PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

Resultados del modelo de Black-Litterman comparados con los del modelo de Markowitz para el portafolio de las AFPs para el periodo 2007-2019

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE BACHILLER EN CIENCIAS SOCIALES CON MENCIÓN EN ECONOMÍA

AUTOR
Yovera Avalos, Rodrigo Alonsso

ASESOR
Bringas Arbocco, Allan Paul

2019

Resumen

En el presente estudio se evalúan los resultados de la estrategia de inversión de los fondos de pensiones (AFP) en el Perú teniendo como marco temporal el periodo comprendido entre 2007 y 2019. De modo tal que se pueda proveer evidencia de que los resultados que se obtendrían serían en cuestión de retornos serían mayores en los fondos de pensiones si es que se hubiese aplicado el modelo de Black-Litterman a las carteras que mantienen las mismas. Para ello, se analizan los portafolios que se mantienen a nivel sistema en los fondos 1,2 y 3 de modo tal que se pueda conocer la distribución de los activos que presentan las carteras de dichos fondos, que se pueda saber cuál sería el efecto a nivel sistémico de la implementación del modelo de Black-Litterman y poder comparar los resultados hallados con los que se obtienen del modelo de la aplicación Markowitz. Asimismo, se complementa la visión de Black-Litterman con las extensiones metodológicas de los autores Thomas Idzorek y los autores Atillio Meucci y Gianluca Fusai con respecto a las expectativas de los inversionistas. Siendo de esta manera el modo por el cual se planea hallar el grado de aumento en la rentabilidad de los portafolios de las AFP’s para el periodo de investigación planteado.

Palabras Clave: modelo black-litterman, modelo markowitz, carteras AFP’s, mejora rentabilidad, expectativas inversionistas.

Índice

Índice de Gráficos

1. Introducción

La optimización de la rentabilidad de los portafolios de inversión es un tema primordial para la toma de decisiones sobre la adecuada asignación de los activos y riesgos del mismo. En este sentido, la teoría moderna del portafolio de Markowitz (1952) ha sido la más ampliamente usada por los inversionistas y administradores de activos, ya que ha permitido a estos agentes poder alcanzar portafolios de inversión que cuenten con niveles de rentabilidad deseados sin estar sujetos a niveles muy elevados de riesgo.

Sin embargo, existen enfoques alternativos al planteamiento de Markowitz que poseen características ventajosas que otorgan flexibilidad al portafolio mismo e incluso proveen la oportunidad de obtener mejores retornos que los provistos por el modelo convencional del autor antes mencionado. Es así que en la presente investigación se analizará el modelo de Black-Litterman (1991), el cual tiene como una de sus principales diferencias la incorporación de las expectativas del inversor sobre los activos que forman parte del problema de optimización y su potencial actualización inmediata dado un cambio en la confianza del administrador del portafolio permitiendo que se reasignen los pesos a los activos dentro del mismo. Asimismo, se tomará al modelo de Markowitz como un punto de referencia para el modelamiento del modelo de Black-Litterman.

Los resultados del presente análisis se contrastarán con los resultados obtenidos por los portafolios manejados por las AFP’s los cuales están clasificados por fondos siendo en total cuatro y teniendo como diferencia el grado de riesgo que cuentan, aunque no se tomará en cuenta el Fondo 0 al ser únicamente considerado para personas en proceso de jubilación. Para ello, se emplearán las bases de datos provistas por la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP. en relación a las rentabilidades reales que consiguieron a partir del año 1995 en el caso del Fondo 2 y del 2006 en el caso de los Fondos 1 y 3, ya que se cuenta con información de estos dos últimos solo a partir de aquel año.

Asimismo, en el análisis se incorporará la metodología de confianza en las expectativas de Idzorek (2004) y el contraste de Fusai-Meucci (2004) sobre la consistencia que tienen estas expectativas de los inversionistas. El motivo principal de la incorporación de estas herramientas conceptuales es que enriquecen el modelo al otorgarle un grado mayor de flexibilidad a las proyecciones esperadas de los valores de los activos que tienen los agentes y la capacidad de redistribuir los pesos dado un cambio en la confianza de estos últimos.

Es así que la siguiente investigación tiene como objetivo central el responder a la pregunta de que tanto el uso del modelo de Black-Litterman podría haber mejorado el rendimiento de los portafolios de inversión de las AFP's durante el periodo 2007-2019. Por lo que se planea contrastar los resultados generados de la aplicación tanto del modelo de Markowitz como el modelo de Black-Litterman añadido con las metodologías de Idzorek y Fusai-Meucci de modo tal que se pueda distinguir de manera clara cuál es el modelo que convendría emplear en el problema de maximización de la rentabilidad de los portafolios de inversión que manejan las Asociaciones de Fondos de Pensiones y visualizar si esta implementación mejoraría los niveles actuales de rentabilidad que poseen estas entidades.

2. Marco Teórico

En la presente sección se examinarán los conceptos generales fundamentales requeridos para poder entender de forma apropiada el modelo que se quiere plantear para las AFP’s. Para empezar, se describirá al modelo con el cual se pretende contrastar al modelo anteriormente mencionado; es decir, el modelo de Markowitz. Luego, se explicarán las metodologías de Idzored y la de Fusai-Meucci y las implicancias que tienen dentro del problema de optimización haciendo énfasis en sus principales contribuciones a resolver el problema. Por último, se detallará el modelo de Black-Litterman precisando las ventajas que tiene en relación al modelo inicial y los resultados teóricos que se esperan de la aplicación de este enfoque.

2.1 La teoría moderna del portafolio

Esta teoría surgió a mediados de los años 50’s debido, principalmente, a los aportes de Harry Markowitz (1952) para luego ser profundizada por autores como James Tobin (1958) y William Sharpe (1964) a modelos ya conocidos como el CAPM. En este sentido, la idea principal era plantear un ejercicio de optimización que maximice la rentabilidad para un nivel determinado de riesgo máximo o, en contrapartida, un nivel mínimo de riesgo para una rentabilidad mínima esperada. Es decir, el modelo de Markowitz es un modelo cuyo objetivo consiste en encontrar la cartera de inversión óptima para cada inversor en términos de rentabilidad y riesgo realizando una adecuada elección de los activos que componen dicha cartera.

Para este propósito se plantea la función de minimización del riesgo sujeto a la rentabilidad esperada de la siguiente manera:

$$Min\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i * x_j\sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i * E(R_i) = V^*$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0(i = 1,2, \ldots.; n)$$

Donde n es el número de activos totales del portafolio; x_i es la fracción del presupuesto del inversionista destinado para el activo i y corresponde con la variable del modelo de optimización; $\sigma^2(R_p)$ es la varianza del rendimiento del portafolio; R_p es la variable que denota el rendimiento del portafolio; $E(R_i)$ es el rendimiento esperado del activo i; σ_{ij} es la covarianza de los rendimientos de los activos i y j y σ^2 es la varianza máxima aceptable.

