PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LA TASA DE VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL: TRABAJO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Marco Antonio Ticse Aucahuasi

ASESORA

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Noviembre, 2020

RESUMEN

En la enseñanza del Cálculo, diferentes investigaciones señalan que conceptos como pendiente, velocidad y tasa variación son significativos y útiles *per se*, ya que constituyen la estructura axial de las funciones y el Análisis. A partir de ello, surge nuestro interés alrededor del aprendizaje de la tasa de variación, pues es necesario comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes dotan de significado tal concepto. En ese sentido, la presente investigación cualitativa plantea estudiar el trabajo matemático de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación de una función real de variable real, en la que se considera a la tasa de variación (media e instantánea) como velocidad (media e instantánea). Para ello, se diseña y aplica una situación de aprendizaje a cuatro estudiantes (16-17 años), agrupados en dos binomios, de último año de Educación Secundaria de una institución educativa en la ciudad de Valparaíso, Chile. Para los análisis, utilizamos, como marco teórico, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) formulado por Kuzniak, el cual permite caracterizar el conocimiento y la producción matemática del estudiante, así como el valor epistémico y cognitivo de las tareas. A partir de los resultados, se evidencia la activación de las distintas génesis del ETM y los planos verticales asociados a ellas, así como la identificación de los paradigmas del Análisis que fueron privilegiados. Se concluye que las acciones y producciones de los estudiantes giran en torno a la activación y coordinación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis], así como los paradigmas del análisis AG y AC.

Palabras clave: Espacio de trabajo matemático; Tasa de variación; Velocidad

ABSTRACT

In teaching Calculus, some researches highlight that concepts such as slope, velocity, and rate of change are significant and useful *per se*, since they constitute the axial structure of the functions and the Analysis. Base on that, appear our interest on rate of change learning, because it is necessary to understand the processes that the students made to give a meaning to that concept. In regard, this qualitative research sets out to study the mathematical work of last year students of High School when they are resolving tasks related to rate of change of a real function of real variable in which it is consider rate of change (average and instantaneous) as velocity (average and instantaneous). To that end, it was designed and applied a learning situation to four students (16 - 17 years old) grouped on two binomials, of last year of High School of an educative institution on Valparaíso, Chile. For the analyses, we will use, as theoretical framework Mathematical Working Space (MWS) formulated by Kuzniak, which allows us to characterize the student's mathematical knowledge and production, as well as the epistemic and cognitive value of the tasks. Based on the results, it is evinced the activation of the different genesis of MWS and vertical planes associated to them, as well as, the analysis paradigms identification that were identified. In conclusion, students' actions and productions concentrate on the activation and coordination of the semiotic, instrumental and discursive genesis and with it the vertical planes [Sem-Ins] and [Ins-Dis], as well as the analysis paradigms GA and CA.

Keywords: Mathematical working space; Rate of change; Velocity.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios por haberme dado fuerza, perseverancia y coraje en la dedicación y culminación de este trabajo.

A mi orientadora, la Dra. Jesús Flores, por su paciencia, actitud y tiempo que me dedicó siempre que lo necesité. Por tener siempre una puerta abierta para un consejo. Una profesora con la que aprendí, aprendo y aprenderé. ¡Muchas gracias!

A los investigadores miembros del jurado, Dra. Verónica Neira y Dra. Katia Vigo, por su disponibilidad y tiempo que dedicaron para la lectura y estudio de mi trabajo, presentando sugerencias para mejorarlo.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas. En especial, a la Dra. Cecilia Gaita, por los consejos a lo largo de mi etapa como estudiante.

A la línea de investigación TEC-VEM, en la cual se inscribe este trabajo.

A los profesores de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Diana, Manuel, Miguel, Jorge, Andrea y Patricia, por sus consejos en mi estadía en Chile. En especial, a la Dra. Elizabeth Montoya, por darme la oportunidad de aprender y crecer académica y personalmente.

A la Dirección Académica de Relaciones Institucionales (DARI-PUCP), al Programa de Intercambio Universitario, CINDA, así como al convenio específico de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por la gestión hacia el intercambio académico entre la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) y la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

A todos mis compañeros de la maestría, particularmente con los que compartí Semanario de tesis en la PUCP y a los que conocí en el intercambio académico en la PUCV.

Por último y no menos importante, agradezco a mi querida madre, Maria Luisa, por estar siempre conmigo, y a mi padre, Vidal, por confiar en mí.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetos matemáticos del Cálculo, que ha cobrado protagonismo a lo largo de las últimas décadas, es la tasa de variación. Este objeto, el cual se instaura tanto en la Educación Secundaria como Superior, es considerado una herramienta que permite la construcción de diferentes conceptos matemáticos, como por ejemplo, la razón entre magnitudes, ecuación de la recta y la construcción de la noción de derivada como velocidad.

No obstante, existen dificultades relacionadas al aprendizaje de la tasa de variación. Dolores (2000) señala que existe preconcepciones y obstáculos epistemológicos por parte de los estudiantes, así como una relación escasa entre los programas de estudio y fenómenos de variación física.

Por su parte, Sánchez-Matamoros et al. (2008) añaden que trabajar con la tasa de variación depende en gran medida al tipo de función que se considera, sea lineal o cuadrática.

Centrándonos en la Educación Secundaria, diversas investigaciones (Silva, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Roorda, Vos, Drijvers y Goedhart, 2016; Viseu, 2017; Hitt, 2018) consideran a la tasa de variación como objeto de aprendizaje en los estudiantes a partir del fenómeno de la variación, cambio de cantidades y velocidad. Con ello, se desprende la importancia de considerar a la tasa de variación como velocidad media e instantánea para nuestra tesis.

Puntualmente, nos direccionaremos en estudiar los conocimientos matemáticos puestos en juego y dar cuenta del trabajo matemático de estudiantes de último año de Educación Secundaria (16-17 años) cuando resuelven tareas relacionadas a la tasa de variación (media e instantánea), mediados con recursos tecnológicos. Para ello, utilizaremos, como marco teórico, el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), ya que nos permite caracterizar el conocimiento y la producción matemática del estudiante. Además, nos proporciona herramientas teóricas capaces de identificar, describir y clasificar aquellos conocimientos que emergen y son privilegiados por parte de los estudiantes al resolver dichas tareas.

Es importante señalar que la presente tesis se sitúa entre un convenio específico por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) y la Pontificia Universidad

Católica del Perú (PUCP), el cual fomenta la movilidad de estudiantes de esta última casa de estudios pertenecientes a la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, con el fin de realizar estancias de formación académica e investigación en la PUCV.

De esta forma, junto a tal convenio y al Programa de Intercambio Universitario, CINDA –mediado por la Dirección Académica de Relaciones Institucionales (DARI-PUCP)– se lleva a cabo parte de la tesis en la ciudad de Valparaíso, específicamente la parte experimental, donde se consideraron para el estudio estudiantes de secundaria de una institución educativa de dicha ciudad.

En base a lo anterior, la tesis a presentar se organiza en cuatro capítulos. En el primer capítulo, abordaremos algunas investigaciones de referencia relacionados al objeto: tasa de variación. A partir de ello, considerando la importancia que tiene este objeto, presentaremos la justificación de nuestra investigación. Luego, describiremos aspectos teóricos, los cuales se referencian en el marco de Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). Posteriormente, plantearemos la pregunta y objetivos que orientarán nuestro estudio y señalaremos la metodología de investigación que se empleará, la cual es de corte cualitativo basado estructuralmente en las obras de Sierra (2011) y Hernández-Sampieri (2014).

En el segundo capítulo, describiremos breves aspectos históricos de la tasa de variación, desde la perspectiva de la variación y el cambio. Seguidamente, desarrollaremos algunos aspectos matemáticos y didácticos sobre la construcción de la tasa de variación media e instantánea a partir del problema relativo a la velocidad.

En el tercer capítulo, mostraremos el diseño e implementación de una situación de aprendizaje a estudiantes de último año de Educación Secundaria pertenecientes a una institución educativa de Valparaíso.

Finalmente, como cuarto capítulo, se presentaremos las discusiones, conclusiones y perspectivas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En el siguiente capítulo, presentaremos algunas investigaciones de referencia que muestran el desarrollo del aprendizaje de la tasa de variación de una función real de variable real en estudiantes de Educación Secundaria. Del mismo modo, presentaremos el marco teórico, los objetivos principales y la metodología a usar a lo largo de este trabajo.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta sección, revisaremos diferentes investigaciones (Silva, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Roorda, Vos, Drijvers y Goedhart, 2016; Villa-Ochoa, Gonzáles-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017; Hitt, 2018), las cuales proponen, diseñan y aplican situaciones de aprendizaje alrededor de la tasa de variación, tasa de variación media y tasa de variación instantánea de una función real de variable real.

Para hacer accesible la lectura, consideraremos algunos criterios que nos permitan clasificar y organizar las investigaciones, como por ejemplo, las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la tasa de variación o los aportes de herramientas tecnológicas para la enseñanza de la misma.

En ese sentido, tomaremos los siguientes criterios para dicha organización: investigaciones que declaran las dificultades que tienen los estudiantes sobre la tasa de variación de una función real; investigaciones que declaran los aportes de la tecnología como medio en la enseñanza de la tasa de variación de una función real; y, por último, investigaciones que proponen una situación de aprendizaje para la derivada de una función real por medio de la tasa de variación, que, en este caso, toma a la derivada como la tasa de variación instantánea de una función en un punto.

Con respecto al uso de la tecnología, el criterio *Recurso tecnológico* (por ejemplo, la calculadora gráfica y los *Softwares CarMetal*, GeoGebra, *Modellus* y *Tracker*) no será tomado en cuenta como indicador, ya que todas las investigaciones mencionadas coinciden en su utilización. Es importante aclarar que, de las referencias bibliográficas revisadas, todas concuerdan en realizar sus investigaciones a estudiantes de Educación Secundaria, a excepción del trabajo de Villa-Ochoa et al. (2017), quienes consideraron estudiantes pertenecientes a un curso de precálculo en una universidad de la ciudad de Medellín, Colombia.

Investigaciones que declaran las dificultades que tienen los estudiantes sobre la tasa de variación de una función real.

Como primer trabajo revisado, tenemos a Silva (2012), que realiza una investigación basadas en la teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) para el proceso de construcción del significado de la idea de tasa de variación instantánea a través de una secuencia didáctica mediado con el GeoGebra y que usa como metodología de investigación supuestos de la Ingeniería Didáctica.

En el contexto de la educación brasilera, el autor dirige su investigación a responder la siguiente pregunta: *"¿Estudiantes de tercer año de enseñanza media pueden comprender la noción de tasa de variación instantánea por medio de un abordaje intuitivo de la noción de tasa de variación?"* (p.23).

Es importante señalar que, al indicar estudiantes de tercer año en Brasil, nos referimos equivalentemente a estudiantes de quinto año de Educación Secundaria en el Perú, así como estudiantes de cuarto año de Educación Secundaria en Chile; ambos países con estudiantes con edades entre 16 y 17 años.

El autor realiza una introducción acerca de la importancia y dificultades en el estudio de la tasa de variación, donde comenta que la idea de derivada trata cuestiones relacionadas a la noción de variación, afirmando la postura de Machado (1988, p. 24 citado en Silva, 2012), *"la idea fundamental de tal noción es de que una curva puede aproximarse muy de cerca por una recta cerca de un punto".* Es por ello por lo que el autor justifica la pertinencia de dedicar exclusiva atención en las nociones que están involucradas en la idea de derivada, entendiendo que dicha idea pueda surgir intuitivamente en estudiantes de último año de secundaria a partir de la tasa de variación.

En ese sentido, el autor aborda el desarrollo de la noción derivada en la Educación Secundaria con estudiantes entre 16 y 17 años a partir de tres resultados: 1) desarrollar ideas de límite y derivada a través de experiencias prácticas; 2) viabilizar la inclusión de la tasa de variación media e instantánea en estudiantes; y 3) apropiarse de conceptos del cálculo diferencial en estudiantes.

Por su parte, Frota (2007) (citado en Silva, 2012) señala la discusión entre la relación y práctica en el proceso de resolución y aprendizaje del cálculo diferencial desde la perspectiva de la resolución de problemas. De esta forma, Silva (2012, p. 21) destaca que *"es importante repensar las estrategias en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial por medio de resolución de problemas".*

Silva (2012) describe el objeto matemático: tasa de variación, a partir de definiciones formales, ejemplos y soluciones a ejercicios. Bajo las fases de la Ingeniera Didáctica, puntualiza los procedimientos metodológicos: análisis preliminares (estudio del objeto matemático tasa de variación, la enseñanza del cálculo diferencial en la Educación Básica en Brasil, entre otros), análisis a priori (determinación de las variables pertinentes), experimentación (ejecución del experimento) y análisis a posteriori. Posteriormente, propone y aplica una secuencia didáctica a través de un abordaje intuitivo a dicho objeto matemático a un grupo de ocho estudiantes (16 y 17 años) de último año de Educación Secundaria en una escuela pública en el estado de São Paulo.

La secuencia didáctica en mención está compuesta por cuatro situaciones de aprendizaje, las cuales contienen seis actividades (la última situación contiene una actividad) clasificadas por: variaciones proporcionales–tasa de variación, variaciones no proporcionales de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea, tasa de variación en un punto y, por último, tasa de variación de la tasa variación.

Después de analizar la producción de los estudiantes, el autor concluye que la construcción del significado a la idea de tasa de variación instantánea es por medio de la movilización simultánea de registros de representación algébrica, gráfica y tabular; sin embargo, señala que algunas nociones matemáticas no fueron movilizadas, como la idea de conversión de medidas y la idea de velocidad media, ya que la secuencia didáctica utilizada los condujo a la compresión de la idea de tasa de variación instantánea de una función f en un punto cualquiera de su dominio.

Por otro lado, afirma que los estudiantes de último año de Educación Secundaria pueden construir el significado de la noción de tasa de variación instantánea desde la idea de tasa de variación siempre que se utilice una terminología acorde al nivel educativo. Es decir, sin el uso de terminologías del nivel superior. Añade que la noción de tasa de variación instantánea debe ser presentada en la Educación Básica bajo sus ideas fundamentales y no por conceptos relacionados al cálculo diferencial.

Finalmente, el autor subraya que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la idea de la tasa de cambio instantánea, debe ser abordado por medio de situaciones de aprendizaje que permitan la coordinación entre los diversos registros de representación, de modo que los estudiantes tengan la independencia y las condiciones para construir un significado para esta idea.

Siguiendo con las investigaciones revisadas, tenemos a Viseu (2017), que pone en evidencia la importancia del uso de representaciones en la enseñanza y aprendizaje de la derivada o tasa de variación instantánea una función real en un punto en estudiantes de onceavo año, con edades comprendidas entre 16 y 18 años de Portugal.

El autor subraya la coordinación de diferentes representaciones a dicho objeto, como la representación gráfica, algébrica y numérica. Del mismo modo, señala la importancia de la conexión entre los recursos tecnológicos y la exploración de diversas representaciones de un objeto matemático, en particular, con el uso de la calculadora gráfica.

Es importante señalar que, al indicar estudiantes de onceavo año en Portugal, nos referimos equivalentemente a estudiantes de último año de Educación Secundaria en el Perú, así como estudiantes de cuarto año de Educación Secundaria en Chile; ambos países con estudiantes con edades entre 16 y 17 años.

Luego de una breve introducción del proceso histórico en la enseñanza y aprendizaje de la derivada en las escuelas de Lisboa, el autor comenta que uno de los objetivos de la malla escolar, con respecto al tema de funciones, es introducir tópicos del cálculo diferencial. Tales tópicos están divididos en dos fases: la primera se refiere a la definición de la derivada de una función en un punto de su dominio, límites e inclinación de la recta tangente; y, la segunda fase se refiere a aplicaciones a la noción de derivada al estudio de funciones y resolución de problemas de optimización.

Con respecto a la enseñanza de la derivada, señala las representaciones asociadas a la comprensión de dicho objeto: representación gráfica (que se refiere a la recta tangente a una curva en un punto), representación verbal (que se refiere a tasa de variación instantánea), representación física (que se refiere a la velocidad) y la representación simbólica (que se refiere al límite de una razón de crecimiento). A partir de ello, declara que el aprendizaje de la derivada de una función es gracias al tránsito entre tales representaciones; sin embargo, añade que dicha movilización depende de cómo el estudiante domine elementos en cada representación.

Sobre el uso de la tecnología, Viseu (2017) afirma que puede ser negativa para calcular la derivada, ya que desvaloriza las reglas de derivación; sin embargo, comenta que el estudiante trabaja mejor cuando conoce lo que la calculadora está haciendo, manipulándola como herramienta en la práctica de actividades rápidas y seguras.

Como ya se menciona, el autor pretende averiguar las contribuciones de las representaciones en el aprendizaje de la derivada de una función en un punto en estudiantes de último año de Educación Secundaria mediados con la calculadora gráfica y que para ello utilizan aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Dicha investigación fue dirigida a 21 estudiantes de un curso de Ciencia y Tecnología en Portugal, quienes realizan cinco actividades relacionadas a la tasa de variación de una función real de variable real: variación y tasa media de variación de una función en un intervalo, tasa de variación, variación y extremos relativos a una función.

Cabe señalar que el autor enfatiza, según Azcárate (1998) (citado por Viseu, 2017, p. 272), que no es eficaz iniciar un aprendizaje del concepto de la derivada a través del concepto de límite sin primero consolidar los conocimientos al nivel de los conceptos y del cálculo de los requisitos previos.

Luego de realizar las actividades, el autor evidencia la falta de rigor y dificultad en la manipulación de expresiones algebraicas de los estudiantes, privilegiando representaciones gráficas, los cuales fueron auxiliados por herramientas de la calculadora grafica. Puntualmente, *“la mayoría de los estudiantes trataron de responder primero con la representación algebraica, pero como no pudieron, utilizaron la representación gráfica de la función y su derivada con la ayuda de la calculadora gráfica”.* (Viseu, 2017, p. 285)

En ese sentido, el autor señala que los estudiantes difícilmente utilizan en paralelo diferentes registros de representación para resolver un problema. La representación algebraica se dio independientemente para determinar la derivada de una función en un punto; la representación tabular se dio para el estudio de la función en su domino; y, la representación gráfica, se usó erradamente para resolver problemas que pudieron ser resueltas por otro camino (comparación de funciones con su derivada o en el estudio de la monotonía de funciones y extremos relativos).

Pese a lo anterior, añade que la mayoría de los estudiantes, al finalizar sus actividades, coordinan diferentes representaciones al no conseguir resolver una pregunta; sin embargo, subraya que la conversión entre los registros es una de las dificultadas más representativas por los estudiantes. A ello, "*las conversiones no son realizadas por opción, si no por una necesidad, sean conversiones congruentes o no congruentes*" (Viseu, 2017, p. 286).

Es importante subrayar que las investigaciones de Silva (2012) y Viseu (2017) señalan la pertinencia de la coordinación entre diferentes registros, ya que permite explicar diferentes propiedades o aspectos de un mismo objeto, en este caso, en el significado de la derivada y su construcción como tasa de variación instantánea; sin embargo, tal coordinación depende del tipo de tareas planteadas, por lo que esta debe efectuarse a través de una situación de aprendizaje diseñada y mediada por recursos tecnológicos, sea con el GeoGebra o la calculadora grafica.

Investigaciones que declaran los aportes de la tecnología como medio en la enseñanza de la tasa de variación de una función real.

Bajo este criterio, revisamos la investigación de Roorda, Vos, Drijvers y Goedhart (2016), el cual informa sobre el desarrollo a largo plazo del pensamiento matemático de un estudiante preuniversitario holandés cuando aprende Matemáticas con el uso de la tecnología. Particularmente, describen e informan sobre el rol que juega la calculadora gráfica en el aprendizaje de las derivadas como la tasa de variación instantánea.

Para llevar a cabo tal estudio, consideran como método de exploración un estudio de caso longitudinal y como marco teórico la Génesis Instrumental, los cuales dan luz de cómo el pensamiento matemático de tal estudiante se ve afectado por el uso de la calculadora gráfica.

Los autores comienzan su investigación señalando que los meta-estudios relacionados al uso de la tecnología de mano (calculadora, laptop, tablet y teléfono inteligente) en la enseñanza de las Matemáticas muestran un efecto positivo y significativo en el rendimiento de los estudiantes. Es por ello que, centrando su interés sobre el uso de la calculadora gráfica, subrayan los beneficios de esta herramienta, como la capacidad de vincular representaciones simbólicas, gráficas y numéricas en la comprensión de funciones y expresiones algebraicas y hacer conexiones significativas entre las funciones y sus gráficos.

A pesar de esto, añaden que algunos estudios, por ejemplo, Trouche y Drijvers (2010) (citado por Roorda et al., 2016) muestran que el desarrollo de los conocimientos matemáticos de los estudiantes se ve afectado por las oportunidades y limitaciones de la tecnología.

De esta manera, Roorda et al. (2016) perfilan su investigación en indagar cómo el uso de la calculadora gráfica por parte de un estudiante y su forma de pensamiento matemático pueden desarrollarse con el tiempo. Este interés pretende contribuir hacia una mejor comprensión de lo que pueden ser algunos efectos del acceso a la tecnología en los posibles desarrollos del pensamiento matemático de los estudiantes.

Para estudiar la interacción entre el uso de la calculadora gráfica y el pensamiento matemático del estudiante, los autores utilizan el marco teórico conocido como Genesis Instrumental. De esta manera, a partir de tal marco, proponen responder: *¿Cuáles son los esquemas de instrumentación que se pueden desarrollar al usar la calculadora gráfica en el aprendizaje de la derivada?*

Para ello, consideran un estudio de caso longitudinal (durante dos años) a un estudiante holandés entre el décimo al duodécimo de la carrera de Ciencia y Tecnología preuniversitaria, el cual era un usuario frecuente de la calculadora grafica *TI-83 Plus*. Es importante señalar que, al indicar estudiante de décimo al duodécimo en Holanda, nos referimos equivalentemente a un estudiante de quinto año de Educación Secundaria en el Perú, así como estudiantes de cuarto año de Educación Secundaria en Chile.

Con respecto a la ejecución de la investigación, los autores realizaron cuatro entrevistas semestrales basadas en tareas con problemas contextualizados sobre la tasa de variación instantánea. Tales tareas fueron diseñadas para proporcionar información en profundidad sobre el pensamiento matemático del estudiante mientras utilizan al mismo tiempo el concepto de derivada en sus diferentes representaciones (gráficos, símbolos, tablas), donde a cada tarea las denominaron: tarea del barril, tarea del monopolio y tarea de costos.

En cada tarea, las variables toman significados concretos (tiempo, volumen, distancia o precio), mientras que la derivada toma significados distintos (velocidad y costos marginales). De esta forma, esperan observar diversas técnicas para resolver cada tarea: utilizar la derivada simbólica; determinar la pendiente del gráfico; dibujar una recta tangente para encontrar la tasa de variación instantánea; utilizar intervalos pequeños (con o sin calculadora gráfica) o utilizar varias opciones de la calculadora gráfica, como la opción *dy/dx*, la opción Tangente o la opción *Nderiv.*

Como el objetivo de la investigación se centra en los esquemas de instrumentación del estudiante, Roorda et al. (2016) describen tales esquemas a partir de identificar las técnicas que utiliza para resolver cada tarea junto a la manipulación de la calculadora gráfica y sus opciones.

Asimismo, analizan qué representación y nivel (de los diferentes aspectos del concepto de derivada) son centrales en cada esquema de instrumentación, en donde tales esquemas dan una mirada a su génesis instrumental.

Como resultados finales de la investigación, los autores describen seis diferentes esquemas de instrumentación relacionados con el concepto de derivada en diferentes etapas en el tiempo. Los principales son: el esquema de la tangente, el esquema del valor de la traza y el esquema *calc-dy/dx* .

De este modo, aclaran que la derivada es considerada como una variación promedio en intervalos pequeños que pueden considerarse de forma gráfica, numérica o mediante la opción *calc-dy/dx* (de la calculadora grafica). Es por ello, que esta opción de la calculadora (*calc-dy/dx*) se ha convertido en parte de sus esquemas de instrumentación del estudiante para desarrollar tareas relacionadas a la tasa de variación instantánea.

Los autores concluyen su investigación señalando que la tecnología utilizada, mientras un estudiante está aprendiendo un concepto, puede convertirse en parte integral del conocimiento conceptual de éste, ya que puede influir fuertemente o incluso sustituir el conocimiento matemático. Adicional a ello, añaden que tal uso en la educación puede tener efectos complejos y sutiles, ya que en lugar de generar vínculos entre las representaciones, estas pueden dar lugar a procesos independientes en cada representación.

Además del trabajo de Roorda et al. (2016), tenemos el trabajo de Villa-Ochoa, Gonzales y Carmona-Mesa (2017), quienes presentan un estudio de las contribuciones que los contextos y las tecnologías digitales ofrecen a la comprensión de la tasa de variación instantánea como forma de aproximarse a la derivada de una función en un punto.

Los autores señalan a la tecnología digital como actor principal para la obtención y análisis de datos, así como una producción de modelos o la validación de los mismos. También enfatizan la importancia de los aspectos dinámicos de la Matemática y el rol que juega el Software en la reproducción de efectos visuales del Cálculo.

Por otro lado, Villa-Ochoa, Gonzales y Carmona-Mesa (2017) relacionan diversas investigaciones en la problemática de llegar a la comprensión de la tasa de variación, describiendo la importancia que tiene este objeto matemático para el desarrollo del Cálculo. A partir de ello, y ya que toda actividad matemática contiene contextos y representaciones, añaden que dichas actividades no siempre tienen los mismos usos ni cumplen los mismos roles en el análisis del estudiante.

Basados en un estudio cualitativo y una metodología de estudio de casos, los autores dirigen su investigación a cuatro estudiantes voluntarios de un curso de Precálculo en Ingeniería de una universidad nacional de Medellín, Colombia.

El estudio se basa en ocho sesiones de clases compuestas por cuatro tareas. Cabe señalar que los autores definen a las tareas como actividades mediadas con el Software GeoGebra y *Modellus*; este último Software permite visualizar experimentos de la Física, así como las ecuaciones matemáticas más abstractas, ya que asigna variables que se necesitan para simular estos fenómenos. De esta manera, las tareas aplicadas están direccionadas a *"analizar el comportamiento de variables, reconocer patrones y establecer mecanismos para construir modelos que representan la covariación*". (Villa-Ochoa et al., 2017, p.27).

La primera tarea se denomina *rectángulo inscrito,* que tiene por objetivo visualizar la tasa de variación en distintos puntos de una función cuadrática mediada por el GeoGebra; la segunda tarea se denomina *velocidad y aceleración,* que tiene por objetivo analizar las relaciones entre recorrido, velocidad y aceleración de un móvil de una función cuadrática mediado por el Modellus. La tercera y cuarta tarea tienen como objetivos estudiar la tasa de variación de cualquier función mediado por las herramientas del GeoGebra y analizar la variación de la velocidad en la descarga de un archivo de Internet, respectivamente.

De esta forma, luego de realizar las sesiones con sus respectivas tareas, los autores concluyen que la comprensión de la tasa de variación media e instantánea son piezas claves en el razonamiento covariacional y la comprensión de la derivada; sin embargo, comentan que para comprender la tasa de variación instantánea no basta con trabajar con refinamientos más pequeños (con intervalos cada vez más pequeños) a la tasa de variación media.

Señalan que para un estudiante acepte la existencia de la tasa de variación instantánea es significativo la conexión entre un contexto propio de su experiencia y la posibilidad de examinar, representar y confrontar tales contextos a través de recursos tecnológicos. En otras palabras, *“en la conjunción entre modelación y tecnologías, se constituyó un sistema de experiencias, significados y representaciones a través de los cuales la tasa de variación instantánea cobró sentido para las estudiantes”* (Villa-Ochoa et al., 2017, p.33).

Con respecto a los recursos tecnológicos usados por los estudiantes, sobre el Software Modellus, los autores enfatizan:

> Que mediante su manipulación, los estudiantes observaron relaciones entre cantidades como el recorrido y el tiempo, pero también aportó a que las estudiantes pudieran matematizar la velocidad como una tercera cantidad que, a su vez, ofreció significados del contexto para ampliar la comprensión de la tasa de variación instantánea (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 32).

Por otro parte, Villa-Ochoa et al. (2017) señalan que el Software GeoGebra permite, por un lado, la posibilidad de calcular la tasa de variación media localmente (en un intervalo) y, por otro lado, permite el reconocimiento del cálculo de la tasa de variación en numerosos intervalos (globalmente), es decir, una aproximación a la tasa de variación instantánea.

En palabras de los autores, “*se implementó una tarea que recreó un fenómeno dinámico y el estudio aritmético de la tasa de variación media en intervalos cada vez más pequeños*”. (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 33); sin embargo, puntualizan que la ausencia de un contexto real produjo que los estudiantes focalizaran su trabajo en el cálculo aritmético, dejando de lado la interpretación del resultado.

De esta forma, añaden que las tecnologías usadas promueven la posibilidad de explorar y coordinar diferentes representaciones y visualizaciones, siendo este un recurso para la construcción de representaciones gráficas y algebraicas del modelo matemático en las tareas. Tal uso permite recrear fenómenos dinámicos que promueven una comprensión de algún objeto matemático, en este caso, de la tasa de variación.

En relación a lo anterior, los autores finalizan añadiendo que: "*se destaca que las tecnologías digitales, los contextos y los fenómenos que se modelaron no fueron neutros en la transición hacia la tasa de variación instantánea*" (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 33). Es por ello que el aprendizaje de la tasa de variación instantánea constituye la vinculación entre la tecnología y la modelación, ya que componen un sistema de experiencias, significados y representaciones.

