PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

TRABAJO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE HUMANIDADES EN TAREAS SOBRE FUNCIÓN EXPONENCIAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Jorge Luis Vivas Pachas

ASESORA

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Diciembre, 2020

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar el Trabajo Matemático de estudiantes de carreras de humanidades al resolver tareas sobre función exponencial. Para tal propósito, nos fundamentamos en la teoría del Espacio de trabajo Matemático-ETM. Como la investigación es cualitativa, tomaremos el método de análisis del trabajo personal que emplean Kuzniak y Nechache, debido a que este método de análisis profundiza nuestra comprensión del trabajo matemático personal. En lo que concierne a la parte experimental, la investigación se realiza con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades, con edades que oscilan entre los 16 y 18 años. Para la parte experimental se elaboró una tarea que contiene dos preguntas. Esta tarea sigue la caracterización de una tarea emblemática porque permite que los estudiantes sean capaces de seleccionar las herramientas útiles para hacer frente a un problema y luego las utilicen adecuadamente como instrumentos para resolver una tarea dada, permitiendo además una articulación entre las diferentes génesis y planos verticales del ETM.

En base al análisis de las acciones matemáticas de los estudiantes, en esta investigación, se evidencia la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, siendo la génesis semiótica más frecuente entre las acciones. Asimismo, se evidencia la activación de los planos verticales semiótico-instrumental, semiótico-discursivo e instrumental-discursivo, siendo los dos primeros más comunes entre las acciones. Finalmente, cabe destacar que algunas de estas activaciones fueron impulsadas por un referencial teórico, componente del plano epistemológico.

Palabras clave: Función exponencial; Trabajo Matemático; Génesis; Planos verticales.

ABSTRACT

The proposed research aims to analyse the Mathematical Work of students of humanities programmes when solving tasks on exponential functions. For this purpose, we will focus on the theory of the Mathematical Working Space-MWS. As the research is qualitative, we will resort to the personal working analysis method used by Kuzniak and Nechache because this analysis method deepens our understanding of personal mathematical work. Regarding the experimental part, the research is carried out with first semester students of humanities programmes, with ages ranging between 16 and 18 years. For the experimental part, a task containing two questions was developed. This task follows the characterization of an emblematic task because it allows students to be able to select useful tools to face a problem and then use them appropriately as instruments to solve a given task, allowing an articulation between the different geneses and vertical planes of the MWS as well.

Based on the analysis of the mathematical actions of the students, the activation of the semiotic, instrumental and discursive geneses is evidenced in this research, being the semiotic genesis the most frequent among the actions. Likewise, the activation of the semiotic-instrumental, semiotic-discursive and instrumental-discursive vertical planes is evidenced, the first two being the most common among the actions. Finally, it should be noted that some of these activations were promoted by a theoretical framework, a component of the epistemological plane.

Keywords: Exponential function; Mathematical work; Genesis; Vertical planes.

Creo que las matemáticas tienen la ventaja de enseñarle a uno la costumbre de pensar sin pasión. Esto me parece el gran mérito de las matemáticas. Se aprende a usar la mente primordialmente en un material en el que no entra la pasión, y habiendo adquirido ese hábito, se lo puede emplear desapasionadamente. Por lo tanto, hay mayores probabilidades de llegar a conclusiones certeras.

Bertrand Russell

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo invaluable a lo largo del desarrollo de esta investigación. Sus orientaciones, observaciones y sugerencias me permitieron concluir con esta investigación.

A los miembros del jurado del jurado, Dra. Verónica Neira Fernández y Mg. Flor Isabel Carrillo Lara, por sus sugerencias y observaciones, permitiendo así, mejorar mi investigación.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación.

A los profesores de la de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus enseñanzas al momento de compartir sus conocimientos y experiencias profesionales.

A mis colegas de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, por el tiempo que compartimos intercambiando conocimientos.

A los estudiantes de las carreras de humanidades de una universidad privada de Lima-Perú, por su participación en esta investigación.

A mis padres, Luisa Angélica Pachas Jacobo y Teófilo Guido Vivas Arenas, por sus enseñanzas de vida. A mi hermana Vanessa, por su apoyo constante.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La motivación por analizar las acciones matemáticas que desarrollan los estudiantes de carreras de humanidades al resolver tareas sobre función exponencial emerge como respuesta a las investigaciones de referencia revisadas, particularmente las que guardan relación a las concepciones y dificultades sobre la función exponencial, el uso de tecnología digital en la enseñanza de la función exponencial y la modelización de funciones exponenciales.

La presente tesis tiene como objetivo general analizar el Trabajo Matemático de estudiantes de carreras de humanidades cuando resuelven tareas sobre de función exponencial. Para ello, se considera adecuado tomar como un soporte teórico de esta investigación el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Mientras que como metodología de investigación consideramos pertinente realizar la investigación de corte cualitativo en la que consideramos la metodología propuesta en el propio modelo del ETM.

La presente investigación está constituida por tres capítulos. En el primer capítulo abordamos investigaciones de referencia relacionados al objeto función exponencial. Basados en ello y en los planes de estudio de diversas universidades peruanas planteamos la justificación de nuestra investigación. Asimismo, son presentados la pregunta y objetivos que guiaran nuestra investigación, explicamos los aspectos teóricos y metodológicos tomados en cuenta. En el segundo capítulo se desarrollan aspectos matemáticos e históricos de las funciones exponenciales, aspectos didácticos presentes en textos didácticos utilizados en los primeros ciclos universitarios. El tercer capítulo trata sobre experimental, es decir, el escenario y los sujetos de investigación, la tarea, y el análisis de las acciones matemáticas. Finalmente, se presenta un resumen de los resultados de la investigación, así como, las consideraciones finales y las perspectivas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presenta la problemática que rodea la temática del trabajo de investigación. De manera tal que es necesario realizar una revisión de las investigaciones que posibiliten la justificación de este estudio. Así mismo, es presentado el referencial teórico que guiará la investigación para enseguida, plantear la pregunta, objetivos y metodología de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

El interés que configura el presente trabajo de investigación está orientado a analizar cómo estudiantes de carreras de humanidades movilizan el concepto de función exponencial. En ese sentido, se realizó una búsqueda de investigaciones, en área de didáctica de la matemática, que muestren el estado actual de la investigación sobre función exponencial pues serán consideradas como fundamento para delimitar la problemática y justificación de la presente investigación.

Para comenzar, se presenta el artículo de investigación de García-Cuéllar y Martínez (2018), en el cual analizan el proceso de la Génesis Instrumental de la función exponencial realizado por once estudiantes de Matemática Básica, curso dirigido a la carrera de administración correspondiente a una universidad privada de Lima, Perú. Este análisis lo realizan por medio de una secuencia de dos actividades mediadas por el *GeoGebra*. Para tal propósito, los investigadores utilizan aspectos del Enfoque Instrumental para fundamentar investigación y presupuestos de la Ingeniería Didáctica, la cual sirvió de referencial metodológico.

En lo que respecta a la parte experimental, ésta estuvo conformada por dos encuentros llevados a cabo en una sala de cómputo. En el primero de ellos, se desarrolló la actividad N° 1, la cual se enfocó en el reconocimiento de características propias de la función exponencial, características asociadas al dominio, al rango y a la monotonía de la función. Esto, a partir de la identificación del rol que cumplen los parámetros a y b de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x + b$. Análogamente, la actividad se orientó a la instrumentalización del objeto matemático función exponencial. Posteriormente, el segundo encuentro se centró en el desenvolvimiento de la actividad N° 2, en la que fue presentada una determinada situación con condiciones que permiten a los estudiantes modelar la regla de correspondencia de la función exponencial. Esta actividad tuvo como propósito que los estudiantes generen nuevos esquemas de utilización a partir de los esquemas de acción instrumentada. Para la puesta en marcha de ambas actividades, es preciso mencionar que cada uno de los estudiantes contaba tanto con fichas de trabajo como con un computador en el cual estaba instalado el ambiente de representaciones dinámicas *GeoGebra*.

En cuanto a los resultados de la parte experimental, García-Cuéllar y Martínez (2018) consideraron presentar los resultados de uno de los estudiantes participantes identificado como Miguel. *"*Usamos los resultados de Miguel porque es uno de los estudiantes que aseguró no haber estudiado antes la función exponencial, es decir, dicho objeto matemático es un artefacto para él*"* (p. 256). Los resultados de la actividad N° 1 evidencian que Miguel movilizó tanto esquemas preexistentes de función y monotonía de una función como esquemas de acción instrumentada, esto último, al momento de constatar que el parámetro denominado base de la función exponencial no puede tomar el valor de 1 y que la función es creciente para una base mayor a 1 o decreciente para base que oscila entre 0 y 1. Por otro lado, los resultados de la actividad N° 2 dan cuenta que Miguel modeló correctamente la regla de correspondencia de las funciones exponenciales por medio de la utilización de tablas. Así mismo, luego de realizar la representación gráfica de ambas funciones exponenciales por medio del *GeoGebra*, Miguel desarrolla esquemas que asocian la monotonía de la función exponencial con el rango de valores que toma la base. En ese sentido los autores afirman:

> De ambas actividades propuestas, se puede evidenciar que la instrumentalización de la función exponencial se basó en el reconocimiento de propiedades y características de dicho objeto matemático. La instrumentación, se basó en que por medio de una situación los estudiantes movilicen sus esquemas de uso de dicha función. A partir de ambos procesos, podemos decir que Miguel ha instrumentalizado e instrumentado la función exponencial. (p.259).

Finalmente, los investigadores concluyen que el proceso de Génesis Instrumental de la función exponencial se dio en los estudiantes participantes. Esto, en base al análisis realizado concerniente a la manera de movilización de los esquemas de utilización. Es decir, la transformación del artefacto simbólico función exponencial en instrumento es puesta en evidencia al momento que los sujetos involucrados en la investigación resuelven las dos actividades propuestas.

Asimismo, ambos investigadores evidenciaron que las actividades desarrolladas, específicamente las que emplearon el *GeoGebra*, hicieron factible la transformación del artefacto función exponencial a instrumento. Esto, debido a que la representación gráfica de la función exponencial en el referido ambiente de representaciones dinámicas posibilitó que los estudiantes realicen una validación de sus conocimientos previos y facilitó el desarrollo de nuevos esquemas de utilización.

Otro artículo de investigación que se considera es el de Sureda y Otero (2013), en el cual analizan la conceptualización en el aprendizaje de la función exponencial en la secundaria. En tal sentido, la investigación se sustenta en dos referenciales teóricos: uno de corte didáctico como lo es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard, y otro cognitivo, la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud. Las investigadoras diseñaron una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) constituida por doce situaciones problemáticas, tres conjuntos de tareas y una evaluación.

Los análisis realizados por las investigadoras indican la proclividad de los estudiantes en resolver problemas no lineales como si lo fueran, generando dificultades relacionadas con la enseñanza de variaciones no lineales. Esta tendencia, que involucra el uso excesivo de modelos lineales, no solo está presente en la enseñanza media sino además en la enseñanza superior. Por ejemplo, con el objetivo de introducir la noción de función exponencial, las investigadoras presentan a los estudiantes un problema concerniente al crecimiento de bacterias, evidenciando posteriormente que la mayoría de estos estudiantes admiten como válidos procedimientos relacionados al modelo lineal para caracterizar dicho crecimiento. En ese sentido, las investigadoras consideran que la enseñanza de función exponencial, como todo concepto complejo, precisa de un diseño de situaciones que articulen más de un sistema de representación.

Sin embargo, las investigadoras advierten que en estos trabajos de investigación no se especifican si las estrategias empleadas en un inicio sufren alguna modificación en el desarrollo del estudio, y de ser el caso, tampoco se mencionan de qué manera se modifican. Ante ello, no solo presentan las acciones de los estudiantes al abordar situaciones relativas al concepto de función exponencial sino además exhiben la modificación de las mismas a lo largo del desarrollo del estudio del concepto de función exponencial.

Debido a que el interés de la investigación está orientado en identificar las características de la conceptualización, relativas al estudio del campo conceptual de la función exponencial, a partir del conocimiento explicitado por los estudiantes en las resoluciones de situaciones problemáticas a través de los sistemas de representación, las investigadoras planificaron, diseñaron, implementaron y analizaron un conjunto situaciones constituidas en cinco sistemas de representación diferentes, a saber: el Sistema de Representación Numérico (SRN), constituido por tablas y cálculos numéricos; el algebraico de primer orden (SRA1), constituido por procedimientos algebraicos con parámetros conocidos; el algebraico de segundo orden (SRA2), constituido por procedimientos algebraicos con parámetros no conocidos; el analítico-gráfico (SRG), constituido por las construcciones gráficas en el plano cartesiano y el verbal escrito (SRVE), que consisten en las formas lingüísticas escritas.

Para ello, Sureda y Otero (2013), reconstruyeron el campo conceptual de la función exponencial para estudiantes de cuarto año del colegio secundario. Posteriormente, planificaron y diseñaron un conjunto de diez situaciones, dos síntesis, tres conjuntos de ejercicios y una evaluación. En un principio, las investigadoras realizaron un estudio piloto en el curso de matemática en un aula de cuarto año de secundaria compuesto por 37 estudiantes. Luego de la aplicación de la prueba, el conjunto de situaciones fue ajustado y aplicado en dos aulas de cuarto año constituido por 31 y 28 estudiantes respectivamente. El desarrollo de las actividades se realizó en ambas aulas de manera simultánea en un periodo de dos meses y medio, a cargo de la misma profesora, la misma que formó parte del grupo de investigación.

Las clases fueron registradas en audio y se realizó una recolección sistemática de los protocolos de los estudiantes en cada una de las clases. Entendiendo por protocolo a la respuesta de un estudiante ante una situación, síntesis o ejercicios.

Sureda y Otero (2013) consideran a este proceso de recolección como esencial para el estudio de la conceptualización, debido a que permite tener acceso a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes al momento de presentar un desarrollo individual o en conformidad al consenso del grupo de trabajo. En ese sentido, solicitaron a los estudiantes que no alteren, mucho menos, que borren algunas de sus anotaciones, colocando además una separación entre las resoluciones propias y grupales. Las investigadoras analizaron las respuestas de los estudiantes, protocolo por protocolo, para posteriormente clasificarlas en cinco etapas: etapa lineal (lineal en todos los sistemas de representación), etapa parcialmente no lineal (no lineal en al menos un sistema de representación), etapa no lineal (no lineal en todos los sistemas de representación), etapa parcialmente exponencial (exponencial en al menos un sistema de representación) y etapa exponencial (exponencial en todos los sistemas de representación). Luego de la caracterización de estas etapas, las investigadoras realizaron los ajustes necesarios a la propuesta de enseñanza.

Finalmente, las investigadoras afirman que este trabajo de investigación no les proporciona los subsidios necesarios para afirmar que el proceso de conceptualización, particular en cada estudiante, atraviesa inevitablemente por cada una de las etapas mencionadas. Sin embargo, concluyeron que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos, en cada sistema de representación, tienen vital importancia en la transformación de la etapa lineal a la etapa exponencial. En ese sentido, Sureda y Otero (2013) concluyen:

> En consecuencia, no existe "el esquema exponencial", sino una variedad de esquemas exponenciales que son diferentes según el sistema de representación que se esté utilizando. Así, el dominio pleno del campo conceptual de las funciones exponenciales deberá involucrar en su enseñanza los diferentes sistemas de representación ligados al concepto (p.322).

Por otro lado, en una investigación que se constituye en su tesis de maestría, Brucki (2011) tiene como objetivo analizar como una actividad relacionada con función exponencial favorece un aprendizaje significativo de dicho concepto. Los sujetos de investigación estuvieron constituidos por 14 estudiantes de primer año de enseñanza media de un colegio público de São Paulo, todos ellos agrupados en duplas. La actividad fue llevada a cabo en dos aulas con una duración de 50 minutos cada una y tiene como foco relacionar el modelo algebraico de función exponencial con el modelo de término general de la progresión geométrica.

La investigación es de corte cualitativo, a través de la observación participante. La actividad fue desarrollada empleando la progresión geométrica en la construcción del concepto de función exponencial, con la finalidad de generar un aprendizaje significativo, de acuerdo con Brucki (2011).

Los estudiantes involucrados en el estudio emplearon un material de apoyo denominado “cuaderno del estudiante”, material proporcionado bimestralmente por la secretaría del estado de São Paulo/Brasil. Es así que, en su volumen 01, este material presenta los temas de sucesiones, progresiones aritméticas y progresiones geométricas. Para el segundo bimestre - volumen 02 -, el material presenta el tema de proporcionalidad directa e inversa, funciones lineales y cuadráticas, para las cuales se trabajaron en las representaciones gráficas y algebraicas.

Cabe destacar que esta actividad se realizó en un aula adicional a las ya antes mencionadas y contó con la presencia tanto de la investigadora como de otra persona que contribuyó con el desarrollo del proceso. El grupo de catorce estudiantes realizó la actividad en parejas, agrupándose ellos mismos. Los análisis fueron orientados con el propósito de observar los datos relacionados al texto que son necesarios para el desarrollo de la situación propuesta, la interdependencia de las variables y la utilización del concepto de progresión geométrica como idea ancla para la función exponencial.

En síntesis, la situación de aprendizaje describe las interacciones sobre la necesidad de la utilización de la radioactividad en la vida cotidiana. En ese sentido, la situación de aprendizaje evidencia las conexiones que existen entre los medios naturales, material radioactivo versus el aire; su modificación, así como su contextualización entre el medio y la matemática (progresión geométrica y función exponencial). En la situación de aprendizaje, la investigadora propone la relación que vincula el término general de la progresión geométrica con el modelo de la función exponencial, como solución al problema presentado.

Entre las conclusiones de la investigación, la autora afirma que para que actividades extra-matemáticas, que favorezcan el aprendizaje, estas deben contener ideas ancla, Esto, debido a que, durante el desarrollo de la actividad, la investigadora percibió que algunos grupos no lograban fundamentar el concepto de función y otros el concepto de progresión geométrica, a pesar que, en evaluaciones anteriores, estas dificultades no fueron detectadas.

Por su parte, en la tesis de maestría realizada en Colombia por Álvarez (2017) se propone, secuencias de aprendizaje orientadas a estudiantes de nivel superior con la finalidad favorecer la comprensión tanto la función exponencial como la logarítmica. En tal sentido, utilizó aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) y de la Teoría de Situaciones Didácticas además de los supuestos de la Ingeniería Didáctica, elegido como referencial metodológico. Cabe señalar que el investigador utilizó como medio para el desarrollo de las secuencias entornos virtuales de aprendizaje en adición al *GeoGebra*. El punto de partida para la realización de este trabajo de investigación radica en las dificultades que el investigador, bajo su experiencia en el dictado del curso, observó constantemente entre sus estudiantes, una poca claridad en reconocer qué es exponencial y qué es crecimiento.

Con relación a los sujetos de estudio, es preciso mencionar que las actividades didácticas fueron aplicadas a sesenta y cinco estudiantes, con edades oscilantes entre 17 y 19 años, todos ellos, pertenecientes al primer semestre del 2016 y matriculados en el curso de Matemática 1; el cual, se contempla en el plan de estudios de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Para la elaboración de las secuencias, el investigador realizó una valoración de la problemática de concerniente del aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas en los estudiantes. En ese sentido, el investigador realizó un taller de corte cualitativo basándose en un estudio de caso, aplicado a 65 estudiantes matriculados en Matemáticas I, curso correspondiente al primer semestre del 2016. El instrumento para la recolección constituyó de en un examen de cinco preguntas orientadas a indagar la comprensión sobre los conceptos de función exponencial y logarítmica que tienen los estudiantes, formados por dos grupos, uno de cada carrera. El propósito de esta prueba fue la de proponer estrategias didácticas basándose en la evaluación de los errores cometidos producto del análisis de cada ítem de la mencionada prueba.

En lo concerniente al concepto de función exponencial, el análisis de la prueba evidencia dificultades de los estudiantes al momento de resolver ecuaciones exponenciales, manejo de desigualdades, situaciones problema y manejo de interpretación de datos y gráficos.

En ese sentido, Álvarez (2017) afirma que estos problemas son un reflejo de una insuficiente coordinación entre los registros de representación semiótica. Asimismo, el autor señala que fue preciso realizar una valoración del modelo de enseñanza que es empleado desde los enfoques tradicionales.

