

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**ESTUDIO DE PARÁMETROS ESTADÍSTICOS PARA LA
DETECCIÓN DE CAMPOS REVERBERANTES UNIFORMES EN
LA FORMACIÓN DE IMÁGENES DE ELASTOGRAFÍA**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO BACHILLER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN
INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

AUTOR:

Edmundo Arom Miranda Zárate

ASESORES:

M.Sc. Stefano Romero Gutiérrez

Benjamin Castañeda Aphan, Ph.D.

Lima, 2020

Resumen

La elastografía abarca un grupo de técnicas no invasivas para la caracterización de tejidos como complemento al diagnóstico médico de diversas patologías. Una de estas técnicas es la Elastografía por Campo Reverberante (R-SWE, por sus siglas en inglés) que genera un campo reverberante acústico en el tejido de interés mediante múltiples fuentes de vibración, asumiendo una distribución isotrópica de ondas planas para facilitar el cálculo de la velocidad de onda de corte (SWS), la cual es proporcional a la elasticidad del medio. Su factibilidad ha sido validada para la caracterización de mamas, hígado, riñones, músculo y pie; sin embargo, el cálculo de la SWS ha sido comprobado mientras se verifique la uniformidad del campo. El modelo actual se basa en la umbralización del coeficiente de determinación R^2 producto del ajuste de curva a la autocorrelación de la velocidad de partículas, no obstante, este es insuficiente como determinante y no analiza propiamente el concepto de uniformidad.

En el presente trabajo, se presenta el estudio del fenómeno de uniformidad en un campo reverberante, mediante la extracción y análisis de estimadores estadísticos usados en campos reverberantes de ondas electromagnéticas con sus equivalencias en ondas mecánicas acústicas. Se propone un modelo de identificación de campos reverberantes uniformes para la asistencia de la R-SWE, basado en clasificadores automáticos (Regresión Logística, LDA y SVM).

Palabras clave: R-SWE, campo reverberante, SWS, uniformidad.



Dedicado a mis padres por su amor y apoyo incondicional.

A mis hermanos Yassir y David que creyeron siempre en mí.

A toda mi familia, profesores y amigos que me han ayudado a superar mis errores y darle sentido
a la vida.



“La vraie générosité envers l’avenir consiste à tout donner au présent”.

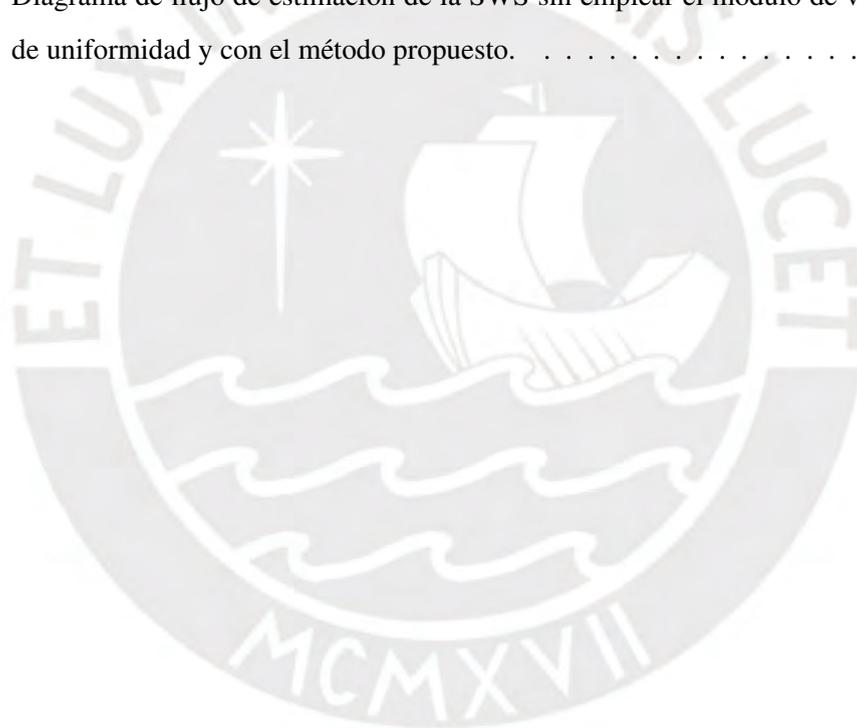
Albert Camus

Índice General

Introducción	1
1. Elastografía por Campo Reverberante	2
1.1. Técnicas Elastográficas y Estado del Arte	2
1.2. Importancia y Justificación	4
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo General	6
1.3.2. Objetivos Específicos	6
2. Campos Reverberantes: Teoría y Aplicaciones	7
2.1. Principios de la Elastografía por Ondas de Corte (SWE)	7
2.2. Elastografía por Campo Reverberante (R-SWE)	8
2.3. La Reverberación en Campos Electromagnéticos y Acústicos	11
2.4. Modelo de Solución para la Clasificación de Campos Reverberantes Uniformes para R-SWE	12
2.4.1. Obtención de Data	13
2.4.2. Extracción de Características	14
2.4.2.1. Criterio Estadístico Empírico	14
2.4.2.2. Prueba Kolmogorov–Smirnov para Distribución de Probabilidad	14
2.4.3. Análisis de Características	15
2.4.4. Algoritmos de Aprendizaje de Máquina	15
2.4.5. Técnicas de Validación de Resultados	15
Conclusiones	17
Recomendaciones	18
Bibliografía	19

Índice de Figuras

2.1. Campo reverberante en un medio isotrópico formado por ondas de corte [1].	9
2.2. Ajuste Bessel de las autocorrelaciones en eje axial y lateral para un $k = 1$	11
2.3. Enfoque de aprendizaje de máquina orientado al estudio de la uniformidad en la reverberación. Adaptado de [2].	13
2.4. Diagrama de flujo de estimación de la SWS sin emplear el módulo de validación de uniformidad y con el método propuesto.	16



Índice de Tablas

1.1. Resumen de técnicas elastográficas y aplicaciones clínicas	4
---	---



Introducción

La elastografía es un conjunto de técnicas que ha cobrado importancia en el ámbito clínico como modalidad no invasiva para la caracterización de tejidos y como complemento de diagnósticos médicos en hígado [3], riñones [4], mamas [5], cáncer de tiroides [6], próstata [7], músculo [8] y pie [9]. Actualmente, existen diversas técnicas que permiten la formación de imágenes elastográficas basadas en principios de radiación acústica (ARF), así como, por excitación externa., destacando estas últimas por su mayor penetración en tejidos. Dentro de este grupo, una de las técnicas recientemente implementadas la elastografía por campo reverberante (R-SWE). Esta aplica un campo acústico difuso (reverberante) mediante múltiples fuentes de vibración y asume una distribución uniforme de ondas planas transversales para el cálculo de velocidad de onda de corte (SWS) y generar el mapa de elasticidad del tejido [10, 11]. Sin embargo, las conjeturas matemáticas han sido comprobadas mientras se verifique la uniformidad del campo. Por lo que, es de interés analizar la formación del campo reverberante, mediante parámetros estadísticos de uniformidad empleados en electromagnetismo, junto con sus equivalencias en ultrasonido, como por ejemplo: desviaciones estándar global, valores promedio y densidades de probabilidad para generar un modelo multivariable de discriminación de uniformidad en campos reverberantes [12].

El presente trabajo de investigación propone diseñar un clasificador de campos reverberantes uniformes que sirva de asistencia en la R-SWE. Para ello, en el Capítulo 1 se explica la problemática actual en las técnicas de elastografía actuales, así como, las limitaciones del modelo actual de discriminación de uniformidad de reverberación y la importancia de un modelo multivariable de clasificación. En el Capítulo 2, se explica los conceptos teóricos del campo reverberante en R-SWE, así como, criterios estadísticos de uniformidad empleados en el campos de electromagnéticos y las similitudes con campos acústicos. Para finalmente, exponer las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 1

Elastografía por Campo Reverberante

Este capítulo expone conceptos generales de elastografía y las limitaciones de las técnicas existentes de acuerdo con el estado del arte. Se propone realizar un análisis estadístico sobre imágenes elastográficas junto con una método de aprendizaje de máquina como herramienta de clasificación de campos reverberantes para R-SWE.

1.1. Técnicas Elastográficas y Estado del Arte

La elastografía es el grupo de técnicas no invasivas que estiman la elasticidad y rigidez de un tejido mediante la Ley de Hooke y el Módulo de Young [13]. Sus aplicaciones médicas abarcan un amplio rango desde la evaluación de la salud vascular, diagnóstico de enfermedades crónicas en el hígado [3] y riñones [4], la detección de tumores en mamas [5], y el cáncer de tiroides [6] y próstata [7].

Las técnicas elastográficas se clasifican según el tipo de información que brindan en: cualitativas y cuantitativas.

a) Elastografía Cualitativa

Este tipo de técnicas indican únicamente si un tejido es rígido o no, representando la dureza relativa en una escala de colores. La elastografía por compresión (*Strain Elastography*) transmite una vibración sobre el tejido comprimiéndolo para luego registrar la respuesta del mismo. No obstante, la correcta formación de la imagen es muy dependiente de la habilidad del operador del equipo y no puede procesar imágenes de órganos muy profundos [14]. Por otro lado, una técnica ampliamente utilizada es la de formación por impulso de fuerza de radiación acústica (ARFI). La idea es comprimir el tejido mediante un impulso acústico para medir el desplazamiento tisular. Sin embargo, su

desventaja radica en no poder expresar de forma cuantitativa medidas de elasticidad, además su tiempo de operación se limita por el calor que genera en los tejidos [4]. La sonoelastografía aplica vibraciones armónicas externas de poca amplitud y frecuencia, por lo que tiene mayor penetración en el tejido sin provocar daños en los órganos estudiados. Pese a ello, solo es posible comparar relativamente la suavidad de los tejidos y se pueden obtener falsos positivos en las zonas anecoicas [15].

b) Elastografía Cuantitativa

Los modelos cuantitativos calculan el módulo de elasticidad mediante la propagación de ondas corte, considerando la relación proporcional entre la velocidad de estas y la rigidez del tejido [16]. La elastografía transitoria (TE) comercializada como FibroScanTM cuenta con un dispositivo de vibración externa y un ultrasonido que capta y registra la velocidad de las ondas de corte (SWS). Entre sus desventajas, la medición solo se representa mediante una imagen de modo-A (en una sola dimensión) y su efectividad puede bajar por factores como la obesidad, el ancho del espacio intercostal o el hígado graso [17]. La elastografía por punto de corte (p-SWE) utiliza un impulso acústico en dirección normal y mejora ligeramente su rendimiento en pacientes con obesidad, pero no es capaz de generar un mapa de elasticidades [18]. Frente a ello, se desarrolló la *2D-Shear Wave Elastography* en la que se pueden analizar múltiples puntos o focos, constituyendo un área tisular [19]. A partir de esta, se propuso la técnica de imágenes supersónicas (SSI) que usa un escáner supersónico que emite haces acústicos de alta velocidad y que a su vez genera ondas de corte, las imágenes se representan en modo-B y pueden llegar a una tasa de hasta 5000 muestras por segundo, considerándose un técnica en tiempo real [20]. Otra técnica como la sonoelastografía por interferencia de patrones (CrWS) utiliza dos fuentes de vibración en lados opuestos y desfasadas entre sí, produciendo una interferencia a baja frecuencia visible mediante algoritmos de correlación de señales, para luego calcular las propiedades viscoelásticas del tejido [7]. Finalmente, la vibro-elastografía usa el mismo transductor como emisor y receptor de ondas, sin embargo, la vibración en el mismo equipo obliga tener mayores etapas para filtrar el ruido y las perturbaciones generadas [21].

En la Tabla 1.1 se agrupan las técnicas mencionadas, según el tipo de información que proveen, la fuerza aplicada y sus aplicaciones clínicas.

Tabla 1.1: Resumen de técnicas elastográficas y aplicaciones clínicas
Adaptado de [22][23].

Técnica	Tipo	Fuerza Aplicada	Aplicación Clínica	Condición	Referencia
Elastografía por compresión (SE)	Cualitativa	Fuerza mecánica	Mamas	In vivo	[24]
			Próstata, páncreas, hígado	In vivo	[25]
Impulso por fuerza de radiación acústica (ARFI)	Cualitativa	Fuerza de radiación acústica	Mamas	In vivo	[26]
			Hígado	In vivo	[27]
			Riñon, hígado	In vivo	[4]
Sonoelastografía	Cualitativa	Fuerza mecánica	Mamas, hígado, riñon	In vivo	[28]
			Próstata	In vivo	[29]
Elastografía Transitoria (TE)	Cuantitativa	Fuerza mecánica	Hígado	In vivo	[17]
Imagen de elasticidad por ondas de corte (SWEI)	Cuantitativa	Fuerza de radiación acústica	Músculo	In vivo, ex vivo	[19][30]
			Mamas	In vivo, in vitro	[31]
			Hígado	In vivo	[32]
			Próstata	In vivo	[33]
Imagen de onda de corte supersónica (SSI)	Cuantitativa	Fuerza de radiación acústica	Músculo	In vivo	[34]
			Hígado, mamas	In vivo, ex vivo	[35]
Sonoelastografía por interferencia de patrones (CrWS)	Cuantitativa	Fuerza mecánica	Próstata	In vivo	[7]
			Hígado, próstata	Ex vivo	[36]
Vibroelastografía	Cuantitativa	Fuerza Mecánica	Mamas	In vivo	[37]
Elastografía por resonancia magnética (MRE)	Cuantitativa	Fuerza mecánica	Hígado, próstata, mamas	In vivo	[38]

1.2. Importancia y Justificación

Se ha demostrado que existe una relación entre diferentes patologías y la rigidez de un tejido, el propósito de la elastografía es obtener justamente esa rigidez. Últimamente optándose por técnicas cuantitativas por su objetividad en las estimaciones [39].

Uno de los métodos más usados es la elastografía por ondas de corte mediante ultrasonido (SWE). Sin embargo, uno de los principales retos al emplear ultrasonidos radica en lidiar con la reflexión de ondas en las fronteras de los órganos analizados y la inhomogeneidad del medio [10]. En algunos casos, es factible usar filtros direccionales para eliminar algunas reflexiones, en el trabajo de Lipman et al. [40] se propone el uso de filtros cuatri dimensionales (4-D) para mejorar la calidad de las imágenes, pero sumando complejidad al sistema y un alto costo computacional.

