

Pontificia Universidad Católica del Perú  
Escuela de Posgrado



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

# Aspectos geométricos de la envoltura convexa del movimiento browniano planar

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Matemáticas

Autor

JUAN CARLOS QUESADA VARGAS

Asesor

DR. JONATHAN SAMUEL FARFÁN VARGAS

Jurado

DR. JOHEL VICTORINO BELTRÁN RAMÍREZ

DR. RUDY JOSÉ ROSAS BAZÁN

**Lima - Perú**  
**Noviembre - 2020**

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA ENVOLTURA CONVEXA DEL  
MOVIMIENTO BROWNIANO PLANAR

**Juan Carlos Quesada Vargas**

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

---

Dr. Johel Victorino Beltrán Ramírez  
(Presidente)

---

Dr. Jonathan Samuel Fáfán Vargas  
(Asesor)

---

Dr. Rudy José Rosas Bazán  
(Miembro)

**Lima - Perú**  
**Noviembre - 2020**

# Resumen

En el presente trabajo de tesis estudiaremos algunos aspectos geométricos de la envoltura convexa de una trayectoria del movimiento browniano planar en un determinado intervalo de tiempo. De manera más precisa, estudiaremos el perímetro, el área y el diámetro de dicha envoltura convexa. En el primer capítulo, revisaremos el movimiento browniano planar y algunas de sus propiedades tales como el principio de reflexión, la ley de la terna de Lévy y la ley del arcoseno que nos servirá como base teórica para justificar las cotas establecidas por James McRedmond y Chang Xu para estimar el diámetro promedio de dicha envoltura convexa. En el segundo capítulo se estudiarán las principales propiedades de cuerpos convexos y la envoltura convexa de una curva donde se desarrollará las propiedades que nos permitan justificar de manera más clara la fórmula de Cauchy para el perímetro y el área de un cuerpo convexo. En el tercer capítulo se utilizará como teorema principal la fórmula de Cauchy para justificar lo que se encontró de manera explícita tanto para el perímetro promedio y el área promedio de la envoltura convexa del recorrido de un movimiento browniano planar hasta el instante  $t = 1$ . Por último, en el cuarto capítulo se utilizará la terna de Lévy como teorema principal para el desarrollo de la estimación del diámetro promedio de dicha envoltura convexa.

# Abstract

In this thesis work we will study some geometric aspects of the convex envelope of a trajectory of planar Brownian motion in a certain time interval. More precisely, we will study the perimeter, area, and diameter of said convex envelope. In the first chapter, we will review the planar Brownian motion and some of its properties such as the reflection principle, Lévy's triple law and the arcsine law that will serve as a theoretical basis to justify the bounds established by James McRedmond and Chang. Xu to estimate the expected diameter of said convex envelope. In the second chapter, the main properties of convex bodies and the convex envelope of a curve will be studied, where the properties that will allow us to justify more clearly Cauchy's formula for the perimeter and area of a convex body will be developed. In the third chapter, the Cauchy formula will be used as the main theorem to justify what was found explicitly for both the expected perimeter and the expected area of the convex envelope of the path of a planar Brownian motion up to the instant  $t = 1$ . By Finally, in the fourth chapter, the Lévy triple will be used as the main theorem for the development of the estimation of the diameter of said convex envelope.



*Dedicado: A mi esposa Carmen Lucía.  
A mis padres Jorge y Lúdia.  
A mis hermanos Jorge y José.*

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Movimiento browniano</b>	<b>2</b>
<b>2. Cuerpos convexos</b>	<b>5</b>
2.1. Conjuntos convexos . . . . .	5
2.2. Funciones convexas . . . . .	14
2.3. Función soporte . . . . .	15
2.4. La métrica de Hausdorff . . . . .	24
2.5. Perímetro y área . . . . .	27
<b>3. Perímetro y área de la envoltura convexa de un movimiento browniano planar</b>	<b>59</b>
3.1. Perímetro promedio . . . . .	59
3.2. Área promedio . . . . .	62
<b>4. Diámetro de la envoltura convexa de un movimiento browniano planar</b>	<b>65</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Agradecimientos

A los profesores de la maestría en matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por su valiosa enseñanza y permanente orientación en el transcurso de mi formación académica.

Al Dr. Jonathan Fáfán por su asesoramiento, tiempo y dedicación brindada a lo largo de la presente investigación, también por su motivación y paciencia para concluir con éxito esta tesis.

Al Dr Roland Rabanal por sus continuos consejos que me motivaron y me impulsaron a concretar esta investigación.

A mis amistades de la Pontificia Universidad Católica del Perú con quienes compartimos experiencias académicas y personales llenos de momentos inolvidables.

A todo mi familia por ser mi inspiración para seguir avanzando profesionalmente.

A mi esposa, Carmen Fernández, por su apoyo incondicional y por el gran amor que me ha demostrado.

# Introducción

El cálculo del perímetro promedio de la envoltura convexa de un tramo del movimiento browniano planar fue propuesto por Gerard Letac en el año 1978 y fue solucionado por Lajos Takács en el año 1980 [11], quien usó la fórmula de Cauchy para el perímetro, desarrollada en el año 1832 [6]. Dicha fórmula consiste en expresar el perímetro de la envoltura convexa en términos de la función soporte asociada a la trayectoria del movimiento browniano planar. Es por ello que se obtuvo una expresión explícita para el perímetro promedio. Luego, Bachir en el año 1983 calculó explícitamente el área promedio de la envoltura convexa de un tramo del movimiento browniano planar a partir de la fórmula de Cauchy para el área [6], dicha fórmula consiste en expresar el área de la envoltura convexa en términos de la función soporte asociada a la trayectoria del movimiento browniano planar. Posteriormente, J. McRedmond y C. Xu en el año 2017 [13], estimaron el diámetro promedio de dicha envoltura convexa, el cual hasta el momento no ha sido calculado de forma explícita, solo se ha podido acotar sugiriendo un valor aproximado. En esta misma línea otros autores como J. Randon-Furling, S.N. Majumdar, y A. Comtet, también han investigado este problema encontrando resultados interesantes que ayudan a los ecologistas a estimar el rango de la trayectoria que realizan los animales para alimentarse, basado en el seguimiento de las posiciones de los animales en un cierto periodo de tiempo [12].

En el presente trabajo estudiaremos algunos aspectos geométricos de la envoltura convexa de una trayectoria del movimiento browniano planar en un determinado intervalo de tiempo. De manera más precisa, estudiaremos el perímetro, el área y el diámetro de dicha envoltura convexa. En la primera parte, revisaremos el movimiento browniano y algunas de sus propiedades tales como el principio de reflexión, la ley de la terna de Lévy y la ley arco seno. En la segunda parte se aplicarán estas propiedades para obtener de manera explícita el valor promedio del perímetro y del área de la envoltura convexa antes mencionada. Asimismo, estimaremos el promedio del diámetro de dicha envoltura convexa. La principal contribución del trabajo es que, si bien estos aspectos geométricos han sido estudiados en distintos artículos, la teoría utilizada no siempre ha sido desarrollada de manera clara o precisa, y entonces gran parte del trabajo consistirá en presentar y demostrar en forma detallada los resultados antes mencionados junto con la teoría necesaria para ello. Así, esto podrá servir como base para cualquier investigación relacionada por parte de alumnos de la maestría o para aquellas personas que tengan interés en el tema.

# Capítulo 1

## Movimiento browniano

En la presente sección, veremos el movimiento browniano y algunas de sus principales propiedades.

**Definición 1.1.** Un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$  es un proceso estocástico  $B : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que cumple las siguientes condiciones:

1.  $B_0 = 0$  c.s.
2. (Incrementos independientes) Si  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$  entonces las variables aleatorias

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes.

3. (Incrementos estacionarios) Si  $0 \leq s < t$  entonces

$B_t - B_s$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$ .

Es decir,

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s).$$

4.  $B$  posee trayectorias continuas c.s.

**Proposición 1.2.** Sea  $B$  un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$ . Entonces

- a) Para cada  $t_0 > 0$ , el proceso  $B_{t+t_0} - B_{t_0}, t \geq 0$  es un movimiento browniano estándar independiente de  $\mathcal{F}_{t_0}^B = \sigma(\{B_r, r \leq t_0\})$ .
- b) El proceso  $-B_t, t \geq 0$  es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$ .
- c) Para cada  $c > 0$ , el proceso  $cB_{\frac{t}{c^2}}, t \geq 0$  es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$ .
- d) (Principio de reflexión) Si  $b > 0$  y  $\tau_b = \inf\{t \geq 0 : B_t = b\}$ , entonces

$$\mathbb{P}[\tau_b < t, B_t < b] = \mathbb{P}[B_t > b], \forall t > 0.$$

e) (Ley del arco seno) La variable aleatoria  $t^* = \inf\{t \in [0, 1] : B_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s\}$  tiene distribución arco seno. Es decir,

$$\mathbb{P}(t^* \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{t}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

*Demostración.* Ver [5]. □

Sea  $B$  un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ,  $m_t = \inf_{0 \leq s \leq t} B_s$  y  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ .

**Observación 1.3.** Para cada  $t > 0$ ,  $\mathbb{P}(M_t > 0) = 1$  y  $\mathbb{P}(m_t < 0) = 1$ .

En efecto, por el principio de reflexión, si  $b > 0$  entonces

$$\mathbb{P}[\tau_b < t] = \mathbb{P}[\tau_b < t, B_t < b] + \mathbb{P}[\tau_b < t, B_t > b] = 2\mathbb{P}[B_t > b].$$

Luego,

$$\mathbb{P}(M_t > 0) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_{\frac{1}{n}} < t\}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_{\frac{1}{n}} < t] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\mathbb{P}\left[B_t > \frac{1}{n}\right] = 1.$$

De manera análoga, se concluye que  $\mathbb{P}(m_t < 0) = 1$ .

**Teorema 1.4.** Sean  $a < 0 < b$  e  $I$  un subconjunto de Borel del intervalo  $(a, b)$ . Entonces

$$\mathbb{P}(m_t > a, M_t < b, B_t \in I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_I \left[ e^{-\frac{(x+2n(b-a))^2}{2t}} - e^{-\frac{(x-2a-2n(b-a))^2}{2t}} \right] dx \quad (1.1)$$

para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Ver [2], p. 76-78. □

**Corolario 1.5.**

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_s| < x\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2/(8x^2)}, \quad \forall x > 0.$$

*Demostración.* Usando el teorema 1.4 para  $a = -x$ ,  $b = x$  y  $t = 1$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_s| < x\right) &= \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq 1} B_s > -x, \sup_{0 \leq s \leq 1} B_s < x, B_1 \in (-x, x)\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-(y+2jx)^2/2} dy, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \int_{(2j-1)x}^{(2j+1)x} e^{-y^2/2} dy, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j 1_{(x(2j-1)x, (2j+1)x)}(y)}_{f(y)} e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

Luego,  $f$  es determinada por la siguiente serie de Fourier de cosenos

$$f(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(\frac{2k+1}{2x}\pi y\right).$$

Así,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_s| < x\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{2k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2k+1}{2x}\pi y\right) e^{-y^2/2} dy.$$

Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2k+1}{2x}\pi y\right) e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi} e^{-\pi^2(2k+1)^2/(8x^2)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_s| < x\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2/(8x^2)}.$$

□

**Definición 1.6.** Un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^n$  es un proceso estocástico

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_n) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  tal que los procesos

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

son movimientos brownianos estándar en  $\mathbb{R}$  independientes.

**Proposición 1.7.** Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal y  $B$  es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el proceso  $AB$  es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Ver [5].

□

**Corolario 1.8.** Si  $B_1, B_2 : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son movimientos brownianos estándar en  $\mathbb{R}$  independientes y  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces los procesos

$$X = B_1 \cos(\theta) + B_2 \sin(\theta) \quad y \quad Y = -B_1 \sin(\theta) + B_2 \cos(\theta)$$

son movimientos brownianos estándar en  $\mathbb{R}$  independientes.

*Demostración.* Basta aplicar el resultado anterior a la matriz ortogonal

$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  y al proceso  $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$  (movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^2$ ).

□

# Capítulo 2

## Cuerpos convexos

En este capítulo el objetivo es mostrar el desarrollo del teorema de Cauchy para el perímetro y el área de un cuerpo convexo (teorema 2.79). Para alcanzar dicho objetivo tomaremos como base teórica [6], pero en gran parte de su desarrollo tomaremos como referencia [7] y para complementar el desarrollo de algunos resultados tomaremos como referencia [8], [9], [10].

**Definición 2.1.** (Suma de Minkowski).

Sean  $A, B \in \mathbb{R}^n$ . Entonces denotaremos por  $A + B$  la suma vectorial de ambos conjuntos. Es decir,

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Si  $r \in \mathbb{R}$  denotaremos por  $rA$  al conjunto

$$rA := \{ra : a \in A\}.$$

**Definición 2.2.** Sean  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \mathbb{R}^n$ . El conjunto  $x + A$  es la traslación de  $A$  definida como:  $x + A = \{x + y : y \in A\}$ .

### 2.1. Conjuntos convexos

**Definición 2.3.** Un subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  es llamado convexo si:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in K, \forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Observación 2.4.** Notemos que  $\mathbb{R}^n$  es un convexo de  $\mathbb{R}^n$  y un intervalo  $I$  es un convexo de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.5.** Sean  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $x$  es combinación convexa de elementos de  $K$ , si existen  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^k \subset [0, 1]$  y  $\{x_i\}_{i=1}^k \subset K$  tales que

$$x = \sum_{i=1}^k t_i x_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k t_i = 1.$$

**Proposición 2.6.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$ . El conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $K$  es convexo.

*Demostración.* Denotemos a  $D$  como el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $K$ . Es decir,

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \in K \right\}.$$

Sean  $x, y \in D$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Debemos demostrar que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$ .

Como  $x \in D$ , entonces existen  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^k \subset [0, 1]$  y  $\{x_i\}_{i=1}^k \subset K$  tales que

$$x = \sum_{i=1}^k t_i x_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k t_i = 1.$$

Como  $y \in D$ , entonces existen  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{t_i^*\}_{i=1}^p \subset [0, 1]$  y  $\{y_i\}_{i=1}^p \subset K$  tales que

$$y = \sum_{i=1}^p t_i^* y_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^p t_i^* = 1$$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k t_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^p t_i^* y_i = \sum_{i=1}^k \lambda t_i x_i + \sum_{i=1}^p (1 - \lambda) t_i^* y_i.$$

Denotemos como  $\alpha_i = \lambda t_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\alpha_{i+k} = (1 - \lambda)t_i^*$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$  y  $x_{i+k} = y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Luego se cumple que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+p} \geq 0$  (ya que  $\lambda \geq 0$ ,  $1 - \lambda \geq 0$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^k \subset [0, 1]$  y  $\{t_i^*\}_{i=1}^p \subset [0, 1]$ ) y que  $x_1, \dots, x_k, x_{1+k}, \dots, x_{p+k} \in K$  (pues  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p \in K$ ).

Además, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+p} \alpha_i &= \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^p \alpha_{i+k} \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda t_i + \sum_{i=1}^p (1 - \lambda) t_i^* \\ &= \lambda \sum_{i=1}^k t_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^p t_i^* = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^p \alpha_{i+k} y_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^p \alpha_{i+k} x_{i+k} \\ &= \sum_{i=1}^{k+p} \alpha_i x_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$ . □

**Proposición 2.7.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $K$  es convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas de elementos de  $K$ .

*Demostración.*

$$\text{Sea } D = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \in K \right\}.$$

Debemos demostrar que

$$K \text{ es convexo} \iff D \subset K.$$

En efecto:

( $\Leftarrow$ ) Sean  $x_1, x_2 \in K$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Veamos que  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$ . Tomemos  $t_1 = \lambda$ ,  $t_2 = 1 - \lambda$ . Es claro que  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $t_1 + t_2 = 1$ , entonces  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D$  y como  $D \subset K$ , tenemos  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$ .

( $\Rightarrow$ ) Sea  $x \in D$ . Entonces

$$x = \sum_{i=1}^k t_i x_i \text{ con } k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, \dots, x_k \in K.$$

Basta probar que  $x \in K$ .

Procederemos por inducción sobre  $k$ . Es claro que esto se cumple para  $k = 1$ ,  $k = 2$ . Supongamos que esto es válido para un cierto  $k \geq 2$ . Entonces debemos probar que vale para  $k + 1$ .

$$\text{Sea } x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i \text{ con } t_1, \dots, t_{k+1} \geq 0, \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1, x_1, \dots, x_{k+1} \in K.$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^k t_i = 0, \text{ entonces } x = x_{k+1} \in K.$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^k t_i \neq 0, \text{ haciendo}$$

$$t = \sum_{i=1}^k t_i \text{ e } y = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t} x_i,$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t} = 1 \text{ y } t_{k+1} = 1 - t.$$

Luego,  $x = ty + (1 - t)x_{k+1}$ . Notemos que  $y \in K$  (por hipótesis inductiva) y como  $K$  es convexo, entonces  $x \in K$ .  $\square$

**Observación 2.8.** Si  $\{K_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} K_i$  es convexo.

Si  $x, y \in \bigcap_{i \in I} K_i$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , debemos demostrar que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} K_i.$$

Veamos:

Como  $x, y \in \bigcap_{i \in I} K_i$ , entonces  $x, y \in K_i, \forall i \in I$ .