Finalmente, el investigador concluye que logró el objetivo trazado en la tesis, es decir que, por medio de situaciones en las que se utilizan entornos virtuales y *GeoGebra* favorecen la apropiación del concepto de función exponencial por parte de los estudiantes.

Por su parte, en relación con el trabajo matemático que envuelve función exponencial, Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena y Montoya (2016) realizan un estudio que se profundiza en el ETM personal y en los paradigmas de profesores en formación inicial de Chile y Francia en relación a la construcción de la función exponencial. Específicamente, tienen como propósito conectar el ETM de las funciones y de las series de polinomios tanto con sus propiedades como sus diferentes representaciones.

En la formación inicial de profesores, tanto en Chile como en Francia, la función exponencial es estudiada en diferentes cursos~~,~~ orientados a diferentes objetivos. Por ejemplo, en Chile, el primer curso de cálculo dentro del tema de continuidad y derivada, la función exponencial es presentada como un ejemplo particular de una función que es continua y posteriormente es tomada para ejemplificar una función derivable. Cuando llegan al segundo curso de cálculo, para el estudio de la integración y las series, la función exponencial es presentada dentro de un grupo de funciones que son integrables. Por otro lado, en Francia, la función exponencial es presentada como solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ con condición inicial $f(0) = 1$.

Los investigadores pretenden entender de qué manera los saberes en el ETM de referencia son organizados por los programas de estudio y la influencia que esta organización ejerce en el ETM idóneo. Kuzniak et al. (2016) afirman que “Nuestra experiencia como formadores nos hace pensar que es difícil integrar las dimensiones de la función exponencial, que son tratadas en forma parcelada; y el ETM personal de los profesores en formación en el caso de la función exponencial está desarticulado” (p.52).

Lo presentado en las investigaciones de referencia da cuenta de la relevancia del trabajo de investigación. Esto, debido a que revelan la preocupación en la comunidad científica por estudiar la función exponencial. Así como evidencian el interés por analizar los procesos que siguen los estudiantes al momento de interactuar con el objeto matemático en cuestión. A continuación, se presenta la justificación del trabajo de investigación.

1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia permiten identificar aspectos relacionados a las concepciones, dificultades, etc. que se presentan en relación al objeto matemático función exponencial no solo en los últimos años de educación secundaria, sino también a nivel superior y en la formación de profesores de matemática.

Muestra de ello, es el trabajo de investigación de Sureda y Otero (2013), que está orientado al análisis del proceso de conceptualización de dicho objeto matemático. En tal sentido, las investigaciones tanto de García-Cuéllar y Martínez (2018) como de Álvarez (2017) evidencian la importancia de la incorporación de la tecnología digital (entornos de aprendizaje, GeoGebra, etc.) en la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

Por las investigaciones de referencia y como es objeto de interés desarrollar la investigación sobre función exponencial, específicamente con estudiantes de carreras de humanidades, porque estamos interesados en analizar el trabajo matemático de estudiantes de carreras de humanidades cuando desarrollan tareas sobre función exponencial.

Por ello, se hace necesario identificar en los planes de estudio de carrearas de humanidades de diferentes universidades del país, en qué cursos se contempla el estudio de función exponencial.

En ese sentido, se identifica que~~,~~ en los planes de estudio de tres universidades de Lima, de diferentes carreras universitarias orientadas a humanidades, específicamente en los cursos iniciales de matemática (primer semestre de las carreras) se trabaja función exponencial.

Como muestra de ello, se ha realizado un levantamiento de los sílabos de matemática de la Universidad Tecnológica del Perú (UTP), de la Universidad de Peruana de

Ciencias Aplicadas (UPC) y de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) con el propósito de conocer cómo es presentado el estudio del objeto matemático en cuestión.

En la UTP, el tema de función exponencial aparece en el sílabo de los cursos de matemática orientado a las carreras de ingeniería, gestión de negocios, ciencias de la salud, humanidades y arquitectura. Particularmente, para las carreras de humanidades (Ciencias de la Comunicación, Comunicación y Publicidad, Derecho, Diseño Digital Publicitario y Psicología), el sílabo de Nivelación de Matemática Humanidades muestra que el estudio de función exponencial aparece en la quinta unidad denominada *Funciones Básicas*, dentro de la cual su abordaje es realizado después del estudio de las funciones lineal y cuadrática pero antes de la función logarítmica, tema con el cual cierra la unidad, ver Figura 1.

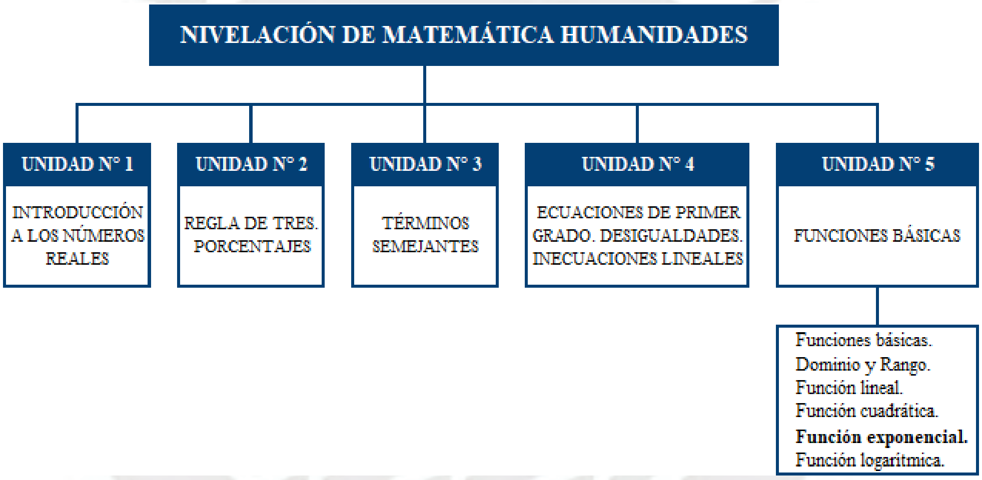


Figura 1. Desarrollo del sílabo de Nivelación de Matemática Humanidades de la UTP
Fuente: adaptado del sílabo de Nivelación de Matemática Humanidades de la UTP

Otro ejemplo de ello se muestra que en el silabo de Matemática Básica de la UPC, en el que el tema de función exponencial aparece en el sílabo de los cursos de matemática dirigido a las carreras de administración, arquitectura, artes contemporáneas, ciencias de la salud, comunicaciones, diseño, economía y educación, como se muestra en la figura 2.

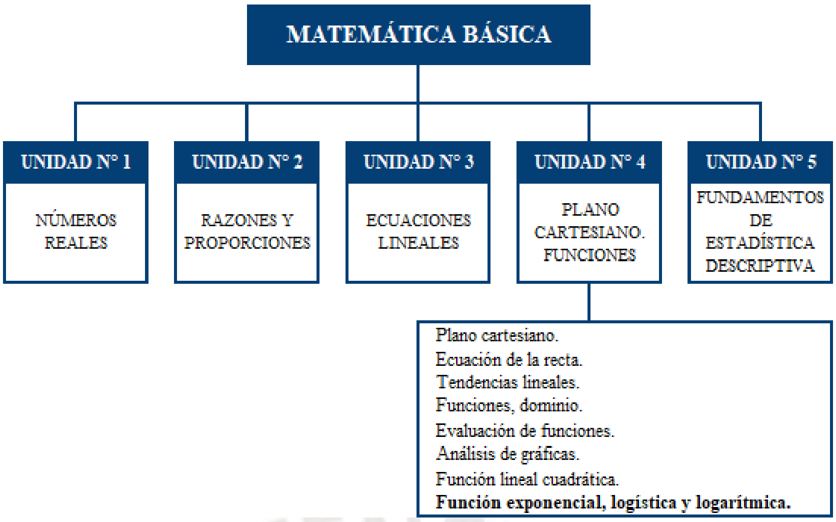


Figura 2. Desarrollo del sílabo de Matemática Básica de la UPC
Fuente: adaptado del sílabo de Matemática Básica de la UPC

Como se observa en la figura 2, para las carreras de humanidades (Artes Escénicas, Comunicación Audiovisual y Medios Interactivos, Comunicación e Imagen Empresarial, Comunicación y Fotografía, Comunicación y Marketing, Comunicación y Periodismo, Comunicación y Publicidad, Educación y Gestión del Aprendizaje, Música, Psicología, Traducción e Interpretación Profesional) el sílabo de Matemática Básica muestra que el estudio de función exponencial aparece en la cuarta unidad que lleva por título *Plano Cartesiano. Funciones*, dentro de la cual su estudio es realizado de manera posterior a la de funciones lineal y cuadrática, cerrando la dicha unidad en conjunto con la función logarítmica.

De igual manera, en Estudios Generales Letras (EEGGLL) de la PUCP el tema de función exponencial aparece en el sílabo de los cursos de matemática de las carreras de Ciencias y Artes de la Comunicación, Ciencias Contables, Ciencias Sociales, Derecho, Gestión y alta dirección, Letras, Psicología, etc. En particular, para las carreras de Ciencias y Artes de la comunicación, Ciencias Sociales, Derecho, Letras y Humanidades, el sílabo de Matemática Básica muestra que el estudio de función exponencial aparece en su segunda unidad denominada *Cambio y Relaciones*, dentro de la cual su estudio aparece cerrando la unidad y es posterior al estudio de funciones lineales, cuadráticas y por tramos, tal como nos muestra la figura 3.

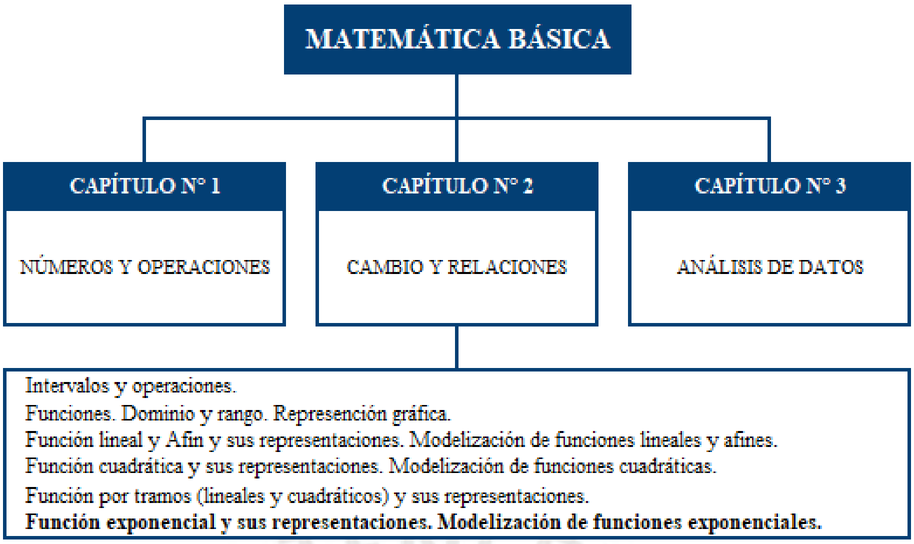


Figura 3. Desarrollo del sílabo de Matemática Básica de la PUCP
Fuente: adaptado del sílabo de Matemática Básica de la PUCP

Adicionalmente, en relación con los estudios generales de pregrado, el artículo 41 de la Ley Universitaria (2014) menciona que “Los estudios generales son obligatorios. Tienen una duración no menor de 35 créditos. Deben estar dirigidos a la formación integral de los estudiantes.” (p. 22).

Por lo presentado anteriormente, tanto en las investigaciones de referencia como en los sílabos de matemática de la UTP, UPC y PUCP de las carreras de humanidades; se considera que el realizar la presente investigación es pertinente; debido a que, hasta el momento, en la revisión de literatura que se ha realizado, solo se evidencia una investigación en el Perú, lo cual es un indicador de la necesidad de seguir investigando sobre este tema.

Después de presentada en la justificación, la pertinencia de la investigación en relación con el estudio de la función exponencial en las carreras de humanidades, consideramos que la teoría del Espacio de trabajo Matemático-ETM es la adecuada para esta investigación, porque permite analizar principalmente el trabajo matemático que realizan estudiantes, de cualquier nivel educativo, al desarrollar una determinada tarea que, en nuestro caso es sobre función exponencial. A continuación, presentamos aspectos del ETM que utilizaremos en la tesis.

1.3 Aspectos del Espacio de Trabajo Matemático

Para explicar los aspectos del ETM (Kuzniak, 2011) que utilizaremos como fundamento teórico de la tesis, comenzaremos por presentar lo que desde la teoría se entiende por dominio matemático, paradigma, tarea, trabajo matemático y trabajo matemático completo. Cabe señalar que también es necesario presentar lo que se entiende desde el ETM por acción matemática y episodio, pues todos estos términos también serán utilizados en el desarrollo de la investigación.

Para ello, presentamos nociones fundamentales del ETM de acuerdo con Kuzniak, Tanguay y Elia (2016):

- **Dominio matemático:** estos son determinados de acuerdo a la naturaleza de los objetos estudiados y de los paradigmas que lo caracterizan.
- **Paradigma:** es el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico. En ese sentido, un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento.
- **Tarea:** Es considerada como cualquier tipo de problema matemático, con preguntas plenamente determinadas de forma explícita y clara, la cual demanda un tiempo estimado para elaborar su resolución.

Asimismo, se presentan la noción de trabajo matemático y trabajo matemático completo explicada por Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016):

- **Trabajo matemático:** Consiste en resolver problemas matemáticos, identificar problemas y organizar contenidos dentro de un dominio específico.
- **Trabajo matemático completo:** Un trabajo matemático es completo cuando existe una relación genuina entre los planos epistemológicos y cognitivo. Este aspecto significa, de acuerdo con los autores, que los estudiantes son capaces de seleccionar las herramientas útiles para hacer frente a un problema y luego utilizarlos adecuadamente como instrumentos para resolver la tarea dada y; existe una articulación entre las diferentes génesis y planos verticales del ETM.

A continuación, expondremos cómo está constituido el ETM. Entonces, para tener una visión global de la teoría y explicar en qué consiste cada uno de sus componentes. Se representa en la figura 4 el modelo del ETM.

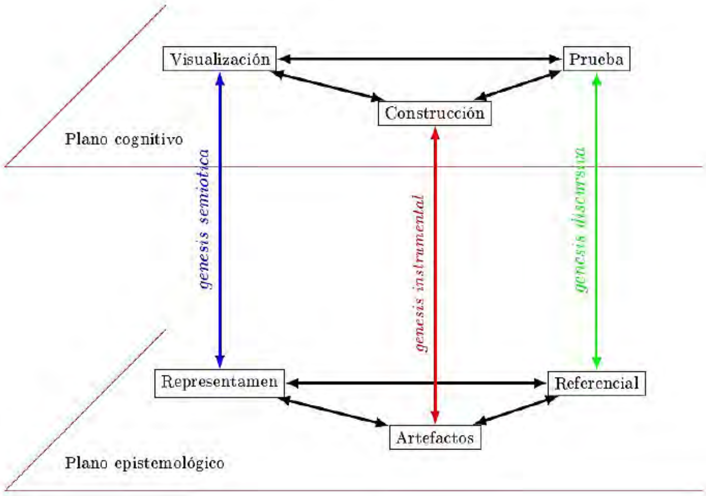


Figura 4. Esquema del ETM
Fuente: Kuzniak (2015, p.248)

Como se muestra en la figura 4, la constitución del ETM está dada por dos planos; el primero de ellos denominado epistemológico, el cual a su vez está constituido por tres componentes propias de la actividad matemática (ver figura 5). Estas componentes que interactúan en un contexto determinado son: "representamen", "artefactos" (materiales o intelectuales) y un referencial teórico basado en definiciones y propiedades. Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) mencionan que, si bien los artefactos y el referencial teórico se constituyen como dos componentes básicas de todo plano epistemológico, la importancia de la idea del representamen radica en su relación con el objeto a través de formas de naturaleza abstracta: íconos, indicios y símbolos en el sentido de que "un signo remite a su objeto de manera icónica cuando evoca su objeto en virtud de su semejanza, pero también gracias al hecho de que sus propiedades intrínsecas corresponden, de una cierta manera, a las propiedades del objeto" (Eco, 1988, p. 63). La organización de estas componentes debe ser orientado hacia un determinado propósito que dependa fuertemente de los contenidos matemáticos del dominio estudiado, pero en su dimensión epistemológica.

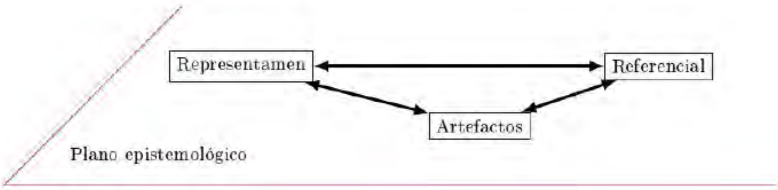


Figura 5. Plano epistemológico y sus componentes
Fuente: tomado de Kuzniak (2015, p.248)

Al ser el trabajo matemático una actividad humana, según los autores, reconoce como importante entender de qué manera los individuos emplean, interactúan y se apropian de los conocimientos matemáticos. Esto, permite la introducción de un segundo plano orientado a la articulación cognitiva de las componentes del ETM, denominado *plano cognitivo* (ver figura 6).

Este último plano del ETM está constituido por tres componentes: *visualización*, el cual consiste en la representación semiótica de un objeto matemático, es decir, una exteriorización de la representación que posibilita una mirada del objeto por medio de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres…); *construcción*, constituida por los instrumentos empleados (software, fórmulas, etc.); y *prueba*, en el cual la demostración asume el carácter de una prueba particular que goza del reconocimiento y aceptación de la comunidad científica.

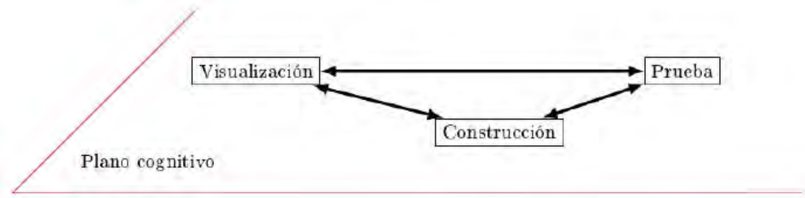


Figura 6. Plano cognitivo y sus componentes
Fuente: tomado de Kuzniak (2015, p.248)

Por su parte, Kuzniak (2011; 2015) afirma que las génesis no son independientes y están relacionadas con las componentes del ETM. Además, el investigador pone de manifiesto que la activación y control de estas génesis depende de un contexto dado o lugar sobre el cual se sitúe. Es decir, estas pueden ser concebidas por los docentes, situados en una institución determinada.

El plano epistemológico posibilita la constitución de la organización matemática del ETM por medio de los paradigmas que caracterizan al dominio matemático que se está estudiando. Por su parte, el plano cognitivo se encarga de estructurar el ETM al momento que tiene que ser empleado por un individuo.

Existen tres génesis fundamentales que articulan los planos epistemológicos y cognitivos, a saber:

- *Génesis instrumental*, la cual posibilita que los artefactos asuman una función operatoria.

- *Génesis semiótica*, la cual se fundamenta en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios.
- *Génesis discursiva*, la cual le da valor a las propiedades con el propósito de colocarlas al servicio del razonamiento matemático.

Las nociones tanto del plano epistemológico como del plano cognitivo son articuladas con las distintas génesis representadas en el siguiente esquema del ETM. Las tres génesis (instrumental, discursiva y semiótica) posibilitan la interacción de los planos cognitivos y epistemológicos a través de la articulación de sus componentes.

Planos Verticales del ETM

De acuerdo con Kuzniak (2011; 2015), en el Espacio de Trabajo Matemático se considera tres planos verticales, los mismos que se activan a través de una tarea dada~~,~~ conectándose con diferentes competencias de trabajo matemático, identificadas como: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins]; Semiótica-Discursiva [Sem-Dis] e Instrumental-Discursiva [Ins-Dis] (ver figura 7).

Estos planos tienen un ámbito de actuación sobre la base de las génesis y sus relaciones con los plano epistemológico y cognitivo. El primer plano [Sem-Ins] está sustentado por las génesis semiótica e instrumental. El segundo plano [Sem-Dis] está sustentado bajo las génesis semiótica y discursiva. Por último, el tercer plano [Ins-Dis] se apoya en las génesis instrumental y discursiva. Además, estos tres planos están interconectados por las distintas génesis.

