de todos los posibles vectores que compensan el riesgo de la posición X. Este conjunto es cerrado, si $u \in M$ compensa el riesgo de X, entonces, por supuesto, cada elemento de $u + K_M$ la compensa aún más.

- ($R0$) Significa que "no hacer nada" es una posición aceptable en el sentido de que cada posición determinista en M que puede intercambiarse en una posición con entradas no negativas solo compensa su riesgo.
- ($R1$) Dice que si la posición de referencia $u \in M$ se agrega a la posición aleatoria, su riesgo disminuye en u.
- ($R2$) Significa que para una posición menos riesgosa no puede haber menos posibilidad de compensar su riesgo.

Observaciones 3.2.1. *La convexidad de una medida de riesgo evita el extraño efecto de cancelación de riesgo al dividir una posición.*

Ahora pasamos a estudiar los conjuntos de aceptación para las medidas de riesgo de valor conjunto.

Definición 3.2.2. *El conjunto $A \subseteq L_d^p$ es denominado direccionalmente cerrado en M si dados $X \in L_d^p$, una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en M con $u_k \to 0$ y $X + u_k\mathbb{I} \in A$ para todo k, implica que $X \in A$.*

Definición 3.2.3. *Un conjunto $A \subseteq L_d^p$ se denomina conjunto de aceptación si satisface las tres siguientes afirmaciones:*

- *($A0$) $u \in K_M$ implica $u\mathbb{I} \in A$ y $v \in -int(K_M)$ entonces $v\mathbb{I} \notin A$.*
- *($A1$) A es direccionalmente cerrado en M y $A + u\mathbb{I} \subseteq A$, cuando $u \in K_M$.*
- *($A2$) $A + L_d^p(K) \subseteq A$*

Una condición más fuerte que ($A0$) es la siguiente: ($A0S$) $u\mathbb{I} \in A$ si y solo si $u \in K_M$.
Si A satisface $A0, A1, A2$ y es convexo (respectivamente cono convexo), entonces A es llamado conjunto de aceptación convexo (respectivamente coherente).
Podemos ver que $A2$ y las definiciones de $L_d^p(K)$ y K_M ya implican la segunda parte de

$A1$. Ésta propiedad juega un papel particular para la correspondencia uno a uno entre las medidas de riesgo y los conjuntos de aceptación. Además, de $A0$ tenemos $0 \in A$; esto y $A2$ implican $L_d^p(K) \subseteq A$.
Ahora estableceremos una relación uno a uno entre las medidas de riesgo y los conjuntos de aceptanción, para esto

a) Sea $A \subseteq L_d^p$, definimos $R_A(X) := \{u \in M : X + u\mathbb{I} \in A\}$

b) Dado $R : L_d^p \to F_M$, definimos $A_R := \{X \in L_d^p : 0 \in R(X)\} = \{X \in L_d^p : K_M \subseteq R(X)\}$

Interpretación

- $R_A(X)$ contiene todas las posiciones de referencia determinísticas que hace que X sea aceptable cuando se le agrega a X.
- Es claro que una posición X es aceptable si "no depositar nada" ya compensa su riesgo. Si este es el caso, cada posición de referencia aceptada "no negativa"(un elemento de K_M) lo compensa aún más.

Las siguientes proposiciones muestran que las definiciones *a*) y *b*) generan una biyección entre conjuntos de aceptación y medidas de riesgo de valor conjunto.

Proposición 3.2.1.
1. *Si $R : L_d^p \to F_M$ es $M-$ traslación, entonces A_R satisface $A1$ y $R = R_{A_R}$.*

2. *Si $A \subseteq L_d^p$ verifica $A1$, entonces R_A toma valores en F_M, es $M-$traslación y $A = A_{R_A}$*

Prueba.
1. Dada una sucesión $u_k \in M$ con $u_k \to 0$ y $X + u_k\mathbb{I} \in A_R$, tenemos $0 \in R(X + u_k\mathbb{I}) = R(X) - u_k$, de aquí $u_k \in R(X)$. Como $R(X)$ es cerrado, $0 \in R(X)$ y así $X \in A_R$. Por lo tanto A_R es direccionalmente cerrada.
   Por otro lado, sean $X \in A_R$ y $u \in K_M$. Como K_M es un cono convexo tenemos $K_M \subseteq K_M - u$, de aquí $K_M \subseteq K_M - u \subseteq R(X) - u = R(X + u\mathbb{I})$. Esto implica $X + u\mathbb{I} \in A_R$ y así $A_R + u\mathbb{I} \subseteq A_R$.
   Finalmente
$$\begin{aligned} R_{A_R}(X) &= \{u \in M : X + u\mathbb{I} \in A_R\} \\ &= \{u \in M : 0 \in R(X + u\mathbb{I})\} \\ &= \{u \in M : u \in R(X)\} \\ &= R(X) \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del item 1.

2. Debemos demostrar tres afirmaciones: $R(X) \in F_M$, $R_A(X + u\mathbb{I}) = R_A(X) - u$ y $A = A_{R_A}$.

   - Para la primera, basta demostrar $R_A(X) + K_M \subset R_A(X)$ y que $R_A(X)$ es cerrado. Sean $u \in R_A(X)$ y $v \in K_M$ entonces $X + u\mathbb{I} \in A$ y $v \in K_M$, de aquí $X + (u+v)\mathbb{I} \in A$ y en consecuencia $u + v \in R_A(X)$. Por lo tanto $R_A(X) + K_M \subset R_A(X)$.
     Por otro lado, sea una sucesión $u_k \in R_A(X)$ con $u_k \to u$. Por definición de R_A, $X + u_k\mathbb{I} \in A$ y de esto $(X + u\mathbb{I}) + (u_k - u)\mathbb{I} \in A$, con $(u_k - u) \to 0$. En consecuencia $X + u\mathbb{I} \in A$ y así $u \in R_A(X)$. Por lo tanto $R_A(X)$ es cerrado.
   - Probamos la segunda, sean $X \in L_d^p$ y $u \in M$.

$$\begin{aligned} R_A(X + u\mathbb{I}) &= \{v \in M : (X + u\mathbb{I}) + v\mathbb{I} \in A\} \\ &= \{u + v \in M : X + (u + v)\mathbb{I} \in A\} - u \\ &= R_A(X) - u \end{aligned}$$

   - Probamos la tercera, por definición

$$A_{R_A} = \{X \in L_d^p : 0 \in R_A(X)\} = \{X \in L_d^p : 0 \in \{u \in M : X + u\mathbb{I} \in A\}\} = A$$

Esto completa la prueba del item 2.

□

Algunas propiedades sobre R son heredadas por A_R y viceversa.

Proposición 3.2.2.

1. *Si $R : L_d^p \to F_M$ es una medida de riesgo, entonces A_R es un conjunto de aceptación. Si R es convexa, entonces A_R es convexo. Si R es coherente, entonces A_R es un conjunto de aceptación coherente.*

2. *Si $A \subseteq L_d^p$ es un conjunto de aceptación, entonces R_A es una medida de riesgo. Si A es convexo, entonces R_A es convexa. Si A es un conjunto de aceptación coherente, entonces R_A es una medida de riesgo coherente.*

Prueba. Como ilustración demostremos que si R es medida de riesgo, entonces A_R es un conjunto de aceptación y reciprocamente si A es de aceptación, entonces R_A es medida de riesgo.

1. Sea R es medida de riesgo.

   - $(A0)$: Dado $u \in K_M$ se tiene $u \in R(0)$, de aquí $0 \in R(0) - u = R(u\mathbb{I})$. Luego $u\mathbb{I} \in A_R$. Además, si $u \in -int(K_M)$ entonces

     $$u \notin R(0) \Rightarrow 0 \notin R(u\mathbb{I}) \Rightarrow u\mathbb{I} \notin A_R$$

   - $(A1)$: Esto se probó en la primera parte de la proposición 3.2.1.
   - $(A2)$: Sea $X_1 \in A_R$ y $X_2 \in L_d^p(K)$. De $R2$ y $(X_2 + X_1) - X_1 \in L_d^p(K)$ tenemos $R(X_2+X_1) \supseteq R(X_1)$, y además $0 \in R(X_1)$. Luego $0 \in R(X_2+X_1)$ y así $X_1+X_2 \in A_R$. Hemos probado $A_R + L_d^p(K) \subseteq A_R$.

   Luego A_R es un conjunto de aceptación.

2. Sea A conjunto de aceptación.

   - $(R0)$: Sea $u \in K_M$. De $A0$ tenemos $u\mathbb{I} \in A$, esto implica $u \in R_A(0)$ y en consecuencia $K_M \subseteq R_A(0)$.
     Si existe $u \in R_A(0) \cap -int(K_M)$ entonces por un lado $u\mathbb{I} \in A$ y por otro $u\mathbb{I} \notin A$. Esto es un absurdo, luego $R_A(0) \cap -int(K_M) = \emptyset$
   - $(R1)$: Esto se probó en la segunda parte de la proposición 3.2.1.
   - $(R2)$: Sea $X_2 - X_1 \in L_d^p(K)$. Dado $u \in R_A(X_1)$ se tiene $X_1 + u\mathbb{I} \in A$, de $A2$

     $$X_2 + u\mathbb{I} = (X_2 - X_1) + X_1 + u\mathbb{I} \in L_d^p(K) + A \subseteq A$$

     esto implica $X_2 + u\mathbb{I} \in A$ y en consecuencia $u \in R_A(X_2)$. Por lo tanto $R(X_1) \subseteq R(X_2)$.

$\square$

Observaciones 3.2.2.

1. *La $M-$traslación de R es equivalente a $Graf(R) = \{(X, u) \in L_d^p \times M : X + u\mathbb{I} \in A_R\}$*
   Justificación:

   - *Supongamos que R es $M-$traslación, entonces*

     $$(X, u) \in Graf(R) \Leftrightarrow u \in R(X) \Leftrightarrow 0 \in R(X) - u \Leftrightarrow 0 \in R(X + u\mathbb{I}) \Leftrightarrow X + u\mathbb{I} \in A_R$$

     Por lo tanto $Graf(R) = \{(X, u) \in L_d^p \times M : X + u\mathbb{I} \in A_R\}$.