En este sentido, las combinaciones de rentabilidad-riesgo de las carteras que cumplan con la optimización serán denominadas carteras eficientes y estarán dentro de la "frontera eficiente", por lo que, dada esta cartera, el inversionista elegirá su cartera óptima de acuerdo con sus preferencias.

Es así que el principal aporte del modelo de Markowitz radica en su capacidad de poder recoger los aspectos esenciales que deberían de guiar las decisiones de un inversionista racional en su búsqueda por el portafolio óptimo de modo tal que pueda minimizar el riesgo o maximizar la rentabilidad.

Teorema de Bayes:

Esta sección proporciona una visión general rápida de la parte relevante de la teoría de Bayes para crear un vocabulario común que puede usarse para analizar el modelo Black-Litterman desde un punto bayesiano de vista. La teoría de Bayes afirma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

En donde:

- P (A | B): La probabilidad condicional (o conjunta) de A, dada B También conocida como la posterior distribución.

- P (B | A): La probabilidad condicional de B dado A. También conocido como el muestreo distribución.
- P(A): La probabilidad de A. También conocida como la distribución previa.
- P (B): La probabilidad de B. También conocida como la constante de normalización.

Al aplicar esta fórmula y resolver la distribución posterior, la constante de normalización desaparecerá en las constantes de integración, así que a partir de este momento lo ignoraremos.

Finalmente, luego de aplicar la fórmula al modelo de Black-Litterman el resultado es la fórmula principal del mismo modelo, la cual se especifica de la siguiente manera:

$$P(A|B) \sim N([(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}Q][(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}, (((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$$

2.2 El modelo de Black-Litterman

2.2.1 Definición y formalización del modelo Black-Litterman

El modelo de asignación de activos Black-Litterman (1992) se puede definir como una aplicación del esquema de estimación conjunta que emplea creencias iniciales sobre el mercado y opiniones propias. Permitiendo, de esta manera, “una combinación suave y flexible de un modelo de valoración de activos, el modelo de valoración de activos financieros (CAPM) y las opiniones del inversionista” (Medina y Cáceres, 2016). Por lo que, se convierte en un método de construcción de portafolio sofisticado que supera los problemas de las carteras poco intuitivas y altamente concentradas, la sensibilidad de entrada y la maximización de los errores de estimación (Idzorek, 2004). Es por todas estas razones por las cuales el método estacionario de asignación de activos de Markowitz no resulta ser muy efectivo para resolver el problema de optimización.

En este sentido, el modelo empieza estableciendo un equilibrio en las rentabilidades del mercado de modo que la oferta iguala a la demanda de activos financieros, si todos los agentes tuvieran el mismo nivel de expectativas. Seguidamente, se procede a explicar el proceso de optimización inversa, es decir se pregunta que beneficio esperado tendría la ponderación que señala la capitalización, para, en última instancia, hallar la rentabilidad esperada para luego incorporar las expectativas que el inversionista tiene el mercado.

Es así que este esquema es considerado como una mejora del modelo tradicional de la teoría del portafolio y presenta como consideraciones los siguientes aspectos: Existen n activos, con capitalizaciones M_i, i = 1,2,….,n. La capitalización de mercado es igual al número de títulos o unidades del activo disponibles por su respectivo valor de mercado. Asimismo, las ponderaciones del mercado de los activos están determinados por el vector $W = (W_1, W_2, \ldots, W_n)$, en el cual la ponderación del activo i es:

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

Por otro lado, una variable fundamental del modelo es el coeficiente de aversión al riesgo (λ), ya que es una variable que indica cuanto de rendimiento esperado está dispuesta a renunciar el inversionista a cambio de una variación menor y tienen el rol de despejar el mercado al ajustar la oferta de acciones con la demanda al precio actual, el cual se especifica la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

En donde R_M es el retorno del mercado, R_f es la tasa libre de riesgo y σ_M^2 es la varianza del retorno del mercado.

2.2.2 Optimización Inversa

La optimización inversa es un proceso con el cual se hallan las perspectivas, también llamadas como “views”, de los inversionistas a través de la inferencia de las primas de riesgo que ocasionan que un inversionista mantenga todos sus activos en proporción a su capitalización de mercado de modo tal que esta prima nos determina el equilibrio del modelo (Sharpe, 1985).

Para ello, este método de optimización toma como inputs al vector de pesos de capitalización de mercado W_{mkt}, a la matriz de varianzas y covarianzas Σ y al coeficiente de aversión al riesgo de manera que se puede determinar las primas de riesgo de equilibrio que permiten despejar el mercado Π. Cabe aclarar que la razón por la cual es una optimización “inversa” es porque en la optimización directa lo que se trata de hallar es el vector de pesos de capitalización de mercado tomando como variable exógena al vector de primas de riesgo.

De esta forma, la información que se necesita para hallar el vector de excesos de retornos implícitos de equilibrio se extrae usando la siguiente ecuación:

$$\pi = \lambda \Sigma W_{mkt}$$

Donde:

- Π es el vector de excesos de retornos implícitos de equilibrio (vector columna N x 1).
- λ es el coeficiente de aversión al riesgo.
- Σ es la matriz de covarianza de los excesos de retornos (matriz N x N).
- W_{mkt} es el vector de pesos de capitalización de mercado de los activos (vector columna N x 1).

Para el caso de la optimización inversa, el coeficiente de aversión al riesgo actúa como un factor de escala para la estimación inversa de los excesos de retornos.

En ausencia de puntos de vista que sean distintos del rendimiento del equilibrio implícito, los inversores deberían mantener la cartera del mercado. El vector de retorno de equilibrio implícito (π) es el punto de partida neutral del mercado para el modelo Black-Litterman (Idzorek, 2004).

2.2.3 <u>La ecuación del modelo Black-Litterman</u>

Teniendo conocimiento de los inputs del modelo y estableciendo a K como el número de puntos de vista o perspectivas y a N como el número de activos dentro de la función, es posible computar el nuevo vector de retornos combinados, E[R], mediante la siguiente fórmula:

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega \mathrm{P}]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega Q]$$

Donde:

- E[R] es el vector de retornos combinados (N x 1)
- τ es un escalar.
- Q es el vector de opiniones (K x 1).
- Σ es la matriz de covarianza de retornos en exceso (N x N).
- P es una matriz que establece a los diversos activos involucrados en las opiniones (K x N o una matriz de 1 x N en caso de una sola opinión).
- Ω es la diagonal de la matriz de covarianzas de los términos de error de las opiniones expresadas representando la incertidumbre de cada opinión (K x K).
- Π es el vector de retornos implícito de equilibrio en exceso (N x 1).