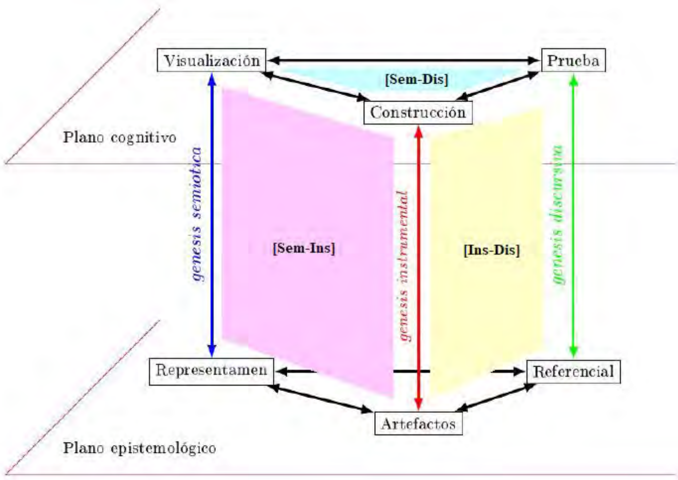


Figura 7. Planos verticales del ETM
Fuente: adaptado de Kuzniak (2015, p. 248)

A continuación, presentamos los tipos de ETM y los paradigmas del dominio del Análisis, que son otros aspectos del ETM que utilizaremos en la investigación.

Tipos de ETM y paradigmas del dominio del Análisis

A partir del Espacio de Trabajo Matemático inicialmente mostrado, se desprenden tres tipos de ETM:

- **ETM de referencia**

  El ETM de referencia está basado en principios matemáticos que son producto de un acuerdo consensuado entre los individuos de una cierta comunidad. Esto, a través del establecimiento de un cierto paradigma que englobe desde los conceptos, temáticas y herramientas hasta la forma de pensar de dicha comunidad.

- **ETM idóneo**

  El ETM idóneo consiste en el tratamiento que el profesor le da al proceso de enseñanza con el propósito de favorecer el trabajo matemático por parte de los estudiantes. “En una institución escolar dada, la resolución de un problema supone que un ETM idóneo se puede organizar para permitir a un alumno comprometerse con la resolución del problema” (Kuzniak y Richard, 2014, p.9).

- **ETM personal**

  Es preciso hacer una distinción entre el ETM personal del estudiante y el ETM personal del profesor, los cuales se detallan a continuación.

  ETM personal del estudiante

  Como se mencionó anteriormente, el ETM idóneo debe propiciar el compromiso del estudiante al momento de resolver una tarea. En ese sentido, cuando el estudiante se enfrenta a una tarea proporcionada por el profesor, sus conocimientos matemáticos permiten la activación del ETM personal del estudiante. Al respecto, Kuzniak y Richard (2014) sostienen “Cuando el problema se propone a un alumno, el tratamiento matemático que éste le da lo conduce al ETM personal de este alumno” (p.10).

  ETM personal del profesor

  La experiencia matemática que el profesor adquirió en su etapa de estudiante condiciona su ETM personal. Esto se pone de manifiesto tanto dentro como fuera de clases, cada vez que realiza una elección, toma una decisión o emite una opinión matemática. En lo que concierne a este punto, Kuzniak y Richard (2014) declaran “Estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, del ETM personal del profesor. La observación de la actividad de los alumnos permitirá identificar sus ETM personales identificando posibles subconjuntos de prácticas estables” (p.10).

Además, en los diferentes dominios matemáticos, el trabajo matemático es caracterizado por sus respectivos paradigmas. Por ello, en esta parte presentamos los tres paradigmas del dominio del Análisis, que es el dominio de nuestro interés en la investigación, con base en Montoya y Vivier (2016), que explican cada uno de ellos:

- Análisis Aritmético-Geométrico (AG), que permite interpretaciones y suposiciones implícitas sobre la base de la Geometría o el mundo real.
- Análisis Calculatorio (AC), en el cual las reglas del Cálculo son algo explicitas, pero no resulta necesario reflexionar sobre su naturaleza.
- Análisis Real o infinitesimal (AR), que involucran aproximación y vecindad, incluso topológico.

Finalmente, la presente investigación trata de analizar una tarea relacionada con la noción de función exponencial; en el ETM los investigadores Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016) explican que toda tarea propuesta debe favorecer la activación de las génesis: semiótica, instrumental y discursiva, además de la activación de los planos verticales del modelo del ETM. Es decir, debe generar un trabajo matemático completo.

En base a lo explicado anteriormente, a continuación, presentamos la pregunta y objetivos de la investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

En esta parte, planteamos la siguiente pregunta de investigación.

Pregunta:

¿Cuál es el Trabajo Matemático de estudiantes de carreras de humanidades al resolver tareas sobre función exponencial?

Con el propósito responder la pregunta que planteamos, nos trazamos alcanzar los siguientes objetivos, el general y los específicos.

Objetivo general:

Analizar el Trabajo Matemático de estudiantes de carreras de humanidades al resolver tareas sobre función exponencial.

Objetivos específicos:

- Identificar las génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes al desarrollar una tarea sobre función exponencial.
- Reconocer los planos verticales y los paradigmas del Análisis que los estudiantes privilegian al desarrollar una tarea sobre función exponencial.

A continuación, presentamos los aspectos metodológicos de la investigación, así como también los procedimientos a seguir.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

La presente investigación es cualitativa puesto que persigue una mayor compresión de algunos aspectos de los sujetos de estudio, más que la representatividad numérica que estos puedan tener.

Nos apoyamos en Borba (2004) que afirma que el tipo de pregunta de investigación que se realiza modela por los procedimientos empleados en dicha investigación.

> […] por lo tanto, cuando hablo de investigación cualitativa, me refiero a una forma de conocer el mundo que se materializa fundamentalmente a través de los procedimientos conocidos como cualitativos, que comprende que el conocimiento no está libre de valores, intenciones e historia de vida del investigador, y mucho menos las condiciones socio-políticas del momento. Como dijo Paulo Freire: la elección de la pregunta de investigación es en sí misma un acto imbuido de subjetividad (p.3).

También, en una investigación cualitativa priman las relaciones que tienen sentido para el investigador tal y como lo explican Javaroni, Santos y Borba (2011):

> […] podemos definir la investigación cualitativa como una forma de hacer investigación, en la cual el enfoque, el aspecto de la investigación está en las relaciones que tienen significado para el investigador. En general, cuando estamos desarrollando o ejecutando una investigación en Educación Matemática, estamos tratando de entender las relaciones que suceden con los

objetos de nuestro estudio, anclados en una perspectiva teórica que respalda nuestra forma de concebir el mundo en el que vivimos (p.198).

Después, explicamos los procedimientos metodológicos que seguimos en la tesis. Para esta parte, nos basamos en Hernández, Fernández y Batista (2014) quienes presentan un conjunto de nueve fases (ver figura 8):

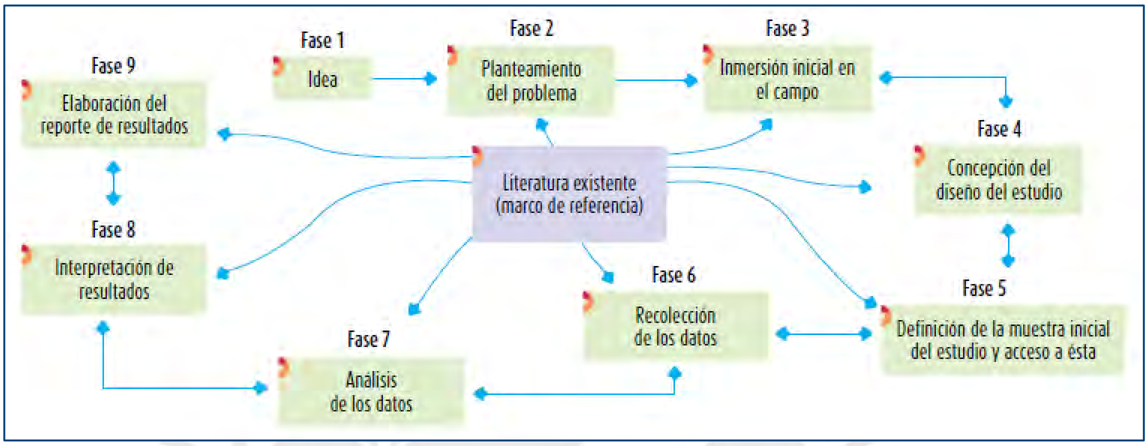


Figura 8. Proceso de investigación cualitativa
Fuente: Hernández et al. (2014, p.17)

Hernández et al. (2014) presentan este esquema (ver figura 8) de nueve fases, las que están formadas por: idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en el campo, concepción del diseño del estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de datos, análisis de los datos, interpretación de los resultados y elaboración del reporte de resultados. Con base en ello, en la investigación presentamos las siguientes fases (ver figura 9):

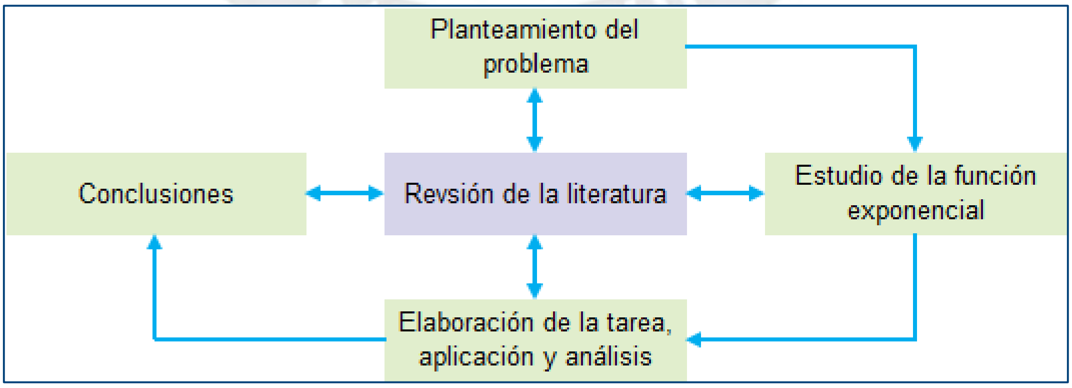


Figura 9. Proceso de investigación cualitativa adaptado

Seguidamente, se detalla cada una de ellas:

-***Fase 1: Planteamiento del problema***

Esta fase está asociada al capítulo I de la tesis y da inicio a nuestro proceso y contiene una recopilación de las investigaciones de referencia que dan sustento al desarrollo de nuestra tesis; la justificación que permite delimitar la pertinencia de nuestro trabajo de investigación; los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), nuestro referencial teórico; la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos de nuestro trabajo de investigación; además de los aspectos metodológicos y procedimientos, aquí señalados.

Cabe señalar que, en la presente tesis a diferencia de los autores, la revisión de la literatura se encuentra inmersa en el planteamiento del problema de investigación. Sin embargo, como lo mencionan Hernández et al. (2014), esta revisión puede complementarse en cualquier fase del proceso y apoyar desde el planteamiento del problema hasta las conclusiones.

-***Fase 2: Estudio de la función exponencial***

Esta fase está asociada al capítulo II de la tesis y está constituida por el abordaje a los aspectos matemáticos y didácticos de la función exponencial. Para ello, revisaremos el libro de Lima (2004) y de Stewart, Redlin y Watson (2012), además del material de curso que utilizan los estudiantes que son sujetos de nuestra investigación, específicamente del capítulo en donde se aborda el estudio de la función exponencial, todo esto vinculado a los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que son empleados en este trabajo de investigación.

-***Fase 3: Elaboración de la tarea, aplicación y análisis***

En esta fase está asociada al capítulo III de la tesis y en ella son presentados el escenario, los sujetos de investigación, es decir estudiantes de primer curso de matemática de carreras de humanidades y, con base en los estudios realizados en las fases 1 y 2, se presenta la tarea sobre función exponencial, la cual está constituida por dos preguntas.

A partir de ello, se detalla la manera como fue recolectada la información de los estudiantes y la organización de estos datos para su posterior análisis en base a los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) presentados anteriormente. Para la realización de este análisis, tomaremos las siguientes definiciones empleadas por Kuzniak y Nechache (2018):

- Acción matemática: Es objetivada y tomada del discurso escrito (producción escrita) u oral (pooling, entrevista, etc.) del individuo particular.
- Episodio: Está constituida por una serie de acciones matemáticas que el sujeto realiza para llevar a cabo una tarea prescrita para él.

De esta manera, en la tesis, utilizaremos el método de análisis del trabajo personal que emplean Kuzniak y Nechache (2018). Los investigadores mencionan que este método de análisis mejora y profundiza nuestra comprensión del trabajo matemático personal de una persona dentro de una institución escolar.

Para comprender el proceso metodológico que los investigadores desarrollaron, este se puede representar simbólicamente por una lupa que se mueve en dos direcciones opuestas sobre la producción del individuo, específicamente, está constituido de un análisis descendente (Zoom in) y ascendente (Zoom out).

> El análisis descendente consiste en dividir la actividad de una persona durante la realización de una tarea en una serie de acciones matemáticas. Estas acciones se analizan en detalle utilizando herramientas de la teoría de los ETM y se describen utilizando los diferentes componentes del diagrama de los ETM. Estas acciones y su interpretación en la teoría de ETM se resumen en una tabla de doble entrada que permite seguir paso a paso en el tiempo la realización de la tarea y la circulación del trabajo matemático a través de los diferentes planes del ETM.
>
> El análisis ascendente consiste en agrupar las acciones identificadas del individuo en acciones más globales llamadas episodios. Estos episodios se visualizan de forma sintética utilizando el diagrama del ETM para obtener una visión general del desarrollo del trabajo matemático de un individuo durante la realización de una tarea (p.8).

-***Fase 4: Conclusiones***

Esta fase da cierre a nuestro proceso y contiene las conclusiones generales e implicancias de nuestro trabajo de investigación, es decir, se redactan los resultados y conclusiones generales, así como las perspectivas de posibles investigaciones futuras.

En el capítulo siguiente presentamos los aspectos matemáticos y didácticos sobre función exponencial.

CAPÍTULO II: ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS

2.1 Aspectos matemáticos e históricos

La definición de función exponencial difundida y utilizada por los libros didácticos en la actualidad ciertamente no presenta su forma original vista por primera vez en su historia. Sabemos también que, la matemática fue desarrollándose históricamente~~,~~ a partir de la contribución de varios pueblos y en diferentes épocas de la civilización. Partimos de un levantamiento sobre el desarrollo histórico del concepto de función para, así, intentar situar la función exponencial y su marco.

Rossini (2006) organizó un cuadro histórico y cronológico de importante marco para el desarrollo de las concepciones de función. Además de eso, en la literatura, identificamos que las investigaciones que tratan de función exponencial se limitan a discutir lo histórico de la función como tema general. En ese sentido, levantar las concepciones históricas sobre la función exponencial es importante para percibir la influencia de estas concepciones en la enseñanza actual.

Conforme a la tabla 1, Freitas (2015) afirma que es posible concluir que la evolución del concepto de función, así como de la función exponencial, tiene la contribución de grandes matemáticos, desde Napier hasta Bourbaki. Es importante este breve levantamiento histórico sobre la evolución del concepto de función exponencial del punto de vista epistemológico, a fin de que entendamos como estas construcciones históricas influencian un abordaje actual de la función exponencial sea en libros didácticos, o en los referenciales curriculares y documentos que orientan la práctica del profesor.

Es posible que la noción de exponencial haya aparecido con el surgimiento de los logaritmos, con John Napier (1550-1617), él pensaba en las series de potencias de un número dado que, de vez en cuando, aparecían en las publicaciones. (Boyer, 2011).

Tabla 1. *Cronología de las concepciones de función*

Año	Matemático	Concepto
1594	Napier	Invención de los logaritmos.
1637	Descartes	Ecuación en x e y que muestra dependencia.
1670	Newton	Cantidades relacionadas; fluidos relacionados analíticamente.
1673	Leibniz	Relación, cantidades geométricas que dependen de un punto de la curva, máquina.
1696	Jean Bernoulli	Cálculo con exponenciales.
1718	Jean Bernoulli	Relación entre grandezas variables.
1748	Euler	Expresión analítica.
1755	Euler	Dependencia arbitraria.
1778	Condorcet	Dependencia arbitraria.
1797	Lacroix	Dependencia arbitraria.
1797	Lagrange	Expresión de cálculo, expresión analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operaciones hechas sobre una o varias cantidades constantes y variables.
1822	Fourier	Series trigonométricas; secuencia de valores; ordenadas no sujetas a una ley común.
1834	Lobatchevsky	Expresión analítica; condición para probar los números, dependencia arbitraria.
1837	Dirichelet	Correspondencia: para cada valor de x (abscisa), un único valor de y (ordenada); función definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x en cierto intervalo, corresponde un valor bien definido de y; no es necesaria una misma ley para todo el intervalo; y no necesita ser definido por una expresión matemática explícita en x.
1888	Dedekind	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos, obedeciendo dos condiciones.
	Cantor	Subconjunto de un producto cartesiano, obedeciendo dos condiciones.
1939	Bourbaki	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos, obedeciendo las dos condiciones.

En estas sucesiones, se evidencia que “las sumas y diferencias de los índices de las potencias correspondían a los productos y cocientes de las propias potencias” (Boyer, 2011, p.213). Todavía en este momento, surgió una ecuación exponencial, pero como un preludio de la “invención” de los logaritmos.

> Para conservar próximos los términos en una progresión geométrica de potencias enteras de un número dado, es necesario tomar el número dado muy próximo de uno. Napier, por eso, escogió como su número dado $1 - 10^7$ (o $0{,}9999999$). Así los términos en la progresión de potencias crecientes quedan realmente próximos – demasiado próximos, en verdad. Para llegar a un equilibrio y evitar decimales, Napier multiplicó cada potencia por 10^7. Es decir, si $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$, entonces L es el “logaritmo” de Napier del número N. Así, su logaritmo de 10^7 es 0, su logaritmo $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ es 1, etc. Dividiendo sus número y logaritmos por 10^7, tendríamos virtualmente un sistema de logaritmos de base $1/e$, pues $(1 - 1/107)^{10^7}$ está próximo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1/e$ (Boyer, 2011, p. 214).

Napier no tenía la definición de logaritmos que utilizamos en la actualidad, tampoco el concepto de base de un sistema de logaritmos. De acuerdo con Boyer (2011), la función logarítmica ya estaba implícita en la definición de Napier y en toda su obra sobre los logaritmos. Observando la expresión de N dada por Napier, identificamos el formato algebraico de la función exponencial, de ahí la importancia de asociar el concepto de logaritmos como “operación inversa” de la exponencial o función inversa.

Señalamos que, de acuerdo con el autor este estudio no puede ser atribuido solamente a una persona, Napier fue solo el primero en publicar, pero otras ideas semejantes fueron desarrolladas de forma independiente posteriormente. Burgi, en 1588, trabajó con estos conceptos antes de Napier, sin embargo, la publicación fue realizada tiempo después.

Destacamos también la participación del matemático Leonardo Euler (1701-1783) en la construcción del conocimiento matemático, desde los más elementales a los más avanzados. Desde la aparición de los logaritmos, alrededor de 1727 o 1728, Euler comenzó a utilizar la letra e para representar la base del sistema de logaritmos naturales. El concepto de fondo de este número ya era bien conocido, pero aún no había ninguna estandarización (Boyer, 2011).

Según Roque (2012, p.375), en su estudio sobre funciones "Euler buscaba definir de modo preciso lo que es una expresión analítica, enumerando las operaciones por medio de las cuales ella podría ser obtenida". En esta época, la suposición era que cualquier función podría ser escrita como una serie de potencias. "La expansión de una función en una serie infinita es una herramienta del análisis y no es un fin en sí mismo" (Roque, 2012, p.375).

Un buen ejemplo presentado por esta autora es "la serie de Taylor de la función exponencial definida por $f(x) = e^x$ en torno de a dado por $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} +$. Por medio de esta expansión, los valores de e^x pueden ser aproximados para x próximos de cero" (Roque, 2012, p.386).

Al utilizar la letra e, Euler la llamó "aquel número cuyo logaritmo hiperbólico $= 1$" (Euler, 1736 apud Boyer, 2011, p.305). En esta obra de Euler, *Mechanica*, la dinámica de Newton, es presentada por primera vez de forma analítica.