- *Supongamos que* $Graf(R) = \{(X,u) \in L_d^p \times M : X + u\mathbb{I} \in A_R\}$, *entonces* $w \in R(X+u\mathbb{I}) \leftrightarrow (X+u\mathbb{I}, w) \in Graf(R) \leftrightarrow X + (u+w)\mathbb{I} \in A_R \leftrightarrow (X, u+w) \in Graf(R) \leftrightarrow u + w \in R(X) \leftrightarrow w \in R(X) - u$. *Por lo tanto* $R(X+u\mathbb{I}) = R(X) - u$

2. *R es una medida de riesgo cerrada si y solo si* A_R *es cerrado, en efecto*

   - *Sea* $Graf(R)$ *cerrado y consideremos* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_R$ *con* $X_n \to X$, *entonces* $0 \in R(X_n)$ *y así* $(X_n, 0) \in Graf(R)$ *con* $(X_n, 0) \to (X, 0)$. *Luego* $(X,0) \in Graf(R)$ *y consecuentemente* $X \in A_R$. *Por lo tanto* A_R *es cerrado.*

   - *Sea* A_R *cerrado y consideremos* $(X_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Graf(R)$ *con* $(X_n, u_n) \to (X, u)$, *entonces* $X_n + u_n\mathbb{I} \in A_R$ *con* $X_n + u_n\mathbb{I} \to X + u\mathbb{I}$. *Luego* $X + u\mathbb{I} \in A_R$ *y así* $(X,u) \in Graf(R)$. *Por lo tanto R es un medida de riesgo cerrada.*

Cuanto menor sea el conjunto de aceptación, mayor será el grado de aversión al riesgo. Luego, la medida de riesgo con la mayor aversión al riesgo es la que tiene el menor conjunto de aceptación.

Ejemplo 3.2.1. *(worst case) El conjunto más pequeño que satisface las propiedades* $(A0)-(A2)$ *es el cono* $A = L_d^p(K)$. *La medida de riesgo correspondiente* R_A *es*

$$WC^{M,S}(X) := \{u \in M : X + u\mathbb{I} \in L_d^p(K)\}$$

Cuando $d = 1, M = \mathbb{R}$, $K = K_M = \mathbb{R}_+$ *la medida de riesgo anterior queda*

$$WC^{M,S}(X) = \{u \in \mathbb{R} : X + u\mathbb{I} \geq 0\}$$

De aquí $\inf WC^{M,S}(X) = \inf\{u \in \mathbb{R} : X + u\mathbb{I} \geq 0\} = \rho_{\text{máx}}(X)$, *en esta situación decimos que en el caso escalar* $WC^{M,S}(X)$ *se identifica con* $\rho_{\text{máx}}(X)$.

Ejemplo 3.2.2. *(negative componentwise expectation) Sea el conjunto* $A = \{X \in L_d^1 : E[X] \in K\}$. *Este es un conjunto de aceptación coherente que verifica* $(A0S)$ *en lugar de* $(A0)$. *En efecto, es claro que A es un cono convexo y verifica:*

- $(A0S)$*: Si* $u \in K_M$ *entonces* $E[u\mathbb{I}] = u \in K$, *de aquí* $u\mathbb{I} \in A$. *Si* $u \in M \setminus K_M$ *entonces* $u \notin K$, *de aquí* $u\mathbb{I} \notin A$.

- $(A1)$*: Si* $X + u_k\mathbb{I} \in A$ *con* $u_k \to 0$ $u_k \in M$, *entonces* $E[X + u_k\mathbb{I}] = E[X] + u_k \in K$ *y como K es cerrado tenemos* $E[X] \in K$, *en consecuencia* $X \in A$. *Por otro lado, dado* $X \in A$ *y* $u \in K_M$ *tenemos* $E[X + u\mathbb{I}] = E[X] + u \in K$, *por lo tanto* $X + u\mathbb{I} \in A$.

- *(A2): Dados $X \in A$ y $Y \in K c.t.p.$, tenemos $E[X+Y] = E[X] + E[Y] \in K$. Esto implica $X + Y \in A$.*

La correspondiente medida de riesgo coherente R_A es

$$NCE(X) := \{u \in M : E[X + u\mathbb{I}] \in K\} = (E[-X] + K) \cap M \tag{3.6}$$

La segunda igualdad de (3.6) es debido a

$$u \in \{u \in M : E[X + u\mathbb{I}] \in K\} \leftrightarrow E[X + u\mathbb{I}] = E[X] + u \in K \leftrightarrow u \in (E[-X] + K) \cap M$$

Ejemplo 3.2.3. *(set-valued value at risk) Dado $0 \leq \lambda \leq 1$, definimos las aplicaciones $VAR_\lambda^{M,W}, VAR_\lambda^{M,S} : L_d^p \to F_M$*

$$VAR_\lambda^{M,W}(X) = \big\{u \in M : \mathbb{P}(X + u\mathbb{I} \in -intK) \leq \lambda\big\} \tag{3.7}$$

$$VAR_\lambda^{M,S}(X) = \big\{u \in M : \mathbb{P}(X + u\mathbb{I} \notin K) \leq \lambda\big\} \tag{3.8}$$

Se puede mostrar que estas aplicaciones son medidas de riesgo, como ilustración desarrollamos las cuentas para $VAR_\lambda^{M,W}$.

- *$(R0)$: Dado $u \in K_M$ entonces $u \in K$, como $-intK \cap K = \emptyset$ tenemos $\mathbb{P}(u\mathbb{I} \in -intK) = 0 \leq \lambda$. De esto $u \in VAR_\lambda^{M,W}(0)$.*

- *$(R1)$: Dado $u \in M$ fijo*

$$\begin{aligned} v \in VAR_\lambda^{M,W}(X + u\mathbb{I}) &\leftrightarrow \mathbb{P}((X + u\mathbb{I}) + v\mathbb{I} \in -intK) \leq \lambda \\ &\leftrightarrow \mathbb{P}(X + (u+v)\mathbb{I} \in -intK) \leq \lambda \\ &\leftrightarrow u + v \in VAR_\lambda^{M,W}(X) \\ &\leftrightarrow v \in VAR_\lambda^{M,W}(X) - u \end{aligned}$$

  Luego $VAR_\lambda^{M,W}(X + u\mathbb{I}) = VAR_\lambda^{M,W}(X) - u$

- *$(R2)$: Sean $X_2 - X_1 \in L_d^p(K)$ y consideremos los conjuntos de Ω $A_1 = \{-X_1 - u\mathbb{I} \in intK\}$, $A_2 = \{-X_2 - u\mathbb{I} \in intK\}$.*

  Se verifica $A_2 \subset A_1$, pues si $-X_2 - u\mathbb{I} \in intK$ como

$$-X_1 - u\mathbb{I} = -X_1 - u\mathbb{I} + X_2 - X_2 = 2\Big[\frac{-X_2 - u\mathbb{I}}{2} + \frac{X_2 - X_1}{2}\Big]$$

  se tiene que $-X_1 - u\mathbb{I} \in intK$ y así $A_2 \subseteq A_1$.

  De esto $\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(A_1)$ y por lo tanto $VAR_\lambda^{M,W}(X_2) \supseteq VAR_\lambda^{M,W}(X_1)$

Los conjuntos de aceptación de estas medidas de riesgo son

$$A_{VAR_{\lambda}^{M,W}} = \left\{X \in L_q^p : P(X \in -intK) \leq \lambda\right\}$$

$$A_{VAR_{\lambda}^{M,S}} = \left\{X \in L_q^p : P(X \notin K) \leq \lambda\right\}$$

Capítulo 4

Representación dual de una medida de riesgo

4.1. Representación dual de una medida de riesgo escalar

El estudio de la representación dual en el caso de medidas de riesgo de valor escalar servirá como preámbulo para el estudio de la representación dual en el caso de valor conjunto.
Follmer y Schied (2002) [2] hacen una presentación detallado de las medidas de riesgo monetario y en particular se centran en las medidas de riesgo convexas cuando X pertenece al espacio $L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, P)$. En este estudio se presenta el desarrollo de la representación robusta o dual de una medida de riesgo convexa y uno de los resultado iniciales es el siguiente:

Teorema 4.1.1. *Cualquier medida de riesgo convexa ρ se puede presentar en la forma*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E^Q[-X] - \alpha^{min}(Q))$$

donde $\alpha^{min}(Q) := \sup_{X \in A_\rho} E^Q[-X]$, $\mathscr{M}_{1,f}$ es el conjunto de todas las funciones finitamente aditivas $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ con $Q(\emptyset) = 0$ y $Q(\Omega) = 1$ y A_ρ es el conjunto de aceptación de ρ.

Prueba. La prueba se desarrolla en [2], capítulo 4. $\square$

Sea $\mathscr{M}_1$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathscr{F})$, presentamos la siguiente definición.

Definición 4.1.1. *Diremos que una medida de riesgo convexa ρ tiene una representación* *dual si*

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_1} (E^Q[-X] - \alpha(Q)) = \sup_{Q\in\mathscr{P}} (E^Q[-X] - \alpha(Q)) \tag{4.1}$$

con alguna función de penalización $\alpha : \mathscr{M}_1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *donde*

$$\mathscr{P} = \{Q \in \mathscr{M}_1 : \alpha(Q) < +\infty\}$$

El requerimiento de capital $\rho(X)$ se calcula como el peor caso de la pérdida esperada $E^Q[-X]$ penalizada, asumida en todos los modelos $Q \in \mathscr{P}$.
Si consideramos $\mathscr{P} = \mathscr{M}_1(P)$ como el conjunto de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathscr{F})$ que son absolutamente continuas con respecto a la probabilidad fija P, tenemos el siguiente resultado desarrollado en [2]:

Teorema 4.1.2. *Sea* $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ *una medida de riesgo convexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. ρ *puede ser representada por alguna función de penalidad* α *en* $\mathscr{M}_1(P)$*; es decir*

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_1(P)} (E^Q[-X] - \alpha(Q)), \ \ \forall X \in L^\infty$$

2. ρ *puede ser representada por la función de penalidad* $\alpha^{min}(Q) = \sup_{X\in A_\rho}(E^Q[-X])$ *en* $\mathscr{M}_1(P)$*; es decir*

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_1(P)} (E^Q[-X] - \alpha^{min}(Q)), \ \ \forall X \in L^\infty$$

3. ρ *es continuo por arriba; esto es* $X_n \searrow X$, P *c.t.p. entonces* $\rho(X_n) \nearrow \rho(X)$

4. ρ *tiene la siguiente propiedad de Fatou: Para cada sucesión* (X_n) *que converga en* P *c.t.p a* X*, se cumple*

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(X_n)$$

Prueba. La prueba se puede encontrar en el teorema 4.33 en [2]. □

Desarrollamos dos ejemplos antes de finalizar la sección.