Investigaciones que proponen una situación de aprendizaje para la derivada de una función real por medio de la tasa de variación.

Bajo este criterio de selección, la investigación de Ruiz, Córdoba y Rendón (2014) pretende formular una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediados por el GeoGebra dirigido a estudiantes de último año de nivel secundario en una institución educativa de Colombia.

Tal propuesta busca la integración entre los conceptos tasa de variación media y derivada para poder introducir la interpretación geométrica de este último, es decir, presentar a la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva de una función en un punto.

Para justificar su investigación, los autores afirman que la enseñanza de la derivada no se reduce solo desde la definición de límite, sino que se pueden tomar otras nociones a partir de la solución de problemas mediante ideas básicas del infinito, aproximaciones y variaciones. De esta forma, se proponen describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción de límite mediado por el GeoGebra a través de actividades que produzcan aprendizajes significativos del concepto.

En relación a lo anterior, el interés de los autores gira entorno a identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto derivada. Es por ello que, basados en una adaptación de las categorías teóricas proporcionados por el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), llegan a la construcción de la descomposición del concepto derivada y la definición de los niveles de compresión del esquema de la derivada en las dimensiones gráfica y analítica, las cuales son analizadas a partir de la producción de los estudiantes.

Así, el uso del GeoGebra lo consideran pertinente, ya que, en términos de los autores, "*esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ellos su comprensión*". (Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014, p. 3).

Según los autores, en el marco conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC), el aprendizaje de los estudiantes debe ser interiorizado y realizable en contextos internos y externos al salón de clases, ya que relaciona el curso o disciplina con la vida cotidiana del estudiante.

De esta manera, señalan cuatro niveles de comprensión: ingenua (experiencias en situaciones reales), participante (imagen mental), aprendiz (conoce y relaciona propiedades) y maestra (explica mediante un sistema axiomático). También describen los descriptores como una guía de procedimientos utilizados en la investigación: aplicar la tasa de variación media en funciones; calcular la pendiente de la recta secante representada en un intervalo; relacionar la pendiente de la recta secante y la tasa de variación media; introducir la interpretación geométrica de la derivada; deducir qué ocurre con la pendiente de la recta secante en un intervalo dado y establecer una relación entre la interpretación geométrica de la tasa de variación y la recta secante.

En virtud de ello, a través de una metodología de estudio de caso a cuatro estudiantes de último año de secundaria en una institución educativa de Colombia, Ruiz et al. (2014) realizan una observación participante y una entrevista semiestructurada (30 preguntas). Dicha entrevista consta de tres bloques organizados para conocer el dominio de los estudiantes con respecto a programas matemáticos, saberes previos al concepto de derivada y los conocimientos que se tiene acerca de la derivada.

Posterior a la entrevista, diseñan una secuencia de ocho problemas divididos en dos bloques: concepto de tasa de variación media (6 problemas) y concepto de derivada (2 problemas). Tales problemas están categorizados por las compresiones principiante, aprendiz y maestra.

Para el primer bloque, consideran la *comprensión principiante* (problema 1 y 2) cuando se realizan cálculos sobre la tasa de variación media a través de la observación de la gráfica; *comprensión aprendiz* (problema 3 y 4) cuando interpretan la tasa de variación media al observar la pendiente de la recta secante; y, comprensión maestra (problema 5 y 6) cuando establecen relaciones y observan propiedades de la tasa de variación media conforme varía la amplitud del intervalo asociado.

Para el segundo bloque, consideran la *comprensión principiante* (problema 7, ítem 1 y 2) cuando se crea la idea del concepto de derivada a través de su interpretación geométrica y fórmula; *comprensión aprendiz* (problema 7, ítem 3 y 5) cuando establecen la relación entre la imagen de la tasa de variación y la imagen de la derivada; y, *comprensión maestra* (problema 8) cuando establecen propiedades de la tasa de variación media a partir de la relación entre la tasa de variación media y la derivada.

Desde la perspectiva de Ruiz et al. (2014), los estudiantes comprenderán el concepto de derivada a través de la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media desde su interpretación geométrica. Además, el uso de dichos recursos tecnológicos permitirá la representación de imágenes dinámicas, facilitando la visualización de conceptos.

Por otro lado, consideramos la investigación de Hitt (2018), quien toma como objeto de estudio a la derivada de una función real de variable real y pretende proponer una secuencia de actividades mediado con recursos tecnológicos. Para ello, primero analiza cómo es presentado la derivada en los libros de textos y luego contrasta tal análisis con resultados de diversas investigaciones.

El autor comienza su investigación señalando que existen diversos artículos relacionados a la enseñanza del Cálculo mediado por el uso con tecnologías; sin embargo, señala la importancia de conocer las dificultades que tienen los estudiantes en un medio con o sin tecnología, tales como obstáculos cognitivos en conceptos como pendiente, tangente, tasa de variación, tasa de variación instantánea, velocidad media, velocidad instantánea, limites, infinito y derivada, siendo este último objeto de interés para su investigación.

Con respecto a la enseñanza del Cálculo, en particular de la derivada, el autor realiza una revisión sobre las nuevas tendencias de su enseñanza, considerando como ejemplo al proyecto *Harvard*. Este proyecto propone iniciar el estudio de la derivada a partir de un problema relativo a la Física (lanzamiento hacia arriba de un objeto), con el propósito de introducir la velocidad media y la velocidad instantánea, en el que añade que el problema en contexto cae hacia la enseñanza tradicional, ya que pierde la discusión sobre el fenómeno físico. De esta forma, Hitt (2018) comenta que algunas nuevas tendencias de la enseñanza del Cálculo conectan problemas de la Física en contexto y la construcción de la noción de la derivada.

En esa línea, señala que hace más de una década diferentes investigadores consideran que la enseñanza del Cálculo debe estar apoyado y/o ligado a procesos de modelación matemática. Puntualmente, subraya que tal enseñanza se debe realizar a través de nuevas actividades (problemas físicos de contexto), las cuales servirán de apoyo para la reforma de la enseñanza del cálculo en la escuela.

De acuerdo a los intereses de Hitt (2018), la investigación se divide en tres etapas de acuerdo a su metodología.

Como primera etapa, analiza algunos libros de textos que son utilizados por escuelas de la ciudad de Quebec, Canadá, que contengan el objeto derivada. Posteriormente, realiza un barrido de diferentes investigaciones, teniendo como interés analizar los obstáculos cognitivos que presentan los estudiantes de enseñanza preuniversitaria o de primer año de nivel superior con el objeto derivada. Por último, propone una secuencia de enseñanza a partir de los datos obtenidos en la etapa uno y dos, la cual puede aplicarse dentro de un marco de aprendizaje sociocultural con una metodología basado en el Aprendizaje en Colaboración, Debate Científico y Autorreflexión (ACODESA). Según Hitt y Cortés (2009), este último término es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las Matemáticas integrando varias situaciones problema interrelacionadas entre ellas el trabajo individual y en equipo, debate en el aula y autorreflexión.

Para el análisis de libros de texto, el autor considera el libro de Cruse y Leman "*Lecciones de Calculo I*", el cual aborda el tema de la derivada a partir de dos problemas de optimización relacionados a la tangente de una curva y los métodos de Descartes y Fermat. Tales problemas consisten en maximizar el volumen de una caja construida por una hoja de papel y minimizar el material para la construcción de un recipiente cilíndrico.

Para la resolución de ambos problemas, son característicos el uso de múltiples representaciones (geométrica y algébrica), lo cual lleva al estudiante a la necesidad de un proceso de refinamiento para determinar el máximo (o mínimo) de una función a partir de la idea de tangencialidad (recta tangente horizontal a curva).

En el contexto escolar quebequense, como segundo texto, el autor analiza el libro de Hamel y Amyotte "*Calculo Diferencial*", el cual plantea la introducción a la derivada a partir de dos ejemplos: el primero acerca del llenado de un recipiente en un tiempo dado (cálculo de volumen) y el segundo sobre el lanzamiento de un objeto hacia arriba (fenómeno físico). Para el segundo ejemplo, son característicos el uso de magnitudes físicas (altura y tiempo). Además, son utilizadas las nociones de velocidad media, recta secante, tasa de variación media y velocidad instantánea como el límite de velocidad media en un determinado instante.

Igualmente, es analizado un tercer libro de texto titulado "*Calculo Diferencial*", de Brunelle y Désaultels. Para la formalización del concepto de derivada, empieza con un ejemplo relacionado con la trayectoria de un automóvil desde un punto a otro. Este ejemplo, al igual que el anterior, realza el uso de las nociones de velocidad media, velocidad instantánea y límite.

Para analizar los obstáculos cognitivos de los estudiantes en la introducción al concepto de derivada, el autor se basa en los resultados de Dufour (2011) (citado por Hitt, 2018), quien diferencia dos tipos de obstáculos ligados a la dificultad en los temas de Cálculo y en la manera cómo se enseña. Tales resultados son observaciones a unas clases de dos profesoras en el nivel superior del curso de Cálculo.

En el primer tipo, se identifican obstáculos como dificultades para entender el enunciado (problemas para representar gráficamente la situación), problemas de equivalencia de notaciones entre la velocidad media y tasa de variación, así como velocidad instantánea y tasa de variación instantánea y problemas para entender la representación de la función derivada mediante límite. En el segundo tipo, se subraya la poca importancia de contextos físicos y la conversión entre representaciones gráficas y algebraicas, en donde se priorizan estas últimas.

Adicional a lo anterior, Hitt (2018) señala que el contexto físico es poco analizado en los ejemplos vistos en los libros de textos revisados, perdiendo la motivación del profesor y estudiante. A partir de ello, declara que: *"es necesaria una mayor investigación de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en situaciones en contextos reales"* (Hitt 2018, p.8).

A partir de los resultados preliminares, para el diseño de la secuencia de enseñanza, el autor plantea una actividad matemática que introduzca a los estudiantes a procesos de modelación matemática mediados con recursos tecnológicos, el cual pueda manipular el concepto de derivada en un aprendizaje sociocultural. Es importante aclarar que, como recurso tecnológico, el autor utiliza los *Softwares* GeoGebra y *Tracker,* siento este último es una herramienta de distribución libre construida en lenguaje *Java*, usado para el análisis y modelado de video, diseñado para ser usado en la educación de la Física, ya que es una poderosa forma de combinar videos con el modelado computacional.

De esta manera, el autor presenta dos actividades: El problema de la caja de volumen máximo y el problema de Aquiles y la tortuga. El segundo problema consiste en determinar la velocidad máxima de Aquiles en una carrera en los primeros 15 metros. Este problema es presentado a los estudiantes a través de un video, el cual es analizado con *Tracker* y para el tratamiento de datos se utiliza el GeoGebra.

Si bien esta actividad plantea una situación de máximos y mínimos, se utilizan como ideas principales conceptos como velocidad media e instantánea (en representaciones algebraicas).

De esta forma, Hitt (2018) concluye su investigación declarando que las reformas de la enseñanza del Cálculo, es decir, donde se hacen presentes situaciones con modelación matemática, no han podido resolver su problemática *per se*.

Puntualmente, hace énfasis en realizar manipulaciones con objetos físicos mediados por el uso de recursos tecnológicos. En ese sentido, señala que este último no juega el papel que debería, promoviéndose exclusivamente para graficar funciones y dejando de lado toda riqueza que esta podría proporcionar en los procesos de modelación matemática; sin embargo, a ello añade que los *Softwares Tracker* y GeoGebra permiten la toma de datos y el tratamiento para la búsqueda de modelos matemáticos respectivamente, donde se promueve la articulación entre representaciones (geométrico y algebraico) en la construcción de conceptos del cálculo.

Las referencias bibliográficas revisadas ofrecen significativos aportes para nuestra investigación, ya que presentan las principales dificultades que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionados a la tasa de variación, particularmente, cuando construyen el concepto de tasa de variación media e instantánea. De igual forma, indican los beneficios de trabajar con recursos tecnológicos como herramientas mediadoras del conocimiento.

Especialmente coinciden y subrayan que el camino hacia la construcción de la tasa de variación instantánea es mediado por algún recurso tecnológico.

A continuación, presentaremos la justificación de nuestra investigación.

1.2 Justificación

A partir de las investigaciones de Silva (2012), Roorda et al. (2016), Villa-Ochoa et al. (2017) y Viseu (2017), se subraya la importancia de trabajar con el objeto tasa de variación (media e instantánea), ya que es considerada como una herramienta mediadora de conocimientos, la cual propicia la comprensión de ciertos aspectos del cálculo diferencial, como por ejemplo, la construcción de la noción de derivada como tasa de variación instantánea.

Vrancken y Engler (2013; 2014) añaden a esta afirmación que, desde la antigüedad, el estudio de aspectos variacionales en fenómenos dinámicos condujo a lo que actualmente conocemos como derivada.

Particularmente, en términos de Azcárate (1998):

> No hay que olvidar que los conceptos de pendiente, velocidad y tasa media de variación tienen gran importancia y utilidad en sí mismos y constituyen una parte esencial de la estructura profunda de las funciones y el Análisis, frente a las habilidades en el manejo de expresiones algebraicas y símbolos en general […] (Azcárate, 1998, p. 259)

Otro aspecto importante que justifica este trabajo, es respecto a la enseñanza de la tasa de variación. A ello, algunas investigaciones realizadas en Europa y América latina señalan a la tasa de variación como objeto de estudio por parte de estudiantes de Educación Secundaria.

Según los trabajos de Roorda et al. (2016) y Viseu (2017), realizados en Holanda y Portugal respectivamente, declaran que, a partir de sus programas curriculares, la tasa de variación instantánea (o derivada) de una función real es objeto de estudio por parte de estudiantes (entre 15-17 años) de último año en la Educación Secundaria.

Del mismo modo, la investigación de Silva (2012), en Brasil, informa que conceptos como variación y tasa de variación de funciones reales forman parte del programa curricular de educación dirigido a estudiantes de último año de Educación Secundaria.

En el Perú, según lo establecido por el Programa Curricular de Educación Secundaria (Perú, 2016), se interpreta a la tasa de variación como objeto de estudio en los estudiantes de último año de Educación Secundaria con edades entre 16 y 17 años. Sintetizamos lo señalado por tal programa en la Tabla 1, en la cual se interpretan dos desempeños (o rendimientos) relacionados a la tasa de variación.

Tabla 1.

Competencias capacidades y desempeños en el área de Matemática

Área: matemática - Ciclo VII - Quinto año de Educación Secundaria		
Competencias	**Capacidades**	**Desempeños**
Resuelve problemas de cantidad.	Traduce cantidades a expresiones numéricas. Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo	Selecciona y usa unidades y subunidades e instrumentos pertinentes para estimar o expresar el valor de una magnitud derivada (velocidad, aceleración, etc.) según el nivel de exactitud exigido en el problema.
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Plantea afirmaciones sobre *relaciones de cambio* que observa entre las variables de una función exponencial o funciones cuadráticas. Justifica y comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra o de un caso especial mediante ejemplos, contraejemplos, conocimientos geométricos, o razonamiento inductivo y deductivo.

Fuente: Adaptado del Programa Curricular de Educación Secundaria (2016, p.155-162)

Al revisar el programa curricular de Chile, MINEDUC (2019), se observa que la asignatura de Matemática, dirigida a estudiantes de 3° y 4° año medio (últimos dos años de Educación Secundaria), contiene temas como limites, derivadas e integrales (ver Figura 1); sin embargo, no se especifica cómo son introducidos y/o presentados tales aspectos a los estudiantes, ya que este programa forma parte de una actualización al marco curricular MINEDUC (2009), donde tales conceptos estaban presentados parcialmente.

Con ello, se desprende el interés de introducir aspectos del cálculo diferencial en el currículo nacional chileno para la formación de sus estudiantes.

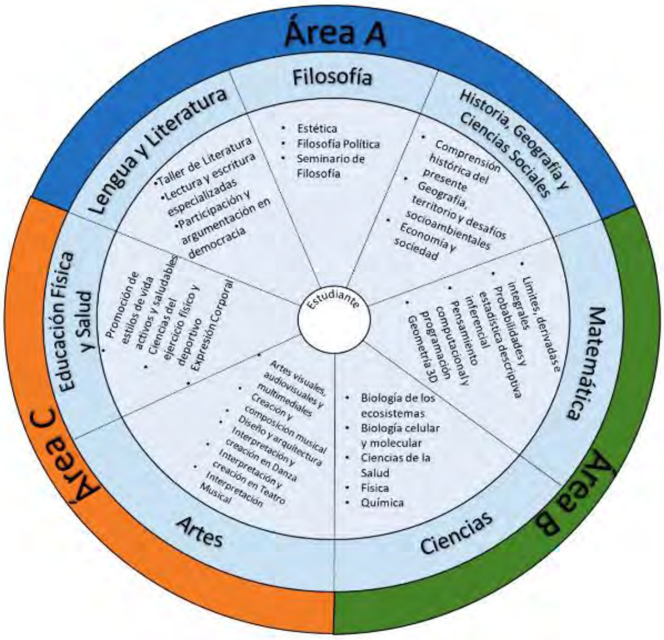


Figura 1. Organización de Asignaturas de 3° y 4° año medio en Chile
Fuente: MINEDUC (2019, p. 7)

Como fue señalado en la introducción, nuestra investigación se sitúa en el marco de un intercambio académico realizado por el autor, entre la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), razón por la cual tomaremos de referencia los programas curriculares de Perú y Chile.

Con respecto al recurso tecnológico, las investigaciones mostradas coinciden en uso de una tecnología como facilitadora de conocimiento en el proceso de aprendizaje; sin embargo, es fundamental el diseño de una situación de aprendizaje que contribuya a este proceso. Según Hitt (2018), es importante enfatizar elementos teórico-prácticos en los diseños de situaciones de aprendizaje que incluyan recursos tecnológicos, ya que comúnmente la enseñanza tradicional ha utilizado tales recursos de forma básica, perdiendo las contribuciones que esta podría proporcionar.

Para nuestra investigación, nos centraremos en el recurso tecnológico del GeoGebra, un *Software* libre (gratuito) de uso intuitivo, el cual auxilia la articulación de representaciones para la construcción de conceptos a través de herramientas dinámicas. En términos de Ruiz et al. (2014), *"este programa facilita la representación* *de funciones que resultan costosas de visualizar a través del lápiz y papel o tablero*" (Ruiz et al. 2014, p. 2).

Por su parte, Villa-Ochoa et al. (2017) señalan la relevancia del GeoGebra, ya que facilita el cálculo de la tasa de variación media en un intervalo determinado y asiste a su visualización a través de un conjunto de segmentos que la representan en distintos puntos de la curva asociada. Desde luego, la construcción de la tasa de variación (media e instantánea) debe estar organizada bajo una situación de aprendizaje mediada por alguna herramienta tecnológica como el GeoGebra.

Es importante señalar que entendemos a una situación de aprendizaje como un espacio de encuentro entre el profesor y estudiante, donde coordinan acciones a través de un proceso de interpretación y/o comprensión en el cual consiguen construir significados que son compartidos. En términos de García y Dolores-Flores (2016), *"las situaciones de aprendizaje se construyen de acuerdo a los conocimientos que el alumno debe aprender y a las características que estos saberes presentan y se realizan con un método óptimo"* (García y Dolores-Flores, 2016, p. 51)

A partir de lo señalado, se establece la pertinencia de trabajar con el objeto tasa de variación, ya que investigaciones realizadas en diferentes países (Brasil, Holanda y Portugal) coinciden en el aprendizaje de tal concepto, como tasa de variación media e instantánea, en estudiantes de último año de Educación Secundaria. Adicional a ello, los programas curriculares mencionados en esta sección coinciden en la enseñanza de la tasa de variación (media o instantánea) de una función real.

Luego, es pertinente y relevante conocer cómo el estudiante se enfrenta y resuelve tareas relacionadas con la tasa de variación. Así, considerando estudiantes (entre los 15 y 17 años) de último año de Educación Secundaria en una institución educativa de Valparaíso-Chile, nos enfocaremos en estudiar los conocimientos matemáticos puestos en juego y dar cuenta del trabajo matemático cuando resuelven tareas relacionadas a la tasa de variación (media e instantánea) mediados con GeoGebra.

Como lo mencionamos, es importante el diseño de una situación de aprendizaje. En virtud de ello, es apropiado apoyarnos a través de un referencial teórico que se adecue a tales intereses y necesidades a investigar. De esta forma, utilizaremos como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático de Kuzniak (2011), ya que nos permite caracterizar el conocimiento y la producción matemática del estudiante, así como el valor epistémico y cognitivo de las tareas, en este caso, relacionadas a la tasa de variación.

1.3 Espacio de Trabajo Matemático: aspectos teóricos

Como ya habíamos mencionado en la sección anterior, los análisis de la presente investigación se sustentan bajo la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM de aquí en adelante) formulada por Kuzniak en 2011, la cual fue desarrollada a partir de la generalización del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), propuesta por Houdement y Kuzniak en 1996 y 2006, respectivamente.

La pertinencia de este marco teórico se subraya como una estructura organizada que permite observar y detallar las actividades de los individuos cuando se enfrentan a problemas matemáticos. En términos de Kuzniak y Richard (2014), *"esta noción es precisada con el objeto de comprender lo que se relaciona alrededor del trabajo matemático en un marco escolar"* (Kuzniak y Richard, 2014, p. 6).

Según, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016), *"el Espacio de Trabajo Matemático y su estudio deben permitir dar cuenta de cómo un determinado conjunto de tareas y actividades terminan por estructurar (o no) un trabajo matemático complejo y rico por parte de profesores y estudiantes"* (Gómez-Chacón et al, 2016, p. 5).

De esta manera, este marco permite hacer un estudio (análisis) a detalle a las tareas realizadas (de los participantes), describiendo el conocimiento matemático y sus componentes.

En Gómez-Chacón et al. (2016), se describen términos básicos que enmarcan esta teoría del ETM,

- Trabajo matemático: consiste en la actividad de los sujetos frente a una tarea que tiene lugar en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- Dominio: aquellos objetos y resultados producidos por el trabajo matemático que se dividen en áreas de conocimiento o dominios que estructuran la investigación matemática.

Según Kuzniak (2011, p.12), además de la Geometría, aparece un cierto número de dominios como la Aritmética, Álgebra, Análisis, Probabilidades y Estadísticas, donde cada una de estas áreas estará relacionada con temas no matemáticas, tales como conteo, simbolización, generalización, variación, azar, decisión, entre otros.

- Paradigma: representa una combinación de creencias, convicciones, técnicas, métodos y valores que son compartidos por un grupo científicos. (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016).

Un punto a tomar en consideración, específicamente al generalizar el ETG al ETM, es dado por Kuzniak, Montoya y Vivier (2014, p. 249), el cual permite al plano epistemológico estructurar la organización matemática del ETM dándole un sentido que los paradigmas ayudan a definir.

- Tarea: este término proviene de la distinción realizada por Vandebrouck (2013) (citado por Kuzniak et al., 2016), siendo las labores que el profesor ordena a realizar a los estudiantes.

Adicional a lo anterior, Sierpinska (2004) (citado por Kuzniak et al., 2016) señala que la noción de tarea se refiere a cualquier tipo de problema matemático con suposiciones y preguntas claramente formuladas que los estudiantes pueden resolver en un tiempo predecible.

Con respecto a la actividad matemática, la cual contiene aspectos epistemológicos y cognitivos, el ETM permite hacer un análisis detallado a las tareas realizadas (de los participantes), describiendo sus componentes y el conocimiento matemático. Tal descripción se ve reflejada al articular el plano epistemológico y el plano cognitivo mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

Plano epistemológico, plano cognitivo y las génesis

Como es sabido, toda actividad matemática tiene presente los aspectos epistemológicos (pensando en los objetos, su naturaleza y el modelo matemático en el que se encuentran inmersos) y cognitivos (pensando en el sujeto y la utilización que da a los objetos). En ese sentido, el trabajo matemático se ejecuta al articular los planos epistemológicos y cognitivos.

En Kuzniak et al. (2016), se describen los planos utilizados en el ETM:

- El plano epistemológico: permite estructurar la organización matemática del ETM al situar los objetos y/o herramientas que posibilita desenvolver el trabajo matemático. Está conformado por tres polos:
    - Representamen (representante): refiriéndose a los signos y representaciones semióticas.

- Los artefactos: refiriéndose a las herramientas materiales o simbólicas que serán o no utilizadas por un individuo.
- Referencial: conjunto de propiedades, teoremas, definiciones y axiomas.

● El plano cognitivo: permite estructurar y dar cuenta del espacio de trabajo del individuo a través de sus tres polos también llamados procesos, los cuales son:
  - La visualización: relacionada con la interpretación de signos y la construcción de la representación de los objetos y sus relaciones.
  - La construcción: relacionada con la utilización de artefactos junto con esquemas de uso para producir algo tangible, como escritos o dibujos. También para la observación, exploración y experimentación mediada por un artefacto.
  - La prueba: relacionada al proceso de justificación mediante herramientas teóricas, la cual no consta solamente de una validación empírica (esta se podría entender más como el proceso de construcción).

Sobre la articulación de dichos planos, Kuzniak (2011) señala que: "el tránsito entre ambos planos garantiza la comprensión de un saber" (Kuzniak 2011, p. 8). Es por ello que, tanto el plano epistemológico y cognitivo, están articulados por un conjunto de génesis (conjunto generador) que no son independientes una de otras.

● La Génesis Semiótica: en esta articulación, el representamen está relacionado con la noción signo de Peirce y el enfoque semiótico de Duval. Un signo remite a su objeto bajo un proceso semiótico llamado *visualización.*
● La Génesis Instrumental: Esta articulación está inspirada en la concepción de Rabardel, donde en el polo de los artefactos se distingue entre un sistema material o simbólico empleado como un medio en el proceso de construcción. En otras palabras, permite operacionalizar los artefactos en el proceso constructivo a partir de la instrumentalización e instrumentación
● La Génesis Discursiva: esta articulación está relacionada con la concepción de prueba de Balacheff y razonamiento de Duval, la cual enlaza el proceso de prueba con el polo de las herramientas teóricas, dándole sentido a las propiedades para dejarlo al servicio del razonamiento matemático.

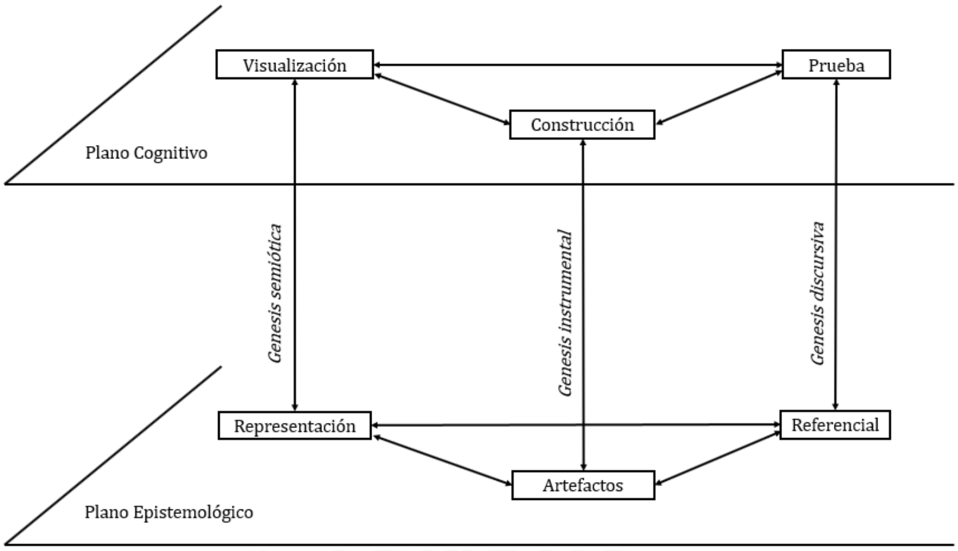


Figura 2. Diseño del ETM
Fuente: Traducido de Kuzniak, Delgadillo y Vivier (2016, p. 248)

Por otro lado, estas articulaciones no deben ser entendidas como biyecciones entre los procesos y los polos contenidos en el plano cognitivo y epistemológico respectivamente, sino más bien como una coordinación entre dos o más génesis que componen los llamados planos verticales.

Planos verticales en el espacio de trabajo

Se asume una interdependencia entre las génesis que configuran el ETM. Es por ello que se definen los planos verticales que varían según las génesis involucradas.

Estas composiciones planares permiten analizar una situación de enseñanza y aprendizaje. En diferentes trabajos (Richard y Kuzniak, 2014; Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak et al., 2016), se describen los siguientes planos verticales:

- Plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins]): asocia la génesis semiótica e instrumental, privilegiando la identificación y exploración de los objetos, desarrollando una competencia ligada al descubrimiento. En este plano, observamos dos formas de trabajar, la que está más orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) que cumplen algunas condiciones y otra hacia la interpretación de los datos aportados por los artefactos. Por ejemplo, las herramientas digitales (Software digital) aumentan la capacidad de explorar configuraciones y descubrir nuevas propiedades.