Del mismo modo, un enfoque análogo para la derivación de las primas de riesgo que equilibra el mercado se basa en el supuesto de que los mercados de capital están en equilibrio y despejados (Rachev et.al, 2008).

2.2.4 <u>Las perspectivas y opiniones de los inversionistas</u>

En muchas ocasiones los inversionistas tienen perspectivas particulares sobre los retornos esperados de algunos activos de su portafolio, los cuales difieren de los retornos de π. El modelo Black-Litterman permite que aquellas perspectivas sean expresadas tanto en términos absolutos como relativos.

Para el caso de las perspectivas relativas lo que se tiene es que estas aproximan de manera más adecuada la forma en la que los inversionistas se sienten con respecto a los diferentes activos. Por lo general; y en ausencia de restricciones adicionales, si la perspectiva resulta tener un valor menor que la diferencia entre dos retornos de equilibrio implícito, entonces el modelo genera que el portafolio se incline hacia el activo que presente menor rendimiento. De manera similar, si la perspectiva resulta ser mayor que la diferencia entre los dos retornos, entonces el modelo genera que el portafolio se incline en favor del activo que muestra el mayor rendimiento.

En el caso de las perspectivas absolutas la comparación que se realiza solamente es entre la opinión o perspectiva del inversionista y el vector de equilibrio implícito; es decir, que no depende de una comparación entre los rendimientos de dos activos que luego se comparan.

Supuestos sobre la Distribución:

En esta sección los supuestos que se realizan es que el vector de retornos de los activos $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ tiene una distribución normal con un vector media μ y una matriz de covarianza Σ. En otras palabras $R \sim N(\mu, \Sigma)$.

Del mismo modo, y aunque se espere que el mercado este en equilibrio, se presupone que μ posee una distribución de probabilidad que es una proporción al producto de dos distribuciones normales. Siendo la primera de estas una representación del siguiente equilibrio:

$$\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$$

En la cual τ es una constante que evidencia el grado de incertidumbre con respecto a la exactitud con la cual es calculado π. Es así que un pequeño valor de τ corresponde a una alta confianza en las estimaciones de rendimiento de equilibrio.

2.2.5 Construyendo los inputs

Para el modelo de Black-Litterman no es necesario que el inversionista establezca perspectivas u opiniones sobre todos los activos a considerar.

En este caso, se establecen en número de opiniones (K) en función de la cantidad de activos que se quieren analizar para generar el vector de opiniones (Q) de dimensiones Kx1. La incertidumbre de las perspectivas resulta en un Vector de término de Error (ε) aleatorio, desconocido, independiente y normalmente distribuido con media 0 y matriz de covarianzas Ω. Por lo que, la ecuación final se expresa de la siguiente manera:

Caso General:

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_K \end{bmatrix}$$

Cabe aclarar que, si se exceptúa el hipotético caso en el cual el inversionista se encuentra 100% seguro de su perspectiva, el termino de error (ε) es un valor positivo o negativo distinto de 0. El Vector término de error (ε) no entra directamente a la fórmula de Black-Litterman. Sin embargo, la varianza de cada término de error (ω), la cual es la diferencia absoluta de los términos de error (ε) que se espera sea 0, no entra en la fórmula. Las varianzas de los términos de error (ω) de Ω, donde Ω es la matriz de covarianza en la cual su diagonal con 0's en todas las posiciones fuera de la diagonal. Los elementos fuera de la diagonal de Ω son 0's porque el modelo asume que las opiniones son independientes unas de las otras. Las varianzas de los términos de error (ω), representan la incertidumbre de las opiniones. A mayor varianza en los términos de error (ω), mayor será la incertidumbre sobre la opinión.

Caso General:

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_k \end{bmatrix}$$

Hallar las varianzas individuales de los términos de error (ω) que constituyen los elementos de la diagonal de Ω es uno de los aspectos más complicados del modelo.

Las opiniones expresadas en el vector de columna Q se emparejan con las clases de activos específicos en la matriz P. Cada opinión expresada resulta en un vector de la fila 1 x N. Por ende, K opiniones resultan en una matriz K x K. Seguidamente, se presenta la matriz P la cual identifica a las perspectivas sobre los activos involucrados.

Caso General:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{bmatrix}$$

Con el fin de hallar los valores asignado a la matriz P se han desarrollo diferentes metodologías de estudio a lo largo de las dos últimas décadas. Entre estas destacan las de Litterman (2003, p.82) porque asigna valores porcentuales a los activos en cuestión y la de Satchell y Scowcroft (2000), ya que usan un esquema de ponderación. Tal como señala Idorek (2004), “bajo este sistema, las ponderaciones son proporcionales a 1 dividido entre el número de activos respectivos que rinden más o rinden más. Este esquema de ponderación ignora la capitalización de mercado de los activos involucrados en la opinión”.

A través las expectativas planteadas anteriormente se emplea un esquema de ponderación por capitalización de mercado para especificar cada uno de los elementos de P distintos de cero, en lugar de manejar un esquema de ponderación equivalente (Idzorek, 2004).

Desde una perspectiva conceptual, el modelo Black-Litterman es un modelo complejo que toma en consideración el promedio ponderado del vector de retornos implícitos de equilibrio (π) y el vector de opiniones (Q), en el cual las ponderaciones se encuentran en función de un escalar (τ) y la incertidumbre se encuentra en función de las opiniones (Ω). Desafortunadamente, el escalar y la incertidumbre en las opiniones son los parámetros más abstractos y complicados de especificar en el modelo. En este sentido, a mayor nivel de confianza (certera) en las opiniones expresadas, lo más cercano estará el nuevo vector de retornos a las opiniones expresadas. Es decir, si el inversionista se encuentra menos seguro de las opiniones expresadas, el nuevo vector de retornos debería estar más cerca al vector de retornos implícitos de equilibrio (π).

Para este modelo, el escalar (τ) es de cierta manera inversamente proporcional al peso relativo dado al vector de retornos implícito de equilibrio (π). Sin embargo, las investigaciones sobre este elemento en particular son escasas, ya que, no se ahonda en como determinar un valor para este escalar. En este sentido, Black y Litterman (1992) y Lee (2000) señalaron este problema mencionando que, dado que la incertidumbre en la media es menos que la incertidumbre en el retorno, el escalar (τ) está cercano a cero. Por lo tanto, uno esperaría que los retornos de equilibrio sean menos volátiles que los retornos históricos.