Para Boyer (2011), el padrón utilizado para la letra e pude también estar relacionada a la palabra "exponencial". Este autor también atribuye a Euler la notación $f(x)$ para una función de x, alrededor de 1734-1735.

Jean Bernoulli (1667-1748) fue otro matemático que trajo muchas contribuciones para la matemática, habiendo sido atribuido a él la invención del cálculo de variaciones y el cálculo con exponenciales, pues él estudió no solamente las curvas exponenciales simples del tipo $y = a^x$, pero también exponenciales generales $y = x^x$. "Para él área bajo la curva $y = x^x$ de $x = 0$ a $x = 1$, él encontró la notable representación como serie infinita, $\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots +$, este resultado lo obtuvo escribiendo $x^x = e^{x \ln x}$, expandiendo eso en la serie exponencial e integrando término a término, usando integración por partes" (Boyer, 2011, p.291).

Lima (2004), en su libro sobre el análisis real, dedica una sección al estudio de las funciones exponenciales y de los logaritmos. Inicialmente define el logaritmo para, inmediatamente, definir la función exponencial. La perspectiva presentada por el autor converge con la relación directa entre el concepto de función exponencial y el concepto de logaritmos, presentados históricamente, sin embargo, no trae una discusión en términos de expansión de series.

El camino propuesto por este autor difiere de aquel utilizando por profesores en la enseñanza media cuando pretenden enseñar función exponencial, es sabido que los libros didácticos traen un abordaje sobre exponencial, para después adentrar en el estudio de los logaritmos. En nuestro estudio de la función exponencial, no podemos despreciar otras miradas de los que generalmente se hacen. En ese sentido, Lima (2004) define exponencial de la siguiente manera:

> Como $\log$ es una función estrictamente creciente, entonces es una biyección de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$. Su inversa, $exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, se llama función exponencial. Por definición, $exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$, o sea $\log(exp(x)) = x$ y $exp(\log y) = y$.
>
> Existe un único número real cuyo logaritmo es igual a 1. Este se denota con el símbolo e. De momento, su definición es $e = exp(1)$. (Lima, 2004, p.137-138)

El autor afirma y demuestra que $exp(r) = e^r$, cuando $r \in \mathbb{Q}$. Además de la relación $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$, en este sentido, $exp(r)$ se comporta como una potencia de base e y exponente x. Ahora bien, por definición $e^x = exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, a partir de ello, se deduce lo siguiente:

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^0 = 1$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
- $\log e^x = x$
- $e^{\log y} = y$

Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ (Lima, 2004, p.139).

A continuación, en la siguiente sección se presentan los aspectos didácticos.

2.2 Aspectos didácticos

En esta parte, presentamos un estudio de los materiales didácticos del curso que los estudiantes (sujetos de la presente investigación) utilizan para el tema de función exponencial.

En primer lugar, se presenta el material de clase (Guía de trabajo) sobre función exponencial. En seguida, se analiza el capítulo 4 del libro de Stewart, Redlin y Watson (2012). Cabe señalar que este libro es usado como material de referencia.

A lo largo del desarrollo del curso, los profesores emplean un material que contiene todos los temas que son estudiados. Este material sirve de guía para orientar el trabajo del profesor y del estudiante debido que para el estudio de cada tema se hace uso de ejemplos, ejercicios resueltos y propuestos. Los temas de este material están organizados en capítulos y subcapítulos respectivamente, dentro del cual el tema de función exponencial es uno de ellos y aparece al cierre del capítulo denominado cambio y relaciones. Este capítulo inicia con la presentación de las nociones fundamentales de una función real en variable real, seguida del estudio de la función lineal afín y cuadrática, y posteriormente a estas el estudio de la función por tramos.

Para dar inicio al estudio de las nociones fundamentales de la función exponencial, se presenta la sección *Exploremos*, en la cual es expuesta una situación que envuelve el concepto de función exponencial presentándola en lengua natural.

Seguidamente, la función exponencial es definida a través de su regla de correspondencia, la cual permite mostrar su representación algebraica (ver figura 10).

Función exponencial

Una función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con base a está definida por:

$$f(x) = Ca^{kx}, x \in \mathbb{R},$$

donde a, C y k son números reales, $a > 0, a \neq 1$.

Figura 10. Definición de la función exponencial
Fuente: Material del curso

Esta representación permitirá la activación del referencial, en el sentido del ETM, ya que es posible que cuando el estudiante procure la definición de la función exponencial lo active.

Para establecer un estudio más prolijo que permita caracterizar el comportamiento de la función exponencial dentro de su dominio, sin pérdida de generalidad, se fijan los valores de las constantes $C = 1$ y $k = 1$, y de este modo se obtiene la siguiente regla de correspondencia $f(x) = a^x$, la cual es analizada dependiendo de los valores que pueda tomar el parámetro a, denominado base. Esta representación podría permitir la activación de la génesis semiótica debido a que toma como representamen el valor del parámetro base a y realiza un proceso de visualización, en el sentido del ETM, al determinar la monotonía de la función exponencial.

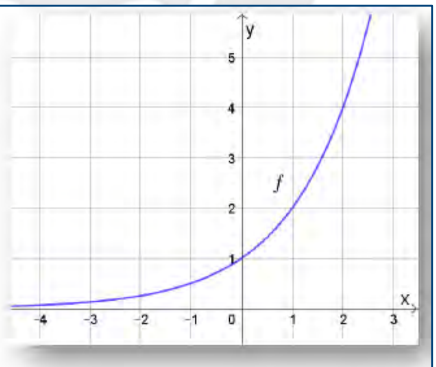
En términos del ETM, se puede decir que esta definición se posiciona en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) debido a que las constantes C y k asumen un valor en particular, es decir, se realizan cálculos, pero sin justificar que la naturaleza de estos parámetros no afecta el análisis de la monotonía de $f(x) = Ca^{kx}$.

Este análisis comprende identificar la monotonía de la función exponencial caracterizar el dominio, el rango, los interceptos con los ejes coordenados, el comportamiento de la función cuando el valor de x crece o decrece ilimitadamente, así como su comportamiento asintótico.

De este modo, es presentado el primer caso ($a > 1$), en la cual la función exponencial es estrictamente creciente (ver figura 11). Sin pérdida de generalidad, se fija el valor del parámetro *base* para $a = 2$ y consecuentemente es presentada su representación algebraica y gráfica, además de mostrar todas sus características, en el sentido del ETM, estos aspectos que se presentan en el material se caracterizan en el plano epistemológico (representamen, artefacto, referencial).

Caso 1: Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente.

A modo de ejemplo tenemos la función: $f(x) = 2^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.



Características que se observan en la gráfica:

1. $Dom(f) = \mathbb{R}$
2. $Ran(f) =]0; +\infty[$
3. La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
4. La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
5. La función es creciente en todo su dominio.
6. Observamos que a medida que x decrece ilimitadamente, los valores de y tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal razón, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es: $y = 0$.

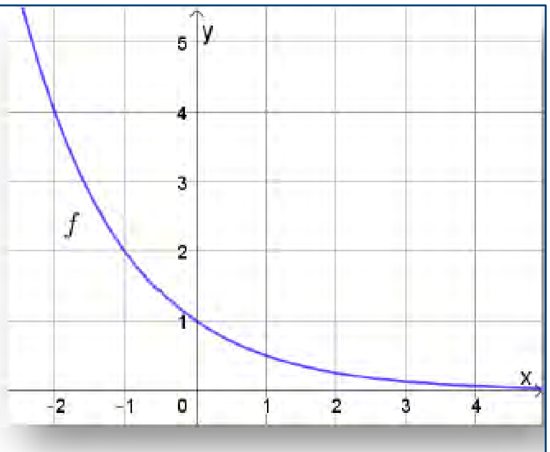
Figura 11. Función exponencial estrictamente creciente
Fuente: Material del curso

Asimismo, se presenta el segundo caso ($0 < a < 1$), en el cual la función exponencial es estrictamente decreciente (ver figura 12). Sin pérdida de generalidad, se fija el valor del parámetro *base* para $a = 1/2$ y consecuentemente es presentada su representación algebraica y gráfica, además de mostrar todas sus características.

Caso 2: Si $0 < a < 1$, la función

$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente decreciente.

A modo de ejemplo tenemos la función:
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.



Características que se observan en la gráfica:

1. $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R}$
2. $\mathrm{Ran(f)} =]0, +\infty[$
3. La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
4. La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
5. La función es decreciente en todo su dominio.
6. Observamos que a medida que x aumenta ilimitadamente, los valores de **y** tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es $\mathbf{y = 0}$.

Figura 12. Función exponencial estrictamente decreciente
Fuente: Material del curso

En ambos casos, esta representación ($f(x) = a^x$) permite la activación de la génesis discursiva, al momento de utilizar como referencial la propiedad que define a una función exponencial estrictamente creciente o decreciente, según el caso, con la finalidad de realizar una prueba de tipo pragmática cuando $a = 2$ ($a = 1/2$). En consecuencia, en el material, se propicia la activación del plano vertical [Sem-Dis].

La propuesta en el material, a través de la presentación de ambos casos, se enmarca en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) debido a que permite realizar interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan para la base a.

Otro aspecto importante de mencionar son los ejemplos que se emplean en el material. Una parte de ellos (ver figura 13) que se presenta en el ejemplo 1, tiene como propósito elaborar la representación gráfica de la función exponencial a partir de su regla de correspondencia, indicando además su rango y los interceptos de la función con los ejes coordenados.

Ejemplo 1

Elabore la representación gráfica de las siguientes funciones exponenciales e indique su rango y los interceptos con los ejes coordenados.

a) $f(x) = 1{,}9^x$ con $x \in \mathbb{R}$

*Figura 13.*Tarea para representar gráficamente una función exponencial
Fuente: material del curso

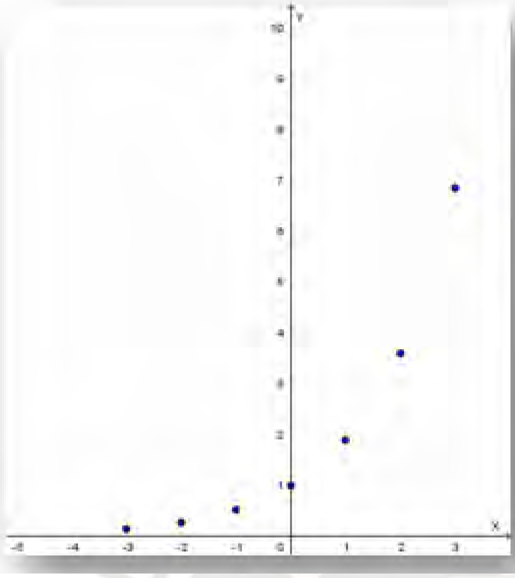
Además del ejemplo, en la figura 14 se presenta una posible solución (solución propuesta) que facilitaría el tránsito de la representación algebraica a la tabular y posteriormente a la representación gráfica.

Solución propuesta

a) Para obtener la representación gráfica de f, realizamos su representación tabular. A partir del dominio ($Dom(f) = \mathbb{R}$) elaboramos una tabla de valores parciales para f con la finalidad de obtener algunos puntos de paso de su representación gráfica.

x	$f(x)$		Puntos de paso
-3	0,15	$\Rightarrow$	(-3 ; 0,15)
-2	0,28	$\Rightarrow$	(-2 ; 0,28)
-1	0,53	$\Rightarrow$	(-1 ; 0,53)
0	1	$\Rightarrow$	(0 ; 1)
1	1,9	$\Rightarrow$	(1 ; 1,9)
2	3,61	$\Rightarrow$	(2 ; 3,61)
3	6,86	$\Rightarrow$	(3 ; 6,86)

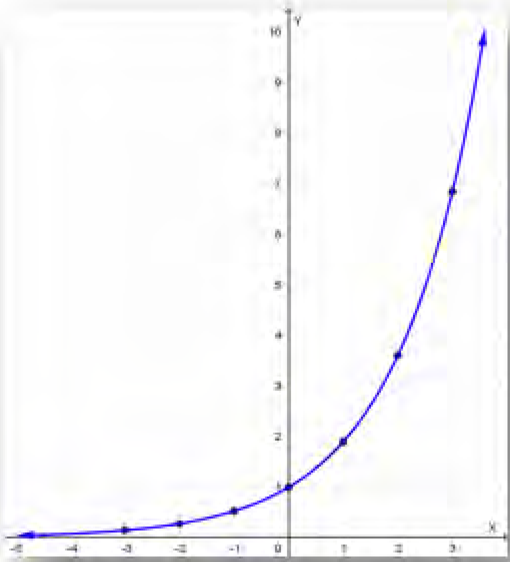
Luego, ubicamos cada punto de paso en un sistema de coordenadas e identificamos otras características de la función.



- Base:

  $f(x) = 1{,}9^x \quad \Rightarrow \quad 1{,}9 > 1$
- Estrictamente creciente
- Asíntota: $y = 0$

Finalmente, realizamos un ajuste de curvas para encontrar una curva que contenga una serie de puntos y que cumpla una serie de restricciones adicionales. De este modo, la representación gráfica de f es:



- Rango:

  $Ran(f) =]0; +\infty[$
- Interceptos con los ejes coordenados:

  Con el eje X: No tiene

  Con el eje Y: $(0; 1)$

Figura 14. Solución propuesta para graficar una función exponencial
Fuente: material del curso

Esta solución propuesta en el material evidencia la activación de la génesis instrumental debido a que toma a la regla de correspondencia de f como artefacto simbólico para construir una tabla de valores parciales para la función.

Luego, el desarrollo de la posible solución del ejemplo 1, mostrado en la figura 14, propicia la activación de la génesis semiótica debido a que toma como representamen los valores parciales de f y realiza un proceso de visualización que le permite representarlos como pares ordenados. Asimismo, la activación de esta génesis se pone de manifiesto cuando toma como representamen cada par ordenado $(x; f(x))$ obtenido de la representación tabular de f y realiza un proceso de visualización para identificarlo como un punto de paso en la representación gráfica de la función de un plano cartesiano. En consecuencia, se da la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Finalmente, se evidencia la activación de la génesis discursiva debido a que toma como referencial el dominio de f $(Dom(f) = \mathbb{R})$ para realizar una prueba de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que contenga los puntos de paso de la representación gráfica de f.

La solución propuesta, se encuentra en el Análisis Aritmético-Geométrico (AG) debido que se emplea una tabla de valores parciales para f con el propósito de visualizar algunos puntos de paso de su representación gráfica.

Por otro lado, en la bibliografía del curso se toma como referencia el libro de Stewart, Redlin y Watson (2012). Los temas del libro están organizados en capítulos y el estudio de la función exponencial es desarrollado en el capítulo 4. Con respecto al estudio de la función exponencial, el libro presenta definiciones, propiedades, ejemplos y tareas de aplicación, los cuales se muestran a continuación.

En la parte introductoria del libro se muestra un ejemplo en el que se resalta la rapidez con que aumentan los valores de una función exponencial estrictamente creciente, incluso comparándola con una función cuadrática. Posteriormente, se define la función exponencial, como se muestra en la figura 15.

FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial con base a está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Figura 15. Definición de la función exponencial
Fuente : Stewart et al. (2012, p. 302)

Esta representación permitirá la activación del referencial, en el sentido del ETM, ya que es posible que cuando el estudiante precise emplear la definición de función exponencial lo active.

Luego, los autores abordan la representación gráfica de la función exponencial y para ello, presentan un ejemplo introductorio, llamado ejemplo 2, (ver figura 16) en el cual son elaboradas las representaciones gráficas de dos funciones exponenciales, una estrictamente creciente y otra estrictamente decreciente, ambas en un mismo plano cartesiano. Para ello, Stewart et al. (2012) presentan una tabla de valores parciales para ambas funciones, es decir, se apoya en la representación tabular de ambas funciones exponenciales.

EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

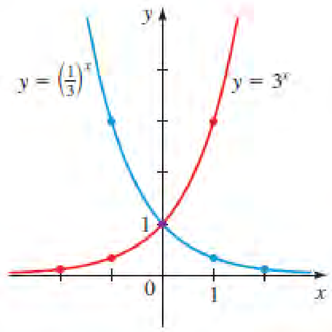


Figura 16. Ejemplo de la representación gráfica de la función exponencial
Fuente : Stewart et al. (2012, p.303)

Esta solución propuesta promueve la activación de la génesis instrumental debido a que toma la regla de correspondencia de f y g como un artefacto simbólico, respectivamente, con el propósito de construir una tabla que contiene siete valores parciales para cada función.

Luego, el desarrollo de la solución propuesta propicia la activación de la génesis semiótica debido a que toma como representamen cada valor que asume la variable x y su imagen mediante f y g, respectivamente, para realizar un proceso de visualización que le permita representarlo como un par ordenado. Asimismo, esta solución favorece la activación de esta génesis cuando toma como representamen cada par ordenado $(x; f(x))$ y $(x; g(x))$ obtenidos de la representación tabular de f y g, respectivamente, para realizar un proceso de visualización con el propósito de identificarlos como un punto de paso en la representación gráfica de cada función en un sistema de coordenadas. En consecuencia, se da la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Finalmente, la solución propuesta promueve la activación de la génesis discursiva debido a que toma como referencial el dominio de f y g ($Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}$) para realizar una prueba de tipo pragmática, que consista en encontrar una curva que contenga los puntos de paso de la representación gráfica de f y g, respectivamente.

En relación con el ETM, la solución propuesta, en el libro Stewart et al. (2012), se enmarca en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) debido que se emplea una tabla de valores parciales para f y g respectivamente, con la finalidad de visualizar algunos puntos de paso de su representación gráfica.

Adicionalmente, con el propósito de caracterizar la monotonía de la función exponencial, a modo de ejemplo (ver figura 17), en el libro se muestran dos familias de funciones agrupadas por la rapidez con la que decrecen o aumentan.

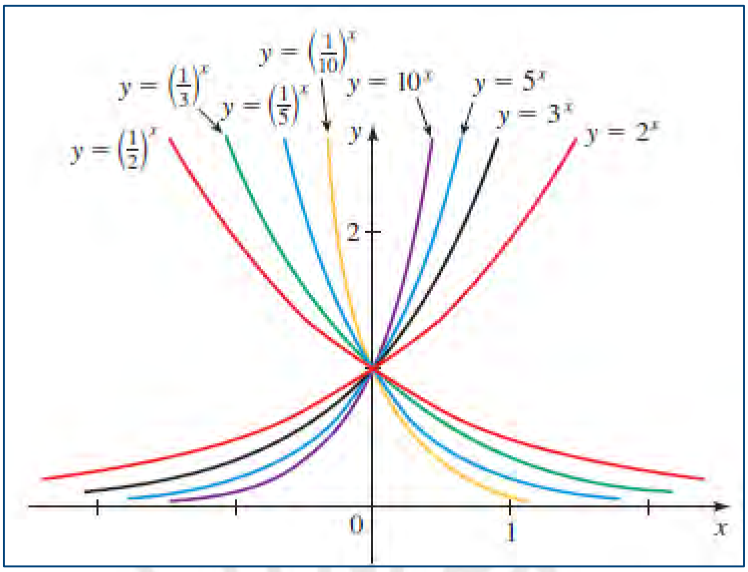
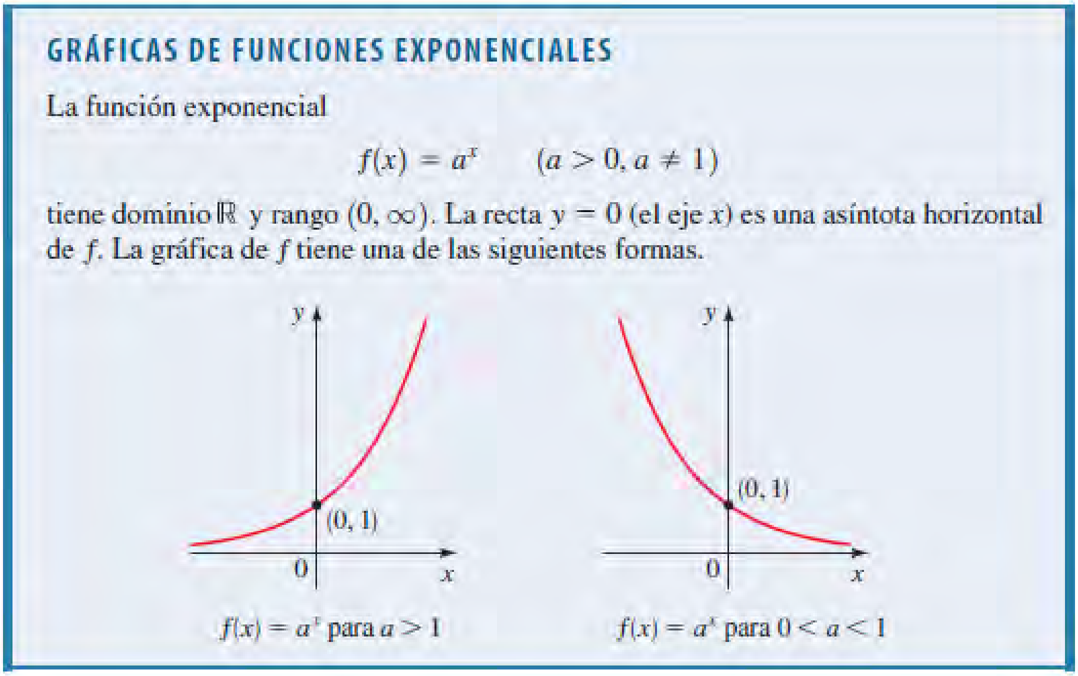


Figura 17. Familias de funciones exponenciales
Fuente: Stewart et al. (2012, p.304)

Este ejemplo promueve la activación de la génesis semiótica debido a que toma como representamen el comportamiento de cada función exponencial cuando x aumenta ilimitadamente para realizar un proceso de visualización que le permita clasificarla como una función estrictamente decreciente o creciente, creando así dos familias de funciones exponenciales. De este modo, se puede afirmar que los ejemplos de las figuras 16 y 17 están posicionados en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) debido a que, por ejemplo, en las familias de funciones se efectúan interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan para la base a.