Sabemos que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_i, \forall i \in I, \text{ pues } \{K_i\}_{i \in I} \text{ es una familia de conjuntos convexos.}$$

Por lo tanto,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} K_i.$$

**Definición 2.9.** Dado un conjunto arbitrario  $X$ , se define la envoltura convexa de  $X$ , y se representa por  $\text{conv}(X)$ , como la intersección de todos los subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $X$ . Es decir,

$$\text{conv}(X) = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ es convexo, } X \subset A\}.$$

**Observación 2.10.**

1. La envoltura convexa de  $X$  es convexo. Esto es consecuencia de la observación 2.8.
2.  $A \subset \text{conv}(A)$ . Esto resulta de la definición 2.9.
3. La envoltura convexa de un conjunto  $X$  es el menor conjunto convexo que contiene a  $X$ . Es decir, si  $A$  es un conjunto convexo que contiene a  $X$ , entonces

$$\text{conv}(X) \subset A.$$

4. Si  $A \subset B$ , entonces  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$ .

En efecto, se tiene que  $B \subset \text{conv}(B)$ . Como  $A \subset B$ , entonces  $A \subset \text{conv}(B)$ . Sabemos que  $\text{conv}(A)$  es el menor conjunto convexo que contiene a  $A$  y como  $\text{conv}(B)$  es un conjunto convexo que contiene a  $A$ , entonces  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$ .

**Proposición 2.11.** *La envoltura convexa de un conjunto no vacío  $X \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $X$ . Es decir,*

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \in X \right\}.$$

*Demostración.*

$$\text{Sea } D = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \in X \right\}.$$

Debemos demostrar que

$$D = \text{conv}(X).$$

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in X$ . Como  $x = 1x$ , entonces  $x \in D$ . Es decir,  $X \subset D$ . Por la proposición 2.6,  $D$  es convexo y como  $\text{conv}(X)$  es el menor conjunto convexo que contine a  $X$ , entonces  $\text{conv}(X) \subset D$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in D$ . Esto implica que

$$x = \sum_{i=1}^k t_i x_i \text{ con } k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, \dots, x_k \in X$$

y como  $X \subset \text{conv}(X)$ , entonces  $x_1, \dots, x_k \in \text{conv}(X)$ .

Denotemos a  $D^*$  como el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $\text{conv}(X)$ . Es decir,

$$D^* = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1, x_1, \dots, x_k \in \text{conv}(X) \right\}.$$

Como  $\text{conv}(X)$  es convexo, entonces, por la proposición 2.7, tenemos

$$D^* \subset \text{conv}(X).$$

Notemos que  $x \in D^*$ , en consecuencia  $x \in \text{conv}(X)$ .

Luego,

$$D \subset \text{conv}(X).$$

Por lo tanto,

$$D = \text{conv}(X).$$

□

**Observación 2.12.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $A$  es convexo, si y sólo si  $\text{conv}(A) = A$ .

En efecto: ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\text{conv}(A) = A$ . Como  $\text{conv}(A)$  es convexo, en consecuencia  $A$  es convexo.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $A$  es convexo, entonces, por la proposición 2.7 y por la proposición 2.11, se sigue que  $\text{conv}(A) \subset A$ .

Además, se cumple  $A \subset \text{conv}(A)$ . Por lo tanto,  $\text{conv}(A) = A$ .

**Definición 2.13.** Decimos que los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  son afinmente independientes si los vectores  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  son linealmente independientes. En caso contrario se dirán afinmente dependientes.

**Teorema 2.14.** (Caratheodory) Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x \in \text{conv}(A)$ . Entonces  $x$  es combinación convexa de una colección de puntos afinmente independientes de  $A$ . De manera más precisa,  $x$  se puede expresar como una combinación convexa de no más de  $n + 1$  puntos afinmente independientes de  $A$ .

*Demostración.* Ver [7], p. 3. □

**Teorema 2.15.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es compacto, entonces  $\text{conv}(A)$  es compacta.

*Demostración.*

Sea  $\Delta := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Sea  $f : \Delta \times A^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función dada por

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Afirmación:  $f(\Delta \times A^{n+1}) = \text{conv}(A)$ .

En efecto, sea  $x \in \text{conv}(A)$ . Entonces, por el teorema de Caratheodory, existen  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset [0, 1]$  y  $\{x_i\}_{i=1}^k \subset A$  tales que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

donde  $x_1, \dots, x_k$  son puntos afinmente independientes de  $A$  con  $k \leq n + 1$ .

Si  $k = n + 1$ . Entonces existen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta \times A^{n+1}$  tales que

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Si  $k < n + 1$ . Tomemos  $\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k}{n+1-k}$ ,  $\lambda_{k+2} = \frac{\lambda_k}{n+1-k}$ , ...,  $\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_k}{n+1-k}$  y  $x_{k+1} = x_k, \dots, x_{n+1} = x_k$ , entonces existen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta \times A^{n+1}$  tales que

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Como  $A$  es compacto y  $\Delta$  es compacto, entonces  $\Delta \times A^{n+1}$  es compacto. Además, la aplicación  $f$  es continua. Por lo tanto,  $\text{conv}(A)$  es compacto.  $\square$

**Proposición 2.16.** *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto acotado no vacío, entonces*

$$\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{conv}(A)).$$

*Demostración.* Como  $A \subset \text{conv}(A)$ , entonces

$$\text{diam}(A) \leq \text{diam}(\text{conv}(A)). \quad (2.1)$$

Veamos la otra desigualdad. Sean  $x, y \in \text{conv}(A)$ , entonces

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m,$$

para algunos  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$  con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$  y

$$y = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_p b_p,$$

para algunos  $b_1, b_2, \dots, b_p \in A$  con  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \geq 0$ ,  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = 1$ .

Notemos que

$$x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j a_i, \quad y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j b_i.$$

Aplicando la desigualdad triangular, se cumple que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j (a_i - b_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j \|a_i - b_j\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j \text{diam}(A) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \left( \sum_{j=1}^p \mu_j \right) \text{diam}(A) \\ &\leq \text{diam}(A). \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos

$$\|x - y\| \leq \text{diam}(A), \quad \forall x, y \in \text{conv}(A),$$

Luego,

$$\text{diam}(\text{conv}(A)) \leq \text{diam}(A). \quad (2.2)$$

De (2.1) y (2.2), se concluye que

$$\text{diam}(\text{conv}(A)) = \text{diam}(A).$$

□

**Definición 2.17.** Un conjunto convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  que es compacto y no vacío es denominado un cuerpo convexo. Denotaremos por  $\mathcal{K}^n$  a la familia de cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{K}_0^n$  a la familia de cuerpos convexos con interior no vacío. Es decir,

$$\mathcal{K}^n = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ es un cuerpo convexo}\}, \quad \mathcal{K}_0^n = \{K \in \mathcal{K}^n : \text{int}(K) \neq \emptyset\}.$$

**Observación 2.18.** Si  $K, L \in \mathcal{K}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $K + L, \lambda K \in \mathcal{K}^n$ .

**Definición 2.19.** Un politopo en  $\mathbb{R}^n$  se define como la envoltura convexa de un subconjunto finito de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 2.20.** *Todo politopo en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto.*

*Demostración.* Sea  $P$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $P = \emptyset$  se cumple lo afirmado.

Si  $P \neq \emptyset$ , entonces existen puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que

$$P = \text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_k\}.$$

Como  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  es compacto, aplicando el teorema 2.15, se obtiene que

$$\text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \text{ es compacto.}$$

Por lo tanto,  $P$  es un conjunto compacto. □

**Definición 2.21.** Denotaremos por  $\mathcal{P}^n$  a la familia de politopos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  y por  $\mathcal{P}_0^n$  a la familia de politopos en  $\mathbb{R}^n$  con interior no vacío. Es decir,

$$\mathcal{P}^n = \{P \subset \mathbb{R}^n : P \text{ es politopo no vacío en } \mathbb{R}^n\}, \quad \mathcal{P}_0^n = \mathcal{P}^n \cap \mathcal{K}_0^n.$$

**Teorema 2.22.** *Si  $K \in \mathcal{K}^n$ , entonces, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $P \in \mathcal{P}^n$  tal que*

$$P \subset K \subset P_\epsilon,$$

donde  $P_\epsilon = \bigcup_{x \in P} \bar{B}_\epsilon(x)$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $K$  es compacto, entonces existen  $x_1, \dots, x_n \in K$  tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}_\epsilon(x_i).$$

Tomemos  $P = \text{conv}(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\})$  y  $P_\epsilon = \bigcup_{x \in P} \bar{B}_\epsilon(x)$ .

Como  $K$  es convexo y  $\bigcup_{i=1}^n \bar{B}_\epsilon(x_i) \subset P_\epsilon$ , entonces

$$P \subset K \subset P_\epsilon.$$

□

**Definición 2.23.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define la distancia del punto  $x$  al conjunto  $A$  de la siguiente manera:

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

**Proposición 2.24.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y no vacío. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n - A$ , existen  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle z, u \rangle \leq \beta, \quad \forall z \in A \quad \text{y} \quad \langle x, u \rangle > \beta.$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}^n - A$ . Como  $A$  es un conjunto cerrado, existe  $a \in A$  tal que

$$\|x - a\| = d(x, A) \neq 0.$$

Sean  $u = \frac{x - a}{\|x - a\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\beta = \sup_{z \in A} \langle z, u \rangle$ . Entonces

$$\langle z, u \rangle \leq \beta, \quad \forall z \in A.$$

Además,

$$\langle x, u \rangle - \langle a, u \rangle = \langle x - a, u \rangle = \|x - a\| > 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle x, u \rangle > \langle a, u \rangle. \tag{2.3}$$

Sea  $z \in A$ . Consideremos la función dada por

$$f(t) = \|x - [(1-t)a + tz]\|^2 = \|x - a + t(a - z)\|^2.$$

Como  $A$  es convexo,  $(1-t)a + tz \in A$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Entonces  $f$  alcanza su valor mínimo en  $t = 0$  (ya que  $f(0) = \|x - a\|^2$ ). En particular,

$$0 \leq f'(0) = [2t\|a - z\|^2 + 2\langle x - a, a - z \rangle] |_{t=0} = 2\langle x - a, a - z \rangle.$$

Entonces

$$\langle z, u \rangle = \frac{\langle z, x - a \rangle}{\|x - a\|} \leq \frac{\langle a, x - a \rangle}{\|x - a\|} = \langle a, u \rangle.$$

Como  $z \in A$  fue tomado de manera arbitraria, entonces

$$\beta = \sup_{z \in A} \langle z, u \rangle \leq \langle a, u \rangle.$$

De esto y de (2.3), concluimos que

$$\beta < \langle x, u \rangle.$$

□

## 2.2. Funciones convexas

**Definición 2.25.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Decimos que una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

**Teorema 2.26.** Toda función convexa  $f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $\text{int}(\text{Dom} f)$ .

*Demostración.* Ver [7], p. 21-22. □

**Definición 2.27.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es localmente Lipschitz continua si para cada conjunto compacto  $K \subset A$ , existe una constante  $C_K$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_K \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K.$$

**Teorema 2.28.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexo, entonces  $f$  es una función localmente Lipschitz continua en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Ver [8], p. 267. □

**Teorema 2.29.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función localmente Lipschitz continua, entonces  $f$  es diferenciable  $\mathcal{L}^n - c.s.$ , donde  $\mathcal{L}^n$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Ver [8], p. 103-106. □

**Corolario 2.30.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexo, entonces  $f$  es diferenciable  $\mathcal{L}^n - c.s.$

*Demostración.* Como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexo, entonces, por el teorema 2.28,  $f$  es una función localmente Lipschitz continua. Luego, aplicando el teorema 2.29, se concluye que  $f$  es diferenciable  $\mathcal{L}^n - c.s.$  □

## 2.3. Función soporte

**Definición 2.31.** Sea  $K \in \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y no vacío. La función soporte  $h_K$  de  $K$  se define como:

$$h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow ]-\infty, \infty] \\ u \rightarrow \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle.$$

Denotaremos por  $Dom(h_K) = \{u \in \mathbb{R}^n : h_K(u) < \infty\}$ .

Para cada  $u \in Dom(h_K) - \{0\}$ , definamos los conjuntos

$$H(K, u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_K(u)\}$$

$$H^-(K, u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h_K(u)\}$$

$$F(K, u) := H(K, u) \cap K,$$

denominados respectivamente, el hiperplano soporte, el semiespacio soporte y el conjunto soporte  $K$  con vector normal exterior  $u$ .

**Proposición 2.32.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Para cada  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , existe  $x_0 \in \partial K$  tal que

$$h_K(u) = \langle x_0, u \rangle,$$

donde  $h_K$  es la función soporte de  $K$ .

*Demostración.* Sea  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Como  $h_K$  es la función soporte de  $K$ , entonces

$$h_K(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle. \quad (2.4)$$

Sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x) = \langle x, u \rangle$ ,  $\forall x \in K$ .

Notemos que  $f$  así definida es continua en  $K$  y como  $K$  es compacto, entonces existe  $x_0 \in K$  tal que  $\max_{x \in K} f(x) = \langle x_0, u \rangle$ .

Reemplazando en (2.4), tenemos que  $h_K(u) = \langle x_0, u \rangle$ .

Afirmación:  $x_0 \in \partial K$ .

En efecto, supongamos que  $x_0 \in \text{int}(K)$ . Entonces existe  $r > 0$  tal que  $B_r(x_0) \subset K$ . Tomando  $x_0 + \frac{r}{2} \frac{u}{\|u\|} \in B_r(x_0) \subset K$ , se sigue que  $x_0 + \frac{r}{2} \frac{u}{\|u\|} \in K$ .

Además, tenemos que  $\langle x, u \rangle \leq h_K(u) = \langle x_0, u \rangle$ ,  $\forall x \in K$  y como  $x_0 + \frac{r}{2} \frac{u}{\|u\|} \in K$ , entonces  $\left\langle x_0 + \frac{r}{2} \frac{u}{\|u\|}, u \right\rangle \leq \langle x_0, u \rangle$ . Luego,  $\frac{r}{2} \leq 0$  (contradicción).  $\square$

**Proposición 2.33.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Si  $y_0 \in \partial K$ , entonces existe  $u_0 \in S^{n-1}$  tal que

$$h_K(u_0) = \langle y_0, u_0 \rangle,$$

donde  $h_K$  es la función soporte de  $K$ .

*Demostración.* Como  $y_0 \in \partial K$ , existe una sucesión  $\{x_m\}$  en  $\mathbb{R}^n - K$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = y_0.$$

Por lo visto en la demostración de la proposición 2.24, para cada  $m \in \mathbb{Z}^+$ , existe  $a_m \in K$  tal que

- $\|x_m - a_m\| = d(x_m, K)$ ,
- $\langle z, u_m \rangle \leq \langle a_m, u_m \rangle$  para todo  $z \in K$ , donde  $u_m = \frac{x_m - a_m}{\|x_m - a_m\|} \in S^{n-1}$ .

Como  $S^{n-1}$  es compacto, pasando a una subsucesión si es necesario podemos suponer que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u_0 \in S^{n-1}.$$

Sea  $z \in K$ . Entonces

$$\langle z, u_m \rangle \leq \langle x_m, u_m \rangle \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

Tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\langle z, u_0 \rangle \leq \langle y_0, u_0 \rangle.$$

Como  $z \in K$  fue tomado arbitrariamente, concluimos que

$$h_K(u_0) \leq \langle y_0, u_0 \rangle.$$

De la definición de  $h_K(u_0)$ , es evidente que  $h_K(u_0) \geq h_K(u_0) \leq \langle y_0, u_0 \rangle$ .

Finalmente, concluimos que  $h_K(u_0) = \langle y_0, u_0 \rangle$ . □

**Proposición 2.34.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  conjunto convexo cerrado y no vacío.

- a)  $h_K(\lambda u) = \lambda h_K(u)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ .
- b)  $h_K(u + v) \leq h_K(u) + h_K(v)$ ,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ .
- c)  $x \in K \Leftrightarrow \langle x, u \rangle \leq h_K(u)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ .
- d) Si  $K$  es acotado, entonces  $h_K$  es finita.
- e) Si  $L$  también es un conjunto convexo cerrado y no vacío, entonces

$$h_{\alpha K + \beta L} = \alpha h_K + \beta h_L, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

*Demostración.*

a) Sean  $\lambda \geq 0, u \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$h_K(\lambda u) = \sup_{x \in K} \langle x, \lambda u \rangle = \lambda \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle = \lambda h_K(u).$$

b) Sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$h_K(u + v) = \sup_{x \in K} \langle x, u + v \rangle \leq \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle + \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle = h_K(u) + h_K(v).$$

c) ( $\Rightarrow$ ) Se cumple de la definición de la función soporte de  $K$ .

( $\Leftarrow$ ) Debemos demostrar que si  $\langle x, u \rangle \leq h_K(u), \forall u \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $x \in K$ .

Esto equivale a demostrar

$$x \in \mathbb{R}^n - K \Rightarrow h_K(u) < \langle x, u \rangle, \text{ para algún } u \in \mathbb{R}^n.$$

Como  $x \in \mathbb{R}^n - K$ , entonces, por la proposición 2.24, existen  $u_0 \in S^{n-1}$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle z, u_0 \rangle \leq \beta, \forall z \in K \text{ y } \langle x, u_0 \rangle > \beta.$$

Lo cual implica que

$$h_K(u_0) \leq \beta < \langle x, u_0 \rangle$$

Por lo tanto,

$$h_K(u) < \langle x, u \rangle, \text{ para algún } u \in \mathbb{R}^n.$$

d) Como  $K$  es acotado, entonces  $\exists c > 0$  tal que  $\|x\| \leq c, \forall x \in K$ .

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\langle u, x \rangle \leq \|u\| \cdot \|x\| \leq c\|u\|, \forall x \in K, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Luego se cumple que

$$h_K(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle \leq c\|u\|, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, la función soporte de  $K$  es finita.

e) Sean  $u \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \geq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} h_{\alpha K + \beta L}(u) &= \sup_{x \in \alpha K + \beta L} \langle x, u \rangle = \sup_{y \in K, z \in L} \langle \alpha y + \beta z, u \rangle = \sup_{y \in K} \langle \alpha y, u \rangle + \sup_{z \in L} \langle \beta z, u \rangle \\ &= \alpha h_K(u) + \beta h_L(u) = (\alpha h_K + \beta h_L)(u). \end{aligned}$$

□

**Observación 2.35.** La función soporte  $h_K$  de  $K$  es convexa. Esto es consecuencia de la proposición 2.34 partes a) y b).