Por un lado, Lee, un autor que ha trabajado considerablemente con variantes del modelo de Black-Litterman, por lo general establece un valor para el escalar (τ) entre 0.01 y 0.05 y luego calibra el modelo basado en un nivel objetivo de tracking error. Por otro lado, Satchell y Scowcroft (2000) indica que el valor del escalar (τ) es siempre cercano a 1. Finalmente, Blamont y Firoozy (2003) interpretan τS como el error estándar del estimado del Vector de retornos implícitos de equilibrio (π); por ello, el escalar (τ) es aproximadamente 1 dividido por el número de observaciones.

Ante la inexistencia de limitaciones, el modelo Black- Litterman solo recomienda alejarse del peso de la capitalización de mercado de los activos si existen opiniones sobre estos. Para activos que se encuentran sujetos a opiniones, la magnitud del alejamiento del peso de la capitalización de mercado está controlado por el ratio del escalar (τ) entre la varianza del término de error (ω) de la opinión en cuestión.

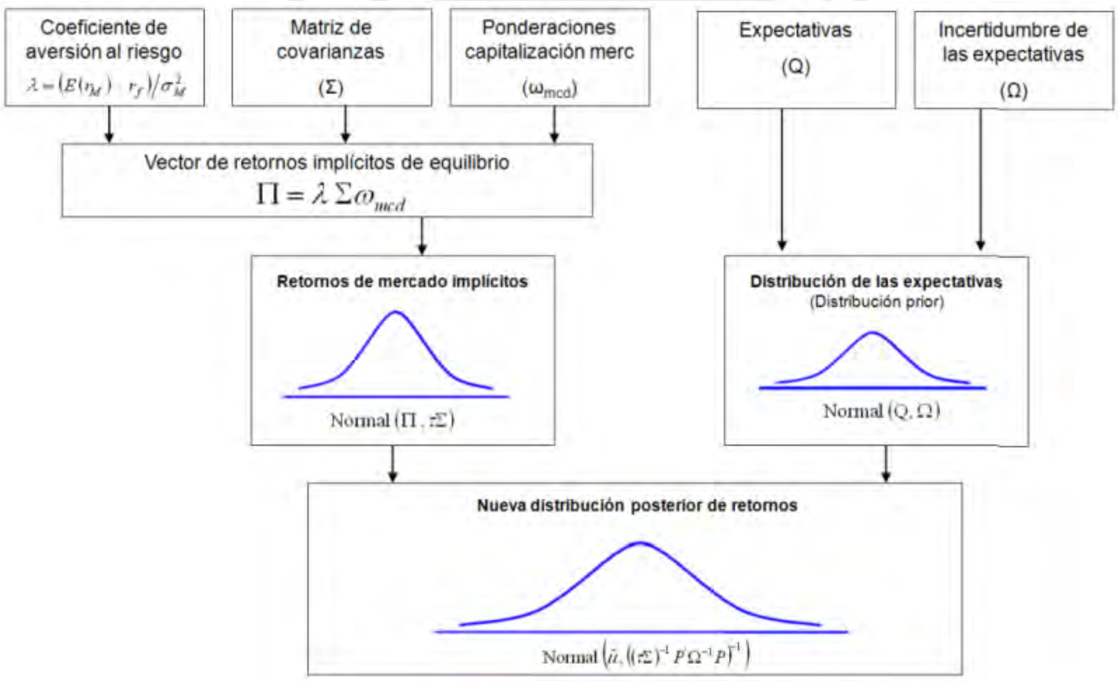
La varianza del término de error (ω) de una opinión se encuentra inversamente relacionada a la confianza del inversionista en esa opinión en particular. Por ello, una varianza del término de error (ω) de 0 representa una confianza de 100% (completamente seguro) en la opinión. La magnitud del alejamiento del peso de la capitalización de mercado se encuentra también afectada por otras opiniones. Opiniones adicionales lleva a un diferente Vector de retornos combinado ($E[R]$), lo cual lleva a un nuevo vector de pesos recomendados. La manera más sencilla de calibrar el modelo de Black-Litterman es partir de una suposición para el valor del escalar (τ). He y Litterman (1999) calibran la confianza de una opinión de manera tal que el ratio ω/τ es igual a la varianza de la opinión de dicho portafolio ($p_k\Sigma p_k'$).

2.2.6 Resultados teóricos del modelo de Black-Litterman

El objetivo principal del esquema planteado por los autores es poder encontrar el nuevo vector de retornos combinados E[R] producto de la unión entre los retornos de mercado implícitos, derivados del proceso de optimización inversa, y la distribución de las expectativas de los inversionistas, derivada de las expectativas y la incertidumbre ligadas a estas últimas.

En el siguiente gráfico se puede apreciar la metodología del modelo Black-Litterman recapitulado por Idzorek (2004).

2.2.7 Resultados modelo Black-Litterman



Fuente: Idzorek (2004).

Dado esta perspectiva, el nuevo portafolio puede ser visto como la suma de dos portafolios en donde el primer portafolio es el ponderado por la capitalización de mercado y el segundo portafolio esta basado en las opiniones sobre las posiciones cortas o largas.

Cabe destacar que dentro de este esquema la variable Ω es la que tiene como característica ser la más abstracta matemáticamente, ya que depende en su totalidad de la discreción que tenga el administrador del portafolio sobre las perspectivas que genera sobre los activos que maneja, y que, según Litterman (2003), la forma de especificarla es una pregunta común sin una respuesta universal.

Es por ello, que se planteará la metodología proporcionada por el autor Thomas Idzorek, la cual se encuentra relacionada a la determinación de los valores de la diagonal de la matriz de covarianzas Ω de modo tal que se determine un marco de niveles de confianza implícitos que puedan ser combinados con un nivel de confianza intuitivo del 0% al 100%

2.3 Metodología de Idzorek

La propuesta de cambio que presenta el autor versa sobre la forma de hallar los valores de las varianzas individuales del término de error (ω), las cuales, luego, forman la diagonal de la matriz de covarianzas del término de error (Ω); ya que, según el método del modelo de Black-Litterman, estos se hallaban tomando como base a las varianzas de las opiniones de los portafolios ($P_k \Sigma P_k'$) multiplicados por el término escalar (τ). El motivo de esta variación de enfoque se debe a que para el autor pueden existir fuentes de información adicional que afectan la confianza del inversionista en su opinión sobre el desempeño de un activo, por lo que sería apropiado combinar estos factores adicionales con la varianza en la opinión del portafolio ($P_k \Sigma P_k'$) de modo tal que se puedan producir las mejores estimaciones de los niveles de confianza en las opiniones.