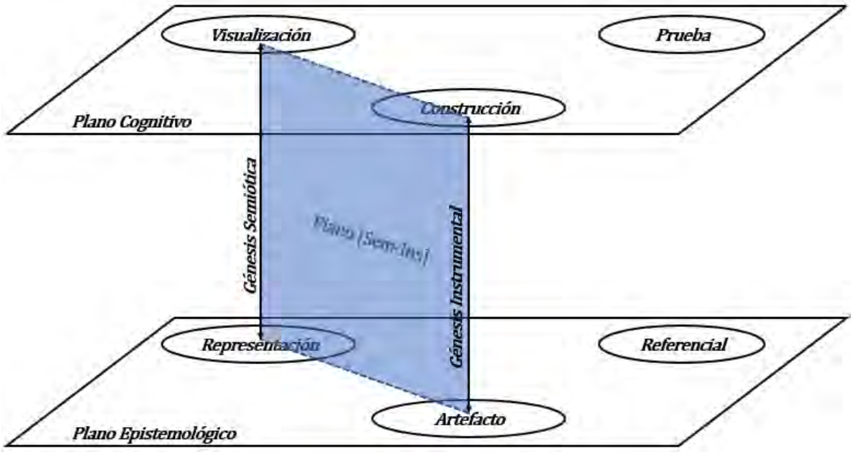


Figura 3. Plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins])
Fuente: Traducido de Gaona (2018, p. 74)

- Plano instrumental-discursivo ([Ins-Dis]): asocia a la génesis instrumental y discursiva desarrollando el razonamiento matemático fundado en la justificación experimental o deductiva. Se toma como punto crucial la cuestión de la prueba que se basa en experimentos o en la argumentación deductiva pura. Por ejemplo, si se sacan conclusiones a partir de datos dados por instrumentos, vamos a hablar de una prueba experimental. De otra forma, si la prueba o demostración se basará en un referencial teórico, los instrumentos se utilizan para ilustrar o para la construcción de configuraciones geométricas.

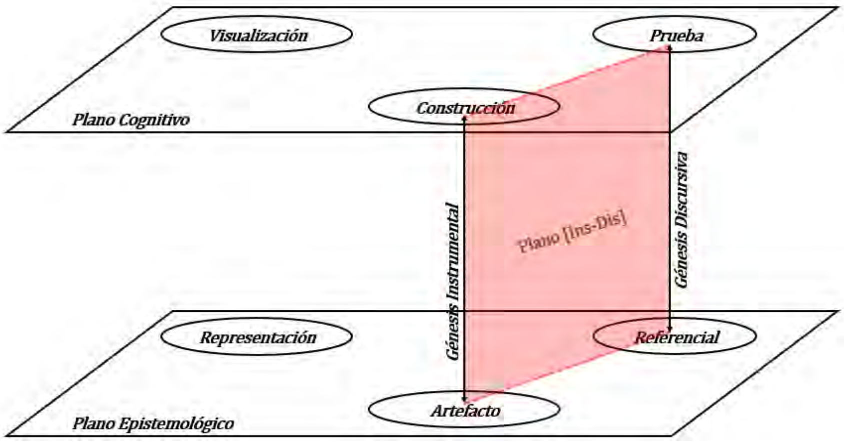


Figura 4. Plano instrumental-discursivo ([Ins-Dis])
Fuente: Traducido de Gaona (2018, p. 74)

- Plano semiótico-discursivo ([Sem-Dis]): asocia las génesis semiótica y discursiva orientándose hacia la comunicación matemática de los resultados. En este plano, son posibles dos tipos de enfoques: 1) Cuando la atención se centra en el lado semiótico, las transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo; y 2) si la atención se centra en una prueba o demostración, el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico.

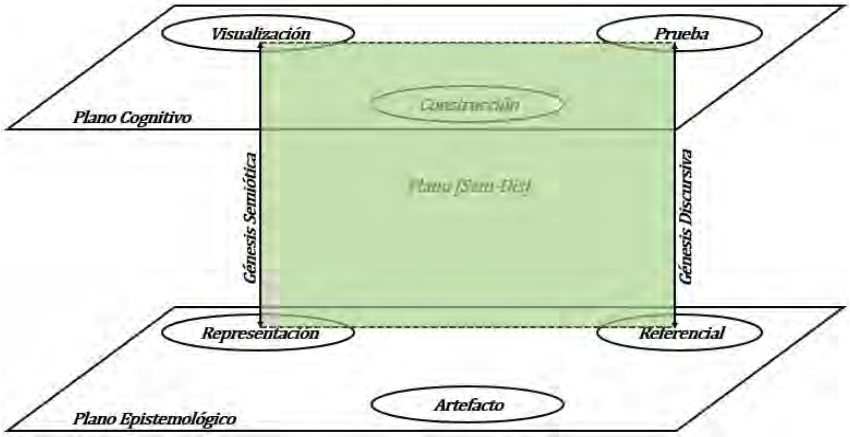


Figura 5. Plano semiótico-discursivo ([Sem-Dis])
Fuente: Traducido de Gaona (2018, p. 74)

Según Richard y Kuzniak (2014), "*la ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico*" (Richard y Kuzniak, 2014, p. 11).

Con respecto a la noción de paradigma en el dominio del Análisis, Montoya y Vivier (2015) señalan que los paradigmas son la caracterización del ETM en un dominio específico, es decir, orienta, caracteriza y participa en la estructuración del ETM.

Como hemos mencionado, para esta investigación nos situaremos en el dominio del Análisis. Así, en el trabajo de Montoya-Delgadillo y Vivier (2016), se describe el trabajo matemático en el dominio del Análisis a través de tres paradigmas:

- *Análisis-Geométrico/Aritmético (AG)*: permite interpretaciones nacidas en la Geometría, los cálculos aritméticos o el mundo real.
- *Análisis-Calculatorio (AC):* donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- *Análisis-Real (AR):* caracterizado por un trabajo de aproximación: supremos e ínfimos, cotas; una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): "cerca de ε", "lo despreciable".

Estos paradigmas se complementan con puntos de vista diferentes que intervienen en todas los componentes (polos y/o procesos) del ETM e influyen en los objetos matemáticos. Por otro lado, esta teoría caracteriza tres niveles de espacios de trabajo matemático:

- ETM de referencia: se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos y está definido por una comunidad. Por ejemplo, el espacio de trabajo establecido por un centro educativo.
- ETM idóneo: se define como una transformación del ETM de referencia y se refiere a un espacio de trabajo definido en una institución específica. Este nivel se inscribe en términos didácticos, es decir, sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo. Por ejemplo, un usuario natural de este ETM es el profesor, para quien el espacio de trabajo organizado resulta idóneo.
- ETM personal: se refiere al espacio de trabajo definido por un utilizador particular por el fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el individuo que resuelve un problema matemático. Este ETM depende del usuario. Por ejemplo, un usuario natural es el estudiante, aunque es posible considerar el ETM personal del profesor.

A partir de lo descrito, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) fue desarrollado para describir la naturaleza del trabajo matemático del sujeto cuando afronta tareas matemáticas, ya que permite realizar un análisis a detalle describiendo sus componentes y el conocimiento matemático; sin embargo, tanto las génesis como los componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión.

Para nuestra investigación, nos situaremos en el dominio del Análisis y en el tipo de ETM personal del estudiante asociado al objeto matemático tasa de variación de una función real de variable real.

Luego de presentar las referencias bibliográficas asociadas al tema de investigación y la justificación que muestra la pertinencia del estudio, se subraya la importancia y nuestro interés de conocer y comprender los conocimientos matemáticos puestos en juego cuando el estudiante resuelve tareas relacionadas con la tasa de variación. Para ello, el marco referencial desarrollado en esta sección, nos proporciona herramientas teóricas capaces de identificar describir y clasificar aquellos conocimientos que emergen y son privilegiados por parte de los estudiantes al resolver dichas tareas.

A partir de lo señalado anteriormente, formularemos la pregunta que guía nuestra investigación en términos del marco teórico Espacios de Trabajo Matemático (ETM).

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Cuál es el trabajo matemático personal de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación de una función real de variable real?

Objetivo General

Analizar el trabajo matemático personal de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación de una función real de variable real.

Objetivos Específicos

- Analizar las acciones que permiten la activación de cada génesis del ETM en el trabajo matemático de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas que involucran tasa de variación.
- Identificar los planos verticales asociados a las génesis activadas del ETM, el trabajo matemático de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas que involucran tasa de variación
- Identificar los paradigmas del Análisis que se privilegian en el trabajo matemático de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas que involucran tasa de variación.

A continuación, presentaremos la metodología y los aspectos metodológicos para el desarrollo de la investigación.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

En camino a responder la pregunta que orienta esta tesis, realizaremos una investigación bajo el enfoque metodológico cualitativo, ya que permite analizar y describir situaciones, sucesos, interacciones y conductas vistas de los hechos y fenómenos.

Según D' Ambrosio (Citado por Borba y Araújo, 2004), *"la investigación cualitativa también llamada naturalista, tiene como foco entender e interpretar datos y discursos, aun cuando involucra grupos de participantes"* (Borba y Araújo, 2004, p. 12).

Por su parte, Borba y Araújo (2004) señalan que "*una investigación cualitativa debe tener por detrás una visión de conocimientos que estén en sintonía con procedimientos como entrevistas, análisis de videos, etc., e interpretaciones*". (Borba y Araújo, 2004, p. 18)

De esta forma, nuestra investigación se asocia perfectamente, ya que se direcciona analizar el trabajo matemático de estudiantes cuando resuelven tareas, particularmente asociadas a la tasa de variación. Subrayamos que tales análisis se basan bajo los supuestos de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático de Kuzniak (2011).

Para llevar a cabo los procedimientos metodológicos, nos basamos estructuralmente en las obras de Sierra (2011) y Hernández-Sampieri, Fernández y Batista (2014). Principalmente, consideraremos algunas fases y/o etapas donde los autores coinciden, ya que estas aportan una guía y técnicas específicas para su ejecución.

En el trabajo de Sierra (2011), se presentan un conjunto de 17 etapas agrupadas en tres partes: diseño del plan de investigación, ejecución de plan de investigación y aplicación de los resultados (ver Figura 6)

Según el autor, a pesar de que las etapas comienzan en distintos momentos, estas pueden agruparse y ejecutarse simultáneamente.

PRIMERA PARTE: DISEÑO DEL PLAN DE INVESTIGACIÓN

- Etapa 1. Idea o necesidad impulsora y área problemática
- Etapa 2. Examen inicial de la Bibliografía
- Etapa 3. Definición del problema concreto de la investigación
- Etapa 4. Estimación del éxito potencial de la investigación planteada
- Etapa 5. Segundo examen de la bibliografía
- Etapa 6. Selección del enfoque de la investigación
- Etapa 7. Formulación de las hipótesis de la investigación
- Etapa 8. Selección de métodos y técnicas de recogida de datos
- Etapa 9. Selección y elaboración de los instrumentos de recogida de datos
- Etapa 10. Diseño del plan de análisis de datos
- Etapa 11. Diseño del plan de recogida de datos
- Etapa 12. Identificación de la población y muestra a utilizar
- Etapa 13. Estudios pilotos del enfoque de recogida de datos, métodos e instrumentos y del plan de análisis de datos

SEGUNDA PARTE: EJECUCIÓN DEL PLAN DE INVESTIGACIÓN

- Etapa 14. Ejecución del plan de recogida de datos
- Etapa 15. Ejecución del plan de análisis de datos
- Etapa 16. Preparación de los informes de la investigación

TERCERA PARTE: APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS

- Etapa 17. Diseminación de los resultados y propuestas de medidas de Actuación

Figura 6. Etapas del plan de investigación
Fuente: Sierra (2011, p. 181)

Por su parte, Hernández-Sampieri et al. (2014) presenta un esquema estructurado por nueve fases: idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en el campo, concepción del diseño del estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de datos, análisis de los datos, interpretación de los resultados y elaboración del reporte de resultados.

Adicional a ello, los autores enfatizan que la revisión de la literatura puede complementarse en cualquier etapa del estudio y ser considerada desde el planteamiento del problema hasta la elaboración del reporte de resultados (ver Figura 7).

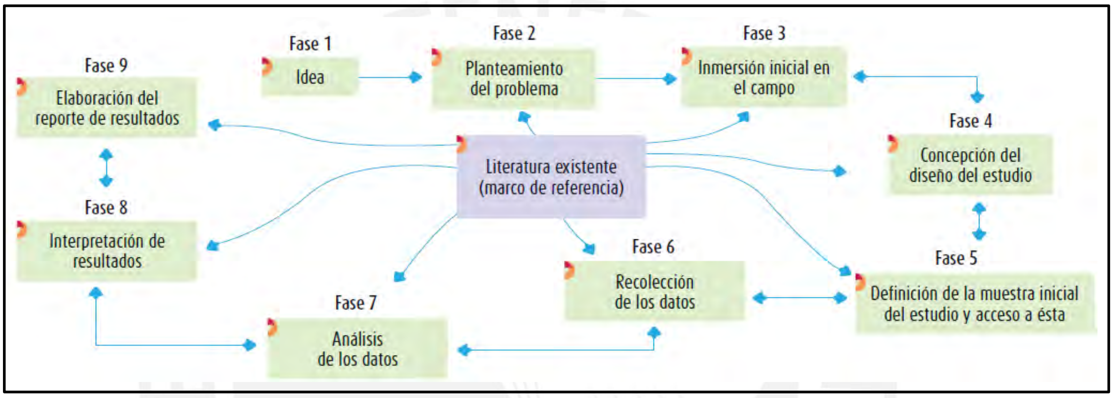


Figura 7. Proceso de investigación cualitativa
Fuente: Hernández-Sampieri et al. (2014, p.7)

De esta forma, a partir de los trabajos de Sierra (2011) y Hernández-Sampieri et al. (2014), presentaremos las fases de la investigación adaptadas a nuestro trabajo (ver Figura 8).

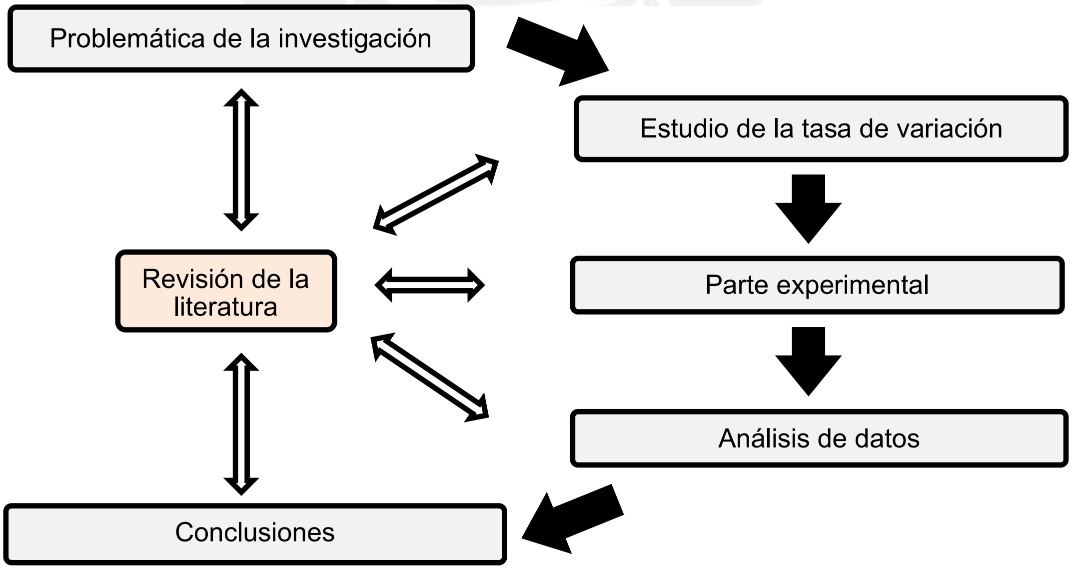


Figura 8. Proceso de investigación cualitativa adaptado

A continuación, detallaremos cada fase los cuales corresponden a los capítulos presentados en el desarrollo de esta tesis.

Fase 1: Problemática de la investigación

En esta fase, identificaremos la problemática en el dominio del Análisis y se plantea el problema a tratar. Para ello, revisaremos la bibliografía de referencia y justificaremos la pertinencia del estudio, los cuales orientan y definen la pregunta y objetivos de la investigación.

Luego, presentaremos los principales aspectos de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático, las cuales se encaminan en estudiar el trabajo matemático de los estudiantes. Tales aspectos permitirán formular la pregunta y objetivos de la investigación en términos del ETM. Posterior a ello, presentaremos los aspectos metodológicos y procedimientos, los cuales son señalados en esta sección.

Fase 2: Estudio de la tasa de variación

Para esta fase, revisaremos breves aspectos históricos y epistemológicos de la tasa de variación, principalmente aquellos acontecimientos relacionados con el movimiento, la variación y velocidad. Además, describiremos algunos aspectos didácticos sobre la construcción de la tasa de variación (media e instantánea) a partir del problema relativo a la velocidad basado del libro de texto Apóstol (2001). Esto último permitirá estructurar la situación de aprendizaje a diseñar.

Fase 3: Parte experimental

En esta fase, diseñaremos los instrumentos para la recolección de información, es decir, la situación de aprendizaje y applets del GeoGebra. Además, para registrar tal información, contaremos con cámaras de audio y video (cámara GoPro), así como el *Software* aTube Catcher, el cual registra el trabajo matemático de los estudiantes en las laptops.

Luego, presentaremos el contexto de la parte experimental, en la cual se describe a los sujetos y el lugar de la aplicación de la situación de aprendizaje. Luego, llevaremos a cabo la experimentación y/o implementación de la situación de aprendizaje; realizaremos la recolección de información correspondiente a la producción matemática de los estudiantes de último año de Educación Secundaria en una institución educativa de la ciudad de Valparaíso-Chile.

Fase 4: Análisis de datos

En esta cuarta fase, considerando la producción matemática de los estudiantes, describiremos detalladamente los resultados obtenidos de los estudiantes a la luz del marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Principalmente, mostraremos la potencialidad que sugiere el ETM para explicar y/o argumentar los resultados en relación al problema planteado en la fase 1. Para ello, realizaremos la transcripción de la información obtenida a partir de las grabaciones de video y audio, así como los applets de GeoGebra.

Para describir los resultados, inicialmente realizaremos un análisis que describe las acciones que esperamos obtener por parte de los estudiantes. Luego, efectuaremos el análisis a las acciones obtenidas en la producción matemática por tales estudiantes. Añadimos que, para la presentación de tales resultados, tomaremos de referencia la literatura de los trabajos de Menares (2016), Almonacid (2018) y Gaona (2018).

Fase 5: Conclusiones

Esta quinta fase, presentaremos las conclusiones generales y discusiones principales de la investigación. Puntualmente, realizaremos una interpretación amplia del problema planteado en la fase 1, a la luz de las referencias bibliográficas y en la que también señalaremos las consideraciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO II: TASA DE VARIACIÓN

En este capítulo, presentaremos un breve análisis de los principales aspectos históricos de la variación en el cálculo, puntualizando en elementos como el movimiento, velocidad y tasa de variación. Posteriormente, señalaremos cómo estas concepciones influenciaron en la construcción de la tasa de variación media e instantánea a partir del problema de la velocidad.

2.1 Aspecto histórico sobre la tasa de variación

A partir de nuestro interés en estudiar los conocimientos matemáticos puestos en juego cuando el estudiante resuelve tareas relacionadas con la tasa de variación, es pertinente describir el desarrollo histórico, con aspectos epistemológicos, que tuvo el concepto de variación en el cálculo.

Para ello, tomaremos de referencia las investigaciones de Vrancken y Engler (2013), quienes realizan un breve estudio a la evolución de la variación y el cambio a lo largo del desarrollo en el cálculo, en particular con la derivada. Del mismo modo, tomaremos a Ponce (2014), quien estudia y realza la importancia del desarrollo histórico de la derivada a partir de diferentes problemas, como el de máximos y mínimos, tangente, área o razón de cambio.

Para el desarrollo de esta sección, es importante subrayar que consideramos estudiar el concepto de tasa de variación media e instantánea, ya que su construcción se da a partir de aspectos variacionales, es decir, a partir de la tasa de variación. De esta forma, mencionaremos algunos hechos relevantes que guiaron esta construcción.

Centraremos nuestro foco a partir del siglo XVII, ya que, según Vrancken y Engler (2013), es en tal periodo que se trataron grandes problemas científicos que influenciaron en el desarrollo, constitución y formalización del cálculo infinitesimal.

De esta manera organizaremos esta sección: el mundo antiguo, la Edad Media, siglo XV-XVI, siglo XVII: el problema de la tangente y, por último, siglo XVIII-XIX.

El mundo antiguo

Según Vrancken y Engler (2013), desde la antigüedad, el hombre observó fenómenos naturales relacionados con magnitudes físicas variables, como el cambio de posición de los astros. Estas observaciones llevaron al hombre a desarrollar las primeras herramientas (lenguaje icónico) que dieron pie para sentar los inicios del surgimiento de sistemas de representaciones escritos.

Entre el 2000 a.c. al 600 d.c., se destacó la civilización babilónica, que tuvo como interés el estudio de fenómenos astronómicos que se repetían periódicamente, es decir, observaron sistemáticamente fenómenos los cuales estaban asociados al cambio. En concreto, los babilónicos intentaron aritmetizar tales observaciones con la tarea de intentar predecir sucesos.

Las autoras señalan que si bien estos hechos no permitieron intuir la existencia de conceptos matemáticos como tal (variables y función), son significativos los aportes de esta civilización al intentar establecer regularidades a los fenómenos mencionados.

Por otra parte, Vrancken y Engler (2013) comentan que en el siglo VI, la civilización griega (o los pitagóricos) destacó por transformar a la Matemática como una ciencia deductiva, ya que para ellos fue más importante explicar no solo el cómo, sino la razón o el porqué de las cosas. Además, añaden que en esta época se resalta el pensamiento griego, con representantes como Heráclito, Zenón y Aristóteles, que desarrollaron nociones de cambio y relación entre magnitudes variables para llegar a una idea inicial de función. Tales nociones provienen de problemas vinculados con el movimiento, la continuidad y el infinito.

Puntualmente, las autoras señalan que para dar origen al fenómeno de variación fue Aristóteles quien cuestionó sobre las causas reales del movimiento, es decir, dio énfasis a la naturaleza del objeto que sufre tal variación; sin embargo, las mismas autoras señalan que: "*el carácter geométrico de la matemática griega, el papel preponderante de las proporciones, la disociación entre número y magnitud son los principales obstáculos que hicieron que en la época antigua el estudio de fenómenos de cambio sea muy reducido*" (Vrancken y Engler 2013, p. 57).

La Edad Media

Posterior a la época de auge de los griegos, los árabes desarrollaron estudios en ciencias, los cuales fueron extendidos al occidente entre los siglos V y XV.

Según Vrancken y Engler (2013), esta época se caracterizó por la preocupación en descubrir lo real y comprensible más allá de la experiencia. La civilización árabe trató de hallar un modelo que respondiese cuestiones relativas a fenómenos astronómicos y naturales, lo que condujo un especial interés por fenómenos sujetos al cambio y movimiento.

Por otro lado, a partir de las ideas de Aristóteles, en las ciudades Oxford y Paris se desarrollaron estudios sobre el movimiento local no uniforme en fenómenos asociados al cambio, como el calor, la luz y la velocidad. Por ejemplo, la velocidad era estudiada a partir de su intensidad, es decir, un estudio al valor numérico que se le asignaba en relación al tiempo. Puntualmente, en Inglaterra y Francia se direccionaron tales estudios hacia la Cinemática-Aritmética y la Geometría, respectivamente.

A mediados del siglo XIV, algunos científicos ingleses abordaron el problema de la cuantificación del cambio para intervalos de tiempo, lo cual produjo que se definieran conceptos como el de velocidad y movimiento uniformes acelerado, así como de intentar definir la velocidad instantánea. A ello, Vrancken y Engler (2013) resaltan la investigación realizada por Oresme (1323-1382), quien propuso un camino para los estudios cinemáticos-aritméticos a partir de aproximaciones geométricas.

Según D'hombres (1987) (citado por Vrancken y Engler, 2013), Oresme utilizó herramientas geométricas para representar la variación del movimiento con el fin de comprender fácilmente la naturaleza de los cambios. Para ello, clasificó la representación del movimiento como: (a) uniformemente uniformes (asociado a la velocidad constante); (b) uniformemente diformes (asociado con movimiento uniformemente acelerado); y (c) uniformemente acelerado (asociado con la aceleración constante).

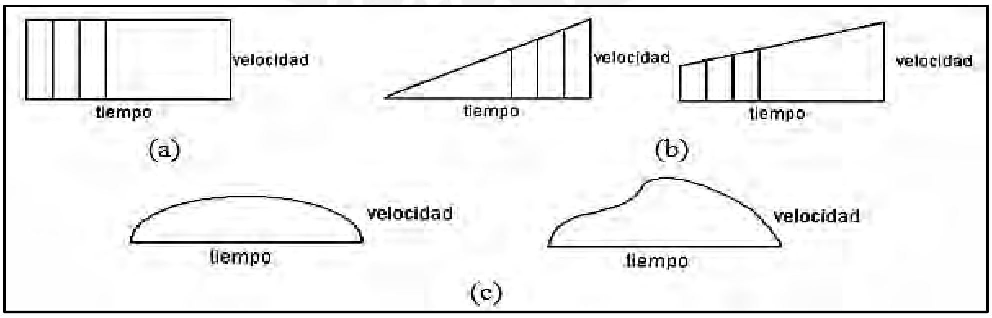


Figura 9. Representación de variaciones de Oresme
Fuente: Vrancken y Engler (2013, p. 59)

Si bien esta clasificación corresponde al movimiento de un objeto con respecto al tiempo, Vrancken y Engler (2013) señalan que en tales representaciones gráficas los fenómenos son descritos por toda la figura, es decir, por la forma y superficie de debajo de la curva. Este hecho señala la idea de que una función puede ser representada por una curva.

De esta manera, las autoras subrayan el aporte de Oresme, ya que gracias a tales estudios se realizaron adelantos hacia la Geometría Analítica y la idea del movimiento asociada a ella.

Siglo XV-XVI

Según Vrancken y Engler (2013), en esta época se destaca el inicio del simbolismo algebraico, sobresaliendo investigadores como François Viète (1540-1603) y Galileo Galilei (1564-1642) en Italia, y Johannes Kepler (1571-1630) en Alemania.

Por un lado, Viète abordó problemas relacionados a la navegación marítima, el comercio y la industria, lo cual propició el desarrollo a leyes generales de la naturaleza y su modelación a través de fórmulas matemáticas. Por otro lado, Kepler abordó cuestiones relacionadas a la Astronomía, lo cual lo llevó a formular leyes matemáticas sobre el movimiento de los planetas.

Por su parte, Galileo realizó un estudio al movimiento y rapidez en su libro *Dos nuevas ciencias* en 1638 (retomando ideas de Oresme), enfrentándose al problema de caída de cuerpos relacionado conceptos de velocidad y aceleración. Galileo utilizó una representación bidimensional velocidad/tiempo para dar solución al problema de caída de cuerpos, en la que representó el tiempo sobre una línea vertical y las velocidades en cada instante por segmentos perpendiculares a la recta.

De esta forma, entre los siglos XVI y XVII, en términos de las autoras, *"se fueron desarrollando las ideas de variación y cambio como abstracciones obtenidas de la realidad"* (Vrancken y Engler, 2013, p. 61),

Siglo XVII: El problema de la tangente

Según Vrancken y Engler (2013), a partir del simbolismo algebraico y procedimientos analíticos entre ecuaciones y curvas, autores como René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) dieron origen (cada uno independientemente) a lo que actualmente conocemos como Geometría Analítica, lo que sirvió posteriormente como fundamento para el cálculo infinitesimal.

En esta época, tres problemas cobraron interés entre la comunidad científica: determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento; determinar la trayectoria de un cuerpo en un intervalo de tiempo; y el problema de máximos y mínimos.

En el camino a resolver esta última interrogante, Fermat realizó observaciones al comportamiento de la curva y señaló que esta tiene en cada punto una dirección, es decir, una recta tangente, donde la función tiene máximo o mínimo cuando tal tangente es horizontal. Por otro lado, existía también el interés por resolver el problema de las tangentes, que consistía en hallar la recta tangente a una curva en un punto.

Fermat propuso un método para resolver el problema de las tangentes usando ideas infinitesimales. Tal propuesta, que fue escrita en la obra *Methodus ad disquerendam maximan et miniman* en 1637, utiliza elementos gráficos y visuales, así como ideas basadas en la intuición del cambio, donde se analiza la variación de magnitudes (distancia h) cuando se hacen muy pequeños.

Puntualmente, la idea de Fermat se basó en que se considera una curva intersecada por una recta secante en dos puntos si uno de los puntos de intersección se acerca hacia el otro punto, entonces la recta secante se aproxima hacia la dirección tangencial en ese punto, es decir, a una dirección definida como la recta tangente.

Cabe señalar que, según Ponce (2014), el método basado en aproximaciones consistía en calcular la pendiente de la recta secante a una curva en un punto, es decir,

$$m_{secante} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Luego, el método sugiere que la cantidad h se haga cada vez más pequeña o se desvanezca, o que tienda a cero, consecuencia de ello, la recta secante *se convierte* en una recta tangente. De esta manera, resulta que la pendiente de la recta secante coincide y/o se aproxima a la pendiente de la recta tangente en un punto, por lo que hallar la ecuación de la recta tangente en tal punto se pudo determinar.

Fermat, Descartes y John Wallis utilizaron tales métodos basados en aproximaciones para resolver el problema de la tangente, por lo que a partir de ello surgió un patrón para resolver problemas similares.

Por su parte, el matemático Isaac Barrow (1630-1677) utilizó tales métodos en un contexto geométrico con infinitesimales, los cuales fueron publicados en su obra *Lecciones de Geometría* en 1670.