Asimismo, podemos identificar en el ejemplo de la figura 17, la activación de la génesis semiótica se pone de manifiesto al momento de tomar como representamen la rapidez con la que decrecen o aumentan las imágenes de cada familia de funciones exponenciales efectuando un proceso de visualización, que permita asociarlos con los valores que toma el parámetro base.

Finalmente, en el libro se muestra la representación gráfica de la función exponencial caracterizada a través del valor que toma el parámetro base a (ver figura 18).



GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.

Figura 18. Representación gráfica de la función exponencial
Fuente: Stewart et al. (2012, p.304)

En ambos casos, que se muestran en la figura 18, esta representación $(f(x) = a^x)$ favorece la activación de la génesis semiótica al momento de utilizar como representamen el valor que toma el parámetro base para realizar un proceso de visualización que consiga asociarlo a la representación gráfica de una función exponencial estrictamente creciente o decreciente, según sea el caso $(a > 1$ o $0 < a < 1)$.

A continuación, con base en todo lo anterior, presentamos la parte experimental de la investigación con sus respectivos análisis fundamentados en el ETM.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo se presenta el escenario, los sujetos de investigación, la tarea y su respectivo análisis.

3.1 Escenario y sujetos de investigación

La realización de la parte experimental de este estudio es llevada a cabo con estudiantes que cursan el primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad particular de Lima, Perú. Estos estudiantes asisten a un primer curso de Matemática dirigido especialmente a estudiantes de carreras de humanidades.

Es importante señalar que en cada sesión de clase de este curso participan, además de los estudiantes y el profesor, dos asistentes de docencia. La presencia de los asistentes de docencia, forman parte del soporte educativo para brindar apoyo a los estudiantes durante el desarrollo de las tareas del curso.

En relación a los sujetos que participan en la investigación, presentamos a continuación, el rol de cada uno de ellos:

- **Estudiantes:** Están conformados por 57 estudiantes del curso de Matemática con edades que oscilan entre 16 y 18 años. Cabe resaltar que, en el nivel universitario, estos estudiantes desarrollan por primera y única vez el tema de función exponencial.
- **Formador:** Se refiere al profesor que tiene a cargo el curso. En ese sentido, es la persona que brinda a los estudiantes las pautas necesarias para el desarrollo de la tarea.
- **Investigador:** El cual tiene a cargo la función de elaborar la tarea y analizar los resultados de su desarrollo por parte de los estudiantes.
- **Observador:** Está conformado por el asistente de docencia que participa en el desarrollo del curso. Además, su rol es tomar nota de las acciones de los estudiantes en las fichas de observación durante la aplicación de la tarea.

Para fines de la investigación, de las producciones de los 57 estudiantes se seleccionó al azar, la producción de dos estudiantes, identificados con seudónimos de Angélica y Guido.

Angélica y Guido desarrollaron la tarea de forma individual en un tiempo aproximado de 40 minutos. Para la recolección de información se emplearon los siguientes instrumentos: fichas de la tarea, dentro de las cuales los estudiantes colocaron su resolución y, fichas de observación.

3.2 La tarea

La tarea (ver anexo 1) fue elaborada en base a la definición de tarea del ETM que la considera como un problema matemático posible de resolverse en un tiempo determinado y que permite al sujeto realizar acciones matemáticas (ver p.14).

Dicha tarea consta de dos preguntas, la primera trata de elaborar la representación gráfica de una función exponencial a partir de su representación algebraica, indicando además su rango, asíntota e interceptos con los ejes coordenados (ver figura 19).

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados.

Figura 19. Pregunta 1 de la tarea

La segunda pregunta, de la figura 20, consiste en determinar la regla de correspondencia de una función exponencial a partir de su representación gráfica, específicamente hallar el valor de los parámetros que son proporcionados en un modelo.

Pregunta 2

Determine la regla de correspondencia de la función f que tiene la forma $f(x) = Ca^x$, cuya representación gráfica se muestra a continuación:

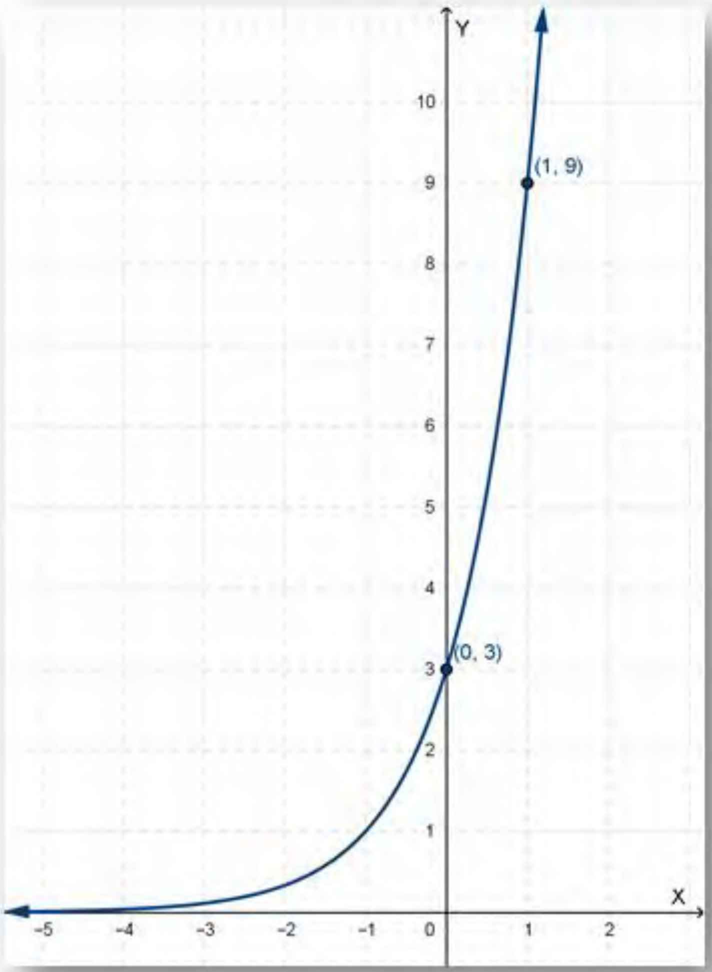


Figura 20. Pregunta 2 de la tarea

Considerando que nuestros objetivos se orientan a analizar la activación de las génesis, la identificación de los paradigmas del análisis y, la activación de los planos verticales: [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]~~,~~ que evidencia la articulación entre las dimensiones cognitiva y epistemológica, del ETM.

La tarea, de la investigación es llamada, de acuerdo con-Kuzniak y Nechache (2016) *tarea emblemática* porque están caracterizadas del siguiente modo:

[C1] Ser potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo.

[C2] Estar disponible en los ETM de referencia.

[C3] Pertenecer al ETM idóneo.

A seguir, es presentada la organización de cada pregunta de la tarea de acuerdo a la caracterización de una tarea emblemática (ver tabla 2).

Tabla 2. *Organización de la tarea*

Preguntas	Finalidad	Característica de la tarea emblemática
1	Representar gráficamente una función exponencial a partir de su representación algebraica. Por medio de su representación tabular y esbozando una curva que considere su dominio, monotonía y comportamiento asintótico.	La representación tabular de la función permitirá evidenciar la activación del plano vertical [Sem-Ins] y el ajuste de curvas mostrará la activación del plano vertical [Sem-Dis], en consecuencia, se cumple [C1].
2	Representar algebraicamente una función exponencial a partir de su representación gráfica.	La representación tabular de la función permitirá evidenciar la activación del plano vertical [Sem-Ins], en consecuencia, se cumple [C1].

A partir de esta caracterización, creemos que la tarea propuesta favorece la activación de las génesis: semiótica, instrumental y discursiva, además de la activación de los planos verticales del ETM. Es decir, genera potencialmente un trabajo matemático completo, en el sentido definido por Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016), a saber, existe una relación genuina entre los planos epistemológico y cognitivo y, una articulación entre las diferentes génesis y planos verticales del ETM.

3.3 Análisis de las acciones matemáticas de los estudiantes

En relación con el análisis de las acciones matemáticas que los estudiantes despliegan con el propósito de resolver la tarea desde el ETM, este análisis, se organiza en episodios. En ese sentido, Kuzniak, Maselin, Nechache y Vivier (2020), explican que “Un episodio es una subtarea que el estudiante realiza para resolver la tarea. Un episodio consiste en las acciones que el estudiante efectúa para completar la subtarea” (p.104). Por ello, el análisis previo y posterior de las acciones de los estudiantes será organizado en episodios.

A continuación, se presentan las dos preguntas, con sus respectivos análisis.

Pregunta 1

La pregunta 1 (figura 21) tiene como propósito principal que, los estudiantes determinen la representación gráfica de la función exponencial f a partir de su representación algebraica.

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados.

Figura 21. Pregunta 1 de la tarea

El análisis de la producción esperada para esta pregunta es mostrado a continuación:

Análisis de la producción esperada

Este análisis contiene la producción que se espera por parte de los estudiantes a partir de las acciones que ellos desplieguen, con el propósito de esbozar la representación gráfica de una función exponencial f, además de indicar el rango de f, la ecuación de la asíntota y los interceptos con los ejes coordenados.

Representación gráfica de f

A partir de la identificación de la regla de correspondencia de f, se espera que los estudiantes reconozcan la representación algebraica de una función exponencial de la forma $f(x) = C \cdot a^x + k$.

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen como referencial la regla de correspondencia de f para impulsar la activación de la génesis semiótica cuando tomen nuevamente a la regla de correspondencia de f como representamen y realicen un proceso de visualización reconociendo la representación algebraica de una función exponencial.

Luego, se espera que los estudiantes reconozcan y grafiquen la recta horizontal que representa la asíntota de la gráfica de f a partir de la identificación del valor del parámetro que aparece dentro de su regla de correspondencia ($f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \mathbf{1}$), el cual representa su desplazamiento vertical. La representación gráfica de esta recta en un sistema de coordenadas (ver figura 22), les permitirá evidenciar la tendencia de f cuando x aumenta ilimitadamente.

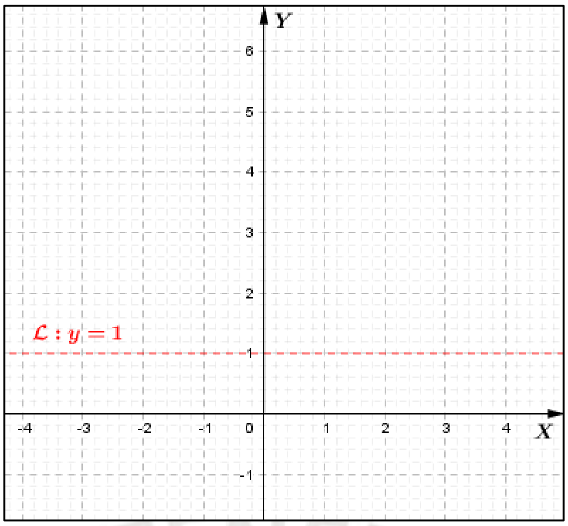


Figura 22. Representación gráfica de la asíntota

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen la génesis semiótica cuando tomen como representamen el valor del parámetro que representa el desplazamiento vertical de la representación gráfica de f y realicen un proceso de visualización, cuando reconozcan la ecuación de la recta horizontal que representa su asíntota ($\mathcal{L}: y = 1$).

Posteriormente, se espera que, a partir de la identificación del parámetro denominado *base* que aparece dentro de su regla de correspondencia ($f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$), los estudiantes reconozcan que f es estrictamente decreciente.

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen la génesis semiótica cuando tomen como representamen el valor de la *base* y realicen un proceso de visualización al reconocer la monotonía de f.

En seguida, se espera que los estudiantes elaboren una tabla que contenga valores parciales para f (ver figura 23). De este modo, cada valor parcial obtenido conducirá a la constitución de la abscisa y la ordenada de un punto de paso de la representación gráfica de f.

x	$f(x)$
-2	5
-1	3
0	2
1	1.5
3	1.125

Figura 23. Representación tabular de f

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen la génesis instrumental al tomar como artefacto simbólico la regla de correspondencia de f y realicen un proceso de construcción para obtener una tabla de valores parciales para f. En consecuencia, estas acciones dan cuenta de la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Asimismo, a partir de la representación tabular de f, se espera que los estudiantes representen gráficamente los puntos de paso obtenidos, como se muestra en la figura 24.

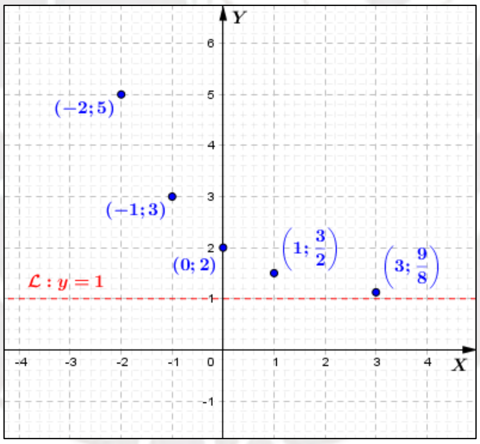


Figura 24. Representación de algunos puntos de paso de f

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen la génesis instrumental cuando tomen como artefacto la representación tabular de f demandará en los estudiantes que utilicen la tabla de valores parciales para f como un artefacto y la instrumentalicen con el propósito de realizar la construcción de la gráfica f.

Igualmente, se espera que los estudiantes esbocen una curva que contenga todos los puntos de paso (ver figura 25) y que a su vez presente tanto la monotonía de f como su comportamiento cuando x aumenta ilimitadamente.

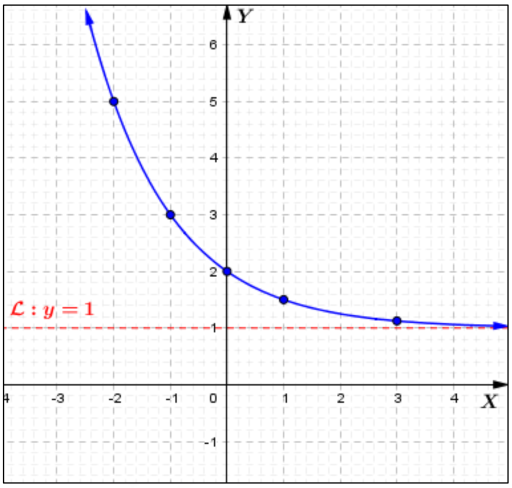


Figura 25. Representación gráfica de f

En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen la génesis discursiva debido a que toma como referencial el dominio de f ($Dom(f) = \mathbb{R}$) para realizar una prueba de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que contenga los puntos de paso de la representación gráfica de f.

Justificación de la asíntota de f

Se espera que los estudiantes identifiquen la asíntota a partir de la regla de correspondencia de f o de su representación gráfica (acción 2) y escriban su respectiva ecuación. En términos del ETM, se piensa que los estudiantes activen la génesis semiótica cuando tomen como referencial la regla de correspondencia de f o su representación gráfica para determinar que la ecuación de su asíntota es $y = 1$.

Justificación del rango de f

A partir de su representación gráfica, se espera que los estudiantes determinen el intervalo $]1; +\infty[$ que representa el rango de f considerando su comportamiento asintótico (a medida que x aumenta ilimitadamente, los valores de $f(x)$ tienden a 1). En términos del ETM, se espera que los estudiantes tomen como representamen a la representación gráfica de f su asíntota para realizar un proceso de visualización que les permitan reconocer los valores que toman las imágenes de x y, en consecuencia, el rango de f. En ese sentido, se activa la génesis semiótica.

También, los estudiantes podrían determinar el rango de f a partir de la acotación de los valores de $f(x)$ obtenida en la desigualdad:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 1 \quad \Rightarrow \quad Ran(f) =]1; +\infty[$$

En términos del ETM, se espera que los estudiantes tomen como referencial la función exponencial a^x para realizar una prueba del tipo pragmática asignando el valor del parámetro base $a = \frac{1}{2}$. Después, se espera que los estudiantes tomen como artefacto simbólico la función exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para realizar un proceso de construcción que les permitan obtener la desigualdad que acota los valores de $f(x)$, activando así la génesis instrumental. De esta manera, se podría dar la activación del plano vertical [Ins-Dis].

Justificación de los interceptos de f

Se espera que los estudiantes determinen que f no tiene intercepto con el eje de abscisas a partir de su representación gráfica y su asíntota. En términos del ETM, se espera que los estudiantes realicen la activación de la génesis discursiva al tomar como referencial la ecuación de la asíntota $y = 1$ y el rango $]1; +\infty[$ para realizar un proceso de prueba permitiéndoles que realicen la justificación explicando que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas.

De igual forma, los estudiantes podrían determinar que f no intercepta el eje de abscisas al momento de resolver la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad CS = \emptyset$$

En términos del ETM, se espera que los estudiantes tomen como referencial la representación algebraica de f para realizar una prueba, para justificar que f no tiene interceptos con el eje de abscisas, permitiéndoles la activación de la génesis discursiva.

Posteriormente, se espera que los estudiantes determinen el intercepto de f con el eje de ordenadas a partir de su representación tabular o gráfica. En términos del ETM, se espera la activación de la génesis semiótica al tomar como representamen el punto de paso $(0,2)$, obtenido de su representación tabular o gráfica, para realizar un proceso de visualización que lo lleve a identificarlo como el intercepto con el eje de ordenadas.

De igual manera, los estudiantes podrían determinar el intercepto de f con el eje de ordenadas al evaluar f en $x = 0$, en caso no lo hayan realizado para obtener su representación tabular. Así, se espera la activación del plano vertical [Ins-Dis] debido a que, por una parte, tomarían como artefacto la representación algebraica de f para realizar un proceso de construcción al evaluarla en $x = 0$ y al mismo tiempo esta representación algebraica sería tomada como referencial para realizar una prueba que permita obtener el intercepto con el eje de ordenadas (cuando $x = 0$).

Análisis del trabajo matemático de los estudiantes

Para el análisis del trabajo matemático de los estudiantes (Angélica y Guido) se utilizó el método del ETM de Kuzniak y Nechache (2018), el cual se organiza en dos etapas. En la etapa 1, se utilizan las tablas de análisis (análisis descendente), mientras que en la etapa 2, se presenta los diagramas de análisis (análisis ascendente).

En la presente investigación, para la etapa 1 (análisis descendente), se presenta la siguiente codificación:

- La primera columna de la tabla muestra las acciones matemáticas registradas en la producción escrita de los estudiantes.
- La segunda columna de la tabla presenta la interpretación de cada una de estas acciones en términos de la teoría ETM utilizando sus diferentes componentes (ver figura 26).