En este sentido, el método sirve como herramienta para poder encontrar los niveles de confianza implícitos en las proyecciones, y estos pueden emplear un nivel de confianza establecido por el administrador de la cartera, el cual está entre 0 y 100%. De esta forma, si los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas del término de error (Ω) son iguales a cero, entonces, el inversionista tendría un nivel de confianza del 100% en todas las K opiniones que tiene.

Cabe resaltar que la manera en la cual se hallar el vector de ponderaciones de mercado parte de la ecuación que busca hallar el vector de rentabilidades de equilibrio. Tal como se muestra a continuación:

$$W = (\lambda\Sigma)^{-1}\pi$$

El resultado de que el inversionista tenga un nivel de confianza del 100% es que el nuevo vector de retornos combinados $[E(R_{100\%})]$ presenta la siguiente forma:

$$E(R_{100\%}) = \pi + \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P')^{-1}(Q - P\pi)$$

Donde el vector de ponderaciones de capitalización de mercado (w) toma la forma de $w_{100\%}$ con el cual, una vez hallado el nuevo vector de ponderaciones de capitalización recomendado $(\widehat{w})$, se puede el nivel de confianza implícito al dividir las diferencias entre estos vectores con el vector de ponderaciones de capitalización de mercado (w_{mkt}).

De esta manera, si se generan los cambios necesarios empleando el vector de retornos de plena confianza en las expectativas $(\pi_{100\%})$, se halla el vector de ponderaciones basado en un nivel de confianza del 100% en las expectativas $(w_{100\%})$. Así es posible estimar un nivel de confianza implícito en las proyecciones futuras dividiendo cada diferencia de ponderaciones $(\widehat{w} - w_{mcd})$, por la diferencia máxima $(w_{100\%} - w_{mkt})$. Siendo este nivel definido de la siguiente manera:

$$Nivel\ de\ confianza\ implícito = \frac{(\widehat{w} - w_{mkt})}{(w_{100\%} - w_{mkt})}$$

Sin embargo, este vector mide la varianza del portafolio según cada expectativa, aunque no incluye el nivel de confianza que tiene el inversionista en la misma. El autor propone generar desvíos de la forma siguiente:

$$Desvío_K = (w_{100\%} - w_{mkt}) * C_k$$

Donde:

- $Desvío_K$ es la desviación causada por la k-ésima expectativa.
- C_k es la confianza del administrador en la k-ésima expectativa.

Además, en caso que no existen otras expectativas, el vector resultante de la expectativa se define como:

$$w_{k,\%} = w_{mkt} + Desvío_K = w_{mkt} + (w_{100\%} - w_{mcd}) * C_k$$

Siendo:

- $W_{k,\%}$ es el vector de ponderaciones objetivo basado en la desviación causada por la k-ésima expectativa.

2.4 Metodología de Fusai y Meucci

Los autores de este enfoque plantean un modo de validar la consistencia de las expectativas con el fin de cuantificar la diferencia estadística entre los retornos pasados y los retornos ulteriores estimados. Para ello, se plantea utilizar la distancia de Mahalanobis, la cual tiene como utilidad principal en que es una forma de determinar la similitud entre dos variables aleatorias multidimensionales, para hallar los retornos esperados de Black-Litterman que se consideran probables. Esta distancia viene dada por la ecuación siguiente:

$$M_Q^2 = (\hat{\mu} - \pi)^T (\tau\Sigma)^{-1} (\hat{\mu} - \pi)$$

Adicionalmente, la presente distancia tiene una distribución chi-cuadrado con n grados de libertad y es posible transformarlo en una probabilidad de que el vector de perspectivas Q sea consistente. Teniendo como significancia el hecho de que, si la distancia es corta o se encuentra por debajo del umbral determinado por el administrador de la cartera, entonces las expectativas no están distantes de los retornos de equilibrio y la consistencia entre los retornos previos de Black-Litterman y los de equilibrio es elevada. En relación con lo anterior los autores formalizan el cálculo del índice de consistencia usando la ecuación a continuación:

$$C_Q = 1 - F(M_Q^2)$$

Donde F es la probabilidad acumulada de la distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Por ende, cuando el índice está por debajo de un valor determinado, la mínima variación afecta el nivel de consistencia, por lo que se deben de ajustar las expectativas.

Por lo tanto, los autores calculan la sensibilidad de este índice a cada una de las expectativas siguiendo un proceso de derivación parcial como se muestra de la siguiente manera:

$$\frac{\partial C_Q}{\partial Q} = \frac{\partial C \partial M^2 \partial \hat{\mu}}{\partial M^2 \partial \hat{\mu} \partial Q} = -2f(M_Q^2)(P\Sigma P^T + \Omega)^{-1} - P(\hat{\mu} - \pi)$$

En donde f es la densidad de probabilidad de la distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Siendo esta la manera en la que se calcula el vector de sensibilidades para buscar la expectativa con el valor más grande.

Por último, la consideración que se tiene que tener con el vector π es que, si se cumple que este es mayor al retorno esperado, entonces existe demasiado peso asignado, pero si ocurre lo contrario lo que hay un peso insuficiente asignado.

Teniendo como base a las herramientas explicadas en esta sección la contribución que se espera de la presente investigación es poder generar una alternativa viable al manejo de los portafolios de inversión que administran las AFP's de manera que se pueda saber que tanto mayor hubiera sido la rentabilidad obtenida en años anteriores y saber si la implementación de este modelo lograría obtener niveles óptimos de rentabilidad en los años venideros.

3. La hipótesis y los datos estadísticos

En esta sección se discutirá, en primera instancia, la hipótesis planteada para el presente tema, es decir la afirmación cuya veracidad se trata de poner a prueba, con el fin de presentar los datos que servirán como insumo para la estimación de los portafolios mediante las metodologías previamente señaladas y descritas de Black-Litterman, Idzorek y Fusai – Meucci.

a. Hipótesis:

La hipótesis que se busca examinar a lo largo de la investigación es la demostración de que la implementación del modelo Black-Litterman puede generar carteras con resultados mejores que los portafolios históricos manejados por las AFP's.

En este sentido si la hipótesis resulta ser verdadera, entonces el modelo planteado podría ser empleado tanto por las AFP's como por la SBS para poder conocer que combinación de activos resulta ser la más eficiente para alcanzar el nivel de rentabilidad deseado.

b. Datos Estadísticos:

Con el objetivo de probar lo mencionado anteriormente, se estudiará el intervalo temporal comprendido desde enero del año 2007 hasta noviembre del presente año 2019, lo cual estaría determinando que la base temporal resulta ser de 143 datos. Asimismo, resulta oportuno precisar que para el periodo que se planea estudiar se trabajará con las AFP's Integra, Profuturo, Prima, Horizonte y Hábitat.