**Proposición 2.36.** Sean  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos convexos cerrados y no vacíos y  $h_K, h_L$  sus respectivas funciones soporte. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $K \subset L$ .

b)  $h_K(u) \leq h_L(u), \forall u \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

a)  $\Rightarrow$  b) : Si  $K \subseteq L$ , entonces

$$h_K(u) = \sup\{\langle a, u \rangle : a \in K\} \leq \sup\{\langle a, u \rangle : a \in L\} = h_L(u).$$

Por lo tanto,

$$h_K(u) \leq h_L(u), \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

a)  $\Leftarrow$  b) : Supongamos que

$$h_K(u) \leq h_L(u), \forall u \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Sea  $x \in K$ , entonces, de la definición de  $h_K$ , tenemos que

$$\langle x, u \rangle \leq h_K(u) \leq h_L(u), \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, por la proposición 2.34 parte c), se cumple que  $x \in L$ .

Por lo tanto,  $K \subset L$ . □

**Observación 2.37.** Sean  $K, L \in \mathcal{K}^n$ . Si  $K \subset \text{int}(L)$ , entonces

$$h_K(u) < h_L(u), \forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

En efecto, supongamos por contradicción que

$$h_L(u) \leq h_K(u), \text{ para algún } u \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad (2.6)$$

Como  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  y  $h_K$  es la función soporte de  $K$ , entonces, por la proposición 2.32, existe  $x_0 \in \partial K$  tal que

$$h_K(u) = \langle x_0, u \rangle. \quad (2.7)$$

Como  $x_0 \in K \subset \text{int}(L)$ , se sigue que  $x_0 \in \text{int}(L)$ . Entonces existe  $r > 0$  tal que

$$\overline{B}_r(x_0) \subset L.$$

De (2.6) y (2.7), tenemos que

$$\langle x, u \rangle \leq h_L(u) \leq \langle x_0, u \rangle, \forall x \in L.$$

Como  $x_0 + r \frac{u}{\|u\|} \in \overline{B}_r(x_0) \subset L$ , entonces  $\left\langle x_0 + r \frac{u}{\|u\|}, u \right\rangle \leq \langle x_0, u \rangle$ .

Luego,  $r \leq 0$  (contradicción).

**Proposición 2.38.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y no vacío. Entonces para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h_{\text{conv}(A)}(u) = \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\}.$$

*Demostración.* Si  $u = 0$ , se cumple lo afirmado.

Si  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , demostraremos que

$$I) \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\} \leq h_{\text{conv}(A)}(u) \quad \text{y} \quad II) h_{\text{conv}(A)}(u) \leq \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\}.$$

I) Como  $A \subset \text{conv}(A)$ , entonces

$$\sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\} \leq \sup\{\langle a, u \rangle : a \in \text{conv}(A)\} = h_{\text{conv}(A)}(u). \quad (2.8)$$

II) Si  $\sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\} = \infty$ , se cumple la afirmación.

Supongamos ahora que

$$\lambda = \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\} \in \mathbb{R}.$$

Sea  $H^- = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u \rangle \leq \lambda\}$ .

Como  $A \subset H^-$  y  $H^-$  es convexo, entonces  $\text{conv}(A) \subset H^-$ .

Es decir,

$$\langle a, u \rangle \leq \lambda, \quad \forall a \in \text{conv}(A).$$

En particular,  $\sup\{\langle a, u \rangle : a \in \text{conv}(A)\} \leq \lambda$ . Entonces

$$h_{\text{conv}(A)}(u) \leq \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\}. \quad (2.9)$$

De (2.8) y (2.9), se concluye que

$$h_{\text{conv}(A)}(u) = \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\}.$$

□

**Observación 2.39.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  tal que  $0 \in \text{int}(K)$ . Para cada  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , se cumple que

$$h_K(u) > 0.$$

En efecto, sea  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Como  $0 \in \text{int}(K)$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $B_r(0) \subset K$ .

Además, tenemos que  $h_K(u) \geq \langle x, u \rangle$ ,  $\forall x \in K$ . Como  $\frac{r}{2} \left( \frac{u}{\|u\|} \right) \in B_r(0) \subset K$ , entonces  $h_K(u) \geq \left\langle \frac{r}{2} \left( \frac{u}{\|u\|} \right), u \right\rangle = \frac{r}{2} \|u\| > 0$ . Por lo tanto,  $h_K(u) > 0$ .

**Definición 2.40.** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Definimos la derivada direccional unilateral de  $f$  en  $x$  con respecto a  $y$  como el siguiente límite.

$$f'(x, y) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t},$$

si este límite existe.

**Definición 2.41.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es sublineal si cumple que

$$f(\lambda u) = \lambda f(u), \quad f(u + v) \leq f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \geq 0.$$

**Observación 2.42.**

1. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es una función convexa entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , existen los siguientes límites

$$f'(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Toda función soporte de un cuerpo convexo es una función sublineal.

En efecto, sea  $h_K$  la función soporte de  $K \in \mathcal{K}^n$ . Por la proposición 2.34 partes a) y b), se cumple que  $h_K$  es una función sublineal.

3. Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_K$  y  $u \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$h'_K(u, v) \leq h_K(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, sea  $v \in \mathbb{R}^n$  y sea  $t > 0$ . Como  $h_K$  es una función sublineal, entonces

$$\begin{aligned} h_K(u + tv) &\leq h_K(u) + th_K(v), \\ \frac{h_K(u + tv) - h_K(u)}{t} &\leq h_K(v), \quad \forall t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_K(u + tv) - h_K(u)}{t} &\leq h_K(v), \\ h'_K(u, v) &\leq h_K(v). \end{aligned}$$

4. Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_K$  y  $u \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$h'_K(u, -u) = -h'_K(u, u).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} h'_K(u, -u) &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_K(u + (-t)u) - h_K(u)}{-t} \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h_K(u + \lambda u) - h_K(u)}{\lambda} \\ &= -h'_K(u, u). \end{aligned}$$

5. Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_K$  y  $u \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$h'_K(u, u) = h_K(u).$$

En efecto, como  $h_K$  es sublineal (item 2), entonces

$$\begin{aligned} h'_K(u, u) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_K(u + tu) - h_K(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_K((1+t)u) - h_K(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)h_K(u) - h_K(u)}{t} \\ &= h_K(u). \end{aligned}$$

**Lema 2.43.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces la función derivada direccional

$$f'(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es sublineal.}$$

*Demostración.* Ver [7], p. 24-25. □

**Lema 2.44.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función sublineal. Entonces existe un único  $K \in \mathcal{K}^n$  tal que

$$f \text{ es la función soporte de } K. \text{ Es decir, } f = h_K.$$

*Demostración.* Ver [7], p. 45-46. □

**Teorema 2.45.** Si  $K \in \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_K$  y  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , entonces

$$h'_K(u, x) = h(F(K, u), x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Como  $h_K$  es convexa, entonces, por la observación 2.42, existe el siguiente límite

$$h'_K(u, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_K(u + tx) - h_K(u)}{t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando el lema 2.43, tenemos que  $h'_K(u, \cdot)$  es sublineal.

Luego, por el lema 2.44, se cumple que existe un único  $K' \in \mathcal{K}^n$  tal que

$$h'_K(u, \cdot) \text{ es la función soporte de } K'.$$

Además, por la observación 2.42 (item 3), tenemos que

$$h'_K(u, v) \leq h_K(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Esto, por la proposición 2.36, implica que

$$K' \subset K. \tag{2.10}$$

Afirmación 1:  $h'_K(u, x) \leq h(F(K, u), x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

En efecto, sea  $y \in K'$ . Por (2.10), tenemos que  $y \in K$ . Luego, de la definición de la función soporte de  $K$ , se tiene que

$$\langle y, u \rangle \leq h_K(u). \quad (2.11)$$

Por otro lado, de la definición de la función soporte de  $K'$ , tenemos

$$\langle y, -u \rangle \leq h'_K(u, -u). \quad (2.12)$$

De la observación 2.42 (item 4 y 5) en (2.12), se tiene que

$$\begin{aligned} \langle y, -u \rangle &\leq -h_K(u), \\ \langle y, u \rangle &\geq h_K(u). \end{aligned} \quad (2.13)$$

De (2.11) y (2.13), tenemos

$$\langle y, u \rangle = h_K(u), \quad (2.14)$$

así,

$$y \in F(K, u).$$

Luego,

$$K' \subset F(K, u).$$

De la propoción 2.36, se concluye que

$$h'_K(u, x) \leq h(F(K, u), x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmación 2:  $h(F(K, u), x) \leq h'_K(u, x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

En efecto, sea  $y \in F(K, u)$ . Entonces

$$\langle y, u \rangle = h_K(u). \quad (2.15)$$

De la definición de la función soporte de  $K$ , tenemos que

$$\langle y, v \rangle \leq h_K(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

Sean  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ , en (2.16). Tomemos  $v = u + \lambda x$ , esto implica que

$$\langle y, x \rangle \leq \frac{h_K(u + \lambda x) - \langle y, u \rangle}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

En consecuencia, tenemos

$$\langle y, x \rangle \leq h'_K(u, x), \quad \forall y \in F(K, u).$$

Por lo tanto,

$$h(F(K, u), x) \leq h'_K(u, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De la afirmación 1 y la afirmación 2, se concluye el teorema.  $\square$

**Observación 2.46.** Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y diferenciable en  $x$ , entonces

$$f'(x, v) \geq \langle \nabla f(x), v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Sea  $v \in \mathbb{R}^n$ . Como  $f$  es una función convexa y diferenciable en  $x$ , entonces

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

Sea  $\lambda > 0$ , en (2.17) tomemos  $y = x + \lambda v$ . Esto implica que

$$\frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda} \geq \langle \nabla f(x), v \rangle, \forall \lambda > 0. \quad (2.18)$$

Luego,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda} \geq \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Por lo tanto,

$$f'(x, v) \geq \langle \nabla f(x), v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2.19)$$

□

**Proposición 2.47.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Si la función soporte  $h_K$  es diferenciable en  $u$ , entonces el conjunto soporte  $F(K, u)$  contiene un único punto  $x$ . Además, se cumple que

$$x = \nabla h_K(u).$$

*Demostración.* Supongamos que la función soporte  $h_K$  es diferenciable en  $u$ , entonces existen las derivadas direccionales y se cumple que

$$h'_K(u, v) = -h'_K(u, -v), \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2.20)$$

Como  $h_K$  es convexo y diferenciable en  $u$ , entonces, por la observación 2.46, se tiene que

$$h'_K(u, v) \geq \langle \nabla h_K(u), v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2.21)$$

Sea  $v \in \mathbb{R}^n$ . De(2.20) y (2.21), tenemos que

$$h'_K(u, v) = -h'_K(u, -v) \leq -\langle \nabla h_K(u), -v \rangle.$$

Así

$$h'_K(u, v) \leq \langle \nabla h_K(u), v \rangle. \quad (2.22)$$

Además, en(2.21), tenemos que

$$h'_K(u, v) \geq \langle \nabla h_K(u), v \rangle. \quad (2.23)$$

De (2.22) y (2.23), se sigue que

$$\langle \nabla h_K(u), v \rangle = h'_K(u, v). \quad (2.24)$$

En (2.24), aplicando el teorema 2.45, tenemos que

$$\langle \nabla h_K(u), v \rangle = h(F(K, u), v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

Denotemos  $x = \nabla h_K(u)$ , como  $x \in \mathbb{R}^n$  podemos expresarlo en coordenadas. Es decir,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ahora, en (2.25), tomemos  $v = e_i$  vector de la base canónica. Esto implica que

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = h(F(K, u), e_i). \quad (2.26)$$

De (2.26) y de la definición de función soporte de  $F(K, u)$ , se sigue que

$$\langle z, e_i \rangle \leq x_i, \quad \forall z \in F(K, u). \quad (2.27)$$

Por otro lado, en (2.25) tomemos  $v = -e_i$  Esto implica que

$$-x_i = \langle x, -e_i \rangle = h(F(K, u), -e_i). \quad (2.28)$$

De(2.28) y de la definición de función soporte de  $F(K, u)$  se sigue que

$$\begin{aligned} \langle z, -e_i \rangle &\leq -x_i, \quad \forall z \in F(K, u), \\ \langle z, e_i \rangle &\geq x_i, \quad \forall z \in F(K, u). \end{aligned} \quad (2.29)$$

De (2.27) y (2.29), tenemos que

$$\langle z, e_i \rangle = x_i, \quad \forall z \in F(K, u). \quad (2.30)$$

Haciendo esto para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , se cumple que

$$F(K, u) = \{x\}.$$

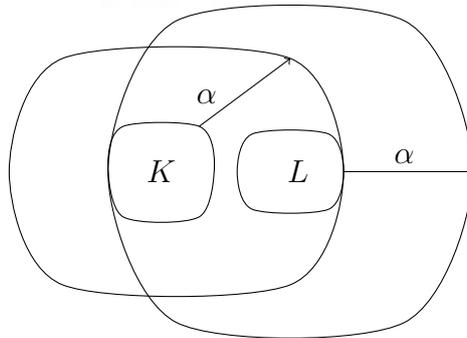
Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

## 2.4. La métrica de Hausdorff

**Definición 2.48.** Sean  $K, L \in \mathcal{K}^n$ . La distancia de Hausdorff entre  $K$  y  $L$  se define por

$$d_H(K, L) = \min\{\alpha \geq 0 : K \subset L + \alpha\bar{B}, L \subset K + \alpha\bar{B}\},$$

donde  $\bar{B} = \bar{B}_1(0)$  denota la bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  centrado en el origen y de radio uno.



**Observación 2.49.**  $K + \alpha\bar{B} = \bigcup_{x \in K} \bar{B}_\alpha(x)$ .

**Observación 2.50.** La distancia de Hausdorff es una métrica. Ver [7], p. 61.

**Teorema 2.51.** Para  $K, L \in \mathcal{K}^n$ ,  $d_H(K, L) = \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|$ .

*Demostración.* Ver [7], p. 66. □

**Lema 2.52.** Sean  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$  y  $K_2 \subset \text{int}(K_1)$ . Entonces existe  $\eta > 0$  tal que para cada  $K \in \mathcal{K}^n$  con  $d_H(K_1, K) < \eta$  se cumple que  $K_2 \subset K$ .

*Demostración.* Como  $K_2 \subset \text{int}(K_1)$ , por la observación 2.37, se tiene que

$$h_{K_1}(u) - h_{K_2}(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Esto define una función  $h_{K_1} - h_{K_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positiva en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Como  $h_{K_1}$  y  $h_{K_2}$  son funciones convexas, entonces,  $h_{K_1}$  y  $h_{K_2}$  son funciones continuas. En particular,  $h_{K_1} - h_{K_2}$  es continua en el compacto  $\mathbb{S}^{n-1}$ , y por tanto existe  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que

$$\eta = \min_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} (h_{K_1} - h_{K_2})(u) = (h_{K_1} - h_{K_2})(u_0) > 0.$$

Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  tal que  $d_H(K_1, K) < \eta$ . Por el teorema 2.51, tenemos que

$$|(h_{K_1} - h_K)(u)| < \eta, \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Lo cual implica que

$$h_{K_2}(u) = h_{K_1}(u) - (h_{K_1} - h_{K_2})(u) \leq h_{K_1}(u) - \eta \leq h_K(u), \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Esto es,

$$h_{K_2}(u) \leq h_K(u), \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Luego, por la proposición 2.34 parte a), se sigue que

$$h_{K_2}(u) \leq h_K(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, por la proposición 2.36, se cumple que

$$K_2 \subset K.$$

□

**Teorema 2.53.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $0 \in \text{int}(K)$ . Entonces, para cada  $\lambda > 1$ , existe  $P \in \mathcal{P}^n$  tal que

$$P \subset K \subset \lambda P.$$

*Demostración.* Sea  $\lambda > 1$ . Como  $0 \in \text{int}(K)$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\overline{B}_\epsilon(0) \subset \text{int}(K). \quad (2.31)$$

Aplicando el lema 2.52, se sigue que

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall L \in \mathcal{K}^n \text{ con } d_H(L, K) < \eta \text{ se cumple que } \overline{B}_\epsilon(0) \subset L. \quad (2.32)$$

Tomemos  $\delta = \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{(\lambda - 1)\epsilon}{2} \right\}$ . Por el teorema 2.22, existe  $P \in \mathcal{P}^n$  tal que

$$P \subset K \subset P_\delta, \quad (2.33)$$

donde  $P_\delta = \bigcup_{x \in P} \overline{B}_\delta(x)$ .

Notemos que

$$\bigcup_{x \in P} \overline{B}_\delta(x) = P + \delta \overline{B},$$

y de la definición de  $d_H$  (distancia de Hausdorff), tenemos que

$$d_H(P, K) \leq \delta < \eta. \quad (2.34)$$

Entonces, por (2.32), se tiene que

$$B_\epsilon(0) \subset P.$$

Luego, por la proposición 2.36, tenemos que

$$\epsilon = h_{\overline{B}_\epsilon(0)}(u) \leq h_P(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \quad (2.35)$$

Afirmación:  $K \subset \lambda P$ .

En efecto, sea  $u \in \mathbb{R}^n$ , como  $K \subset P_\delta = P + \overline{B}_\delta(0)$ , entonces, por la proposición 2.36 y la proposición 2.34 parte e) y (2.35), tenemos que

$$\begin{aligned} h_K(u) &\leq h_P(u) + h_{\overline{B}_\delta(0)}(u) = h_P(u) + \delta, \\ &< h_P(u) + (\lambda - 1)\epsilon, \\ &\leq \lambda h_P(u) = h_{\lambda P}(u). \end{aligned}$$

Luego, por la proposición 2.36, se cumple lo afirmado. En consecuencia, el teorema queda demostrado.  $\square$

**Lema 2.54.** *Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  conjunto compacto y no vacío. Entonces*

$$\text{diam}(A) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta), \quad (2.36)$$

donde  $r_A(\theta) = \sup_{x \in A} \langle x, u_\theta \rangle - \inf_{x \in A} \langle x, u_\theta \rangle$  con  $u_\theta = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ .

*Demostración.* Si  $A$  es un conjunto unitario entonces  $\text{diam}(A) = 0$  y  $r_A(\theta) = 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Entonces

$$\text{diam}(A) = 0 = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta).$$

Supongamos ahora que  $A$  tiene al menos dos elementos. Ya que  $A$  es compacto, para cada  $\theta$  existen  $x, y \in A$  tal que

$$r_A(\theta) = \langle x, u_\theta \rangle - \langle y, u_\theta \rangle.$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$r_A(\theta) = \langle x, u_\theta \rangle - \langle y, u_\theta \rangle = \langle x - y, u_\theta \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|u_\theta\| \leq \|x - y\|.$$

En consecuencia, tenemos

$$\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta) \leq \sup_{x, y \in A} \|x - y\| = \text{diam}(A). \quad (2.37)$$

Veamos la otra desigualdad. Como  $A$  es un conjunto compacto con al menos dos elementos, entonces existen  $x_0, y_0 \in A$  tales que

$$\text{diam}(A) = \|x_0 - y_0\| \neq 0$$

Sea  $z = x_0 - y_0$  y tomemos  $\theta_0 \in [0, \pi]$  tal que  $u_{\theta_0} = \frac{z}{\|z\|}$ , luego se tiene

$$\text{diam}(A) = \|z\| = z \cdot \frac{z}{\|z\|} = (x_0 - y_0)(u_{\theta_0}) = x_0 \cdot u_{\theta_0} - y_0 \cdot u_{\theta_0} \leq r_A(\theta_0) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta).$$

Es decir,

$$\text{diam}(A) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta). \quad (2.38)$$

De (2.37) y (2.38), se concluye que

$$\text{diam}(A) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta).$$

□

## 2.5. Perímetro y área

**Observación 2.55.** Si  $P \in \mathcal{P}_0^2$ , decimos que  $P$  es un polígono convexo.

**Definición 2.56.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_k$  los vértices del polígono convexo  $P$ .

Sea  $l_1 = \|v_2 - v_1\|, l_2 = \|v_3 - v_2\|, \dots, l_k = \|v_1 - v_k\|$  las longitudes de cada uno de sus lados de  $P$ . El perímetro del polígono convexo  $P$  se define como la suma de la longitud de cada uno de sus lados. Es decir,

$$l(P) = \sum_{i=1}^k l_i. \quad (2.39)$$

- A partir de este momento los vértices de un polígono serán puntos consecutivos distribuidos en sentido antihorario.

**Proposición 2.57.** *El perímetro del polígono convexo  $P$  tiene las siguientes propiedades:*

a)  $l$  es invariante por traslación.

b)  $l(\alpha P) = \alpha l(P)$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

*Demostración.* a) sea  $x \in \mathbb{R}^2$ . Debemos demostrar que su traslación

$$x + P = \{x + y : y \in P\}$$

tienen el mismo perímetro. Es decir,

$$l(x + P) = l(P).$$

Sean  $v_1, v_2, \dots, v_k$  los vértices del polígono convexo  $P$ , entonces, se cumple que

$$x + v_1, x + v_2, \dots, x + v_k \text{ son los vértices de } x + P.$$

Luego, de la definición del perímetro, tenemos que

$$\begin{aligned} l(x + P) &= \|x + v_2 - (x + v_1)\| + \|x + v_3 - (x + v_2)\| + \dots + \|x + v_1 - (x + v_k)\| \\ &= \|v_2 - v_1\| + \|v_3 - v_2\| + \dots + \|v_1 - v_k\| \\ &= l(P). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $l$  es invariante por traslación.

b) sea  $\alpha > 0$  y Sean  $v_1, v_2, \dots, v_k$  los vértices del polígono convexo  $P$ , entonces, se cumple que

$$\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_k \text{ son vértices de } \alpha P.$$

Luego, de la definición del perímetro, tenemos

$$\begin{aligned} l(\alpha P) &= \|\alpha v_2 - \alpha v_1\| + \|\alpha v_3 - \alpha v_2\| + \dots + \|\alpha v_1 - \alpha v_k\| \\ &= \|\alpha(v_2 - v_1)\| + \|\alpha(v_3 - v_2)\| + \dots + \|\alpha(v_1 - v_k)\| \\ &= \alpha\|v_2 - v_1\| + \alpha\|v_3 - v_2\| + \dots + \alpha\|v_1 - v_k\| \\ &= \alpha l(P). \end{aligned}$$

□

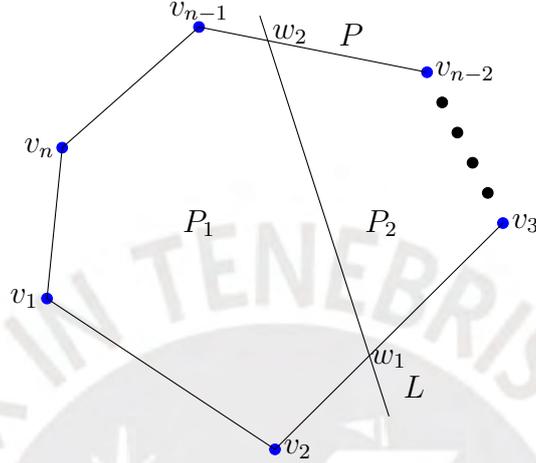
**Observación 2.58.** Sea  $P$  un polígono convexo con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Sea  $F = \{\|v_2 - v_1\|, \|v_3 - v_2\|, \dots, \|v_1 - v_n\|\}$  el conjunto de longitudes de todos los lados de  $P$ . Para cada  $l_i \in F$  se cumple que

$$l_i < \sum_{j=1}^n l_j, i \neq j$$

**Lema 2.59.** Si un polígono convexo  $P$  se corta por una recta, los dos polígonos convexo obtenidos tienen menor perímetro que  $P$ .

*Demostración.* Sean  $P$  un polígono convexo con  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vértices. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $L$  es una recta que corte a  $P$  en  $w_1, w_2$ .



De la gráfica tenemos los polígonos convexos  $P_1$  y  $P_2$  con sus respectivos vértices. Para  $P_1$ , de la observación anterior, se cumple que

$$\|w_2 - w_1\| < \|v_{n-1} - w_2\| + \|v_n - v_{n-1}\| + \|v_1 - v_n\| + \|v_2 - v_1\| + \|w_1 - v_2\|.$$

En la desigualdad tenemos la longitud de un lado del polígono convexo  $P_2$ , sumando las longitudes de cada uno de sus lados restantes y luego de la definición de perímetro tenemos

$$l(P_2) \leq l(P)$$

Ahora para  $P_2$ , por la observación anterior, tenemos

$$\|w_1 - w_2\| < \|v_3 - w_1\| + \sum_{i=3}^{n-3} \|v_{i+1} - v_i\| + \|w_2 - v_{n-2}\|$$

En la desigualdad tenemos la longitud de un lado del polígono convexo  $P_1$ , sumando las longitudes de cada uno de sus lados restantes y luego de la definición de perímetro tenemos

$$l(P_1) \leq l(P)$$

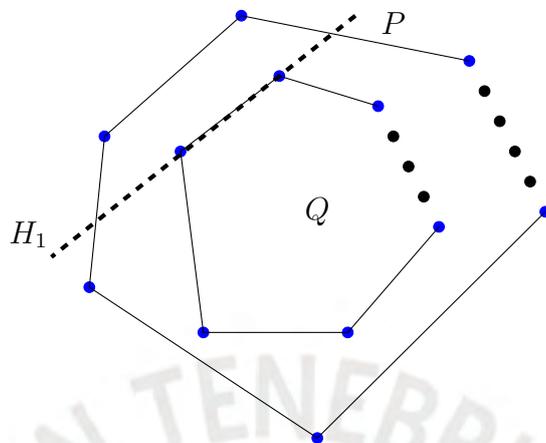
□

**Proposición 2.60.** Sean  $Q$  y  $P$  dos polígonos convexos tales que  $Q \subset P$ , entonces  $l(Q) \leq l(P)$ .

*Demostración.* Como  $Q$  es un polígono convexo, entonces

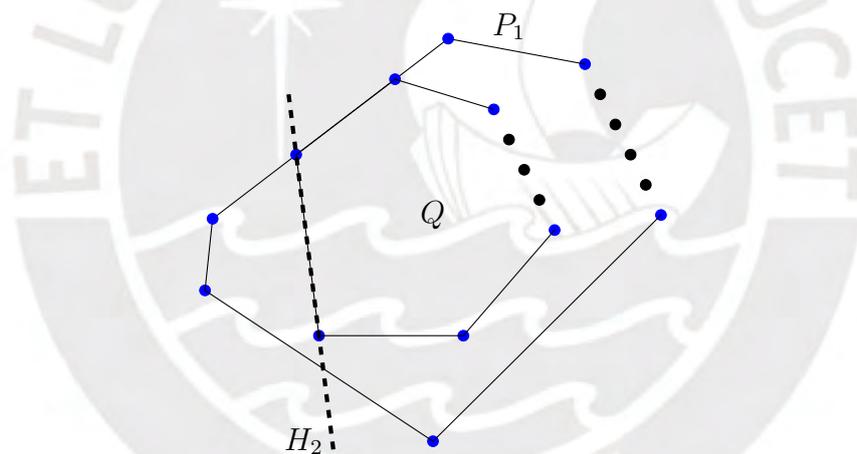
$$Q = \bigcap_{i=1}^m H_i^-,$$

donde  $H_1^-, H_2^-, \dots, H_m^-$  son las semirrectas soportes de  $Q$ . Sin pérdida de generalidad supongamos:



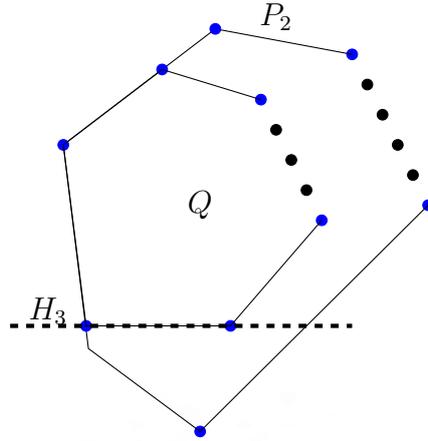
De la gráfica tenemos que  $H_1$  corta a  $P$ , entonces, por el lema anterior, se cumple

$$l(P_1) \leq l(P), \text{ donde } P_1 = H_1^- \cap P.$$



De la gráfica tenemos que  $H_2$  corta a  $P_1$ , entonces, por el lema anterior, se cumple

$$l(P_2) \leq l(P_1), \text{ donde } P_2 = H_2^- \cap H_1^- \cap P.$$



$H_3$  corta a  $P_2$ , entonces

$$l(P_3) \leq l(P_2), \text{ donde } P_3 = H_3^- \cap H_2^- \cap H_1^- \cap P.$$

Realizando el procedimiento  $m$  veces se cumple:

$$l(P_m) \leq l(P), \text{ donde } P_m = \bigcap_{i=1}^m H_i^- \cap P.$$

Como  $Q = \bigcap_{i=1}^m H_i^-$  y  $Q \subset P$ , entonces

$$Q = P_m$$

Por lo tanto,

$$l(Q) \leq l(P).$$

□

**Definición 2.61.** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Definimos

$$l_+(K) := \inf_{\substack{P \in \mathcal{P}_0^2 \\ P \supset K}} l(P), \quad l_-(K) := \sup_{\substack{P \in \mathcal{P}_0^2 \\ P \subset K}} l(P)$$

**Observación 2.62.** Si  $K \in \mathcal{K}_0^2$ , entonces  $l_+(K), l_-(K) \in [0, \infty)$ .

**Teorema 2.63.** Sea  $K \in \mathcal{K}^2$ . Entonces

$$l_+(K) = l_-(K). \quad (2.40)$$

*Demostración.* Sea  $\lambda > 1$ . Como  $K \in \mathcal{K}_0^2$  y el área es invariante por traslaciones podemos suponer que  $0 \in \text{int}(K)$ , entonces, por el teorema 2.53, existe  $P \in \mathcal{P}^2$  tal que

$$P \subset K \subset \lambda P.$$

De la definición de  $l_-(K)$  y  $l_+(K)$ , y ya que  $P$  es un polígono convexo, tenemos

$$l(P) \leq l_-(K) \leq l_+(K) \leq l(\lambda P).$$

Esto implica que

$$|l_+(K) - l_-(K)| < (\lambda - 1)l(P) \leq (\lambda - 1)l_-(K).$$

Como  $\lambda > 1$  fue tomado de manera arbitraria, podemos concluir que

$$l_+(K) = l_-(K).$$

□

**Definición 2.64.** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Definimos el perímetro de  $K$  como:

$$l(K) := l_+(K) = l_-(K).$$

**Proposición 2.65.** El perímetro  $l$  definido en  $\mathcal{K}_0^2$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $l$  es invariante por traslación,
2.  $l(\alpha K) = \alpha l(K)$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ ,  $\forall K \in \mathcal{K}_0^2$ ,
3. Si  $K, L \in \mathcal{K}_0^2$  son tales que  $K \subset L$ , entonces  $l(K) \leq l(L)$ .

*Demostración.* 1. Sea  $x \in \mathbb{R}^2$ . Debemos demostrar que

$$l(x + K) = l(K).$$

Probaremos primero que

$$l(K) \leq l(x + K).$$

En efecto, sea  $P \in \mathcal{P}_0^2$  tal que  $P \subset K$ .

Como  $x + P \in \mathcal{P}_0^2$  y  $x + P \subset x + K$  entonces

$$l(x + P) \leq l(x + K). \tag{2.41}$$

Por la proposición 2.57, tenemos que

$$l(x + P) = l(P).$$

Reemplazando en (2.41), se tiene que

$$l(P) \leq l(x + K), \forall P \in \mathcal{P}_0^2, P \subset K.$$

En consecuencia, tenemos

$$l(K) \leq l(x + K).$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Si cambiamos  $K$  por  $x + K$  y  $x$  por  $-x$  en la desigualdad anterior, obtenemos

$$l(x + K) \leq l((-x) + (x + K)) = l(K).$$

Por lo tanto, de la primera y segunda desigualdad, tenemos

$$l(K) = l(x + K).$$

□

**Observación 2.66.** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Como  $K$  es compacto, entonces  $K$  es medible en el sentido de Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ . Así, tiene sentido definir su área como la medida de Lebesgue de  $K$ .

**Definición 2.67.** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Decimos. El área de  $K$  es definida como:

$$A(K) = \lambda(K) = \int_K 1 dx dy \in [0, \infty), \quad (2.42)$$

donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ .

**Observación 2.68.** Como  $K$  tiene interior no vacío (ya que  $K \in \mathcal{K}_0^2$ ), entonces  $A(K) > 0$ .

**Proposición 2.69.** El área  $A$  definida en  $\mathcal{K}_0^2$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $A$  es invariante por traslación.
2.  $A(\alpha K) = \alpha^2 A(K)$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ ,  $\forall K \in \mathcal{K}_0^2$ .
3. Si  $K, L \in \mathcal{K}_0^2$  son tales que  $K \subset L$ , entonces  $A(K) \leq A(L)$ .

*Demostración.* Ver [8].

□

**Teorema 2.70.** Las aplicaciones  $l$  y  $A$  son continuas en  $\mathcal{K}_0^2$ .

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Para probar la continuidad del área en  $K$  demostraremos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |A(K) - A(L)| < \epsilon \text{ para todo } L \in \mathcal{K}_0^2 \text{ con } d_H(K, L) < \delta.$$

Fijemos  $\epsilon > 0$ . Como  $K \in \mathcal{K}_0^2$  y el área es invariante por traslaciones (proposición 2.69) podemos suponer que  $0 \in \text{int}(K)$ . Así podemos encontrar  $\rho > 0$  tal que

$$\rho \bar{B} \subset \text{int}(K) \subset K. \quad (2.43)$$

Aplicando el lema 2.52, se sigue que

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall L \in \mathcal{K}_0^2 \text{ con } d_H(L, K) < \eta \text{ se cumple que } \rho \bar{B} \subset L. \quad (2.44)$$

Además, se tiene que

$$\exists \lambda > 1 \text{ tal que } \lambda^2(\lambda^2 - 1)A(K) < \epsilon. \quad (2.45)$$

Tomemos  $\delta = \min \left\{ \eta \frac{(\lambda - 1)\rho}{2} \right\}$ . Sea  $L \in \mathcal{K}_0^2$  tal que  $d_H(K, L) < \delta$ .

De la definición de la métrica de Hausdorff, tenemos que

$$K \subset L + \delta\bar{B}, \quad L \subset K + \delta\bar{B}.$$

Como  $K \subset L + \delta\bar{B}$  y  $\delta < (\lambda - 1)\rho$ , entonces

$$K \subset L + (\lambda - 1)\rho\bar{B},$$

De (2.44) y ya que  $\delta \leq \eta$ , se sigue que

$$K \subset L + (\lambda - 1)\rho\bar{B} \subset L + (\lambda - 1)L.$$

Además, como  $L$  es convexo y  $\lambda > 1$  entonces

$$L + (\lambda - 1)L = \lambda L.$$

Entonces  $K \subset \lambda L$ . Aplicando la proposición 2.69, se tiene

$$A(K) \leq \lambda^2 A(L). \quad (2.46)$$

De (2.46), tenemos

$$A(K) - A(L) \leq (\lambda^2 - 1)A(L). \quad (2.47)$$

Como  $L \subset K + \delta\bar{B}$ , obtenemos

$$L \subset K + (\lambda - 1)\rho\bar{B}.$$

Luego, por (2.43), tenemos que

$$L \subset K + (\lambda - 1)\rho\bar{B} \subset K + (\lambda - 1)K,$$

Además, como  $K$  es convexo y  $\lambda > 1$  entonces

$$K + (\lambda - 1)K = \lambda K \text{ y } L \subset \lambda K.$$

Luego, aplicando la proposición 2.69, se tiene que

$$A(L) \leq A(\lambda K) = \lambda^2 A(K). \quad (2.48)$$

De (2.47) y (2.48), tenemos

$$A(K) - A(L) \leq (\lambda^2 - 1)\lambda^2 A(K). \quad (2.49)$$

De (2.48) y ya que  $\lambda > 1$ , obtenemos

$$A(L) - A(K) \leq (\lambda^2 - 1)A(K)(\lambda^2 - 1)\lambda^2 A(K).$$

De (2.49) y (2.45), tenemos

$$|A(L) - A(K)| < \epsilon.$$

Para probar la continuidad del perímetro empleamos un razonamiento análogo a la continuidad del área.