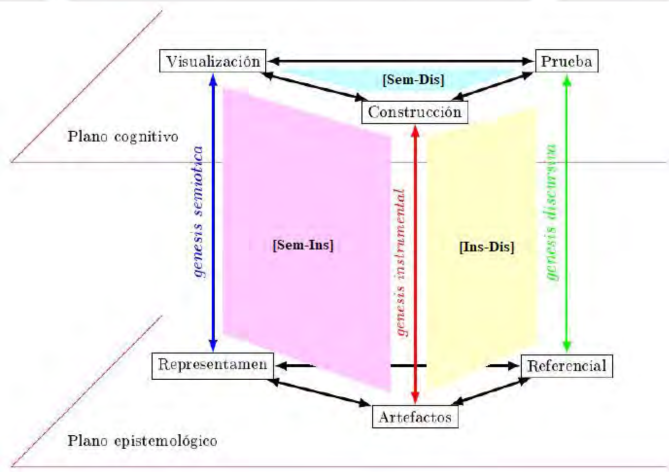


Figura 26. Planos verticales del ETM
Fuente: adaptado de Kuzniak (2015, p. 248)

Esta interpretación se basa en una codificación que permite identificar exactamente las diferentes activaciones de las génesis (semiótica, instrumental y discursiva) y planos verticales ([Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]) durante la ejecución de la tarea.

Si una acción matemática evidencia la activación de una de las génesis, se utiliza la siguiente codificación:

- **(Sem)** representa la activación de la Génesis Semiótica.
- **(Ins)** representa la activación de la Génesis Instrumental.
- **(Dis)** representa la activación de la Génesis Discursiva.

Si una o dos acciones matemáticas evidencian la activación de dos génesis y un trabajo matemático entre ambas, se emplea la siguiente codificación:

- **[Sem↔Ins]** representa la activación de la Génesis Semiótica (Sem) e Instrumental (Ins). El trabajo matemático origina la activación del plano vertical [Sem-Ins].
- **[Sem↔Dis]** representa la activación de la Génesis Semiótica (Sem) y Discursiva (Dis). El trabajo matemático origina la activación del plano vertical [Sem-Dis].
- **[Ins↔Dis]** representa la activación de la Génesis Instrumental (Ins) y Discursiva (Dis). El trabajo matemático origina la activación del plano vertical [Ins-Dis].

Si una acción matemática muestra cómo el uso del referencial impulsa un trabajo matemático en una de las génesis o de los planos verticales, se utiliza la siguiente codificación:

- **Ref→(Sem)** representa que el trabajo matemático en la génesis semiótica es impulsado por el referencial (Ref).
- **Ref→(Ins)** representa que el trabajo matemático en la génesis instrumental es impulsado por el referencial (Ref).
- **Ref→(Dis)** representa que el trabajo matemático en la génesis discursiva es impulsado por el referencial (Ref)
- **Ref→[Sem↔Ins]** representa que el trabajo matemático en el plano vertical [Sem-Ins] es impulsado por el referencial (Ref).

- **Ref→[Sem↔Dis]** representa que el trabajo matemático en el plano vertical [Sem-Dis] es impulsado por el referencial (Ref).
- **Ref→[Ins↔Dis]** representa que el trabajo matemático en el plano vertical [Ins-Dis] es impulsado por el referencial (Ref).

En seguida, se presenta el análisis del trabajo matemático de cada una de las dos preguntas de la tarea dada que los estudiantes desarrollaron.

Análisis del trabajo matemático de Angélica

Como se presenta en la tabla 3, para el análisis del trabajo matemático de Angélica (pregunta 1) se identificaron once acciones, que están agrupadas en seis episodios.

Tabla 3. *Organización de las acciones matemáticas de Angélica*

Episodios	N° de acciones
1. Justificación de la monotonía de f	2
2. Construcción de los puntos de paso de f	3
3. Representación gráfica de f	3
4. Justificación de la asíntota de f	1
5. Justificación del rango de f	1
6. Justificación de los interceptos de f	2

A continuación, se analizan las acciones en sus respectivos episodios.

Etapa 1: Análisis descendente del trabajo matemático de Angélica

En esta parte, identificamos el trabajo matemático de la estudiante por medio de las acciones matemáticas realizadas al momento que desarrolló la pregunta 1. Posteriormente, estas acciones son interpretadas en la teoría del ETM.

En el episodio 1 (ver tabla 4), la estudiante justifica la monotonía de f a través de 2 acciones.

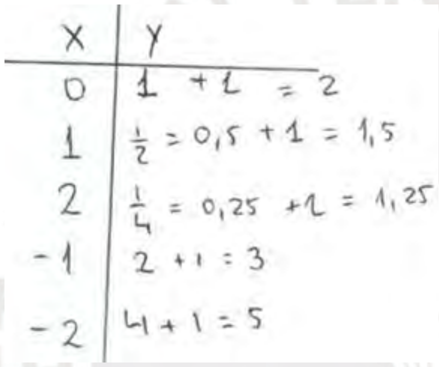
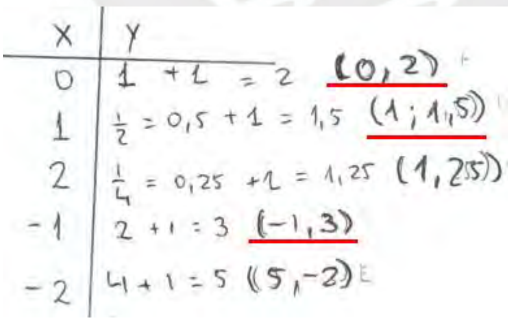
Tabla 4. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 1)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	Interpretación de estas acciones en términos del ETM	
Episodio 1: Justificación de la monotonía de f	**Acción 1.** Escribe la regla de correspondencia de f. $f(x) = 1\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$	**Ref**	La representación algebraica de f es empleada como ***referencial***.
	Acción 2. Justifica que f es decreciente. $f(x) = 1\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ / Dom = $\mathbb{R}$ $\to$ Es decreciente $(0 < a < 1)$	**[Sem↔Dis]**	El parámetro *base* es usado como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al determinar la monotonía de f. Lo que evidencia la activación de la ***génesis semiótica***. La propiedad que asocia el valor del parámetro *base* con la monotonía de una función exponencial es utilizada como ***referencial*** y se realiza una ***prueba*** de tipo pragmática al justificar que f es decreciente. Lo que muestra que la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 2 (ver tabla 5), Angélica realiza la construcción de algunos puntos de paso de la representación gráfica de f a través de 3 acciones. Para ello, a partir del dominio de f, toma cinco valores para elaborar una tabla que contenga valores parciales para f.

Tabla 5. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 2)*

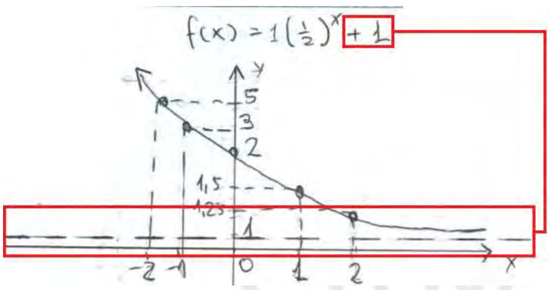
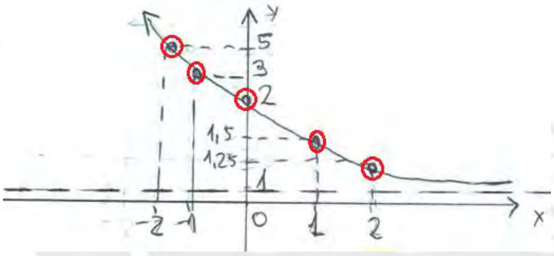
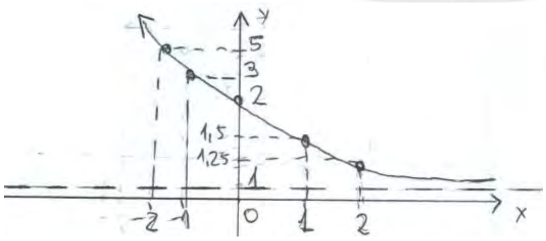
	Acciones matemáticas identificables de Angélica	Interpretación de estas acciones en términos del ETM	
Episodio 2: Construcción de los puntos de f	**Acción 3.** Escribe el dominio de f. 	**Ref** ↓	El dominio de f es empleado como ***referencial***.
	Acción 4. Elabora una tabla que contiene valores parciales para f. 	**[Sem↔Ins]**	Cada valor que toma la variable independiente x es usado como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como pre-imagen de y mediante f. Lo que evidencia la activación de la ***génesis semiótica***. La regla de correspondencia de f es utilizada como ***artefacto*** simbólico y se realiza un proceso de ***construcción*** al obtener una tabla de valores parciales para f. Lo que confirma la activación de la ***génesis instrumental***.
	Acción 5. Constituye algunos puntos de paso de la representación gráfica de f. 	**(Sem)**	Cada valor parcial de f junto con su pre-imagen son empleados como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al representarlos como pares ordenados. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

Es preciso mencionar que la estudiante representa dos de los cinco pares ordenados de manera errónea.

En el episodio 3 (ver tabla 6), Angélica realiza la representación gráfica de f a través de 3 acciones.

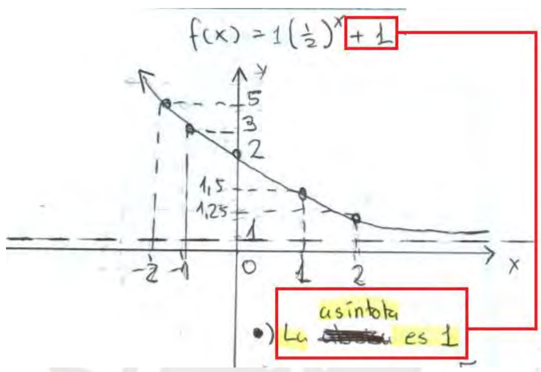
Tabla 6. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 3)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	Interpretación de estas acciones en términos del ETM	
Episodio 3: Representación gráfica de f	**Acción 6.** Representa gráficamente la asíntota de f. 	**(Sem)**	El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usado como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al representar gráficamente la asíntota de f. Lo que muestra la activación de la ***génesis semiótica***.
	Acción 7. Representa gráficamente los puntos de paso de f. 	**[Sem↔Dis]**	Cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$, obtenido de la representación tabular de f, es utilizado como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como un punto de paso la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.
	Acción 8. Realiza el esbozo de una curva que constituye la representación gráfica de f. 		Las características de f (dominio, monotonía, comportamiento asintótico y puntos de paso) son empleadas como ***referencial*** y se realiza una ***prueba*** de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que cumpla con estas condiciones y en consecuencia se constituya en la representación gráfica de f. Lo que confirma la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 4 mostrado en la tabla 7, la estudiante realiza la justificación de la asíntota de f a través de 1 acción.

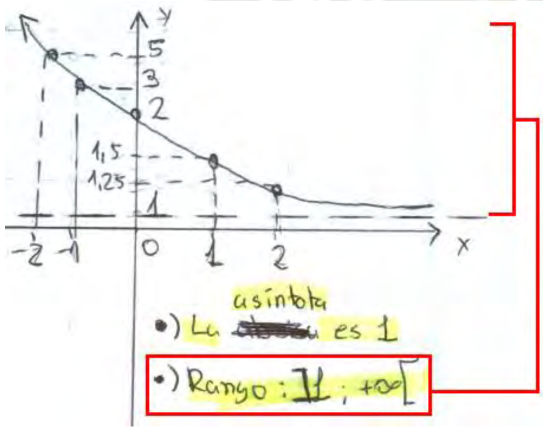
Tabla 7. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 4)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**
Episodio 4: Justificación de la asíntota de f	**Acción 9.** Justifica que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. 	**(Dis)** El parámetro de valor 1 de la regla de correspondencia de f es usado como ***referencial*** y la estudiante realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. Lo que indica la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 5 (ver tabla 8), la estudiante justifica el rango de f a través de 1 acción.

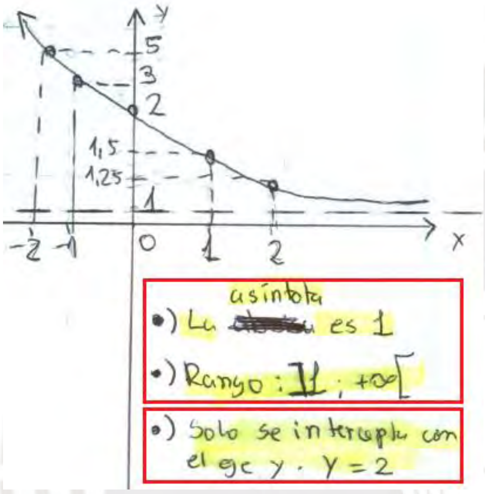
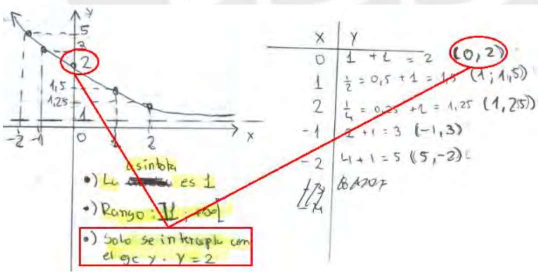
Tabla 8. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 5)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**
Episodio 5: Justificación del rango de f	**Acción 10.** Determina el rango de f. 	**(Sem)** La representación gráfica de f es utilizada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al reconocer los valores que toman las imágenes de x y en consecuencia, el rango de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En la tabla 9 que presenta el episodio 6, la estudiante elabora la justificación de los interceptos de f a través de 2 acciones.

Tabla 9. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 1 (episodio 6)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	Interpretación de estas acciones en términos del ETM
Episodio 6: Justificación de los interceptos de f	**Acción 11.** Determina que f no tiene intercepto con el eje de abscisas. 	**[Sem↔Dis]** La representación gráfica de f o su rango es empleado como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas. Lo que evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.
	Acción 12. Determina el intercepto de f con el eje de ordenadas. 	El punto de paso $(0,2)$ obtenido de su representación tabular y/o gráfica es usado como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como el intercepto con el eje de ordenadas. Se evidencia evidenciando la activación de la ***génesis semiótica***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

A partir del análisis, se puede deducir que Angélica esbozó la representación gráfica de la función exponencial f. Porque justificó la monotonía de f (episodio 1), realizó la construcción de algunos puntos de paso de f (episodio 2) y finalmente realizó la representación gráfica de f (episodio 3). Asimismo, determinó la asíntota de f (episodio 4), el rango de f (episodio 5) y los interceptos con los ejes coordenados (episodio 6).

Por lo tanto, el proceso realizado por la estudiante es consistente con el trabajo matemático en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Por otro lado, la representación gráfica que elaboró Angélica es correcta porque a partir de la regla de correspondencia de f identificó los elementos que caracterizan a una función exponencial (monotonía y comportamiento asintótico) y realizó la construcción de algunos puntos de paso considerando los valores del dominio de f, para esbozar una curva que cumplan con todas esas condiciones.

Se reafirma entonces que el trabajo matemático de Angélica se encuentra en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) y se concluye que el desarrollo presentado por la estudiante coincide con el desarrollo esperado a pesar de que el orden de las acciones que despliega sea diferente.

Etapa 2: Análisis ascendente del trabajo matemático de Angélica

Con base en el análisis descendente y con la utilización del diagrama del ETM, se analiza en la segunda etapa el análisis ascendente de todas las acciones en los episodios correspondientes.

Episodio 1: Justificación de la monotonía de f

El valor de la base (representamen) permite determinar la monotonía de f (visualización), lo que evidencia la activación de la génesis semiótica.

La propiedad que asocia el valor del parámetro *base* con la monotonía de una función exponencial (referencial) permite justificar que f es decreciente (prueba), se confirma la activación de la génesis discursiva.

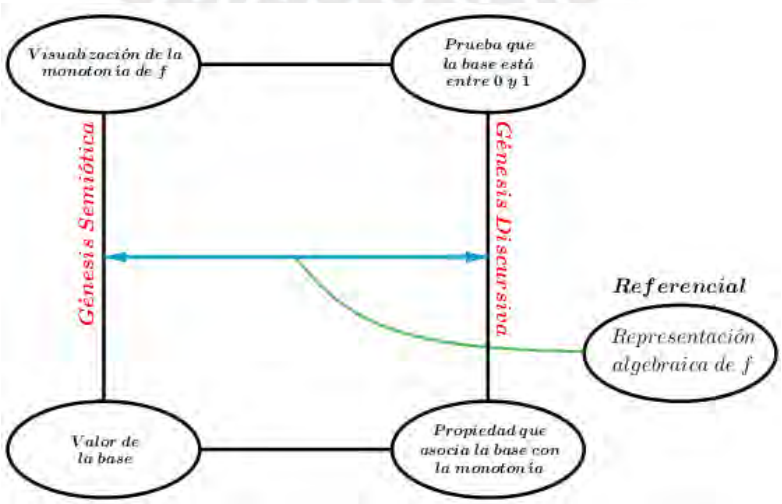


Figura 27. Acción matemática 1 y 2

Las acciones matemáticas 1 y 2 (ver figura 27) indican que el referencial (representación algebraica de f) activa un trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica y discursiva.

Episodio 2: Construcción de los puntos de paso de f

En las acciones matemáticas 3 y 4 en las que la estudiante toma cinco números reales (representamen), que son identificados como elementos del dominio de f (visualización), se muestra la activación de la génesis semiótica.

Luego, el uso de la regla de correspondencia de f (artefacto) permite elaborar una tabla de valores parciales para f (construcción), evidenciando la activación de la génesis instrumental.

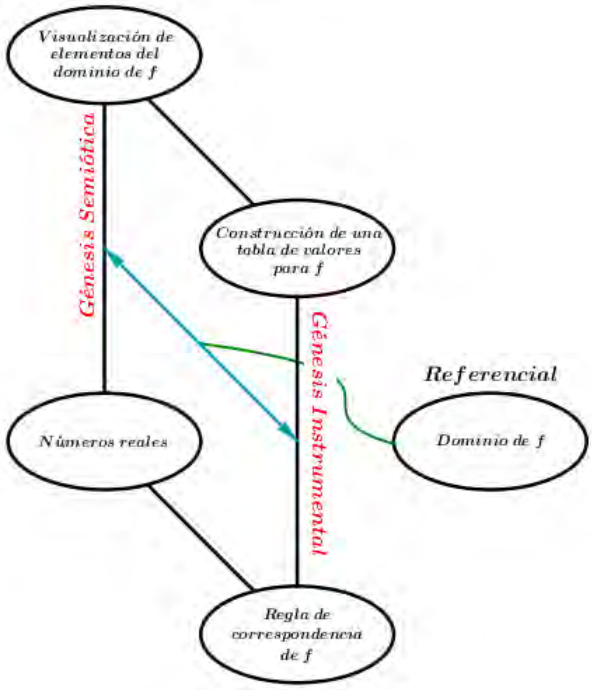


Figura 28. Acción matemática 3 y 4

En base a las acciones matemáticas 3 y 4 (ver figura 28) se observa que el referencial (dominio de f) activa un trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica e instrumental.

Con respecto a la acción 5, Angélica da cada valor parcial de f junto con sus pre-imagen (representamen), lo que le permite representarlos como pares ordenados (visualización).

Figura 29. Acción matemática 5

Por ello, la acción matemática 5 (ver figura 29) confirma la activación de la génesis semiótica.

Episodio 3: Representación gráfica de f

El parámetro de valor 1 de la regla de correspondencia de f (representamen) permite que la estudiante represente gráficamente la asíntota de f (visualización).

Figura 30. Acción matemática 6

En la acción matemática 6 (ver figura 30) se evidencia la activación de la génesis semiótica.

Posteriormente, cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ (representamen), obtenido de la representación tabular de f, es identificado como un punto de paso la representación gráfica de f (visualización), lo que evidencia la activación de la génesis semiótica.

Asimismo, las características de f (referencial) determinadas en las acciones anteriores (dominio, monotonía, comportamiento asintótico y puntos de paso) permiten encontrar una curva que cumpla con estas condiciones (prueba) y en consecuencia la representación gráfica de f, lo que indica la activación de la génesis discursiva.