Afines del siglo XVII, resaltan dos científicos, Isaac Newton (1643-1727) y Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Inglaterra y Alemania, respectivamente. De forma independiente, los científicos sistematizaron y generalizaron ideas y procedimientos asociados a la variación y el cambio, lo cual originó el descubrimiento del Cálculo.

Vrancken y Engler (2013) comentan que Newton, siguiendo la línea de los avances de Barrow, desatacó por considerar al tiempo como argumento y analizar las variables dependientes como cantidades continuas que tienen cierta velocidad de cambio. Newton estudió las magnitudes variables que representan diferentes formas de movimiento mecánico continuo, a las magnitudes que varían las llamó *fluentes* (funciones), las cuales dependían del tiempo y a las velocidades de la fluentes las llamo *fluxiones*.

Para determinar las fluxiones, se imponía la condición de cambio de una variación infinitesimal con respecto al tiempo a las fluentes, es decir, Newton calculaba las derivadas de funciones. Puntualmente, las autoras señalan que las fluxiones o velocidades "*son razones de cambio instantáneas y expresan la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Esta es la idea física fundamental que subyace en el concepto actual de derivada*" (Vrancken y Engler, 2013, p. 64).

En ese sentido, Ponce (2014) declara que Leibniz consideró a la derivada de una función como una razón de diferencias infinitesimales, al cual le llamó *cociente infinitesimal.*

De esta manera, ambos matemáticos, tanto Newton y Leibnitz, llegaron a desarrollar la idea de derivada dentro de un contexto más amplio y general en el Cálculo; sin embargo, es importante señalar que la idea principal de la derivada, así como de sus aplicaciones, se originaron para resolver interrogantes en contextos geométricos.

Con respecto al problema de las tangentes, Newton asoció el concepto de fluxión con tal problema. Para determinar la tangente a la curva en un punto, consideró al movimiento como la resultante de la composición del movimiento horizontal (modulo del vector x) y vertical (modulo del vector y), ambas dependientes del tiempo. De esta forma, por la ley del paralelogramo, se obtiene el vector resultante donde su dirección es la recta tangente a la curva con pendiente $\frac{y}{x}$ (ver Figura 10).

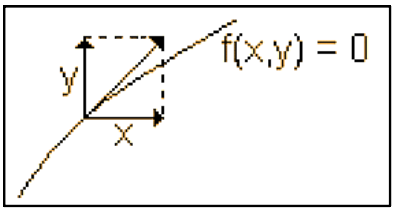


Figura 10. Vector velocidad como composición del movimiento horizontal y vertical
Fuente: Vrancken y Engler (2013, p. 64)

Por su parte, Leibniz presentó sus resultados al problema de las tangentes desde una perspectiva geométrica. En términos de Vrancken y Engler, *"se dio cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando las mismas tienden a cero*" (Vrancken y Engler, 2013, p. 66).

Siglo XVIII-XIX

De acuerdo con Vrancken y Engler, a lo largo del siglo XVIII, el estudio de curvas geométricas en el análisis infinitesimal fue realizado por procesos aritméticos y en su mayor parte por el uso del Álgebra. Destacan matemáticos como Jean Bernoulli (1667-1748), Leonard Euler (1707-1783) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), quienes consolidaron la noción de función como la representación de procesos de variación y cambio.

Las autoras comentan que en este periodo de tiempo los avances en el cálculo variacional fueron una consecuencia de la exploración hacia las aplicaciones del análisis infinitesimal. A ello, subrayan que el Análisis fue perdiendo su carácter geométrico, colocando al Álgebra en su lugar, por lo que los matemáticos de la época empezaron a trabajar sobre una base sólida y fundamentación rigurosa con respecto al Cálculo.

En ese sentido, el francés Agustín Louis Cauchy (1789-1857), realizó un aporte significativo, a partir de las ideas de límites de Newton, al definir a la derivada de una función como un límite del cociente de diferencias, cuando h tiende a cero, es decir; $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ siempre que este exista.

Posterior a la formalización de conceptos como teoría de conjuntos, números reales, límites y el desarrollo de la teoría de funciones, el Análisis Matemático se estructuró bajo una lógica coherente. Con respecto a la derivada, esta fue definida mediante la existencia de un límite para funciones continuas, lo cual recayó en términos de ε y δ, dejando de lado las nociones de variación.

A partir de lo descrito con respecto al origen y evolución de la variación, es importante señalar que el estudio del movimiento, variación, cambio y velocidad fue fundamental para formular leyes que describen fenómenos. A ello, tales formulaciones se abordaron desde diferentes enfoques, principalmente los numéricos y geométricos, los cuales produjeron un gran avance científico.

En términos de Vrancken y Engler (2013), "el paso más importante fue relacionar los problemas de la mecánica conectados con el estudio del movimiento y los antiguos problemas de la Geometría, consistentes en la determinación de tangentes a una curva dada" (Vrancken y Engler, 2013, p. 69).

Ya visto cómo se ha evolucionado la variación en el Cálculo y cómo ésta influenció hacia la construcción y conceptualización de la tasa de variación media e instantánea, a continuación, describiremos aspectos didácticos sobre dicha construcción. Para ello, consideraremos el problema relativo a la velocidad, el cual fue desarrollado por el método de Newton para determinar la recta tangente a la curva en punto.

2.2 Aspectos didácticos sobre la tasa de variación

En esta sección de nuestra investigación, describiremos algunos aspectos didácticos sobre la construcción de la tasa de variación media e instantánea a partir del problema relativo a la velocidad. Para ello, consideraremos el libro de texto de Apóstol (2001), el cual contiene el problema de "*determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento*" (Apóstol, 2001, p. 193).

Es importante señalar que la elección de este libro se justifica bajo el hecho que el problema de la velocidad se desarrolla desde los conceptos de variación, tasa de variación media, así como tasa de variación instantánea, por lo tanto, resulta óptima para nuestra investigación.

A continuación, el problema relativo a la velocidad.

Un problema relativo a la velocidad

Sea un proyectil lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de $45\, m/s$. Prescindiendo del rozamiento y suponiendo que solo actúa la gravedad, consideremos

$f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil, t segundos después del lanzamiento. Producto de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a valer cero, por lo que en ese momento cae al suelo. Bajo estas condiciones, consideramos que la altura $f(t)$ del proyectil está determinado aproximadamente por la fórmula $f(t) = 45t - 5t^2$.

Graficamos $f(t)$ con el uso del GeoGebra (ver Figura 11)

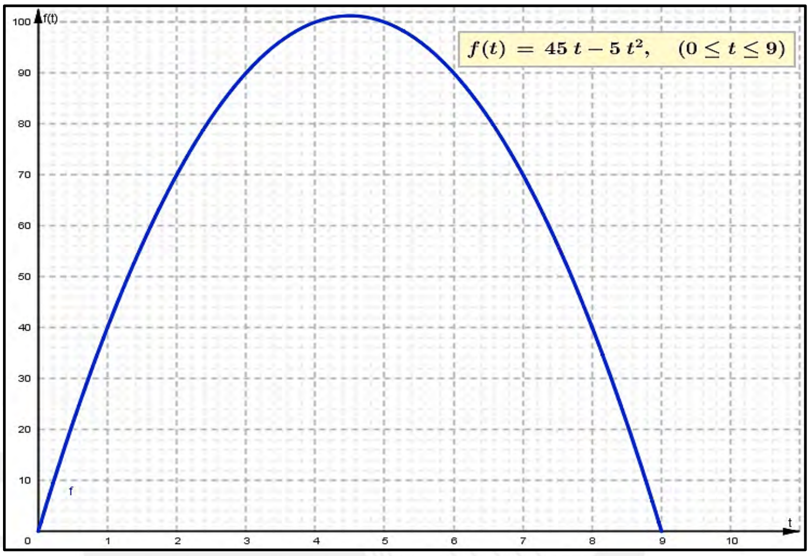


Figura 11. Gráfica de la función altura f(t)

De esta forma, el problema es determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento. (Apóstol, 2001)

Para resolver este problema, Apóstol (2001) señala que es importante puntualizar lo que se entiende por velocidad en cada instante. Para ello, introduce la noción de velocidad media durante un intervalo de tiempo, es decir, desde el instante t hasta el instante $t + h$.

De esta manera, define la velocidad media como el cociente:

$$v_{media} = \frac{Diferencia\ de\ distancias\ en\ el\ intervalo\ de\ tiempo}{Intervalo\ de\ tiempo} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Luego, refiere que este cociente es llamado *cociente incremental*, el cual es un número que se puede calcular siempre que t y $t + h$ pertenezcan al intervalo en juego, en este caso $[0; 9]$. Es claro que el número del denominador tomará valores positivos o negativos, pero no será cero. Si quisiéramos determinar la velocidad media del proyectil en el intervalo de tiempo $[2; 5]$, esta será de $10\ m/s$, ya que

$$v_{media} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{(45(5) - 5(5)^2) - (45(2) - 5(2)^2)}{3} = 10$$

Análogamente, la velocidad media del proyectil en el intervalo de tiempo $[2; 4]$ y $[2; 3]$ será de 15 m/s y 20 m/s, respectivamente. En los tres casos, el valor del intervalo de tiempo fue disminuyendo ($h = \{3,2,1\}$).

Esta iterativa sucesión de disminuir el valor del intervalo de tiempo es el procedimiento para calcular el valor de la velocidad en un instante de tiempo. En otras palabras, se fija t y se estudia lo que ocurre al cociente incremental cuando se dan valores a h cada vez más pequeños.

Por ejemplo, para determinar la velocidad del proyectil en el instante cuando $t = 2$, el autor calcula el cociente incremental o velocidad media en intervalo de tiempo $[2; 2 + h]$. Así,

$$\begin{aligned} v_{media} &= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(45(2+h) - 5(2+h)^2) - (45(2) - 5(2)^2)}{h} \\ &= 25 - 5h \end{aligned}$$

De esta forma, Apóstol (2001) considera valores de h cada vez más pequeños (positivos y negativos), con la finalidad de aproximarse hacia un punto, es decir, hacia un instante de tiempo específico.

A continuación, mostraremos la iteración sucesiva de h cuando es cada vez más pequeño (ver Tablas 2 y 3). Aclararnos que tales tablas no se encuentran enunciadas en Apóstol (2001); sin embargo, se realiza esta presentación con el fin de dar una mejor visualización al comportamiento de h.

Analicemos para valores positivos de h.

Tabla 2.

Velocidad media cuando h es positivo

Intervalo de tiempo	$\boldsymbol{h}$	**Fórmula de la velocidad media** $\mathbf{25 - 5}\boldsymbol{h}$	**velocidad media** $(\boldsymbol{m/s})$
$[\mathbf{2}; \mathbf{3}]$	$h = 1$	$25 - 5(1)$	$20\ m/s$
$[\mathbf{2}; \mathbf{2.5}]$	$h = 0.5$	$25 - 5(0.5)$	$22.5\ m/s$
$[\mathbf{2}; \mathbf{2.1}]$	$h = 0.1$	$25 - 5(0.1)$	$24.5\ m/s$

$[\mathbf{2};\mathbf{2.01}]$	$h = 0.01$	$25 - 5(0.01)$	$24.95\ m/s$
$[\mathbf{2};\mathbf{2.001}]$	$h = 0.001$	$25 - 5(0.001)$	$24.995\ m/s$
$[\mathbf{2};\mathbf{2.0001}]$	$h = 0.0001$	$25 - 5(0.0001)$	$24.9995\ m/s$

Del mismo modo, para valores negativos de h.

Tabla 3.

Velocidad media cuando h es negativo

Intervalo de tiempo	$\boldsymbol{h}$	**Fórmula de la velocidad media** $\mathbf{25-5}\boldsymbol{h}$	**velocidad media** ($\boldsymbol{m/s}$)
$[\mathbf{1};\mathbf{2}]$	$h = -1$	$25 - 5(1)$	$30\ m/s$
$[\mathbf{1.5};\mathbf{2}]$	$h = -0.5$	$25 - 5(-0.5)$	$27.5\ m/s$
$[\mathbf{1.9};\mathbf{2}]$	$h = -0.1$	$25 - 5(-0.1)$	$25.5\ m/s$
$[\mathbf{1.99};\mathbf{2}]$	$h = -0.01$	$25 - 5(-0.01)$	$25.05\ m/s$
$[\mathbf{1.999};\mathbf{2}]$	$h = -0.001$	$25 - 5(-0.001)$	$25.005\ m/s$
$[\mathbf{1.999};\mathbf{2}]$	$h = -0.0001$	$25 - 5(-0.0001)$	$25.0005\ m/s$

Es claro que la velocidad media en el intervalo de tiempo $[2; 2 + h]$ se acerca al valor de $25\ m/s$ cuando h es cada vez más pequeño, ya sea para valores positivos y negativos. De esta forma, el autor describe este hecho señalando que la velocidad media tiende al límite 25 cuando h tiende a cero. De esta manera, llama a tal valor encontrado como la velocidad instantánea en el instante $t = 2$.

A partir del ejemplo anterior, Apóstol (2001) plantea encontrar la velocidad instantánea para cualquier otro instante. Es así como considera el intervalo de tiempo $[t; t + h]$ y halla el cociente incremental o velocidad media,

$$\begin{aligned} v_{media} &= \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \frac{(45(t+h) - 5(t+h)^2) - (45(t) - 5(t)^2)}{h} \\ &= 45 - 10t - 5h \end{aligned}$$

Posteriormente, el autor sigue el procedimiento iterativo de disminuir h, es decir, cuando h tiende a cero, donde la expresión anterior tiende al limite $45 - 10t$. Este valor define la velocidad instantánea en el instante t y es denotado por $v(t)$,

$$v(t) = 45 - 10t.$$

Es importante señalar que procedimiento para calcular $v(t)$ a partir del cociente incremental se denomina *“determinar el límite cuando h tiende a cero*” y se expresa simbólicamente como,

$$v(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Así, a partir de tal resultado, el autor comenta que este problema señala el camino para introducir el concepto de la derivada (ver Anexo 1).

De esta manera, a partir de cómo ha evolucionado la variación en el Cálculo y cómo ésta influenció hacia la construcción y conceptualización de la tasa de variación media e instantánea, nos permite entender cómo aspectos variacionales influenciaron, como mediador, al desarrollo de distintos objetos matemáticos, como por ejemplo, en la construcción noción de derivada desde el problema de la velocidad.

En ese sentido, procederemos a estructurar una situación de aprendizaje que guíe al estudiante a construir la tasa de variación media e instantánea.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo, presentaremos el contexto de la parte experimental de nuestra investigación, en la cual se describe a los sujetos de estudio y el lugar de la aplicación de la situación de aprendizaje. Del mismo modo, describiremos cómo fue diseñada e implementada tal situación de aprendizaje, así como su análisis a las acciones esperadas y obtenidas por parte de los estudiantes.

Es importante señalar que la parte experimental es implementada en la ciudad de Valparaíso-Chile, ya que la investigación presentada se sitúa entre un convenio específico por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) y la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y por ello son considerados estudiantes tal ciudad.

3.1 Escenario y sujetos de investigación

En nuestra investigación, la parte experimental se llevó a cabo en dos sesiones de clase los días 30 de setiembre y 2 de octubre del 2019, en la que cada sesión el profesor y el investigador estuvieron a cargo.

Para el estudio participaron cinco estudiantes (entre 15-17 años) del cuarto y último año de Educación Secundaria, pertenecientes a una institución educativa en la ciudad de Valparaíso, Chile.

La institución educativa mencionada corresponde a la modalidad de formación diferenciada Humanista-Científico. Según la distribución de temas correspondiente a la asignatura de Matemática, se distinguen temas como limites, derivadas e integrales, así como probabilidades y estadística descriptiva inferencial, pensamiento computacional y programación y, por último, Geometría 3D (MINEDUC, 2019).

Como se señala en la sección 1.2 del Capítulo 1, el programa curricular chileno (MINEDUC, 2009) fue actualizado y en ella se incluyeron los temas mencionados; sin embargo, la institución educativa ya contaba con tales temas cuando fue aplicado la parte experimental de esta investigación.

El lugar donde se llevaron a cabo ambas sesiones de la parte experimental fue el salón de clase (en horario de clase) de la institución educativa, la cual contaba con una pizarra acrílica y material de escritorio. El aula no estaba equipada con computadoras, por lo que fue necesario proporcionar laptops a los estudiantes, las cuales contaban con el *Software* GeoGebra versión 5.0.573.0 de libre distribución.

Cabe señalar que sólo se contaba con cuatro laptops, por lo que se decidió agrupar a los estudiantes en dos binomios y uno individual. Tal agrupación fue establecida por el profesor, ya que tenía conocimiento del trabajo individual de cada estudiante.

Con respecto a la recolección de información, se diseñó una situación de aprendizaje, así como applets del GeoGebra, los cuales fueron proporcionados a los estudiantes para su resolución y manipulación, respectivamente.

Sobre el manejo del GeoGebra, no fue necesario una previa introducción, puesto que los estudiantes conocían el Software y ya habían trabajado con él; sin embargo, se dispuso que los estudiantes puedan consultar al profesor y/o investigador sobre el manejo de las herramientas correspondiente a este *Software*.

Por otro lado, para registrar la información sobre la producción de los estudiantes, se optó por grabar en audio y video ambas sesiones con una cámara GoPro, la cual fue proporcionado por el profesor de aula. Tal registro fue de gran utilidad para capturar información no detallada en las fichas de trabajo.

En este punto, es importante señalar que, para la presentación de análisis de resultados, se decidió elegir objeto de análisis la producción de los binomios de estudiantes. Para salvaguardar la identidad de los estudiantes elegidos, en adelante llamaremos a cada binomio de Binomio 1 (B1) y Binomio 2 (B2).

De esta forma, bajo estas consideraciones para la parte experimental, a continuación, describiremos el diseño de la situación de aprendizaje.

3.2 Diseño de la situación de aprendizaje

Debido al objetivo de nuestra investigación, la situación de aprendizaje ha sido diseñada principalmente con el propósito de evidenciar las acciones de los estudiantes cuando resuelven tareas con la tasa de variación. Tal propósito será estudiado a partir de la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, identificación de los planos verticales asociados a tales génesis, así como de los paradigmas del Análisis (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016) que se privilegian cuando resuelven tales tareas.

En líneas generales, la situación de aprendizaje a diseñar se traduce en determinar la velocidad instantánea de un objeto. Para ello, nos referenciamos en articular la construcción de la tasa de variación media e instantánea y el estudio de la pendiente de la recta secante y tangente a la curva. Particularmente, partimos con el estudio de la variación de la velocidad respecto al tiempo, para luego estudiar la variación de la pendiente de una recta secante a la curva cuando uno de los puntos de intersección se acerca al otro punto, es decir, cuando el punto Q se acerca al punto P y h es cada vez más pequeño (ver Figura 12)

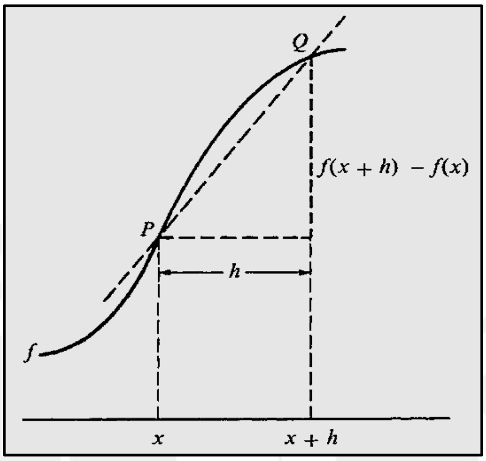


Figura 12. Interpretación geométrica de la situación de aprendizaje
Fuente: Apóstol (2001, p. 207)

La situación de aprendizaje que presentamos, se basa a partir del problema de la velocidad presentado en el capítulo 2 y en diferentes investigaciones (Silva, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Villa-Ochoa, Gonzáles-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017), las cuales toman a la tasa de variación como la variación o cambio de la velocidad en relación al tiempo.

De esta manera, para el diseño, consideraremos el problema de hallar velocidad en un punto, es decir, la velocidad instantánea.

Presentamos, a continuación, el problema asociado a nuestra situación de aprendizaje (ver Figura 13)

LA CARRERA DE SACOS

Jorge es un participante en una carrera de sacos. Ayudados de un cronómetro sus amigos tomaron los datos de las distancias en cada segundo recorrido tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo en segundos (t)	0	2	4	5	7	10
Distancia en metros (d)	0	0,8	3,2	5	9,8	20

Siguiendo la estructura del juego de Jorge y los sacos, determinaremos cuánto es exactamente la velocidad en el instante cuando $t = 7$ segundos.

Figura 13. El problema presentado a los estudiantes

Como ya habíamos mencionado en la sección anterior, la parte experimental se llevó a cabo en dos sesiones de clase, razón por la cual que nuestra situación de aprendizaje también se dividió en dos, Parte 1 y Parte 2.

A partir del problema *La carrera de sacos,* elaboramos un conjunto de 18 tareas para su desarrollo secuencial, divididas entre tales partes (ver Anexo 2 y 3), las cuales direccionan al estudiante hacia la construcción de la tasa de variación media e instantánea como velocidad media e instantánea, respectivamente, por medios de tareas (ver Tabla 4).

Tabla 4.
Objetivos de la situación de aprendizaje

Parte	Objetivo	Duración	N° de tareas
1	Desarrollar intuitivamente el tránsito entre la variación y la tasa de variación media, visto como velocidad media.	60 min	8
2	Desarrollar intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea, visto como velocidad instantánea.	80 min	10

Es importante señalar que, para el análisis de la producción de los estudiantes, algunas tareas se unificaron en pares, ya que ciertas tareas necesitan emparejarse para alcanzar su propósito.

De esta forma, con la finalidad de garantizar que las tareas propuestas en la situación de aprendizaje hayan sido bien diseñadas y, en consecuencia, pueden ser efectivas en el salón de clase, se presenta el análisis (didáctico) de la situación de aprendizaje, es decir, se realizaremos un análisis que describe las acciones que esperamos obtener por parte de los estudiantes (análisis-esperado). Del mismo modo, se presentaremos el análisis de las acciones obtenidas en la producción matemática de los estudiantes (análisis-obtenido).

3.3 Análisis de la situación de aprendizaje

El análisis que presentaremos a continuación, lo consideramos de suma importancia, ya que nos da un alcance de cómo los estudiantes podrían afrontar las tareas propuestas. De esta manera, contemplaremos lo que puede suceder en la implementación de la situación de aprendizaje y prever posibles estrategias que puedan escoger los estudiantes.

En ese sentido, presentaremos una descripción más detallada de las tareas de la parte 1 y 2 de la situación de aprendizaje. Para ello, primero realizaremos un análisis de las acciones esperadas por el investigador, luego se mostraremos el análisis de lo ocurrido durante la aplicación de la situación de aprendizaje, en este caso de la producción matemática de los binomios B1 y B2. Posteriormente, contrastaremos la información obtenida bajo las consideraciones del referencial teórico a usar, es decir, con el ETM.

Análisis de la parte 1

Como se señala en la Tabla 6, la parte 1 de la situación de aprendizaje consta de ocho tareas diseñadas para un desarrollo secuencial. El propósito para este diseño es evidenciar las acciones de los estudiantes cuando resuelven tareas con la tasa de variación o velocidad media.

De esta forma, tal propósito es estudiado a partir de la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, identificación de los planos verticales asociados a tales génesis, e identificación de los paradigmas del Análisis que son privilegiados al resolver cada tarea dada (ver Figura 14)

Parte 1 - Tarea 1

1. A partir de la tabla:
   a. ¿Cuál es la variación de la distancia cuando Jorge transcurre entre los segundos 7 y 10? Escriba detalladamente cómo halló tal variación.
   b. ¿Cuál es la variación del tiempo cuando la distancia varía entre los 9,8 m. y 20 m.? Escriba detalladamente como halló tal variación.
   c. ¿Qué expresión matemática (fórmula) relaciona las magnitudes utilizadas en la tabla anterior? ¿De qué forma influye la variación de la distancia y la variación del tiempo a dicha fórmula? Explique detalladamente.

Figura 14. Parte 1 - Tarea 1

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 1)

La tarea 1 (ítems a), b) y c)) tiene por finalidad que los estudiantes determinen la fórmula de velocidad en un intervalo de tiempo, es decir, la velocidad media, a partir del reconocimiento de la variación entre las magnitudes distancia y tiempo. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Sem-Dis].

La génesis instrumental se activa cuando el artefacto *tabla de valores* sufre una instrumentalización, ya que mediante ella el estudiante observa y produce escritos que lo guían a establecer la variación de las magnitudes distancia y tiempo. Por su parte, la génesis semiótica se activa cuando los estudiantes visualizan y/o interpretan que la variación de una magnitud corresponde a la diferencia entre el valor final e inicial de las magnitudes en juego y así el plano vertical [Sem-Ins] es activado.

Se espera que los estudiantes realicen las operaciones a partir de los valores de la tabla,

$$\Delta d = 20m - 9{,}8m = 10{,}2\ m.$$

$$\Delta t = 10s - 7s = 3\ s.$$

Por otro lado, la génesis discursiva se activa cuando el estudiante relaciona y justifica que la fórmula de velocidad media proviene a través de conceptos de la Cinemática o del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). Con ello, el plano vertical [Sem-Dis] es activado.

Se espera que los estudiantes realicen operaciones relacionando las variaciones de las magnitudes y determinen la fórmula de la velocidad media,

$$v_{media} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

A partir de las acciones antes descritas, se considera que al utilizar procesos algorítmicos y signos correspondientes a la noción de variación se estaría privilegiando los paradigmas Análisis Calculatorio (AC) y Análisis Geométrico/Aritmético (AG), respectivamente.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 - Tarea 1)

A continuación, presentamos el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Con respecto a las tareas a) y b), se observa que B1 utiliza la tabla de valores para determinar la variación de las magnitudes distancia y tiempo. Para ello, B1 observa la tabla y produce operaciones algebraicas (resta) a los valores de las magnitudes. Así, obtienen los resultados 10,2 y 3, correspondiente a las variaciones de distancia y tiempo, respectivamente.

Luego, B1 señala que "*para calcular la variación de distancia, debemos restarle al mayor dato el menor"* análogo para la variación del tiempo. Además, denota a las cantidades pedidas como "variación(d)" y "variación(t)", lo que les permite llegar a la solución de la tarea.

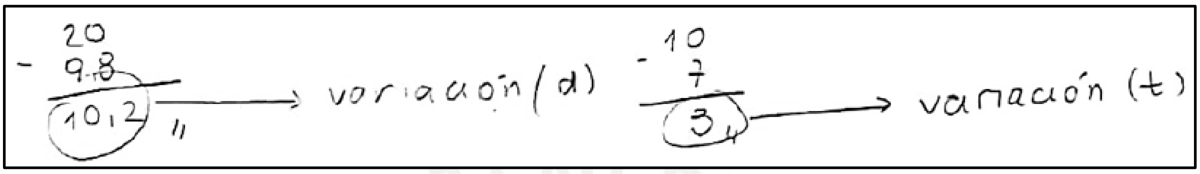


Figura 15. Producción de B1, Parte 1 - Tarea 1a, 1b

Para la tarea c), B1 establece la fórmula que involucra las magnitudes distancia y tiempo la cual corresponde a la velocidad. Si bien este resultado relaciona correctamente las magnitudes, no es la respuesta que esperábamos. En su producción escrita, explican que tal resultado se relaciona directa e inversamente proporcional a la distancia y tiempo, respectivamente.

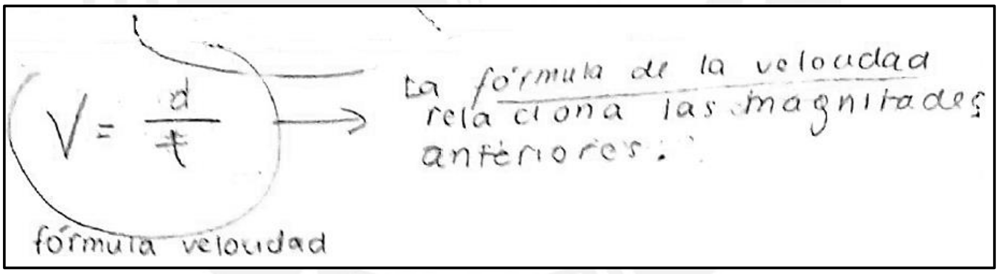


Figura 16. Producción de B1, Parte 1 - Tarea 1c

De esta forma, las producciones realizadas por B1 para la tarea a) y b) evidencian la manipulación del artefacto *tabla de valores*, lo cual les permite realizar observaciones y producir escritos en el registro algebraico que conducen a establecer la variación de las magnitudes distancia y tiempo.

Esta manipulación hecha por B1, los lleva a descifrar que la variación de una magnitud corresponde a la diferencia entre su valor final e inicial. Además, cuando B1 denota las variaciones obtenidas, interpretamos que los signos usados son implícitamente las expresiones Δd y Δt (ver Figura 15) y es así que estas acciones evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por su parte, en la producción para la tarea c), se evidencia un razonamiento empírico sobre la obtención de la fórmula de velocidad; sin embargo, no se aprecia ninguna justificación teórica basada en conceptos del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU), pero si una descripción a sus acciones basada en *magnitudes proporcionales.*

El hecho de que no se valide a partir del referencial teórico, en este caso MRU, se debe posiblemente a que B1 no considera as variaciones de las magnitudes. Estas acciones evidencian que la génesis discursiva no es activada.

Por otro lado, a partir de los procedimientos algorítmicos realizados en la tarea a) y b) por B1, se afirma que se privilegió el paradigma Análisis Calculatorio (AC)

Binomio B2

En relación a las tareas a) y b), se observa que B2 utiliza la tabla de valores para determinar la variación de las magnitudes distancia y tiempo, respectivamente. Para ello, B1 observa la tabla y produce operaciones algebraicas (resta) a los valores de las magnitudes. Así, obtiene los resultados 10,2 y 3, correspondiente a las variaciones de distancia y tiempo, respectivamente. Luego, según la producción escrita: "*entendemos por variación como la diferencia entre el cambio de datos.* ($\Delta d \rightarrow d_f - d_i$)", análogo para la variación del tiempo (ver Figura 17). Además, para denotar a tales variaciones halladas, B2 utiliza Δd y Δt, lo que le permite llegar a la solución de la tarea.

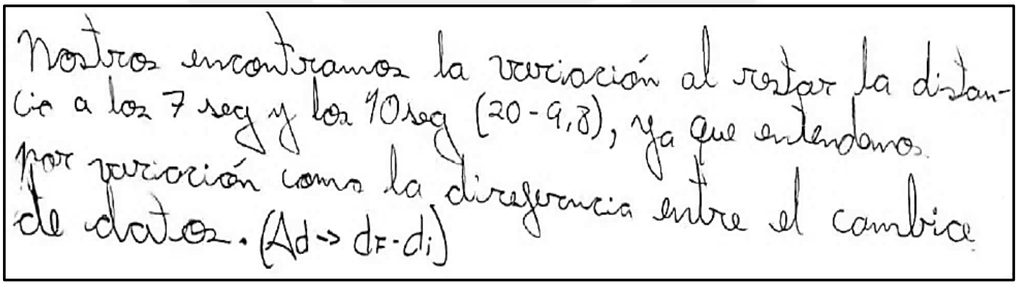
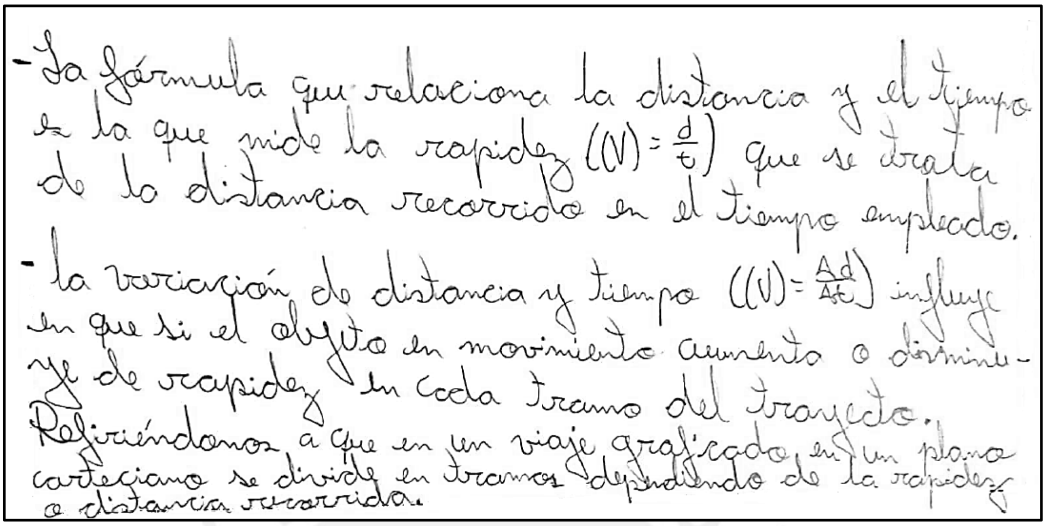

Nostros encontramos la variación al restar la distan-
cia a los 7 seg y los 10seg (20-9,8), ya que entendemos
por variación como la diferencia entre el cambio
de datos. (Δd -> dF-di)

Figura 17. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 1a

En relación a la tarea c), B2 establece que la fórmula que relaciona las magnitudes distancia y tiempo correspondiente a la velocidad y la denota como $v = \frac{d}{t}$. A diferencia de B1, B2 denota a la variación de la distancia y tiempo como $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$. También señala que: *"el objeto en movimiento disminuye o aumenta de rapidez en cada tramo de trayecto"*, lo cual es una descripción empírica de la velocidad media; sin embargo, se observa que existe una confusión entre rapidez y velocidad, siendo estas una magnitud escalar y vectorial, respectivamente.



- La fórmula que relaciona la distancia y el tiempo es la que mide la rapidez ((V) = $\frac{d}{t}$) que se trata de la distancia recorrido en el tiempo empleado.
- la variación de distancia y tiempo ((V) = $\frac{\Delta d}{\Delta t}$) influye en que si el objeto en movimiento aumenta o disminuye de rapidez en cada tramo del trayecto.

Refiriéndonos a que en un viaje graficado en un plano carteciano se divide en tramos dependiendo de la rapidez o distancia recorrida.

Figura 18. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 1c

La producción realizada por B2 para la tarea a) y b) evidencian la manipulación del artefacto *tabla de valores*, lo cual les permite realizar exploraciones y producir escritos, este último en el registro algebraico, para establecer la variación de las magnitudes distancia y tiempo. Además, tal exploración los lleva a descifrar que la variación de una magnitud corresponde a la diferencia entre su valor final e inicial.

Un punto a considerar para esta producción fue el uso de la expresión *"cambio de datos"*, así como los signos: "Δd" y "Δt", los cuales representan explícitamente la noción de variación. Por tanto, estas acciones evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Con respecto a la tarea c), B2 evidencia un razonamiento perceptivo sobre la obtención de la fórmula de velocidad media a partir de la variación de las magnitudes distancia y tiempo. Además, es importante subrayar que, si bien no se aprecia una validación estructurada teórica, la identificación y uso de las fórmulas $\Delta d \rightarrow d_f - d_i$ y $\Delta t \rightarrow t_f - t_i$ para las tareas a) y b), nos permite afirmar que se usaron conceptos de MRU. Así, la génesis discursiva es activada y con ello el plano vertical [Sem-Dis].

Por otro lado, a partir de los procedimientos algorítmicos realizados en la tarea a) y b) y la representación de signos referentes a la noción de variación, se evidencia que se privilegiaron los paradigmas Análisis Calculatorio (AC) y Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Parte 1 - Tarea 2

2. Sabiendo que la distancia depende del tiempo, calcule el valor de la fórmula hallada en el ítem "1.c." cuando el tiempo transcurre entre los segundos 7 y 10. Con sus palabras escriba detalladamente la interpretación matemática de dicho valor encontrado.

Figura 19. Parte 1 - Tarea 2

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 2)

La tarea 2 tiene por finalidad que los estudiantes calculen e interpreten la velocidad media. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica e instrumental y el plano vertical [Sem-Ins].

La génesis semiótica se activa cuando los estudiantes visualizan la fórmula de velocidad media (obtenida en la tarea 1c) como una razón o cociente entre la variación de la distancia y la variación del tiempo. A partir de este proceso de visualización, consideramos tal fórmula como artefacto simbólico.

De esta manera, la génesis instrumental se activa cuando los artefactos *tabla de valores* y *fórmula de velocidad media* sufren una instrumentalización que guía al estudiante a observar y explorar procedimientos hacia la respuesta de la tarea. Con ello, el plano vertical [Sem-Ins] es activado.

Se espera que los estudiantes realicen las operaciones a partir de la fórmula de velocidad media,

$$v_{media} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{20m - 9{,}8m}{10s - 7s} = \frac{10{,}2m}{3s} = 3{,}4\ m/s$$

Se considera que al utilizar procesos algorítmicos correspondientes a nociones de variación, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Calculatorio (AC). De esta manera, se espera que los estudiantes empleen este paradigma.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 – Tarea 2)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Se observa que B1 realiza operaciones algorítmicas (resta y división) para determinar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo pedido. Para ello, B1 utiliza la formula obtenida en la tarea 1c. Así, obtiene como resultado 3,4 correspondiente a la variación de la velocidad, la cual denota de V. Luego, bajo esa denotación, describe detalladamente cómo se obtuvo tal valor.

> ⇒ Para calcular el valor de V, utilizamos
> los datos anteriores. Conociendo que 10,2
> y 3 eran las variaciones de distancia y
> tiempo respectivamente. Procedimos a utilizar
> la fórmula y reemplazar valores.
> El resultado dio 3,4.

Figura 20. Producción de B1, Parte 1 - Tarea 2

De esta forma, la producción realizada por B1 evidencia la visualización y manipulación del artefacto *fórmula de variación de velocidad* (o velocidad media). A partir de ello, el artefacto sufre una instrumentalización por parte de B1, lo cual le permite al binomio realizar observaciones y producir escritos en el registro algebraico que conducen a establecer la variación de la velocidad. Así, estas acciones evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Dis].

Binomio B2

Se observa que B2 realiza el mismo procedimiento de solución que B1, es decir, utiliza la formula obtenida en la tarea 1c y luego realizan operaciones algorítmicas (resta y división) para determinar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo pedido. De este modo, obtienen de resultado $V = 3{,}4$ correspondiente a la variación de la velocidad. En ese sentido, si bien en la tarea 1c B2 indica a la variación y velocidad en términos de Δd y Δt, en esta tarea utiliza la denotación $V = \frac{d}{t}$ para detallar cómo obtuvieron su respuesta. Adicional a ello, la confusión entre rapidez y velocidad aún está presente.

> Siendo la rapidez: $\frac{d}{t}$, reemplazamos los datos en la
> fórmula, quedando $\frac{10{,}2}{3}$. Siendo 10,2 la distancia
> recorrida entre los 7 y 10 seg. y el 3 los segundos
> que pasaron.

Figura 21. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 2

Como lo mencionamos antes, el proceso de solución de B2 es similar al de B1, ya que la producción realizada por B2 evidencia una visualización y manipulación del artefacto *fórmula de variación de velocidad* (o velocidad media) para que posteriormente esta sufra una instrumentalización y así realizar observaciones y producir escritos en el registro algebraico que lo dirijan a establecer la variación de la velocidad. De esta forma, se evidencia la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, en las producciones de B1 y B2 se evidencia el uso de procesos algorítmicos con las variacionales de las magnitudes para la tarea 2. En consecuencia, podemos decir que se privilegió el paradigma Análisis Calculatorio (AC).

Parte 1 - Tarea 3 y 4

3. Calcule la velocidad en el intervalo (velocidad media "v") el los intervalos de tiempo $[5;7]$ y $[7;10]$.
4. A partir de los resultados a las preguntas anteriores, diga con sus propias palabras ¿Cómo podemos calcular la velocidad media?

Figura 22. Parte 1 - Tarea 3 y 4

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 3 y 4)

Las tareas 3 y 4 tienen por finalidad que los estudiantes calculen y describan el procedimiento de cálculo de la velocidad media en un intervalo de tiempo específico. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

La génesis semiótica se activa cuando los estudiantes reconocen el artefacto *fórmula de velocidad media,* para posteriormente realizar su tratamiento en el registro algebraico. Además, consideramos que, a partir de la manipulación de tal fórmula, se da el proceso de instrumentalización, lo cual permite activar la dinámica en la génesis instrumental. Con ello, el plano vertical [Sem-Ins] es activado.

De esta manera, se espera que los estudiantes realicen las siguientes operaciones calculando la velocidad media en los intervalos de tiempo $[5;7]$ y $[7;10]$:

$$v_{media}\,[5;7] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{9{,}8m - 5m}{7s - 5s} = \frac{4{,}8m}{2s} = 2{,}4\, m/s$$

$$v_{media}\,[7;10] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{20m - 9{,}8m}{10s - 7s} = \frac{10{,}2m}{3s} = 3{,}4\ m/s$$

Por su parte, la génesis discursiva se manifiesta cuando los estudiantes basan sus argumentaciones a través de conceptos de la Cinemática o del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). Esta génesis es mediada por los procesos de exploración y experimentación a la *fórmula de velocidad media* en la tarea 3, lo cual determina la activación del plano [Ins-Dis].

De esta manera, se espera que los estudiantes declaren que, para determinar la velocidad media, se necesita la razón entre una porción de la distancia (ubicación inicial y final) y un intervalo de tiempo (tiempo inicial y final), esta última asociada a dicha distancia.

Así, se considera que, al utilizar procesos algorítmicos correspondientes a nociones de variación, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Calculatorio (AC). De tal modo, se espera que los estudiantes empleen tal paradigma.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 - Tarea 3 y 4)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Con respecto a la tarea 3, se observa que, para calcular las velocidades medias en cada caso, B1 utiliza la fórmula de velocidad media. Para ello, primero observa la tabla de valores de la tarea 1 y luego produce operaciones algebraicas (resta y división) a partir de la formula. De este modo, B1 llega a que las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[5;7]$ y $[7;10]$ son 2,4 m/s y 3,4 m/s, respectivamente. Esta tarea la resolvieron sin ninguna dificultad.

En la tarea siguiente, se observa que B1 la relacionan con el resultado de la tarea 2, al considerar un proceso de desarrollo similar. De acuerdo con la grabación de audio y video, que los miembros de B1 mantuvieron una discusión sobre cómo determinar la velocidad media, lo cual les hizo reflexionar sobre tal velocidad en un intervalo de tiempo. Así, según B1, "*para calcular la velocidad media debemos calcular la velocidad en un intervalo de tiempo*" (ver Figura 23). Este resultado describe correctamente lo analizado previamente.

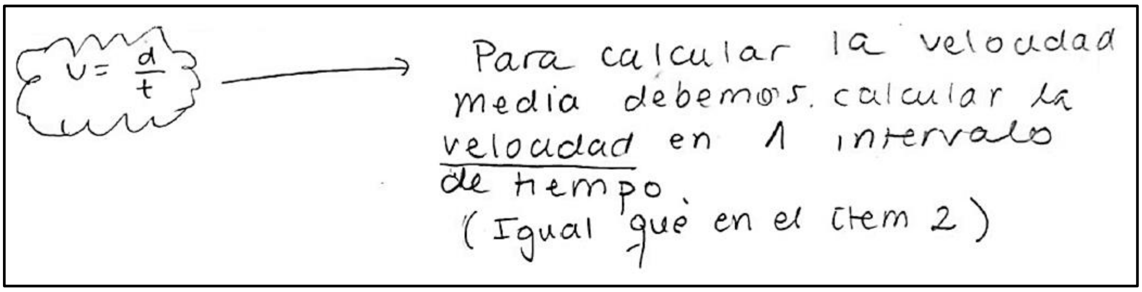


Figura 23. Producción de B1, Parte 1 - Tarea 4

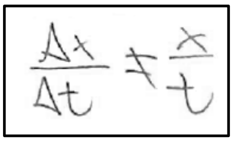
La producción realizada por B1 en la tarea 3 evidencia el reconocimiento y manipulación del artefacto *formula de velocidad media*. Esta acción de construcción interna hecha por B1 conlleva a una instrumentalización del artefacto, la cual les permitió realizar observaciones y producir escritos en el registro algebraico para calcular el valor de las velocidades medias en cada caso. Estas acciones evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por su parte, la producción de B1, en la tarea 4, evidencian un razonamiento que explica cómo obtener la fórmula de velocidad media a partir de la tarea 2. Si bien esta validación empírica no se justifica específicamente en referenciales teóricos, como el MRU, la relación que se establecen entre la tarea 2 y 4 para llegar a la respuesta, nos permite determinar que se construye una definición a partir de un razonamiento inductivo. De esta forma, la génesis discursiva es activada y con ello el plano vertical [Ins-Dis].

Binomio B2

Se observa que B2 realiza similares procedimientos que B1 para resolver la tarea 3. Primero considera las cantidades de la tabla de valores. Luego, utiliza la fórmula de velocidad media, para posteriormente producir operaciones algebraicas (resta y división) a partir de ella.

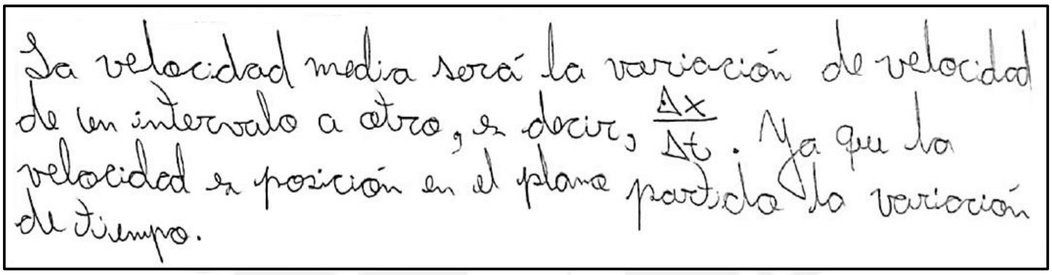
De esta forma, B2 calcula que las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[5; 7]$ y $[7; 10]$ son 2,4 m/s y 3,4 m/s, respectivamente; sin embargo, notamos que B1 indica a la distancia recorrida como "x" y establece que, $\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq \frac{x}{t}$ (ver Figura 24). Así, esta tarea la resolvieron sin alguna dificultad, al igual que B1.



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq \frac{x}{t}$$

Figura 24. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 3

En la tarea 4, B2 indica a la velocidad media como $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, a diferencia de B1. Particularmente, B2 señala: "*la velocidad media será la variación de velocidad de un intervalo a otro, es decir,* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$". Posterior a esta afirmación, usa la expresión "partido" para describir el cociente entre la variación de distancia y tiempo (ver Figura 25)



La velocidad media será la variación de velocidad de un intervalo a otro, es decir, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Ya que la velocidad es posición en el plano partido la variación de tiempo.

Figura 25. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 4

La producción realizada por B2 en la tarea 3, evidencia el reconocimiento y manipulación del artefacto *formula de velocidad media.* Esta acción de construcción interna conlleva a una instrumentalización del artefacto, la cual le permite a B2 realizar exploraciones y producir escritos en el registro algebraico, para luego calcular el valor de las velocidades medias pedidas, tal y como ocurrió con B1.

Además, el hecho de que B2 escribiera $\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq \frac{x}{t}$, nos lleva a considerar que las acciones para resolver la tarea 2 condujeron a este binomio a establecer una relación de inigualdad entre la velocidad y velocidad media, la cual no estaba dentro de nuestro análisis de las acciones esperadas. De este modo, estas acciones evidencian la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otra parte, a partir de los signos "$\frac{\Delta x}{\Delta t}$" o *"partido"* usados en tarea 4, existe un razonamiento inductivo que conlleva a una empírica definición de la velocidad media; sin embargo, esta no está basada en algún referencial teórico específico, en este caso el Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). De esta manera, luego de la experimentación dada en la tarea 3 y la descripción realizada en el registro de lengua natural en la tarea 4, permite evidenciar que la génesis discursiva fue activada y con ello el plano vertical [Ins-Dis].

De las producciones de B1 y B2, consideramos que se privilegió el paradigma Análisis Calculatorio (AC), ya que en las tareas 3 y 4, ambos binomios realizaron procesos algorítmicos correspondientes a la variación, particularmente a la velocidad media.

Parte 1 - Tarea 5 y 6

5. Admita que la expresión que define la tabla de valores es dada por $d(t) = \frac{1}{5}t^2$. Con la ayuda del GeoGebra sigue las siguientes instrucciones.
   a. Represente gráficamente la función $d(t) = \frac{1}{5}t^2$.
   b. Ubique el punto P de abscisa 7 en la gráfica, es decir $P = (7, d(7))$. Análogamente, ubique los puntos A de abscisa 5 y B de abscisa 10 en la gráfica
   c. Con la herramienta recta, trace la recta AP y BP.
   d. Con la herramienta pendiente, determine la pendiente a la recta AP y BP.
6. ¿Cuál es nombre geométrico de las rectas trazadas en el ítem "5.c."? (esta pregunta está contenida en 5.c)

Figura 26. Parte 1 - Tarea 5 y 6

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 5 y 6)

Las tareas 5 y 6 tienen por finalidad que los estudiantes identifiquen y justifiquen las rectas secantes a partir de la construcción de graficas (curvas y rectas) en el Applet de GeoGebra *Parte1_GrupoN.ggb*. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático, se espera que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva y los planos verticales [Sem-Ins] y [Sem-Dis].

En la tarea 5, se espera que los estudiantes sigan la secuencia de pasos y con ello utilicen las herramientas recta y pendiente del GeoGebra para construir y visualizar la gráfica y sus componentes de la curva $d(t) = \frac{1}{5}t^2$, es decir, establecer la articulación entre los procesos de construcción y visualización. Este último proceso conduce a los estudiantes a explorar y descifrar las características de las rectas que interceptan (en dos puntos) a la gráfica de dicha curva, con lo cual la génesis instrumental y semiótica son activadas y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, para la tarea 6, consideramos que el proceso de razonamiento perceptivo permite que los estudiantes activen la génesis discursiva. Esto será evidenciado cuando, a partir de definiciones y propiedades de la Geometría euclidiana, los estudiantes conjeturen, enuncien y/o validen que las rectas que interceptan en dos puntos a la curva son rectas secantes a la gráfica de la curva $d(t)$ en los puntos pedidos. Así, el plano vertical [Sem-Dis] es activado.

Se considera que, al utilizar la gráfica de la curva para realizar interpretaciones a las características de la recta secante, se estaría privilegiando el paradigma Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 - Tarea 5 y 6)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

En la tarea 5, se observa que los componentes de B1 abren el archivo *Parte1_GrupoN.ggb* y siguen la secuencia de pasos dados, es decir, consiguen construir la gráfica de la curva $d(t)$ con sus respectivas rectas y sus pendientes.

Para ello, utilizaron las herramientas del GeoGebra, recta y pendiente. Es importante señalar que B1 experimentaron dificultades en la manipulación del GeoGebra, por lo que el investigador tuvo que auxiliar al binomio.

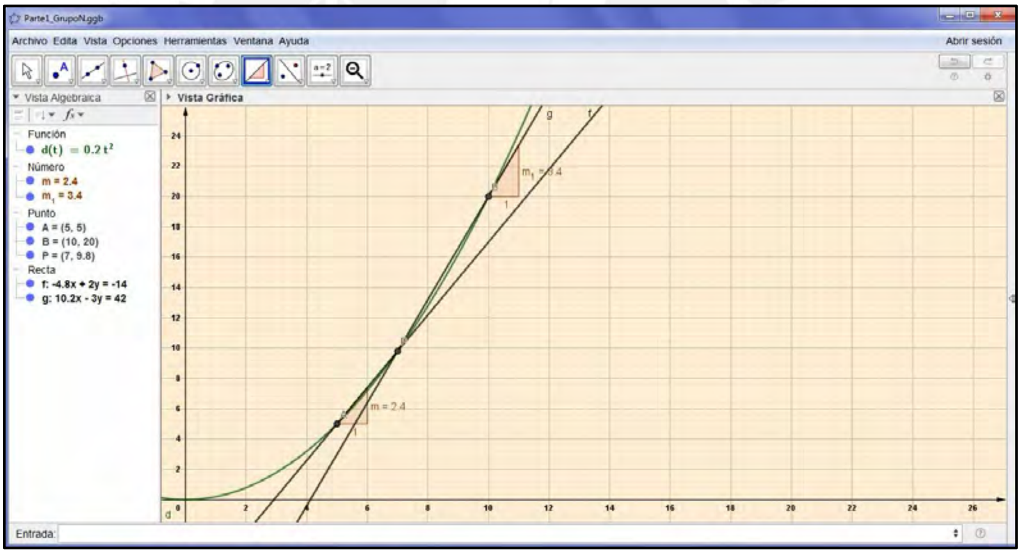


Figura 27. Producción en el GeoGebra de B1, Parte 1 - Tarea 5

Luego de graficar la curva en el GeoGebra, B1 también presentó dificultades para identificar (reconocer) las rectas AP y BP. Según la grabación de audio y video, inicialmente respondieron que estas correspondían a rectas tangentes, lineales o afines; sin embargo, luego de una interacción verbal con el investigador y una observación a la gráfica, específicamente a los puntos de intersección, B1 consigue determinar que tales rectas corresponden a las rectas secantes a la curva $d(t)$, ya que identifica que existen dos puntos que interceptan a dicha curva.

La producción realizada por B1 evidencia la articulación entre los procesos de construcción y visualización, ya que la gráfica de la curva $d(t)$ en el GeoGebra auxilia y permite la exploración hacia la identificación de las rectas secantes AP y BP a dicha curva. Es así que la génesis semiótica e instrumental son activados y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Además, afirmamos que el proceso de visualización desarrolla un razonamiento perceptivo por parte de B1, el cual permite justificar su respuesta a partir de la propiedad de la recta secante.

El siguiente diálogo entre el investigador y un integrante de B1, el cual fue extraído de la grabación de audio y video, es evidencia de esta afirmación:

- Investigador: *¿Qué tipo de rectas conocen? Miren los puntos*
- Integrante de B1: *Tangente*
- Investigador: *¿La recta tangente pasa por dos puntos?*
- Integrante de B1: *No*
- Investigador: *¿entonces?*
- Integrante de B1: *La tangente es la que pasa por un punto*
- Investigador: *¿Qué más? ¿la que pasa por dos puntos?*

El estudiante observa la gráfica en el GeoGebra

- Integrante de B1: *¡Secante!*

De esta forma, la génesis discursiva es activada y con ello el plano [Sem-Dis].

Por otro lado, luego de escuchar la producción oral de B1, consideramos que se privilegió el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG), ya que de la gráfica construida en el GeoGebra surgieron interpretaciones, aunque algunas incorrectas, que dieron lugar a la respuesta que se esperaba.

Binomio B2

En la tarea 5, se observa que los componentes de B2 realizan similares procedimientos que B1, es decir, abre el archivo *Parte1_GrupoN.ggb* y siguen la secuencia de pasos donde consiguen graficar la curva $d(t)$ con sus respectivas rectas y pendientes, todo esto a partir de las herramientas recta y pendiente del GeoGebra. Es importante señalar que B2 también presentaron dificultades en la manipulación del GeoGebra; sin embargo, fueron auxiliados por el profesor.

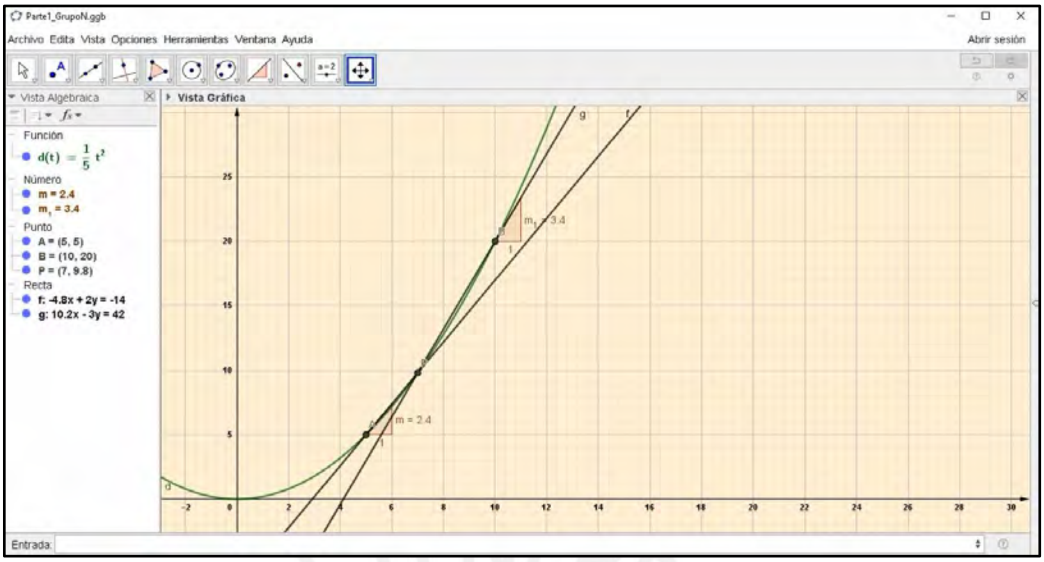


Figura 28. Producción en el GeoGebra de B2, Parte 1 - Tarea 5

Posterior a graficar la curva y sus componentes en el GeoGebra, B2 realiza la tarea 6 en donde se observaron dificultades para identificar las rectas AP y BP.

De acuerdo a la grabación de audio y video, respondieron que, debido a su forma, tales rectas eran lineales, afín y continuas. A pesar de la seguridad de las respuestas, se notó una duda por parte del B2.

En la grabación, se escucha una discusión entre los integrantes, en la cual justifican su respuesta porque eran conceptos que pertenecían a la materia que ya habían estudiado. A pesar de ello y sin una justificación clara, decidieron continuar a la tarea 7.

De esta forma, a partir de la producción realizada por B2, se evidencia la articulación entre los procesos de construcción y visualización a la gráfica de la curva $d(t)$ en el GeoGebra, ya que se evidencia la exploración hacia la identificación de las rectas secantes a dicha curva. Es así que la génesis instrumental y semiótica son activadas y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, si bien el proceso de visualización le permite al binomio desarrollar un razonamiento perceptivo, donde conjetura características de las rectas AP y BP, no consigue el resultado que se espera, a pesar que sus respuestas, las cuales no estaban en nuestro análisis de las acciones esperadas, fueron parcialmente correctas.

De acuerdo con nuestro análisis de las acciones esperadas, el proceso de visualización conlleva a un reconocimiento perceptivo de la curva y sus componentes. Así se evidencia que B2 realiza un leve acercamiento a un razonamiento perceptivo, puesto que solo describe y no justifica lo que ve del gráfico de GeoGebra. Específicamente, de acuerdo con la grabación de audio y video, el binomio expresa: "*es una recta lineal", "la recta afín pasa por el origen*" y *"¡es continua!".* Esto evidencia que la génesis discursiva no fue activada.

Por otro lado, a partir de la gráfica en el GeoGebra, se evidencia que surgieron suposiciones nacidas en la Geometría, como la idea de recta afín o lineal. De este modo, consideramos que se privilegió el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Parte 1 - Tarea 7

7. ¿Qué relación existe entre: los valores hallados en 3., las medidas de las pendientes halladas en "5.d."? Explique detalladamente.

Figura 29. Parte 1 - Tarea 7

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 7)

Esta tarea tiene por finalidad que los estudiantes interpreten y determinen a la velocidad media como la pendiente de la recta secante a la gráfica de la curva. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica e instrumental y el plano vertical [Sem-Ins].

Es importante subrayar que el desarrollo secuencial de las tareas 1, 2 y 3 permiten la construcción e instrumentalización de la *fórmula de velocidad media* como la razón entre la variación de la distancia y la variación del tiempo. En ese sentido, la relación de igualdad que se establece con el uso del GeoGebra en la tarea 5 ofrece otra representación a la velocidad media, es decir, como pendiente de la recta secante a la curva.

De esta manera, la génesis semiótica se activa cuando el proceso de visualización es orientado por la percepción del estudiante. Tal percepción nace a partir de observaciones y exploraciones, tanto al resultado de los cálculos hechos en la tarea 3 como a las pendientes de las rectas secantes graficadas en la tarea 5.

Consecuencia de ello, el proceso de visualización posibilita el tránsito intencionado entre las representaciones algebraica y figural para representar la velocidad media. Así que esperamos que este tránsito entre las representaciones mencionadas permita al estudiante interpretar y conceptualizar la representación de la velocidad media como pendiente de una recta secante.

Se espera que los estudiantes afirmen que la velocidad media es determinada por la pendiente de la recta secante a la curva. Así, se activa el plano vertical [Sem-Ins].

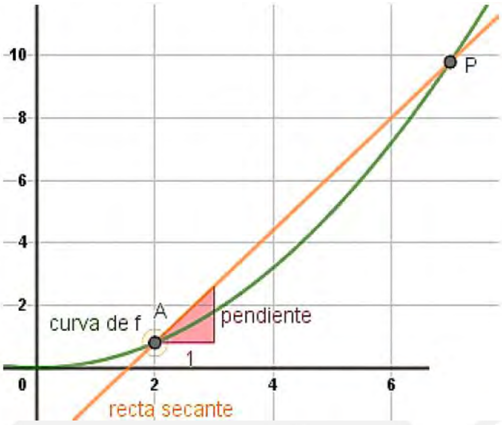


Figura 30. Pendiente de la recta secante a la gráfica de la curva

Se considera que, al utilizar la gráfica de la curva para realizar interpretaciones nacidas en la Geometría, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 - Tarea 7)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Se observa que B1 considera las velocidades medias $4\ m/s$ y $3{,}4\ m/s$ en los intervalos de tiempo $[5;7]$ y $[7;10]$ respectivamente de la tarea 3. Luego, realiza observaciones al valor de las pendientes de las rectas AP y BP. Producto de ello, determina que ambas cantidades son las mismas. Particularmente, el equipo señala: *"las pendientes halladas en 5d son iguales a las velocidades medias de los intervalos de tiempo propuestos en el ejercicio 3".*

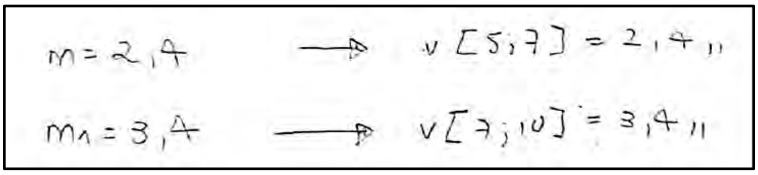


Figura 31. Producción de B1, Parte 1 - Tarea 7

De esta forma, la producción realizada por B1 evidencia que la observación y reconocimiento icónico de los objetos *velocidad media* (como razón de magnitudes) y *pendiente de la recta secante* guían el proceso de visualización, lo cual origina que el binomio percibiera la igualdad de cantidades en ambas tareas.

Si bien la visualización y el reconocimiento perceptivo les permite al binomio establecer la relación de igualdad, la cual se evidencia en su producción escrita, esta corresponde a la representación de la pendiente como velocidad, la cual no estaba en nuestro análisis de las acciones esperadas; sin embargo, de acuerdo a la grabación de audio y video, B2 señala que: "*la pendiente indica la velocidad media en un intervalo*" y *"Está representado por eso* (refiriéndose a la pendiente)". En consecuencia, se evidencia un razonamiento perceptivo, aunque este no permita al binomio establecer la representación de la velocidad media como pendiente de la recta secante.

Por lo anterior, la génesis semiótica e instrumental se activaron y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Binomio B2

Se observa que B2 considera los resultados de los cálculos hechos en tarea 3, es decir, las velocidades medias $4\ m/s$ y $3{,}4\ m/s$ en los intervalos de tiempo $[5;7]$ y $[7;10]$ respectivamente. Luego, realiza observaciones a la gráfica de la curva en el GeoGebra, en concreto al valor de las pendientes de las rectas AP y BP, 4 y $3{,}4$.

En consecuencia, B2 determina que ambas cantidades son iguales, ya que señala que "*la velocidad media en un tramo* (intervalo de tiempo) *equivale a la pendiente de recta*" (ver Figura 32). Además, según la grabación de audio y video, uno de los integrantes del binomio comenta: *"¡mira las pendientes! ¡esto es magia!*", haciendo referencia que ambas cantidades coincidían.

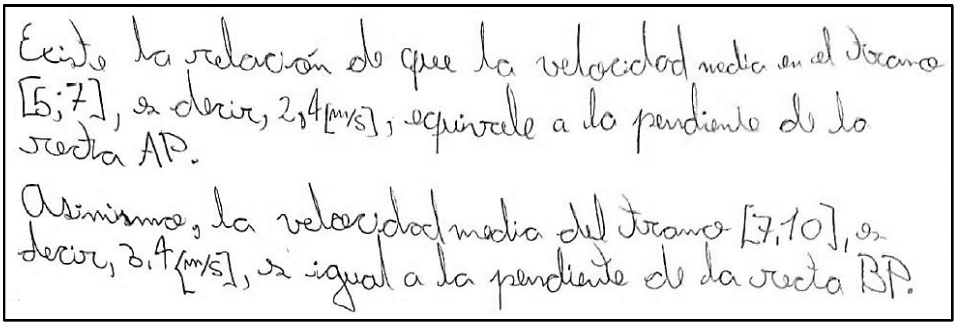

Existe la relación de que la velocidad media en el tramo [5;7], es decir, 2,4[m/s], equivale a la pendiente de la recta AP.
Asimismo, la velocidad media del tramo [7,10], es decir, 3.4[m/s], es igual a la pendiente de la recta BP.

Figura 32. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 7

La producción realizada por B2 evidencia que el proceso de visualización fue guiado a partir de exploraciones y observaciones a los resultados de la tarea 3 y 5, lo cual origina que se percibiera la igualdad de cantidades en ambas tareas.

De esta forma, se evidencia un razonamiento perceptivo que establece la representación de la velocidad media como pendiente de la recta secante. Es así que la génesis semiótica e instrumental es activada y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, consideramos que se privilegió, tanto B1 como B2, el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG), ya que a partir del proceso de visualización se realizaron interpretaciones sobre la representación de la velocidad media como pendiente de la recta secante y como una razón entre variaciones.

Parte 1 - Tarea 8

8. Con la información obtenida, ¿se podría calcular la velocidad en un instante especifico, digamos cuando se tiene $t = 7$ segundos? Justifique su respuesta.

Figura 33. Parte 1 - Tarea 8

Análisis de las acciones esperadas (Parte 1 - Tarea 8)

Esta tarea tiene por finalidad que los estudiantes conjeturen la posibilidad de obtener la velocidad instantánea. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Dis] y [Ins-Dis]

Particularmente, se espera que los estudiantes conjeturen sobre la posibilidad de calcular la velocidad en un instante determinado a partir de procesos semióticos y/o exploraciones mediados por un artefacto. De esta forma, consideramos que la génesis discursiva es activada a través de dos procesos: la visualización y construcción.

El proceso de visualización se da mediante la interpretación de la representación gráfica de la curva y sus componentes asociadas (punto, rectas secantes, pendientes) (ver Figura 30), con lo cual activan la génesis semiótica. Este hecho, es guiado por el razonamiento perceptivo del estudiante, con lo cual el plano vertical [Sem-Dis] es activado.

Por otro lado, el proceso de construcción se da mediante la instrumentalización a la *fórmula de velocidad media*, con lo cual activan la génesis instrumental. Este hecho es guiado por el razonamiento inductivo del estudiante, con lo cual el plano vertical [Ins-Dis] es activado.

Ambos procesos, junto a sus respectivos razonamientos, conducen a los estudiantes a conjeturar sobre la velocidad en un instante específico desde que argumenten nociones de límite y/o aproximaciones.

Además, se considera que, al utilizar la fórmula de velocidad media y la gráfica de la curva para realizar interpretaciones y/o exploraciones que implican nociones de aproximación de variables, se estaría privilegiando los paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Real (AR).

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 1 - Tarea 8)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Para esta tarea, observamos que B1 no realiza producciones escritas; sin embargo, según la grabación de audio y video, se da una discusión entre los integrantes del binomio sobre cómo determinar la velocidad en un instante específico.

Inicialmente, B1 señala que *"un instante específico es lo contrario a la velocidad en un intervalo",* aunque, minutos más tarde, añaden que esta podría ser hallada de igual forma con la fórmula de velocidad media, lo cual no concuerda con lo señalado anteriormente.

En ese sentido, el investigador intervino para auxiliar al binomio. Después de ello, B1 asume que la velocidad en un instante específico se refiere a la velocidad en un punto específico.

Es importante resaltar que, según la grabación de audio y video, se escucha la expresión *"con límites"*, la cual proviene de una respuesta al investigador sobre cómo hallar la velocidad en un punto específico; sin embargo, no existe una justificación para ello, con lo que no se obtuvieron respuestas concretas para esta tarea.

Como se mencionó líneas arriba, B2 no tuvieron producción escrita para esta pregunta; sin embargo, a partir de la grabación de audio y video, se evidencia la observación y exploración a la fórmula de velocidad media hallada en la tarea 3 y 7. Como estos hechos son guiados por la dinámica en la génesis instrumental, se esperaría que exista un razonamiento inductivo que justifique tales exploraciones, pero, a pesar de esto, no se evidencia una validación por parte de B1, por lo que la génesis discursiva no es activada.

Por otro lado, se considera que, al utilizar la fórmula de velocidad para realizar exploraciones e interpretaciones, consideramos que se privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Binomio B2

Para esta tarea, observamos que, según B2, la velocidad en un instante específico es determinada mediante la razón de las magnitudes distancia y tiempo. En la producción escrita del binomio, se señala que tal velocidad tiene valor $1.4\,m/s$ a partir de la fórmula de velocidad.

Según la grabación de audio y video, observamos que inicialmente consideran la tabla de valores de las magnitudes; toman la distancia $9.8\,m$ y el tiempo $7\,seg$, para luego, por medio de la calculadora (de la laptop), dividir tales valores y obtener el resultado. De esta forma, afirman que es posible determinar la velocidad en un instante específico, utilizando la fórmula de la velocidad, por lo que su respuesta es incompleta.

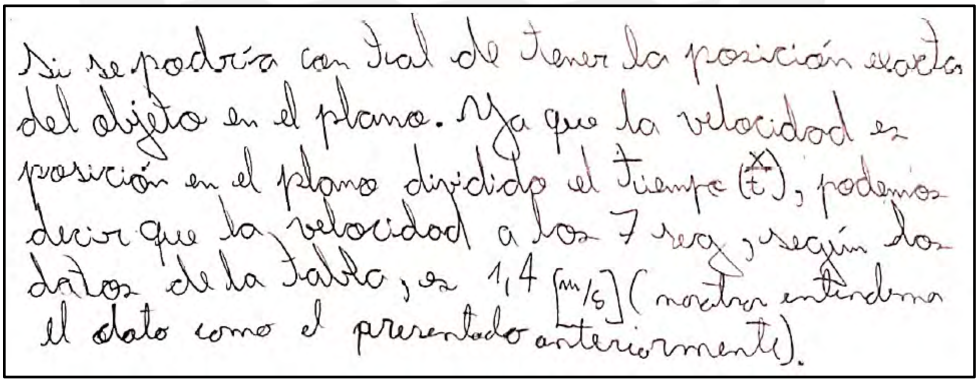

Si se podría con tal de tener la posición exacta
del objeto en el plano. Ya que la velocidad es
posición en el plano dividido el tiempo $\left(\frac{x}{t}\right)$, podemos
decir que la velocidad a los 7 seg, según los
datos de la tabla, es 1,4 [m/s] (nosotros entendemos
el dato como el presentado anteriormente).

Figura 34. Producción de B2, Parte 1 - Tarea 8

En la producción de B2, se considera como artefacto a la fórmula de la velocidad, la cual sufrió una instrumentalización. Este hecho, lleva al binomio a explorar y conjeturar sobre la posibilidad, aunque erróneamente, de determinar la velocidad en un instante específico. En consecuencia, se evidencia un razonamiento inductivo a partir de la dinámica de la génesis instrumental, por lo que la génesis discursiva no es activada.

Por otro lado, a partir de que B2 realiza procedimientos algorítmicos para determinar la velocidad instantánea, decimos que privilegia el paradigma del Análisis Calculatorio (AC). Además, consideramos que, al utilizar la fórmula de velocidad para realizar exploraciones e interpretaciones, ambos binomios privilegian el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Luego de describir los resultados de la parte 1, a continuación, presentamos los resultados obtenidos en la parte 2 de la situación de aprendizaje.

Es importante señalar que la implementación de la parte 2 se realizó dos días después a la parte 1.

Análisis de la parte 2

Como se señala en la Tabla 6, la parte 2 de la situación de aprendizaje consta de 10 tareas diseñadas para su desarrollo secuencial, que incluyen la construcción y manipulación de herramientas en el applet de GeoGebra.

El propósito para este diseño es evidenciar las acciones de los estudiantes cuando resuelven tareas con la tasa de variación media e instantánea o velocidad media e instantánea, respectivamente.

De esta forma, tal propósito es estudiado a partir de la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, identificación de los planos verticales asociados a tales génesis e identificación de los paradigmas del Análisis que son privilegiados al resolver cada tarea.

Parte 2 - Tarea 1 y 2

1. Ejecute el archivo "Parte2_GrupoN". En dicho archivo encontrará la gráfica de $d(t) = \frac{1}{5}t^2$ y el punto A asociado al deslizador "α". Siga los siguientes pasos:
   a. En la barra de entrada grafique el punto P de abscisa igual a 7, es decir $P = (7, d(7))$.
   b. Trace la recta AP y halle su respectiva pendiente.
   c. Luego con la herramienta perpendicular trace una recta perpendicular al eje Y que pase por el punto A y otra recta perpendicular al eje X que pase por el punto P. Indique el punto de intersección entre las rectas anteriores y renombre a este punto con la letra B. Trace el segmento AB y renombre tal segmento $AB = h$.
   d. En la vista gráfica del GeoGebra, oculte la recta perpendicular a eje Y que pasa por A.
2. Responda y verifique los resultados con el GeoGebra. ¿Calcule cuánto es el valor de la velocidad media en el intervalo de tiempo $[5; 7]$? ¿Calcule cuánto es el valor de la velocidad media en el intervalo de tiempo $[7; 10]$?

Figura 35. Parte 2 - Tarea 1 y 2

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 1 y 2)

La tarea 1 cumple la función de guía y tiene por finalidad que los estudiantes grafiquen en el Applet del GeoGebra *Parte2_GrupoN.ggb* la recta secante y su pendiente en un par de puntos de la curva $d(t)$ asociada a la herramienta *deslizador* a. Estas acciones permitirán que el estudiante pueda realizar las tareas posteriores económicamente.

En ese sentido, la tarea 2 tiene por finalidad que los estudiantes calculen la velocidad media a partir de la manipulación de herramientas del GeoGebra o bajo el uso de la *fórmula de la velocidad media*. En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins]. Es importante señalar que esta tarea es similar a la tarea 3 de la Parte 1, con diferencia que esta vez es posible utilizar el GeoGebra para determinar la velocidad media.

La génesis semiótica se activa cuando los estudiantes visualizan e interpretan a la pendiente de la recta secante a la curva, la cual está graficada en la tarea 1 (ver Figura 36) como una representación de la velocidad media. Luego, a partir del proceso de visualización, se considera a la pendiente de la recta secante AP como artefacto simbólico.

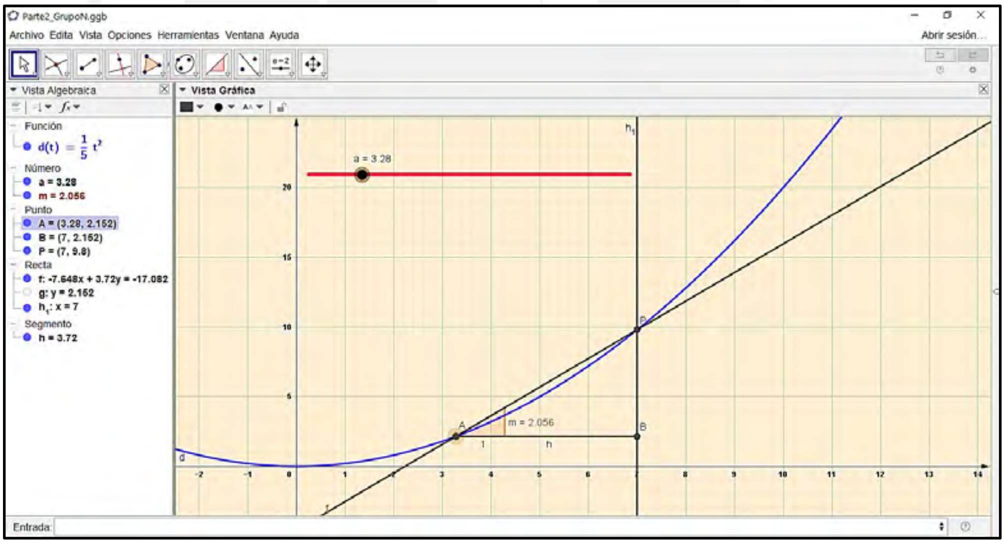


Figura 36. Construcción de herramientas en el GeoGebra de la tarea 1

Por su parte, la génesis instrumental se activa cuando el artefacto: *fórmula de la velocidad media*, sufre una instrumentalización que guía a los estudiantes a observar y explorar procedimientos (experimentación) hacia la solución de la tarea. De esta manera, se espera que los estudiantes realicen operaciones en el registro algebraico,

$$v_1 = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{9{,}8 - 5}{7 - 5} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4\ m/s$$

$$v_2 = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{20 - 9,8}{10 - 7} = \frac{10,2}{3} = 3,4\ m/s$$

a partir de tal artefacto. Así, el plano vertical [Sem-Ins] es activado.

Se considera que al interpretar la velocidad media como la pendiente de la recta secante y/o la razón de dos magnitudes variacionales, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). Además, si quedan definidas explícitamente las reglas del cálculo para hallar tal velocidad, en consecuencia, el paradigma Análisis Calculatorio (AC) es privilegiado.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 - Tarea 1 y 2)

Es importante señalar que, en la descripción de este apartado, ambos binomios realizaron procedimientos similares con pequeñas diferencias, como por ejemplo en el uso del GeoGebra.

A continuación, se presenta el análisis correspondiente a:

Binomios B1 y B2

Para el desarrollo de la tarea 1, tanto B1 como B2 no evidencian dificultades significativas, ya que el orden secuencial es similar a la tarea 5 de la parte 1; sin embargo, ambos binomios consultaron al investigador sobre la funcionalidad de la nueva herramienta *deslizador* a, del cual no tenían conocimiento. A ello, se explicó a cada par brevemente las características de tal herramienta y de esta forma, los binomios graficaron la recta secante AP, la tangente m y el segmento h, asociados tal deslizador a.

Luego, se observa que, tanto B1 como B2, realizan los mismos procedimientos para resolver la tarea 2. Inicialmente, consideran la *fórmula de velocidad media.* Después, observan los valores en la tabla de la Figura 22. Luego, producen operaciones algebraicas (resta y división), en donde ambos binomios concluyen que las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[5; 7]$ y $[7; 10]$ son 2,4 m/s y 3,4 m/s, respectivamente.

Con respecto al uso del GeoGebra, no se observó que los binomios utilicen el deslizador para determinar la pendiente de la recta secante en los intervalos dados para hallar la velocidad media.

$$V = \frac{d}{t}$$

$$V[5;7] = \frac{9{,}8-5}{7-5} = \frac{4{,}8}{2} \qquad V[7;10] = \frac{20-9{,}8}{10-7} = \frac{10{,}2}{3}$$

$$V[5;7] = 2{,}4 \qquad V[7;10] = 3{,}4$$

Figura 37. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 1

A partir de la producción de B1 y B2, se evidencia el proceso de visualización y representación a la *fórmula de velocidad media* como la razón entre la variación de la distancia sobre el tiempo. Este proceso permite a los pares la manipulación e instrumentalización del artefacto: *formula de velocidad media*, para posteriormente realizar operaciones en el registro algebraico que conducen a la respuesta.

Si bien esperábamos que los binomios manipularan el artefacto *deslizador* a, la cual permite que se interprete la representación de la velocidad media como la pendiente a la recta secante de la curva $d(t)$, esta no se evidencia; sin embargo, las acciones anteriores señalan que el proceso de visualización, propicia la dinámica en la génesis instrumental, consiguiendo realizar la instrumentalización a la *fórmula de velocidad media*. Luego, en ambos binomios, se activa la génesis semiótica e instrumental, y con ello el plano [Sem-Ins].

Por otro lado, las producciones de B1 y B2 evidencian la interpretación de la velocidad media como la razón entre la variación de distancia y tiempo, por lo que se privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). Además, el trabajo para calcular algebraicamente la velocidad media evidencia que se privilegia el paradigma Análisis Calculatorio (AC).

Parte 2 - Tarea 3

3. A partir de la pregunta anterior. ¿Cuál es el valor de h para cada velocidad media encontrada (Explique cómo halló h)? Luego, mueva el deslizador y responda ¿Cuál es la interpretación de h con respecto al tiempo?

Figura 38. Parte 2 - Tarea 3

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 3)

La tarea 3 tiene por finalidad que los estudiantes reconozcan e interpreten el valor de h como la amplitud o tamaño de tiempo recorrido de la velocidad media mediante la herramienta *deslizador* a, es decir, como la variación del tiempo.

En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

La génesis instrumental se activa cuando los estudiantes manipulan el artefacto: *deslizador* a, como medio para observar y explorar la variación de los valores de h. Producto de ello, el artefacto guía el proceso semiótico, es decir, permite la visualización e interpretación de la representación de h como la amplitud del intervalo de tiempo. Luego, la génesis semiótica es activada y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, la génesis discursiva se activa cuando los estudiantes justifican el valor de h como la variación del tiempo en un intervalo determinado a partir de argumentaciones relacionadas a definiciones variacionales del Cálculo, como $\Delta t = t_f - t_i$.

De esta forma, mediante la génesis discursiva y el proceso de construcción, lo cual evidencia un razonamiento inductivo, los estudiantes realizan exploraciones a la variación del tiempo mediados por el *deslizador* a. Con ello, se activa el plano vertical [Ins-Dis]. Luego, en nuestra tarea h, toma los valores de 2 y 3 en los intervalos de tiempo $[5; 7]$ y $[7; 10]$, respectivamente.

Se considera que, al interpretar el valor de h como la variación del tiempo a partir del gráfico y *deslizador* a en el GeoGebra, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). Es así que se espera que los estudiantes empleen tal paradigma.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 – Tarea 3)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Se observa que B1 manipula el deslizador a en el GeoGebra para determinar los valores de h, en este caso 2 y 3 en los intervalos $[5; 7]$ y $[7; 10]$, respectivamente. Este hecho es corroborado con la solución de la tarea 2.

Es así que el binomio señala que "*el valor de h corresponde a la variación de tiempo en cada caso*", concluyendo lo esperado en nuestro análisis de las acciones esperadas.

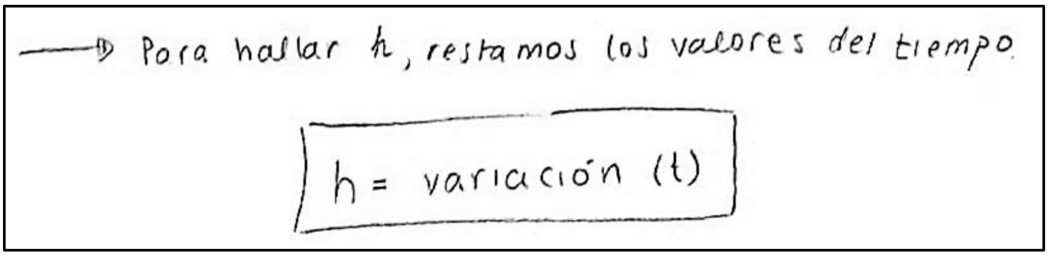


Figura 39. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 3

La producción de B1 evidencia que se considera como artefacto al *deslizador* a, ya que a partir de él se realizan observaciones y exploraciones a la variación de valores de h. Luego, el proceso de construcción y exploración al artefacto, permiten interpretar la representación de h como el tamaño o amplitud del intervalo de tiempo. De esta forma, la génesis semiótica e instrumental son activados y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Con respecto a la génesis discursiva, el binomio valida la afirmación de que h es la variación del tiempo, considerando que su valor se puede determinar como una diferencia entre el valor final e inicial del tiempo. Tal validación se entiende en su producción textual: "*para hallar h, restamos los valores del tiempo*". Esta declaración surge a partir de la experimentación al artefacto *deslizador a,* por lo que la dinámica de la génesis instrumental evidencia un razonamiento inductivo. Así, el plano vertical [Ins-Dis] es activado.

Binomio B2

Se observa que B2 realiza similares procedimientos que B1 para el desarrollo de esta tarea. Inicialmente, manipula el *deslizador* a para determinar los valores de h en los intervalos $[5; 7]$ y $[7; 10]$, obteniendo 2 y 3, respectivamente. Luego, en un escrito, señalan que "*h sería la variación del tiempo en un intervalo seleccionado*". Este hecho, confirma nuestro análisis de las acciones esperadas.

El valor de h sería 2 y 3, siendo 2 para el inter-
valo de [5,7] y 3 para [7,10].
Hallamos h al observar el gráfico en el geogebra.
Aunque también se podría encontrar con pitágoras.
h sería la variociacion del tiempo en un intervalo
seleccionado.

Figura 40. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 3

La producción de B2 evidencia que la manipulación del artefacto *deslizador* a permite realizar observaciones y exploraciones a la variación de valores de h, tal y como ocurre con B1. Como consecuencia, el proceso de construcción y exploración de tal artefacto propicia la interpretación de la representación de h como la amplitud del intervalo de tiempo y con ello la afirmación de que h es la variación del tiempo.

Si bien el binomio no valida formalmente tal afirmación, de acuerdo a la producción en la tarea 2 y la grabación de audio y video, se evidencia que se usa implícitamente la *fórmula de variación del tiempo* como la diferencia entre el valor final e inicial. Tales acciones propician, a partir de la experimentación y el razonamiento inductivo, la validación de h como variación del tiempo.

De esta forma, la dinámica en la génesis instrumental permite la exploración hacia la compresión de h como la amplitud del tiempo y con ello el razonamiento inductivo en dirección a la validación de que tal valor corresponde a la variación del tiempo. Luego, los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis] son activados.

Por otro lado, ambos binomios interpretan el valor de h como la variación del tiempo a partir del proceso de visualización y exploración al gráfico y deslizador a en el GeoGebra, respectivamente. Así, se evidencia que se privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Parte 2 - Tarea 4 y 5

4. Con la ayuda del GeoGebra utilice el deslizador "a" para acercar el punto A hacia el punto P, complete las tablas. En la última fila responda lo pedido en la flecha.

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[7; 10]$		
$[7; 8]$		
$[7; 7,5]$		
$[7; 7,1]$		
$[7; 7,01]$		
$[7; 7,001]$		

¿Los valores del intervalo, de h y la velocidad media se acercan hacia qué números?

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[5; 7]$		
$[6; 7]$		
$[6,5; 7]$		
$[6,9; 7]$		
$[6,99; 7]$		
$[6,999; 7]$		

5. Utilizando el deslizador "a" para acercar el punto A hacia el punto P, responda ¿Cómo varió "h", la pendiente de la recta secante AP y el intervalo de tiempo? y ¿Cómo va cambiando la recta secante AP?

Figura 41. Parte 2 - Tarea 4 y 5

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 4 y 5)

A partir de lo graficado en la tarea 1, las tareas 4 y 5 tienen por finalidad que los estudiantes establezcan nociones de aproximación (limites) mediante la manipulación del artefacto *deslizador* a del GeoGebra, cuando la amplitud de cada intervalo es más pequeña (casi 0).

En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen la génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

Inicialmente, la génesis semiótica se activa cuando el estudiante representa, mediante el proceso de visualización y codificación, la velocidad media como pendiente de la recta secante AP a la curva $d(t)$. A partir de ello, este proceso permite la instrumentalización al artefacto *deslizador* a, con el fin de hallar el valor de h y la velocidad media. Luego, la génesis instrumental es activada y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Adicionalmente, al completar la tarea 4, la tabla de valores obtenida se convierte en un artefacto simbólico, ya que sirve también como medio para observar y explorar la variación (crecimiento o descrecimiento) que ocurre entre las cantidades h, velocidad media e intervalo de tiempo, determinando la dinámica de la génesis instrumental.