Ejemplo 4.1.1. *Sea* $\mathscr{P}$ *un conjunto de medidas de probabilidad en* $(\Omega, \mathscr{F})$ *y consideramos la aplicación* $\gamma : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ *con* $\sup_{Q\in\mathscr{P}} \gamma(Q) < \infty$. *En el ejemplo 3.1.2 probamos que el conjunto*

$$A = \{X \in L : E^Q[X] \geq \gamma(Q) \text{ para todo } Q \in \mathscr{P}\}$$

es de aceptación y que la medida de riesgo correspondiente tiene una representación de la forma

$$\rho_A(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} (E^Q[-X] - \alpha(Q))$$

Esta es una representación dual de ρ_A, ver ejemplo 3.1.2.

Ejemplo 4.1.2. *En el ejemplo 3.1.1 vimos que la aplicación $\rho_{max}(X) = -\inf_{w \in \Omega} X(w)$ es una medida de riesgo convexa. Es claro que*

$$\rho_{max}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : X + m \geq 0 \; P \; c.t.p.\} \tag{4.2}$$

Esta medida verifica la propiedad de Fatou. En efecto

- *Sea $X_n \to X$ en P c.t.p. Por contradiccón, si fuese el caso $\liminf_{n \to +\infty} \rho_{max}(X_n) < \rho_{max}(X)$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que*

  $$\liminf_{n \to +\infty} \rho_{max}(X_n) < t < \rho_{max}(X)$$

  Luego, existe un subsucesión X_{n_k} tal que

  $$t > \rho_{max}(X_{n_k}) = -\inf_{w \in \Omega} X_{n_k}(w) = \sup_{w \in \Omega} -X_{n_k}(w) \geq -X_{n_k}(w), \; \forall \, w \in \Omega$$

  De aquí $\rho_{max}(X) > t \geq -X$ c.t.p. y así $t + X \geq 0$ c.t.p. y $\rho_{max}(X) > t$, esto es una contradicción con (4.2).

Por el teorema anterior $\rho_{max}(X)$ admite una representación dual del tipo

$$\rho_{max}(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} (E^Q[-X] - \alpha^{min}(Q)), \;\; \forall X \in L^\infty$$

Como $A_{\rho_{max}} = L^\infty_+$ tenemos $\alpha^{min}(Q) = \sup_{X \in L^\infty_+} E^Q[-X] = 0$. Por lo tanto

$$\rho_{max}(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} (E^Q[-X])$$

4.2. Representación dual de una medida de riesgo de valor conjunto

En este sección estudiaremos ciertas funciones de valor de conjunto que reemplazarán, en el contexto de medidas de valor conjunto, a las esperanzas que aparecen en la representación dual de la medida de riesgo valor escalar; luego demostraremos un teorema de representación dual. Esta parte está basada en [6] y en toda la sección los portafolios estarán en el espacio vectorial L^p_d, con $1 < p < +\infty$.

Para el cono $K \supseteq \mathbb{R}^d_+$ consideremos los siguientes conjuntos

$$K^+ = \{v \in \mathbb{R}^d : v^T u \geq 0, \forall u \in K\} \tag{4.3}$$

$$K^+_M = \{v \in M : v^T u \geq 0, \forall u \in K_M\} \tag{4.4}$$

los cuales son denominados el dual positivo de K en $\mathbb{R}^d$ y de K_M en M respectivamente. Además, para $v \in \mathbb{R}^d$ sea el conjunto $G(v) = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq v^T \cdot x\}$ y denotamos por $\mathscr{M}^P_{1,d}$, al conjunto de todos los vectores de probabilidad que son absolutamente continuas con la probabilidad P, esto es si $Q = (Q_1, Q_2, ...Q_d)^T \in \mathscr{M}^P_{1,d}$ entoces Q_i es una probabilidad tal que $\frac{dQ_i}{dP} \in L^1$, para todo $i \in \{1, 2, ..., d\}$

Observaciones 4.2.1.

1. *Se puede justificar que el cono dual positivo de $L^p_d(K)$ es $L^q_d(K^+)$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ y $p, q > 1$.*

2. *Se cumple $K^+_M = (K^+ + M^\perp) \cap M$, donde $M^\perp = \{v \in \mathbb{R}^d : v^T \cdot u = 0, \forall u \in M\}$*

Con estas observaciones y convenciones presentamos la siguiente definición.

Definición 4.2.1. *Sean $Y \in L^q_d$ y $v \in M$, definimos la función $F^M_{(Y,v)} : L^p_d \to P(M)$ mediante*

$$F^M_{(Y,v)}(X) = \{u \in M : E(X^T Y) \leq v^T u\}$$

Ejemplo 4.2.1. *Si $Y = (\mathbb{I}, \mathbb{I}, ..., \mathbb{I})$, $v = (1, 1, ..., 1)$ y $M = \mathbb{R}^d$, entonces*

$$F^M_{(Y,v)}(X) = E(X) + \{u \in \mathbb{R}^d : v^T \cdot u \geq 0\}$$

En particular si $d = 1$, $Y = \mathbb{I}$, entonces $F^M_{(Y,v)}(X) = E(X) + \mathbb{R}_+$.

Este ejemplo "insinua" que $F^M_{(Y,v)}$ es, en cierto sentido, una extensión del concepto de esperanza matemática a aplicaciones de valores conjuntos. Propiedades elementales de la función $F^M_{(Y,v)}$ son agrupados en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Se verifican las siguientes afirmaciones*

1. $F^M_{(Y,0)}(X) = \begin{cases} \emptyset & ; \ E(X^T Y) > 0 \\ M & ; \ E(X^T Y) \leq 0 \end{cases}$

2. $\forall X \in L_d^p, F_{(Y,v)}^M(X) \subseteq G_M$ *y* $F_{(Y,v)}^M(\cdot)$ *es propia si y solo si* $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$

3. Si $\widehat{u} \in M$ *es tal que* $v^T\widehat{u} = 1$*, entonces*

$$F_{(Y,v)}^M(X) = E(X^TY)\widehat{u} + F_{(Y,v)}^M(0) = E(X^TY)\widehat{u} + G(v) \cap M$$

4. Sean $Y \in L_d^q$ *y* $v \in M \setminus \{0\}$*. Dado* $X_1, X_2 \in L_d^p$ *y* $s > 0$ *se tiene* $F_{(Y,v)}^M(X_1 + X_2) = F_{(Y,v)}^M(X_1) + F_{(Y,v)}^M(X_2)$ *y* $F_{(Y,v)}^M(sX) = sF_{(Y,v)}^M(X)$*.*

Prueba.

1. La demostración es directa de la definición de $F_{(Y,v)}(X)$.

2. ($\Rightarrow$)Por contradicción, si $v \notin K_M^+ \setminus \{0\}$ podemos analizar dos casos:

   - Si $v = 0$ entonces $F_{(Y,v)}^M(X) = \emptyset$ o $F_{(Y,v)}^M(X) = M$. Por lo tanto $F_{(Y,v)}^M$ no es propia.
   - Si $v \neq 0$ existe $u_0 \in K_M$ tal que $v^Tu_0 < 0$. Tomando $u \in F_{(Y,v)}^M(X)$ y $t > 0$ vemos que $u + tu_0 \in F_{(Y,v)}^M(X) + K_M \subset F_{(Y,v)}^M(X)$, consecuentemente $u + tu_0 \in F_{(Y,v)}^M(X)$ y por lo tanto

     $$E(X^TY) \leq v^Tu + tv^Tu_0$$

     esto es absurdo, pues si $t \to \infty$ implica $E(X^TY) = -\infty$.

   ($\Leftarrow$) Por definición, $F_{(Y,v)}^M(X)$ es un semiespacio convexo y cerrado, luego la aplicación es propia y es claro $F_{(Y,v)}^M(X) \subset F_{(Y,v)}^M(X) + K_M$.
   Probemos $F_{(Y,v)}^M(X) + K_M \subset F_{(Y,v)}^M(X)$, para esto sea $z = u + n \in F_{(Y,v)}^M(X) + K_M$, se tiene $E(X^TY) \leq v^Tu \leq v^T(u + n)$, de aquí $z \in F_{(Y,v)}^M(X)$. Por lo tanto, $F_{(Y,v)}^M(X) = F_{(Y,v)}^M(X) + K_M$ y así $F_{(Y,v)}^M(X) \subseteq G_M$.

3. Para $\widehat{u} \in M$ con $v^T\widehat{u} = 1$ tenemos

   $$F_{(Y,v)}^M(X) = \{u \in M : E(X^TY) \leq v^Tu\} = \{u \in M : 0 \leq v^T(u - \widehat{u}E(X^TY))\}$$

   Luego, $u \in F_{(Y,v)}^M(X) \Leftrightarrow u - \widehat{u}E(X^TY) \in F_{(Y,v)}^M(0) \Leftrightarrow u \in F_{(Y,v)}^M(0) + \widehat{u}E(X^TY)$.
   De aquí $F_{(Y,v)}^M(X) = E(X^TY)\widehat{u} + F_{(Y,v)}^M(0)$. Además, es claro que $F_{(Y,v)}^M(0) = G(v) \cap M$.

4. Como ilustración probamos $F_{(Y,v)}^M(X_1 + X_2) = F_{(Y,v)}^M(X_1) + F_{(Y,v)}^M(X_2)$.
   La prueba de $\supseteq$ es inmediata, vamos a probar $\subseteq$.

Sea $u \in F^M_{(Y,v)}(X_1 + X_2)$. Para X_1 existe $u' \in M$ tal que $E(X_1^T Y) = -v^T u'$ (observe que $-u' \in F^M_{(Y,v)}(X_1)$), luego

$$E(X_1^T Y) + E(X_2^T Y) \leq v^T u \Rightarrow -v^T u' + E(X_2^T Y) \leq v^T u \Rightarrow E(X_2^T Y) \leq v^T (u + u')$$

De esto $u + u' \in F^M_{(Y,v)}(X_2) \Rightarrow u \in F^M_{(Y,v)}(X_2) + F^M_{(Y,v)}(X_1)$. Esto muestra $\subseteq$
Por lo tanto $F^M_{(Y,v)}(X_1 + X_2) = F^M_{(Y,v)}(X_1) + F^M_{(Y,v)}(X_2)$.

□

Mediante la aplicación $F^M_{(Y,v)}$ podemos definir una medida de riesgo coherente bajo ciertas condiciones para Y y v.