Fijemos  $\epsilon > 0$ ,. Como  $K \in \mathcal{K}_0^2$  y el perímetro es invariante por traslaciones (proposición 2.65), podemos suponer que  $0 \in \text{int}(K)$ . Así, podemos encontrar  $\rho > 0$  tal que

$$\rho\bar{B} \subset \text{int}(K) \subset K. \quad (2.50)$$

Aplicando el lema 2.52, se sigue que

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall L \in \mathcal{K}_0^2 \text{ con } d_H(L, K) < \eta \text{ se cumple que } \rho\bar{B} \subset L. \quad (2.51)$$

Además, se tiene que

$$\exists \lambda > 1 \text{ tal que } \lambda(\lambda - 1)l(K) < \epsilon. \quad (2.52)$$

Tomemos  $\delta = \min \left\{ \eta, \frac{(\lambda - 1)\rho}{2} \right\}$ . Sea  $L \in \mathcal{K}_0^2$  tal que  $d_H(K, L) < \delta$ . De la definición de la métrica de Hausdorff, tenemos que

$$K \subset L + \delta\bar{B}, \quad L \subset K + \delta\bar{B}.$$

Como  $K \subset L + \delta\bar{B}$  y  $\delta < (\lambda - 1)\rho$ , se tiene

$$K \subset L + (\lambda - 1)\rho\bar{B}.$$

De (2.51) y ya que  $\delta \leq \eta$ , se sigue que

$$K \subset L + (\lambda - 1)\rho\bar{B} \subset L + (\lambda - 1)L.$$

Entonces  $K \subset \lambda L$ , aplicando la proposición 2.65, se tiene

$$l(K) \leq \lambda l(L). \quad (2.53)$$

De (2.53), tenemos

$$l(K) - l(L) \leq (\lambda - 1)l(L). \quad (2.54)$$

Como  $L \subset K + \delta\bar{B}$ , obtenemos  $L \subset K + (\lambda - 1)\rho\bar{B}$ . Por (2.50), tenemos

$$L \subset K + (\lambda - 1)\rho\bar{B} \subset K + (\lambda - 1)K = \lambda K.$$

Luego, aplicando la proposición 2.65, se tiene que

$$l(L) \leq l(\lambda K) = \lambda l(K). \quad (2.55)$$

De (2.54) y (2.55), tenemos

$$l(K) - l(L) \leq (\lambda - 1)l(K). \quad (2.56)$$

De (2.55) y ya que  $\lambda > 1$ , obtenemos

$$l(L) - l(K) \leq (\lambda - 1)l(K) < (\lambda - 1)\lambda l(K).$$

De (2.56) y (2.52), tenemos

$$|l(L) - l(K)| < \epsilon.$$

□

**Teorema 2.71.** *Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$  con función soporte  $h_K$  de Clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Entonces el perímetro y el área de  $K$  son respectivamente:*

$$l(K) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta \quad (2.57)$$

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(\theta)]^2 - [p'(\theta)]^2 d\theta, \quad (2.58)$$

donde  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$ , con  $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

*Demostración.* Supongamos que  $0 \in \text{int}(K)$ .

Afirmación 1: Para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ , existe un único  $(x(\theta), y(\theta)) \in \partial K$  tal que

$$p(\theta) = x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta). \quad (2.59)$$

Además, se cumple que  $(x(\theta), y(\theta)) = \nabla h_K(u_\theta)$ .

En efecto, veamos primero la existencia. Por la proposición 2.32 se cumple:

Para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ , existe  $(x(\theta), y(\theta)) \in \partial K$  tal que

$$h_K(u_\theta) = \langle (x(\theta), y(\theta)), u_\theta \rangle.$$

Luego,

$$p(\theta) = h_K(u_\theta) = x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta).$$

Veamos ahora la unicidad. Para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ , consideremos la recta

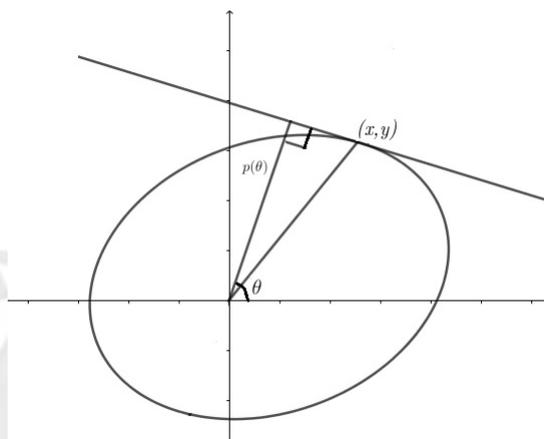
$$H = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, u_\theta \rangle = p(\theta)\}.$$

Si  $(x, y) \in \partial K$  y cumple que  $p(\theta) = x \cos(\theta) + y \operatorname{sen}(\theta)$ , entonces

$$(x, y) \in H \cap K = F(K, u_\theta).$$

Como  $h_K$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , entonces  $h_K$  es diferenciable en  $u_\theta$ . Luego, por la proposición 2.47, tenemos que  $F(K, u_\theta)$  contiene un único punto  $(x(\theta), y(\theta))$ . Esto prueba la unicidad de  $(x(\theta), y(\theta))$ .

Además, por la proposición 2.47, se cumple que  $(x(\theta), y(\theta)) = \nabla h_K(u_\theta)$ .



De la afirmación 1, tenemos

$$p(\theta) = x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \operatorname{sen}(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.60)$$

Derivando  $p$  con respecto a  $\theta$  se tiene

$$\begin{aligned} p'(\theta) &= \frac{d}{d\theta} h_K(u_\theta) = \langle \nabla h_K(u_\theta), (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)) \rangle \\ &= \langle (x(\theta), y(\theta)), (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)) \rangle \\ &= -x(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + y(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.61)$$

De (2.60) y (2.61), resolviendo el sistema de ecuaciones se sigue que

$$\begin{aligned} x(\theta) &= p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ y(\theta) &= p(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

Sea  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K \subset \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ .

Afirmación 2:  $\alpha([0, 2\pi]) = \partial K$ .

En efecto, sea  $(x_0, y_0) \in \partial K$ . Por la proposición 2.33, existe  $u_0 \in S^1$  tal que

$$h_K(u_0) = \langle (x_0, y_0), u_0 \rangle.$$

Como  $u_0 \in S^1$ , entonces existe  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  tal que  $u_0 = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ .

Luego,

$$p(\theta_0) = h_K(u_0) = x_0 \cos(\theta_0) + y_0 \sin(\theta_0)$$

Entonces  $x_0 = x(\theta_0)$ ,  $y_0 = y(\theta_0)$ . Por lo tanto, para cada  $(x_0, y_0) \in \partial K$  existe  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  tal que

$$(x_0, y_0) = (x(\theta_0), y(\theta_0)) = \alpha(\theta_0).$$

Afirmación 3:  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K \subset \mathbb{R}^2$  es un camino cerrado.

En efecto, por la afirmación 1, tenemos

$$(x(\theta), y(\theta)) = \nabla h_K(\cos(\theta), \sin(\theta)), \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.62)$$

Tomando en particular  $\theta_0 = 0$  y  $\theta_1 = 2\pi$  se cumple que

$$(x(0), y(0)) = \nabla h_K(1, 0) = (x(2\pi), y(2\pi)).$$

Por lo tanto,

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi).$$

Este camino  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$  es una parametrización de la frontera de  $K$  donde se cumple que

$$\begin{aligned} x(\theta) &= p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) &= p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\alpha(\theta) = p(\theta)u_\theta + p'(\theta)\frac{du_\theta}{d\theta}.$$

Derivando  $\alpha$  con respecto a  $\theta$  se obtiene

$$\alpha'(\theta) = p'(\theta)u_\theta + p(\theta)\frac{du_\theta}{d\theta} + p''(\theta)\frac{du_\theta}{d\theta} + p'(\theta)\frac{d^2u_\theta}{d\theta^2}.$$

Notemos que  $\frac{d^2u_\theta}{d\theta^2} = -u_\theta$ .

En consecuencia, tenemos

$$\alpha'(\theta) = (p(\theta) + p''(\theta))\frac{du_\theta}{d\theta}. \quad (2.63)$$

Afirmación 4:  $p(\theta) + p''(\theta) \geq 0$ .

En efecto,  $p''(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} h_K(u_\theta) = u_\theta^T A u_\theta - (x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta))$ , donde  $A$  es la matriz hessiana de  $h_K$  en el punto  $u_\theta$ .

Luego,

$$\begin{aligned} p(\theta) + p''(\theta) &= p(\theta) + u_\theta^T A u_\theta - (x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta)) \\ &= u_\theta^T A u_\theta. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Como  $h_K$  es una función convexa y de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , entonces

$$u_\theta^T A u_\theta \geq 0.$$

Reemplazando en (2.64), tenemos

$$p(\theta) + p''(\theta) \geq 0.$$

De la afirmación 4 y de (2.63), se cumple que  $\alpha'(\theta)$  y  $\frac{du_\theta}{d\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$  tienen la misma dirección. Esto muestra que  $\alpha$  en  $[0, 2\pi]$  recorre  $\partial K$  en sentido antihorario y no recorre un mismo tramo dos veces.

Como  $\alpha$  es un camino de clase  $C^\infty$ , entonces la longitud del arco recorrido por  $\alpha$  en  $[0, 2\pi)$  es

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\theta)\| d\theta. \quad (2.65)$$

Reemplazando (2.63) en (2.65), obtenemos

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} |p(\theta) + p''(\theta)| d\theta. \quad (2.66)$$

Por la afirmación 4 en (2.66), tenemos

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} p(\theta) + p''(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} p''(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta + p'(2\pi) - p'(0) \\ &= \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta + y(2\pi) - y(0). \end{aligned}$$

Como  $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ , entonces  $y(0) = y(2\pi)$ .

Luego,

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta. \quad (2.67)$$

Afirmación 5:  $l(K) = L(\alpha)$ .

En efecto, como el camino  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K$  es de clase  $C^1$ , entonces es rectificable y entonces

$$L(\alpha) = \sup\{s(Q) : Q \in \mathcal{Q}\},$$

donde  $\mathcal{Q} = \{Q : Q \text{ partición de } [0, 2\pi]\}$  y  $s(Q)$  es la longitud de la poligonal determinado por  $Q$ . Es decir, si  $Q : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$  entonces

$$s(Q) = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Probaremos primero que

$$L(\alpha) \leq l(K).$$

Sea  $Q : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$  una partición de  $[0, 2\pi]$ . Consideremos la poligonal  $E$ :  $\alpha(t_0) = \alpha(0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_{m-1}), \alpha(t_m) = \alpha(2\pi)$ .

Como  $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ , entonces  $E$  es una poligonal convexa cerrada. Luego, tenemos que  $P = \text{conv}\{\alpha(0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_{m-1}), \alpha(2\pi)\}$  es un polígono convexo cuyos vértices en sentido antihorario son  $\alpha(0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_{m-1}), \alpha(2\pi)$  con  $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ .

De la definición de perímetro del polígono convexo  $P$ , tenemos que

$$s(Q) = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = l(P) \leq \sup_{\substack{P \in \mathcal{P}_0^2 \\ P \subset K}} l(P) = l(K).$$

Como  $Q$  es una partición cualquiera de  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$L(\alpha) \leq l(K).$$

Veamos ahora que

$$L(\alpha) \geq l(K).$$

Sea  $P \in \mathcal{P}_0^2$  tal que  $P \subset K$ . Como  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ , entonces existe  $x_0 \in \text{int}(P)$ . Además, como  $P$  es un polígono convexo, entonces, posee una cantidad finita de vértices. Sean  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  los distintos vértices de  $P$  distribuidos en sentido antihorario. Para cada vértice  $v_i$  tomando  $d_i = v_i - x_0 \neq 0$  se contruye la semirrecta  $R_i = \{x_0 + \lambda d_i : \lambda \geq 0\}$ . Notemos que cada  $R_i$  corta a  $\partial K$  en un único punto, pues  $K$  es convexo y  $x_0$  es un punto interior de  $K$ . Sea  $v_i^*$  dicho punto.

Como  $\partial K$  está parametrizado por el camino  $\alpha$ , entonces existen  $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$  tales que

$$v_i^* = \alpha(t_i^*) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Podemos asumir que  $0 \leq t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^* < 2\pi$ .

Caso 1: Si  $t_1^* = 0$ , entonces tomemos  $Q_0 : 0 = t_1^* < t_2^*, \dots, t_n^* < t_{n+1}^* = 2\pi$ . Como  $Q_0$  es una partición de  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$s(Q_0) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_{i+1}^*) - \alpha(t_i^*)\|.$$

Ahora, tomemos  $P^* = \text{conv}\{v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots, v_n^*\}$ . Se cumple que

$$l(P^*) = s(Q_0).$$

Como  $P \subset P^*$ , entonces  $l(P) \leq l(P^*)$ . Se sigue que

$$l(P) \leq s(Q_0) \leq \sup\{s(Q) : Q \in \mathcal{Q}\} = L(\alpha)$$

Como

$$l(P) \leq L(\alpha), \forall P \subset K.$$

Entonces

$$l(K) \leq L(\alpha).$$

Caso 2: Si  $t_1^* > 0$ , entonces tomemos  $Q_0 : 0 = t_0^* < t_1^*, \dots, t_n^* < t_{n+1}^* = 2\pi$ . Como  $Q_0$  es una partición de  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$s(Q_0) = \sum_{i=1}^{n+1} \|\alpha(t_i^*) - \alpha(t_{i-1}^*)\|.$$

Ahora, tomemos  $P^* = \text{conv}\{\alpha(0), v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots, v_n^*\}$ . Se cumple que

$$l(P^*) = s(Q_0).$$

Como  $P \subset P^*$ , entonces  $l(P) \leq l(P^*)$ .

Se sigue que

$$l(P) \leq s(Q_0) \leq \sup\{s(Q) : Q \in \mathcal{Q}\} = L(\alpha)$$

Como

$$l(P) \leq L(\alpha), \forall P \subset K.$$

Entonces

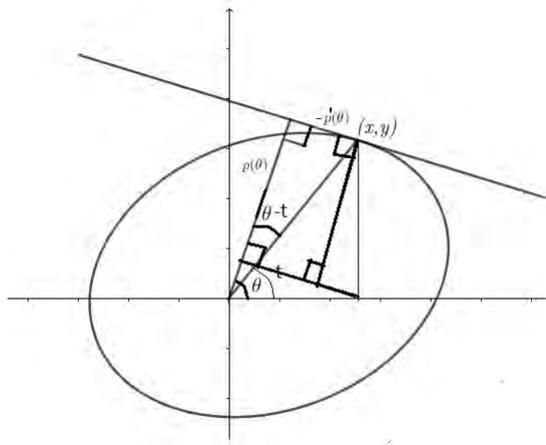
$$l(K) \leq L(\alpha).$$

Por lo tanto, se cumple la afirmación 5.

De la afirmación 5, se concluye que

$$L(K) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta.$$

Veamos ahora para el área.



Por coordenadas polares el área es

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt, \quad (2.68)$$

donde  $(r, t)$  son las coordenadas polares de los puntos  $(x, y)$  del borde de  $K$ .

Para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ , sean  $(r, t)$  las coordenadas polares del punto  $(x_\theta, y_\theta)$ .

Entonces  $x(\theta) = r \cos(t)$ ,  $y(\theta) = r \sin(t)$ .

Afirmación:

$$\sin(\theta - t)p(\theta) + \cos(\theta - t)p'(\theta) = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} r(\sin(\theta - t)p(\theta) + \cos(\theta - t)p'(\theta)) &= (x(\theta) \sin(\theta) - y(\theta) \cos(\theta))p(\theta) \\ &\quad + (x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \sin(\theta))p'(\theta) \\ &= -p'(\theta)p(\theta) + p(\theta)p'(\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $r > 0$ , entonces

$$\sin(\theta - t)p(\theta) + \cos(\theta - t)p'(\theta) = 0.$$

Derivando con respecto  $\theta$  en la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{dt}{d\theta} = 1 + \frac{\sin(\theta - t)p'(\theta) - \cos(\theta - t)p''(\theta)}{\cos(\theta - t)p(\theta) - \sin(\theta - t)p'(\theta)} = 1 + \frac{p(\theta)p''(\theta) - (p'(\theta))^2}{(p(\theta))^2 + (p'(\theta))^2}. \quad (2.69)$$

Como  $r^2 = (x(\theta))^2 + (y(\theta))^2$ , entonces

$$r^2 = (p(\theta))^2 + (p'(\theta))^2 \quad (2.70)$$

Reemplazando (2.69) y (2.70) en (2.68), obtenemos

$$\begin{aligned} A(K) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 + p(\theta)p''(\theta)d\theta. \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 d\theta + \int_0^{2\pi} p(\theta)p''(\theta)d\theta \right). \end{aligned}$$

En la segunda integral, aplicamos integral por partes, así tenemos

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta \quad (2.71)$$

□

Veamos ahora el caso general. Sea  $K \in \mathcal{K}^2$ .