Para lidiar con estos inconvenientes, Parket et al. [10] plantean un nuevo modelo basado en generación de campos reverberantes, llamado R-SWE. Se propone, en lugar de filtrar las ondas en diferentes direcciones, asumir una distribución homogénea e isotrópica de ondas en el medio. A manera de generar el campo reverberante más rápido, Ormachea et al. [11] plantean una estrategia multi-frecuencial y comprueban la factibilidad de la técnica *in vivo* en mamas e hígado. Este estudio frecuencial se profundiza mediante imágenes de dispersión, logrando obtener mediciones en zonas profundas (hasta 16cm) [41]. Además, la técnica ha sido validada para medir la elasticidad en córneas [42] *ex vivo*, y en músculos y pie *in vivo* [8, 9]. Sin embargo, las conjeturas para el cálculo de la SWS, *ergo* la elasticidad son correctas mientras se genere un campo reverberante homogéneo o difuso.

Frente a ello, el estudio experimental de Flores et al. [22] propone umbralizar el coeficiente de determinación R^2 como único discriminador de existencia de campos reverberantes, producto de un ajuste de curva de la autocorrelación con funciones Bessel esféricas, el cual varía según el número de fuentes de vibración. Por tal razón, se precisa de un modelo más compacto de campo reverberante de mayores atributos que examine propiamente la uniformidad de la reverberación, así como, los estimadores estadísticos que describen este fenómeno.

El fenómeno de reverberación es ampliamente estudiado en el electromagnetismo para la evaluación de equipos electrónicos frente campos electromagnéticos concentrados [43]. Por ello, se han establecido criterios estadísticos y estándares internacionales para evaluar la uniformidad del campo en una cámara de reverberación como, por ejemplo: desviación global, uniformidad de energía y distribuciones de probabilidad [12, 44, 45]. En el trabajo de Wilson et al. [46], se estudian y comprueban las similitudes entre la naturaleza de campos acústicos y electromagnéticos. Por tanto, estos criterios pueden usarse en el modelo acústico actual para implementar un modelo multivariable de aprendizaje automático para la clasificación de campos reverberantes uniformes.

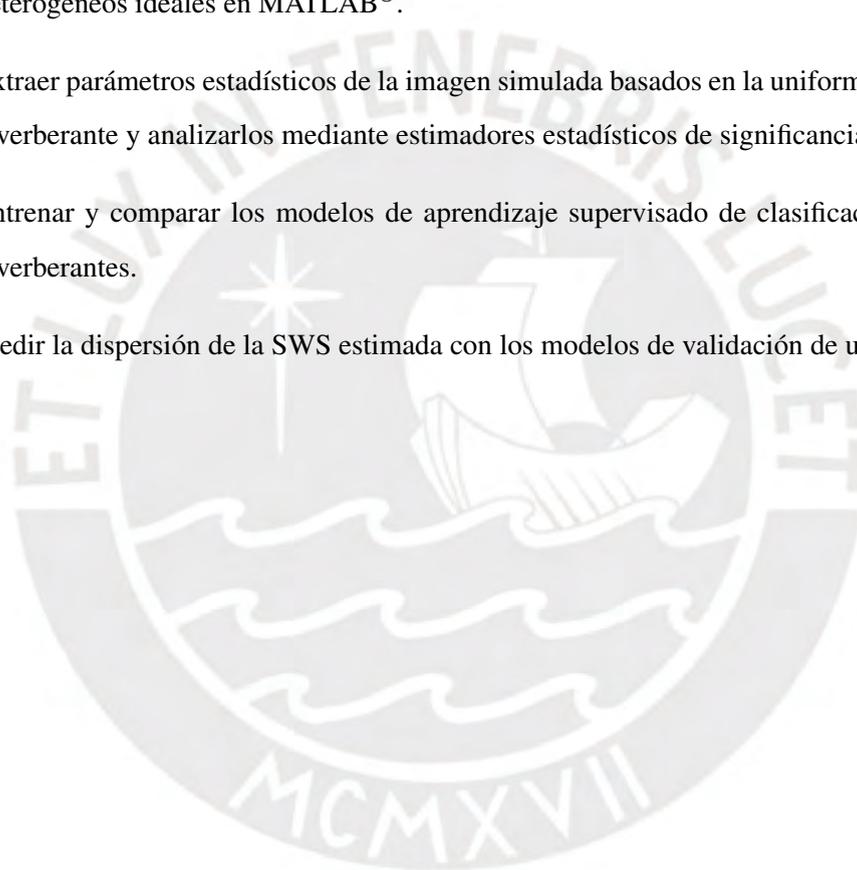
1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Proponer un modelo de clasificación automática de campos reverberantes homogéneos basado en la extracción y análisis de parámetros estadísticos de uniformidad de la velocidad de partículas para la asistencia de R-SWE.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Realizar simulaciones numéricas de campos reverberantes en medios homogéneos y heterogéneos ideales en MATLAB®.
- Extraer parámetros estadísticos de la imagen simulada basados en la uniformidad del campo reverberante y analizarlos mediante estimadores estadísticos de significancia.
- Entrenar y comparar los modelos de aprendizaje supervisado de clasificación de campos reverberantes.
- Medir la dispersión de la SWS estimada con los modelos de validación de uniformidad.



Capítulo 2

Campos Reverberantes: Teoría y Aplicaciones

Este capítulo presenta las bases teóricas y físicas de la elastografía por reverberación, junto con el modelo de ondas utilizado. Para luego, presentar los estimadores estadísticos en campos reverberantes uniformes y el enfoque de aprendizaje automático planteado para clasificación.

2.1. Principios de la Elastografía por Ondas de Corte (SWE)

La elastografía calcula la elasticidad como la capacidad del tejido de resistir a una fuerza de deformación y de volver a su estado inicial luego de que esta desaparezca [18]. Este fenómeno se representa mediante la Ley de Hooke:

$$\sigma = \Gamma \cdot \epsilon, \quad (2.1)$$

donde σ es el esfuerzo o fuerza por unidad de área en (Pa), ϵ una medida de deformación adimensional y Γ el módulo de elasticidad (Pa), el cual según el carácter de la deformación puede ser: módulo de Young (E), módulo de corte o cizalladura (μ) y módulo de compresibilidad (K). Estos módulos no son independientes entre sí y se relacionan mediante el ratio de Poisson (ν).

$$E = 2(\nu + 1)\mu, \quad (2.2)$$

en el caso de tejidos biológicos, al ser incompresibles el ratio de Poisson está entre 0.49-0.5, entonces:

$$E \approx 3\mu, \quad (2.3)$$

En ultrasonido, la propagación de ondas puede ser longitudinal y/o transversal. La SWE aplica ondas transversales, es decir, la propagación de la onda es perpendicular al movimiento de partículas de la misma y la SWS se define como:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.4)$$

cuyo rango está entre 1-10m/s [18]. Finalmente, empleando la Ecuación 2.3-2.4 se obtiene:

$$E = 3\rho c_s^2, \quad (2.5)$$

por tanto, se demuestra la relación entre la SWS y el módulo de elasticidad del medio tisular.

2.2. Elastografía por Campo Reverberante (R-SWE)

En principio, un campo sonoro se define como el nivel de presión sonora en cada punto de un espacio. Por un lado, en los campos directos se percibe las ondas de sonido directamente desde la fuente sin efectos de reflexión. Por otro lado, en los campos reverberantes se presentan en zonas alejadas de la fuente sonora y se forman por reflexiones de ondas, generando el fenómeno de reverberación. En caso la reverberación sea lo suficientemente homogénea, se le podrá considerar como un campo difuso, en donde la contribución de las ondas de la fuente emisora como de las reflexiones será la misma. Por tanto, un campo reverberante se puede definir como la superposición de ondas planas de una forma aleatoria. La teoría matemática ha sido descrita por Parker et al. [10], la cual resume que la velocidad de las partículas es:

$$\bar{V}(\bar{\epsilon}, t) = \sum_{q,l} \hat{n}_{ql} v_{ql} e^{i(k\hat{n}_q \cdot \bar{\epsilon} - \omega_0 t)}, \quad (2.6)$$

donde, $\bar{\epsilon}$ es el vector posición de la partícula que puede ser descrito en coordenadas cilíndricas por facilidad $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, q un índice para representar la aleatoriedad del vector de propagación de onda \hat{n}_q en el eje radial \hat{r} y l para describir la aleatoriedad del vector velocidad de partícula \hat{n}_{ql} . Al tratarse de ondas transversales, entonces $\hat{n}_q \cdot \hat{n}_{ql} = 0$. La sumatoria en q se realizará en un ángulo sólido de 4π y l en un ángulo de 2π correspondiente al disco formado por los vectores $\hat{\theta}, \hat{\phi}$, para mayor detalle observar Figura 2.1.

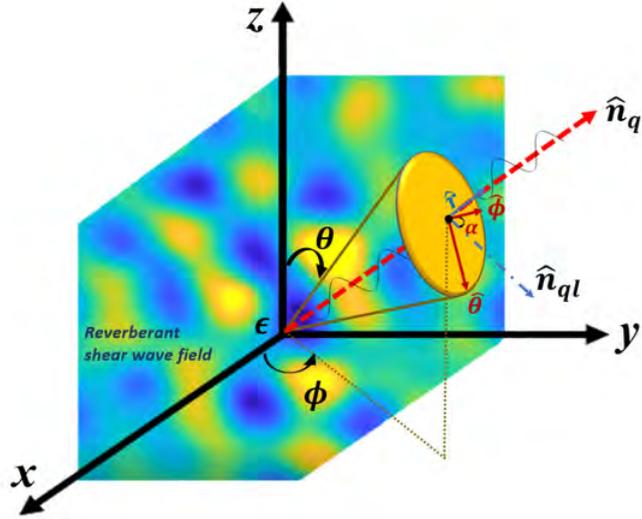


Figura 2.1: Campo reverberante en un medio isotrópico formado por ondas de corte [1].

Para facilidad en los cálculos posteriores de autocorrelación de la Ecuación 2.6, se proyecta la velocidad a un eje z :

$$V_z(\bar{\epsilon}, t) = \bar{V}(\bar{\epsilon}, t) \cdot \hat{e}_z = \sum_{q,l} n_{qlz} v_{ql} e^{i(k\hat{n}_q \cdot \bar{\epsilon} - \omega_0 t)}, \quad (2.7)$$

donde n_{qlz} es la proyección de \hat{n}_{ql} sobre el eje z . De acuerdo con la Figura 2.1, es posible expresar \hat{n}_{ql} en función de α :

$$\hat{n}_{ql} = \cos \alpha \hat{\phi} + \sin \alpha \hat{\theta}, \quad (2.8)$$

así mismo, empleando las transformaciones de coordenadas cartesianas a esféricas:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z, \quad (2.9)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y, \quad (2.10)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z, \quad (2.11)$$

y reemplazando \hat{n}_{qlz} en la Ecuaciones 2.8, 2.10- 2.11 se obtiene:

$$n_{qlz} = \hat{n}_{ql} \cdot \hat{e}_z = -\sin \alpha \sin \theta \quad (2.12)$$

Posteriormente, se toma la la autocorrelación espacial y temporal de la Ecuación 2.7:

$$B_{v_z v_z}(\Delta \bar{\epsilon}, \Delta t) = E\{V_z(\bar{\epsilon}, t) V_z^*(\bar{\epsilon} + \Delta \bar{\epsilon}, t + \Delta t)\}, \quad (2.13)$$

resolviendo y simplificando la Ecuación 2.13:

$$B_{v_z v_z}(\Delta\bar{\epsilon}, \Delta t) = E\left\{\sum_{q,l} n_{ql_z} v_{ql} e^{i(k\hat{n}_q \cdot \bar{\epsilon} - \omega_o t)} \times \sum_{q',l'} n_{q'l'_z} v_{q'l'} e^{-i(k\hat{n}'_q \cdot (\bar{\epsilon} + \Delta\bar{\epsilon}) - \omega_o(t + \Delta t))}\right\}, \quad (2.14)$$

$$B_{v_z v_z}(\Delta\bar{\epsilon}, \Delta t) = E\left\{\sum_{q,l} n_{ql_z}^2 v_{ql}^2 e^{i(\omega_o \Delta t - k\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon})}\right\}, \quad (2.15)$$

con \hat{n}_q en el eje radial y $\Delta\bar{\epsilon}$ con dos posibles direcciones: axial y lateral [42]. Por tanto, se define $\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ en dos casos posibles:

$$\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon}_z = \hat{r} \cdot \Delta\bar{\epsilon}_z = \cos \theta \Delta\epsilon_z, \quad (2.16)$$

$$\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon}_x = \hat{r} \cdot \Delta\bar{\epsilon}_x = \sin \theta \cos \phi \Delta\epsilon_x \quad (2.17)$$

Como se mencionó previamente, las ondas de corte se propagarán en todo el espacio (en un ángulo de 4π esterorradianes), mientras que la dirección de la velocidad de las partículas alrededor del disco formado por $\phi\theta$ (en un ángulo de 2π radianes). Por tanto, la Ecuación 2.15 se expresa bajo la integral triple [42][22]:

$$B_{v_z v_z}(\Delta\bar{\epsilon}, \Delta t) = \frac{v_{ql}^2}{4\pi} \iint_{esfera} \frac{1}{2\pi} \oint_{disco} n_{ql_z}^2 e^{i(\omega_o \Delta t - k\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon})} d\alpha d\Omega, \quad (2.18)$$

con $d\alpha$ el diferencial del ángulo del plano $\phi\theta$ y $d\Omega$ el diferencial de la integral esférica.

Finalmente, reemplazando n_{ql_z} y $\hat{n}_q \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ con las Ecuaciones 2.12, 2.16-2.17 y al resolver la integral de la Ecuación 2.18 se obtienen:

$$B_{v_z v_z}(\Delta\epsilon_z, \Delta t) = \frac{v_{ql}^2}{2} e^{i\omega_o \Delta t} \left[\frac{j_1(k\Delta\epsilon_z)}{k\Delta\epsilon_z} \right], \quad (2.19)$$

$$B_{v_z v_z}(\Delta\epsilon_x, \Delta t) = \frac{v_{ql}^2}{2} e^{i\omega_o \Delta t} \left[j_0(k\Delta\epsilon_x) - \frac{j_1(k\Delta\epsilon_x)}{k\Delta\epsilon_x} \right], \quad (2.20)$$

donde j_0 y j_1 son funciones de Bessel esféricas de orden cero y uno respectivamente.

En el estudio de Flores et al. [22], se establece la autocorrelación como discriminador de campos reverberantes: un campo es homogéneo cuando las autocorrelaciones con dirección axial y lateral tienen la forma de las Ecuaciones 2.19-2.20. Para ello, se emplea una regresión o ajuste de curva (ver Figura 2.2). La bondad de este ajuste se mide por el coeficiente de correlación R^2 que indica la proporción entre varianza del modelo ajustado y la varianza de todos los datos.

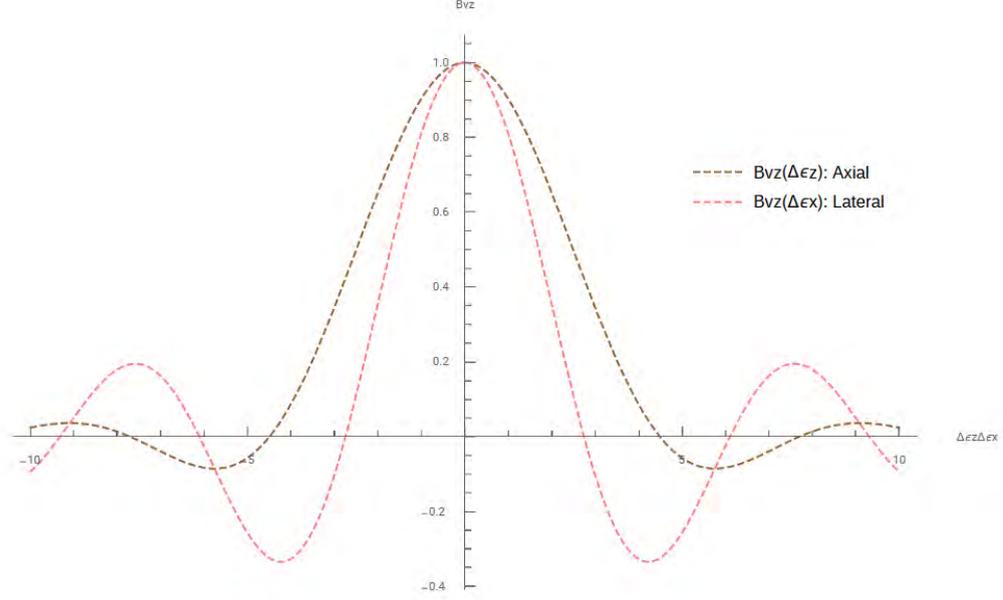


Figura 2.2: Ajuste Bessel de las autocorrelaciones en eje axial y lateral para un $k = 1$

Por último, conociendo la frecuencia f de operación y el número de onda k , este último obtenido como el promedio del número de onda axial y lateral, se calcula la SWS con la relación:

$$c_s = \frac{2\pi f}{k} \quad (2.21)$$

2.3. La Reverberación en Campos Electromagnéticos y Acústicos

El fenómeno de reverberación es ampliamente estudiado en el campo del electromagnetismo para la evaluación de equipos electrónicos [43]. Siendo así, se han establecido criterios y estimadores para la modelización de ondas en cámaras reverberantes. Para un mayor entendimiento, se explicarán los principios aplicados en electromagnetismo y sus equivalencias en acústica [46, 47]. Primero, es necesario describir la propagación de ondas en medios homogéneos:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.22)$$

donde Ψ puede describir ondas electromagnéticas \vec{E} o acústicas \vec{P} y c la velocidad de onda. La resolución de la Ecuación 2.22 se conoce como ecuación de la onda. Un campo reverberante electromagnético se expresa discretamente como una sumatoria de ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{\epsilon}, t) = \sum_q \vec{E}_q e^{i(k\hat{n}_q \cdot \vec{\epsilon} - \omega_0 t)} \quad (2.23)$$

Se puede observar la similitud con la Ecuación 2.6, lo cual comprueba la equivalencia entre el modelo de onda electromagnético y el acústico. Donde la naturaleza de la ecuación de onda es compleja (formada por un término Re e Im independientes entre sí).

Se considera un campo reverberante uniforme cuando se cumple los principios de isotropismo y homogeneidad [48]. El isotropismo refiere a una composición coherente de ondas planas de todos los ángulos. La homogeneidad establece una conservación de la energía del campo la cual es proporcional al cuadrado del mismo, tanto para campos acústicos como electromagnéticos. Matemáticamente se pueden expresar:

$$\langle Re(\bar{E}_{x,y,z}) \rangle = \langle Im(\bar{E}_{x,y,z}) \rangle = 0, \quad (2.24)$$

$$\langle Re(\bar{E}_{x,y,z})^2 \rangle = \langle Im(\bar{E}_{x,y,z})^2 \rangle = \sigma^2, \quad (2.25)$$

con σ^2 como la varianza de campo.

Además teóricamente, la parte real e imaginaria de cada componente del campo deberá seguir una distribución de probabilidad (fdp) normal centrada en 0 y con una desviación estándar σ [49]:

$$fdp(Re(E_{\bar{\epsilon}})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{Re(E_{\bar{\epsilon}})^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.26)$$

por tanto, la magnitud o norma del campo seguirá una distribución χ de dos grados de libertad, conocida como distribución Rayleigh [12, 44]:

$$pdf(|E_{\bar{\epsilon}}|) = \frac{|E_{\bar{\epsilon}}|}{\sigma^2} e^{-\frac{|E_{\bar{\epsilon}}|^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.27)$$

consecuentemente, la magnitud al cuadrado del campo al cuadrado tendrá una distribución χ^2 de dos grados de libertad, conocida como distribución exponencial [49]:

$$pdf(|E_{\bar{\epsilon}}|^2) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|E_{\bar{\epsilon}}|^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.28)$$

2.4. Modelo de Solución para la Clasificación de Campos Reverberantes Uniformes para R-SWE

Previamente se ha demostrado que una forma de determinar la formación de un campo reverberante homogéneo es analizar la similitud de su autocorrelación con funciones Bessel esféricas de orden cero o uno. Este es el único estimador analizado para la clasificación de campos reverberantes y es sensible al número de fuentes [22]. Empleando las propiedades

estadísticas de reverberación electromagnética y acústica es posible generar un modelo multivariable de clasificación.

En general, un sistema de clasificación automático consiste en la extracción y entrenamiento de datos. En este caso, se empleará un modelo de aprendizaje supervisado que contempla el siguiente flujograma:

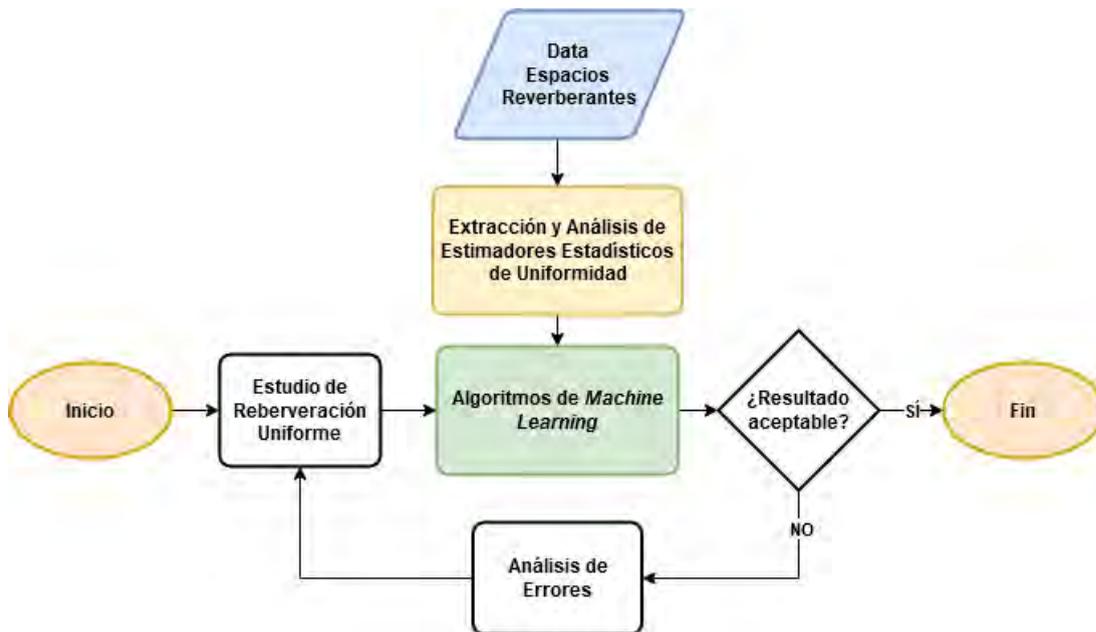


Figura 2.3: Enfoque de aprendizaje de máquina orientado al estudio de la uniformidad en la reverberación. Adaptado de [2].

2.4.1. Obtención de Data

En principio, se requiere de simulaciones numéricas de campos reverberantes ideales en un espacio 3D empleando el software MATLAB®. Se considera la ecuación matemática de ondas planas, generándose el espacio 3D se proyecta en el eje y tomando el plano XZ . Se emplea el método de ajuste de curva, pues presenta las mejores métricas en precisión y exactitud en la estimación de SWS. [22]. El etiquetado de data para discriminar un campo reverberante homogéneo será cuando la estimación de la SWS tenga un error menor al 5%, definido bajo la siguiente fórmula:

$$\% error = \frac{|SWS_i - SWS_e|}{SWS_i} \cdot 100 \% \quad (2.29)$$

donde SWS_i y SWS_e son las SWS ideal y estimada, respectivamente.

2.4.2. Extracción de Características

2.4.2.1. Criterio Estadístico Empírico

Un criterio empleado en campos reverberantes para ondas electromagnéticas, de acuerdo al estándar internacional del IEC [45], consiste en analizar la desviación estándar y el valor promedio del campo electromagnético en las dimensiones x, y, z . Este concepto puede emplearse en campos reverberantes acústicos, considerando las similitudes entre ambos [46]. Estos estimadores estadísticos se definen como:

$$\mu_{x,y,z} = \frac{\sum v_i}{N}, \quad (2.30)$$

$$\sigma_{x,y,z} = \sqrt{\frac{\sum (v_i - \mu)^2}{N}}, \quad (2.31)$$

donde μ y σ son el valor medio y desviación estándar del campo reverberante para cada eje.

2.4.2.2. Prueba Kolmogorov–Smirnov para Distribución de Probabilidad

Teóricamente, en una cámara reverberante con buen factor de calidad, se establece que la parte real e imaginaria de un campo de ondas planas, así como su magnitud deben seguir una distribución probabilística normal y Rayleigh, respectivamente [49], mientras que el campo elevado al cuadrado debe seguir una distribución exponencial. Se usará la prueba Kolmogorov-Smirnov para evaluar la bondad del ajuste, un método no paramétrico bastante rápido y conveniente cuando el número de muestras es reducido, el cual trabaja con la función de probabilidad acumulada (FDA) definida como:

$$FDA(x) = \int_{-\infty}^x f dp(t) dt, \quad (2.32)$$

una vez obtenida se proviene a analizar la máxima diferencia entre el modelo teórico y el empírico muestreado:

$$D_n = \max |FDA_t(x) - FDA_e(x)|, \quad (2.33)$$

donde FDA_t es la función de distribución acumulada teórica y FDA_e la función empírica muestreada.

2.4.3. Análisis de Características

En un análisis estadístico multivariante, se consideran dos hipótesis mutuamente excluyentes. Por un lado, la llamada hipótesis nula H_o plantea que no existe relación alguna entre las variables de entrada X (características) con la variable de salida Y (decisión). Por otro lado, la hipótesis alternativa H_t establece que sí existe una relación entre variables. Entonces, se pretende rechazar H_o analizando la significancia estadística de X , para ello, existen parámetros ya establecidos como *t-Student*, ANOVA, *p-values*, etc. Por ejemplo, mientras más pequeño sea el *p-value* menor la probabilidad de azar en las predicciones, rechazando la hipótesis nula y demostrando la relación entre X e Y , para este caso la relación entre criterios estadísticos y la uniformidad de campo.

2.4.4. Algoritmos de Aprendizaje de Máquina

Un problema de clasificación consiste en generar una decisión cualitativa o categórica a través del análisis de sus atributos. Por ejemplo, la Regresión Logística (LR) se usa para estimar la probabilidad que cierta instancia pertenezca a una clase, para ello, utiliza un modelo lineal multivariable y una función sigmoideal en la toma de decisiones. Otro enfoque es el uso del Análisis Discriminante Lineal (LDA), el cuál es una extensión del clasificador probabilístico de Bayes, empleado en el reconocimiento de patrones, que asume una distribución normal multivariable en los atributos. Finalmente, las máquinas de Vectores de Soporte (SVM) suelen tener un elevado *performance* y consisten en maximizar el margen de separación entre dos clases mediante funciones de transformación espacial o *kernels* [2][50].

2.4.5. Técnicas de Validación de Resultados

Para reducir la variabilidad en las predicciones luego del proceso de entrenamiento, se suele usar la validación cruzada como herramienta en el diseño de un clasificador. En particular la "*k-fold cross validation*" consiste en dividir la data aleatoriamente en k particiones del mismo tamaño. Luego, cada partición se usa una vez como conjunto de validación, con los otros $k - 1$ grupos restantes como conjunto de entrenamiento, este proceso se repite k veces. La principal ventaja de este método es usar toda la data disponible tanto para entrenamiento como validación. Si bien, usando un k igual al número de muestras, llamado *leave-one-out cross-validation* se obtiene el menor sesgo, el costo computacional es muy alto. Por tanto, en la práctica se usa una validación cruzada con $k = 10$ que ofrece un balance entre sesgo y varianza [2].

Para la evaluación del *performance* del modelo de clasificación se recomienda el uso de matrices de confusión, de esta manera no solo se calcula la precisión del modelo, sino métricas

como sensibilidad, especificidad, proporciones de falsos positivos y negativos, curvas ROC, etc.

Finalmente, se analiza la distribución de valores de velocidad (precisión, exactitud, valor medio y varianza) estimados a partir de la data sin haber validado propiamente la uniformidad del campo en comparación con el módulo de clasificación de uniformidad entrenado. Como se observa en la Figura 2.4, se analizará la dispersión de la SWS producto del ajuste de curva (caso 1) y con los modelos de detección de uniformidad (caso 2), estos últimos etiquetarán las zonas no uniformes de campo, las cuales serán enmascaradas y descartadas.

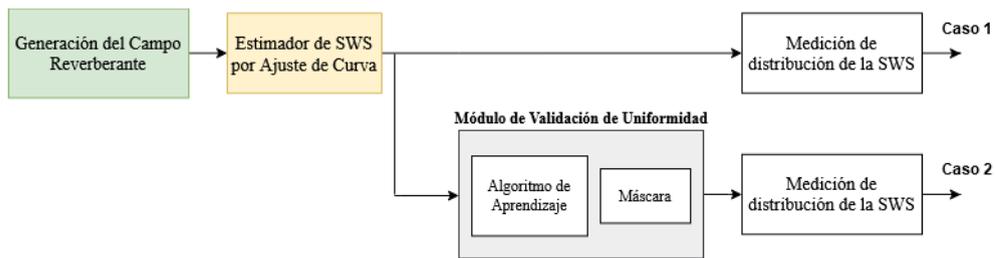


Figura 2.4: Diagrama de flujo de estimación de la SWS sin emplear el módulo de validación de uniformidad y con el método propuesto.

Conclusiones

- Se han expuesto los principios teóricos de la elastografía por campo reverberante de ondas de corte (R-SWE) para el cálculo de la SWS, ergo la elasticidad de un tejido, basado en el ajuste de curva de la autocorrelación del plano de campo reverberante.
- Se presentaron los criterios de validación de uniformidad en la reverberación empleado en estándares IEC para ondas electromagnéticas, así como, sus equivalencias para ondas mecánicas acústicas.
- Se proponen estimadores estadísticos basados en leyes probabilísticas de campos reverberantes uniformes formados por ondas planas para generar un modelo multivariable de decisión basado en aprendizaje automático. Estos permitirán detectar las zonas de la imagen en los que no se cumple una uniformidad en el campo y por tanto generarán malas estimaciones de SWS.

Recomendaciones y Trabajos Futuros

- Para las simulaciones, se debe trabajar con valores de frecuencia entre 0-1000Hz correspondientes a las frecuencias de operación de los equipos médicos y con velocidades SWS entre 0-5m/s típicas en los tejidos [1].
- A manera de generar un mapa de SWS y no solo estimar un valor global de velocidad es necesario trabajar con ventanas de campo. El tamaño de ventana debe ir acorde a la longitud de la onda plana. Considerando los estudios previos de Zvietcovich et al. [42] se sugiere tomar una ventana de al menos 2 veces la longitud de onda. Para evitar la pérdida de información en los bordes producto de un relleno con ceros o *zero padding*, se debe emplear un relleno simétrico de bordes o *mirror padding*.
- Para agilizar la etapa de entrenamiento, es aconsejable trabajar con los atributos normalizados y sobre todo con aquellos con mayor significancia estadística. Se aplica que el valor de probabilidad o *p-value* sea menor al 5%.

Bibliografía

- [1] J. Ormachea, *Viscoelastic tissue characterization based on harmonic and transient shear wave elastography*. PhD thesis, University of Rochester, 2020.
- [2] A. Géron, *Hands-on machine learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, tools, and techniques to build intelligent systems*. O'Reilly Media, 2019.
- [3] M. Friedrich-Rust, T. Poynard, and L. Castera, “Critical comparison of elastography methods to assess chronic liver disease,” *Nature Reviews Gastroenterology & Hepatology*, vol. 13, no. 7, pp. 402–411, 2016.
- [4] C. Bruno, S. Minniti, A. Bucci, and R. P. Mucelli, “ARFI: from basic principles to clinical applications in diffuse chronic disease—a review,” *Insights Imaging*, vol. 7, no. 5, pp. 735–746, 2016.
- [5] U. Zaleska-Dorobisz, K. Kaczorowski, A. Pawluś, A. Puchalska, and M. Ingot, “Ultrasound elastography - review of techniques and its clinical applications.,” *Advances in clinical and experimental medicine : Official Organ Wroclaw Medical University*, vol. 23 4, pp. 645–655, 2014.
- [6] N. Ciledag, H. Kaygusuz, B. Sahin, E. Aktas, F. B. Imamoglu, and B. K. Aribas, *The Advantages and Limitations of Ultrasound Elastography in Diagnosis of Thyroid Carcinoma*. 2016.
- [7] B. Castaneda, L. An, S. Wu, L. L. Baxter, J. L. Yao, J. V. Joseph, K. Hoyt, J. Strang, D. J. Rubens, and K. J. Parker, “Prostate cancer detection using crawling wave sonoelastography,” in *Medical Imaging 2009: Ultrasonic Imaging and Signal Processing*, vol. 7265, p. 726513, International Society for Optics and Photonics, 2009.
- [8] E. Machado, S. E. Romero, G. Flores, and B. Castaneda, “Feasibility of reverberant shear wave elastography for in vivo assessment of skeletal muscle viscoelasticity,” in *2020 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, pp. 1–4, 2020.

- [9] R. Naemi, S. E. Romero Gutierrez, D. Allan, *et al.*, “Diabetes status is associated with plantar soft tissue stiffness measured using ultrasound reverberant shear wave elastography approach,” *Journal of Diabetes Science and Technology*, p. 1932296820965259, 2020.
- [10] K. J. Parker, J. Ormachea, F. Zvietcovich, and B. Castaneda, “Reverberant shear wave fields and estimation of tissue properties,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 62, no. 3, pp. 1046–1061, 2017.
- [11] J. Ormachea, B. Castaneda, and K. J. Parker, “Shear wave speed estimation using reverberant shear wave fields: implementation and feasibility studies,” *Ultrasound in Medicine & Biology*, vol. 44, no. 5, pp. 963–977, 2018.
- [12] S. Mengue, E. Richalot, and O. Picon, “Comparison between different criteria for evaluating reverberation chamber functioning using a 3-D FDTD algorithm,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 50, no. 2, pp. 237–245, 2008.
- [13] A. Ozturk, J. R. Grajo, M. Dhyani, B. W. Anthony, and A. E. Samir, “Principles of ultrasound elastography,” *Abdominal Radiology*, vol. 43, no. 4, pp. 773–785, 2018.
- [14] K. J. Parker, M. M. Doyley, and D. J. Rubens, “Imaging the elastic properties of tissue: the 20 year perspective,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 56, no. 1, pp. R1–R29, 2010.
- [15] C. Asensio del Barrio, “Efectividad diagnóstica y seguridad de distintas modalidades de elastografía en indicaciones oncológicas. Una revisión de revisiones sistemáticas y meta-análisis,” Red Española de Agencias de Evaluación de Tecnologías y Prestaciones del SNS. Agencia de Evaluación de Tecnologías Sanitarias (AETS) - Instituto de Salud Carlos III, Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Madrid, 2018.
- [16] M. Bruce, O. Kolokythas, G. Ferraioli, C. Filice, and M. O’Donnell, “Limitations and artifacts in shear-wave elastography of the liver,” *Biomedical Engineering Letters*, vol. 7, no. 2, pp. 81–89, 2017.
- [17] K. Yoshioka, N. Kawabe, and S. Hashimoto, “Transient elastography: Applications and limitations,” *Hepatology Research*, vol. 38, no. 11, pp. 1063–1068, 2008.
- [18] R. M. Sigrist, J. Liao, A. El Kaffas, M. C. Chammas, and J. K. Willmann, “Ultrasound elastography: review of techniques and clinical applications,” *Theranostics*, vol. 7, no. 5, pp. 1303–1329, 2017.

- [19] M. S. Taljanovic, L. H. Gimber, G. W. Becker, L. D. Latt, A. S. Klauser, D. M. Melville, L. Gao, and R. S. Witte, "Shear-wave elastography: basic physics and musculoskeletal applications," *Radiographics*, vol. 37, no. 3, pp. 855–870, 2017.
- [20] J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink, "Supersonic shear imaging: a new technique for soft tissue elasticity mapping," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 51, no. 4, pp. 396–409, 2004.
- [21] S. E. Salcudean, D. French, S. Bachmann, R. Zahiri-Azar, X. Wen, and W. J. Morris, "Viscoelasticity modeling of the prostate region using vibro-elastography," in *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pp. 389–396, Springer, 2006.
- [22] G. Flores, J. Ormachea, S. E. Romero, F. Zvietcovich, K. J. Parker, and B. Castaneda, "Experimental study to evaluate the generation of reverberant shear wave fields (R-SWF) in homogenous media," in *2020 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, pp. 1–4, 2020.
- [23] A. C. Saavedra, J. Guerrero, J. Pinto, E. González, and B. Castañeda, "Aspectos físicos de las técnicas elastográficas basadas en ultrasonido," *Carcinos*, vol. 4, pp. 34–44, 2014.
- [24] B. S. Garra, E. I. Cespedes, J. Ophir, S. R. Spratt, R. A. Zurbier, C. M. Magnant, and M. F. Pennanen, "Elastography of breast lesions: initial clinical results.," *Radiology*, vol. 202, no. 1, pp. 79–86, 1997.
- [25] C. F. Dietrich, R. G. Barr, A. Farrokh, M. Dighe, M. Hocke, C. Jenssen, Y. Dong, A. Saftoiu, and R. F. Havre, "Strain elastography-how to do it?," *Ultrasound International Open*, vol. 3, no. 04, pp. E137–E149, 2017.
- [26] D.-D. Li, L.-H. Guo, H.-X. Xu, C. Liu, J.-M. Xu, L.-P. Sun, J. Wu, B.-J. Liu, L.-N. Liu, and X.-H. Xu, "Acoustic radiation force impulse elastography for differentiation of malignant and benign breast lesions: a meta-analysis," *International Journal of Clinical and Experimental Medicine*, vol. 8, no. 4, p. 4753, 2015.
- [27] B. Fahey, R. Nelson, D. Bradway, S. Hsu, D. Dumont, and G. E. Trahey, "In vivo visualization of abdominal malignancies with acoustic radiation force elastography," *Physics in Medicine & Biology*, vol. 53, no. 1, p. 279, 2007.
- [28] K. J. Parker and R. M. Lerner, "Sonoelasticity of organs: shear waves ring a bell," *Journal of Ultrasound in Medicine*, vol. 11, no. 8, pp. 387–392, 1992.

- [29] B. Castaneda, K. Hoyt, K. Westesson, L. An, J. Yao, L. Baxter, J. Joseph, J. Strang, D. Rubens, and K. Parker, "Performance of three-dimensional sonoelastography in prostate cancer detection: a comparison between ex vivo and in vivo experiments," in *2009 IEEE International Ultrasonics Symposium*, pp. 519–522, IEEE, 2009.
- [30] J. Ryu and W. K. Jeong, "Current status of musculoskeletal application of shear wave elastography," *Ultrasonography*, vol. 36, no. 3, p. 185, 2017.
- [31] R. G. Barr and Z. Zhang, "Shear-wave elastography of the breast: value of a quality measure and comparison with strain elastography," *Radiology*, vol. 275, no. 1, pp. 45–53, 2015.
- [32] A. Popescu, R. Sirli, and I. Sporea, "2D shear wave elastography for liver fibrosis evaluation," in *Ultrasound Elastography*, IntechOpen, 2019.
- [33] L. Sang, X.-m. Wang, D.-y. Xu, and Y.-f. Cai, "Accuracy of shear wave elastography for the diagnosis of prostate cancer: a meta-analysis," *Scientific Reports*, vol. 7, no. 1, pp. 1–8, 2017.
- [34] J.-L. Gennisson, "Musculoskeletal applications of supersonic shear imaging," *Ultrasound Elastography for Biomedical Applications and Medicine*, pp. 534–544, 2018.
- [35] Y. Jiang, G.-Y. Li, L.-X. Qian, X.-D. Hu, D. Liu, S. Liang, and Y. Cao, "Characterization of the nonlinear elastic properties of soft tissues using the supersonic shear imaging (SSI) technique: Inverse method, ex vivo and in vivo experiments," *Medical Image Analysis*, vol. 20, no. 1, pp. 97 – 111, 2015.
- [36] J. Ormachea, R. J. Lavarello, S. A. McAleavey, K. J. Parker, and B. Castaneda, "Shear wave speed measurements using crawling wave sonoelastography and single tracking location shear wave elasticity imaging for tissue characterization," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 63, no. 9, pp. 1351–1360, 2016.
- [37] H. Eskandari, S. E. Salcudean, R. Rohling, A. Baghani, S. Frew, P. B. Gordon, and L. Warren, "Identifying malignant and benign breast lesions using vibroelastography," in *2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, pp. 25–28, IEEE, 2013.
- [38] Y. K. Mariappan, K. J. Glaser, and R. L. Ehman, "Magnetic resonance elastography: a review," *Clinical Anatomy*, vol. 23, no. 5, pp. 497–511, 2010.
- [39] S. Franchi-Abella, C. Elie, and J.-M. Correias, "Ultrasound elastography: advantages, limitations and artefacts of the different techniques from a study on a phantom," *Diagnostic and Interventional Imaging*, vol. 94, no. 5, pp. 497–501, 2013.

- [40] S. L. Lipman, N. C. Rouze, M. L. Palmeri, and K. R. Nightingale, "Evaluating the improvement in shear wave speed image quality using multidimensional directional filters in the presence of reflection artifacts," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 63, no. 8, pp. 1049–1063, 2016.
- [41] J. Ormachea, K. J. Parker, and R. G. Barr, "An initial study of complete 2D shear wave dispersion images using a reverberant shear wave field," *Physics in Medicine & Biology*, vol. 64, no. 14, p. 145009, 2019.
- [42] F. Zvietcovich, P. Pongchalee, P. Meemon, J. P. Rolland, and K. J. Parker, "Reverberant 3D optical coherence elastography maps the elasticity of individual corneal layers," *Nature Communications*, vol. 10, no. 1, pp. 1–13, 2019.
- [43] R. Serra, A. C. Marvin, F. Moglie, *et al.*, "Reverberation chambers a la carte: An overview of the different mode-stirring techniques," *IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine*, vol. 6, no. 1, pp. 63–78, 2017.
- [44] Daming Zhang and Erping Li, "Characterization of a reverberation chamber by 3D finite element method," in *2002 3rd International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 394–396, 2002.
- [45] I. 61000-4-21, "Electromagnetic compatibility (EMC)—part 4–21: Testing and measurement techniques—reverberation chamber test methods," 2011.
- [46] P. F. Wilson, "Acoustic and electromagnetic reverberation chambers: Similarities and differences," in *2016 Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility (APEMC)*, vol. 01, pp. 880–882, 2016.
- [47] L. Burns, K. Y. Bliokh, *et al.*, "Acoustic versus electromagnetic field theory: scalar, vector, spinor representations and the emergence of acoustic spin," *New Journal of Physics*, 2020.
- [48] K. Harima, "Statistical characteristics of maximum E-field distribution in a reverberation chamber," in *2004 International Symposium on Electromagnetic Compatibility (IEEE Cat. No.04CH37559)*, vol. 2, pp. 724–727 vol.2, 2004.
- [49] D. A. Hill, "Plane wave integral representation for fields in reverberation chambers," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 40, no. 3, pp. 209–217, 1998.
- [50] G. James, D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani, *An introduction to statistical learning*, vol. 112. Springer, 2013.