Proposición 4.2.2. *Sean $Y \in L^q_d(K^+)$ y $v \in (E(Y) + M^\perp) \cap K^+_M \setminus \{0\}$. Entonces la función $R : L^p_d \to P(M)$ definida por $R(X) = F^M_{(Y,v)}(-X)$ es una medida de riesgo coherente cuyo conjunto de aceptación es $A_R = \{X \in L^p_d : 0 \leq E(X^T Y)\}$*

Prueba.

$(R0)$ Como $R(0) = \{u \in M : 0 \leq v^T u\}$ y $v \in K^+_M$ entonces $K_M \subseteq R(0)$. Si existe $u \in int(K_M)$ y $-u \in R(0)$ entonces $v^T u = 0$.
Como $u \in int(K_M)$ existe una vecindad del cero $V \subset M$ (V es una bola abierta) tal que $u + V \in K_M$. Además existe $w \neq 0$ tal que $w, -w \in V$, de donde $v^T(u + w) > 0$, $v^T(u - w) > 0$ y en consecuencia $v^T w > 0$ y $v^T w < 0$. Esto es una contradicción, por lo tanto $-int(K_M) \cap R(0) = \emptyset$

$(R1)$ La prueba resulta de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
R(X + u\mathbb{I}) &= \{z \in M : E[(-X - u\mathbb{I})^T Y] \leq v^T z\} \\
&= \{z \in M : E[X^T Y] + (E[Y] - v)^T u + v^T (z + u) \geq 0\} \\
&= \{w - u \in M : E[X^T Y] + v^T w \geq 0\} \\
&= \{w \in M : E[X^T Y] + v^T w \geq 0\} - u \\
&= R(X) - u
\end{aligned}$$

la tercera igualdad es debido a $(E[Y] - v) \in M^\perp$.

$(R2)$ Sean X_2, X_1 en L^p_d con $X_2 - X_1 \in L^p_d(K)$ y $u \in R(X_1)$ entonces

$$E[(-X_2)^T Y] + E[(X_2 - X_1)^T Y] = E[(-X_1)^T Y] \leq v^T u \tag{4.5}$$

Por otro lado, $Y \in L_d^q(K^+)$ y $X_2 - X_1 \in L_d^p(K)$ se cumple $E[(X_2 - X_1)^T Y] \geq 0$ y en consecuencia de la ecuación (4.5) se tiene $E[(-X_2)^T Y] \leq v^T u$. De aquí $u \in R(X_2)$ y por lo tanto $R(X_2) \supseteq R(X_1)$.

La sublinealidad es consecuencia del item 4 de la proposición 4.2.1.
Hemos justificado que $R(X) = F_{(Y,v)}(-X)$ es una medida de riesgo coherente, es claro que $A_R = \{X \in L_d^p : 0 \in F_{(Y,v)}^M(-X)\} = \{X \in L_d^p : 0 \leq E(X^T Y)\}$ □

A continuación a través de un cambio de variable daremos otra presentación de las funciones $F_{(Y,v)}^M$. Dado $w \in \mathbb{R}^d$, denotaremos por $diag(w)$ a la matriz diagonal en $\mathbb{R}^{d\times d}$ con las componentes de w en su diagonal principal y ceros en las demás.

Lema 4.2.1.

1. *Sean $Y \in L_d^q(K^+)$ y $v \in (E(Y) + M^\perp) \cap K_M^+ \setminus \{0\}$. Entonces existen $Q \in \mathscr{M}_{1,d}^P$, $w \in K^+ \setminus M^\perp$ tal que $diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L_d^q(K^+)$ y $F_{(Y,v)}^M = \widetilde{F}_{(Q,w)}^M$ con*

$$\widetilde{F}_{(Q,w)}^M(X) = \{u \in M : w^T E^Q(X) \leq w^T u\} = (E^Q(X) + G(w)) \cap M \tag{4.6}$$

2. *Sean $Q \in \mathscr{M}_{1,d}^P$ y $w \in K^+ \setminus M^\perp$ con $diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L_d^q(K^+)$, entonces existen $Y \in L_d^q(K^+)$ y $v \in (E(Y) + M^\perp) \cap K_M^+ \setminus \{0\}$ tal que $\widetilde{F}_{(Q,w)}^M = F_{(Y,v)}^M$.*

Prueba.

1. Sean $Y \in L_d^q(K^+)$ y $v \in (E(Y) + M^\perp) \cap K_M^+ \setminus \{0\}$. Definimos $w = E[Y] \in K^+$ y observamos $v - w \in M^\perp$.
   Si $w \in M^\perp$ entonces $v^T w = 0$ y $v^T(v-w) = 0$, de aquí $v = 0$. Esto es una contradicción, por lo tanto $w \in K^+ \setminus M^\perp$.
   Sea el vector aleatorio $Z = (z_1, z_2, ..., z_d)^T$ tal que $z_i = \frac{Y_i}{w_i}$, cuando $w_i > 0$ y $z_i \in L_d^p(\mathbb{R}_+)$ cualquiera con $E[z_i] = 1$, cuando $w_i = 0$ y consideremos $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_d)^T$ el vector de probabilidad tal que $\frac{dQ_i}{dP} = z_i$, es decir $Q_i(A) = \int_A z_i dP$ para $i \in \{1, 2, .., d\}$. Se tiene

   - Si $w_i > 0 \Rightarrow Y_i = w_i \frac{dQ_i}{dP}$.
   - Si $w_i = 0 \Rightarrow E[Y_i] = 0 \Rightarrow Y_i = 0$ c.t.p., de esta manera $Y_i = w_i \frac{dQ_i}{dP}$ c.t.p.

   Luego, $Y = diag(w)\frac{dQ}{dP}$ y además

$$w^T E^Q[X] = \sum_{i=1}^d w_i E^{Q_i}[x_i] = \sum_{i=1}^d w_i E[x_i \frac{dQ_i}{dP}] = E[\sum_{i=1}^d x_i w_i \frac{dQ_i}{dP}] = E[X^T diag(w)\frac{dQ}{dP}] = E[X^T Y]$$

Así

$$E[X^TY] = w^TE^Q[X] \tag{4.7}$$

Por otro lado, como $v - w \in M^\perp$, se cumple que $v^Tu = w^Tu$ para todo $u \in M$. De esto y la ecuación (4.7)

$$F^M_{(Y,v)}(X) = \{u \in M : E[X^TY] \leq v^Tu\} = \{u \in M : w^TE^Q[X] \leq v^Tu\} = \widetilde{F}^M_{(Q,w)}(X)$$

Además, es directo verificar que $\{u \in M : w^TE^Q[X] \leq v^Tu\} = (E^Q[X] + G(w)) \cap M$.

2. Para $Q \in \mathscr{M}^P_{1,d}$ y $w \in K^+ \setminus M^\perp$ con $diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L^q_d(K^+)$ definimos $Y = diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L^q_d(K^+)$ y vemos $E[Y_i] = E[w_i\frac{dQ_i}{dP}] = w_iE[\frac{dQ_i}{dP}] = w_i$ para todo $i \in \{1, 2, .., d\}$; luego $E[Y] = w \in K^+$ y como antes, se verifica $w^TE^Q[X] = E[X^TY]$.
   Por otro lado, afirmamos que $w \in K^+_M + M^\perp$. En efecto
   Para w existen $w_1 \in M$ y $w_2 \in M^\perp$ tal que $w = w_1 + w_2$, así $w_1 = w - w_2 \in (K^+ + M^\perp) \cap M$. De esto y la observación 4.2.1

   $$w = w + w_2 \in (K^+ + M^\perp) \cap M + M^\perp = K^+_M + M^\perp$$

   De la afirmación, existe $v \in K^+_M \setminus \{0\}$ tal que $w \in v + M^\perp$. Luego, $w = E[Y] \in v + M^\perp$ en consecuencia $v \in (E[Y] + M^\perp) \cap M$ y $v^Tu = w^Tu, \forall u \in M$. Finalmente

   $$\widetilde{F}^M_{(Q,w)}(X) = \{u \in M : w^TE^Q[X] \leq v^Tu\} = \{u \in M : w^TE^Q[X] \leq v^Tu\} = \widetilde{F}^M_{(Q,w)}(X)$$

$\square$

En esta parte introducimos la conjugada en el sentido de Legendre-Fenchel para aplicaciones de valor conjunto

Definición 4.2.2. *Sea $R : L^p_d \to F_M$ una aplicación de valor conjunto. La conjugada y la biconjugada de R se definen como*

$$\forall\, Y \in L^q_d,\ v \in \mathbb{R}^d\, ; -R^*(Y, v) = cl \bigcup_{X \in L^p_d} (R(X) + F^M_{(Y,v)}(-X)) \tag{4.8}$$

$$\forall\, X \in L^p_d;\ \ R^{**}(X) = \bigcap_{Y \in L^p_d,\ v \in K^+_M \setminus \{0\}} (-R^*(Y, v) + F^M_{(Y,v)}(X)) \tag{4.9}$$

La siguiente proposición muestra algunos aspectos de estas definiciones.

Proposición 4.2.3. *Sea $R : L_d^p \to F_M$ una aplicación de valor conjunto.*

1. *Las imágenes de $-R^*$ toman valores en G_M, cuando $(Y,v) \in L_d^q \times K_M^+$. Además, $-R^*(Y,v)$ es de la forma $u + F_{Y,v}^M(0)$ para algún $u \in M$ o es un elemento de $\{M, \emptyset\}$.*

2. *Las imágenes de R^{**} toma valores en G_M, es decir es una aplicación de la forma*

$$R^{**} : L_d^p \to G_M$$

Prueba.

1. Como $R(X) + F_{Y,v}^M(-X) = \bigcup_{u \in R(X)} [u + F_{Y,v}^M(-X)]$ vemos que $R(X) + F_{Y,v}^M(-X)$ es unión de semiespacios cerrados con normal v, es el vacío o todo M y en consecuencia $-R^*(Y,v) = cl \bigcup_{X \in L_d^p} (R(X) + F_{Y,v}^M(-X))$ es un semiespacio cerrado con normal v, es vacío o es todo el conjunto M y en particular también convexo. Como

$$cl \bigcup_{X \in L_d^p} \big[R(X) + F_{Y,v}^M(-X)\big] + K_M \subseteq cl\Big(\bigcup_{X \in L_d^p} \big[R(X) + F_{Y,v}^M(-X)\big] + K_M\Big)$$

y

$$cl\Big(\bigcup_{X \in L_d^p} \big[R(X) + F_{Y,v}^M(-X)\big] + K_M\Big) = cl\Big[\bigcup_{X \in L_d^p} R(X) + F_{Y,v}^M(-X)\Big]$$

tenemos $-R^*(Y,v) + K_M \subseteq -R^*(Y,v)$. De esto $-R^*(Y,v) \in G_M$.