De este modo, se espera que los estudiantes conjeturen que, cuando el punto A se acerca al punto P, la recta secante se aproxima a una recta tangente. Además, cuando el valor de h se aproxima o acerca a 0 el valor de la velocidad media, se aproxima o acerca a $2{,}8\ m/s$.

Puntualmente, se espera que los estudiantes conjeturen sobre la noción de aproximación de cantidades a partir del proceso de construcción mediado por el (o los) artefacto(s), cuyo proceso se da mediante la instrumentalización a la herramienta *deslizador* a y/o tabla de valores. Luego, el plano vertical [Ins-Dis] es activado.

Después, al utilizar la gráfica de la curva $d(t)$ para realizar interpretaciones y realizar trabajos que implican aproximación de variables, así como la manipulación de los artefactos ya mencionados, se considera que se está privilegiando los paradigmas Análisis Real (AR) y Análisis Geométrico/Aritmético (AG) respectivamente.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 - Tarea 4 y 5)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Para completar la tabla en la tarea 4, se observa que B1 utiliza el *deslizador* a de manera progresiva para señalar el intervalo de tiempo en los puntos A y P. Esto le permite determinar el valor de h en cada intervalo y la velocidad media como pendiente de la recta secante AP. Así, determinan que h y la velocidad media se acercan a 0 y $2{,}8$ respectivamente.

A pesar de que tales acciones no representaron dificultad para el binomio, en la sexta fila de la tabla, correspondiente a la velocidad media, escriben $2{,}8$ en lugar de $2{,}8002$. Según el applet usado por el par, este hecho se explica por qué la configuración de redondeo en el GeoGebra no estaba calibrada para usar más decimales; sin embargo, este hecho no dio lugar a confusiones.

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
[7; 10]	3	3,4
[7; 8]	1	3
[7; 7,5]	0,5	2,9
[7; 7,1]	0,1	2,82
[7; 7,01]	0,01	2,802
[7; 7,001]	0,001	2,8
⋮		
[7; 7]	0	2,8

¿Los valores del intervalo, de h y la velocidad media se acercan hacia qué números?

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
[5; 7]	2	2,4
[6; 7]	1	2,6
[6,5; 7]	0,5	2,7
[6,9; 7]	0,1	2,78
[6,99; 7]	0,01	2,798
[6,999; 7]	0,001	2,8
⋮		
[7; 7]	0	2,8

Figura 42. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 4

A partir de completar la tarea 4 y junto al deslizador a, B1 utiliza ambas herramientas para responder la tarea 5. Inicialmente, al acercar el punto A hacia P, concuerda que el valor de h disminuye, pero no se evidencia que se tome al intervalo $[7; 7]$ como el punto 7; sin embargo, textualmente B1 señala que: “la pendiente de la recta secante AP tiende a $2{,}8$”.

- h disminuye a medida que se acerca a P
- la pendiente de la recta secante AP tiende a 2,8

Figura 43. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 5

La producción de B1 evidencia que en la tarea 4, mediante el proceso de visualización y codificación, se considera la representación de la velocidad media como la pendiente de la recta secante AP. Luego, este proceso guía la dinámica en la génesis instrumental a partir de la instrumentalización al artefacto *deslizador* a, con el fin de determinar el valor de h y la velocidad media.

Adicional a ello, al completar la tarea 4, se considera como segundo artefacto a la tabla en dicha tarea. Luego, la génesis semiótica e instrumental es activada y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Como consecuencia de lo anterior, la producción del binomio B1 en la tarea 5 evidencia que partir de la experimentación y exploración con el artefacto (*deslizador* a

y/o tabla de la tarea 4) para determinar cómo varia h y la pendiente de la recta secante, surgen validaciones sobre aproximación, lo cual se puede ver cuando usan el término *“tiende”,* que se entiende como un acercamiento a la noción de límites. Luego, el plano vertical [Ins-Dis] es activado (ver Figura 42).

Por otro lado, al realizar manipulaciones a los artefactos ya mencionados, surgen interpretaciones salidas de Geometría, como la idea de aproximación cuando un número se hace pequeño. De este modo, se evidencia que B1 privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

El hecho de que el binomio utilice el término *“tiende*”, no es suficiente para decir que se privilegió el paradigma del Análisis Real (AR). Para ello, se tendría que señalar que la recta secante se aproxima a una recta tangente cuando h tiende a 0.

Binomio B2

Para el desarrollo de la tarea 4, B2 realiza similares procedimientos que B1 al utilizar el *deslizador* a de manera progresiva para señalar los intervalos de tiempo en los puntos A y P. Esta acción permite a B2 determinar que los valores de h y la velocidad media se acerquen a 0 y $2{,}8$ respectivamente. De esta manera, consiguen completar la tabla sin dificultades significativas.

Es importante señalar que nuevamente se observa que la configuración del GeoGebra para el redondeo no estaba calibrada para usar más decimales, sin embargo, al igual que B1, este hecho no dio lugar a confusiones.

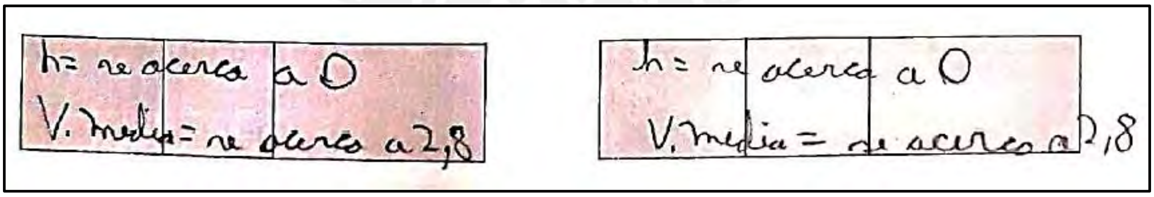


Figura 44. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 4

Para el desarrollo de la tarea 5, B2 solo utiliza el *deslizador* a. Primero, en el GeoGebra, B2 acerca el punto A hacia P con el objetivo de saber si crece o decrece el valor de h. Ante esto, determinan que: “*a medida que A se acerca a P, h disminuye progresivamente hasta ser* 0”.

Por otro lado, estas acciones no permiten que el binomio concluya correctamente sobre la aproximación de la velocidad media e intervalo. Según la grabación de audio y video, B2 comenta que el intervalo de tiempo y la recta secante tienden a 0 cuando el valor de $h = 7$, por lo que su respuesta para esta tarea es incorrecta.

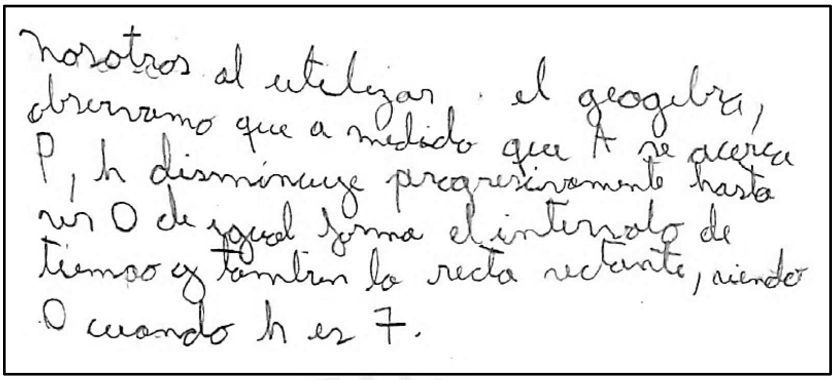

nosotros al utilizar el geogebra, observamos que a medida que A se acerca P, h disminuye progresivamente hasta ser 0 de igual forma el intervalo de tiempo y tambien la recta secante, siendo 0 cuando h es 7.

Figura 45. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 5

La producción de B2 en la tarea 4 evidencia que, mediante el proceso de visualización y codificación, la velocidad media es representada como la pendiente de la recta secante AP. A partir de ello, se considera como artefacto al *deslizador* a.

Este hecho permite la dinámica en la génesis instrumental al instrumentalizar dicho artefacto con el fin de determinar el valor de h y la velocidad media. Así, la génesis semiótica e instrumental es activada y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Para la tarea 5, la producción de B2 muestra que la experimentación y exploración con el artefacto *deslizador* a, permite declarar argumentaciones sobre nociones de aproximación. A diferencia de B1, B2 no realiza experimentaciones con el artefacto: tabla de la tarea 4(parte 2) . En consecuencia, sus respuestas no provienen de un razonamiento inductivo, las cuales no están correctamente organizadas. Luego, la génesis discursiva no es activada.

A pesar de que B2, no manipula el artefacto *tabla de valores* y no concluye correctamente lo pedido en la tarea 5, ya que el hecho que use el *deslizador* a como medio para realizar interpretaciones salidas de la Geometría, como la idea de aproximación cuando un número se hace pequeño, evidencia que B2 privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Parte 2 – Tarea 6 y 7

6. Considere h una cantidad muy pequeña. A partir de la formula $d(t) = \frac{1}{5}t^2$, calcule la velocidad media en el intervalo de tiempo $[7; 7 + h]$.
7. Si h se acerca al 0. ¿Cuánto valdría el valor de la velocidad media en el intervalo de la pregunta 6.? Relacione este resultado con la pregunta 4 y 5.

Figura 46. Parte 2 - Tarea 6 y 7

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 6 y 7)

La tarea 6 tiene por finalidad que los estudiantes establezcan algebraicamente la fórmula de la velocidad media en un determinado intervalo de tiempo, en este caso $[7,7 + h]$. Por su parte, la tarea 7 direcciona a los estudiantes a establecer la noción de aproximación mediante la manipulación de la formula encontrada en la tarea 6.

En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen la génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

En la tarea 6, la génesis semiótica se activa cuando los estudiantes visualizan la *fórmula de velocidad media* como la razón entre dos cantidades y realizan el tratamiento en el registro algebraico. Consecuencia de ello, consideramos que, a partir de la manipulación de tal fórmula, se da el proceso de construcción e instrumentalización que activa la génesis instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins]. De esta manera, se espera que los estudiantes realicen las siguientes operaciones calculando la velocidad media en el intervalo de tiempo $[7,7 + h]$.

Como la velocidad media, está dado por la fórmula

$$v_{media} = v_m(t) = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$

Entonces tenemos,

$$v_m = \frac{d(7 + h) - d(7)}{7 + h - 7} = \frac{\frac{1}{5}(7 + h)^2 - 9{,}8}{h} = 2{,}8 + 0{,}2h$$

Con respecto a la génesis discursiva, esta se activa a partir del proceso de construcción y la dinámica en la génesis instrumental, lo cual propicia un razonamiento inductivo a partir de la fórmula de velocidad media. Luego, el plano vertical [Ins-Dis] es activado.

En la tarea 7, se espera que los estudiantes argumenten sobre la noción de aproximación (o límite) desde que el valor de h se acerca a 0 y se establezca explicaciones y/o validaciones sobre la igualdad del resultado $v(t) = 2{,}8\, m/s$, en comparación a las tareas 4 y 5.

Puntualmente, se espera que los estudiantes establezcan sí h se aproxima a 0, el valor de la velocidad media en el intervalo $[7{,}7 + h]$ es $2{,}8$. En otras palabras,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{5}(7 + h)^2 - 9{,}8}{h} = \lim_{h \to 0} 2{,}8 + 0{,}2h = 2{,}8\, m/s$$

A partir de las acciones antes descritas en la tarea 7, se considera que al utilizar la noción de aproximación se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Real (AR). Adicional a ello, a partir del tratamiento en el registro algebraico para la tarea 6, se considera que el paradigma Análisis Calculatorio (AC) es privilegiado.

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 - Tarea 6 y 7)

Para el desarrollo de la tarea 6, observamos que tanto B1 como B2 tuvieron dificultades para obtener la *fórmula de la velocidad media* en el intervalo $[7; 7 + h]$, sin llegar a una respuesta concreta. Tampoco los binomios consiguieron reemplazar los valores del intervalo para determinar la variación del tiempo y la variación de la distancia, confundiendo este último valor con la ecuación que determina la distancia en cada valor de tiempo, lo que hace que el investigador intervenga para auxiliar a los binomios.

Inicialmente se explica cómo determinar la *fórmula de la velocidad media* desarrollando el razonamiento inductivo en los estudiantes. A ello, se establece la variación de tiempo como la diferencia entre el tiempo final e inicial, es decir, $t_f - t_i = (7 + h) - 7 = h$. Posteriormente, se calcula la distancia en cada valor del intervalo de tiempo a partir de la ecuación $d(t) = \frac{1}{5}t^2$. De tal manera, los binomios obtienen la formula pedida.

Como la parte 2 de la situación de aprendizaje es diseñada para un desarrollo secuencial, es importante que cada binomio obtuviera la respuesta a la tarea 6, es decir, la *fórmula de la velocidad media* en el intervalo $[7; 7 + h]$; sin embargo, se aclara que los análisis correspondientes a dicha tarea no fueron tomados en cuenta, ya que el investigador propicia las respuestas en su totalidad. Con ello, no se evidencia un trabajo significativo por parte de los binomios.

De esta forma, a continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Luego de la intervención del investigador en la tarea 6, B1 replica lo explicado en el aula y obtiene que $V_{media} = \frac{h+14}{5}$. Consecuencia de tal acción, en la tarea 7 se observa que el binomio utiliza tal fórmula para determinar la aproximación de la velocidad media en un intervalo pequeño, es decir, consideran a h como 0, y reemplazan este valor en la formula, obteniendo $2{,}8$. Luego, B1 relaciona la respuesta obtenida con los resultados de tabla de la tarea 4, deduciendo que ambos casos corresponden a aproximaciones (o acercamientos) de cantidades.

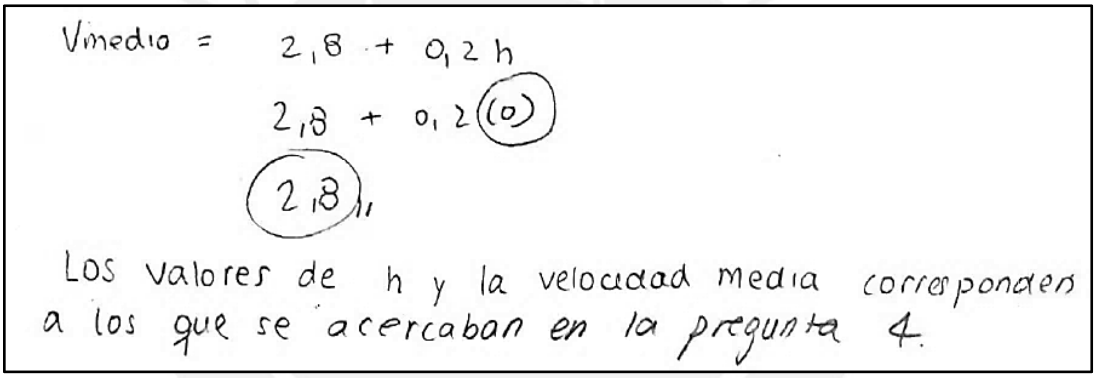


Figura 47. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 7

A partir de la producción escrita de B1, se evidencia que el artefacto simbólico *fórmula de la velocidad media* en el intervalo $[7; 7 + h]$ sufre una instrumentalización que permite, por un lado, realizar procedimientos en el registro algebraico para determinar la aproximación de la velocidad media y por el otro realizar exploraciones y validaciones con el fin de dar forma a la compresión de la noción *aproximación*.

De esta forma, el proceso de construcción y la instrumentalización del artefacto guían la activación de la génesis semiótica y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

A partir de los procesos algorítmicos en el registro algebraico para obtener la velocidad media, consideramos que el binomio evidencia que se privilegia el paradigma del Análisis Calculatorio (AC).

Binomio B2

Como se menciona anteriormente, la tarea 6 no forma parte de los análisis presentados en este texto; sin embargo, es importante señalar que, a pesar de las dificultades que presenta B2, en la grabación de audio y video, se observa un preanálisis inicial, el cual no fue escrito en su ficha de trabajo, por parte de un integrante del binomio.

El integrante considera a h como una cantidad pequeña, haciendo uso del término "*épsilon*". Luego, mediante el uso del deslizador, da valores a tal cantidad, $h = \{0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001\}$ y observa que los valores de la pendiente a la recta secante se acercan a $2{,}8$. Con lo que concluye que la velocidad media es 2.8 en ese intervalo, cuando h es pequeño.

El hecho anterior, no es considerado por B2 para la solución de la tarea 6, ya que da prioridad a resolverla mediante cálculos algorítmicos a la fórmula $d(t)$, lo cual produjo dificultades, por lo que fueron auxiliados por el investigador.

Posterior a la intervención del investigador, B1 obtiene que $V = 2{,}8 + 0{,}2h$ para el intervalo $[7{,}7 + h]$. Consecuencia de tal acción, en la tarea 7, se observa que el binomio utiliza tal fórmula y rápidamente concluye que, a medida que h tiende a 0, la velocidad media va a tender a $2{,}8\ m/s$, resultado que es corroborado con lo realizado en las tareas 4 y 5.

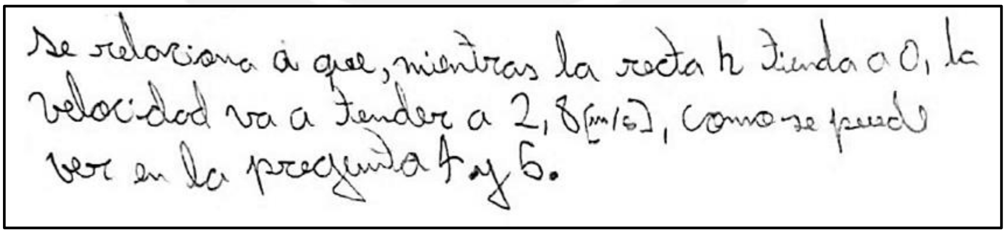

Se relaciona a que, mientras la recta h tienda a 0, la velocidad va a tender a 2,8[m/s], como se puede ver en la pregunta 4 y 5.

Figura 48. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 7

A partir de lo señalado inicialmente en la producción de B2 para la tarea 6, se evidencia que la manipulación del artefacto *deslizador* a permite explorar y experimentar cómo es el comportamiento de h y la pendiente, la cual esta última se entiende como la representación de la velocidad media. Luego, el proceso de construcción y la instrumentalización del artefacto permiten realizar validaciones referentes a la noción de *aproximación*. Esto se evidencia a partir de la grabación de audio y video, en la que un integrante del binomio señala: "h *es chico,* h *es épsilon* *ahora, digamos 0,1, 0,01. ¡pasa lo mismo que antes! La pendiente que es la velocidad, va a tener a 2,8*”. Así, los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis] son activados.

Es importante señalar nuevamente que lo mencionado en el párrafo anterior es el análisis producto de una conversación entre los integrantes de B2, el cual no tiene evidencia textual; sin embargo, a partir de la producción escrita de B2, se evidencia que el artefacto *fórmula de la velocidad media* en el intervalo $[7; 7+h]$ es instrumentalizada y permite realizar exploraciones y validaciones con el fin de dar forma a la compresión de la noción *aproximación*. Del mismo modo, el plano vertical [Ins-Dis] es activado.

Por otro lado, se considera que al utilizar la noción de aproximación basado en el término *“épsilon”,* se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Real (AR). Además, el uso de procesos algorítmicos en el registro algebraico para obtener la aproximación de la velocidad media, se privilegia el paradigma del Análisis Calculatorio (AC).

Parte 2 - Tarea 8

8. En el GeoGebra, con la herramienta tangente halle la ecuación de la recta tangente de la gráfica $d(t) = \frac{1}{5}t^2$ en el punto P. Posteriormente calcule la pendiente de tal recta tangente.
   a. ¿Qué se puede decir sobre lo construido y la pregunta 7.?
   b. ¿Cuánto es exactamente la velocidad en un instante específico, es decir la velocidad instantánea cuando $t = 7$ segundos?

Figura 49. Parte 2 - Tarea 8

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 8)

La tarea 8 tiene por finalidad que los estudiantes interpreten la relación entre la velocidad en un instante específico y la pendiente de la recta tangente a partir de la construcción y manipulación de la herramienta *tangente* en el GeoGebra.

En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

La génesis instrumental se activa a partir de la exploración al artefacto *pendiente de la recta tangente,* ya que permite realizar observaciones e interpretaciones con el fin de dar forma a la representación de la noción de velocidad instantánea. En consecuencia, la génesis semiótica se activa a partir de la representación de la velocidad en un instante especifico como dicha pendiente de la recta tangente en el punto P de la curva $d(t)$. De esta forma, la exploración y la dinámica en la génesis instrumental guían la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Así, de los ítems a. y b., se espera que los estudiantes establezcan que la velocidad en un instante especifico corresponde y es representada con la pendiente de la recta tangente de una curva.

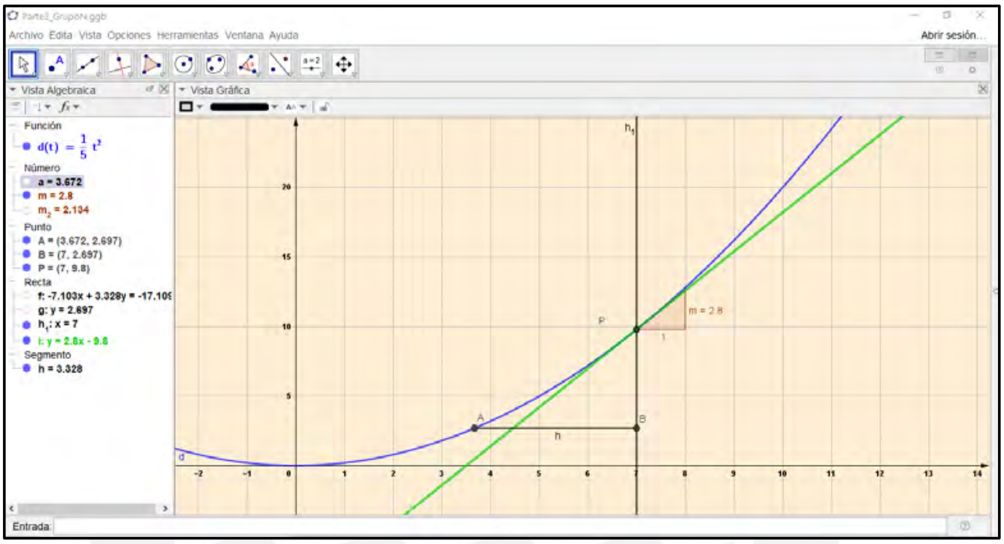


Figura 50. Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva en el punto P

Luego, al utilizar la gráfica de la curva $d(t)$ para realizar interpretaciones y exploraciones, se considera que se está privilegiando el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 – Tarea 8)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Para el desarrollo de la tarea 8, observamos que B1 sigue la secuencia de pasos para graficar en el GeoGebra la recta tangente y su pendiente en el punto P de la curva $d(t)$. A partir de tal gráfico, el binomio observa el valor del pendiente y lo relaciona con el resultado de la tarea 7, concluyendo que estos son los mismos valores.

m= 2,8

Dan el mismo valor.
La pendiente es el valor al que se acercan las velocidades medias

Figura 51. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 8a

Si bien este proceso de observación no determina un razonamiento inductivo por parte del binomio, es importante señalar que, según su declaración textual: "*la pendiente es el valor al que se acercan las velocidades medias*", hace referencia a que este último valor es una aproximación. Consecuencia de lo anterior, B1 determina que el valor de la velocidad instantánea es 2.8.

2,8 es la velocidad instantánea

Figura 52. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 8b

A partir de la producción de B1, se evidencia que el artefacto *pendiente de la recta tangente*, permite realizar exploraciones y con ello interpretar y/o representar la velocidad en un instante específico. De este modo, el proceso de construcción y exploración promueven la dinámica en la génesis semiótica y con ello el plano vertical [Sem-Ins].

Binomio B2

Observamos que B2 grafica correctamente la recta tangente y su pendiente en el punto P al seguir la secuencia de pasos dados en la tarea 8. Luego, B2 observa el valor de la pendiente y lo relaciona con el resultado de la tarea 7. De esta forma, el binomio determina que ambas cantidades se aproximan y coinciden cuando h se hace pequeño.

El resultado de la pendiente de la recta tangente es 2,8.

Que el valor obtenido coincide hacia donde tiende la pendiente cuando h se acerca a 0.

Figura 53. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 8a

Como se menciona para B1, este proceso de observación no establece un razonamiento inductivo por parte del par; sin embargo, según la respuesta textual de B2: "*el valor obtenido coincide hacia donde tiende la pendiente cuando* h *se acerca a* 0", se entiende como la aproximación del valor de la pendiente de la recta tangente. Con ello, concluye que el valor $2{,}8$, que es el aproximado de tal pendiente, corresponde al valor de la velocidad instantánea.

La velocidad instantánea es 2,8.

Figura 54. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 8b

A partir de la producción de B2, se evidencia que el artefacto *pendiente de la recta tangente* permite realizar exploraciones y con ello interpretar y/o representar la velocidad en un instante específico como la pendiente de la recta tangente a la curva. De esta forma, la dinámica en la génesis semiótica es inducida por el proceso de construcción y exploración. Luego, el plano vertical [Sem-Ins] es activado.

Por otro lado, la producción de ambos binomios se evidencia que se utiliza la gráfica de la curva $d(t)$ para interpretar la representación de la velocidad instantánea como *pendiente de la recta tangente*. Con ello, se privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Parte 2 - Tarea 9 y 10

9. Justifique ¿Es posible hallar la velocidad en cualquier instante de tiempo?. Con el GeoGebra, calcule la velocidad instantánea cuando $t = 3{,}5$ segundos.
10. Diga con sus palabras la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea especificando cómo se determinan ambas velocidades.

Figura 55. Parte 2 - Tarea 9 y 10

Análisis de las acciones esperadas (Parte 2 - Tarea 9 y 10)

La tarea 9 tiene por finalidad que los estudiantes calculen la velocidad en cualquier instante de tiempo mediante la manipulación de herramientas del GeoGebra. Mientras que la tarea 10 direcciona al estudiante a establecer diferencias al modo de cómo determinar la velocidad media e instantánea, es decir, establecer que los valores de velocidad media e instantánea corresponden a los valores de la pendiente de la recta secante y tangente de una curva, respectivamente.

En términos del marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera que se activen la génesis semiótica y discursiva y con ello el plano vertical [Sem-Dis].

Para activar la génesis instrumental, los estudiantes deben realizar el proceso de instrumentalización del artefacto tangente del GeoGebra. De esta forma, en la tarea 9 se espera que, a partir de la manipulación de tal artefacto, se determine la velocidad instantánea cuando $t = 3{,}5$ segundos es $1{,}4\, m/s$. Es importante señalar que esta tarea no fue considerada como parte del análisis de las acciones obtenidas, ya que los binomios B1 y B2 no tuvieron tiempo para desarrollarla, por lo que se les ordenó que continuaran a la tarea 10.

En correspondencia a lo anterior, en la tarea 10, se espera que los estudiantes establezcan cómo determinaron la velocidad media e instantánea a partir de la visualización e interpretación de la gráfica de la curva $d(t)$ y las pendientes como una representación a tales velocidades. Luego, la génesis semiótica es activada.

A partir del proceso de visualización en la dinámica de la génesis semiótica, se desarrolla un razonamiento perceptivo que permite identificar y construir organizadamente la definición de la velocidad media e instantánea como una pendiente de recta secante y tangente respectivamente. De esta forma, la génesis discursiva es activada y con ello el plano vertical [Sem-Dis].

Por otro lado, se considera que, al utilizar la gráfica de la curva para realizar interpretaciones y validaciones justificadas en el significado de las velocidades medias e instantáneas, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Real (AR).

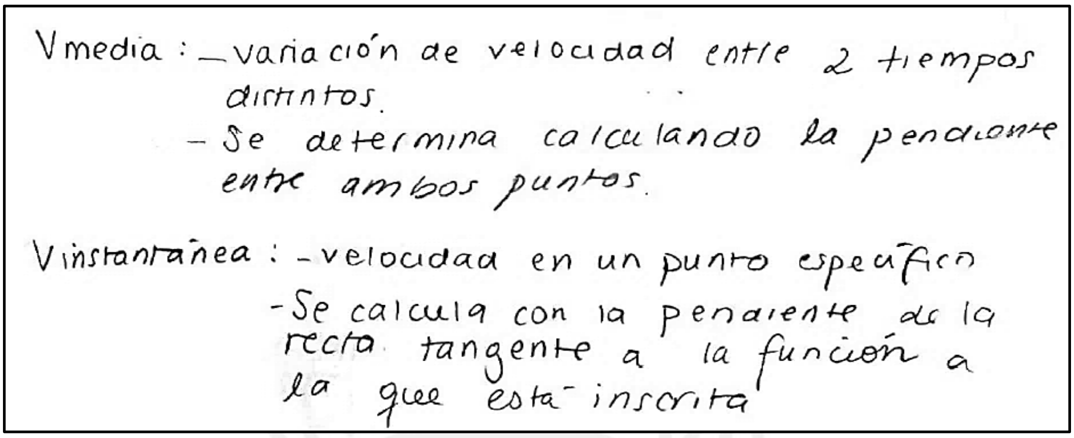
Análisis de las acciones obtenidas (Parte 2 - Tarea 9 y 10)

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al:

Binomio B1

Observamos que B1 reconoce la diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de cómo fueron obtenidas. Inicialmente, luego de una discusión entre los integrantes del binomio, establecen la definición de tales velocidades, reconociendo que la velocidad media corresponde a la variación de la velocidad en un intervalo y la velocidad instantánea es la velocidad en un punto específico.