Entonces existe  $z_0 \in \text{int}(K)$ . Sean

$$K_0 = K - z_0 \text{ y } p_0(\theta) = h_{K_0}(u_\theta).$$

Entonces  $K_0 \in \mathcal{K}_0^2$ ,  $0 \in \text{int}(K_0)$  y

$$\begin{aligned} p_0(\theta) &= h_{K_0}(u_\theta) = \sup_{z \in K} \langle z, u_\theta \rangle = \sup_{z \in K_0} \langle z - z_0, u_\theta \rangle = p(\theta) - \langle z_0, u_\theta \rangle \\ p'_0(\theta) &= p'(\theta) - \langle z_0, (\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta)) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente y teniendo en cuenta que el perímetro y el área son invariantes por traslaciones en  $\mathcal{K}_0^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} p_0(\theta) + \langle z_0, u_\theta \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} p_0(\theta)d\theta \\ &= L(K_0) = L(K) \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} (p_0(\theta) + \langle z_0, u_\theta \rangle)^2 \right. \\ &\quad \left. - (p'_0(\theta) + \langle z_0, (\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta)) \rangle)^2 d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} (p_0(\theta))^2 - (p'_0(\theta))^2 d\theta \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{2\pi} \langle z_0, p_0(\theta)u_\theta - p'_0(\theta)(-\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta)) \rangle d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \langle z_0, u_\theta \rangle^2 - \langle z_0, (-\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta)) \rangle^2 d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} A(K_0) - \int_0^{2\pi} \left\langle z_0, \frac{d(p_0(\theta) \text{sen}(\theta), -p_0(\theta) \text{cos}(\theta))}{d\theta} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 - b^2) \text{cos}(2\theta) + 2ab \text{sen}(2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} A(K_0) = \frac{1}{2} A(K), \end{aligned}$$

donde  $z_0 = (a, b)$ .

**Lema 2.72.** Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces existe

$$\phi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty) \text{ función de clase } C^\infty$$

tal que

- $\text{sop}(\phi_m) = \overline{B_{\frac{1}{m}}}(0)$ ,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_m(z) dz = 1$ ,
- $\phi_m(z) = \phi_m(-z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Consideremos la función  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \geq 0, \\ e^{1/t}, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Sean  $k > 0$  y  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  dado por

$$\psi(x) = k\gamma(\|x\|^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como  $\gamma$  es una función de clase  $C^\infty$ , entonces  $\psi$  también es de clase  $C^\infty$ .

Además, como  $\gamma(t) = 0$  si y solo si  $t \geq 0$ , entonces  $\text{sop}(\psi) = \overline{B_1}(0)$ .

$$\text{Notemos que } \infty > \int_{\overline{B_1}(0)} \gamma(\|x\|^2 - 1) dx > \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2 - 1) dx > 0.$$

Tomemos

$$k = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2 - 1) dx \right)^{-1}.$$

En consecuencia, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1.$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $\phi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  dado por

$$\phi_m(x) = \frac{1}{m^n} \psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

Como  $\psi \in C^\infty$ , entonces  $\phi_m \in C^\infty$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

Como  $\text{sop}(\gamma) = \overline{B_1}(0)$ , entonces  $\text{sop}(\phi_m) = \overline{B_{\frac{1}{m}}}(0)$ .

Además,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{m^n} \psi\left(\frac{x}{m}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1, \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\text{y } \phi_m(z) = \frac{1}{m^n} \psi\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{1}{m^n} \psi\left(\frac{-z}{m}\right) = \phi_m(-z), \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

**Lema 2.73.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_K$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe  $R > 0$  tal que

$$|h_K(u+z) - h_K(u)| \leq R\|z\|, \quad \forall u, z \in \mathbb{R}^n$$

*Demostración.* Sean  $u, z \in \mathbb{R}^n$ . Si  $z = 0$  se cumple lo afirmado.

Supongamos ahora que  $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Como  $h_K$  es sublineal (observación 2.42), si  $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  entonces

$$h_K(u+z) - h_K(u) \leq h_K(u) + h_K(z) - h_K(u) = h_K(z). \quad (2.72)$$

Como  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , entonces, por la proposición 2.32, existe  $x_0 \in \partial K$  tal que

$$h_K(z) = \langle x_0, z \rangle \quad (2.73)$$

De (2.73) en (2.72), tenemos

$$\begin{aligned} h_K(u+z) - h_K(u) &\leq \langle x_0, z \rangle \\ &\leq \|x_0\| \|z\|. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Como  $K$  es acotado, entonces existe  $R > 0$  tal que

$$\|x\| \leq R, \quad \forall x \in K. \quad (2.75)$$

De (2.75) en (2.74), se cumple que

$$h_K(u+z) - h_K(u) \leq R\|z\|.$$

Además, cambiando  $u$  por  $u+z$  y  $z$  por  $-z$  en esta última desigualdad, obtenemos:

$$h_K(u) - h_K(u+z) \leq R\|-z\| = R\|z\|.$$

Por lo tanto, el lema queda demostrado.  $\square$

**Teorema 2.74.** Para cualquier  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , existe una sucesión de cuerpos convexos  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$  con función soporte  $h_{K_m}$  de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K.$$

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$ . Si  $m \in \mathbb{N}$ , entonces, por el lema 2.72, existe una función de clase  $C^\infty$

$$\phi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$$

tal que

- $\text{sop}(\phi_m) = \overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)$ ,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_m(z) dz = 1$ ,

- $\phi_m(z) = \phi_m(-z), \forall z \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $h_K$  la función soporte de  $K$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , sea

$$f_m(x) := \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x + \|x\|z) \phi_m(z) dz, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmación:  $f_m$  es sublineal.

En efecto, sean  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \geq 0$ .

$$\begin{aligned} f_m(\lambda x) &= \int_{\mathbb{R}^n} h_K(\lambda x + \|\lambda x\|z) \phi_m(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_K(\lambda(x + \|x\|z)) \phi_m(z) dz \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x + \|x\|z) \phi_m(z) dz \\ &= \lambda f_m(x). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$f_m(\lambda x) = \lambda f_m(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0. \quad (2.76)$$

Ahora, debemos demostrar que

$$f_m(x + y) \leq f_m(x) + f_m(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si  $x = 0$  o  $y = 0$  se cumple (ya que  $f_m(0) = 0$ ).

Si  $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Para cada  $z \in \mathbb{R}^n$  y cada  $v \in \mathbb{R}^n$ , sea

$$g_z(x) = h_K(v + \|v\|z) + h_K(v - \|v\|z).$$

Recordemos que  $h_K$  es sublineal. Para cada  $\alpha \in [0, 1]$  tenemos

$$\begin{aligned} g_z(x + y) &= h_K(x + y + \|x + y\|z) + h_K(x + y - \|x + y\|z) \\ &\leq h_K(x + \alpha\|x + y\|z) + h_K(y + (1 - \alpha)\|x + y\|z) \\ &\quad + h_K(x - \alpha\|x + y\|z) + h_K(y - (1 - \alpha)\|x + y\|z). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Sea

$$\alpha = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}, \quad \beta = \frac{\|x + y\|}{\|x\|}, \quad \gamma = \frac{\|x + y\|}{\|y\|}.$$

Entonces

$$1 - \alpha\beta \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 - (1 - \alpha)\gamma \geq 0. \quad (2.78)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x + \alpha\|x + y\|z &= \frac{(1 + \alpha\beta)}{2}(x + \|x\|z) + \frac{(1 - \alpha\beta)}{2}(x - \|x\|z), \\ x - \alpha\|x + y\|z &= \frac{(1 - \alpha\beta)}{2}(x + \|x\|z) + \frac{(1 + \alpha\beta)}{2}(x - \|x\|z). \end{aligned} \quad (2.79)$$

De (2.78), (2.79) y como  $h_K$  es convexo, entonces

$$\begin{aligned} h_K(x + \alpha\|x + y\|z) &\leq \frac{(1 + \alpha\beta)}{2} h_K(x + \|x\|z) + \frac{(1 - \alpha\beta)}{2} h_K(x - \|x\|z), \\ h_K(x - \alpha\|x + y\|z) &\leq \frac{(1 - \alpha\beta)}{2} h_K(x + \|x\|z) + \frac{(1 + \alpha\beta)}{2} h_K(x - \|x\|z). \end{aligned}$$

Luego,

$$h_K(x + \alpha\|x + y\|z) + h_K(x - \alpha\|x + y\|z) \leq h_K(x + \|x\|z) + h_K(x - \|x\|z) = g_z(x). \quad (2.80)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} y + (1 - \alpha)\|x + y\|z &= \frac{(1 + (1 - \alpha)\gamma)}{2} (y + \|y\|z) + \frac{(1 - (1 - \alpha)\gamma)}{2} (y - \|y\|z), \\ y - (1 - \alpha)\|x + y\|z &= \frac{(1 - (1 - \alpha)\gamma)}{2} (y + \|y\|z) + \frac{(1 + (1 - \alpha)\gamma)}{2} (y - \|y\|z). \end{aligned}$$

De (2.78) y como  $h_K$  es convexo, entonces

$$\begin{aligned} h_K(y + (1 - \alpha)\|x + y\|z) &\leq \frac{(1 + (1 - \alpha)\gamma)}{2} h_K(y + \|y\|z) \\ &\quad + \frac{(1 - (1 - \alpha)\gamma)}{2} h_K(y - \|y\|z), \\ h_K(y - (1 - \alpha)\|x + y\|z) &\leq \frac{(1 - (1 - \alpha)\gamma)}{2} h_K(y + \|y\|z) \\ &\quad + \frac{(1 + (1 - \alpha)\gamma)}{2} h_K(y - \|y\|z). \end{aligned}$$

Luego,

$$h_K(y + (1 - \alpha)\|x + y\|z) + h_K(y - (1 - \alpha)\|x + y\|z) \leq g_z(y). \quad (2.81)$$

De (2.80) y (2.81) en (2.77), tenemos

$$g_z(x + y) \leq g_z(x) + g_z(y). \quad (2.82)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x + \|x\|z) \phi_m(z) dz + \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x + \|x\|z) \phi_m(-z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x + \|x\|z) \phi_m(z) dz + \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x - \|x\|z) \phi_m(z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(x) \phi_m(z) dz, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Entonces

$$f_m(x + y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(x + y) \phi_m(z) dz.$$

De (2.82), se cumple que

$$\begin{aligned} f_m(x+y) &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(x) \phi_m(z) dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} g_z(y) \phi_m(z) dz \\ &\leq f_m(x) + f_m(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_m(x+y) \leq f_m(x) + f_m(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.84)$$

De (2.76) y (2.84), se concluye que  $f_m$  es sublineal.

Afirmación:  $f_m$  es de Clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

En efecto, para cada  $u \in S^{n-1}$  tenemos

$$f_m(u) = \int_{\mathbb{R}^n} h_K(u+z) \phi_m(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} h_K(y) \phi_m(y-u) dy. \quad (2.85)$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Tomando  $u = \frac{x}{\|x\|}$ , en (2.85), tenemos

$$f_m\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} h_K(y) \phi_m\left(y - \frac{x}{\|x\|}\right) dy. \quad (2.86)$$

De (2.86), y como  $f_m$  es sublineal, entonces

$$f_m(x) = \|x\| \int_{\mathbb{R}^n} h_K(y) \phi_m\left(y - \frac{x}{\|x\|}\right) dy. \quad (2.87)$$

De (2.87), y como  $\phi_m(z) = \phi_m(-z)$ , entonces

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \|x\| \int_{\mathbb{R}^n} h_K(y) \phi_m\left(\frac{x}{\|x\|} - y\right) dy \\ &= \|x\| \int_{\mathbb{R}^n} h_K\left(\frac{x}{\|x\|} - y\right) \phi_m(y) dy \\ &= \|x\| h_K * \phi_m\left(\frac{x}{\|x\|}\right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Como  $h_K$  es continua, pues es convexa (teorema 2.26) y  $\phi_m$  es una función de clase  $C^\infty$ , entonces, de (2.88), podemos concluir que

$$f_m \text{ es una función de Clase } C^\infty \text{ en } \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Como  $f_m$  es sublineal, entonces, por el lema 2.44, existe  $K_m \in \mathcal{K}^n$  tal que  $f_m$  es la función soporte de  $K_m$ . Es decir,  $h_{K_m} = f_m$ .

Sea  $u \in S^{n-1}$ .

$$|h_{K_m}(u) - h_K(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_K(u+z) \phi_m(z) dz - h_K(u) \right|.$$

Como  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_m(z) dz = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} |h_{K_m}(u) - h_K(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_K(u+z) \phi_m(z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} h_K(u) \phi_m(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (h_K(u+z) - h_K(u)) \phi_m(z) dz \right| \end{aligned} \quad (2.89)$$

Como  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $h_K$  es la función soporte de  $K$ , entonces, por el lema 2.73, existe  $R > 0$  tal que

$$|h_K(u+z) - h_K(u)| \leq R\|z\|, \quad \forall u, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.90)$$

De (2.90) en (2.89), tenemos

$$\begin{aligned} |h_{K_m}(u) - h_K(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} R\|z\| \phi_m(z) dz \\ &= \int_{\overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)} R\|z\| \phi_m(z) dz + \int_{\mathbb{R}^n - \overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)} R\|z\| \phi_m(z) dz \end{aligned} \quad (2.91)$$

Como  $\text{sop}(\phi_m) = \overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n - \overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)} R\|z\| \phi_m(z) dz = 0 \quad (2.92)$$

De (2.92) en (2.91), se tiene que

$$\begin{aligned} |h_{K_m}(u) - h_K(u)| &\leq \int_{\overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)} R\|z\| \phi_m(z) dz \\ &\leq \frac{R}{m} \int_{\overline{B}_{\frac{1}{m}}(0)} \phi_m(z) dz \\ &\leq \frac{R}{m} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_m(z) dz \\ &= \frac{R}{m}. \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos

$$\sup_{u \in S^{n-1}} |h_{K_m}(u) - h_K(u)| \leq \frac{R}{m}.$$

Luego, por el teorema 2.51, tenemos que

$$d_H(K, K_m) \leq \frac{R}{m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K.$$

□

**Observación 2.75.** Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ .

Si  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$ , entonces  $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$  es acotado.

En efecto, Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$ , entonces existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$d_H(K, K_m) < 1, \forall m \geq N.$$

Luego,

$$K_m \subset K + \bar{B}, \forall m \geq N$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \subset \bigcup_{m=1}^N K_m \cup K + \bar{B}$$

Como  $K$  es compacto entonces  $K + \bar{B}$  es compacto.

Además, como  $K_1, K_2, \dots, K_m$  son compactos, entonces

$$\bigcup_{m=1}^N K_m \cup K + \bar{B} \text{ es compacto.}$$

Esto implica que  $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$  es acotado.

**Proposición 2.76.** Sean  $K \in \mathcal{K}^2$  y  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^2$ . Supongamos que

- $(x_m, y_m) \in \partial K_m$ ,
- $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, y_m) = (x_0, y_0)$ ,
- $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$ .

Entonces  $(x_0, y_0) \in \partial K$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$ , entonces existe  $m_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$d_H(K, K_m) < \epsilon, \forall m \geq m_0.$$

Luego,

$$K_m \subset K + \epsilon \bar{B}, \forall m \geq m_0. \quad (2.93)$$

Como  $(x_m, y_m) \in \partial K_m$ , entonces, en (2.93), tenemos que

$$(x_m, y_m) \in K + \epsilon \bar{B}.$$

Es decir, existen  $(a_m, b_m) \in K$  y  $(a'_m, b'_m) \in \overline{B}$  tales que

$$(x_m, y_m) = (a_m, b_m) + \epsilon(a'_m, b'_m).$$

Esto implica que

$$\|(x_m, y_m) - (a_m, b_m)\| \leq \epsilon, \quad \forall m \geq m_0.$$

En consecuencia, tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(x_m, y_m) - (a_m, b_m)\| = 0. \quad (2.94)$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, y_m) = (x_0, y_0)$ , entonces, de (2.94), tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m, b_m) = (x_0, y_0).$$

Entonces existe  $\{(a_m, b_m)\} \subset K$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m, b_m) = (x_0, y_0).$$

Se sigue que

$$(x_0, y_0) \in \overline{K}.$$

Supongamos que  $(x_0, y_0) \in \text{int}(K)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que

$$\overline{B}_\delta((x_0, y_0)) \subset K. \quad (2.95)$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, y_m) = (x_0, y_0)$ , entonces existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$(x_m, y_m) \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0, y_0), \quad \forall m \geq N. \quad (2.96)$$

Como  $K \in \mathcal{K}^2$  y  $(x_m, y_m) \in \partial K_m$ , entonces, por la proposición 2.33, existe  $u_m \in S^1$  tal que

$$h_{K_m}(u_m) = \langle (x_m, y_m), u_m \rangle,$$

donde  $h_{K_m}$  es la función soporte de  $K_m$ . Luego, de la definición de la función soporte de  $K_m$ , tenemos que

$$\langle x, u_m \rangle \leq \langle (x_m, y_m), u_m \rangle, \quad \forall x \in K_m. \quad (2.97)$$

Tomemos  $p_m = (x_0, y_0) + \delta u_m \in \overline{B}_\delta((x_0, y_0))$ . Por (2.95), tenemos que  $p_m \in K$ .

Afirmación:  $\overline{B}_{\frac{\delta}{4}}(p_m) \cap K_m = \emptyset, \quad \forall m \geq N$

En efecto, supongamos lo contrario. Es decir, existen  $M \leq N$  y  $q \in K_m$  tales que

$$\|p_m - q\| \leq \frac{\delta}{4}. \quad (2.98)$$

En (2.97), tomemos  $x = q$ . Así tenemos que

$$\begin{aligned}\langle q, u_m \rangle &\leq \langle (x_m, y_m), u_m \rangle, \\ \langle q - p_m, u_m \rangle + \langle p_m, u_m \rangle &\leq \langle (x_m, y_m), u_m \rangle.\end{aligned}$$

Como  $p_m = (x_0, y_0) + \delta u_m$  se sigue que

$$\begin{aligned}\langle q - p_m, u_m \rangle + \langle (x_0, y_0) + \delta u_m, u_m \rangle &\leq \langle (x_m, y_m), u_m \rangle, \\ \langle q - p_m, u_m \rangle + \langle (x_0, y_0), u_m \rangle + \delta &\leq \langle (x_m, y_m), u_m \rangle, \\ \langle q - p_m, u_m \rangle + \delta &\leq \langle (x_m, y_m) - (x_0, y_0), u_m \rangle, \\ \langle q - p_m, u_m \rangle + \delta &\leq \|(x_m, y_m) - (x_0, y_0)\|.\end{aligned}\tag{2.99}$$

De (2.96) en (2.99), tenemos que

$$\begin{aligned}\langle q - p_m, u_m \rangle + \delta &\leq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{2} &\leq \langle p_m - q, u_m \rangle, \\ \frac{\delta}{2} &\leq \|p_m - q\|.\end{aligned}\tag{2.100}$$

De (2.98) en (2.100), se sigue que  $\frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{4}$  (contradicción). Esto prueba la afirmación.