2. Dado $I = Y \times (K_M^+ \setminus \{0\})$ se tiene

$$\bigcap_{(Y,v) \in I} \big(- R^*(Y,v) + F_{Y,v}^M(X)\big) + K_M \subseteq \bigcap_{(Y,v) \in I} \big(- R^*(Y,v) + F_{Y,v}^M(X) + K_M\big)$$

además

$$\bigcap_{(Y,v) \in I} \big(- R^*(Y,v) + F_{Y,v}^M(X) + K_M\big) = \bigcap_{(Y,v) \in I} \big(- R^*(Y,v) + F_{Y,v}^M(X)\big)$$

En consecuencia $R^{**}(X) + K_M \subseteq R^{**}(X)$. Como $R^{**}(X)$ es intersección de conjuntos cerrados y convexos, $R^{**}(X)$ es cerrado y convexo. Así $R^{**}(X) \in G_M$.

$\square$

Como en el capítulo 2 la conjugadas de Legendre-Fenchel que definimos aquí también se pueden caracterizar a través de la escalarización de R. Para desarrollar estos resultados, reescribimos la definición de escalarización cuando el espacio colineal F_M es ordenado con el cono convexo $K_M \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definición 4.2.3. *Dado $R : L_d^p \to F_M$ y $v \in K_M^+$ la escalarización de R es la función $\varphi_v : L_d^p \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por*

$$\varphi_v(X) = \inf_{u \in R(X)} v^T \cdot u$$

con la convención $\varphi_v(X) = +\infty$, cuando $R(X) = \emptyset$.

También reescribimos la definición de envoltura semicontinua inferior de la aplicación $\varphi_v : L_d^p \to \overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera

Definición 4.2.4. *La envoltura semicontinua inferior de φ_v es la función $cl\varphi_v : L_d^p \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por*

$$cl\varphi_v(X_0) := \liminf_{X \to X_0} \varphi_v(X)$$

donde $\liminf_{X \to X_0} \varphi_v(X) = \sup_{U \in N_{L_d^p}} \inf_{X \in X_0 + U} \varphi_v(X)$ y $N_{L_d^p}$ es una base de vecindades del cero en L_d^p.

Seguidamente desarrollamos algunas caracterizaciones de $R, -R^*$ y R^{**} mediante la escalarización φ_v.

Lema 4.2.2. *Sea $R : L_d^p \to G_M$, si R es convexa y cerrada entonces*

$$\forall X \in L_d^p : R(X) = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\} \tag{4.10}$$

Prueba. Por la proposición 2.1.4 la aplicación R es semicontinua inferior. Luego, por el corolario 2.2.1 tenemos la ecuación (4.10)

□

Lema 4.2.3. *Sea $R : L_d^p \to F_M$, se tiene*

1. *Para cada $Y \in L_d^p$, $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$; $-R^*(Y, v) = \{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\}$*

2. *R^{**} es cerrada, convexa y para todo $X \in L_d^p$*

$$R^{**}(X) = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (\varphi_v)^{**}(X) \leq v^T u\}$$

Prueba.

1. Por la definición de $-R^*(Y,v)$, lema 2.2.2, lema2.2.1 y la definicón de conjugada de Fenchel de φ_v tenemos

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in -R^*(Y,v)} v^T u &= \inf_{X\in L^p_d} \inf_{u\in R(X)+F^M_{Y,v}(-X)} v^T u \\
&= \inf_{X\in L^p_d} \big(\inf_{u_1\in R(X)} v^T u_1 + \inf_{u_2\in F^M_{Y,v}(-X)} v^T u_2 \big) \\
&= \inf_{X\in L^p_d} \big(\varphi_v(X) + E[-X^T Y]] \big) \\
&= -(\varphi_v)^*(Y)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\inf_{u\in -R^*(Y,v)} v^T u = -(\varphi_v)^*(Y) \tag{4.11}$$

De aquí, dado $u \in -R^*(Y,v)$ entonces $v^T u \geq -(\varphi_v)^*(Y)$ y en consecuencia $-R^*(Y,v) \subseteq \{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\}$
Probemos $-R^*(Y,v) \supseteq \{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\}$.

- Si $-R^*(Y,v) = \emptyset$ entonces $R(X) = \emptyset$. De aquí $\varphi_v = +\infty$ y $-(\varphi_v)^* = +\infty$, de esta forma $\{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\} = \emptyset$.
- Para $-R^*(Y,v) \neq \emptyset$ consideremos dos casos:
  - Si $-R^*(Y,v) = M$, se tiene $-\infty = \inf_{u\in M} v^T u = -(\varphi_v)^*(Y)$, de aquí $\{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\} = M$.
  - Si $-R^*(Y,v) = u + F^M_{(Y,v)}[0]$, para algún $u \in M$. Dado $u_0 \in M \setminus -R^*(Y,v)$ se tiene

    $$v^T u_0 < \inf_{u\in -R^*(Y,v)} v^T u = -(\varphi_v)^*(Y)$$

    esto implica $u_0 \notin \{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\}$

  Por lo tanto $\{u \in M : -(\varphi_v)^*(Y) \leq v^T u\} \subseteq -R^*(Y,v)$

2. Por el item 1 tenemos $-R^*(Y,v) + F_{(Y,v)}(X) = \{u \in M : v^T u \geq E[X^T Y] - \varphi^*_v(Y)\}$, entonces

$$\begin{aligned}
R^{**}(X) &= \bigcap_{v\in K^+_M\setminus\{0\}} \bigcap_{Y\in L^q_d} \{u \in M : v^T u \geq E[X^T Y] - \varphi^*_v(Y)\} \\
&= \bigcap_{v\in K^+_M\setminus\{0\}} \{u \in M : v^T u \geq \sup_{Y\in L^q_d} (E[X^T Y] - \varphi^*_v(Y))\} \\
&= \bigcap_{v\in K^+_M\setminus\{0\}} \{u \in M : v^T u \geq \varphi^{**}_v(X)\}
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 4.2.1. *Sean $R : L_d^p \to G_M$ y $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$, para todo $Y \in L_d^q$ se cumple*

$$(\varphi_v)^*(Y) = \sup_{u \in -R^*(Y,v))} -v^T \cdot u$$

Prueba. La prueba es directa de la ecuación (4.11). $\square$

La conjugada de Legendre-Fenchel de una medida de riesgo R convexa se puede expresar, bajo ciertas condiciones, como la clausura de la unión de semiespacios de la forma $F_{(Y,v)}(-X)$, cuando $X \in A_R$.

Proposición 4.2.4. *Sea $R : L_q^p \to G_M$ una medida de riesgo convexa con su conjunto de aceptanción A_R y $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$, entonces*

$$-R^*(Y,v) = \begin{cases} -S_{A_R}(Y,v) & ;\ Y \in -L_d^q(K^+), v \in E[-Y] + M^\perp \\ M & ;\ \textit{caso contrario.} \end{cases} \tag{4.12}$$

donde $-S_{A_R}(Y,v) = cl \bigcup_{X \in A_R} F^M_{(Y,v)}(-X)$
Si R fuera también positivamente homogénea, entonces

$$-R^*(Y,v) = \begin{cases} G(v) \cap M & ;\ Y \in -A_R^+, v \in E[-Y] + M^\perp \\ M & ;\ \textit{caso contrario.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Prueba. Dados $Y \in L_d^q, v \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$-R^*(Y,v) \supseteq cl \bigcup_{X \in A_R} (R(X) + F_{(Y,v)}(-X)) \supseteq cl \bigcup_{X \in A_R} F_{(Y,v)}(-X)$$

de aquí

$$-R^*(Y,v) \supseteq -S_{A_R}(Y,v),\ \forall\, Y \in L_d^q, v \in \mathbb{R}^d \tag{4.14}$$

En particular $-R^*(Y,v) \supseteq -S_{A_R}(Y,v)$ se verifica cuando $Y \in -L_d^q(K^+)$ y $v \in E[-Y] + M^\perp$. Veamos $-R^*(Y,v) \supseteq M$, cuando $Y \notin -L_d^q(K^+)$ o $v \notin E[-Y] + M^\perp$.

- Si $Y \notin -L_d^q(K^+) = -[L_d^q(K)]^+$, existe $X_0 \in L_d^p(K)$ con $E[X_0^T Y] > 0$
  Luego, de $L_d^p(K) \subseteq A_R$, $tX_0 \in L_d^p(K)\ \forall t > 0$ y la definición de $F^M_{(Y,v)}[-tX_0]$ tenemos

  $$-S_{A_R}(Y,v) \supseteq cl \bigcup_{X \in L_d^p(K)} F^M_{(Y,v)}[-X] \supseteq cl \bigcup_{t>0} F^M_{(Y,v)}[-tX_0] = M$$

  De esto y la ecuación (4.14), $-R^*(Y,v) \supseteq -S_{A_R}(Y,v) = M$.

- Sea $v + E[Y] \notin M^{\perp}$ y consideremos $X \in L_d^p$ y $w \in M$, entonces

$$\begin{aligned} F^M_{(Y,v)}[-X - w\mathbb{I}] &= \{u \in M : E[-X^T Y] \leq v^T u + E[Y]^T w\} \\ &= \{u - w \in M : E[-X^T Y] \leq v^T (u - w) + (E[Y] + v)^T w\} + w \\ &= \{u \in M : E[-X^T Y] \leq v^T u + (E[Y] + v)^T w\} + w \end{aligned}$$

  de esto

$$F^M_{(Y,v)}[-X - w\mathbb{I}] - w = \{u \in M : E[-X^T Y] \leq v^T u + (E[Y] + v)^T w\} \tag{4.15}$$

  Por otro lado, como $v + E[Y] \notin M^{\perp}$ entonces dado $u \in M$ existe $w \in M$ tal que

$$E[-X^T Y] \leq v^T u + (E[Y] + v)^T w$$

  En consecuencia, por (4.15), si $u \in M \Rightarrow u \in F^M_{(Y,v)}[-X - w\mathbb{I}] - w$ para algún $w \in M$.
  De aquí $\bigcup\limits_{w \in M} \left(F^M_{(Y,v)}[-X - w\mathbb{I}] - w\right) = M$
  Finalmente $-R^*(Y,v) = cl \bigcup\limits_{X \in L_d^p, w \in M} \left(R(X + w\mathbb{I}) + F^M_{(Y,v)}[-X - w\mathbb{I}]\right) = M$.