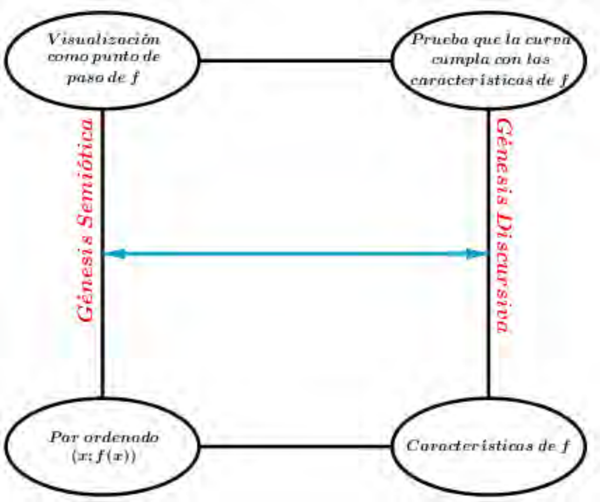


Figura 31. Acción matemática 7 y 8

En las acciones matemáticas 7 y 8 (ver figura 31) se evidencia el trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica y discursiva.

Episodio 4: Justificación de la asíntota de f

El valor del parámetro (1) de la regla de correspondencia de f (referencial) permite a la estudiante justificar que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$.

Figura 32. Acción matemática 9

En la acción matemática 9 (ver figura 32) se evidencia activación de la génesis discursiva.

Episodio 5: Justificación del rango de f

La representación gráfica de f (representamen) permite reconocer los valores que toman las imágenes de x (visualización) y, en consecuencia, el rango de f.

Figura 33. Acción matemática 10

La figura 33 que muestra la acción matemática 10 evidencia la activación de la génesis semiótica.

Episodio 6: Justificación de los interceptos de f

La representación gráfica de f o su rango permite justificar que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas, lo que explica la activación de la génesis discursiva.

Posteriormente, el punto de paso (0,2) obtenido de su representación tabular y/o gráfica (representamen) se identifica como el intercepto con el eje de ordenada (visualización). Lo que corrobora la activación de la génesis semiótica.

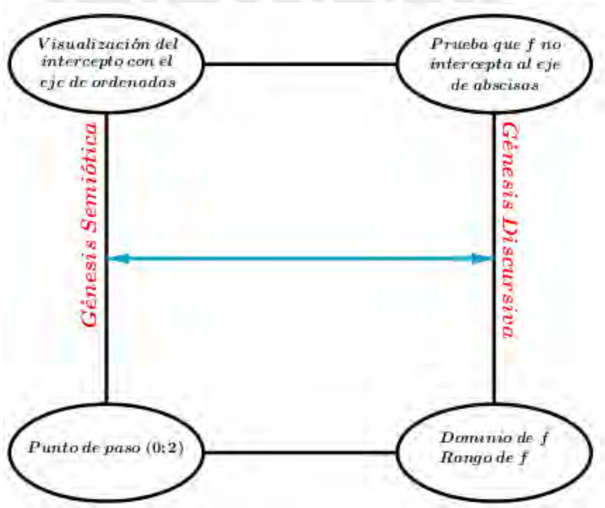


Figura 34. Acción matemática 11 y 12

En las acciones matemáticas 11 y 12 (ver figura 34) se evidencia que un trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica y discursiva.

A continuación, se presenta el análisis del trabajo matemático del estudiante Guido.

Análisis del trabajo matemático de Guido

En el análisis del trabajo matemático de Guido (pregunta 1) se identificaron ocho acciones agrupadas en cinco episodios (ver tabla 3).

Tabla 10. *Organización de las acciones matemáticas de Guido*

Episodios	N° de acciones
1. Representación tabular de f	1
2. Representación gráfica de f	3
3. Justificación de la asíntota de f	1
4. Justificación del rango de f	1
5. Justificación de los interceptos de f	2

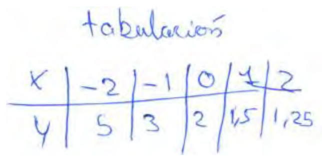
A continuación, se analizan las acciones en sus respectivos episodios.

Etapa 1: Análisis descendente del trabajo matemático de Guido

En esta parte identificamos el trabajo matemático del estudiante Guido por medio de sus acciones al momento que desarrolló la pregunta 1. Posteriormente, estas acciones serán interpretadas con base en la teoría del ETM. La tabla 6 muestra cómo se llevó a cabo el análisis. En la primera columna se encuentran las acciones del estudiante~~,~~ registradas en su producción escrita. La segunda columna corresponde a la interpretación de cada una de estas acciones en términos de la teoría del ETM.

En el episodio 1 (ver tabla 11), el estudiante realiza la representación tabular de f a través de una acción.

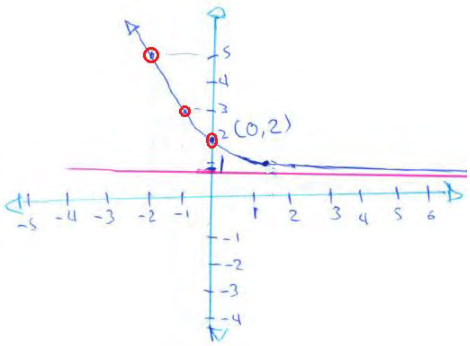
Tabla 11. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 1 (episodio 1)*

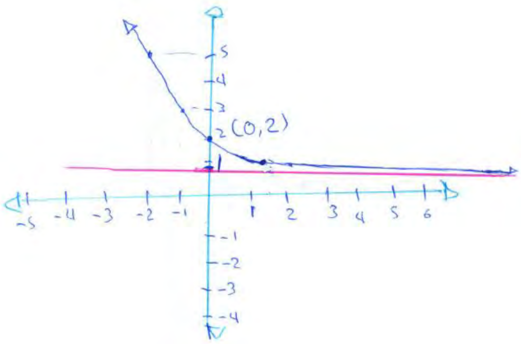
	Acciones matemáticas identificables de Guido	Interpretación de estas acciones en términos del ETM
Episodio 1: Representación tabular	**Acción 1.** Elabora una tabla que contiene valores parciales para f. 	**(Ins)** La regla de correspondencia de f es empleada como un ***artefacto*** simbólico y se realiza un proceso de ***construcción*** al obtener tabla de valores parciales para f. Se comprueba la activación de la ***génesis instrumental***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 2 (ver tabla 12), el estudiante realiza la representación gráfica de f a través de tres acciones.

Tabla 12. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 1 (episodio 2)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	Interpretación de estas acciones en términos del ETM
Episodio 2: Representación gráfica de f	**Acción 2.** Representa gráficamente la asíntota de f. 	**(Sem)** El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al representar gráficamente la asíntota de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.
	Acción 3. Representa gráficamente los puntos de paso de f. 	**[Sem↔Dis]** Cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ obtenida de la representación tabular de f es utilizada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como un punto de paso la representación gráfica de f. Se confirma la activación de la ***génesis semiótica***.

	Acción 4. Realiza el esbozo de una curva que constituye la representación gráfica de f. 	Las características de f (dominio, comportamiento asintótico y puntos de paso) son empleadas como ***referencial*** y se realiza una ***prueba*** de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que cumpla con estas condiciones y en consecuencia sea la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 3 (ver tabla 13), el estudiante realiza la justificación de la asíntota de f a través de una acción.

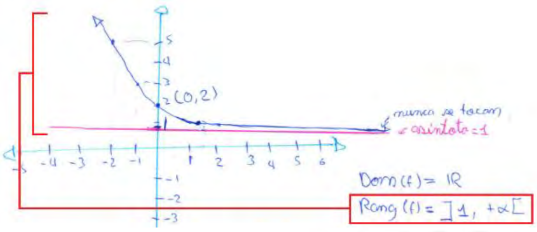
Tabla 13. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 1 (episodio 3)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**
Episodio 3: Justificación de la asíntota de f	**Acción 5.** Justifica que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. 	**(Dis)** El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usado como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 4 (ver tabla 14), el estudiante realiza la justificación del rango de f a través de una acción.

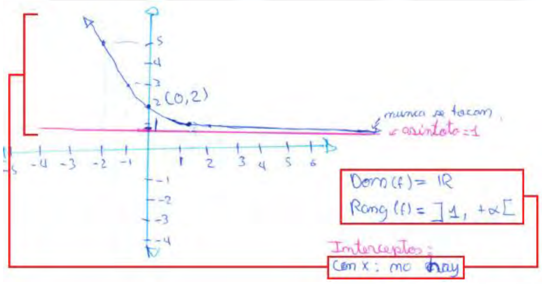
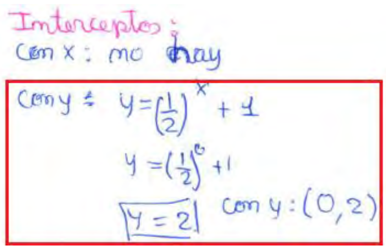
Tabla 14. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 1 (episodio 4)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	Interpretación de estas acciones en términos del ETM
Episodio 4: Justificación del rango de f	**Acción 6.** Determina el rango de f. 	**(Sem)** La representación gráfica de f es utilizada como ***representamen*** y realiza un proceso de ***visualización*** al reconocer los valores que toman las imágenes de x y en consecuencia, el rango de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 5 (ver tabla 15), el estudiante realiza la justificación de los interceptos de f a través de dos acciones.

Tabla 15. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 1 (episodio 5)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	Interpretación de estas acciones en términos del ETM
Episodio 5: Justificación de los interceptos de f	**Acción 7.** Determina que f no tiene intercepto con el eje de abscisas. 	**[Ins↔Dis]** La representación gráfica de f o su rango es empleada como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.
	Acción 8. Determina el intercepto de f con el eje de ordenadas. 	La regla de correspondencia de f es usada como ***artefacto*** simbólico y realiza un proceso de ***construcción*** al obtener la imagen de $x = 0$. Lo que muestra la activación de la ***génesis instrumental***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

Luego, el proceso ejecutado por el estudiante es un trabajo matemático que se sitúa en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Por otro lado, a pesar que Guido no determinó la monotonía de la función, la representación gráfica que obtuvo es correcta porque a partir de la regla de correspondencia de f identificó su comportamiento asintótico y elaboró la construcción de algunos puntos de paso tomando en cuenta los valores del dominio de f, para esbozar una curva que cumplan con esas condiciones.

Se reafirma entonces que el trabajo matemático de Guido se encuentra en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) y se concluye que el desarrollo presentado por el estudiante coincide con el desarrollo esperado a pesar de que dentro de sus acciones no consideró el comportamiento asintótico de la función.

Etapa 2: Análisis ascendente del trabajo matemático de Guido

En esta parte, con base en el análisis descendente y con el apoyo del diagrama del ETM, se analiza en la segunda etapa el análisis ascendente de todas las acciones en los episodios correspondientes.

Episodio 1: Construcción de los puntos de paso de f

La regla de correspondencia de f (artefacto) permite obtener tabla de valores parciales para f (construcción).

Figura 35. Acción matemática 1

En la acción matemática 1, que se observa en la figura 35, se evidencia la activación de la génesis instrumental.

Episodio 2: Representación gráfica de f

El parámetro de valor 1 de la regla de correspondencia de f (representamen) permite representar gráficamente la asíntota de f (visualización).

Figura 36. Acción matemática 2

En la figura 36 se presenta la acción matemática 2 que indica la activación de la génesis semiótica. Porque cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ obtenido de la representación tabular de f (representamen) se identifica como un punto de paso la representación gráfica de f (visualización).

Asimismo, las características de f (referencial) determinadas en las acciones anteriores (dominio, monotonía, comportamiento asintótico y puntos de paso) permiten encontrar una curva que cumpla con estas condiciones (prueba) y en consecuencia, la representación gráfica de f lo que evidencia la activación de la génesis discursiva.

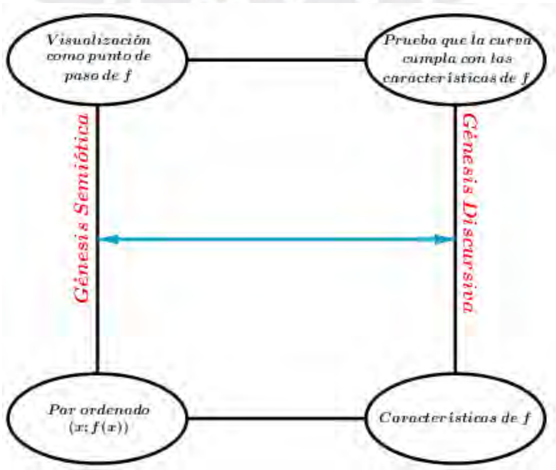


Figura 37. Acción matemática 3 y 4

En las acciones matemáticas 3 y 4 (ver figura 37) se muestra que un trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica y discursiva.

Episodio 3: Justificación de la asíntota de f

El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f (referencial) permite justificar que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$ (prueba).

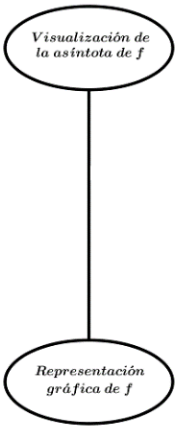


Figura 38. Acción matemática 5

En la acción matemática 5 (ver figura 38) se comprueba la activación de la génesis discursiva.

Episodio 4: Justificación del rango de f

La representación gráfica de f (representamen) permite reconocer los valores que toman las imágenes de x y en consecuencia, el rango de f (visualización).

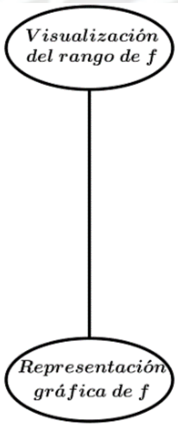


Figura 39. Acción matemática 6

En la acción matemática 6, que se presenta en la figura 39, se evidencia la activación de la génesis semiótica.

Episodio 5: Justificación de los interceptos de f

La representación gráfica de f o su rango (referencial) permite justificar que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas (prueba).

Por consiguiente, la regla de correspondencia de f (artefacto) permite obtener la imagen de $x = 0$ (construcción).

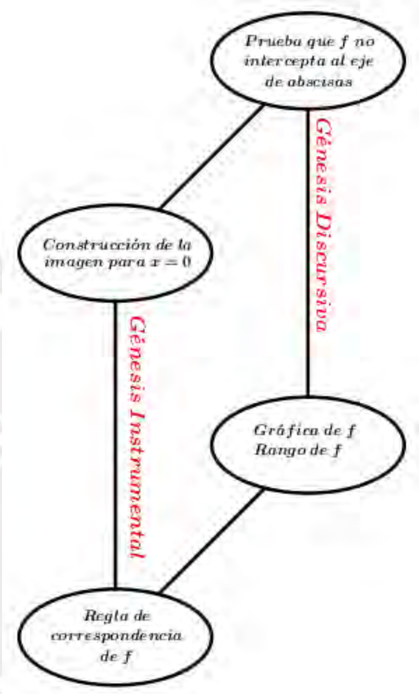


Figura 40. Acción matemática 7 y 8

En la figura 40 se presentan las acciones matemáticas 7 y 8 que indican un trabajo simultáneo y dinámico entre las génesis instrumental y discursiva.

Pregunta 2

La pregunta 2 (figura 41) tiene como propósito principal que los estudiantes determinen la representación algebraica de la función exponencial f a partir de su representación gráfica.

Pregunta 2

Determine la regla de correspondencia de la función f que tiene la forma $f(x) = Ca^x$, cuya representación gráfica se muestra a continuación:

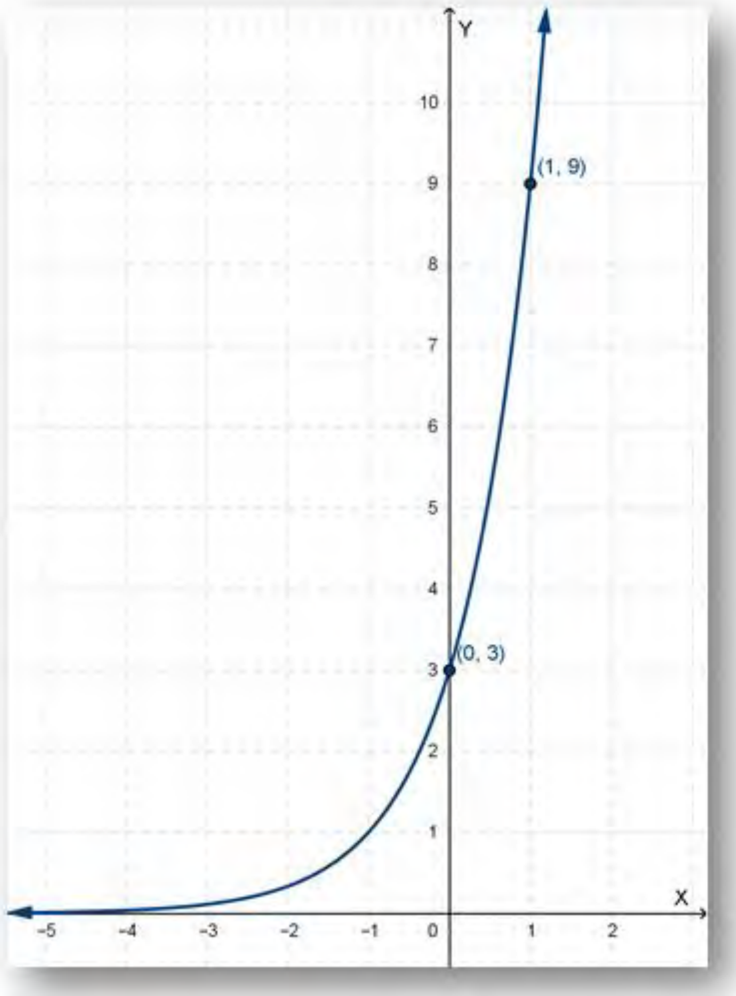


Figura 41. Pregunta 2 de la tarea

El análisis de la producción esperada para esta pregunta es mostrado a continuación:

Análisis de la producción esperada

Este análisis contiene el trabajo matemático que se espera a partir de las acciones que los estudiantes desplieguen con el propósito de obtener la representación algebraica de una función exponencial f.

Se espera que los estudiantes identifiquen que y es la imagen de x, mediante la función f, al momento de emplear la regla de relación $y = f(x)$. En términos del ETM, se espera que los estudiantes activen como referencial la regla de relación $y = f(x)$.

También, se espera que los estudiantes identifiquen los puntos $(0;3)$ y $(1;9)$ representados en el sistema de coordenadas como puntos de paso de la representación gráfica de f de la forma $\big(x; f(x)\big)$. En términos del ETM, se espera que los estudiantes tomen como representamen los puntos $(0;3)$ y $(1;9)$, y realicen un proceso de visualización al reconocerlos como los puntos de la forma $(x;y)$ que cumplen la regla de relación $y = f(x)$. Por lo anterior se afirma que se podría activar la génesis semiótica.

Posteriormente, se espera que los estudiantes utilicen el punto de paso $(0;3)$ para obtener el valor del parámetro C a través de la resolución de la ecuación $f(0) = 3$:

$$f(0) = 3 \;\; \Rightarrow \;\; Ca^0 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; C \cdot 1 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; C = 3$$

En términos del ETM, los estudiantes podrían tomar como artefacto simbólico la regla de correspondencia de f para realizar un proceso de construcción que les permita obtener el valor del parámetro C.

Los estudiantes también podrían emplear el punto de paso $(0;3)$ para identificarlo como el intercepto de f con el eje de ordenadas y asociarlo al valor del parámetro C. En términos del ETM, se espera que los estudiantes tomen como representamen el punto de paso $(0;3)$ y realicen un proceso de visualización para obtener el valor del parámetro C.

A continuación, se espera que los estudiantes incorporen el valor del parámetro C en la regla de correspondencia de la función:

$$f(x) = 3a^x$$

En términos del ETM, los estudiantes podrían tomar como referencial a la regla de correspondencia y realizar una prueba del tipo pragmática al reemplazar el valor de $C = 3$.

De igual manera, se espera que utilicen el punto de paso $(1; 9)$ para obtener el valor del parámetro a a través de la resolución de la ecuación $f(1) = 9$:

$$f(1) = 9 \quad \Rightarrow \quad 3a^1 = 9 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot a = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

En términos del ETM, se cree que los estudiantes podrían tomar como artefacto simbólico la regla de correspondencia de f para realizar un proceso de construcción que les permita obtener el valor del parámetro a.