De la afirmación tenemos que

$$d(p_m, K_m) > \frac{\delta}{4}, \forall m \geq N.$$

Como  $p_m \in K$ , entonces

$$d_H(K, K_m) \geq d(p_m, K_m) > \frac{\delta}{4}, \forall m \geq N.\tag{2.101}$$

Como hemos supuesto que  $(x_0, y_0) \in \text{int}(K)$  y hemos llegado a una contradicción, entonces  $(x_0, y_0) \notin \text{int}(K)$  y como  $(x_0, y_0) \in \bar{K}$ , se concluye que

$$(x_0, y_0) \in \partial K.$$

Por lo tanto, la proposición queda demostrada.  $\square$

**Proposición 2.77.** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$  en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Si  $X \subset U$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $f(X)$  también tiene medida nula.*

*Demostración.* Ver [9], p. 359.  $\square$

**Lema 2.78.** *Si  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $x_0$  y cumple que*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

*Entonces  $f$  es diferenciable en  $\lambda x_0$ ,  $\forall \lambda > 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\lambda > 0$ . Se cumple que

$$f(x) = \lambda f(g(x)) \quad \text{con } g(x) = \frac{x}{\lambda}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}. \quad (2.102)$$

Notemos que  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , en particular  $g$  es diferenciable en  $\lambda x_0$  y como  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces

$$f \circ g \quad \text{es diferenciable en } \lambda x_0. \quad (2.103)$$

De (2.102) y (2.103), tenemos que

$$f \quad \text{es diferenciable en } \lambda x_0.$$

Por lo tanto,

$$f \quad \text{es diferenciable en } \lambda x_0, \quad \forall \lambda > 0.$$

□

**Teorema 2.79.** *Para cualquier cuerpo convexo  $K \in \mathcal{K}_0^2$ , el perímetro y el área de  $K$  son respectivamente:*

$$l(K) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta, \quad (2.104)$$

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(\theta)]^2 - [p'(\theta)]^2 d\theta, \quad (2.105)$$

donde  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$  con  $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{K}_0^2$  con función soporte  $h_K$ . Supongamos que  $0 \in \text{int}(K)$ . Como  $K \in \mathcal{K}_0^2$ , entonces, por el teorema 2.74, existe una sucesión de cuerpos convexos  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^2$  con función soporte  $h_{K_m}$  de Clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K. \quad (2.106)$$

Es decir,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_H(K_m, K) = 0. \quad (2.107)$$

Por el teorema 2.51, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{u \in S^1} |h_{K_m}(u) - h_K(u)| = 0.$$

Luego,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |h_{K_m}(u_\theta) - h_K(u_\theta)| = 0, \quad (2.108)$$

donde  $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Sea  $p_m(\theta) = h_{K_m}(u_\theta)$ . Como  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$ , entonces, en (2.108), tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |p_m(\theta) - p(\theta)| = 0. \quad (2.109)$$

De (2.109), se cumple que

$$\{p_m\}_m \text{ converge uniformemente a } p \text{ en } [0, 2\pi]. \quad (2.110)$$

Como  $p_m$  es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} p_m(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta.$$

Por el teorema 2.71,  $l(K_m) = \int_0^{2\pi} p_m(\theta) d\theta$ . Se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} l(K_m) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta. \quad (2.111)$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$  y la aplicación  $l$  es continua, entonces, en (2.111), se cumple

$$l(K) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta. \quad (2.112)$$

Como  $h_K$  es una función convexa, entonces, por el corolario 2.30,  $h_K$  es diferenciable c.s. en  $\mathbb{R}^2$ . En particular, el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} : h_K \text{ no es diferenciable}\}$  tiene medida nula.

Afirmación 1: Si  $x \in C$ ,  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda x \in C$ .

En efecto, supongamos que existen  $x_0 \in C$  y  $\lambda_0 > 0$  tales que  $\lambda_0 x_0 \notin C$ , entonces

$$h_K \text{ es diferenciable en } \lambda_0 x_0. \quad (2.113)$$

Como

$$h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x), \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

pues  $h_K$  es sublineal, entonces, por el lema 2.78, tenemos que

$$h_K \text{ es diferenciable en } x_0.$$

Esto implica que  $x_0 \notin C$  (contradicción).

Afirmación 2:  $E = \{\theta \in (0, 2\pi) : (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in C\}$  tiene medida nula.

En efecto, sean  $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$  y

$$\begin{aligned} f : (0, 2\pi) \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 - L \\ (\theta, \lambda) &\rightarrow (\lambda \cos(\theta), \lambda \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Notemos que  $f$  es de clase  $C^\infty$  y además biyectiva.

Como  $f$  es de clase  $C^\infty$  y

$$\det(Jf(\theta, \lambda)) = \begin{vmatrix} -\lambda \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \lambda \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{vmatrix} = -\lambda \neq 0, \quad \forall (\theta, \lambda) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty).$$

Entonces  $f$  es un difeomorfismo local, pero como  $f$  es biyectiva, entonces

$f$  es un difeomorfismo global.

Sea  $g : \mathbb{R}^2 - L \rightarrow (0, 2\pi) \times (0, \infty)$  la función inversa de  $f$ .

$g$  es de clase  $C^1$  y como  $C - L \subset \mathbb{R}^2 - L$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^2$ , entonces, por la proposición 2.77, tenemos que

$$g(C - L) \subset \mathbb{R}^2 \text{ tiene medida nula.} \quad (2.114)$$

Afirmación 2.1:  $f(E \times (0, \infty)) = C - L$

En efecto, ( $\subseteq$ ) sea  $y \in f(E \times (0, \infty))$ , entonces existe  $\theta \in E$  y  $\lambda > 0$  tal que

$$y = f(\theta, \lambda).$$

Como  $\theta \in E$ , entonces  $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \in C - L$ , por la afirmación 1 se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda(\cos(\theta), \sin(\theta)) &\in C - L, \\ (\lambda \cos(\theta), \lambda \sin(\theta)) &\in C - L, \\ f(\theta, \lambda) &\in C - L, \\ y &\in C - L. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(E \times (0, \infty)) \subset C - L$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in C - L$ , entonces existe  $\lambda_0 = \frac{1}{\|x\|} > 0$  tal que

$$\lambda_0 x \in S^1 \cap C - L.$$

Luego, existe  $\theta_0 \in (0, 2\pi)$  tal que

$$\lambda_0 x = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)).$$

Así

$$f\left(\theta_0, \frac{1}{\lambda_0}\right) = x$$

Esto implica que para cada  $x \in C - L$ , existe  $(\theta_0, \frac{1}{\lambda_0}) \in E \times (0, \infty)$  tal que

$$f\left(\theta_0, \frac{1}{\lambda_0}\right) = x$$

Por lo tanto,  $C - L \subset f(E \times (0, \infty))$ . En consecuencia se cumple la afirmación 2.1. De la afirmación 2.1, tenemos

$$g(C - L) = E \times (0, \infty).$$

De (2.114), se cumple que  $E \times (0, \infty)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^2$ . En consecuencia  $E$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, se cumple la afirmación 2.

Por la afirmación 2 y ya que  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$ , se sigue que

$$p'(\theta) \text{ existe c.s. en } [0, 2\pi].$$

Como  $h_{K_m}$  es de Clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , entonces, por el teorema 2.71 (afirmación 1), se deduce que

Para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ , existe un único  $(x_m(\theta), y_m(\theta)) \in \partial K_m$  tal que

$$\begin{aligned} p_m(\theta) &= x_m(\theta) \cos(\theta) + y_m(\theta) \operatorname{sen}(\theta), \\ p'_m(\theta) &= -x_m(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + y_m(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Como  $h_K$  es diferenciable c.s en  $\mathbb{R}^2$ , análogamente aplicando el teorema 2.71 (afirmación 1), se deduce que

Para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$  c.s. existe un único  $(x(\theta), y(\theta)) \in \partial K$  tal que

$$\begin{aligned} p(\theta) &= x(\theta) \cos(\theta) + y(\theta) \operatorname{sen}(\theta), \\ p'(\theta) &= -x(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + y(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Afirmación 3: Se cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p'_m(\theta) = p'(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \text{ c.s.} \quad (2.117)$$

En efecto, para ello basta demostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta) = x(\theta) \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\theta) = y(\theta), \forall \theta \in (0, 2\pi) - E. \quad (2.118)$$

Supongamos que no es verdad. Es decir, existe  $\theta_0 \in [0, 2\pi] - E$  tal que

$$\text{no se cumple } \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta_0) = x(\theta_0) \text{ o no se cumple } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\theta_0) = y(\theta_0).$$

Si no se cumple que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta_0) = x(\theta_0)$ , entonces (pasando a una subsucesión si es necesario) existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$|x_m(\theta_0) - x(\theta_0)| \geq \epsilon_0, \forall m \geq 1. \quad (2.119)$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$ , entonces, por la observación 2.75, existe  $C > 0$  tal que

$$\|(x_m(\theta_0), y_m(\theta_0))\| \leq C, \forall m \geq 1.$$

Esto implica que  $\{x_m(\theta_0)\}_m$  y  $\{y_m(\theta_0)\}_m$  son acotados.

Como  $\{x_m(\theta_0)\}_m$  es acotado y de (2.119), entonces (pasando a una subsucesión si es necesario) podemos asumir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta_0) = x_0 \quad (2.120)$$

De (2.119), se sigue  $x_0 \neq x(\theta_0)$

Como  $\{y_m(\theta_0)\}_m$  es acotado, entonces (pasando a una subsucesión si es necesario) podemos asumir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\theta_0) = y_0 \quad (2.121)$$

Notemos que

$$(x_m(\theta_0), y_m(\theta_0)) \in \partial K_m, \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m(\theta_0), y_m(\theta_0)) = (x_0, y_0) \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$$

Entonces, por la proposición 2.76, se cumple que

$$(x_0, y_0) \in \partial K. \quad (2.122)$$

De (2.110), tenemos que

$$\begin{aligned} p(\theta_0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} p_m(\theta_0) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta_0) \cos(\theta_0) + y_m(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) \\ &= x_0 \cos(\theta_0) + y_0 \operatorname{sen}(\theta_0). \end{aligned} \quad (2.123)$$

De (2.122), (2.123) y por unicidad, se tiene que

$$(x_0, y_0) = (x(\theta_0), y(\theta_0)).$$

En particular,  $x_0 = x(\theta_0)$  (contradicción).

Si no se cumple que  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\theta_0) = y(\theta_0)$ , aplicando un procedimiento análogo al anterior se llega a una contradicción.

Por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\theta) = x(\theta) \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\theta) = y(\theta), \forall \theta \in (0, 2\pi) - E. \quad (2.124)$$

Esto demuestra la afirmación.

Como  $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$  es acotado (observación 2.75), entonces existe  $C_0 > 0$  tal que

$$|p'_m(\theta)| \leq C_0, \forall \theta \in [0, 2\pi], \forall m \geq 1. \quad (2.125)$$

De la afirmación 3 y de (2.125), se deduce que

- $\lim_{m \rightarrow \infty} (p'_m(\theta))^2 = (p'(\theta))^2$ , para  $\theta \in [0, 2\pi]$  c.s.
- $(|p'_m(\theta)|)^2 \leq C_0^2$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\forall m \geq 1$ .

Ahora, aplicando el teorema de la convergencia acotada, se cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (p'_m(\theta))^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (p'(\theta))^2 d\theta. \quad (2.126)$$

Además de (2.110) y como  $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$  es acotado, entonces, existe  $C_1 > 0$  tal que

- $\lim_{m \rightarrow \infty} (p_m(\theta))^2 = (p(\theta))^2$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ ,
- $(|p_m(\theta)|)^2 \leq C_1^2$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\forall m \geq 1$ .

Nuevamente, aplicando el teorema de la convergencia acotada, se cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (p_m(\theta))^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 d\theta. \quad (2.127)$$

Por el teorema 2.71, tenemos que

$$A(K_m) = \int_0^{2\pi} (p_m(\theta))^2 - (p'_m(\theta))^2 d\theta \quad (2.128)$$

De (2.126) y (2.127) en (2.128), se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(K_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (p_m(\theta))^2 - (p'_m(\theta))^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta$$

Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K$  y la aplicación  $A$  es continua, entonces

$$A(K) = \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta. \quad (2.129)$$

□

# Capítulo 3

## Perímetro y área de la envoltura convexa de un movimiento browniano planar

En esta sección el objetivo es mostrar los pasos para encontrar explícitamente el perímetro promedio y el área promedio de la envoltura convexa del recorrido de un movimiento browniano planar hasta el instante  $t = 1$ . Para ello utilizaremos la fórmula de Cauchy desarrollada en el capítulo 2. Como base teórica para el desarrollo del perímetro promedio tenemos como referencia [11] y para el desarrollo del área promedio tenemos como referencia [12].

### 3.1. Perímetro promedio

Sea  $B : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^2$ .

Definamos la envoltura convexa del browniano como el conjunto aleatorio

$$K := \text{conv}(B[0, 1]),$$

donde  $B[0, 1] = \{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ , con  $B(t) = (x(t), y(t))$ .

**Proposición 3.1.** Sean  $h_K$  la función soporte de  $K$  y  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$ , con  $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Entonces

$$p(\theta) = \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t),$$

donde  $\zeta_\theta(t) = x(t) \cos(\theta) + y(t) \sin(\theta)$ .

*Demostración.* Como  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$  y  $K = \text{conv}(B[0, 1])$ , por la proposición 2.38, tenemos que

$$\begin{aligned} p(\theta) &= \max\{\langle B(t), u_\theta \rangle : t \in [0, 1]\} \\ &= \max\{x(t) \cos(\theta) + y(t) \sin(\theta) : 0 \leq t \leq 1\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p(\theta) = \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t).$$

□

**Proposición 3.2.** *Sea  $l_1$  el perímetro de  $K$ . Entonces*

$$E(l_1) = \sqrt{8\pi}$$

*Demostración.* Como  $K = \text{conv}(B[0,1])$ ,  $B[0,1]$  es compacto y  $0 \in \text{int}(K)$  c.s. el teorema 2.15, implica que

$$K \in \mathcal{K}_0^2 \text{ c.s.}$$

Luego, por el teorema 2.79, tenemos que

$$l_1 = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta, \quad (3.1)$$

donde  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$  con  $u_\theta = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ .

Así, por la proposición 3.1, se tiene que

$$l_1 = \int_0^{2\pi} \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) d\theta. \quad (3.2)$$

Como

$$\zeta_\theta(t) = \xi(t) \cos(\theta) + \eta(t) \text{sen}(\theta),$$

donde  $\{\xi(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  y  $\{\eta(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  son movimientos brownianos estándar independientes en  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$\{\zeta_\theta(t), 0 \leq t \leq 1\}$$

es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$  para cada  $\theta$ .

Como  $0 \in \text{int}(K)$  c.s. y por la observación 2.39, tenemos que  $\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) > 0$  c.s.

Luego, por el teorema de Tonelli, se cumple que

$$\begin{aligned} E(l_1) &= E \left\{ \int_0^{2\pi} \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) d\theta \right\}, \\ &= \int_0^{2\pi} E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\} d\theta, \\ &= E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\} \int_0^{2\pi} 1 d\theta, \\ &= 2\pi E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\} \end{aligned}$$

Así

$$E(l(t)) = 2\pi E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\}. \quad (3.3)$$

Ahora calculemos  $E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\}$ . Para ello, hallaremos la densidad del  $\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t)$ .

Para cada  $x > 0$  se cumple que

$$P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) > x \right\} = P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) > x, \zeta_\theta(1) \leq x \right\} + P \{ \zeta_\theta(1) > x \}. \quad (3.4)$$

Por el principio de reflexión, tenemos

$$P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) > x, \zeta_\theta(1) \leq x \right\} = P \{ \zeta_\theta(1) > x \}. \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.5) en (3.4), se tiene que

$$P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) > x \right\} = 2P \{ \zeta_\theta(1) > x \},$$

luego se cumple que

$$\begin{aligned} 1 - P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \leq x \right\} &= 2(1 - P \{ \zeta_\theta(1) \leq x \}), \\ P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \leq x \right\} &= 2P \{ \zeta_\theta(1) \leq x \} - 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como  $\{\zeta_\theta(t), t \geq 0\}$  es un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}$ , se cumple que la variable aleatoria  $\zeta_\theta(1)$  tiene una distribución  $\mathcal{N}(0; 1)$ . Es decir,

$$P \{ \zeta_\theta(1) \leq x \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Reemplazando en (3.6), tenemos que, para todo  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \leq x \right\} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv - 1, \\ F(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv - 1, \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv - 1, \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv - 1. \end{aligned}$$

Así

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \quad \forall x > 0.$$

Esto implica que la función densidad de  $\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t)$  es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & , \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Así

$$E \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.7) en (3.3), tenemos que

$$E(l(1)) = \sqrt{8\pi}.$$

□

## 3.2. Área promedio

**Proposición 3.3.** *Sea  $A_1$  el área de  $K$ . Entonces*

$$\mathbb{E}(A_1) = \frac{\pi}{2}.$$

*Demostración.* Como  $K \in \mathcal{K}_0^2$ , entonces, por el teorema 2.79, tenemos que

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta, \quad (3.8)$$

donde  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$  con  $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Además, por la proposición 3.1, tenemos que

$$p(\theta) = \max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t),$$

donde

$$\zeta_\theta(t) = x(t) \cos(\theta) + y(t) \sin(\theta)$$

con  $\{x(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  y  $\{y(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  movimientos brownianos estándar en  $\mathbb{R}$  independientes.