Veamos la prueba de $-R^*(Y,v) \subseteq -S_{A_R}(Y,v)$, cuando $Y \in -L_d^q(K^+), v + E[Y] \in M^{\perp}$.
Sea $u \in R(X)$ y en consecuencia $X + u\mathbb{I} \in A_R$). Como $F^M_{(Y,v)}[-X]$ es medida de riesgo, tenemos

$$-S_{A_R}(Y,v) \supseteq F^M_{(Y,v)}[-X - u\mathbb{I}] = F^M_{(Y,v)}[-X] + u$$

De esto $R(X) + F^M_{(Y,v)}[-X] \subseteq -S_{A_R}(Y,v) \quad \forall \quad X \in L_d^p$. De aquí, $-R^*(Y,v) \subseteq -S_{A_R}(Y,v)$.
Esto completa la prueba de (4.12)
Supongamos que R es positivamente homogénea, verifiquemos (4.13)

- Si $Y \notin -A_R^+$ existe $X_0 \in A_R$ tal que $E[Y^T X_0] > 0$, de aquí

$$-R^*(Y,v) \supseteq \bigcup_{X \in A_R} F^M_{(Y,v)}[-X] \supseteq \bigcup_{t > 0} F^M_{(Y,v)}[-tX_0] = M$$

  y en consecuencia $-R^*(Y,v) = M$.

- Si $Y \in -A_R^+$, entonces $E[Y^T X] \leq 0$ para todo $X \in A_R$. De aquí, si $u \in F^M_{(Y,v)}[-X]$ entonces $0 \leq -E[X^T Y] \leq v^T u$ y así $0 \leq v^T u$. Luego $F^M_{(Y,v)}[-X] \subseteq F^M_{(Y,v)}[0], \ \forall X \in A_R$.
  Finalmente, como $0 \in A_R$, tenemos

$$G(v) \cap M = F^M_{(Y,v)}[0] \subseteq \bigcup_{X \in A_R} F^M_{(Y,v)}[-X] \subseteq F^M_{(Y,v)}[0] = G(v) \cap M$$

$\square$

Ahora enunciaremos y probaremos un teorema de representación dual de una medida de riesgo convexa de valor conjunto. La prueba se dará con la ayuda de los siguientes lemas.

Lema 4.2.4. *Sea $R : L_q^p \to G_M$ propia, convexa y cerrada, entonces para cada $(X_0, u_0) \notin Graf(R)$, existe $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$ tal que $\varphi_v : L_q^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tiene una función afin menor y además $(cl\varphi_v)(X_0) > v^T u_0$*

Prueba. Como $(X_0, u_0) \notin Graf(R)$ por el teorema de separación existe $(Y, v) \in L_d^q \times M$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$E[Y^T X_0] + v^T \cdot u_0 < r < \inf_{(X,u)\in Graf(R)} \big(E[Y^T X] + v^T \cdot u\big) \tag{4.16}$$

Afirmación: $v \in K_M^+$, en efecto

Dado $X_1 \in Dom(R)$ fijo, de $R(X_1) = R(X_1) + K_M$ tenemos

$$\inf_{(X,u)\in Graf(R)} \big(E[Y^T X] + v^T \cdot u\big) \leq \inf_{u\in R(X_1)} \big(E[Y^T X_1] + v^T \cdot u\big) + \inf_{u\in K_M} \big(E[Y^T X_1] + v^T \cdot u\big)$$

Si existe $u_0 \in K_M$ con $v^T u_0 < 0$ entonces $\inf\limits_{u\in K_M} \big(E[Y^T X_1] + v^T \cdot u\big) = -\infty$, así $\inf\limits_{(X,u)\in Graf(R)} \big(E[Y^T X] + v^T \cdot u\big) = -\infty$, esto es absurdo por (4.16). Luego $v \in K_M^+$.

- Si $v \neq 0$. Para cada $X \in Dom(R)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_v(X) &= \inf_{u\in R(X)} v^T u = \inf_{u\in R(X)} (E[Y^T X] + v^T u) - E[Y^T X] \\
&\geq \inf_{(X',u')\in Graf(R)} (E[Y^T X'] + v^T u') - E[Y^T X] \\
&> r - E[Y^T X] > E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0
\end{aligned}$$

  Tomando $\liminf\limits_{X\to X_0}$ en la desigualdad $\varphi_v(X) > -E[Y^T X] + r > E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0$ tenemos $(cl\varphi_v)(X_0) \geq -E[Y^T X_0] + r > v^T u_0$, y así $(cl\varphi_v)(X_0) > v^T u_0$.

  Además, la función $X \to E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0$ es tal que $\varphi_v(X) > E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0$ $\forall X \in Dom(R)$ y si $X \notin Dom(R) = Dom(\varphi_v)$, entonces

$$+\infty = \varphi_v(X) > E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0$$

  Por lo tanto $\varphi_v(X) > E[Y^T (X^0 - X)] + v^T u_0$ para todo $X \in L_d^p$.

- Si $v = 0$, por la relación (4.16)

$$E[Y^T X_0] < r < \inf_{X \in Dom(R)} E[Y^T X] \tag{4.17}$$

Como R es propia existen $X_1 \in Dom(R)$, $u_1 \in M \setminus R(X_1)$ y por el teorema de separación existe $(Z, w) \in L_d^q \times M$ y $s \in \mathbb{R}$ tales que

$$E[Z^T X_1] + w^T \cdot u_1 < s < \inf_{(X,u) \in Graf(R)} \big(E[Z^T X] + w^T \cdot u\big) \tag{4.18}$$

Como en la afirmación anterior $w \in K_M^+$. Si $w = 0$ por la relación (4.18)

$$E[Z^T X_1] < s < \inf_{X \in Dom(R)} \big(E[Z^T X]\big) \leq E[Z^T X_1]$$

esto es una contradicción. Luego $w \neq 0$.
Dado $t \in]0, 1[$, sean $v_t = tw \in K_M^+ \setminus \{0\}$ y $Y_t = tZ + (1-t)Y$. Tomando $\alpha_1 = E[Y^T X_0]$ y $\alpha_2 = E[Z^T X_0] + w^T u_0$, por (4.17) tenemos $\alpha_1 < r$. Además, existe $\bar{t} \in]0, 1[$ tal que $\alpha_1 + \bar{t}(\alpha_2 - \alpha_1) < r + \bar{t}(s - r)$. De esto

$$\alpha_1 + \bar{t}(\alpha_2 - \alpha_1) = E[Y_{\bar{t}}^T X_0] + v_{\bar{t}}^T u_0 < \bar{t}s + (1-\bar{t})r < \inf_{(X,u) \in Graf(R)} (E[Y_{\bar{t}}^T X] + v_{\bar{t}}^T u)$$

en consecuencia

$$E[Y_{\bar{t}}^T X_0] + v_{\bar{t}}^T u_0 < r_1 < \inf_{(X,u) \in Graf(R)} (E[Y_{\bar{t}}^T X] + v_{\bar{t}}^T u), \text{ con } v_t \neq 0$$

De aquí, como en el caso $v \neq 0$, podemos verificar que la función afin

$$X \to E[Y_{\bar{t}}^T (X^0 - X)] + v_{\bar{t}}^T u_0$$

es menor que $\varphi_{v_{\bar{t}}}$ y además $(cl\varphi_{v_{\bar{t}}})(X_0) > v_{\bar{t}}^T u_0$.

□

Lema 4.2.5. *Si $R : L_q^p \to G_M$ es propia convexa y cerrada, entonces $R = R^{**}$*

Prueba. Por los lemas 4.2.2 y 4.2.3 debemos probar

$$\bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\} = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (\varphi_v)^{**}(X) \leq v^T u\} \tag{4.19}$$

Afirmación: Para $X \in L_q^p$, tenemos

$$\bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\} = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\};\, cl\varphi_v \text{ propia}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\} \tag{4.20}$$

En efecto, la prueba de $\subseteq$ es inmediata, para justificar $\supseteq$ supongamos que

$$u_0 \notin R(X) = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\}$$

Como $(X, u_0) \notin Graf(R)$, por el lema 4.2.4 existe $v \in K_M^+ \setminus \{0\}$ tal que $cl\varphi_v$ tiene un afín menor y $cl\varphi_v(X) > v^T u_0$, además se tiene $Dom\varphi_v = DomR \neq \emptyset$. Luego, $cl\varphi_v$ es propia con $cl\varphi_v(X) > v^T u_0$ y en consecuencia no pertenece al conjunto del lado derecho de (4.20)
Por otro lado, es claro que

$$\bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\}} \{u \in M : (\varphi_v)^{**}(X) \leq v^T u\} = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\};\, (\varphi_v)^{**} \neq -\infty} \{u \in M : (\varphi_v)^{**}(X) \leq v^T u\} \tag{4.21}$$

Por el teorema 3.3.4 de [16] se tiene

$$cl\varphi_v \text{ propia} \Leftrightarrow (\varphi_v)^{**} \neq -\infty \text{ y } (\varphi_v)^{**} = cl\varphi_v$$

De esto

$$\bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\};\, cl\varphi_v \text{ propia}} \{u \in M : (cl\varphi_v)(X) \leq v^T u\} = \bigcap_{v \in K_M^+ \setminus \{0\};\, (\varphi_v)^{**} \neq -\infty} \{u \in M : (\varphi_v)^{**}(X) \leq v^T u\}$$

Así queda demostrada (4.19). $\square$

Un teorema de representación dual de una medida de riesgo convexa de valor conjunto es el siguiente:

Teorema 4.2.1. *La función $R : L_q^p \to G_M$ propia convexa y cerrada es una medida de riesgo si y solo si existe una función $-\alpha_R : \mathscr{M}_{1,d}^P \times K^+ \setminus M^\perp \to G_M$ que verifica:*

(a) Para todo $(Q, w) \in \mathscr{M}_{1,d}^P \times K^+ \setminus M^\perp$; $-\alpha_R(Q, w) = (-\alpha_R(Q, w) \oplus G(w)) \cap M$

(b) Para todo $(Q, w) \in \mathscr{W}$; $K_M \subseteq \alpha_R(Q, w)$

(c) $\left[\bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} -\alpha_R(Q, w)\right] \cap -int(K_M) = \emptyset$

donde $\mathscr{W} = \{(Q, w) \in \mathscr{M}_{1,d}^P \times K^+ \setminus M^\perp : diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L_d^q(K^+)\}$, tal que para todo $X \in L_d^p$ se cumple