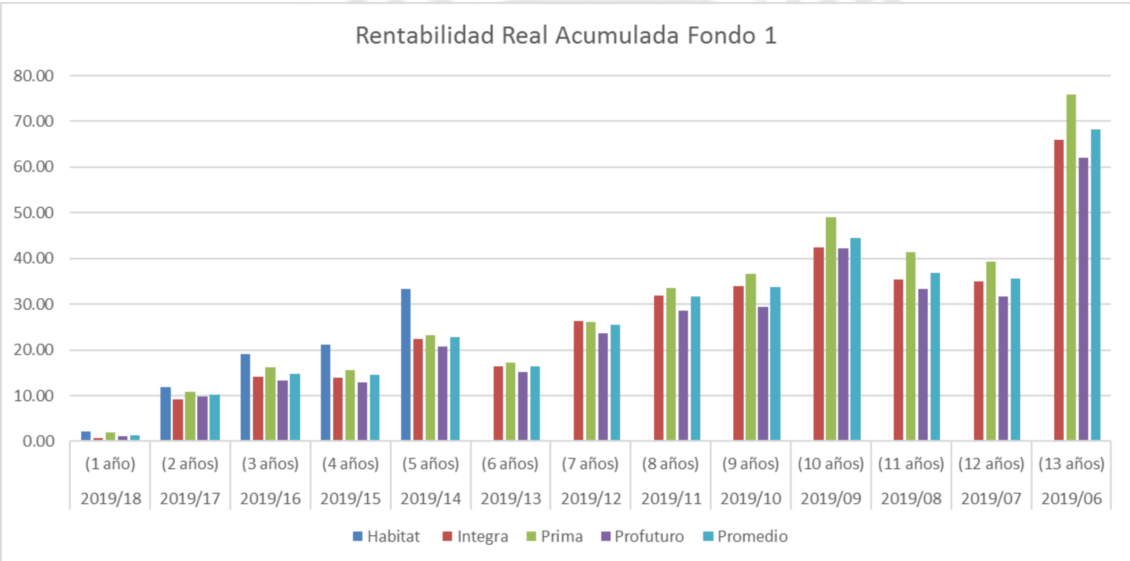
Un punto que cabe resaltar es que se realizará el análisis de los fondos 1, 2 y 3 de modo tal que se pueda capturar en la mayor medida de lo posible el efecto que tendría la implementación del modelo Black-Litterman en las rentabilidades esperadas de estos últimos.

Es así que se tomarán como primeras variables a los retornos que se esperan cada año de cada una de las AFPs para los fondos anteriormente mencionados.

Esta variable se extraida de la base de datos de la página de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP.

Lo que se puede notar en el primer gráfico expuesto en la presente sección es que la rentabilidad real acumulada del fondo a lo largo del periodo estudiado ha tendido a incrementarse de manera estable, a pesar de que en ciertos años se visualiza una notoria caída en la misma, en especial en el año 2008 y 2013. Lo que probablemente nos daría un indicio de cómo es que se comportaron los activos que conforman este portafolio durante este intervalo de tiempo.

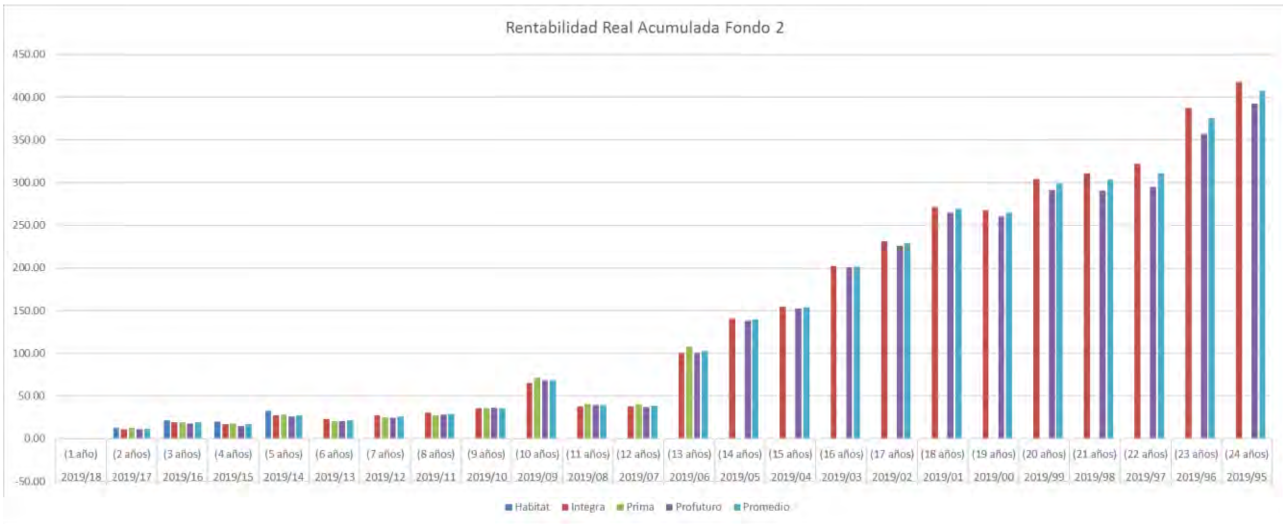
Gráfico 1: Rentabilidad Real Acumulada Fondo 1



Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP. (2020).

Para el caso del fondo 2 la rentabilidad real acumulada muestra un comportamiento similar que el fondo 1, ya que, si bien ha tenido un comportamiento incremental, también ha presentado momentos de caída en su nivel agregado.