A partir de lo anterior, el par establece que tales velocidades, tanto la media como la instantánea, se pueden determinar a partir del cálculo a la pendiente de la recta secante y tangente respectivamente (ver Figura 56).


Vmedia : _variación de velocidad entre 2 tiempos distintos.
- Se determina calculando la pendiente entre ambos puntos.

Vinstantánea : - velocidad en un punto específico
-Se calcula con la pendiente de la recta tangente a la función a la que está inscrita

Figura 56. Producción de B1, Parte 2 - Tarea 10

De la producción de B1, se evidencia el proceso de visualización e interpretación a la pendiente de la recta secante y tangente como la representación de las velocidades pedidas. Con ello, la dinámica en la génesis semiótica le permite a B1 estructurar y organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es activado el plano vertical [Sem-Dis].

Por otro lado, el binomio utiliza la gráfica de la curva $d(t)$ para realizar interpretaciones y validaciones para justificar el significado de las velocidades medias e instantáneas. Luego, el paradigma del Análisis Real (AR) es privilegiado por el par.

Binomio B2

Para el desarrollo de la tarea 10, observamos que B2 establece una diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de sus respectivas definiciones. Según el par, "*la velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo* ($V = \frac{vd}{vt}$)*, en cambio, la velocidad instantánea es un punto específico, con un tiempo específico* $\frac{X}{T}$".

Este hecho señala que el par representa a las velocidades pedidas como la razón entre las magnitudes de distancia y tiempo, sin utilizar la representación que ofrece la gráfica de la curva $d(t)$, es decir, bajo el uso de la pendiente de la recta secante y tangente.

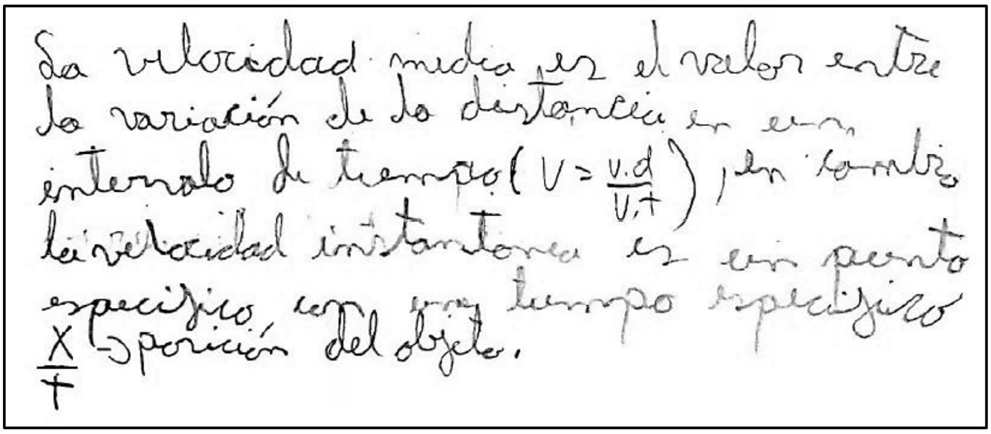

La velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo ($V = \frac{v.d}{v.t}$), en cambio la velocidad instantanea es un punto especifico con un tiempo especifico
$\frac{X}{t}$ → posición del objeto.

Figura 57. Producción de B2, Parte 2 - Tarea 10

A partir de la producción de B2, se evidencia el proceso de visualización e interpretación de las velocidades media e instantánea, representadas como la razón entre la variación de distancia y tiempo y con ello la génesis semiótica es activada.

Es importante señalar que, si bien el binomio no responde en base a nuestro análisis de las acciones esperadas, el cual involucra un trabajo con pendientes, la dinámica en la génesis semiótica le permite al par organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es activado el plano vertical [Sem-Dis].

Luego de realizar la descripción de los resultados, presentamos una síntesis a los resultados obtenidos en la implementación a la parte 1 y parte 2.

Síntesis de los resultados

En la Tabla 5, se observa una síntesis a las tareas de los binomios B1 y B2 que participaron de la implementación de la situación de aprendizaje para la parte 1.

Como se sabe, esta primera parte sugiere desarrollar intuitivamente el tránsito entre la variación y la tasa de variación media, visto como velocidad media. Para ello, cada binomio resolvió ocho tareas estructuradas para un desarrollo secuencial.

A continuación, se presentan los resultados a las acciones obtenidas por cada binomio.

Tabla 5.

Síntesis de resultados - Parte 1

Tarea	Binomio	Genesis			Paradigmas			Planos verticales		
		Sem	Ins	Dis	AG	AC	AR	[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]
1	B1	x	x		x			x		
	B2	x	x	x	x	x		x	x	

2	B1	x	x			x		x		
	B2	x	x			x		x		
3 y 4	B1	x	x	x		x		x	x	
	B2	x	x	x		x		x	x	
5 y 6	B1	x	x	x	x			x		x
	B2	x	x		x			x		
7	B1	x	x		x			x		
	B2	x	x		x			x		
8	B1	x			x					
	B2		x		x	x				

Asimismo, en la Tabla 6, se observa una síntesis a las tareas de los binomios B1 y B2 que participaron de la implementación de la situación de aprendizaje para la parte 2, la cual sugiere desarrollar intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea, visto como velocidad instantánea. De esta forma, cada binomio resolvió 10 tareas estructuradas para un desarrollo secuencial.

A continuación, se presentan los resultados a las acciones obtenidas por cada binomio.

Tabla 6.

Síntesis de resultados - Parte 2

Tarea	Binomio	Genesis			Paradigmas			Planos verticales		
		Sem	Ins	Dis	AG	AC	AR	[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]
1 y 2	B1	x	x		x	x		x		
	B2	x	x		x	x		x		
3	B1	x	x	x	x			x	x	
	B2	x	x	x	x			x	x	
4 y 5	B1	x	x	x	x			x	x	
	B2	x	x		x			x		
6 y 7	B1	x	x	x		x		x	x	
	B2	x	x	x		x	x	x	x	
8	B1	x	x		x			x		
	B2	x	x		x			x		
9 y 10	B1	x		x			x			x
	B2	x		x						x

De esta forma, luego de llevar a cabo la parte experimental y describir detalladamente los resultados de los estudiantes, tanto en la parte 1 y 2 de la situación de aprendizaje, nos disponemos a presentar las conclusiones y perspectivas para futuras investigaciones.

CONCLUSIONES

Para el desarrollo de esta investigación, nos propusimos responder: *¿Cuál es el trabajo matemático personal de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación de una función real de variable real?*

En dirección a responder tal pregunta, consideramos a la tasa de variación como una magnitud: la velocidad, y con ello sus representaciones. Es decir, como cociente de magnitudes físicas (distancia-tiempo) o como una pendiente de recta secante y tangente. A partir de ello, se observó que el aprendizaje de la tasa de variación como velocidad, tanto media como instantánea, no se dio de forma inmediata, ya que los estudiantes presentaron dificultades en el desarrollo de sus producciones. Evidenciamos que algunas nociones matemáticas, que se creía que formaban parte de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes, no fueron movilizados. Tal es el caso de los conocimientos relativos a nociones de funciones, planteo y solución de ecuaciones.

A tales dificultades, se resalta la importancia de las herramientas del GeoGebra (como deslizador, recta, tangente y pendiente), así como la vista grafica para el diseño de graficas en cada tarea. Gracias a sus características, los estudiantes pudieron visualizar las rectas secantes con sus respectivas pendientes en intervalos cada vez más pequeños. Tales herramientas propiciaron que los estudiantes conjeturen sobre ideas de aproximaciones, cuando el tamaño del intervalo de tiempo se acerca a 0 –nociones de limite–, tal como lo menciona Villa-Ochoa et al. (2017).

En líneas generales, en la parte 1 de la situación de aprendizaje, los estudiantes consiguieron representar la velocidad media, inicialmente como el cociente entre la variación de distancia y la variación del tiempo, y luego como la pendiente de la recta secante asociada a la curva $d(t)$. Esta primera representación se dio principalmente mientras los sujetos de estudio visualizaron y realizaron manipulaciones a artefactos como: fórmula de la variación y tabla de valores, así como procesos algorítmicos en el registro algebraico.

La segunda representación surge a partir de la visualización a la gráfica y sus elementos en la vista grafica del GeoGebra, comparando los valores de la velocidad media en ambos casos. Estas acciones permitieron que se realicen exploraciones e interpretaciones a tales artefactos, así como discursos basados en la experimentación.

En la parte 2 de la situación de aprendizaje, los estudiantes consiguieron representar la velocidad instantánea, en primer término, como una aproximación de la velocidad media en un intervalo de tiempo muy pequeño, y, en segundo término, como la pendiente de la recta tangente a la curva $d(t)$.

Para la primera representación, los estudiantes visualizaron y manipularon las herramientas del GeoGebra (deslizador, pendiente, y vista grafica). En el caso de la segunda representación, es producto, principalmente, de la visualización y el razonamiento perceptivo, el cual llevó a obtener argumentaciones y validaciones para esta representación. Del mismo modo, tales acciones permitieron el acercamiento a nociones de aproximación.

Es importante señalar que no se evidenciaron procesos algorítmicos para la obtención de la segunda representación, ya que los estudiantes presentaron dificultades para realizar tales procesos.

Retomando la pregunta que guía nuestra investigación y considerando nuestro objetivo de: *estudiar el trabajo matemático personal de estudiantes de último año de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación de una función real de variable real*, afirmamos que el trabajo matemático del estudiante está delimitado por las acciones y producciones que se desarrollaron sobre las representaciones, artefactos y los referenciales teóricos, así como los procesos de visualización, construcción y prueba, respectivamente.

En términos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), alcanzamos nuestro objetivo a partir de: describir las producciones que permiten la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y los planos verticales asociados a tales génesis; así como de identificar los paradigmas del dominio del Análisis que se privilegian al resolver tareas con la tasa de variación.

De esta forma, a lo largo del desarrollo de la parte 1, los estudiantes realizaron exploraciones e interpretaciones mediante los artefactos fórmula de la variación y tabla de valores, para realizar tratamientos en el registro algebraico y así determinar la velocidad media. Luego, a partir de los procesos de visualización y construcción mediante tales artefactos, se activa la génesis semiótica e instrumental.

Adicional a ello, a partir de la experimentación y un razonamiento deductivo –luego de realizar tratamientos en el registro algebraico–, pone en evidencia el proceso de prueba y con ello la activación de la génesis discursiva al justificar y validar la velocidad media como la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo determinado.

Si bien las producciones de los estudiantes permiten evidenciar claramente la activación de algunas génesis, como la génesis instrumental, es posible que algunas de ellas se confunda con otra. Tal es el caso entre la génesis semiótica y discursiva.

Por ejemplo, en la tarea 7 de la parte 1, los estudiantes dan su respuesta a partir de exploraciones y observaciones a los resultados de las tareas previas, considerando estos últimos como artefactos (tabla de valores y formula de velocidad media). Este hecho permite que se realice la dinámica, tanto en la génesis semiótica como en la génesis instrumental; sin embargo, las respuestas obtenidas son explicaciones de lo sucedido en el registro de representación de lengua natural y no se justifican bajo algún conocimiento teóricamente organizado. Luego no se activa la génesis discursiva.

En la parte 2, los estudiantes realizan exploraciones y observaciones mediante la manipulación a los artefactos deslizador, pendiente, y vista gráfica del GeoGebra, así como a la fórmula de velocidad media (en su representación como cociente de magnitudes o pendiente de recta). Tales artefactos, junto al razonamiento inductivo, permiten que se evidencien nociones de aproximación y con ello la construcción de la definición de la velocidad instantánea. Luego, los procesos de visualización y construcción guían la activación de las génesis semiótica e instrumental.

Adicionalmente, en esta parte, no se realizan tratamientos en el registro algebraico. Por ejemplo, para calcular la fórmula de la velocidad media en el intervalo $[7; 7+h]$, los estudiantes no comprendieron que los valores de la distancia en cada extremo del intervalo corresponden a los valores de la función $d(t)$ evaluado en los extremos dicho intervalo. Este hecho se debe a que los estudiantes no movilizan los conocimientos de planteo y solución de ecuaciones y por ello, en consecuencia, no se activa la génesis semiótica.

Con respecto al proceso de prueba y argumentaciones, notamos que la activación de la génesis discursiva proviene a partir de los procesos de visualización y construcción, siendo este último más frecuente en la producción de los estudiantes. El proceso de prueba está guiado, por un lado, a partir de la exploración y experimentación mediante los artefactos, mientras que, por el otro lado, sugiere un razonamiento perceptivo, el cual permite la construcción de la velocidad instantánea, como la pendiente de la recta tangente a la curva $d(t)$.

El proceso de prueba y las argumentaciones son más frecuentes a comparación que la parte 1, hecho que se da cuando se trabaja a partir de la dinámica en la génesis instrumental. Añadimos que cada artefacto considerado, sea la tabla de valores, la fórmula de la velocidad media, o herramientas del GeoGebra, juegan un rol importante para la activación de las diferentes génesis y sus planos asociados a ellas.

Para describir el trabajo matemático de los estudiantes, no basta con identificar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Adicional a ello, se identifican y establecen las articulaciones entre tales génesis. En ese sentido, en nuestra investigación, se activaron los planos verticales [Sem-Dis], [Ins-Dis] y [Sem-Ins], siendo este último el más frecuente.

La recurrencia en la activación del plano vertical [Sem-Ins] corresponde a una reiterada coordinación y articulación entre los procesos de visualización y construcción para el desarrollo de cada tarea, tanto en la parte 1 y 2. Tal coordinación es guiada por las exploraciones mediante la manipulación de los artefactos y la visualización a las representaciones (signos).

En relación al plano [Ins-Dis], creemos que el diseño de las tareas (particularmente en la parte 2) propicia su activación a partir del proceso de construcción y la experimentación con los artefactos mediante un razonamiento inductivo. Tal diseño permite reconocer el comportamiento de la tasa de variación media cuando su intervalo de tiempo es muy pequeño, por lo que se realizan argumentaciones y validaciones.

Con respecto a los paradigmas del Análisis que fueron privilegiados en la producción de los estudiantes, se destacan los paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y del Análisis Calculatorio (AC). Los estudiantes priorizan el paradigma AG al realizar interpretaciones basados en la Geometría y nociones de variación, especialmente al explorar y caracterizar las gráficas desarrolladas en el GeoGebra.

Mientas que el paradigma AC es priorizado principalmente cuando realizan cálculos algorítmicos a partir de nociones de variación y la fórmula de velocidad media

Como nuestra investigación estuvo dirigida a estudiantes de último año de Educación Secundaria, era de esperarse que se privilegiara, en su mayoría, el paradigma AG; sin embargo, realizar procedimientos y un trabajo algorítmico basados en nociones nacidas en la Física, como lo es la velocidad, permitieron que fueran movilizados y privilegiado el paradigma AC.

Del mismo modo, enfatizamos la importancia de identificar los paradigmas, en este caso en el dominio del Análisis, ya que caracterizan el trabajo matemático de los estudiantes y permiten dar cuenta de qué nociones propician el surgimiento de conceptos relacionados a la variación y tasa de variación como velocidad. Con ello, afirmamos que el trabajo matemático del usurario es, por lo general, una combinación de dos o más paradigmas, tal como lo señala Montoya-Delgadillo y Vivier (2016).

De esta forma, podemos concluir que las acciones y producciones de los estudiantes de último año de Educación Secundaria cuando resuelven tareas con la tasa de variación giran en torno a la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis], así como los paradigmas del análisis AG y AC.

Por otro lado, es importante señalar que a lo largo de la investigación se presentaron diferentes limitaciones, las cuales fueron controlados por el investigador. Una de ellas, es con respecto al número de estudiantes que fueron tomados en cuenta para el estudio. Dentro de la planificación para llevar a cabo la parte experimental, se consideró inicialmente a ocho estudiantes; sin embargo, solo cinco de ellos asistieron a las dos sesiones, lo cual redujo el campo de resultados.

Con respecto al uso del GeoGebra, si bien los estudiantes son usurarios frecuentes con el uso de laptops y aplicativos, estos presentaron dificultades para la manipulación de las herramientas del programa (tarea 5 de la parte 1); sin embargo, en las tareas posteriores que involucraban manipular herramientas del Software (tarea 1, 4 y 8 de la parte 2) fueron desarrolladas sin problema. Esto se debe al dinamismo en sí y al uso intuitivo que ofrece el programa al usuario.

Perspectivas para futuras investigaciones

A partir del marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), pudimos estudiar el trabajo matemático de los estudiantes de último año de Educación Secundaria cuando resuelven tareas con la tasa de variación, desde perspectivas epistemológicas y cognitivas. En ese sentido, recomendamos que tal estudio sea ampliado a un número mayor de estudiantes para poder potenciar el ETM referencial del estudiante.

En relación al diseño de las tareas presentadas en nuestra situación de aprendizaje, evidenciamos que estas guían tal trabajo matemático de los estudiantes para dotar de significado o dar sentido a la tasa de variación como velocidad. De acuerdo a lo planteado por Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), señalan la importancia y el papel que juega el diseño de la tarea a implementar.

A ello, recomendamos que, para que el estudiante tenga éxito, se debe diseñar tareas bajo una terminología de acorde al nivel de estudio, es decir, sin los conceptos formales que propone el cálculo diferencial, pero introduciendo nociones que hagan referencia a estas. Adicional a ello, recomendamos refinar las tareas y reducir el número de ellas, privilegiando el rol del artefacto, en este caso de las herramientas del GeoGebra.

Es importante señalar que el proceso de prueba y las argumentaciones son guiadas, principalmente, a partir de procesos semióticos e instrumentales. En otras palabras, a partir de la génesis semiótica e instrumental.

En ese sentido, nos preguntamos ¿De qué manera los recursos tecnológicos favorecen y guían el proceso de prueba en la génesis discursiva? Por ello, recomendamos considerar esta pregunta como guía en futuras investigaciones. Del mismo modo, recomendamos realizar esta investigación, teniendo como foco de estudio los cambios de dominio, es decir, estudiar el cambio entre los dominios del Algebra, Geometría y Análisis.

Por otro lado, afirmamos que la tasa de variación cumple un papel protagónico para el acceso hacia otros objetos matemáticos, como el de pendiente de una recta y la construcción de la derivada. A ello, recomendamos asociar estas concepciones a otros objetos, como es el caso de la exponencial y logaritmos.

Asimismo, comprobamos que los estudiantes de último año de Educación Secundaria (en Chile) pueden dar sentido a la noción de tasa de variación instantánea desde un enfoque intuitivo a la idea de variación y tasa de variación media. En esa línea, creemos que esta situación de aprendizaje, luego de una refinación a las tareas, podría ser aplicada a estudiantes de último año de Educación Secundaria en el Perú, así como estudiantes de primer año de universidad sin dificultad, como una introducción a la definición de la derivada.

REFERENCIAS

Almonacid, A. (2018). Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de Humanidades. Tesis del grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/12602

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apóstol, T. (2001). *Cálculus Vol. 1. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal.* (2 ed.). España: Editorial Reverté.

Azcárate, C. (2000). El precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el Análisis. *Números* (43 y 44), 259-262. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo52.pdf

Borba M. y Araújo, J. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* (p. 11-23). São Paulo: Cortez.

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal*. (Capítulo V, pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hernández-Sampieri R., Fernández C. y Baptista P. (2014). Metodología de la Investigación. Sexta Edición Mcgraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V. México D.F

Hitt, F. (2018). Nuevas tendencias en la enseñanza del Cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista electrónica AMIUTEM*, *2*(2), 1-19. Recuperado de http://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/23/pdf_11

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de Matemáticas.* (Tesis de doctorado). Université Denis Diderot - Paris 7, Francia. Recuperado de: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946

García, M. y Dolores-Flores, G. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (46),* 49-70. Recuperado de www.fisem.org/www/union/revistas/2016/46/02_15-321-1-ED.pdf

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 1-22. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24. Recuperado de: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043/document

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17* (4-1), 5-39. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* , 237-251. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23942

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Menares, R. (2016). *Estudio del espacio matemático del análisis de profesores de Matemática en chile: El caso de las funciones continuas* (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ministerio de Educación (MINEDUC) (2009). Matemática: Formación general. En *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago, Chile: Autor, 145-194.

Ministerio de Educación (MINEDUC) (2019). *Plan de estudios para 3° y 4° año medio. Santiago: Unidad de Currículo y Evaluación*. Chile: Ministerio de Educación Chile.

Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico: Cambios de dominios y de puntos de vista, In *Proceedings of CIAEM XIV*, 3–7. Mayo 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/753/325

Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, *48*(6), 739-754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria. Área Curricular: Matemática*. Lima.

Ponce, J. (15 de diciembre, 2014). Perspectiva histórica acerca del origen y evolución del concepto de derivada. Recuperado de: https://es.scribd.com/document/250136018/Perspectiva-historica-acerca-del-origen-y-evolucion-del-concepto-de-derivada

Roorda, G., Vos, P., Drijvers, P., y Goedhart, M. (2016). Solving rate of change tasks with a graphing calculator: A case study on instrumental genesis. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *2*(3), 228-252. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0022-8

Ruiz, K., Córdoba, Y., y Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1(1)*, 125-130. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *Relime*, *11*(2), 267-296. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&tlng=es.

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. *Educatio Siglo XXI 29*(2), 173- 198. Recuperado de: https://revistas.um.es/educatio/article/view/133021/122721

Silva, E. (2012). *Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio.* (Tesis de Maestria) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10934

Vrancken, S., y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *(33),* 53-70. Recuperado de: *http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO9.pdf*

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Villa-Ochoa, J. A., Gonzáles-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2017). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria, 11*(2), 25-34. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetike, 25*(2), 265-288. https://doi.org/10.20396/zet.v25i2.8649274

ANEXOS

Anexo 1

Construcción de la tasa de variación instantánea o noción de derivada.

A partir de Apóstol (2001), se señala que este problema de la velocidad sugiere el camino para introducir el concepto de la derivada, el cual se define a continuación,

DEFINICIÓN DE DERIVADA. *La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Figura 58. Definición de derivada
Fuente: Apóstol (2001, p. 196)

Puntualmente, el concepto de velocidad instantánea o tasa de variación instantánea es un ejemplo del concepto de derivada; la velocidad $v(t)$ es igual a la derivada $f'(t)$, siempre que f sea una función de posición, en este caso función de altura. Por otra parte, trabajar con el cociente incremental o velocidad media se traduce en trabajar con la razón de cambio o tasa de variación media de una función. Luego, se considera al cociente incremental como la tasa de variación media de una función, donde la variación se da principalmente en la reducción del valor del intervalo de tiempo, h.

Anexo 2

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

LA CARRERA DE SACOS

Jorge es un participante en una carrera de sacos. Ayudados de un cronómetro sus amigos tomaron los datos de las distancias en cada segundo recorrido tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo en segundos (t)	0	2	4	5	7	10
Distancia en metros (d)	0	0,8	3,2	5	9,8	20

Parte 1 (60 minutos): En esas condiciones, responde las preguntas:

1. A partir de la tabla:
   a. ¿Cuál es la **variación de la distancia** cuando Jorge transcurre entre los segundos 7 y 10? Escriba detalladamente cómo halló tal variación.

   b. ¿Cuál es la **variación del tiempo** cuando la distancia varía entre los 9,8 m. y 20 m.? Escriba detalladamente como halló tal variación.

1

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

c. ¿Qué expresión matemática (fórmula) relaciona las magnitudes utilizadas en la tabla anterior? ¿De qué forma influye la **variación de la distancia** y la **variación del tiempo** a dicha fórmula? Explique detalladamente.

2. Sabiendo que la distancia depende del tiempo, calcule el valor de la fórmula hallada en el ítem "1.c." cuando el tiempo transcurre entre los segundos 7 y 10. Con sus palabras escriba detalladamente la interpretación matemática de dicho valor encontrado.

2

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

3. Calcule la velocidad en el intervalo **(velocidad media "v")**
   (OBS: NO DEJE LOS RESULTADOS EN FRACCIÓN)

Velocidad media en el intervalo de tiempo [5; 7]:

$v_1 =$

Velocidad media en el intervalo de tiempo [7; 10]:

$v_2 =$

4. A partir de los resultados a las preguntas anteriores, diga con sus propias palabras ¿Cómo podemos calcular la velocidad media?

5. Admita que la expresión que define la tabla de valores es dada por $d(t) = \frac{1}{5}t^2$. Con la ayuda del GeoGebra sigue las siguientes instrucciones.
   a. Represente gráficamente la función $d(t) = \frac{1}{5}t^2$.
   b. Ubique el punto P de abscisa 7 en la gráfica, es decir $P = (7, d(7))$. Análogamente, ubique los puntos A de abscisa 5 y B de abscisa 10 en la gráfica
   c. Con la herramienta recta , trace la recta AP y BP.
   d. Con la herramienta pendiente , determine la pendiente a la recta AP y BP.

6. ¿Cuál es nombre geométrico de las rectas trazadas en el ítem "5.c."?

3

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

7. ¿Qué relación existe entre: los valores hallados en 3., las medidas de las pendientes halladas en "5.d."? Explique detalladamente.

8. Con la información obtenida, ¿se podría calcular la **velocidad en un instante especifico**, digamos cuando se tiene $t = 7$ segundos? Justifique su respuesta.

GUARDE EL ARCHIVO COMO: Parte1_GrupoN.

Anexo 3

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

LA CARRERA DE SACOS

Jorge es un participante en una carrera de sacos. Ayudados de un cronómetro sus amigos tomaron los datos de las distancias en cada segundo recorrido tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo en segundos (t)	0	2	4	5	7	10
Distancia en metros (d)	0	0,8	3,2	5	9,8	20

Parte 2 (60 min): Siguiendo la estructura del problema de Jorge y los sacos, determinaremos cuanto es la exactamente velocidad en el instante cuando $t = 7$ segundos.

1. Ejecute el archivo "Parte2_GrupoN". En dicho archivo encontrará la gráfica de $d(t) = \frac{1}{5}t^2$ y el punto A asociado al deslizador "a". Siga los siguientes pasos:
   a. En la barra de entrada grafique el punto P de abscisa igual a 7, es decir $P = (7, d(7))$.
   b. Trace la recta AP y halle su respectiva pendiente.
   c. Luego con la herramienta perpendicular  trace una recta perpendicular al eje Y que pase por el punto A y otra recta perpendicular al eje X que pase por el punto P. Indique el punto de intersección entre las rectas anteriores y renombre a este punto con la letra B. Trace el segmento AB y renombre tal segmento $AB = h$.
   d. En la vista gráfica del GeoGebra, oculte la recta perpendicular a eje Y que pasa por A.

2. Responda y verifique los resultados con el GeoGebra.

¿Calcule cuánto es el valor de la velocidad media en el intervalo de tiempo $[5; 7]$?

¿Calcule cuánto es el valor de la velocidad media en el intervalo de tiempo $[7; 10]$?

5

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

3. A partir de la pregunta anterior. ¿Cuál es el valor de h para cada velocidad media encontrada (Explique cómo halló h)? Luego, mueva el deslizador y responda ¿Cuál es la interpretación de h con respecto al tiempo?

4. Con la ayuda del **GeoGebra** utilice el **deslizador** "$\boldsymbol{a}$" para acercar el punto A hacia el punto P, complete las tablas. En la última fila responda lo pedido en la flecha.

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[7; 10]$		
$[7; 8]$		
$[7; 7{,}5]$		
$[7; 7{,}1]$		
$[7; 7{,}01]$		
$[7; 7{,}001]$		
⋮		

¿Los valores del intervalo, de h y la velocidad media se acercan hacia qué números?

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[5; 7]$		
$[6; 7]$		
$[6{,}5; 7]$		
$[6{,}9; 7]$		
$[6{,}99; 7]$		
$[6{,}999; 7]$		
⋮		

6

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

5. Utilizando **el deslizador "$\boldsymbol{a}$"** para acercar el punto A hacia el punto P, responda ¿Cómo varió "h", la pendiente de la recta secante AP y el intervalo de tiempo? y ¿Cómo va cambiando la **recta secante** AP?

6. Considere h una cantidad muy pequeña. A partir de la formula $d(t) = \frac{1}{5}t^2$, calcule la **velocidad media** en el intervalo de tiempo $[7; 7 + h]$.

7

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

7. Si h se acerca al 0. ¿Cuánto valdría el valor de la velocidad media en el intervalo de la pregunta 6.? **Relacione** este resultado con la pregunta 4 y 5.

8. En el GeoGebra, con la herramienta tangente halle la ecuación de la recta tangente de la gráfica $d(t) = \frac{1}{5}t^2$ en el punto P. Posteriormente calcule la pendiente de tal recta tangente.
   a. ¿Qué se puede decir sobre lo construido y la pregunta 7.?

   b. ¿Cuánto es exactamente **la velocidad en un instante específico**, es decir **la velocidad instantánea** cuando $t = 7$ segundos?

8

INTEGRANTES:____ **GRUPO N.**____

9. Justifique ¿Es posible hallar la velocidad en cualquier instante de tiempo?. Con el GeoGebra, calcule la **velocidad instantánea** cuando $t = 3{,}5$ segundos.

10. Diga con sus palabras la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea especificando cómo se determinan ambas velocidades.

GUARDE EL ARCHIVO COMO: Parte2_GrupoN.