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} [-\alpha_R(Q, w) + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M] \tag{4.22}$$

Prueba. $(\Rightarrow)$ Por el lema 4.2.5 para $X \in L_d^p$ se tiene $R(X) = R^{**}(X)$, de aquí

$$R(X) = \bigcap_{Y \in L_d^q,\, v \in K_M^+ \setminus \{0\}} (-R^*(Y,v) + F^M_{(Y,v)}(X)) \tag{4.23}$$

Por la ecuación (4.12)

$$R(X) = \bigcap_{Y \in -L_d^q(K^+),\, v \in K_M^+ \setminus \{0\} \cap (E[-Y] + M^\perp)} (-S_{A_R}(Y,v) + F^M_{(Y,v)}(X))$$

Cambiando Y por $-Y$

$$R(X) = \bigcap_{Y \in L_d^q(K^+),\, v \in K_M^+ \setminus \{0\} \cap (E[Y] + M^\perp)} \big(- S_{A_R}(-Y,v) + F^M_{(Y,v)}(-X) \big)$$

Como $-S_{A_R}(Y,v) = cl \bigcup\limits_{X \in A_R} F^M_{(Y,v)}(-X)$

$$R(X) = \bigcap_{Y \in L_d^q(K^+),\, v \in K_M^+ \setminus \{0\} \cap (E[Y] + M^\perp)} \big(cl \bigcup_{X' \in A_R} F^M_{(Y,v)}(X') + F^M_{Y,v}(-X) \big) \tag{4.24}$$

Debido al lema 4.2.1 podemos reemplazar (Y,v) con (Q,w), donde $Q \in \mathscr{M}^P_{1,d}$ y $w \in K^+ \setminus M^\perp$ con $diag(w)\frac{dQ}{dP} \in L_d^q(K^+)$ y $F^M_{(Y,v)}(X) = (E^Q[X] + G(w)) \cap M$. Luego, la ecuación 4.24 queda

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} \big[cl \bigcup_{X' \in A_R} (E^Q[X'] + G(w)) \cap M + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M \big]$$

Definiendo $-\alpha_R(Q,w) = cl \bigcup\limits_{X' \in A_R} (E^Q[X'] + G(w)) \cap M$ obtenemos

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} \big[- \alpha_R(Q,w) + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M \big]$$

Demostremos que $-\alpha_R(Q,w)$ que satisface $(a), (b)$ y (c)

(a): Es directo verificar $-\alpha_R(Q,w) = (-\alpha_R(Q,w) \oplus G(v)) \cap M$

(b): Primero veamos que

$$R(0) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} \big[- \alpha_R(Q,w) + G(w) \cap M \big] = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}} \big[(-\alpha_R(Q,w) + G(w)) \cap M \big]$$

Por $(-\alpha_R(Q,w) + G(w)) \cap M = -\alpha(Q,w)$, tenemos $R(0) = \bigcap\limits_{(Q,w) \in \mathscr{W}} \big[- \alpha_R(Q,w) \big]$.
Luego, de $K_M \subseteq R(0)$ obtenemos $K_M \subseteq -\alpha_R(Q,w)$.

(c): Se tiene $\bigcap_{(Q,w)\in\mathscr{W}} \big[-\alpha(Q,w)\big] \cap -int(K_M) = R(0) \cap -int(K_M) = \emptyset.$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $R(X) = \bigcap_{(Q,w)\in\mathscr{M}} [-\alpha_R(Q,w) + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M]$, donde $-\alpha_R(Q,w)$ satisface $(a), (b)$ y (c).

Probemos que R es una medida de riesgo:

(R0): Esta propiedad es imediata de (b) y (c).

(R1): Sea $u \in M$, entonces

$$R(X + u\mathbb{I}) = \bigcap_{(Q,w)\in\mathscr{M}} [-\alpha_R(Q,w) + (E^Q[-(X + u\mathbb{I})] + G(w)) \cap M] = R(X) - u$$

pues recordemos que $X \mapsto (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$ es una medida de riesgo

(R2): Dado $X_2 - X_1 \in L^p_d(K)$ entonces $(E^Q[-X_2] + G(w)) \cap M \supseteq (E^Q[-X_1] + G(w)) \cap M$, pues $X \mapsto (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$ medida de riesgo. Agregando $-\alpha_R(Q,w)$ e intersectando se tiene $R(X_2) \supseteq R(X_1)$.

□

Observaciones 4.2.2.

1. *En el teorema anterior si además R es coherente entonces la reprentación 4.22 queda*

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w)\in\mathscr{W}_1} (E^Q[-X] + G(w)) \cap M \tag{4.25}$$

donde $\mathscr{W}_1 = \{(Q,w) \in \mathscr{M}^P_{1,d} \times K^+ \setminus M^\perp : diag(w)\frac{dQ}{dP} \in A^+_R\}$

En efecto, por (4.13) la ecuación (4.23) es

$$R(X) = \bigcap_{Y\in -A^+_R,\, v\in K^+_M\setminus\{0\}\cap(E[-Y]+M^\perp)} (G(v) \cap M + F^M_{(Y,v)}(X))$$

Cambiando Y por $-Y$

$$R(X) = \bigcap_{Y\in A^+_R,\, v\in K^+_M\setminus\{0\}\cap(E[Y]+M^\perp)} (G(v) \cap M + F^M_{(Y,v)}(-X))$$

Por el lema 4.2.1 podemos reemplazar (Y,v) con (Q,w), donde $Q \in \mathscr{M}^P_{1,d}$ y $w \in K^+\setminus M^\perp$ con $diag(w)\frac{dQ}{dP} \in A^+_R$ y $F^M_{(Y,v)}(X) = (E^Q[X] + G(w)) \cap M$. De aquí

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w)\in\mathscr{W}_1} [G(w) \cap M + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M]$$

Como $[G(w) \cap M + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M] = (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$ *se tiene*

$$R(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}_1} [E^Q[-X] + G(w)) \cap M]$$

2. *Bajo los supuestos del teorema la medida de riesgo* $R(X)$ *puede ser expresado en términos de medidas de riesgo "elementales"de la forma* $r(X) = (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$*. Además, la intersección es un supremo con respecto a la relación de orden* $\supseteq$ *en* G_M*. Luego, la ecuación (4.22) puede reescribirse como*

$$R(X) = \sup_{(Q,w) \in W} [-\alpha_R(Q,w) + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M]$$

3. *Del item anterior, la ecuación (4.22) puede verse como una representación del caso más desfavorable de R, esto es: Un elemento* $u \in R(X)$ *debe estar en*

$$-\alpha_R(Q,w) + (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$$

para todos los escenarios alternativos Q *y todos los pesos correspondientes* w*.*

Ejemplo 4.2.2. *(medida de riesgo en el peor de los casos)*
La medida de riesgo del ejemplo 3.2.1 tiene conjunto de aceptación $A = L^p_d(K)$ *y es*

$$WC^{M,S}(X) = \{u \in M : X + u\mathbb{I} \in L^p_d(K)\},$$

esta es una medida coherente, propia y cerrada. Por el teorema anterior se puede representar como

$$WC^{M,S}(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}_R} (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$$

donde $\mathscr{W}_R = \{(Q,w) \in \mathscr{M}^P_{1,d} \times K^+ \setminus M^\perp : diag(w)\frac{dQ}{dP} \in A^+\}$

Ejemplo 4.2.3.

En el ejemplo 3.2.2 probamos que la medida de riesgo convexa

$$NCE(X) = \{u \in M : E[X + u\mathbb{I}] \in K\}$$

es coherente, tambien es cerrada (el conjunto de aceptación es cerrado) y propia. Luego por el teorema anterior tenemos

$$NCE(X) = \bigcap_{(Q,w) \in \mathscr{W}_{NCE}} (E^Q[-X] + G(w)) \cap M$$

donde $\mathscr{W}_{NCE} = \{(Q,w) \in \mathscr{M}^P_{1,d} \times K^+ \setminus M^\perp : diag(w)\frac{dQ}{dP} \in A^+_{NCE}\}$

Capítulo 5

Conclusiones

- En el capítulo 1 se desarrolla la construcción de los espacios colineales ordenados que a la vez son retículos completos, apropiados para el espacio imagen de las medidas de riesgo de valor conjunto. Particularmente, en esta tesis se exponen los detalles para demostrar que el espacio $\mathscr{F}(Z, C)$, dada en [9], es un espacio colineal ordenado.

- En [9] Hamel, Heyde y Löhne presentaron muchos resultados del análisis convexo de valor conjunto. Entre las más importantes están la equivalencia entre las aplicaciones semicontinuas inferiores y las aplicaciones cerradas, la "extensión" del teorema de Weierstrass, el teorema de Fenchel-Moreau, el teorema de la fórmula máxima y el resultado de las caracterizaciones de los infimizadores de una aplicación convexa de valor conjunto. En esta tesis se completó y detalló la prueba de dichos resultados. En ese sentido, este documento pretende ser autocontenido para el lector que precise de los resultados mencionados.

- En el capítulo 3 y 4, siguiendo [6], completamos la demostración de la relación uno a uno entre las medidas de riesgo de valor conjunto con los conjuntos de aceptación. Luego, mostramos una representación para medidas de riesgo convexas cerradas, a travez de aplicaciones "elementales"de valor conjunto que satisfacen los axiomas de medida de riesgo. Este resultado tiene mucha semejanza con la representación de medidas de riesgo valor escalar.

Apéndice A

Espacio vectorial topológico real

A.1. Espacio vectorial real

Un Espacio Vectorial Real es un conjunto X provisto de dos aplicaciones $+: \; X \times X \longrightarrow X$ y $.: \; \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ llamados operación adición y multiplicación escalar respectivamente, donde la adicion verifica

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in X$.

(ii) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$

(iii) Existe un elemento $0 \in X$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.

(iv) Para cada $x \in X$ existe un elemento $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.

Similarmente la operación multiplicación escalar verifica:

(v) $\lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x$ para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

(vi) $1.x = x$ para todo $x \in X$.

Estas operaciones estan relacionadas mediante las siguientes leyes distributivas:

(vii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x, y \in X$.

(viii) $(\lambda + \alpha)x = \lambda x + \alpha x$ para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

Una aplicación $T: \; X \longrightarrow Y$, donde X Y son espacios vectoriales, se denomina aplicación lineal o transformacion lineal si satisface

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cuando T es biyectiva se dice que T es un isomorfismo de X a Y.
Un subconjunto M de un espacio vectorial X se llama subespacio vectorial si ella misma es un espacio vectorial cuando se restringe las operaciones de X a M.