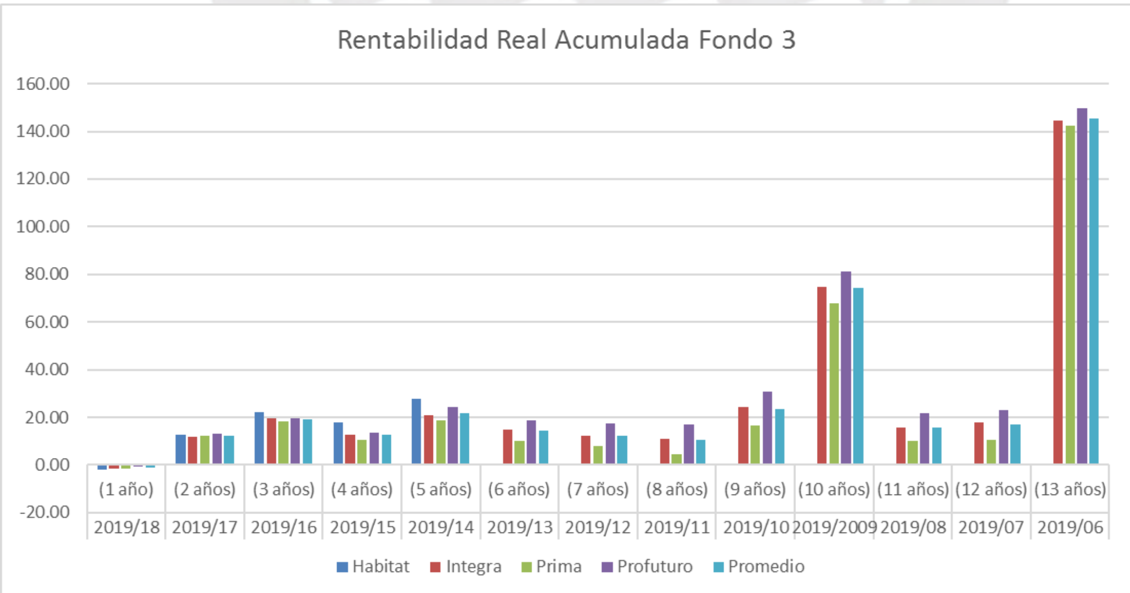
Gráfico 2: Rentabilidad Real Acumulada Fondo 2



Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2020).

Por último, en el caso del fondo 3 su evolución ha sido más fluctuante probablemente porque los activos que conforman la cartera del fondo poseen un nivel mayor de riesgo, por lo que son más susceptibles a variaciones de los mercados internacionales.

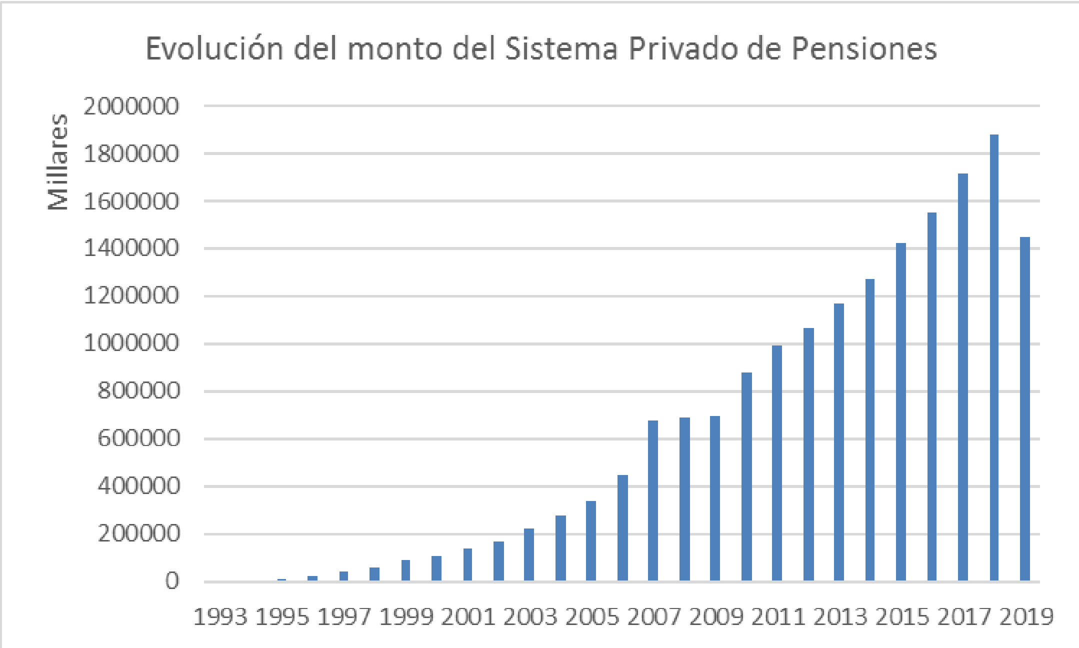
Gráfico 3: Rentabilidad Real Acumulada Fondo 3



Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2020).

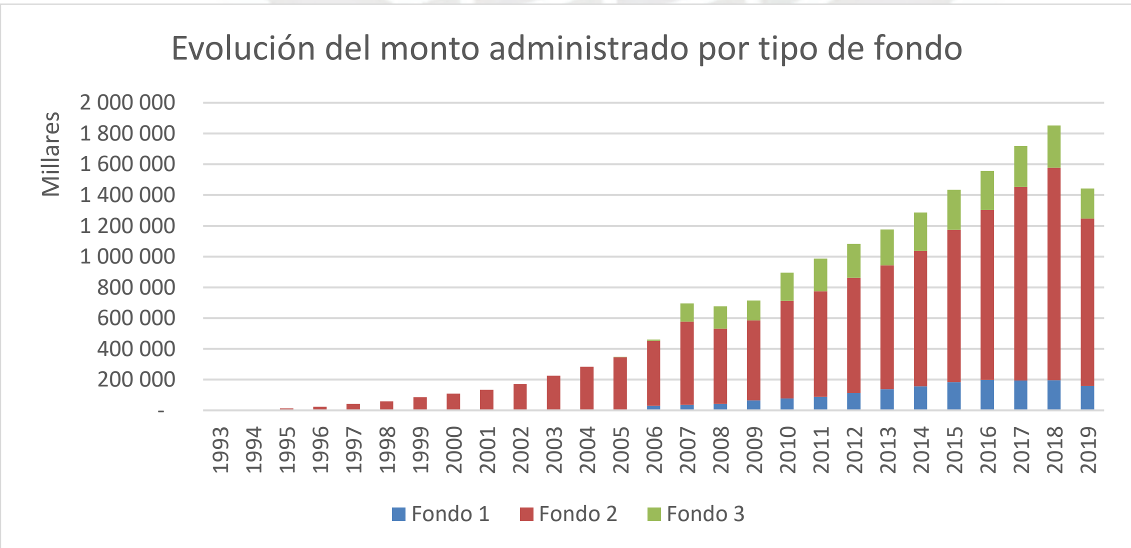
Bajo este contexto resulta útil observar de manera gráfica la evolución que ha tenido el sistema de pensiones de manera que resulta más fácil el poder entender la importancia de este sistema y en qué manera ha estado cambiando a partir del momento de su creación.