De la proposición anterior, sabemos que la función densidad de  $\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t)$  es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & , \text{ si } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Ahora, aplicando esperanza matemática en (3.8), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathbb{E} [((p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2)] d\theta \\ &= \pi \mathbb{E} [((p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2)] \\ &= \pi (\mathbb{E} [(p(\theta))^2] - \mathbb{E} [(p'(\theta))^2]). \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((p(\theta))^2) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$\zeta_\theta(t) \text{ y } \bar{\zeta}_\theta(t) = -x(t) \sin(\theta) + y(t) \cos(\theta), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

son movimientos brownianos independientes. Además, por lo visto en la demostración del teorema 2.79,

$$p'(\theta) = -x(t_\theta^*) \sin(\theta) + y(t_\theta^*) \cos(\theta) = \bar{\zeta}_\theta(t_\theta^*), \quad (3.12)$$

donde  $t_\theta^* = \inf\{t \in [0, 1] : \zeta_\theta(t) = p(\theta)\}$ .

Por lo tanto, la distribución de  $p'(\theta)$  es la misma para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Para  $\theta = 0$  tenemos

$$p'(0) = y(t^*),$$

donde  $t^* = \inf\{t \in [0, 1] : x(t) = \sup_{0 \leq s \leq 1} x(s)\}$ .

Luego, por la proposición 1.2 ítem e), la variable aleatoria  $t^*$  tiene distribución arco-seno.

Es decir,

$$\mathbb{P}(t^* \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Así la función densidad de  $t^*$  es

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - (0, 1). \end{cases}$$

Ahora, calculemos la esperanza matemática de  $t^*$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(t^*) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como  $t^*$  es independiente del movimiento browniano  $y(t)$  y  $\mathbb{E}(t^*) < \infty$ , entonces

$$\mathbb{E}[p'(0)] = \mathbb{E}[(y(t^*))^2] = \mathbb{E}(t^*) = \frac{1}{2}. \quad (3.13)$$

Como, para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$p'(\theta) \sim p'(0), \quad (3.14)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((p'(\theta))^2) &= \mathbb{E}((p'(0))^2) \\ &= \mathbb{E}((y(t^*))^2) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reemplazando (3.11) y (3.15) en (3.8), se concluye que

$$\mathbb{E}(A_1) = \frac{\pi}{2}.$$

□

## Capítulo 4

# Diámetro de la envoltura convexa de un movimiento browniano planar

El objetivo de esta sección es encontrar cotas tanto superior como inferior que permitan estimar el promedio del diámetro de la envoltura convexa del recorrido de un movimiento browniano planar hasta el instante  $t = 1$ . En el desarrollo de esta sección mostraremos cómo encontrar las cotas establecidas por James McRedmond y Chang Xu [13], dicho promedio  $\mathbb{E}(d_1)$  está acotado de la siguiente manera:

$$1,6014 \leq \mathbb{E}(d_1) \leq 2,3548. \quad (4.1)$$

Primero probaremos que  $\mathbb{E}(d_1) \leq 2,3548$ . Antes de indicar el procedimiento de dicha prueba, enunciaremos algunas notaciones, definiciones, y lemas.

Sea  $B : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^2$ . Se ha definido la envoltura convexa del browniano como el conjunto aleatorio

$$K := \text{conv}(B[0, 1]),$$

donde  $B[0, 1] = \{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ , con  $B(t) = (x(t), y(t))$ .

**Definición 4.1.** El diámetro de la envoltura convexa se define como:

$$d_1 := \text{diam}K.$$

Por la proposición 2.16, se cumple que

$$\text{diam}(\text{conv}(B[0, 1])) = \text{diam}B[0, 1].$$

Entonces, de la definición de diámetro, tenemos que

$$d_1 = \text{diam}B[0, 1] = \sup_{x, y \in B[0, 1]} \|x - y\|. \quad (4.2)$$

**Proposición 4.2.**

$$d_1 = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r(\theta),$$

donde  $r(\theta) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_\theta \rangle - \inf_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_\theta \rangle$ .

*Demostración.*  $B [0, 1] \neq \emptyset$  es compacto. Entonces, por el lema 2.54, tenemos que

$$d_1 = \text{diam}(B [0, 1]) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} (r(\theta)).$$

□

Recordemos que para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ , el proceso

$$\zeta_\theta(t) = \langle B_t, u_\theta \rangle = x(t) \cos(t) + y(t) \text{sen}(t), \quad t \geq 0$$

es un movimiento estándar en  $\mathbb{R}$ .

Además, si  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ , los procesos  $\zeta_{\theta_1}(t)$  y  $\zeta_{\theta_2}(t)$  son independientes.

En consecuencia, las variables aleatorias

$$r(\theta) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} \zeta_\theta(t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

tienen la misma distribución.

Además, si  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ , las variables aleatorias  $r(\theta_1)$  y  $r(\theta_2)$  son independientes.

En [14], Feller estableció que

- $\mathbb{E}[r(\theta)] = \sqrt{\frac{8}{\pi}},$
- $\mathbb{E}[r(\theta)^2] = 4 \ln 2.$

**Proposición 4.3.**

$$\mathbb{E}(d_1) \leq \sqrt{8 \ln 2}.$$

*Demostración.* Para cada  $\theta \in [0, \pi]$ , sean

$$b(\theta) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_\theta \rangle \quad \text{y}$$

$$a(\theta) = \inf_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_\theta \rangle. \quad \text{Entonces}$$

$$B [0; 1] \subset R = [a(0), b(0)] \times \left[ a\left(\frac{\pi}{2}\right), b\left(\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Se sigue que

$$\text{diam}(B [0; 1]) \leq \text{diam}R. \quad (4.3)$$

Como el diámetro del rectángulo  $R$  se logra en la diagonal, se cumple que

$$\text{diam}R = \sqrt{r(0)^2 + r(\pi/2)^2}. \quad (4.4)$$

De (4.3) y de (4.4), se tiene que

$$d_1^2 \leq r(0)^2 + r(\pi/2)^2.$$

Ahora, aplicando esperanza matemática, tenemos que

$$\mathbb{E}(d_1^2) \leq \mathbb{E}[r(0)^2] + \mathbb{E}[r(\pi/2)^2].$$

Como

$$\mathbb{E}[r(\theta)^2] = 4\ln 2, \quad \forall \theta \in [0, \pi],$$

se sigue que

$$\mathbb{E}(d_1^2) \leq 8\ln 2. \quad (4.5)$$

Además, por la desigualdad de Jensen se tiene

$$(\mathbb{E}d_1)^2 \leq \mathbb{E}(d_1^2),$$

reemplazando en (4.5), se concluye que

$$\mathbb{E}(d_1) \leq \sqrt{8\ln 2}.$$

□

Ahora vamos a analizar la cota inferior. Para ello, primero demosmos los siguientes lemas:

**Lema 4.4.**

$$\mathbb{E}(d_1) \geq \mathbb{E}X + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X_2|,$$

donde  $X = r(0)$ ,  $X_2 = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

*Demostración.* Observemos que

$$r(0) = \sup_{0 \leq t \leq 1} x_t - \inf_{0 \leq t \leq 1} x_t \quad \text{y} \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sup_{0 \leq t \leq 1} y_t - \inf_{0 \leq t \leq 1} y_t \quad \text{son independientes.}$$

Como  $d_1 = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r(\theta)$  (proposición 4.2), entonces

$$d_1 \geq \max \left\{ r(0), r\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \max \{X, X_2\}.$$

Ahora, aplicando esperanza matemática, tenemos

$$\mathbb{E}(d_1) \geq \mathbb{E}(\max \{X, X_2\}). \quad (4.6)$$

Como

$$\max \{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max\{X, X_2\}] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(X + X_2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X_2| \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}X + \mathbb{E}X_2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X_2|.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Como

$$\mathbb{E}(r(\theta)) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \forall \theta \in [0, \pi],$$

entonces

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_2 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.\quad (4.8)$$

Reemplazando (4.8) en (4.7), tenemos

$$\mathbb{E}[\max\{X, X_2\}] = \mathbb{E}X + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X_2|.\quad (4.9)$$

De (4.6 )y (4.9), se concluye que

$$\mathbb{E}(d_1) \geq \mathbb{E}X + \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - X_2|.$$

□

**Lema 4.5.** Para cada  $a > 0$  y cada  $h > 0$ ,

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq 2h\mathbb{P}(X \leq a) \cdot \mathbb{P}(X \geq a + h),$$

donde  $X = r(0)$ ,  $X_2 = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

*Demostración.* Sean  $a, h > 0$ . Se cumple:

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq \mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{|X - X_2| \geq h\}}].\quad (4.10)$$

Como

$$\{X \leq a, X_2 \geq a + h\} \cup \{X_2 \leq a, X \geq a + h\} \subset \{|X - X_2| \geq h\},$$

además notemos que los conjuntos

$$\{X \leq a, X_2 \geq a + h\}, \{X_2 \leq a, X \geq a + h\} \text{ son disjuntos.}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{|X - X_2| \geq h\}}] \geq \mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X \leq a, X_2 \geq a + h\}}] + \mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X_2 \leq a, X \geq a + h\}}].$$

Luego, en (4.10), tenemos que

$$\mathbb{E}[|X - X_2|] \geq \mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X \leq a, X_2 \geq a + h\}}] + \mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X_2 \leq a, X \geq a + h\}}].\quad (4.11)$$

Como

$$|X - X_2|1_{\{|X-X_2|>h\}} > h1_{\{|X-X_2|>h\}},$$

entonces

$$\begin{aligned} |X - X_2|1_{\{X \leq a, X_2 \geq a+h\}} &\geq h1_{\{X \leq a, X_2 \geq a+h\}} \\ |X - X_2|1_{\{X_2 \leq a, X \geq a+h\}} &\geq h1_{\{X_2 \leq a, X \geq a+h\}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X \leq a, X_2 \geq a+h\}}] \geq h\mathbb{E}[1_{\{X \leq a, X_2 \geq a+h\}}] = h\mathbb{P}(X \leq a, X_2 \geq a+h)$$

$$\mathbb{E}[|X - X_2|1_{\{X_2 \leq a, X \geq a+h\}}] \geq h\mathbb{E}[1_{\{X_2 \leq a, X \geq a+h\}}] = h\mathbb{P}(X_2 \leq a, X \geq a+h).$$

Con las desigualdades obtenidas anteriormente, en (4.11), tenemos

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq h\mathbb{P}(X \leq a, X_2 \geq a+h) + h\mathbb{P}(X_2 \leq a, X \geq a+h).$$

Como  $X, X_2$  son variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq h\mathbb{P}(X \leq a) \cdot \mathbb{P}(X_2 \geq a+h) + h\mathbb{P}(X_2 \leq a) \cdot \mathbb{P}(X \geq a+h).$$

Como  $X, X_2$  tienen la misma distribución, se concluye que

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq 2h\mathbb{P}(X \leq a) \cdot \mathbb{P}(X \geq a+h).$$

□

**Teorema 4.6.** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ es convergente.}$$

Además, se cumple que

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1,$$

$$\text{donde } S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ y } s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k.$$

*Demostración.* Ver [10], p. 404. □

**Proposición 4.7.** Para cada  $a > 0$  y cada  $h > 0$ , sea

$$g(a, h) = h \left( \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{2a^2} \right\} - \frac{4}{3\pi} \exp \left\{ -\frac{9\pi^2}{2a^2} \right\} \right) \left( 1 - \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right\} \right).$$

Entonces  $\mathbb{E}(d_1) \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} + g(a, h)$  para todo  $a > 0$  y todo  $h > 0$ .

*Demostración.* Sea  $Z = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\langle B_t, u_0 \rangle| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ .

Por el Corolario 1.5, para cada  $x > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2/(8x^2)} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-\pi^2(2k-1)^2/(8x^2)}. \end{aligned}$$

Sea  $a_k = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k-1} e^{-\pi^2(2k-1)^2/(8x^2)}$ . Entonces tenemos la siguiente serie alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = P(Z < x).$$

Notemos que  $a_k$  es decreciente y  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Entonces, por el teorema 4.6, se tiene la siguiente desigualdad

$$a_1 - a_2 < \mathbb{P}(Z \leq x) < a_1.$$

Es decir,

$$\frac{4}{\pi} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8x^2}\right\} - \frac{4}{3\pi} \exp\left\{-\frac{9\pi^2}{8x^2}\right\} < \mathbb{P}(Z < x) < \frac{4}{\pi} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8x^2}\right\}, \forall x > 0. \quad (4.12)$$

Sabemos que  $\sup_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle > 0$  y  $\inf_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle > 0$  c.s. Entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\langle B_t, u_0 \rangle| < \sup_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle - \inf_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} |\langle B_t, u_0 \rangle| \text{ c.s.}$$

Como

$$X = r(0) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle - \inf_{0 \leq t \leq 1} \langle B_t, u_0 \rangle,$$

tenemos que

$$Z < X \leq 2Z.$$

De la desigualdad anterior, se sigue que

$$\mathbb{P}(X \leq a) \geq \mathbb{P}(Z \leq a/2) \quad (4.13)$$

De (4.12) y (4.13), tenemos

$$\mathbb{P}(X \leq a) \geq \mathbb{P}(Z \leq a/2) > \frac{4}{\pi} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2a^2}\right\} - \frac{4}{3\pi} \exp\left\{-\frac{9\pi^2}{2a^2}\right\}. \quad (4.14)$$

Además, como

$$Z \leq X,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq a + h) &\geq \mathbb{P}(Z \geq a + h). \\ \mathbb{P}(X \geq a + h) &\geq 1 - \mathbb{P}(Z < a + h).\end{aligned}\tag{4.15}$$

De (4.12), se cumple

$$\mathbb{P}(Z < a + h) < \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right\}.$$

Luego, en (4.15), tenemos que

$$\mathbb{P}(X \geq a + h) > 1 - \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right\}.\tag{4.16}$$

De (4.13) y (4.16), obtenemos

$$\begin{aligned}h\mathbb{P}(X \geq a + h)\mathbb{P}(X \leq a) &\geq h \left( \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{2a^2} \right\} - \frac{4}{3\pi} \exp \left\{ -\frac{9\pi^2}{2a^2} \right\} \right) \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right\} \right)\end{aligned}$$

y de la definicion de  $g(a, h)$ , tenemos

$$h\mathbb{P}(X \geq a + h)\mathbb{P}(X \leq a) \geq g(a, h).$$

Del Lema 4.5, tenemos

$$\mathbb{E}|X - X_2| \geq 2g(a, h).\tag{4.17}$$

Del Lema 4.4 y por (4.17), tenemos

$$\mathbb{E}(d_1) \geq \mathbb{E}X + g(a, h).\tag{4.18}$$

Sabemos que se cumple

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(r(0)), \quad \mathbb{E}(r(0)) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

Usando Maple se sugiere que el óptimo esta cerca de

$$(a, h) = (1,492, 0,337).$$

Reemplazando estos resultados en (4.18), se concluye que

$$\mathbb{E}(d_1) \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} + g(1,492, 0,337).$$

□

Por lo tanto, de la proposición 4.3 y la proposición 4.7, resulta que

$$1,6014 \leq \mathbb{E}(d_1) \leq 2,3548.$$

# Conclusiones

1. Dado un cuerpo convexo  $K \in \mathcal{K}_0^2$ , es posible calcular su área y su perímetro en términos de la función soporte. De manera más precisa,

$$l(K) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta,$$

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(\theta)]^2 - [p'(\theta)]^2 d\theta,$$

donde  $p(\theta) = h_K(u_\theta)$  con  $u_\theta = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ .

2. Sea  $K$  la envoltura convexa del recorrido de un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^2$  desde el instante 0 hasta el instante 1. El perímetro promedio y el área promedio de  $K$  son dados por

$$E(l_1) = \sqrt{8\pi},$$

$$\mathbb{E}(A_1) = \frac{\pi}{2},$$

donde  $l_1$  y  $A_1$  son el perímetro y el área respectivamente del cuerpo convexo aleatorio  $K$ .

3. El diámetro promedio de  $K$  no se conoce con exactitud hasta el momento, pero si se se conocen las siguientes estimaciones

$$1,6014 \leq \mathbb{E}(d_1) \leq 2,3548,$$

donde  $d_1$  es el diámetro del cuerpo convexo aleatorio  $K$ .

# Bibliografía

- [1] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [2] René L. Schilling, Lothar Partzsch. Rosen, *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*. Gruyter, 2012.
- [3] Peter Mörters, Yuval Peres, *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Rick Durrett, *Probability Theory and Examples Fourth Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [5] Daniel Revuz, Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1998.
- [6] Frederick A. Valentine, *Convex Sets*. McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [7] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Second expanded edition*. Cambridge University Press, 2014.
- [8] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 2015.
- [9] Elon Lages, *Curso de Análise. vol. 2* 5a edição. Projeto Euclides IMPA, 1999.
- [10] Tom M. Apostol, *Calculus vol. 1, 2 edición*. John Wiley and Sons, 1967.
- [11] Gérard Letac, Lajos Takács, *Expected perimeter length*. Amer. Math. Monthly 87 (1980) 142.
- [12] Satya N. Majumdar, Alain Comtet, Julien Randon-Furling, *Random Convex Hulls and Extreme Value Statistics*. J. Stat. Phys 138(2010) 955–1009.
- [13] James McRedmond, Chang Xu, *On the expected diameter of planar Brownian motion*. Statistics and Probability Letters 130 (2017) 1-4.
- [14] W. Feller, *The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables*. Ann. Math. Statist. 22 (1951) 427–432.