A.2. Espacios topológicos

Un espacio topológico es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X satisfaciendo las siguientes condiciones:

1) X y $\emptyset$ pertenecen a la colección τ

2) Si $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$, donde I es un conjunto arbitrario, entonces $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau$

3) Si $A_1, .., A_n \in \tau$ entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Los elementos de τ se llaman abiertos de X. Un conjunto F en X se llama cerrado si su complemento es un conjunto abierto.
Sea $x \in X$, una vecindad de x es un abierto V que contiene a x, usualmente esta vecindad se denotará con $V(x)$.

Dado K conjunto de X. Un cubrimiento abierto de K es una colección $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de conjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$. Si I es finito se dice que $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ es un cubrimiento finito. Un subcubrimiento de $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ es un subconjunto de la colección $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ que cubre K. Diremos que K es compacto si todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito.

Definición A.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subfamilia $\zeta \subseteq \tau$ es denominado base de τ si cada abierto (esto es, un elemento de τ) es unión de elementos de ζ.*

Proposición A.2.1. *Todo subconjunto cerrado $F \subset K$ de un compacto K, en un espacio topológico X, es compacto.*

Un subconjunto $\beta \subset \tau$ se llama base del espacio topológico (X, τ) si todo abierto es unión de elementos de β.

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación de espacios topológicos, diremos que f es continua si la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de todo abierto $B \subset Y$ es abierto en X.
Si f es continua y biyectiva tal que f^{-1} es continua entonces f se denomina homeomorfismo.

Proposición A.2.2. *Sean X , Y dos espacios topológicos y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si K es compacto en X entonces la imagen $f(K)$ es compacto en Y.*

Un espacio topológico X se llama espacio de $Hausdorff$ si dados dos puntos arbitrarios $x \neq y$ en X existen vecindades U y V de x e y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición A.2.3. *Todo conjunto compacto en un espacio de $Hausdorff$ es cerrado.*

Un conjunto X puede tener dos o mas topologias asociadas. Sean τ y $\tau^{'}$ dos topologias del mismo conjunto X, diremos que τ es mas fina que $\tau^{'}$ si $\tau^{'} \subset \tau$.

Definición A.2.2. *Dados $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos y el conjunto $X = X_1 \times ... \times X_n$. La topología producto en X es la topología que tiene por base la colección*

$$\beta = \{A \ / \ A = A_1 \times ... \times A_n, \ A_i \text{ abierto en } X_i\}$$

Un abierto en la topología producto es entonces una reunión de abiertos elementales $A = A_1 \times ... \times A_n$.

A.3. Espacio vectorial topológico

Definición A.3.1. *Sea X un espacio vectorial y τ una topología en X. El par (X, τ) es llamado un espacio vectorial topológico si se cumple:*

1. *La operación adición es continua como aplicación, $+ : X \times X \to X$*
2. *La operación multiplicación por un escalar es continua como aplicación, $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$*

En un espacio vectorial topológico se cumple que si V es una vecindad de $a \in X$ entonces $V - a$ es una vecinda de 0, recíprocamente si V es una vecindad de 0 entonces $V + a$ es vecindad de a. En consecuencia una topología en en un espacio vectorial está completamente determinado por una base de vecindades del origen, el cual es denotado con N_X. En este sentido una vecindad de a suele ser presentado con $a + V$, donde $V \in N_X$.

Definición A.3.2. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$.*

- *Un elemento $a \in A$ es denominado punto interior de A, si existe una vecindad $V(a)$ tal que $V(a) \subseteq A$.*
- *Un elemento $a \in X$ es denominado punto adherente de A, si para toda vecindad $V(a)$ se cumple $V(a) \cap A \neq \emptyset$.*

El conjunto de los puntos interiores de A se denomina interior de A y el conjunto de puntos adhrentes se llama clausura de A.

Dado $A \subseteq X$, el interior y su clausura de A serán denotados con $int(A)$ y $cl(A)$ respectivamente.

Proposición A.3.1. *Sea X un espacio vectorial topológico. Se verifica:*

1. *Si $G \subseteq X$ es abierto, entonces $G + A$ es abierto para todo $A \subseteq X$.*
2. *Si $A, B \subseteq X$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $cl(A) + cl(B) \subseteq cl(A + B)$ y $cl(tA) = tcl(A)$.*
3. *Si C es convexo, entonces $int(C)$ y $cl(C)$ son convexos.*
4. *Si $Y \subseteq X$ es subespacio, entonces también lo es $cl(Y)$.*

Definición A.3.3. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Decimos que X es* ***localmente convexo*** *si existe una base de vecindades del 0 cuyos elementos son convexos.*

Proposición A.3.2. *Sean X , Y dos espacios vectoriales topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ lineal. Si f es continua en 0, entonces es continua en cualquier punto de X.*

La aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal se denominará funcional lineal.

Definición A.3.4. *Dado(X, τ) el espacio vectorial topológico. El* ***dual topológico*** *X^* es el espacio de todas las funcionales lineales continuas.*

Los elementos de X^* son denotados por x^*. Por otro lado, dado $x^* \in X^*$ no nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $H^+_\alpha(x^*) = \{y \in X : x^*(y) \geq \alpha\}$ y $H_\alpha(x^*) = \{y \in X : x^*(y) = \alpha\}$ son denominados semiespacio e hiperplano de X, respectivamente.

Lema A.3.1. *Dados $z*$, $w^* \in X^*$ no nulos y α, $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$H^+_\beta(z^*) \subseteq H^+_\alpha(w^*)$$

entonces x^* es múltiplo de w^*.

Prueba.

Afirmación: se verifica $H_\beta(z^*) \subseteq H_\alpha(w^*)$, en efecto dado $z \in H_\beta(z^*)$ fijo

- Si $w^*(z) < 0$, entonces $z^*(tz) = 0$ y $tw*(z) < 0$, para todo $t > 0$. Además, existe $a \in X$ con $z^*(a) = \beta$. De aquí $tz + a \in H_\beta^+(z^*)$ y en consecuencia

$$w^*(tz + a) = tw^*(z) + w^*(a) \geq \alpha, \forall t > 0$$

  Esto es una contradicción pues $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $w^*(z) > 0$, entonces $z^*(tz) = 0$ y $tw^*(z) < 0$, para todo $t < 0$. Además, existe $a \in X$ con $z^*(a) = \beta$. De aquí $tz + a \in H_\beta^+(z^*)$ y en consecuencia

$$w^*(tz + a) = tw^*(z) + w^*(a) \geq \alpha, \forall t < 0$$

  Esto es una contradicción pues $\alpha \in \mathbb{R}$.

De los dos items $w^*(z) = 0$ y por lo tanto $H_\beta(z^*) \subseteq H_\alpha(w^*)$.
Si para todo $t \neq 0$ existe $z_t \in H_\beta(z^*)$ tal que $z^*(z_t) \neq tw^*(z_t)$, entonces $0 \neq 0$. Por lo tanto existe $t \neq 0$ tal que $z^*(z) = tw^*(z)$, para todo $z \in H_\beta(z^*)$. De esto concluimos que z^* es múltiplo de w^*. $\square$

Lema A.3.2. *(Lema de Zorn's)*
Sea X un conjunto preordenado. Si cada cadena en X tiene una cota superior, entonces X tiene al menos un elemento maximal.

A.4. Conjugada de Fenchel y subdiferenciales en $\mathbb{R}^n$

Definición A.4.1. *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y propia.*

1. *La derivada direccional de f en $x \in Dom(f)$ en la dirección $d \in \mathbb{R}^n$ es*

$$f'(x, d) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{f(x + \tau d) - f(x)}{\tau}$$

2. *La subdiferencial de f en $x \in Dom(f)$ es el conjunto*

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \ \ \forall y \in R^n\}$$

Teorema A.4.1. *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, si $x \in intDom(f)$ entonces $\partial f(x) \neq \emptyset$, además el conjunto $\partial f(x)$ es convexo, cerrado, acotado y $f'(x, d) = \max_{s \in \partial f(x)} \langle s, d\rangle$*

Definición A.4.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa y propia*

1. *La función conjugada de f es $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f^*(s) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, x \rangle - f(x)\}$.*

2. *La biconjugada es definida por $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f^{**}(x) = \sup\limits_{s \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, x \rangle - f^*(s)\}$*

Teorema A.4.2. *(Fenchel- Moreau) Dado $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, propia y semicontinua inferior, entonces $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f^{**}(x) = f(x)$*

Bibliografía

[1] Artzner, Ph., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., (1999). *Coherent measures of risk.* Math. Finance 9, 203-228

[2] Follmer, H., Schied, A., (2004). *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time.* Berlín: Second Edition. Walter de Gruyter.

[3] Follmer, H, Schied, A.,(2010) *Convex and coherent risk measures.* New York: Encyclopedia of Quantitative Finance, R. Cont., Ed., pp. 355-363.

[4] Hamel, A., (2005). *Variational principles on metric and uniform spaces.* Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

[5] Hamel, A., (2009). *A duality theory for set-valued functions. I. Fenchel conjugation theory. Set-Valued.* Var. Anal., 17(2):153-182.

[6] Hamel, A., Heyde, F., (2010). *Duality for set-valued measures of risk.* SIAMJ. Financ. Math. 1, 66-95.

[7] Hamel, A., Schrage, C., (2013). *Directional derivatives and subdifferentials of set-valued convex functions.* Pacific J. Optim., accepted for publication.

[8] Hamel, A., Löhne, A., (2013). *Lagrange Duality in set Optimization.* New York: Springer, Bussines Media.

[9] Hamel, A., Heyde, F., Löhne, A., (2015). *Set optimization - a rather short introduction.* Berlin Heidelberg. Springer-Verlag.

[10] Heyde, F., Löhne, A., (2011). *Solution concepts in vector optimization: a fresh look at an old story.* Optimization, 60(12):1421-1440.

[11] Jouini, E., Meddeb, M., Touzi, N., (2004). *Vector-valued coherent risk measures*, Finance Stoch., 8 , pp. 531-552.

[12] Khan, A., Tammer, C., Zalinescu, C. (2015). *Set-valued Optimization.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[13] Löhne, A., (2005) *Optimization with Set Relations.* P.h.D. thesis, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

[14] Löhne, A., (2011). *Vector Optimization with infimun and supremun.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[15] Schrage, C., (2009). *Set-Valued Convex Analysis.* P.h.D. thesis, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

[16] Zalinescu, C., (2002). *Convex Analysis in General Vector Spaces.* Singapore: World Scientific.