Gráfico 4: Evolución del monto del sistema de pensiones



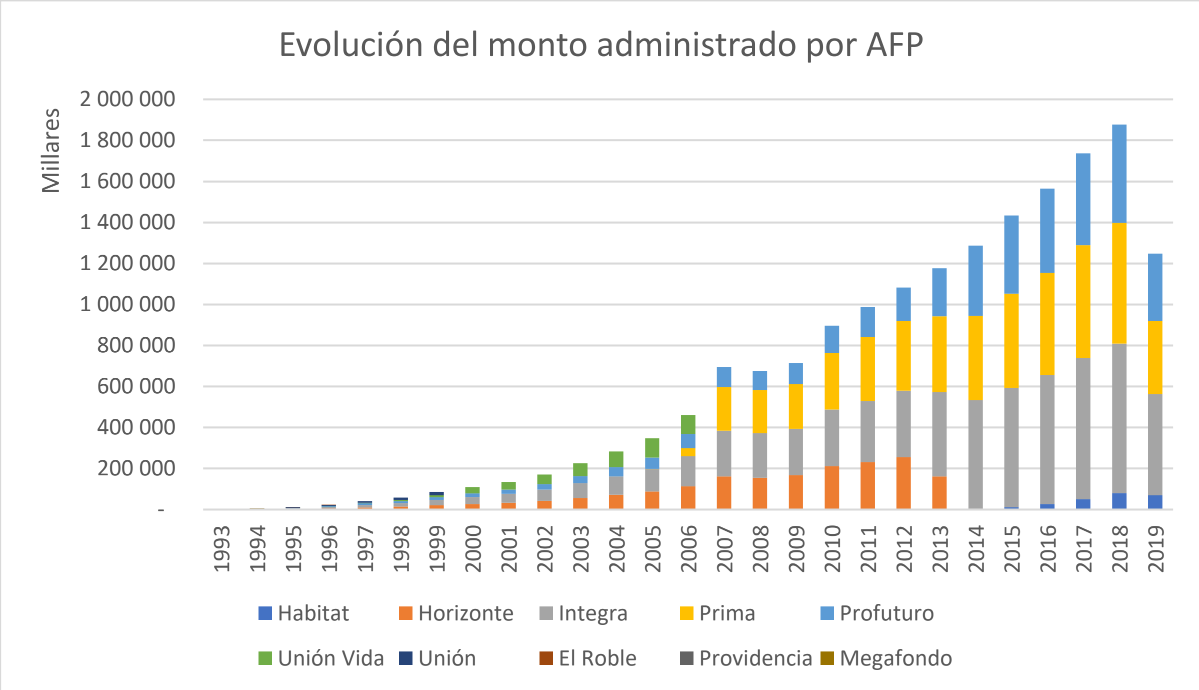
Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2020).

Gráfico 5: Evolución del monto administrado por tipo de fondo



Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2020)

Gráfico 6: Evolución del monto administrado por AFP



Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2020).

Con toda esta información provista, lo que se plantea hacer es poder conocer que combinación de activos resulta ser la que determine la cartera óptima para el inversionista.

4. Conclusiones Preliminares:

Entre las principales conclusiones preliminares que se han podido encontrar producto de la investigación se destacan la importancia que presenta el sistema privado de pensiones cuando se observa el monto total administrado que manejan en cada uno de los fondos cada una de las AFP's, la tendencia incremental que mantiene dicho monto y, como resultado de estos dos hechos previos, la necesidad de poder establecer un modelo que le permita a las administradoras alcanzar un nivel de rentabilidad óptima que asegure un retorno suficiente tanto para si mismas como para los aportantes. Es en este sentido que el modelo que se plantea en el estudio presente apunta a ser una opción viable para que las AFP's puedan alcanzar mayores niveles de rentabilidad en los diferentes fondos a través del rebalanceo de los pesos que tienen los activos de sus portafolios.

Bibliografía:

BLACK, Fischer y LITTERMAN, Robert

1992 *Global Portfolio Optimization.* Financial Analysts Journal, pp. 28-43. Taylor & Francis, Ltd. Reino Unido.

BLAMONT, Daniel y FIROOZYE, Nick

2003 "Asset Allocation Model." Global Markets Research: Fixed Income Research, Deutsche Bank.

CHEUNG, Wing.

2009 "*The Black-Litterman Model Explained",* Vol. 2, pp. 1-19. Disponible SSRN: http://ssrn.com/abstract=1312664.

FRANCO-ARBELÁEZ, Luis, AVENDAÑO-RÚA, Claudia y BARBUTÍN-DÍAZ, Haroldo.

2011 *Modelo de Markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión*. Revista Tecno Lógicas No.26, pp.77-88. Colombia

FUSAI, Gianluca. y MEUCCI, Attilio

2003 *"Assessing views".* Risk Magazine, Vol. 16 No. 3, pp. 18-21.

HE, Guangliang y LITTERMAN, Robert

1999 *"The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios."* Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company, December

IDZOREK, Thomas

2004 *A step-bu-step guide to the Black-Litterman model: incorporating user specified confidence levels*. Zephyr Associates. Nevada.

LEE,Wai

2000 Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation. New York: John Wiley & Sons.

LITTERMAN, Robert y Quantitative Resources Group, Goldman Sachs Asset Management

2003 *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach.* New Jersey: John Wiley & Sons.

MARKOWITZ. Harry

1952 *Portfolio Selection.* The Journal of Finance, Vol.7, pp. 77–91. American Finance Association.

MEUCCI, Atilio.

2006 Beyond Black-Litterman in practice: A five-step recipe to input views on non-normal markets. Working Paper.

MEUCCI, Atilio.

2005 Risk and Asset Allocation. Nueva York. Springer.

MEUCCI, Atilio.

2006 Beyond Black-Litterman: Views on non-normal markets. Journal of Risk. p. 87-92

MEDINA, Carlos y CÁCERES, Manuel

2016 *Construcción y gestión de portafolios mediante el modelo Black-Litterman: Una aplicación a las AFP en Perú durante el periodo 2007-2015*. Tesis para optar el grado de Magíster en Economía. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.

TRUJILLO, Mateo

2009 *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia*, Trabajo de grado, Universidad de los Andes.

RACHEV, Svetlozar y otros

2008 *Bayesian methods in finance* (Vol. 153). John Wiley & Sons.

SATCHELL, Stephen y SCOWCROFT, Alan

2000 *"A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction."* Journal of Asset Management, September, 138-150.

SUPERINTENDENCIA DE BANCA, SEGUROS Y AFP (SBS)

Superintendencia de Banca, Seguros y AFP: Estadísticas y Publicaciones. Consulta: 28 de noviembre de 2019.

http://www.sbs.gob.pe/

SHARPE, William

1985 *AAT: Asset Allocation* Tools. Redwood City, CA: Scientific Press.

Boletín mensual del Sistema Privado de Pensiones