Finalmente, la expectativa es que los estudiantes incorporen el valor del parámetro a en la regla de correspondencia de f:

$$f(x) = 3 \cdot 3^x$$

En términos del ETM, podrían utilizar como referencial a la regla de correspondencia y realicen una prueba del tipo pragmática al reemplazar el valor de $a = 3$.

Análisis del trabajo matemático de los estudiantes

En seguida, se presenta el análisis del trabajo matemático que los estudiantes, Angélica y Guido, desarrollaron a partir de la pregunta planteada. En base a estos desarrollos, se establecen los paradigmas que ellos privilegian.

Análisis de del trabajo matemático de Angélica

Para el análisis del trabajo matemático de Angélica (pregunta 2) se identificaron cuatro acciones, que están agrupadas en dos episodios (ver tabla 16).

Tabla 16. *Organización de las acciones matemáticas de Angélica*

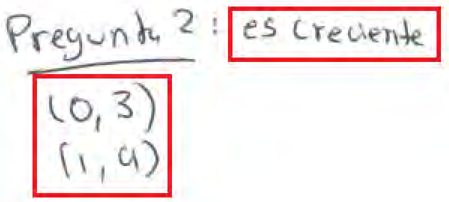
Episodios	N° de acciones
1. Identificación de las características de f	1
2. Determinación del valor de los parámetros C y a	3

A continuación, se analizan las acciones en sus respectivos episodios.

Etapa 1: Análisis descendente del trabajo matemático de Angélica

En el episodio 1 (ver tabla 17), la estudiante realiza la identificación de las características de f a través de una acción.

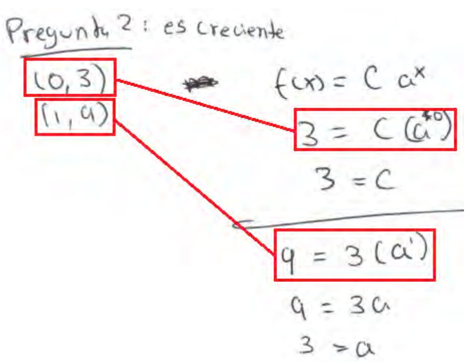
Tabla 17. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 2 (episodio 1)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**
Episodio 1: Identificación de las	**Acción 1.** Identifica las características de f. 	**(Sem)** La representación gráfica de f es empleada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificar la monotonía de f y dos de sus puntos de paso. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 2 (ver tabla 18), la estudiante determina el valor de los parámetros de f a través de tres acciones.

Tabla 18. *Identificación e interpretación de las acciones de Angélica para la pregunta 2 (episodio 2)*

	Acciones matemáticas identificables de Angélica	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**
Episodio 2: Determinación del valor de los parámetros C y a	**Acción 2.** Escribe la regla de correspondencia de f. 	**Ref** La representación algebraica de f es usada como ***referencial***.
	Acción 3. Reemplaza las coordenadas del punto de paso de f en su regla de correspondencia. 	**[Sem↔Ins]** Cada punto de paso $(x; y)$ de f es utilizado como ***representamen*** y realiza un proceso de ***visualización*** al asociar sus componentes, mediante la relación $y = f(x)$. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

	Acción 4. Determina el valor de los parámetros C y a. $f(x) = C\,a^{x}$ $3 = C(a^{0})$ $\boxed{3 = C}$ $9 = 3(a^{1})$ $9 = 3a$ $\boxed{3 = a}$	La regla de correspondencia de f es empleada como ***artefacto*** simbólico y se realiza un proceso de ***construcción*** al determinar el valor del parámetro. Lo que muestra la activación de la ***génesis instrumental***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

El trabajo matemático de Angélica está constituido por cuatro acciones, estas acciones se agrupan en dos episodios.

Por lo tanto, el proceso realizado por la estudiante es consistente con el trabajo matemático en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Por otro lado, la regla de correspondencia que elaboró Angélica es correcta porque a partir del enunciado y la representación gráfica de f identificó los elementos necesarios (modelo matemático y puntos de paso), para determinar el valor de los parámetros que cumplan con esas condiciones.

Se reafirma entonces que el trabajo matemático de Angélica se encuentra en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) y se concluye que el desarrollo presentado por la estudiante coincide plenamente con el desarrollo esperado.

Etapa 2: Análisis ascendente del trabajo matemático de Angélica

Con base en el análisis descendente y el diagrama del ETM, se analiza en la segunda etapa, el análisis ascendente de todas las acciones en los episodios correspondientes.

Episodio 1: Identificación de las características de f

La representación gráfica de f (representamen) permite identificar la monotonía de f y dos de sus puntos de paso (visualización).

Figura 42. Acción matemática 1

En la acción matemática 1, que se presenta en la figura 42, se evidencia la activación de la génesis semiótica.

Episodio 2: Determinación de la regla de correspondencia f

El punto de paso $(x; y)$ de f (representamen) permite asociar sus componentes, mediante la relación $y = f(x)$ (visualización).

Por consiguiente, la regla de correspondencia de f (artefacto) permite determinar el valor del parámetro (construcción).

Figura 43. Acción matemática

En la figura 34 se muestran las acciones matemáticas 2, 3 y 4 que evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental.

Del mismo modo, se presenta el análisis del trabajo matemático del estudiante Guido para esta misma pregunta.

Análisis del trabajo matemático de Guido

Para el análisis del trabajo matemático de Guido (pregunta 2) se identificaron seis acciones, que están agrupadas en dos episodios (ver tabla 19).

Tabla 19. *Organización de las acciones matemáticas de Guido*

Episodios	N° de acciones
1. Determinación del valor del parámetro C	3
2. Determinación del valor del parámetro a	3

A continuación, se analizan las acciones en sus respectivos episodios.

Etapa 1: Análisis descendente del trabajo matemático de Guido

En el episodio 1 (ver tabla 20), el estudiante determina el valor del parámetro C por medio de tres acciones.

Tabla 20. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 2 (episodio 1)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	Interpretación de estas acciones en términos del ETM	
Episodio 1: Determinación del valor del parámetro C	**Acción 1.** Escribe la regla de correspondencia de f. $f(x) = Ca^x$	**Ref**	La representación algebraica de f es empleada como ***referencial***.
	Acción 2. Identifica la asíntota de f. la asintota es cero	**(Sem)**	El valor del término independiente de $f\ (0)$ es usado como ***representamen*** y realiza un proceso de ***visualización*** al identificar la asíntota con ecuación $y = 0$. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

	Acción 3. Determina el valor del parámetro C. C = al corte con y (0, 3) pues la asíntota es cero C = 3	**[Sem↔Dis]**	La representación gráfica de f es utilizada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificar su intercepto con el eje de ordenadas. Lo que muestra la activación de la ***génesis semiótica***. La regla de correspondencia f es empleada como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar la asociación entre el valor del parámetro C con la ordenada del punto de paso $(0; 3)$. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

En el episodio 2 (ver tabla 21), el estudiante determina el valor del parámetro a a través de tres acciones.

Tabla 21. *Identificación e interpretación de las acciones de Guido para la pregunta 2 (episodio 2)*

	Acciones matemáticas identificables de Guido	**Interpretación de estas acciones en términos del ETM**	
Episodio 2: Determinación del valor del parámetro a	**Acción 4.** Escribe la regla de correspondencia de f. $f(x) = 3(a)^{(x)}$	**Ref** ↓	La representación algebraica de f es usada como ***referencial***.
	Acción 5. Reemplaza las coordenadas del punto de paso de f en su regla de correspondencia. Remplazar en el punto (1, 9)	**[Sem↔Ins]**	El punto de paso $(1; 9)$ de f es utilizado como ***representamen*** y realiza un proceso de ***visualización*** al asociar sus componentes, mediante la relación $f(1) = 9$. Se confirma la activación de la ***génesis semiótica***.

	Acción 6. Determina el valor del parámetro a. $9 = \cancel{3}\, a^1$ $\boxed{3 = a^1}$	La regla de correspondencia de f es empleada como ***artefacto*** simbólico y se realiza un proceso de ***construcción*** al determinar el valor del parámetro a. Lo que muestra la activación de la ***génesis instrumental***.

Fuente: adaptada de Kuzniak y Nechache (2018)

El trabajo matemático de Guido está constituido por seis acciones, estas acciones se agrupan en un solo episodio.

Por lo tanto, el proceso realizado por el estudiante es consistente con el trabajo matemático en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Por otro lado, la regla de correspondencia que determinó Guido es correcta porque a partir del enunciado y la representación gráfica de f identificó los elementos necesarios (modelo matemático y puntos de paso), para determinar el valor de los parámetros que cumplan con esas condiciones.

Se reafirma entonces que el trabajo matemático de Guido se encuentra en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) y se concluye que el desarrollo presentado por el estudiante coincide con el desarrollo esperado, mostrando acciones diferentes para determinar el valor de cada parámetro.

Etapa 2: Análisis ascendente del trabajo matemático de Guido

Con base en el análisis descendente y del diagrama del ETM, se analiza en la segunda etapa el análisis ascendente de todas las acciones en los episodios correspondientes.

Episodio 1: Determinación del valor del parámetro C

El valor del término independiente de f (representamen) permite identificar la asíntota con ecuación $y = 0$.

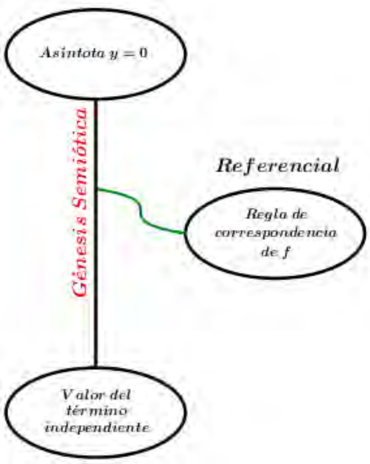


Figura 44. Acción matemática 1 y 2

En las acciones matemáticas 1 y 2, que se muestran en la figura 44, se prueba que el referencial (regla de correspondencia de f) activa la génesis semiótica. Luego, la representación gráfica de f (representamen) permite identificar su intercepto con el eje de ordenadas (visualización).

También, la regla de correspondencia f (referencial) permite justificar la asociación entre el valor del parámetro C con la ordenada del punto de paso $(0; 3)$ (prueba).

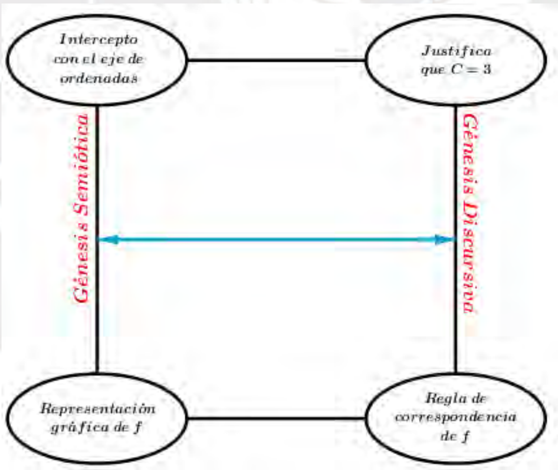


Figura 45. Acción matemática

Las acciones matemáticas 3 y 4, en la figura 45, evidencian la activación de las génesis semiótica y discursiva.

Episodio 2: Determinación del valor del parámetro a

El punto de paso $(1; 9)$ de f (representamen) permite asociar sus componentes, mediante la relación $f(1) = 9$ (visualización).

De esta manera, la regla de correspondencia de f (artefacto) permite determinar el valor del parámetro (construcción).

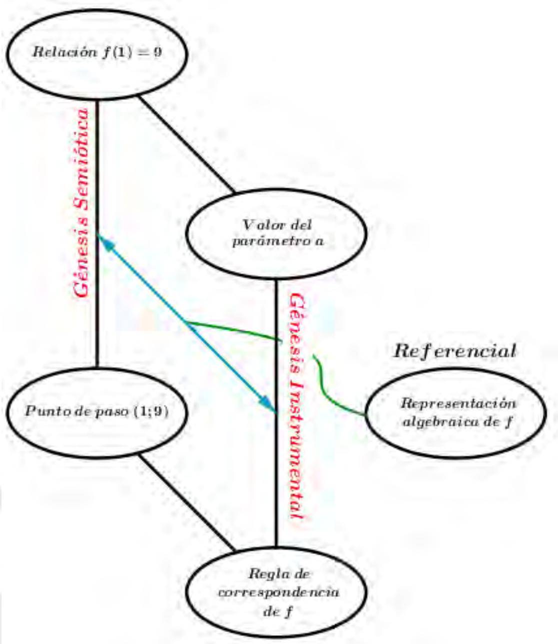


Figura 46. Acción matemática

En las acciones matemáticas 4, 5 y 6 que se presentan en el diagrama del ETM de la figura 46, se evidencia que el referencial (representación algebraica de f) activa un trabajo matemático simultáneo y dinámico entre las génesis semiótica e instrumental.

Por último, se presenta una síntesis del análisis con relación a las dos preguntas de la tarea.

Síntesis del análisis

En el análisis de la producción escrita para el desarrollo de la pregunta 1 se puede observar que las acciones matemáticas de Angélica y Guido coinciden con la producción esperada. Las acciones de estos estudiantes permitieron identificar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, algunas de ellas impulsadas por un referencial. Consecuentemente, estas acciones permitieron reconocer la activación de los planos verticales [Sem-Ins], [Sem-Dis] e [Ins-Dis], siendo la activación del plano [Sem-Ins] más frecuente entre los episodios. En la producción escrita de ambos estudiantes se observa también que privilegian al paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG).

Con respecto a la pregunta 2, las acciones matemáticas de Angélica y Guido coinciden plenamente con la producción esperada. Las acciones de estos estudiantes activaron las génesis semiótica, instrumental y discursiva, en algunos episodios estas activaciones son impulsadas por un referencial. Posteriormente, estas acciones favorecieron el reconocimiento de la activación de los planos verticales [Sem-Ins] y [Sem-Dis]. En la producción escrita de ambos estudiantes se observa también que privilegian al paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG).

CONCLUSIONES

La sección que a continuación se presenta está constituida en dos partes. Comenzaremos haciendo referencia a las conclusiones generales, y posteriormente daremos algunas perspectivas para futuras investigaciones.

Conclusiones generales

Se presentan las conclusiones generales, las cuales están organizadas en función al objetivo general planteado y al marco teórico del ETM.

Con relación al objetivo general: "*Analizar el Trabajo Matemático de estudiantes de carreras de humanidades al resolver tareas sobre función exponencial*". Para alcanzar dicho propósito es preciso orientar nuestras conclusiones en dirección a los dos objetivos específicos: *"Identificar las génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes al desarrollar una tarea sobre función exponencial" y "Reconocer los planos verticales y los paradigmas del Análisis que los estudiantes privilegian al desarrollar una tarea sobre función exponencial"*.

Primer objetivo específico

Este objetivo fue alcanzado, pues los estudiantes contaron con un material del curso que les proporciona una definición de función exponencial que resalta sus características, acompañada de ejemplos y tareas que promueven la activación de la génesis semiótica, instrumental y discursiva.

En lo referente al trabajo matemático de los estudiantes, hemos reconocido que las génesis activadas con mayor frecuencia son la semiótica y la instrumental, sin embargo, cabe resaltar que en algunos casos su activación se originó a través del referencial, componente del plano epistemológico.

Segundo objetivo específico

Con relación a este objetivo específico, también fue alcanzado porque se ha señalado que los planos verticales que son activados de manera más recurrente corresponden al [Sem-Ins] y [Sem-Dis], no obstante, el plano vertical [Sem-Dis] tiene una prevalencia dentro de la pregunta 1.

Por otro lado, si bien es cierto que el trabajo matemático de los estudiantes en un determinado paradigma está influenciado por el profesor, la prioridad de elegir entre en los paradigmas Análisis Aritmético-Geométrico (AG) o Análisis Calculatorio (AC) depende exclusivamente del trabajo matemático del estudiante.

De este modo, las acciones de los estudiantes, analizadas en cada episodio, se enmarcan esencialmente en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Sin embargo, algunas de estas acciones también posicionan en el paradigma Análisis Calculatorio (AC).

Por todo lo anterior, se puede afirmar que se ha alcanzado el objetivo general de la tesis y en consecuencia se ha respondido a la pregunta de investigación.

Importancia del ETM

Por otro lado, consideramos que este trabajo de investigación es un aporte al marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático, particularmente al ETM que se enmarca en el dominio del Análisis. Esto a través de un estudio del ETM personal del estudiante que nos permitió establecer diferencias entre ellos en función a las activaciones de las génesis y planos verticales que evidenciaron sus acciones.

Asimismo, podemos afirmar que la caracterización del dominio del Análisis en relación a la función exponencial ha sido provista de ciertos elementos. Dicha caracterización no solo comprende el comportamiento asintótico y la monotonía de la función exponencial, sino que también se manifiesta en la aplicación de las herramientas teóricas y operatorias necesarias para la justificación de los cálculos que permitan realizar su representación gráfica.

Perspectivas para futuras investigaciones

En relación a los alcances en investigaciones futuras, consideramos que esta investigación podría ser un punto de partida para analizar los demás tipos de ETM. En ese sentido, sería importante analizar el trabajo matemático del profesor para conocer en qué medida su experiencia matemática que adquirió en su etapa de estudiante condiciona su ETM en el proceso de enseñanza de la función exponencial. Del mismo modo, el análisis del ETM idóneo, el cual consiste en el tratamiento que el profesor le da al proceso de enseñanza con el objetivo de impulsar el trabajo matemático por parte de los estudiantes, permitiría conocer como la resolución de una tarea sobre función exponencial se puede organizar para permitir a un estudiante comprometerse con ella. Finalmente, también sería importante analizar ETM de referencia de una comunidad de individuos para conocer como un paradigma se establece de tal manera que englobe desde los conceptos, temáticas y herramientas hasta la forma de pensar en relación a la función exponencial.

REFERENCIAS

Álvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponencial y logarítmica, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira* (tesis de maestría). Recuperado de: http://hdl.handle.net/11059/8295

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em educação matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG.* Recuperado de: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf

Boyer, C. & Merzbach, U. (2011). A history of mathematics. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Brucki, C. (2011). *O uso de Modelagem no ensino de função exponencial* (tesis de maestría) Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10900

Freitas, R. (2015). *A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura: Um estudo da função exponencial* (tesis de maestría). Recuperado de https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11041

García-Cuéllar, D. y Martínez, M. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación, 14*(2), 252-261. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200010&lng=es&tlng=es

Javaroni, S., Dos Santos, S., y Borba, M. (2011). Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. *Educação Matemática e Pesquisa, 13*(1), 197-218. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4525

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24. Recuperado de : https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime, 17*(4), 9–10. doi: https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Montoya, E., y Vivier, L. (mayo de 2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. En C. Nucamendi (Presidencia). Conferencia llevada a cabo en el XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1497/722

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics-Education, 48*, 861-874. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Nechache, A. (Diciembre de 2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Vivier, L., Mena, J., Mena, A. y Montoya, E. (Julio de 2016). Conectar los ETM del análisis: el caso de la función exponencial. En K. Nikolantonakis (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Quinto Simposio Internacional ETM, Florina, Grecia.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721–737. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Kuzniak, A, Masselin, B., Nechache, A. & Vivier, L. (2020). Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie. In Regards Croisés Sur Le Travail Mathématique. En *Contexte Éducatif*. Recuperado de: http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS20001.pdf

Lima, E. (2004). *Análise real*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides.

Montoya, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. En *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739-754. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Rossini, C. (2006). *Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias* (tesis de doctorado). Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11099

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2014). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* México: Cengage Learning.

Sureda, P. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática, 25*(2), 89-118. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40528961005

Vandebrouck, F. (Ed.). (2013). Mathematics classrooms students' activities and teachers practices. Rotterdam: Sense Publishers. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5

ANEXOS

Anexo 1

Tarea

Apellidos y nombres: ____

Código: ______________

Nota: Toda respuesta dada debe mostrar el proceso (preguntas que implican cálculos) para justificar su respuesta.

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados**.**

Pregunta 2

Determine la regla de correspondencia de la función f que tiene la forma $f(x) = Ca^x$, cuya representación gráfica se muestra a continuación: