PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

# "Estudio de un Modelo Dinámico Estocástico para las Decisiones de Compra de Bienes Durables"

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas con Mención en Aplicaciones a la Economía

Presentada por

Juan Manuel García Carpio

Asesora

Loretta Betzabé Gasco Campos

JURADO

Alejandro Felipe Lugon Ceruti

Loretta Betzabé Gasco Campos

José David Gallardo Ku

LIMA – PERÚ

2012

# Índice

**Resumen**

El trabajo de tesis muestra en detalle los fundamentos matemáticos del modelo estocástico para las decisiones de compra de un bien durable cuyas características son heterogéneas en el mercado y cambian en el tiempo, planteado por Melnikov (2001), el cual se basa en la hipótesis de utilidad aleatoria propuesta por McFadden (1978, 1981) y permite la estimación de los determinantes y la evolución de las ventas de este tipo de bienes.

En este modelo se considera que los individuos toman la decisión de comprar el bien durable a partir de la maximización de la utilidad esperada a lo largo del tiempo. La decisión de un individuo se descompone en dos etapas: i. selección de la alternativa del bien durable que maximiza su utilidad en cada momento asumiendo la hipótesis de utilidad aleatoria aditiva. ii. determinación del momento óptimo para realizar la compra de la alternativa elegida en la etapa anterior.

El problema estudiado se plantea como una generalización de los modelos de elección discreta estáticos o de un periodo. Para ello, se presenta el modelo de elección discreta de los individuos ante un conjunto de alternativas, y se asume el supuesto de maximización de la utilidad aleatoria, utilizando el marco analítico de la teoría económica de elección de la demanda. Asimismo, se indica las condiciones bajo las cuales es posible analizar las decisiones de una población mediante un agente representativo que demanda proporciones de cada alternativa que coinciden con las probabilidades de elección, específicamente, mediante el supuesto de errores aleatorios que afectan la utilidad de forma aditiva y que tienen distribución de Valor Extremo (generando modelos de elección del tipo Logit Multinomial).

Posteriormente, se plantea el problema de la decisión sobre el momento en que el individuo representativo compra una alternativa del bien durable asumiendo que, en cada período, se cumplen el supuesto de maximización de la utilidad aleatoria. Se presenta este problema como uno de optimización dinámica estocástica (específicamente de Tiempo de Parada Óptimo), se identifica las condiciones bajo la cuales existe una solución, y se muestra sus principales características. Finalmente, se discute los resultados del modelo en cuanto a la dinámica de las compras agregadas del bien durable.

## Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar de forma detallada los fundamentos téoricos del modelo planteado por Melnikov [32] para el problema de la decisión óptima de compra de un bien durable cuyas características son heterogéneas y varían en el tiempo, y que es utilizado para la estimación de los determinantes y la evolución de las ventas de las computadoras.

El estudio de este modelo resulta relevante ya que modelos similares son utilizados en la literatura económica para estudiar problemas económicos basados en decisiones intertemporales de los agentes desde un punto de vista dinámico, incluyendo diversas aplicaciones empíricas recientes similares.

El modelo estudiado considera la decisión de comprar un bien durable como un problema de maximización de la utilidad de los individuos a lo largo del tiempo, y permite superar las deficiencias de los modelos de tipo estático o de un período para analizar adecuamente este tipo de decisiones.

A nivel teórico el estudio de este modelo es relevante ya que la teoría económica estándar de la demanda modela las decisiones de un individuo a partir de la maximización de la función de utilidad (que representa sus preferencias) para el consumo de bienes divisibles, y no se ha enfocado en la elección entre alternativas de bienes que poseen distintos atributos[1] como ocurre en la decisión de comprar un bien durable.

Por otro lado, el enfoque utilizado en este modelo es compartido por diversos estudios empíricos de las decisiones de elección entre alternativas o bienes por parte de las personas, incluyendo la compra de bienes durables, que han usado la modelación econométrica desarrollada por McFadden[21], específicamente el modelo Logit Multinomial, a partir del cual se puede estimar parámetros que reflejan las preferencias detrás de las decisiones de compras observadas. Este tipo de estudios tienen un enfoque estocástico de las decisiones de los consumidores al asumir la hipótesis de que su utilidad que obtienen los individuos de las distintas alternativas es aleatoria propuesta por McFadden[22] y que los individuos eligen la alternativa que maximiza esta utilidad. Con ello se establece un vínculo entre la teoría económica de la demanda y los modelos empíricos de elección que permite fundamentar las aplicaciones econométricas.

Muchos de los trabajos sobre elección entre alternativas han sido de tipo estático, es decir, asumen que el individuo sólo toma en cuenta en sus decisiones la información del período actual y no la información disponible a lo largo del tiempo (comportamiento

[1] Ver Mas-Colell et al. [18], capítulos 2 y 3.

"miope"). En el caso de bienes durables se asume que el individuo decide entre comprar una las variedades del bien o tomar una opción por fuera que le proporciona utilidad. Destacan los trabajos de Berry[3], Berry, Levinsohn, and Pakes[4], y Golberg[11].

El uso de modelos estáticos no resulta adecuado para el estudio de la compra de bienes durables. En primer lugar, en este caso, si un individuo no compra el bien se supone que tiene una alta valorización de la alternativa por fuera cuando, en realidad, puede ya haberlo adquirido o pospuesto su decisión de comprarlo. Asimismo, para muchos bienes durables se observa una tendencia de incremento de la calidad y un descenso de los precios, lo cual implica que un modelo estático tiende a proyectar tendencias crecientes de las ventas. Además, el aumento de la calidad del bien puede llevar a una sustitución intertemporal, ya que, al posponer la compra, un individuo mantiene la opción de comprar un bien de mayor calidad en el futuro.

Más recientemente, para el estudio empírico de la compra de bienes durables, especialmente para determinar la evolución de las ventas de los mismos, se han desarrollado modelos basados en un enfoque dinámico de las decisiones, los cuales consideran la decisión de compra como un problema de optimización intertemporal de la utilidad esperada de los individuos. Como se ha mencionado, este enfoque es más adecuado sobre todo en el caso de bienes para los cuales existe un proceso acelerado de cambio tecnológico, como las computadoras personales, donde continuamente aparecen nuevas variedades de los mismos, y que no se modelan adecuadamente mediante los modelos estáticos.

Sin embargo, los estudios de tipo dinámico han sido desarrollados sobre todo para el caso de bienes homogéneos, y no para la elección entre bienes durables diferenciados, pues la estimación de estos modelos implica hallar la senda completa de equilibrio de los precios en un período para determinar el precio en un momento determinado, tomando en cuenta que las expectativas de los consumidores deben ser satisfechas en cada momento[2]. Para modelar esta decisión en el caso de bienes heterogéneos, Melnikov[32] ha planteado un modelo donde un individuo resuelve el problema de la decisión óptima de compra de una alternativa de un bien durable en dos etapas: i. selecciona la alternativa que maximiza su utilidad en cada momento (basado en un modelo Logit Multinomial) y, ii. dado que este bien sólo se adquiere una vez, determina el momento óptimo para realizar la compra del bien elegido en la etapa anterior, lo cual constituye un problema

[2]Aunque ha habido trabajos que han desarrollado este enfoque a nivel teórico y empírico para el caso del mercado secundario de bienes usados como Rust[28], o empíricos para el reemplazo de un bien, siendo el más representativo el de Rust[29] que desarrolla un algoritmo para la estimación del punto fijo del modelo, así como desarrollo téoricos del problema sin considerar cambio tecnológico como Rust[30].

de tiempo de parada óptimo (*Optimal Stopping*).

En el presente trabajo se indica explícitamente las hipótesis adoptadas en el modelo elaborado por Melnikov en relación a la elección entre alternativas de los individuos, y se muestra su consistencia con la teoría económica de la demanda; asimismo, se muestra la justificación del uso del modelo Logit Multinomial para las decisiones de una población de individuos dado que es posible construir un individuo representativo de sus decisiones. Luego, se plantea el problema de control dinámico estocástico asociado para la decisión intertemporal de compra del bien durable, se muestra las condiciones de existencia y las características de la solución del problema utilizando la programación dinámica estocástica. Finalmente, se indica los resultados para las decisiones agregadas de la población.

La organización del trabajo es la siguiente: en el primer capítulo, se presenta formalmente el modelo de elección discreta de los consumidores ante un conjunto de alternativas bajo la hipótesis de maximización de la utilidad aleatoria propuesta por McFadden[21, 22], mostrando su consistencia con la teoría económica estándar (utilizando como referencia a Mas-Colell[18]). En el segundo capítulo, se indica las condiciones bajo las cuales, las demandas agregadas de las distintas alternativas del bien por parte de los individuos pueden ser analizadas como provenientes de un individuo representativo que elige proporciones de las alternativas que coinciden con sus probabilidades de elección; específicamente, asumir el supuesto de utilidades aleatorias con errores que afectan aditivamente la utilidad de las decisiones, y requerir que las distribuciones de los errores sean de Valor Extremo (generando modelos tipo el Logit Multinomial) siguiendo a McFadden[22]. En el tercer capítulo, se plantea el problema dinámico para la decisión intertemporal del consumidor de adquisición de una alternativa del bien durable asumiendo un modelo Logit Multinomial para la elección entre alternativas en cada período, y considerando un contexto en el que la utilidad esperada de la mejor alternativa tiende a aumentar a lo largo del tiempo. Se presenta como un problema de control óptimo estocástico (del tipo tiempo de parada óptima), ya que, en cada momento, el consumidor toma la decisión entre comprar o no comprar el bien, dada la información disponible. En el capítulo cuarto, se muestra la existencia de la solución de este problema bajo los supuestos específicos asumidos por Melnikov, y se indica sus principales características. Finalmente, en el último capítulo, se presentan las características de la dinámica de las compras agregadas del bien durable que se derivan de las probabilidades de compra del agente representativo.

# 1. Modelación de la Utilidad Aleatoria

En primer lugar, se requiere modelar la probabilidad de elección de cada modelo dentro de un conjunto de modelos (indexados) de computadoras que poseen determinados atributos medibles, los cuales proporcionan niveles de utilidad distintos a los individuos de la población de acuerdo a sus preferencias, asumiendo que estas preferencias se caracterizan por los supuestos estándar de la teoría económica.

Por ello, en este capítulo se modela las decisiones de elección de alternativas de un bien sobre la base del modelo de maximización de la utilidad aleatoria de McFadden [31], el cual fundamenta el uso de variables aleatorias para representar los niveles de utilidad obtenidos mediante estas decisiones.

## 1.1. Sistema de Elección Probabilístico

En esta sección se define un Sistema de Elección Probabilístico (SEP). el cual permite caracterizar de manera general la elección entre alternativas por parte de los individuos de una población, por ejemplo, en el caso de la compra de distintos modelos de un bien durable como la computadora[3].

***Definición.*** **Sistema de Elección Probabilistico (SEP)**

Un SEP consiste en un vector $(I, \mathscr{I}, Z, \xi, S, P)$ donde

- I es un conjunto finito no vacío que indexa las alternativas de elección; $I = \{i_1, ..., i_n\} \subset \mathbb{Z}^+$.
- $\mathscr{I}$ es una familia finita no vacía de subconjuntos de alternativas de elección obtenidos a partir de los elementos de I;
- Z es el universo de vectores de atributos medibles;
- $\xi : I \to Z$ es un mapeo que especifica los atributos medibles de cada alternativa;
- S es el universo de vectores de características medibles de los individuos de la población que realiza elecciones; y
- $P : I \times \mathscr{I} \times S \to [0, 1]$ es la probabilidad de elección.

[3] Además, la definición de este sistema es compatible con las especificaciones econométricas de un sistema de demanda utilizadas para modelar los datos observados de elecciones discretas.

La probabilidad de elegir $i \in I$ dado que la selección debe ser hecha de un conjunto $J = \{j_1, ..., j_m\} \in \mathscr{I}$ para un individuo que tiene características $s \in S$, se denota $P(i \mid J, s)$.

La probabilidad de que la alternativa elegida pertenezca a un conjunto $C \in \mathscr{I}$, dado que las alternativas se han restringido al conjunto $J$ y dadas las características del individuo $s \in S$, está dada por

$$P(C \mid J, s) = \sum_{i \in C} P(i \mid J, s).$$

Ejemplo: En el caso de elección de computadoras, se puede tener un conjunto de seis modelos alternativos posibles $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A partir de este conjunto, se puede tener conjuntos de elección disponibles en el mercado (por ejemplo, en una región) como $J = \{1, 3, 5\}$ y $J' = \{2, 4, 6\}$. Los atributos medibles de las alternativas pueden ser la velocidad del procesador, la capacidad de disco duro y la memoria RAM (medidas en Gigabits), por lo cual $Z = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, y se puede definir $\xi : I \to Z$ como $\xi(1) = (1, 60, 1), \xi(2) = (1, 80, 1), \xi(3) = (2, 100, 2), \xi(4) = (2, 120, 2), \xi(5) = (4, 160, 2)$, $\xi(6) = (4, 100, 2)$.

Dados un conjunto de elección $J \in \mathscr{I}$ y las características individuales $s \in S$ , un SEP cumple las siguientes propiedades:

- SEP1: Las probabilidades de elección de cada alternativa son no negativas y suman 1.

  a. $P(j_l \mid J, s) \geq 0, \forall j_l \in J$.

  b. $P(J \mid J, s) = \sum_{l=1}^{m} P(j_l \mid J, s) = 1$.

- SEP2: Las probabilidades de elección dependen sólo de los atributos de las alternativas.

  Si para $J = \{j_1, ..., j_m\} \in \mathscr{I}$ y $J' = \{j'_1, ..., j'_m\} \in \mathscr{I}$ se tiene que $z_k = \xi(j_k) = \xi(j'_k)$ para $k = 1, .., m$, entonces $P(j_k \mid J, s) = P(j'_k \mid J', s)$.

Ejemplo: Para el ejemplo anterior, si para los conjuntos de alternativas $J = \{1, 3, 5\}$ y $J' = \{2, 4, 6\}$, se tiene $\xi(1) = \xi(2) = (1, 70, 1)$, $\xi(3) = \xi(4) = (2, 110, 2)$, $\xi(5) = \xi(6) = (4, 140, 2)$, entonces se cumplirá $P(1 \mid J, s) = P(2 \mid J', s)$, $P(3 \mid J, s) = P(4 \mid J', s)$ y $P(5 \mid J, s) = P(6 \mid J', s)$.

## 1.2. Preferencias y Utilidad Aleatoria

En esta sección se define las relaciones de preferencias sobre distintas alternativas de elección de los individuos y las funciones de utilidad asociadas. Luego, se caracteriza estas funciones como vectores aleatorios asignándoles una medida de probabilidad para una población de individuos con características dadas $s \in S$. Por último, se indica cómo, en este contexto, es posible definir un SEP a partir de las decisiones de maximización de la utilidad por parte de los individuos de esa población.

***Definición.*** **Relación de Preferencias**

Una relación de preferencias$\rho$ sobre el conjunto de alternativas $I$ se define como un subconjunto $\rho$ de $I \times I$, tal que $(j, k) \in \rho$ si j es "al menos tan deseable" como k, lo cual se denotará $j \succeq k$.

Se dice que la relación de preferencias $\rho$ es racional, si es transitiva (dados $(j, k) \in \rho$ y $(k, l) \in \rho \rightarrow (j, l) \in \rho$) y completa $(\forall j, k \in I, (j, k) \in \rho (j, k)\, o\, (k, l) \in \rho)$[4]. Denominaremos $O$ al conjunto de todas las relaciones de preferencias racionales sobre I.

***Teorema 1.*** **Representación de Preferencias Mediante Funciones de Utilidad**

Dadas las características $s \in S$, para cualquier relación de preferencias racional $\rho \in O$ existe una función $u(. \mid \rho, s) : I \mapsto \mathbb{R}$, la cual otorga valores reales a cada una de las alternativas de I. Esta función es denominada "función de utilidad".

La función constituye una representación ordinal específica de la relación de preferencias $\rho$ sobre I de los individuos con características $s \in S$, siendo el valor correspondiente a cada alternativa el nivel de utilidad que recibe la persona al elegirla, es decir, $\forall j, k \in I$, $j \succeq k \Leftrightarrow u(j \mid \rho, s) \geq u(k \mid \rho, s)$.

Demostración:

Mas-Collel et. al. [18] Proposición 1.B.2[5].

◆

[4] Ver definición 1.B.1 de Mas-Colell et al. [18]

[5] Ver también el ejercicio 1.B.5 que abarca el caso en que el conjunto de elección es finito.

***Definición.*** **Espacio Medible de Funciones de Utilidad**

Para características $s \in S$ dadas, las funciones de utilidad se pueden ver como puntos del espacio finito-dimensional $\mathbb{R}^n$, es decir, vectores $(u(i_1), ..., u(i_n))$, con $i_i \in I$, que indican los niveles de utilidad de la elección de las distintas alternativas[6].

Ejemplo: Dado el conjunto de elección de alternativas $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dos individuos de la población con características $s \in S$ tienen preferencias representadas por los vectores $u' = (10, 15, 12, 20, 5, 8)$ y $u'' = (18, 10, 21, 6, 15, 7)$, respectivamente.

**Hipótesis. Utilidad Aleatoria**

Dada una población de individuos con características $s \in S$, se asume que en el espacio de sus funciones de utilidad, existe una distribución caracterizada por una medida de probabilidad $\mu$ dada por

$$\mu(., s) : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1].$$

donde $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ es la álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ (la $\sigma$-álgebra más pequeña que contiene a los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$). Es decir, el espacio medible de funciones de utilidad es $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

Al $\mu$ ser medida de probabilidad cumple con las siguientes propiedades:

i. $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \mu(A) \leq 1$.

ii. $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ y $\mu(\emptyset) = 0$.

iii. Si $A_1, A_2, ... \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ son disjuntos, entonces $\mu(A_1 \cup A_1 \cup ...) = \sum_i \mu(A_i)$.

Además, $\mu$ se puede restringir cuando el conjunto de alternativas es $J = \{j_1, ..., j_m\} \in \mathscr{I}$ considerando funciones de utilidad $u \in \mathbb{R}^m$ conformadas por los vectores que incluyen sólo los elementos correspondientes a estas alternativas y definiendo la medida de probabilidad $\mu^J(., s) = \mu(. \mid J, s) : \mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \to [0, 1]$ como

$$\mu^J(B, s) = \mu(B \mid J, s), \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m).$$

[6] Sin pérdida de generalidad el rango de estas funciones se puede restringir al intervalo $[0, 1]$ mediante una representación $U \mid s : I \times O \to [0, 1]$ definiendo $u(i \mid \rho, s) = \sum_{j \in A(j,\rho)} 2^{-j}$, donde $A(i, \rho) = \{j \in I \mid (i, j) \in \rho\}$ denota el conjunto de alternativas para las cuales la alternativa i es preferida o por lo menos "igual de deseable" que las otras opciones.

***Definición.*** **Función de Densidad de Probabilidad de las Funciones de Utilidad**

Se denomina función de densidad de probabilidad de las funciones de utilidad a la función $f^J(. \mid s) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0,1]$ para la cual la medida $\mu$ restringuida al conjunto $J$ puede ser expresada como $\mu^J(A,s) = \int_A f^J(u_1,...,u_m;s)du_1...du_m$, para $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$, donde $f^J(A;s)$ denota la función de densidad correspondiente.

A partir de la definición anterior se tiene la función de distribución de probabilidad acumulada multivariada $F^J(. \mid s) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0,1]$, definida por

$$F^J(u_1,...,u_m;s) = \int_{x_1=-\infty}^{u_1}\int_{x_2=-\infty}^{u_2}...\int_{x_m=-\infty}^{u_m} f^J(x_1,...,x_m;s)dx_1...dx_m, \forall(u_1,u_2,..,u_m) \in \mathbb{R}^m$$

donde, para simplificar la notación, se escribe $u_j = u(j_j)$.

Si $F_1^J$ denota la derivada de $F^J$ respecto a su primer argumento, por definición, se tiene que

$$F_1^J(u_1,u_2,...,u_m;s) \equiv \frac{\partial F^J(u_1,u_2,...,u_m;s)}{\partial x_1} = \int_{x_2=-\infty}^{u_2}...\int_{x_m=-\infty}^{u_m} f^J(u_1,x_2,...,x_m;s)dx_2...dx_m.$$

Entonces, la probabilidad de elección de $j_1 \in J$ es

$$P(j_1 \mid J,s) = \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u_1 \geqq u_k,\ k=1,...,m\},s) =$$

$$= \int_{u=-\infty}^{\infty}\left[\int_{x_2=-\infty}^{u}...\int_{x_m=-\infty}^{u} f^J(u,x_2..,x_m;s)dx_2...dx_m\right]du = \int_{u=-\infty}^{\infty} F_1^J(u,u,...,u;s)du\,. \tag{1}$$

Como se verá posteriormente, siguiendo a McFadden [31], una forma de encontrar un SEP de una población consistente con la hipotesis MUA es utilizar la ecuación (1) para generar probabilidades de elección o, alternativamente, demostrar que un determinado SEP es consistente con alguna función de densidad de probabilidad y, por ende, con la medida de probabilidad asociada, a través de (1).

**Interpretación de la Hipótesis de Utilidad Aleatoria**

Asumir la hipótesis de utilidad aleatoria implica que existe una distribución aleatoria de las preferencias o gustos entre los individuos, la cual define distintas funciones de utilidad entre los individuos con características $s \in S$. Además, siguiendo a McFadden

[31], pag. 205-206), las variaciones en preferencias entre individuos y en un mismo individuo que elige en distintos momentos son indistinguibles en sus efectos sobre la distribución observada de la demanda de las alternativas de elección. Para el caso de un mismo individuo, estas variaciones se interpretan como si el mismo individuo tomará una función de utilidad de una distribución aleatoria cada vez que hace una decisión, lo cual constituye un marco de análisis más general que el modelo clásico de maximización de la utilidad individual ya que captura factores (psicólogicos) que no son medibles desde el punto de vista de un observador y que afectan las decisiones económicas de los individuos de manera no previsible[7].

Por otro lado, también puede interpretarse como que las personas pueden cometer errores en sus decisiones debido a problemas de racionalidad limitada. Desde un punto de vista econométrico, los errores se reflejan en discrepancias entre las predicciones de un modelo de un proceso de elección discreta. En cuanto a las formas de explicar estos errores Rust [30] discute cuatro posibles interpretaciones: i. errores de optimización que impiden a un agente calcular correctamente o implementar una acción óptima; ii. errores de medida de las variables debido a errores de respuesta o codificación (que conducen a errores de clasificación de los datos); iii. errores de aproximación debido a la incorrecta especificación de los modelos econométricos (que, por naturaleza, son representaciones simplificadas de la realidad y no la pueden reproducir totalmente); iv. presencia de variables de estado no observadas por el investigador (no se captura todas las variables relevantes para la decisión del individuo, incluyendo lo que, en econometría, se denomina heterogeneidad no observada en alusión a componentes o variables no medibles propios de cada individuo). De acuerdo a Rust[30], sobre todo cuando las fuentes de datos son confiables y exhaustivas, esta última interpretación sería la más plausible y natural de los errores, ya que reflejan información que no es capturada mediante formas funcionales basadas en las variables observadas. Sin embargo, la literatura econométrica reciente ha puesto énfasis en el estudio de casos donde donde sí ocurrirían errores en las decisiones de los individuos comparándolas con decisiones "óptimas" a lo largo del tiempo, encontrando que los individuos en muchos casos toman decisiones subestimando o sobreestimando sus verdaderas valoraciones sobre ciertos bienes o servicios en relación a posibles alternativas de elección (por ejemplo, cuando se observa que las personas se inscriben en planes de gimnasio que finalmente no son utilizados, o mediante estudios experimentales de decisiones especificas con grupos reducidos de personas).

[7]El modelo de utilidad intrapersonal ha sido de mucha relevancia en las teorías psicológicas de elección individual, sobre todo a partir de los trabajos de Luce [17] y Tversky [34].

En general, este supuesto implica que personas con características iguales tienen preferencias similares aunque sus elecciones, en muchos casos, no coincidan.

***Hipótesis.*** **Maximización de la Utilidad Aleatoria (MUA)**

La hipótesis MUA consiste en la existencia de un vector $(I, Z, \xi, S, \mu)$ - donde $(I, Z, \xi, S)$ fueron ya definidas, y $\mu$ es una medida de probabilidad en el espacio de funciones de utilidad, para $s \in S$ dado, tal que se cumplen los siguientes supuestos:

- MUA1: $\mu^J$, definida como la restricción de $\mu$ a un conjunto de alternativas $J$, depende sólo de los atributos medibles de estas alternativas: si $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$ y $J' = \{j'_1, .., j'_m\} \in \mathscr{I}$ satisfacen $z_k = \xi(j_k) = \xi(j'_k)$ para $k = 1, ..., m$, entonces $\mu^J = \mu^{J'}$.

- MUA2: La probabilidad de casos donde haya indiferencia entre dos alternativas es cero

$$\mu(\{u \in \mathbb{R}^n \mid u(j_k) = u(j_l)\}, s) = 0,\ j_k, j_l \in I,\ k \neq l.$$

- MUA3: La elección entre las distintas alternativas es determinada por la maximización de la utilidad, es decir, la probabilidad $P(j_k \mid J, s)$ de que una alternativa $j_k \in J$ sea elegida está dada por

$$P(j_k \mid J, s) = \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) \geq u(j_l),\ \forall j_l \in J\}, s).$$

  La probabilidad de elección de una alternativa determinada está dada por la medida de las funciones de utilidad en las cuales esa alternativa otorga la mayor utilidad.

***Teorema 2.*** **La Hipótesis MUA genera un SEP.**

Dadas las características $s \in S$, si se cumplen los supuestos de la hipótesis MUA se genera un SEP $(I, \mathscr{I}, Z, \xi, S, P)$.

Demostración:

SEP2 es consecuencia directa de la propiedad MUA1.

Para un conjunto de elección $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$, las propiedades MUA2 y MUA3 implican SEP1.

En primer lugar, MUA3 implica, por definición de medida de probabilidad, que $P(j_k \mid J, s) \geq 0$, $j_k \in J$. Además, MUA2 garantiza que existe casi siempre una única alternativa que maximiza la utilidad, por lo cual $P(j_k \mid J, s)$ está bien definida cumpliendo SEP1b, es decir, $P(J \mid J, s) = \sum_{k=1}^{m} \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) \geq u(j_l),\ \forall j_l \in J\}, s) = 1$. Para mostrar esta última afirmación debe notarse que, por definición se tiene que, para $j_k \in J$ ,

$$P(j_k \mid J, s) = \\ \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) > u(j_l), j_l \in J, k \neq l\} \cup \left[\cup_{l=1,k\neq l}^{m} \{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) = u(j_l)\}\right], s),$$

y, como la medida de una unión disjunta de conjuntos es la suma de las medidas de los conjuntos, se obtiene

$$P(j_k \mid J, s) = \\ \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(i_k) > u(j_l), j_l \in J, k \neq l\}, s) + \mu^J(\cup_{l=1,k\neq l}^{m} \{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) = u(j_l)\}, s).$$

Por MUA2 el segundo sumando es igual a 0, con lo cual se tiene que

$$P(j_k \mid J, s) = \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(i_k) > u(j_l), j_l \in J, k \neq l\}, s),$$

Aplicando la definición de la probabilidad de un conjunto, resulta la siguiente equivalencia

$$P(J \mid J, s) = \sum_{k=1}^{m} P(j_k \mid J, s) = \sum_{k=1}^{m} \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) > u(j_l), j_l \in J, k \neq l\}, s) + \\ \mu^J(\{u \in \mathbb{R}^m \mid u(j_k) = u(j_l), \forall j_k, j_l \in J\}, s) = 1,$$

al añadir la probabilidad nula del conjunto disjunto donde la utilidad de las distintas alternativas coincide (por MUA2), con lo cual se cubre todas las posibles utilidades $u \in \mathbb{R}^m$, cuyo conjunto mide 1 por definición de medida de probabilidad.

◆

## 2. Representación de las Decisiones Agregadas de Elección entre Alternativas de una Población

Para facilitar el análisis de las decisiones de una población, es importante encontrar un SEP consistente con la hipótesis MUA que permita analizar las decisiones de elección de una población de individuos que maximizan sus utilidades aleatorias, es decir, las probabilidades de elección de cada alternativa, como provenientes de un individuo representativo que elige proporciones de cada una de ellas. Para ello, es necesario que las preferencias de los individuos tengan una estructura que permita “agregarlas” para representar las elecciones discretas de los individuos mediante las decisiones de consumo de este individuo “representativo” provenientes de la maximización de una “función de utilidad social”.

En este capítulo, a fin de tener un marco analítico suficientemete general, se asume que los individuos enfrentan tanto decisiones de elección de un bien de tipo discreto como decisiones de consumo de un conjunto de bienes de tipo continuo. En este contexto, se presenta, en primer lugar, se presentan las definiciones y propiedades de las funciones de utilidad directa y de utilidad indirecta, y se definen las probabilidades de elección de las alternativas. Luego, se define el concepto de función de utilidad social para una población a partir de las funciones de utilidad aleatoria de los individuos, y se presenta su construcción para el caso de funciones de utilidad aleatoria ingreso-aditivas. Posteriormente, se adopta el supuesto de que existen errores que afectan de manera aditiva la utilidad indirecta que reciben los agentes, y se muestra que es posible modelar las decisiones de una población mediante una función de utilidad social cuando se asume que la función de distribución de estos errores es de Valor Extremo.

## 2.1. Función de Utilidad Incluyendo Elección entre Alternativas de Bienes

A continuación, se presentan las propiedades de las funciones de utilidad aleatoria en el marco general de la teoría económica de decisiones del consumidor cuando las decisiones de los individuos abarcan tanto la elección de una alternativa de bienes de tipo discreto como las cantidades de consumo de bienes divisibles de tipo continuo. En este marco, a fin de utilizar la modelación de la utilidad aleatoria de la elección de alternativas presentada en la primera sección, se define el concepto de función de utilidad indirecta condicionada a la elección de una alternativa determinada de un bien discreto. Asimismo, se muestra que esta función satisface las propiedades estándar que, de acuerdo a la teoría económica, definen a la función de utilidad indirecta. Luego, se define la función de utilidad indirecta no condicionada, la cual indica el máximo nivel de utilidad que los individuos alcanzan decidiendo de manera óptima sus niveles de consumo de bienes divisibles y determina la alternativa que maximiza su utilidad. Por último, a partir de ella, se definen las probabilidades de elección de las alternativas.

***Definición.*** **Decisiones de Consumo**

Dado un individuo con determinadas características $s \in S$, entre las cuales está su nivel de ingreso $y \in \mathbb{R}$ (el cual constituye la característica más relevante en este caso) y el conjunto de elección es $I = \{i_1, ..., i_n\} \subset \mathbb{Z}^+$, las decisiones de consumo implican elegir

- Un vector $x \in \tilde{X} = \mathbb{R}^{l^+}$ de cantidades de bienes divisibles.
- Una alternativa $j \in I$ tiene un vector de atributos intrínsecos medidos $w_j \in W$ , siendo $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ un conjunto cerrado.

En este contexto, dadas las características individuales $s \in S$, una relación de preferencias $\tilde{\rho}$ sobre $(\tilde{X}, W, I)$ se define como un subconjunto $\tilde{\rho}$ de $(\tilde{X}, W, I) \times (\tilde{X}, W, I)$, tal que $(a, b) \in \tilde{\rho}$ si $a \succeq b$.

Se asume que las preferencias son racionales, y se denota con $\tilde{O}$ al conjunto de preferencias racionales.

***Definición.*** **Función de Utilidad para Elección entre Alternativas y Cantidades de Bienes Continuos**

Dadas las características individuales $s \in S$, para la relación de preferencias $\rho \in \tilde{O}$, se define una función de utilidad $\tilde{U} : \tilde{X} \times W \times I \rightarrow [0, 1]$ ($\tilde{U}$ es una generalización de la función u definida en la sección anterior), la cual posee las siguientes propiedades estándar de la teoría económica:

- SU1: Para cada $j \in I$, $\tilde{U}(\cdot, \cdot, j)$ es continua sobre $\tilde{X} \times W$.
- SU2: Para cada $w \in W$ y $j \in I$, $\tilde{U}(\cdot, w, j)$ es dos veces diferenciable sobre $\tilde{X}$
- SU3: Para cada $w \in W$ y $j \in I$, $\tilde{U}(\cdot, w, j)$ es creciente, $\partial\tilde{U}/\partial\tilde{x} \geq 0$ con $\mid \partial\tilde{U}/\partial\tilde{x} \mid > 0$ [8].
- SU4: Para cada $w \in W$ y $j \in I$, $\tilde{U}$ es diferenciable estrictamente cuasi-cóncava sobre $\tilde{X}$.[9]

[8] Es decir, $\partial\tilde{U}/\partial x_i \geq 0$, para $i = 1, 2, ...n$, y $\exists i'$ tal que $\partial\tilde{U}/\partial\tilde{x}_{i'} \geqq 0$

[9] Es decir, si $t \cdot \partial\tilde{U}(\tilde{x}, w, j)/\partial x = 0$ para $t \in \mathbb{R}^n$ y $t \cdot t = 1$, implica $t' \cdot [\partial^2\tilde{U}(\tilde{x}, w, j)/\partial\tilde{x}\partial\tilde{x}']t < 0$

Las propiedades de $\tilde{U}$ reflejan propiedades de las relaciones de preferencias[10], y son muy útiles para el análisis de las decisiones de consumo.

Ahora, utilizando la terminología presentada en el capítulo 1, supongamos que a cada alternativa $j \in I$ se le asocia, mediante la función $\xi : I \to Z$, con $Z = (R, Q, W)$, un vector $z_j = (r, q_j, w_j) = \xi(j)$ de atributos medibles, tal que

- $r \in R$ es un vector de precios para los bienes divisibles, siendo $R = \mathbb{R}^{l+}$.
- $q_j \in Q$ es el precio de la alternativa $j \in I$ , siendo $Q = \mathbb{R}^{+}$.

***Definición.*** **Función de Demanda Condicionada de Bienes Divisibles**

Dada la elección de una alternativa $j \in I$, cuyo precio y atributos se denotan como $q$ y $w$ respectivamente, con $q \in \mathbb{R}^{+}$, $w \in W$ y $r \in \mathbb{R}^{l+}$, se tiene la restricción presupuestaria $r \cdot x + q \leq y$, siendo $y \in \mathbb{R}^{+}$ el nivel de ingreso del individuo.

En este caso, con el fin de establecer la analogía con la modelación estándar de la teoría de la demanda, se expresa la restricción presupuestaria en función de $y - q$ como $r \cdot x \leq y - q$, y se asume $y - q > 0$.

Para la función de utilidad $\tilde{U}$, se define la función de demanda de los bienes divisibles condicionada $X : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{l^{+}} \times W \times I \to \mathbb{R}^{l^{+}}$ mediante

$$X(y - q, r, w, j; \tilde{U}) = \arg\max_{x} \left\{ \tilde{U}(x, w, j) \mid r \cdot x \leq y - q \right\} .$$

***Definición.*** **Función de Utilidad Directa Condicionada**

Dada la función de utilidad $\tilde{U}$ , se define la función de utilidad directa condicionada $U : I \to \mathbb{R}$ como $U(j; \tilde{U}) \equiv \tilde{U}(X(\xi(j), j; \tilde{U}), j)$.

Se denomina de utilidad “directa” porque expresa el nivel de utilidad alcanzado por el individuo por la elección de cada alternativa.

Ya que existe una mapeo desde $\tilde{U}$ hacia $U$, la modelación de la utilidad aleatoria de la elección de alternativas presentada en la primera sección se aplica en este contexto.

[10]Así, la propiedad SU1 se obtiene del supuesto de que las preferencias sobre $\tilde{X} \times W$ son continuas, es decir, la relación es preservada bajo límites (ver Proposición 3.C.1 de Mas-Colell et al. [18]). En relación a SU2, que $\tilde{U}(\cdot, w, j)$ sea creciente, se obtiene asumiendo que las preferencias sobre $\tilde{X}$ son monótonas (ver Definición 3.B.2 de Mas-Colell et al. [18]. Por último, SU3 implica que las preferencias sobre $\tilde{X}$ son estrictamente convexas (ver Definición 3.B.5 de Mas-Colell et al. [18].

***Definición.*** **Función de Utilidad Indirecta Condicionada**

Dada una función de utilidad $\tilde{U}$, se define la función de utilidad indirecta condicionada $V :\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{l+} \times W \times I \to \mathbb{R}$ mediante

$$V(y-q, r, w, j; \tilde{U}) = \max_{x} \left\{ \tilde{U}(x, w, j) \mid r \cdot x \leq y - q \right\} \ . \tag{2}$$

Se denomina de utilidad "indirecta" porque expresa el nivel de utilidad alcanzado por el individuo a partir de los precios de los bienes continuos, el ingreso del individuo, el precio de la alternativa elegida y los atributos correspondientes a la misma.

***Definición.*** **Propiedades Estándar de una Función de Utilidad Indirecta**

En general, en el caso estándar donde sólo se consume bienes divisibles, las propiedades UIB de una función de utilidad indirecta $\widetilde{V}(y, r)$, donde y es el ingreso y r el vector precios de los bienes de consumo, utilizadas en la teoría económica son las siguientes (Ver Proposición 3.D.3 de Mas-Colell et al. [18]):

- UIB1: $\widetilde{V}$ es continua.
- UIB2: $\widetilde{V}$ es homogénea de grado 0.
- UIB3: $\widetilde{V}$ es estrictamente creciente en $y$, es decir, si fuera diferenciable se tiene que $\partial\widetilde{V}(y, r)/\partial y > 0$.
- UIB4: $\widetilde{V}$ es no creciente en r. Es decir, si fuera diferenciable, se tiene que $\partial\widetilde{V}(y, r)/\partial r \leq 0$ .
- UIB5: $\widetilde{V}$ es cuasi-convexa, lo cual implica que el conjunto $\left\{(y, r) : \widetilde{V}(y, r) \leq \bar{V}\right\}$ es convexo para cualquier $\bar{V}$.

***Teorema 3.*** **La Función de Utilidad Indirecta Condicionada Satisface las Propiedades de una Función de Utilidad Indirecta**

Dados los supuestos SU, dados $y - q > 0$, $r \in \mathbb{R}^{l+}$, $w \in W$, $j \in I$ y $\tilde{U}$, la función $V(y - q, r, w, j; \tilde{U})$, respecto a sus dos primeros argumentos, tiene las siguientes propiedades (estándar de la teoría económica para una función de utilidad indirecta).

- UI1: $V$ es continua en $(y - q, r, w)$.
- UI2: $V$ es homogénea de grado 0 en $(y - q, r)$.

- UI3: $V$ es dos veces continuamente diferenciable en $(y-q, r)$.
- UI4: $V$ es estrictamente creciente en $(y-q)$, es decir, $\partial V(y-q, r, w)/\partial(y-q) > 0$.
- UI5: $V$ es diferenciable no creciente en r, es decir, $\partial V(y-q, r, w)/\partial r \leq 0$.
- UI5: $V$ es diferenciable estrictamente cuasi-convexa en r. [11].
- UI6: $V$ es cuasi-convexa en $(y-q, r)$, es decir, el conjunto $\left\{(y-q, r) : V(y-q, r) \leq \overline{V}\right\}$ es convexo para cualquier $\overline{V}$.

Demostración:

Mas-Colell et al. [18], sección 3.D.3, para la demostración general (sin las características de diferenciabilidad)[12]. Estas propiedades específicas UI se derivan, dada la definición de $V$, utilizando la equivalencia $V(y-q, r, w, j; \tilde{U}) = \tilde{U}(x(r, y-q), w, j)$, donde $x(r, y-q)$ representa la demanda de los bienes divisibles, la cual es continua respecto a $r$ y a $y-q$[13].

◆

En este contexto, se cumplirá también la identidad de Roy, la cual permite determinar la demanda de los bienes divisibles a partir de la función de utilidad indirecta condicionada.

***Lema.*** **Identidad de Roy para la Demanda de Bienes Divisibles**

Dados los supuestos SU, el máximo de $\tilde{U}$ sujeto a $r.x \leq y-q$ se consigue en un único vector $x = X(y-q, r, w, j; \tilde{U})$ que satisface

$$X(y-q, r, w, j; \tilde{U}) = -\frac{\partial V/\partial r}{\partial V/\partial y}$$

Demostración:

Mas-Colell et al. [18], capítulo 3, sección G.4. La propiedad UI5, derivada de SU4, establece la unicidad del vector de demanda (Ver parte iii de la Proposición 3.E.3 de Mas-Colell et al. [18]).

[11] Lo cual implica que dado $(y-q)$, el conjunto $\left\{r : V(y-q, r) \leq \bar{V}\right\}$ es estrictamente convexo para cualquier $\bar{V}$.

[12] Exceptuando la propiedad UI5.

[13] Ver Apéndice de capítulo 3 de Mas-Colell et al. [18]

◆

***Definición.*** **Utilidad Indirecta No Condicionada**

Si la elección se restringue al conjunto $J \in \mathscr{I}$, se define la función de utilidad indirecta no condicionada $V^* : \mathbb{R}^{m^+} \times \mathbb{R}^{1^+} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$V^*(y - q_J, r, w_J; J, \tilde{U}) = \max_{j \in J} V(y - q_j, r, w_j, j; \tilde{U}) = \max_{j \in J} v_j \ , \tag{3}$$

donde $y - q_J$ denota un vector con componentes $y - q_j$ y $w_J$ un vector con componentes $w_j$ para $j \in J$. Asimismo, $v_j = V(y - q_j, r, w_j, j; \tilde{U})$ denota el componente del vector $V$ correspondiente a la alternativa $j \in J$ .

Esta función se llama “no condicionada” porque expresa el nivel de utilidad que alcanza el individuo mediante la elección de la alternativa que le da mayor utilidad condicionada considerando que sus decisiones de consumo de bienes divisibles son óptimas.

***Lema.*** **Unicidad del Valor de la Utilidad Indirecta No Condicionada**

Por MUA2 para casi todo $q_J$, excepto para un conjunto cerrado con medida de Lebesgue igual a 0, el máximo de (3) es alcanzado en una única alternativa. De este modo, en el conjunto abierto para el cual $k \in J$ es el máximo de $V^*$, se tiene que $V^*(y - q_J, r, w_J; J, \tilde{U}) = V(y - q_k, r, w_k, k; \tilde{U})$ y, $V^*$comparte las propiedades UI de $V$ para casi todo vector de precios.

***Definición.*** **Demanda de Alternativas**

Dado un conjunto de alternativas $J \in \mathscr{I}$, para un individuo con características $s \in S$ y función de utilidad $\tilde{U}$, por MUA2, para casi todo $y - q_J$, la demanda $D(j \mid J, s; \tilde{U})$ para la alternativa $j \in J$ viene dada por la identidad de Roy como

$$D(j \mid J, s; \tilde{U}) \equiv -\frac{\frac{\partial V^*}{\partial q_j}}{\frac{\partial V^*}{\partial y}} \equiv \begin{cases} 1 & si\, para\, k \in J,\ v_j \geq v_k, \\ 0 & en\, otro\, caso. \end{cases} \tag{4}$$

***Definición.*** **Probabilidades de Elección de Alternativas**

La probabilidad de elección de la alternativa $j \in J$ para un individuo con características $s \in S$ es la medida de las funciones de utilidad donde otorga mayor utilidad

$$P(j \mid J, s) = E_{U|s} D(j \mid J, s; \tilde{U})) = \int D(j \mid J, s; \tilde{U}))\mu(d\tilde{U} \mid J, s) =$$

$$= \mu(\Big\{\tilde{U} \in \mathbb{R}^n \mid \upsilon_j \geq \upsilon_k, k \in J\Big\} \mid I, s) \tag{5}$$

donde $E_{U|s}$ es el operador de esperanza sobre el espacio de probabilidad $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n, \mu(. \mid J, s))$ de las funciones de utilidad de la población con características $s \in S$[14].

## 2.2. Función de Utilidad Social

En esta parte, se define la función de utilidad social, basada en consumos fraccionarios de las alternativas, a partir de las funciones de utilidad indirecta de un conjunto de individuos con características determinadas, como aquélla para la cual los consumos fraccionarios que maximizan la utilidad coinciden con las probabilidades de elección de los individuos; es decir, esta función permite representar las preferencias de una población de individuos como provenientes de las decisiones de un "agente representativo" que maximiza su utilidad. Para la construcción de la función de utilidad social, se asume que las función de utilidad indirecta condicionada de los individuos es del tipo aditivamente separable, y se muestra que esa forma funcional cumple con las propiedades estándar de la funciones de utilidad indirecta. Por último, se define, a partir de esta función, una función de utilidad social que cumple la condición requerida.

***Definición.*** **Consumos Fraccionarios**

El conjunto $\triangle$ de todos los vectores $\delta$ de posibles consumos fraccionarios de las alternativas se define como

$$\triangle = \Big\{\delta \in \mathbb{R}^I \mid \delta_j \geq 0, \textstyle\sum_{j=1}^m \delta_j = 1\Big\}.$$

Si se restringue las alternativas al conjunto $J$, el conjunto de los posibles consumos fraccionarios $\triangle_J$ será

$$\triangle_J = \{\delta \in \triangle \mid \delta_j = 0,\, i \notin J\}.$$

La función de utilidad $\overline{U}(x, \delta, s)$ basada en consumos fraccionarios $\delta \in \triangle$, estará dada por

$$\overline{U} : \tilde{X} \times \triangle \times S \rightarrow [0, 1].$$

[14]Se mantiene la notación de la medida $\mu(\cdot \mid J, s)$ para las funciones $\tilde{U}$ cuando se restringe las alternativas a $J$ entendiéndose que se aplica el mapeo existente entre ellas y las funciones U.

Por lo tanto, para $J \in \mathscr{I}$, $r \geqslant 0$, $y - q_J \geqslant 0$, $w_J \in W$ con $\xi(j) = (y - q_j, r, w_j)$, la función de utilidad indirecta $\overline{V}$ para consumos fraccionarios de las alternativas será

$$\overline{V}(y - q_J, r, w; J, s) = \max_{x,\delta} \left\{ \overline{U}(x, \delta, s) \mid x \in X, \delta \in \triangle_J, r \cdot x + q_J \cdot \delta \leq y \right\} . \tag{6}$$

Sobre la base de estos conceptos, se define a continuación la función de utilidad social a partir de las funciones de utilidad aleatorias de los individuos.

***Definición.*** **Función de Utilidad Social**

Dados una población de individuos con características $s \in S$, un conjunto de alternativas $J \in \mathscr{I}$, y un conjunto de consumos fraccionarios $\triangle_J$, $\overline{U}(x, \delta, s)$ será una función de utilidad social y $\overline{V}$ una función de utilidad social indirecta si los consumos fraccionarios de las alternativas son iguales a las probabilidades de elección discreta de cada individuo

$$P(j \mid J, s) = -\frac{\frac{\partial \overline{V}}{\partial q_j}}{\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}} \tag{7}$$

A fin de dar condiciones bajo las cuales se pueda obtener una función de utilidad social, McFadden[22] plantea el supuesto de que las funciones de utilidad indirecta de los individuos son del tipo aditivamente separable.

***Definición.*** **Función de Utilidad Indirecta Condicionada Aditivamente Separable**

La función $V(y - q, r, w, j; \tilde{U})$ de utilidad indirecta condicionada es aditivamente separable si tiene la forma

$$V(y - q, r, w, j; \tilde{U}) = \frac{y - q - \alpha(r, w, j; \tilde{U})}{\beta(r)} , \tag{8}$$

donde $y > q + \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})$ y $\alpha$ y $\beta$ son funciones continuas homogéneas de grado 1, cóncavas y no decrecientes en r.

***Definición.*** **Función de Gasto Condicionada**

En este contexto, se define la función de gasto condicionada $y(q, r, \bar{u}; \tilde{U}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{l+} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, la cual indica el nivel de gasto mínimo que se requiere para lograr un nivel de utilidad $\bar{u}$ con valores determinados de q y r, como

$$y(q, r, \bar{u}; \tilde{U}) = q + \alpha(r, w, j; \tilde{U}) + \bar{u} \cdot \beta(r) \ . \tag{9}$$

Dados los supuestos sobre las funciones $\alpha$ y $\beta$, la función de gasto $y(q, r, \bar{u}; \tilde{U})$, definida en (9), cumple las siguientes propiedades PG:

- $y$ es estrictamente creciente en $\bar{u}$.
- $y$ es continua respecto a r y en $\bar{u}$.
- $y$ es cóncava en r para $\bar{u} \geq 0$, ya que $\alpha$ y $\beta$ son funciones cóncavas
- $y$ es no decreciente y homógenea de grado 1 en r.

***Teorema 4.*** **La Función de Utilidad Indirecta Condicionada Aditivamente Separable Satisface las Propiedades de una Función de Utilidad Indirecta**

Las propiedades PG de la función de gasto garantizan que la función de utilidad indirecta condicionada aditivamente separable $V(y - q, r, w, j; \tilde{U})$ definida en (8) cumple las propiedades básicas estándar UIB de una función de utilidad indirecta.

Demostración:

Se aplica la Proposición 3.H.1 de Mas-Colell et al. [18]. [15]

tomando en cuenta que solamente existe un vector de bienes divisibles que maximiza la utilidad

◆

El cumplimiento de las propiedades UIB, aunque no sean tan específicas como las propiedades UI, permite justificar el uso de la forma funcional ingreso-aditiva para modelar las utilidades indirectas de los individuos que eligen alternativas de un bien discreto.

[15]Considerando una función de gasto $\tilde{y}(r, \bar{u}; \tilde{U}) = y(q, r, \bar{u}; \tilde{U}) - q = \alpha(r, w, j; \tilde{U}) + \bar{u} \cdot \beta(r)$, correspondiente a la definición estándar de la función de gasto para la función $V$. También puede verse la explicación de la relación entre las funciones de gasto y de utilidad indirecta presentada por Torregrosa[33].

***Definición.*** **Función de Utilidad Indirecta No Condicionada**

La función $V$, definida en (8), está asociada a una función $V^*$ de utilidad indirecta no condicionada de la forma

$$V^*(y - q_J, r, w_J; J, \tilde{U}) = \max_{j \in J} \frac{y - q_j - \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})}{\beta(r)} \ . \qquad (10)$$

donde $q_j$ y $w_j$ representan el precio y los atributos de la alternativa $j \in I$.

***Teorema 5.*** **Caracterización de la Función de Utilidad Social Indirecta**

Para una población con características $s \in S$ que elige alternativas del conjunto $J \in \mathscr{I}$, y tiene funciones de utilidad indirecta condicionadas $V(y - q_j, r, w_j, j; \tilde{U})$ definidas de acuerdo a (8), la función $\overline{\overline{V}} : \mathbb{R}^{m^+} \times \mathbb{R}^{1^+} \times \mathbb{R}^{p^+} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{\overline{V}}(y - q_J, r, w_J; J, s) = E_{U|s} \max_{j \in J} V(y - q_j, r, w_j, j; \tilde{U}) \, .$$

constituye una función de utilidad indirecta social.

<u>Demostración</u>:

En este caso se tiene que

$$\overline{\overline{V}}(y - q_J, r, w_J; J, s) = \frac{1}{\beta(r)} \left\{ y + E_{U|s} \max_{j \in J} [-q_j - \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})] \right\} \ .$$

Se define la función $G : \mathbb{R}^{m^+} \times \mathbb{R}^{1^+} \times \mathbb{R}^{p^+} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$G(q_J, r, w_J; J, s) = E_{U|s} \max_{j \in J} [-q_j - \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})] \ . \qquad (11)$$

G es convexa porque los términos $-q_i - \alpha(r, w, i; U)$ son convexos en $(q_J, r)$; el máximo de funciones convexas es convexo; y una combinación lineal no negativa de funciones convexas es convexa. Entonces, para un nivel de utilidad $u \geq 0$, $\overline{\overline{V}} = \frac{1}{\beta(r)} \{y + G(q_J, r, w_J; J, s)\}$ está asociada a una función de gasto $\overline{y}$ cóncava, dada por $\overline{y}(q, r, u) = u\beta(r) - G(q_J, r, w_J; J, s)$. Dado que esta función cumple las propiedades PG ya mencionadas, por el Teorema 5, $\overline{\overline{V}}$ es una función de utilidad indirecta.

Por otro lado, aplicando la identidad de Roy para la utilidad indirecta $V$ definida en (8), tenemos que la demanda de las alternativas está dada por

$$D(j \mid \tilde{U}; J, s) = -\frac{\frac{\partial V^*}{\partial q_j}}{\frac{\partial V^*}{\partial y}} = -\frac{\frac{\frac{\partial}{\partial q_j} \max_{i \in J} [y - q_i - \alpha(r, w_i, i; \tilde{U})]}{\beta(r)}}{\frac{1}{\beta(r)}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_j} \text{máx}_{j\in J}[-q_j - \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})].$$

En este contexto, usando (5) para la definición de $G$, las probabilidades de elección vienen dadas por

$$P(j \mid J, s) = E_{U|s} D(j \mid J, s; \tilde{U}) = -E_{U|s} \frac{\partial}{\partial q_j} \text{máx}_{j\in J}[-q_j - \alpha(r, w_j, j; \tilde{U})] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_j} E_{U|s} \text{máx}_{j\in J}[-q_j - \alpha(r, w, j; \tilde{U})].$$

Luego, multiplicando y dividiendo por $1/\beta(r)$, se obtiene

$$P(j \mid J, s) = -\frac{\frac{\partial G(q_J, r, w_J;, J, s)}{\partial q_j} \cdot \frac{1}{\beta(r)}}{\frac{1}{\beta(r)}} = -\frac{\frac{\partial \overline{V}}{\partial q_j}}{\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}}. \tag{12}$$

La ecuación (12) muestra que $\overline{\overline{V}}$ cumple (7) y, por lo tanto, constituye una función de utilidad social indirecta que produce un SEP.

◆

En este caso, la función $\overline{U}$ asociada a $\overline{V}$ es una función de utilidad social directa que tiene la siguiente forma $\overline{U}(x, \delta, s) = \text{ínf}_{y,q,r,J} \left\{ \overline{V}(y - q_J, r, w_J, J, s) \mid r \cdot x + q_J.\delta \leq y,\ J \in \mathscr{J} \right\}$ con $\delta \in \triangle_J$. Es decir, $\overline{U}$ es la menor utilidad indirecta posible, dadas las características $s \in S$ y los consumos $x$ y $\delta \in \triangle_J$, cuando se elige los precios, el ingreso y el conjunto de alternativas de elección, sujetándose a la restricción $r \cdot x + q_J.\delta \leq y$.

De este modo, la distribución observada de la demanda de las alternativas se analiza como si hubiera sido generada de una población con gustos comunes iguales, y se refleja en las decisiones de un agente representativo que realiza consumos fraccionarios de las alternativas determinados por una función de utilidad social $\overline{V}$.

## 2.3. Relación entre las Hipótesis de Utilidad Aleatoria y la Distribución de los Errores que Afectan la Utilidad

En esta sección se presenta la hipótesis de Maximización de la Utilidad Aleatoria Ingreso-Aditiva (MUAIA) y se muestra que es consistente con el modelamiento de las decisiones de elección de alternativas de los individuos mediante una función de utilidad social (indirecta) cuando se asume que las funciones de utilidad individuales son afectadas por shocks aleatorios que tienen una función de distribución de Valor Extremo.

Para ello, en primer lugar, se definen las funciones de excedente social asociadas a las funciones de utilidad social y sus propiedades. Luego, se demuestra que, bajo la hipotesis MUAIA, se puede definir una función de excedente social a partir de las distribuciones de los errores que afectan la utilidad y, a partir de ella, generar una función de utilidad social (indirecta). Asimismo, se demuestra que para cualquier función de excedente social existe una forma MUAIA de preferencias asociada; además, cualquier función de excedente social genera una función de utilidad social indirecta.

Posteriormente, se demuestra que, dada la hipótesis MUA (presentada en la sección 1.2), si la función de distribución de los errores es de Valor Extremo, se cumple la hipotesis MUAIA, ya que existe una función de excedente social asociada a esta función de distribución, la cual genera una función de utilidad social indirecta.

Por último, se determinan las probabilidades de elección de las alternativas bajo los supuestos adoptados, y se muestra que se pueden analizar mediante un modelo tipo Logit Multinomial.

### 2.3.1. Maximización de la Utilidad Aleatoria Ingreso-Aditiva, Excedente Social y Utilidad Social Indirecta

***Hipótesis.*** **Maximización de la Utilidad Aleatoria Ingreso-Aditiva (MUAIA)**

Las preferencias tienen una forma MUAIA si satisfacen MUA y las funciones de utilidad indirecta que las representan son aditivamente separables de la forma (8). Además, dado $J$ existe un vector aleatorio $\varepsilon_J$ con componentes $\varepsilon_j = -\alpha(r, w_j, j; U)$, $\forall j \in J$, con función de distribución acumulada multivariada inducida por la medida de probabilidad sobre el conjunto de funciones de utilidad, $F(\varepsilon_J, r, w_J, J, s)$, y con función de densidad $f(\varepsilon_J, r, w_J, J, s)$.

Los valores de $\varepsilon_J$ determinan la distribución de preferencias entre los individuos dadas las características $s \in S$ (McFadden [22]).

***Definición.*** **Función de Excedente Social (ES)**

Dado $s \in S$, una función $G(q_J, r, w_J; J, s)$, para un conjunto de elección $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$, es de excedente social si cumple las siguientes propiedades:

- ES1: $G$ es una función de valor real de $q_J \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}^n$ con $r \in \mathbb{R}^{l+}$, $w_J \in \mathbb{R}^m$.
- ES2: G es una función linealmente homogénea positiva convexa de $(q_J, r)$.

- ES3: G tiene la propiedad aditiva $G(q_J+\theta,r,w_J;J,s) = G(q_J,r,w_J;J,s)-\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, donde $q_J+\theta$ denota un vector con componentes $q_j+\theta$.

- ES4: Las derivadas de $G$ con respecto a $q_J$ existen, son no positivas independientemente del orden de diferenciación, y satisfacen que

$$G(q_J,r,w_J;J,s)-G(0_J,r,w_J;J,s)=\int_0^1 (d/dt)G(\psi(t),r,w_J;J,s)dt \ ,$$

  donde $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ es cualquier camino tal que $\psi(0)=0_J$ y $\psi(1)=q_J$

- ES5: $\lim_{q_j\to-\infty} G_j(q_J,r,w_J,J,s)=-1$ para $j\in J$, donde $G_j$ denota la derivada de $G$ respecto a su j-ésimo argumento.

- ES6: Si $J=\{i_1,..,i_m\}\in\mathscr{I}$ y $J'=\left\{j_1',..,j_m',...,j_{m+n}'\right\}\in\mathscr{I}$ satisfacen $(q_{j_k},w_{j_k})=(q_{j_k'},w_{j_k'})$ para $k=1,...,m$, entonces

$$G(q_J,r,w_J;J,s)=G((q_J,+\infty,...,+\infty),r,w_{J'};J',s) \ .$$

A continuación, se enuncia un teorema que muestra la relevancia de las propiedades de una función de excedente social en la generación de una función de utilidad indirecta social. Para ello se definen primero el Sistema de Elección Probabilístico Invariante a Traslaciones (SEPIT).

***Definición.* Sistema de Elección Probabilístico Invariante a Traslaciones (SEPIT)**

Un Sistema de Elección de Probabilístico Invariante a Traslaciones (SEPIT) consiste en un SEP con probabilidades de elección $P(j\mid J,s)$ dadas por funciones $\pi_j(q_J,r,w_J,J,s)$,$\forall j\in J$, que cumplen las siguientes propiedades denotadas SPT:

SPT1: Las funciones $\pi_j$ están definidas para $j\in J=\{1,..,m\}\in\mathscr{I}$, $q_J\in\mathbb{R}^m$, $r\in\mathbb{R}^{l+}$ , $w_J\in W^m$, y $s\in S$.

SPT2: $\pi_j$ es homogénea de grado 0 en $(q_J,r)$.

SPT3: $\pi_j(q_J+\theta,r,w_J,J,s)=\pi_j(q_J,r,w_J,J,s)-\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$.

SPT4: $\lim_{q_j\to-\infty}\pi_j(q_J,r,w_J,J,s)=1$ para $j\in J$.

SPT5: Las derivadas cruzadas de $\pi_j$ respecto a los componentes de $q_J$ distintos a $q_j$ son no negativas y satisfacen

$$\pi_j(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{-\infty}^{q_2} ... \int_{-\infty}^{q_m} \pi_{1,2,...m}(q_1, \hat{q}_2, ...\hat{q}_m, r, w_J, J, s) d\hat{q}_2 ... d\hat{q}_m,$$

con condiciones análogas para $\pi_2, ...\pi_m$.[16]

SPT6: Las derivadas parciales son independientes del orden de diferenciación, es decir, $\pi_{ji}(q_J, r, w_J, J, s) = \pi_{ji}(q_J, r, w_J, J, s)$,$\forall i, j \in J$,

donde $\pi_{i,j}$ es la derivada parcial de $\pi_i$ respecto al componente $j$.

SPT7: Si $J = \{i_1, .., i_m\} \in \mathscr{B}$ y $J' = \left\{j'_1, .., j'_m, ..., j'_{m+n}\right\} \in \mathscr{B}$ satisfacen $(q_{j_k}, w_{j_k}) = (q_{j'_k}, w_{j'_k})$ para $k = 1, ..., m$, entonces

$$\pi_k(q_J, r, w_J, J, s) = \pi_k((q_J, +\infty, ..., +\infty), r, w_{J'}, J', s).$$

***Teorema 6.*** **Relación entre ES, SEPIT y MUAIA**

i. Si MUAIA se cumple para utilidades individuales indirectas del tipo $v_j = (y - q_j + \varepsilon_j)/\beta(r)$, $\forall j \in J$, y $F(\varepsilon_J, r, w_J, J, s)$ y $f(\varepsilon_J, r, w_J, J, s)$ son las funciones de distribución y de densidad de $\varepsilon_J$, respectivamente, entonces existe una función $G(q_J, r, w_J, J, s)$ de excedente social, tal que

$$G(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(0_J + t, r, w_J, J, s) - F(q_J + t, r, w_J, J, s)] dt \ . \tag{13}$$

Además, la función $\overline{V}$ definida a partir de $G$ mediante

$$\overline{V}(y - q_J, r, w, J, s) = \frac{(y + G(q_J, r, w_J, J, s))}{\beta(r)} \tag{14}$$

es una función de utilidad indirecta social, ya que las probabilidades de elección de las alternativas asociadas con MUAIA

$$P(j \mid J, s) = \mu(\left\{\tilde{U} \in R^n \mid v_j \geqq v_k, k \in J\right\} \mid J, s)$$

satisfacen las propiedades SEPIT y cumplen con

$$P(j \mid J, s) \equiv \pi_j(q_J, r, w_J, J, s) = -G_j(q_J, r, w_J, J, s) \tag{15}$$

donde $G_j$ denota la derivada de $G$ respecto a $q_j$ (es decir, se cumple la ecuación (12)).

ii. Si $G(q_J, r, w_J, J, s)$ es una función de excedente social, entonces existe una forma MUAIA para las preferencias, tal que G cumple con (13) y la función $\overline{V}$ asociada a G, definida mediante (14), es una función de utilidad indirecta social. Además, la ecuación (15) define un SEP que satisface las propiedades SPT.

[16] Se denota con $\pi_{1,2,...,m}$ la derivada parcial de $\pi_1$ respecto a $(q_2, ..., q_m)$.

iii. Si $P(j \mid J,s) \equiv \pi_j(q_J, r, w_J, J, s)$ es un SEP que satisface SPT, existe una forma MUAIA y una función de excedente social que satisface ES y cumple (13), la cual genera una función de utilidad indirecta social mediante (14), y cumple (15).

Demostración:

McFadden [22], apéndice.

Para ver que las probabibilidades $P(j \mid J,s)$ conforman un SEP, se debe notar que ES4 implica que las probabilidades definidas por (15) son positivas. Además, por ES3 se tiene $\sum_{j=1}^{m} G_j(q_J, r, w_J, J, s) = -1$, por lo cual $\sum_{j=1}^{m} P(j \mid J,s) = \sum_{j=1}^{m} -G_j(q_J, r, w_J, J, s) = 1$.

La importancia de iii. radica en que el cumplimiento de las propiedades SPT es normalmente fácil de verificar para el caso de SEP empíricos, con lo cual se tiene un instrumento para examinar su consistencia con una forma MUAIA[17].

***Lema.* Expresión de la Función de Excedente Social a Partir de la Distribución de los Errores**

Si se cumple MUAIA y F tiene primeros momentos finitos, la función definida por la ecuación (11) es igual a

$$G(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \max_{j \in J}(\varepsilon_j - q_j) - \max_{j \in J} \varepsilon_j \right\} f(\varepsilon_J) d\varepsilon_J \,. \tag{16}$$

Además, la función $G'(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\max_{j \in J}(\varepsilon_j - q_j)\} f(\varepsilon_J) d\varepsilon_J$ . es de Excedente Social (cumple las propiedades ES).

Demostración: McFadden [22], apéndice (Lemas 5.1 y 5.2 ).

◆

En este caso, la función G definida (16) genera una función de utilidad social indirecta mediante (14). Aunque, esta función no permite realizar comparaciones de bienestar cuando cambian atributos distintos al precio[18], por lo cual McFadden[22] propone definiciones alternativas que satisfacen ES y que sí lo permiten, específicamente la siguiente[19]

[17] Ver explicación en el Anexo 1.

[18] Por definición (13) normaliza su valor a 0 para $q_J$ para cualquier vector de atributos $w_J$.

[19] Ver explicación del Anexo 2.

$$G(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \max_{j \in J} (\varepsilon_j - q_j) \right\} f(\varepsilon_J) d\varepsilon_J \, . \tag{17}$$

La función G definida en (17) constituye una expresión analítica del excedente del consumidor que permite medir cambios en bienestar, manteniendo constantes los precios de los bienes continuos, tanto desde el punto de vista de la variación equivalente y la variación compensada (ya que los efectos en riqueza están ausentes)[20], ya que, para cualquier camino $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ con $\psi(0) = 0_J$ y $\psi(1) = q_J$, se tiene que

$$G(q_J, r, w_J, J, s) \equiv \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=m} \pi_i(\psi(t)_J, r, w_J, J, s)\psi_i'(t)dt,$$

la usual suma de áreas debajo de las curvas de demanda.

**Interpretación General de la Hipótesis MUAIA**

En cuanto al rol de $q_J$, es importante indicar que, aunque $q_j$ ha sido interpretado como el precio de una alternativa j y la función (8) como una función de utilidad indirecta resultante de la maximización de una utilidad (homotética trasladada) sujeta a una restricción presupuestaria, se puede desarrollar una interpretación alternativa más general de esta función como una función de utilidad aditivamente separarable y lineal en atributos físicos de las aternativas, la cual es de utilidad para sustentar el desarrollo de trabajos econométricos basados en este tipo de modelos.

Para ello, se postula una forma general de la utilidad, basada en (8), $u_j = \frac{-q_j - \alpha(r, w_j, j, s; \tilde{U})}{\beta(r,s)}$

En este caso, $q_j$ se puede interpretar como algún atributo discreto de la alternativa j, y $w_j$ representar un vector de los atributos restantes de la alternativa j incluyendo su precio. Además, se puede asumir que $\alpha$ y $\beta$ dependen de las características s de los individuos incluyendo su ingreso, es decir, $s = (y, s')$ donde $s'$ representa los atributos distintos al ingreso.

En este caso, el Teorema 6 puede aplicarse para establecer la existencia de una función de utilidad social que cumple las propiedades ES y SP, excepto las propiedades de homogeneidad ES2 y SP2, y que satisface (13), y de un sistema de elección probabilístico que satisface (15).

De acuerdo a McFadden [22], si se añade supuestos *ad hoc* sobre $\alpha$ y $\beta$, la función generada mediante (8) será de utilidad indirecta, y, por lo tanto, existirá una función

[20] Ver Sección 3.1 de Mas-Colell et al. [18] sobre evaluación de las variaciones en el bienestar de cambios en la economía

dual de utilidad directa asociada[21].

Esta interpretación permite modelar la dependencia de las elecciones respecto a los precios y el ingreso de una forma muy general. Sin embargo, requiere que los cambios en los atributos $q_J$ ocurran sin que los otros atributos varíen, y que, dada la estructura aditivamente separable, que los ratios marginales de sustitución entre atributos distintos de $q_J$ no dependen del nivel de $q_J$.

Asimismo, esta reinterpretación puede ser adaptada también para contextos no económicos, en los cuales $(r, s)$ puede ser reinterpretada como características individuales, y $(q_j, w_j)$ como atributos de la alternativa j.

Por último, también se puede adoptar una forma funcional más simple, en la cual sólo en un valor escalar caracterice la utilidad cada alternativa, mediante las siguientes hipótesis.

### 2.3.2. Hipótesis Adicionales

***Hipótesis.*** **Maximización de Utilidad Aleatoria Aditiva Simplificada (MUAIAS)**

Se cumple la hipótesis MUAIA, y los niveles de utilidad (indirecta) dados por el vector $u_J = (u_1, .., u_m)$ de valores aleatorios de las utilidades de las alternativas, está dado por $u_J = -q_J + \varepsilon_J$ .

En este caso, dadas las características $s$, la función de distribución del vector aleatorio $\varepsilon_J$ determina la distribución de $u_J$ (dado que los valores de $q_J$ son no aleatorios), y se denota $F(\varepsilon_J, z_J; J, s)$ y su función de densidad como $f(\varepsilon_J, z_J; J, s)$.

***Hipótesis.*** **Maximización de Utilidad Aleatoria Aditiva Lineal (MUAAL)**

Dado $s \in S$, el vector $z_J = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m$ de atributos de las alternativas del bien disponibles, se asume que la alternativa j tiene asociada una utilidad $u_j = \tilde{\beta}' z_j + \varepsilon_j$, donde $z_j$ es un vector columna de atributos, $\tilde{\beta}$ es un vector de ponderaciones que refleja las preferencias comunes de los individuos de la población, y $\varepsilon_j$ el componente j del vector aleatorio $\varepsilon_J = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \in \mathbb{R}^m$.

[21] Específicamente, esta función cumplirá las propiedades UI del Teorema 3, para cualquier valor real de $q_j$, cuando $\beta(r, s)$ sea una constante (positiva) y $\alpha(r, w_j, j, s; \tilde{U})$ es una función cuasi-cónvava y homogénea de grado 0 en r y el componente ingreso de s, es doblemente diferenciable en $(r, y)$, tiene $\frac{\partial \alpha}{\partial y} < 0$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial r} \geqq 0$, y es diferenciable estrictamente cuasi-cóncava (ver McFadden [22], p. 215).

De acuerdo a McFadden [22][22] cualquier función de utilidad continua (cuya utilidad indirecta asociada también es continua) se puede aproximar mediante una especificación de forma lineal apropiada sobre un conjunto compacto (cerrado y acotado) para cualquier nivel deseado de precisión. El uso de esta hipótesis es muy útil en las aplicaciones econométricas para análisis de los determinantes de las elecciones de compra observadas en un caso específico[23].

En este caso, $z_J$ es función de los datos $(q_J, w_J, r)$. La condición de que la utilidad indirecta asociada a $u_J$ sea homogénea de grado 0 en los precios $(q_J, r)$ requiere que $z_J$ sea homogénea de grado 0 en $(q_J, r)$.

Cada alternativa de elección $j \in J$ tiene un valor asociado $q_j = -\beta' z_j$[24].

La probabilidad de que una alternativa $j \in J$ sea elegida se escribirá $P(j \mid z_J, s)$.

### 2.3.3. Distribución de Valor Extremo

A continuación se presenta las principales características de las distribución de valor extremo para los errores $\varepsilon_J$, la cual se utiliza para construir la función de excedente social y, a través de ella, definir la función de utilidad social.

***Definición.*** **Modelo de Valor Extremo Generalizado (VEG)**

Dado $s \in S$, un modelo de valor extremo generalizado mediante la función $H(y_J; z_J, s)$ para conjuntos de elección $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$ con $z_J \in Z$ dados, que satisface las siguientes propiedades[25]:

- VEG1: $\forall y_J \in \mathbb{R}^m$, $H(y_J; z_J, s) \geq 0$ y es homogénea de grado 1.
- VEG2: $\forall j = 1, ..., m$ , $\lim_{y_j \to \infty} H((y_1, ..., y_m); z_J, s) = +\infty$.
- VEG3: Para cualquier secuencia $(j_1, ..., j_k)$ de $J$, $\partial^k H / \partial y_{j_1} ... \partial y_{j_k} \geq 0$ si k es impar, y $\partial^k H / \partial y_{j_1} ... \partial y_{j_k} \leq 0$ si k es par.
- VEG4: Si $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$ y $J' = \left\{j'_1, .., j'_m, ..., j'_{m+n}\right\} \in \mathscr{I}$ satisfacen $z_{j_k} = z_{j'_k}$ para $k = 1, ..., m$, entonces $H(y_J; z_J, s) = H((y_J, 0, ..., 0); z_{J'}, s)$.

[22]Ver nota 26.

[23]Incluso $z_J$ puede incorporar una variable dummy (nominal) específica para cada alternativa, por lo cual el componente correspondiente de la puede ser interpretado como la contribución a la utilidad de atributos no observables de la alternativa.

[24]Se mantiene la notación aunque ya no representa solamente al precio de la alternativa.

[25]McFadden [21, 22]

***Definición.*** **Distribución de Valor Extremo Gumbel (Tipo I)**

Una variable aleatoria $N \in \mathbb{R}$ tiene una distribución de Valor Extremo Gumbel (Tipo I) con parámetros $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ si su función de distribución es

$$F_{\alpha\beta}(\eta) = exp(-e^{\frac{\alpha-\eta}{\beta}}),\ \eta \in \mathbb{R}\ .$$

En este caso, el valor medio de $N$ es $\alpha\gamma + \beta$, donde $\gamma$ es la constante de Euler ($\gamma \approxeq 0{,}577215665$), y su varianza es $\frac{\beta^2\pi}{6}$.

La distribución $F_{01}(k) = exp(-e^{k})$, denominada de Gumbel, es la distribución asintótica o límite del valor máximo normalizado de un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (Teorema de Fisher y Tippet) cuyas funciones de distribución pertenecen a su dominio de atracción[26].

***Teorema 7.*** **Función de Distribución de Probabilidad Asociada a Modelos de Valor Extremo Generalizado**

Dado un conjunto de elección $J = \{j_1, .., j_m\} \in \mathscr{I}$, si H satisface las propiedades VEG, la función

$$F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = exp(-H(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_m}; z_J, s) \tag{18}$$

es una función de distribución multivariada de Valor Extremo Gumbel para el vector aleatorio $\varepsilon_J$ .

Demostración:

Siguiendo a McFadden[22], primero se demuestra que F es una distribución de probabilidad multivariada y, luego, que es de valor extremo.

a. Demostración de que F es una distribución de probabilidad multivariada.

Para que F sea una función de distribución multivariada F debe cumplir las siguientes propiedades:

i. $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = 0$ y $\lim_{\varepsilon_J \to \infty} F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = 1$

ii. F es monótona no decreciente. Por lo cual su derivada $\frac{\partial^m F(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m; z_J, s)}{\partial\varepsilon_1 ... \partial\varepsilon_m}$, denotada por $f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s)$, si existe, será una función no negativa, $\forall \varepsilon_J \in \mathbb{R}^m$.

iii. F es continua por la derecha.

[26] La derivación y características de este tipo de distribución se puede consultar en Embrechts [10] y Gumbel[12].

Para demostrar i. se observa que, por VEG2, $\forall j = 1, ..., J$, $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = \lim_{\varepsilon_j \to -\infty} exp(-H(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_m}; z_J, s)) = exp(-\infty) = 0$.

Además $\lim_{\varepsilon_J \to \infty} F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = \lim_{l \to \infty} F(\varepsilon_1 + l, ..., \varepsilon_m + l; z_J, s) =$

$= \lim_{l \to \infty} exp(-H(e^{-\varepsilon_1 + l}, ..., e^{-\varepsilon_m + l}; z, s)) = exp(\lim_{l \to \infty} -e^{-l} H(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_m}; z_J, s)) = exp(0) = 1$.

Para ii. se puede usar una demostración por inducción a partir de VEG3. Para esto se define recursivamente una secuencia $\{Q_i\}$ como $Q_1 = H_1$, y $Q_k = Q_{k-1} H_k - \partial Q_{k-1} / \partial y_k$, donde $H_k$ denota la derivada de $H$ respecto a su k-ésimo argumento, por lo cual $Q_k$ es la suma de términos que son productos de derivadas cruzadas de $H$ de varios órdenes. Si se supone que cada sumando en $Q_{k-1}$ es no negativo, entonces $Q_{k-1} H_k$ es no negativo, dado que $H_k \geq 0$ por VEG1. Además, cada término en $\partial Q_{k-1} / \partial y_k$ es no positivo dado que una las derivadas dentro de cada sumando ha crecido en orden, cambiando de par a impar o viceversa, y por tanto, cambiando de signo dado el supuesto VEG3. De este modo, cada término en $Q_k$ es no negativo.

Por otro lado, dado el valor $Q_1$, diferenciando F se tiene $\partial F / \partial \varepsilon_1 = e^{-\varepsilon_1} H_1 F = e^{-\varepsilon_1} Q_1 F$ .

Utilizando de nuevo la hipótesis inductiva, supongamos que $\partial^{k-1} F / \partial \varepsilon_1, ..., \partial \varepsilon_{k-1} = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_{k-1}} Q_{k-1} F$, entonces

$$\partial^k F / \partial \varepsilon_1, ..., \partial \varepsilon_k = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_{k-1}} \partial^k (Q_{k-1} F) / \partial \varepsilon_k$$

diferenciando el producto entre paréntesis y simplificando se obtiene

$$\partial^k F / \partial \varepsilon_1, ..., \partial \varepsilon_k = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_{k-1}} (Q_{k-1}.(-F).H_k.e^{-\varepsilon_k}.(-1) + F \partial Q_{k-1} / \partial y_k . e^{-\varepsilon_k}.(-1))$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\partial^k F / \partial \varepsilon_1, ..., \partial \varepsilon_k = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_{k-1}} e^{-\varepsilon_k} F (Q_{k-1} H_k - \partial Q_{k-1} / \partial y_k) = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_k} Q_k F$$

De este modo, por inducción, se tiene que $\partial^J F / \partial \varepsilon_1, ..., \partial \varepsilon_m = e^{-\varepsilon_1} ... e^{-\varepsilon_m} Q_J F \geqq 0$.

La propiedad iii. se cumple ya que $H$ es una función diferenciable por VEG3 y, por lo tanto, es continua, y, dado que la función exponencial es continua, F, al ser composición de dos funciones continuas, es también continua[27].

b. Demostración de que F es una distribución de valor extremo:

[27]Ver De la Fuente[8], Teorema 1.4 del capítulo 4.

Cuando $\varepsilon_j \to +\infty$ para $j \neq i$, se tiene la función de distribución marginal para i, $F_i(\varepsilon_i) = \text{lím}_{\varepsilon_j \to +\infty} F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J, s) = \text{lím}_{\varepsilon_j \to +\infty} \exp(-H(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_i}, ....e^{-\varepsilon_m}; z_J, s)) = \exp(-H(0, ..., 1, ..., 0; z_J, s)e^{-\varepsilon_i})$ donde el 1 se ubica en la posición i.

Como esta expresión es igual a $F_i(\varepsilon_i) = exp(-a_i e^{-\varepsilon_i}; z_J, s) = exp(-e^{\ln a_i - \varepsilon_i}; z_J, s)$ con $a_i = H(0, ..., 1, ...,0, z_J, s)$, se tiene que $F_i$ constituye una función de distribución de valor extremo tipo 1 para $\varepsilon_i$. Por las propiedades de las distribuciones multivariadas, F es un distribución de valor extremo multivariada que se puede expresar como $F(\varepsilon) = exp(-ae^{-\varepsilon}) = exp(-e^{\ln a - \varepsilon})$ con $a > 0$ identificando a $a = H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)$.

◆

***Hipótesis.*** **La Función de Distribución de los Errores es de Valor Extremo Tipo I (HVEG)**

Dada una función $H(y_J; z_J, s)$ que satisface VEG se define la función F de distribución de los errores que afectan las utilidades que reciben los individuos de las alternativas a partir de H según (18).

***Corolario.*** **Probabilidades de Elección de Alternativas Dadas las Hipótesis MUAIAS y HVEG**

Si se cumple MUAIAS para determinar la forma de las probabilidades de elección obtenidas a partir de F se utiliza (1) para la probabilidad de elegir la primera alternativa, considerando que $u_j \leq \nu$ equivale a $\varepsilon_j - q_j \leq \varepsilon - q_1$, $\forall j \neq 1$, se tiene

$$P(1 \mid J, s) = \int_{u_1=-\infty}^{\infty} \int_{u_2=-\infty}^{u_1} ... \int_{u_m=-\infty}^{u_1} F_1(u_1, ..., u_m; z_J, s) d\varepsilon = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} F_1(\nu, ..., \nu; z_J, s) d\nu$$

Reemplazando $\nu = \varepsilon - q_1$ y considerando que $F_i(u_J; z_J, s) = F_i(\varepsilon_J - q_i; z_J, s)$, a partir de 18 se obtiene

$P(1 \mid J, s) = \int_{\varepsilon=-\infty}^{\infty} F_1(\varepsilon, \varepsilon - q_1 + q_2, ..., \varepsilon - q_1 + q_m; z_J, s) d\varepsilon$

$= \int_{\varepsilon=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon} H_1(e^{-\varepsilon + q_1 - q_2}, ..., e^{-\varepsilon + q_1 - q_m}; z_J, s) exp(-H(e^{-\varepsilon}, e^{-\varepsilon + q_1 - q_2} ..., e^{-\varepsilon + q_1 - q_m}; z_J, s)) d\varepsilon$

Por último, debido a la homogeneidad de grado 1 de $H$ y, por lo tanto, de grado 0 de $H_1$, se llega a lo siguiente

$P(1 \mid J, s) = \int_{\varepsilon=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon} H_1(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z, s) exp(-e^{-\varepsilon} e^{q_1} H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)) d\varepsilon$

$= e^{-q_1} H_1(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s) / H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)$

### 2.3.4. Uso de la Hipótesis de Distribución de Valor Extremo de los Errores para Generar una Función de Utilidad Social Indirecta

***Teorema 8.*** **Relación entre Hipótesis de Errores con Distribución de Valor Extremo y Función de Excedente Social**

Dada la hipótesis MUAIAS y la hipótesis HVEG, entonces se cumple MUAIA y existe la función de excedente social

$$G(q_J; z_J, s) = \ln H(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m}; z_J, s) \tag{19}$$

$$= E\, \text{máx}_{j \in J}\, u_j - \gamma.$$

<u>Demostración</u>:

Sólo se requiere demostrar que la función $G$ es una función de excedente social, ya que, por la parte ii. del Teorema 6 se garantiza que se cumple la hipótesis MUAIA.

ES1 se cumple porque, pues el logaritmo neperiano de H es una función que toma valores reales.

ES2 se cumple ya que la convexidad de H se garantiza porque la función logaritmo neperiano de H es convexa. La homogeneidad de grado 0 en los precios no necesita ser impuesta pues los supuestos implican que los componentes $q_i$ de $q_J$ son homogéneos de grado 0 en los precios absolutos.

ES3 es consecuencia de VEG1 pues

$$G(q_J + \theta; z_J, s) = \ln H(e^{-q_1-\theta}, ..., e^{-q_m-\theta}; z_J, s) = \ln e^{-\theta} \ln H(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)$$

$$= \ln H(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m}; z_J, s) - \theta$$

ES4 se deriva de VEG3 mediante un argumento de inducción similar al utilizado en el Teorema 7.

Para verificar ES5 se debe notar que

$$G_j = \frac{\partial G}{\partial q_j} = -e^{-q_j} \cdot \frac{H_j(e^{-q_J}; z_J, s)}{H(e^{-q_J}; z_J, s)}$$

donde $e^{e_J}$ denota el vector $(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m})$.

Por la homogeneidad de grado 1 de H y de grado 0 de $H_j$,se tiene

$$G_j = -\frac{H_j(e^{-q_J+\tilde{q}_j}; z_J, s)}{H(e^{-q_J+\tilde{q}_j}; z_J, s)} = -\frac{H_j(y_J; z_J, s)}{H(y_J; z_J, s)}$$

donde los elementos de $y_J$ son $y_i = e^{-q_i+q_j}$, y $\tilde{q}_j$ es un vector de m componentes de valor $q_j$.

Así, cuando $q_j \to -\infty$, $y_J$ converge a $y'_J = (e^{-q_1+q_j}, .., e^{-q_j+q_j}, ..., e^{-q_m+q_j})$ con $y_j = 1$ y $y_i = 0$ para $i \neq j$, pues $e^{-q_i+q_j}$ converge a 0 para $i \neq j$. Además, aplicando la ley de Euler para funciones homogéneas[28], se tiene $\sum_{k=1,..,m} e^{-q_k} H_k(e^{-q_J}; z_J, s) = H(e^{-q_J}; z, s)$. Por lo tanto, $H(y'_J; z_J, s) = H_j(y'_J; z_J, s) > 0$.

De este modo, $\lim_{q_j \to -\infty} G_j = -\frac{H_j(y'_J; z_J, s)}{H(y'_J; z_J, s)} = -1$.

ES6 se deriva de VEG4, pues

$$H(y_J; z_J, s) = H((y_J, +\infty, ..., +\infty); z_{J'}, s) = \ln H(e, 0, ..., 0; z_J, s) = \ln H(e^{-q_J}; z_J, s)$$

ya que $y_i = e^{-q_i} = 0 \Leftrightarrow q_i = \infty$.

Por otro lado, se define $G^* = E \max_i u_i = \int_{\varepsilon_J = -\infty}^{+\infty} \max_{i \in J}(-q_j + \varepsilon_j) f(\varepsilon_J; z_J, s) d\varepsilon_J$

La integral $G*$ puede ser particionada en regiones donde cada alternativa otorga la máxima utilidad (dado que la probabilidad de empates es nula) y utilizando (1)se obtiene

$$G^* = \sum_{j \in J} \int_{\varepsilon_{i=-\infty}}^{+\infty} (-q_j + \varepsilon_j) F_j(-\tilde{q}_j + \tilde{\varepsilon}_j + q_J; z_J, s) d\varepsilon_j$$

donde $\tilde{\varepsilon}_j$ denota un vector de m componentes iguales a $\varepsilon_j$.

Dada la homogeneidad de grado 1 de $H$, tenemos

$$F_j(-\tilde{q}_j + \varepsilon_j + q_J; z_J, s) = exp(-H(e^{\tilde{q}_j - \tilde{\varepsilon}_j - q_J}; z_J, s)) H_j(e^{\tilde{q}_j - \tilde{\varepsilon}_j - q_J}; z_J, s) e^{-\varepsilon_j}$$

$$= exp(-H(e^{-q_J}; z_J, s) e^{q_j - \varepsilon_j}) H_j(e^{\tilde{q}_j - \tilde{\varepsilon}_j - q_J}; z_J, s) e^{-\varepsilon_j}$$

Sea $a =H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)$, por la homogeneidad de grado 0 de $H_j$, resulta

$$F_j(-q_j + \varepsilon_j + q_J; z_J, s) = exp(-a e^{q_j - \varepsilon_j}) H_j(e^{-q_J}; z, s) e^{-\varepsilon_j}$$

Usando la transformación $-q_j + \varepsilon_j = w$ para la variable de integración, y reemplazando $F_j$ en $G*$ se tiene

$$G^* = \sum_{j \in J} \int_{w=-\infty}^{+\infty} w exp(-a e^{-w}) e^{-q_j} H_j(e^{-q_J}; z_J, s) e^{-w} dw$$

[28]Teorema M.B.2 del Apéndice Matemático de Mas-Colell et al. [18]

Reordenando y aplicando la ley de Euler

$$G* = \int_{w=-\infty}^{+\infty} \sum_{j\in J} e^{-q_j} H_j(e^{-q_J}; z_J, s) wexp(-ae^{-w}) dw =$$

$$= \int_{w=-\infty}^{+\infty} H(e^{-q_J}; z_J, s) wexp(-ae^{-w}) e^{-w} dw.$$

Reemplazando el valor de $a$ se obtiene

$$G^* = \int_{w=-\infty}^{+\infty} waexp(-ae^{-w})e^{-w} dw$$

Dado que se conoce que la distribución F es de valor extremo

$$G^* = \int_{\varepsilon_{j=-\infty}}^{+\infty} \frac{\partial F_a}{\partial w} dw = \int_{\varepsilon_{j=-\infty}}^{+\infty} f_a(w) dw = \ln a + \gamma = \ln H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s) + \gamma$$

Por último, la función de excedente social $G$ será equivalente a

$$G(q_J; z_J, s) = ln\, H(e^{-q_J}; z_J, s) = G^*(q_J; z_J, s) - \gamma = E \max_{j\in J} u_j - \gamma$$

◆

***Lema.*** **HVEG Genera una Función de Utilidad Social Indirecta**

Dados los supuestos del Teorema 8, la función generada mediante (14) a partir de la función de excedente social dada por (19) es una Función de Utilidad Social Indirecta.

Demostración:

Aplicación directa de la parte i del Teorema 6.

◆

***Lema.*** **Probabilidades de Elección de las Alternativas**

Bajos los supuestos del Teorema 8, se cumple que

$$P(j \mid J, s) \equiv \pi_j(q_J, z_J, s) = -\tfrac{\partial}{\partial q_j} lnH(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m}; z_J, s).$$

Demostración:

Se aplican los Teoremas 6 y 8. En este caso, utilizando (15) y (19), se obtiene

$$P(j \mid J, s) = -\frac{\partial}{\partial q_j} G(q_J; z, s) = -\frac{\partial}{\partial q_j} lnH(e^{-q_1}, ..., e^{-q_m}; z_J, s) \tag{20}$$

lo cual es equivalente a

$$P(j \mid J, s) \equiv \pi_j(q_J, z_J, s) = -\frac{e^{-q_j} H_j(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)}{H(e^{-q_1}, e^{-q_2}, ..., e^{-q_m}; z_J, s)} \tag{21}$$

◆

Finalmente, si se asume la hipótesis MUAIAL, definida en la sección 2.3.2, se obtiene el modelo Logit Multinomial (McFadden [21]), que es ampliamente utilizado en los trabajos econométricos sobre modelos de elección discreta.

***Lema.* Modelo Logit Multinomial**

Bajo la hipótesis MUAIAL, es decir, que una alternativa $j \in J$ se caracteriza por un valor escalar $q_j = -\beta' z_j$, donde $z_j$ son los atributos medibles de la alternativa, y la función H tiene la forma $H(y_1, ..., y_m; z_J) = H_{LM}(y_1, ..., y_m; z_J) = \sum_j^m y_j$, se obtiene un modelo de elección discreta Logit Multinomial donde

$$P(j \mid J) = \frac{exp(\beta' z_j)}{\sum_{j=1}^m e^{\beta' z_j}} \, , \; j \in J \, .$$

Demostración:

La demostración es directa a partir de (21) dado que, en este caso, $H_j = 1, \forall j \in J$.

◆

**Propiedades del Modelo Logit Multinomial**

El modelo Logit Multinomial es consistente con el Axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes, lo cual implica que las probabilidades de elección entre alternativas de un subconjunto no dependen de las características de las alternativas que no están en ese subconjunto. Es decir, si $i \in J \subseteq K$, se tiene

$$P(i \mid K) = P(i \mid J).P(J \mid K)$$

En general, este modelo posee la propiedad de "independencia del orden"[29] y puede ser restrictivo para diferentes contextos de decisiones. Por ejemplo, el caso de la elección entre los medios de transporte como auto, bus rojo y bus azul, si las probabilidades observadas de elección implican que los los individuos consideran a los buses alternativas muy similares y que alternan entre auto y buses, no serían consistentes con este modelo[30].

# 3. Planteamiento del Problema Dinámico de Decisión Intertemporal de Compra del Bien Durable

En cada momento cada individuo, perteneciente a una población de características determinadas, maximiza su utilidad esperada intertemporal eligiendo entre adquirir una alternativa del bien durable (y obtener una utilidad por el uso durante su vida útil) o no comprar el bien (y recibir una utilidad de reserva).

A continuación se presentan los supuestos utilizados para el análisis de este problema asumidos por Melnikov [23], tanto los supuestos básicos (incluyendo el supuesto de que la utilidad es aleatoria aditivamente separable en cada período con errores que se distribuyen Valor Extremo), como los supuestos específicos que permiten simplificar el problema, y, a partir de éstos, se obtiene la probabilidad de elección de una alternativa en un período. Luego, se formula el problema de elección intertemporal para la decisión de compra del bien durable. Por último, se identifica la distribución del valor máximo de la utilidad en cada período, y se presenta la dinámica de la calidad de los bienes (entendida como la moda de los valores de la utilidad que recibirían los individuos al comprar el bien).

## 3.1. Supuestos

En general, para cada momento t, el problema de elección de cada individuo tiene las características desarrolladas en el capítulo 2, de acuerdo a los siguientes supuestos:

### Supuestos Generales

- S1: Se cumple la hipótesis de Maximización de la Utilidad Aleatoria (MUA). En este caso, la hipótesis MUA consiste en la existencia de un vector $(I, T, X, Y, \xi, \Upsilon, S, \mu)$ donde

[29] Si $i, j \in A, i, j \notin B$ y $k \in B$, entonces $P(i \mid A) \geq P(i \mid A)$ si y sólo si $P(k \mid B \cup \{i\}) \leq P(k \mid B \cup \{i\})$.
[30] Como lo indica McFadden [22], p. 221 y 222.

- I es un conjunto discreto finito que indexa las alternativas de elección, es decir, $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset \mathbb{Z}^+$.
- T es el conjunto de periodos del problema, es decir, $T\subset \mathbb{Z}^+$.
- X representa el conjunto de posibles valores de atributos permanentes de las alternativas. Cada bien posee L atributos permanentes, $X \subset \mathbb{R}^L$.
- Y representa el conjunto de valores de L atributos no permanentes de los bienes, que varían a lo largo del tiempo, $Y \subset \mathbb{R}^K$.
- $\xi : I \to X$ es un mapeo que especifica los atributos permanentes medibles de las alternativas.
- $\Upsilon : I \times T \to Y$ es un mapeo que especifica los atributos medibles que varían en el tiempo para cada alternativa $j \in I$ y momento $t \in T$.
- $S$ es el conjunto de las posibles características de los individuos de la población.
- $\mu_t$ es la medida de probabilidad definida sobre las funciones de utilidad que representan las preferencias racionales sobre I en el momento t, $u_t(. \mid \tilde{\rho}, s) : I \to \mathbb{R}$ con $\tilde{\rho} \in O$ para las características $s \in S$, del siguiente modo

$$\mu_t(. \mid I, s) : B(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$$

Los valores de una función de utilidad en el momento t se denotan por el vector $u_t$.

En este caso, el conjunto Z de atributos posibles de los bienes sería $Z = (X, Y) \subset \mathbb{R}^{L+K}$, y se puede asumir un mapeo $\Gamma : I \times T \to Z$ que indica los atributos que posee cada alternativa en cada momento.

Ejemplo: Entre los atributos posibles de un bien durable como las computadoras personales - analizadas por Melnikov [23] - tenemos atributos constantes a lo largo del tiempo como la velocidad del procesador y el tamaño del disco duro, y atributos variables como el precio. Además, en este caso, las distintas alternativas que han aparecido en el mercado se pueden agrupar en un conjunto $I$, del cual algunas están disponibles en un determinado momento mientras otras habrán sido descontinuadas o aún no han aparecido. Con el fin de facilitar el análisis empírico, para cada momento se puede restringir el conjunto de alternativas relevantes a tres tipos: baja calidad, calidad media y alta calidad[31].

[31] Ver Prince [27].

- S2: En el momento t, existe un conjunto $J_t = \{j_{1t}, ..., j_{mt}\} \in \mathscr{J}$ de alternativas del bien durable de $m_t$ elementos que puede elegir el consumidor.

  Dados los atributos de los bienes definidos por $\Gamma$, cuando $\mu$ se restringue al conjunto $J_t$ para $s \in S$ , se obtiene la medida de probabilidad $\mu_t^J(. \mid J_t, s)$.

- S3: Se cumple la hipótesis MUAAL, es decir, las preferencias comunes de los individuos con características $s \in S$ sobre los atributos de los bienes X e Y están determinadas por un vector de parámetros L+K-dimensional $\theta_s \in \mathbb{R}^{L+K}$.

- S4: El estado de un consumidor i en el momento t, $L_{it}$, está dado por

$$L_{it} \equiv \begin{cases} 0 & si\, no\, posee\, ningún\, bien \\ 1 & en\, otro\, caso. \end{cases}$$

- S5: Existen $\mathscr{M}_t$ consumidores permanentes en cada periodo t.

  El tamaño efectivo de la población (mercado) en el momento t viene dado por la cardinalidad del conjunto $\mathscr{M}_t = \{i \mid L_{it} = 0\}$.

- S6: En cada momento $t$, el consumidor típico en el estado $L_t = 0$ tiene dos opciones: i. Adquirir un bien durable $j \in J_t$ y obtener una utilidad $u_{jt}$ por el uso del bien durante su vida útil; o ii. No comprar ningún bien durable y recibir una utilidad de reserva $c$ constante.

- S7: En cada momento el consumidor i descuenta la utilidad recibida en períodos posteriores mediante un factor de descuento intertemporal $\beta_i$ con $0 \leq \beta_i \leq 1$.

- S8: Las funciones de utilidad $u_t$ de los individuos son aditivas en cada período.

  La utilidad que recibe un individuo en el momento t por la elección del tipo de bien durable $j \in J_t$, mediante su utilización durante su vida útil, denotada por $u_{jt}$, está dada por[32]

$$u_{jt} = f(x_j, y_{jt}, \theta_s) + \varepsilon_{jt} \tag{22}$$

  donde

  $f : X \times Y \times \Theta \to \mathbb{R}$ determina un nivel de utilidad obtenido por la elección de cada alternativa (de manera determínistica);

  $x_j \in X$ es un vector L-dimensional de atributos permanentes del bien j;

[32] La variable $u_{jt}$ se suele denominar variable latente en la presentación estándar de los modelos de elección binaria en los textos de econometría (ver Cameron y Trivedi [11], capítulo 14).

$y_{jt} \in Y$ es un vector K-dimensional de atributos no permanentes del bien j en el tiempo t;

$\varepsilon_{jt}$ son errores que afectan a la utilidad del bien j en el tiempo t;

$\theta_s$ son parámetros que reflejan las preferencias comunes de la población de individuos dadas sus características $s \in S$.

**Supuestos Específicos**

Con el fin de simplificar el problema, se asumen los siguientes supuestos específicos:

- SA1: En todo momento t, existe un conjunto $J = \{1, ..., m\}$ de alternativas de elección obtenidos a partir de los elementos de I, y se utiliza la medida $\mu^J(. \mid J, s)$. Específicamente, en cada momento, se puede agrupar a los tipos de bienes en categorías: los de mejor calidad, calidad media y baja calidad, y caracterizarlos por los atributos promedio de cada grupo.

- SA2: Las características relevantes de las alternativas en un momento dado para un consumidor se pueden resumir en un valor dado por una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ que depende de las preferencias comunes de los individuos $\theta_s$ sobre las características del bien j en el momento t, del siguiente modo $\delta_{jt} = f(x_j, y_{jt}, \theta_s)$. En este caso, en relación a la hipótesis MUAIAS (presentada en la sección 2.3.1), se tiene la equivalencia $-q_{jt} = \delta_{jt}$[33], es decir, se interpreta como los atributos físicos de una determinada alternativa j en el momento t que entran a la utilidad de forma aditiva y, por lo tanto, se tiene

$$u_{jt} = -q_{jt} + \varepsilon_{jt} = \delta_{jt} + \varepsilon_{jt} \tag{23}$$

.[34]

[33] Con fines de estimación econométrica, en general, se asume la hipótesis MUAAL, es decir, que para el periodo t, la alternativa j se caracteriza por un valor escalar $q_{jt} = -\beta' z_{jt}$, donde $z_{jt}$ son los atributos medibles de la alternativa.

[34] La utilidad de un individuo se puede descomponer como la suma de una variable que representa un nivel medio común de utilidad para todos los individuos y de un error o perturbación aleatoria que afectan la utilidad de las decisiones. En este caso, la presencia de $\varepsilon_{jt}$ en el valor de $u_{jt}$ se puede explicar porque, al comprar el bien j en el momento t, los consumidores no conocen con precisión sus preferencias (que determinan la utilidad final que reciben de los bienes), si no sólo conocen el valor del parámetro común $\delta_{jt}$.

- SA3: Los errores $\varepsilon_{jt}$ son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) entre tipos del bien discreto y a lo largo del tiempo, es decir, $\varepsilon_{jt} \sim^{i.i.d} \varepsilon$.[35]

- SA4: La variable aleatoria $\varepsilon$ tiene una distribución de valor extremo con distribución $F(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m; z_J) = exp(-H(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_m}; z_J)$, donde $z_J = (x_J, y_{Jt})$ y H satisface las propiedades VEG de la sección 2.3.3.

- SA5: $u_{jt}$ es acotada $\forall j \in J$[36].

  Para ello se asume que ambos sumandos de (23) son acotados.

  Para que $\delta_{jt} = f(x_j, y_{jt}, \theta_s)$ sea acotada se asume que los conjuntos X y Y son compactos. que la función $f(x_j, y_{jt}, \theta_i)$ es continua, con lo cual su imegen es acotada[37]. Además, sin pérdida de generalidad, se asume que los $\varepsilon_{jt}$ toman valores acotados dentro de un intervalo $]-E, +E[$ con E suficientemente grande.

- SA6: Todos los individuos tienen un factor de descuento igual, $\beta$.

- SA7: Todos los individuos poseen las mismas características $s \in S$, con lo cual se tiene también $\theta_s = \theta$. Por ello, en las secciones siguientes se prescinde de la especificación de las características de los individuos.

## 3.2. Probabilidad de Elección de las Alternativas del Bien Durable en Cada Período

Dados los supuestos de la sección anterior es posible derivar las probabilidades de elección cada alternativa del bien durable para un período determinado.

### ***Lema.*** Probabilidad de Elección de Cada Alternativa

En este caso, como $\varepsilon_{jt}$ sigue una distribución de valor extremo, la probabilidad $P_t(j \mid J)$ de elección de la alternativa $j \in J$ en el momento t, de forma similar a (20), se obtiene como

$$P_t(j \mid J) = \mu(\{u \in \mathbb{R}^n \mid u(j) \geq u(k),\ k = 1, ..., m\}) = P(u_{jt} \geq u_{kt},\ k = 1, .., m) =$$

$$= \frac{exp(\delta_{jt}) H_j(e^{\delta_{1t}}, .., e^{\delta_{mt}}; z_{Jt})}{H(e^{\delta_{1t}}, .., e^{\delta_{mt}}; z_{Jt})} \tag{24}$$

[35]Es decir, los niveles de utilidad de cualquier individuo en cualquier momento son afectados por errores o perturbaciones que tienen una distribución conocida.

[36]Ver Rust [30], pag. 3105, supuesto BE.

[37]Ver Teorema 8.21 del capítulo 1 de De la Fuente [8].

donde $H_j(.)$ representa la derivada de $H$ respecto al argumento j, y $z_{Jt}$ es el vector de atributos medibles de las alternativas en el momento t.

***Lema.*** **Probabilidad de Elección de Cada Alternativa dado el Modelo Logit Multinomial para cada Período**

Bajo la hipótesis MUAIAL, es decir, que una alternativa $j \in J$ se caracteriza por un valor escalar $q_{jt} = -\beta' z_{jt}$, donde $z_{jt}$ son los atributos medibles de la alternativa, y la función H tiene la forma $H(y_1, ..., y_m; z_{Jt}) = H_{LM}(y_1, ..., y_m; z_{Jt}) = \sum_j^m y_j$, se obtiene un modelo de elección discreta Logit Multinomial (McFadden [21]) donde

$$P_t(j \mid J) = \frac{exp(\beta' z_{jt})}{\sum_{j=1}^m e^{\beta' z_{jt}}}\,, \; j \in J\,.$$

Además, en este caso, la distribución de los errores del modelo Logit Multinomial es una distribución de Valor Extremo Tipo I con parámetros $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Demostración:

Para la demostración de la primera parte ver Lema sobre Modelo Logit Multinomial de Sección 2.3.4.

La demostración de la segunda parte es directa, pues $F_{LM}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_J; z_{Jt}) = exp(-H_{LM}(e^{-\varepsilon_1}, ..., e^{-\varepsilon_J}; z_{Jt}))$ $exp(-\sum_j^m e^{-\varepsilon_j})$.

◆

## 3.3. Formulación del Problema de Decisión Intertemporal del Consumidor

Dados los valores de $u_{jt}$ para $j \in J$, se define $\upsilon_t$ como el valor máximo de la utilidad en el período t mediante

$$\upsilon_t = \max_{j \in J} u_{jt}\ .$$

$\upsilon_t$ refleja la utilidad máxima que perciben los individuos para las alternativas del bien disponibles en el mercado

El agente debe resolver, en cada período t, el siguiente problema de optimización:

$$J(\upsilon_t; I_t) = \max_{\tau} \left[ \sum_{k=t}^{\tau-1} \beta^{k-t} c + \beta^{\tau-t} E_t \upsilon_\tau \right] \tag{25}$$

donde

- $I_t$ es el conjunto de información disponible para el consumidor en el momento t. Se asume que $\{I_t, t \in \mathbb{Z}^+\}$ es una filtración;
- $J(\upsilon_t; I_t)$ es la función de valor (óptimo) dada la información $I_t$;
- $\tau$ es el momento en que se compra el bien; y
- $\beta$ es el factor de descuento intertemporal (constante).
- $E_t[.] = E[. \mid I_t]$.[38]

La función de valor $J(\upsilon_t; I_t)$ se obtiene sumando el valor actual de la utilidad c recibida por el individuo en cada período hasta el momento previo a comprar el bien, denotado por $\tau$, y la utilidad esperada que recibe en ese momento, denotada por $\upsilon_\tau$.

En este caso, el consumidor debe resolver un problema de tiempo de parada óptimo para un horizonte temporal infinito de maximización, siendo $\tau$ un tiempo de parada.[39] De este modo, el problema del consumidor típico se puede plantear en dos etapas:

I. Seleccionar el bien $j^*$que maximice la utilidad en el período t,

$$j_t^* = \arg\max_{j \in J} u_{jt} \ .$$

Es decir, $\upsilon_t = u_{j^*t}$.

II. Decidir si compra este producto o pospone la decisión de compra hasta el siguiente período.

Por otro lado, se asume que la variable aleatoria $\upsilon_t$ depende de una variable $r_t$ que es el valor de la moda de la distribución de $\upsilon_t$. Esta variable $r_t$ representa la utilidad más común percibida por los consumidores, y puede interpretarse como una medida de la "calidad" estándar del bien en cada momento.

A continuación, a partir de los supuestos de la sección 3.1, se caracteriza la distribución de los valores de la variable $\upsilon_t$ en relación al parámetro $r_t$. Asimismo, se asume que $r_t$ es una variable aleatoria determinada por un proceso estocástico particular. Esta información se utilizará, posteriomente, para determinar la esperanza $E_t[\upsilon_k]$ para $k \geq t$.

[38] $E_t$ denota al operador de esperanza condicional dado el conjunto de información $I_t$ correspondiente al momento t. Es decir, para cualquier variable aleatoria $X$ que $I_t$-medible, se tiene $E_t[X] = E[X|I_t]$.

[39] Es decir, una variable aleatoria con valores en $\mathbb{Z}^+$para la cual el evento $\{\tau = t\}$ depende sólo de la información $I_t$ (ver, Brzezniak y Zastawniak [11]).

## 3.4. Valor Máximo de la Utilidad en Cada Período y Dinámica de la Calidad de los Bienes

### 3.4.1. Caracterización del Valor Máximo de la Utilidad en Cada Periodo

***Lema.*** **Distribución del Valor Máximo de la Utilidad en Cada Periodo**

Bajo los supuestos específicos SA asumidos, $\upsilon_t$ tiene distribución de valor extremo tipo I caracterizada por

$$F_\upsilon(\upsilon, r_t) = exp(-e^{-(\upsilon - r_t)})$$

$$f_\upsilon(\upsilon, r_t) = e^{r_t} exp(-e^{-(\upsilon - r_t)} - u) = exp(-e^{-(\upsilon - r_t)} + r_t - u) = e^{-(\upsilon - r_t)} F_\upsilon(\upsilon, r_t) \quad (26)$$

donde $r_t$ es la moda de la distribución de $\upsilon_t$ dada por

$$r_t = \ln H(exp(\delta_{1t}, ..., \delta_{Jt}; z_{Jt}) \ , \quad (27)$$

para $t \in \mathbb{Z}^+$, donde H es el modelo de valor extremo generalizado.

<u>Demostración</u>:

La distribución de $\upsilon_t$ es $F_\upsilon(z) = P(\upsilon_t \leq z) = P(u_{1t} \leq z, ..., u_{mt} \leq z) = P(\varepsilon_{1t} \leq z - \delta_{1t}, ..., \varepsilon_{mt} \leq z - \delta_{mt})$, es igual a

$$F_\upsilon(z) = exp(-H(e^{-(z-\delta_{1t})}, ..., e^{-(z-\delta_{mt})}; z_{Jt})) = exp(-e^{-z} H(e^{\delta_{1t}}, ..., e^{\delta_{mt}}; z_{Jt})) \ ,$$

por la homogeneidad de grado 1 de H.

Definiendo $R_t = H(e^{\delta_{1t}}, ..., e^{\delta_{mt}}; z_{Jt})$, se obtiene

$$F_\upsilon(z) = exp(-R_t exp(-z)) = exp(-exp(ln\, R_t) exp(-z))) =$$

$$= exp(-exp(-(-z - ln\, R_t))) = exp(-exp(-(-z - r_t))) \ . \quad (28)$$

Esto implica que $\upsilon_t$ tiene distribución de valor extremo con moda $r_t$.

◆

Por lo tanto, se considera que los parámetros $r_t$ o $R_t$ caracterizan la distribución de $\upsilon_t$, ya que

$$f_\upsilon(z; r_t) = e^{-(z-r_t)} F_\upsilon(z; r_t) = exp(-(z - r_t)) exp(-exp(-(z - r_t)))$$

$$= exp(-exp(-(z - r_t)) - z + r_t) = exp(-z + r_t)) exp(-exp(-z + r_t)))$$

$$= R_t exp(-z_t) exp(-R_t exp(-z_t)) = R_t exp(-R_t e^{-z_t} - z_t) = f_\upsilon(z; R_t)$$

### 3.4.2. Supuestos sobre la Dinámica de la Calidad de las Alternativas del Bien Durable

Se asume que $\forall k$, $r_k \in \mathbb{R}$ y que $\{r_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ es un proceso estocástico markoviano de tipo homogéneo[40] con una función de transición $\Psi : \mathbb{R} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que otorga en valor $\Psi(r_k, D; \kappa_r)$, para $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, el conjunto de los borelianos de $\mathbb{R}$, siendo $\kappa_r$ el vector de parámetros del proceso[41]. Para simplificar, en adelante denotaremos esta función como $\Psi(r, D)$.

Específicamente, se asume que $r_k$ sigue un proceso de difusión determinado por

$$r_{k+1} = \mu(r_k) + \sigma(r_k)\nu_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}^+ \tag{29}$$

donde

- la función $\mu(r)$ es la tendencia (estocástica) del proceso;
- la función $\sigma(r)$ es la volatilidad del proceso;
- $\nu_k$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas normal estándar, es decir, $\nu_k \sim N(0,1)$.[42]

[40]Las probabilidades de transición hacia un estado sólo dependen del estado en el momento actual y su forma no varía en el tiempo

[41]De acuerdo a la definición (ver sección 8.1 de Stokey y Lucas [32]) $\Psi$ es una función de transición pues se cumple que

i. Para cada $r \in \mathbb{R}$, $\Psi(r, .)$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

ii. Para cada $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\Psi(., D)$ es una función medible con respecto a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (ver definición en p. 171 de Stokey y Lucas[32]).

De este modo, para cualquier medida $\lambda$ sobre $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, se puede definir el operador $T^*$ como $(T^*\lambda)(D) = \int_D \Psi(r, D)\lambda(dr)$, el cual determina el valor de la probabilidad de que el estado del siguiente periodo pertenezca al conjunto D si el estado en el periodo actual está regido por la medida de probabilidad $\lambda$.

Asimismo, para cualquier función $f(.)$ que es medible con respecto a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, se puede definir el operador $K$ como $(Kf)(r) = \int f(r')\Psi(r, dr')$, $\forall r \in \mathbb{R}$, el cual determina el valor esperado de la función f en el periodo siguiente dado que el estado actual es r.

[42]Se puede demostrar que este tipo de proceso para tiempo discreto (incrementos de tiempo de duración unitaria) converge, cuando los incrementos temporales tienden a 0, a un proceso de difusión de Ito (homogéneo en el tiempo)

$$dr_t = (r_t + \mu(r_t))dt + \sigma(r_t)dB(t)$$

donde $B(t)$ es un movimiento browniano estándar, es decir, $\forall s < t$, $B(s) - B(t) \sim N(0, t-s)$ (Ver Brzezniak y Zastawniak [11]), el cual satisface la propiedad de Markov: El comportamiento futuro esperado del proceso dado la información que ha pasado hasta el momento es el mismo comportamiento cuando el proceso empieza en $r_t$ (Oksendal [26], Teorema 7.1.2).

En este caso, se tiene que $\forall D \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\Psi(r,D) = \int_D \phi(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma(r)})dr'$, donde $\phi$ es la densidad normal estándar.

Además, se tiene que $\Psi(r,dr') = \phi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma(r)}\right)dr'$.

Para la demostración de teoremas posteriores, es importante notar que la función de transición $\Psi$ posee la propiedad de Feller, es decir, $\forall r$, el operador T definido por $Tf(r) = \int f(r')\Psi(r,dr')$, donde f es una función Borel-medible, mapea el espacio métrico de funciones acotadas continuas en sí mismo[43].

Asimismo, se asumen los siguientes supuestos específicos:

Las funciones $\mu(r)$ y $\sigma(r)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- F1: $\mu(r)$ es continua y diferenciable casi en cualquier punto.
- F2: $0 < \sigma(r) < \infty$ y $\sigma(r) = \sigma$.

  Dado el supuesto F1 se garantiza que la función $\Phi(r,D)$ sea continua y diferenciable en r para casi todo punto y, por lo tanto, que $\phi(\frac{s-\mu(r)}{\sigma})$ sea (Lebesgue) integrable respecto a r.
- F3: $\{r_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ es una submartingala con respecto a la filtración natural $\{\mathscr{R}_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$, con $\mathscr{R}_k \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})$ para todo $k$, dada por la secuencia de $\sigma$-álgebras $\mathscr{R}_k = \sigma(r_j : 0\leq j\leq k), \forall k \in \mathbb{Z}^+$, que cumple con $E(\mid r_k \mid) < \infty$, y $E(r_{k+1} \mid \mathscr{R}_k) = \mu(r_k) \geq r_k)$.
- F4: $\lim_{n\to\infty} \beta^n \mu^n(r) < \infty$, donde $\mu^0(r) = \mu(r)$ y $\mu^n(r) = \mu(\mu^{n-1}(r))$.

## 3.5. Formulación del Problema como Control Óptimo Estocástico

A continuación se expresa el problema de parada óptimal planteado en la sección 3.2 como un problema de control óptimo estocástico. Para ello se define el sistema dinámico estocástico controlado en tiempo discreto correspondiente al consumidor que elige la alternativa de bien durable que maximiza su utilidad a lo largo del tiempo[44].

El problema de parada óptima planteado se puede expresar como uno de control óptimo estocástico como se muestra a continuación[45].

Dado un momento de inicio $t \in \mathbb{Z}^+$, se tiene el proceso estocástico markoviano $\{(v_k, r_k)\}$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq t$ , donde $(v_k, r_k)$ es un vector de variables aleatorias con espacio de

[43] De acuerdo a la definición de la p. 220 de Stokey y Lucas [32]

[44] La definición formal de este tipo de sistemas se indican en el Anexo 3.

[45] Siguiendo a Norris [25](secciones 1 y 7), Oksendal[26] (sección 2.1), y Bertsekas [5](sección 4.4)

estados $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$, el cual tiene asociada una σ-álgebra $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, siendo $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ los borelianos de $\mathbb{R}^2$.

Este proceso markoviano posee una probabilidad de transición homogénea en el tiempo dada por la función $Q((\upsilon, r), C)$, la cual indica la probabilidad de que si se está en el estado $(\upsilon, r) \in \mathbb{S}$, el sistema se mueva a un estado dentro del conjunto $C \in \mathscr{S}$ en el período siguiente. Por definición

$$Q((\upsilon, r), C) = \int_C Q((\upsilon, r), d(\upsilon', r')) \tag{30}$$

donde $Q((\upsilon, r), d(\upsilon', r'))$ refleja la función de densidad de esta probabilidad.[46]

Asimismo, dado un momento inicial t con el estado $(\upsilon_t, r_t)$, la distribución del proceso para $k \geq t$ viene dada por

$$Prob((\upsilon_k, r_k) \in C | \upsilon_t, r_t) = Q^{k-t}((\upsilon_t, r_t), C), \forall C \in \mathscr{S} \ ,$$

donde $Q^n$ es una probabilidad de transición de n pasos definida recursivamente mediante la ecuación de Chapman-Kolmorogov,

$$Q^1 = Q,\ Q^n((\upsilon_t, r_t), C) = \int Q((\upsilon', r'), C) Q^{n-1}((\upsilon_t, r_t), d(\upsilon', r')),\ \forall n \geq 2.$$

En este caso, dado el proceso de difusión markoviano $\{r_k\}_{k \geq t}$ y la dependencia estocástica de $\upsilon_t$ respecto a $r_t$ (y su independencia del valor de $\upsilon_{t-1}$[47]), la densidad de transición del proceso markoviano $\{\upsilon_k, r_k\}_{k \geq t}$ viene determinada por

$$Q((\upsilon_k, r_k), d(\upsilon', r')) = dF_\upsilon(\upsilon' \mid r')\Psi(r_k, dr'),$$

donde $\Psi(r_k, dr')$ es la densidad del proceso principal $\{r_k\}_{k \geq t}$.

Para un momento t determinado, la densidad de transición Q limita el patrón de dependencia del proceso $\{\upsilon_k, r_k\}_{k \geq t}$ en dos maneras: Primero, $r_{t+1}$ es un estadístico suficiente para conocer la distribución de $\upsilon_{t+1}$ implicando que cualquier dependencia entre $\upsilon_{t+1}$ y $\upsilon_t$ es trasmitida enteramente a través de la variable $r_t$ . Segundo, la densidad de probabilidad para $r_{t+1}$ depende sólo de $r_t$ y no de $\upsilon_t$, lo cual se puede interpretar, siguiendo a Rust [30] (pag. 3103), como que el proceso $\{\upsilon_k\}_{k \geq t}$ es esencialmente un proceso superpuesto sobre la dinámica principal determinada por la densidad de transición $\Psi(r_k, dr')$.

[46]Ver definición de probabilidad de transición en el Anexo 3.

[47]Ya que el máximo valor disponible de la utilidad en el período anterior no afecta al máximo valor actual disponible

La esperanza generada por la densidad $Q((v_k, r_k), d(v', r'))$ se denotará con $E\left[.|r_k\right]$.

A fin de especificar el sistema controlado, se define una función de control markoviano $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{S} \rightarrow A$, cuyos valores se pueden escribir como un vector $(h_t, h_{t+1}, ...)$. En este caso, $A = \{0, 1\}$. Se denota con $h_k = h(k, (v_k, r_k))$ la decisión de compra tomada por el agente en el período k-ésimo, $\forall k \geq t$. Dado un individuo que no posee el bien durable en el momento t, si $h_k$ toma el valor 0 significa que se decide no comprar el bien (y que se pospone la decisión), y si $h_k$ es 1 que se compra el bien, lo cual significa que se ha llegado a un tiempo de parada $\tau$ (ya que el bien durable se compra sólo una vez)[48].

En general, para cualquier tiempo de parada $\tau$, $\forall k \geq t$ existe un conjunto $B_k \subseteq \mathscr{S}_k \subseteq \mathscr{S}$, tal que $\{\tau = k\} = \{(v_k, r_k)\} \in B_k$ y, por lo tanto,

$$h_k = \begin{cases} 1 & si\ \{(v_k, r_k)\} \in B_k \\ 0 & en\, otro\, caso. \end{cases}$$

En este contexto, siguiendo a Sieirstad [31](sección 1.5), se define el proceso controlado $\{\tilde{v}_k, \tilde{r}_k\}$, con espacio de estados $\mathbb{S} \cup \left\{(\overline{T}, \overline{R})\right\}$ y vector de variables de estado controladas dado por

$$(\tilde{v}_k, \tilde{r}_k) = \begin{cases} (\overline{T}, \overline{R}) & si\, k \geq \tau + 1 \\ (v_k, r_k) & si\, k \leq \tau. \end{cases}$$

donde $(\overline{T}, \overline{R})$ es un estado especial fuera de $\mathbb{R}^2$[49] utilizado para representar que se ha comprado el bien al llegar al tiempo de parada $\tau$.

De este modo, el espacio de estados $\mathtt{S}$ del sistema controlado será $\mathtt{S} = \mathbb{S} \cup \left\{(\overline{T}, \overline{R})\right\}$.

Definimos una medida de probabilidad $P : \mathtt{S} \times A \rightarrow [0, 1]$ para el proceso controlado como $P((v, r), C, a) = Prob(C \mid (v, r), a)$, la cual indica la probabilidad de transición del sistema el sistema hacia un estado del conjunto $C \in \mathtt{S}$ si se está en el estado $(v, r) \in \mathbb{S}$ y se elige la acción $a \in A$.

$$P((v, r), C, 1) = 0, \text{ para } \forall C \in \mathscr{S};$$

$$P((v, r), C, 0) = Q((v, r), \text{ para } \forall C \in \mathscr{S};$$

[48] Aunque este tipo de modelación puede generalizarse para los casos en que sea posible el reemplazo del bien debido a pérdida, ruptura u otras causas.
[49] Denominado usualmente "coffin state".

$$P((\upsilon, r), C, 1) = 1, \text{ para } C = \left\{(\overline{T}, \overline{R})\right\};$$

$$P((\upsilon, r), C, 0) = 0, \text{ si } (\upsilon, r) = (\overline{T}, \overline{R}), \forall C \in \mathscr{S}.$$

Es decir, el proceso no se mueve a un estado distinto de $(\overline{T}, \overline{R})$ una vez que ocurre la compra[50].

Dado el momento de inicio t, el estado inicial $(\upsilon_t, r_t)$ y la función de control $h$, se utiliza la notación $E^h_{t,(\upsilon_t, r_t)}$ para la esperanza matemática generada mediante las medidas de probabilidad finito-dimensionales derivadas de $P$.[51]

Para cualquier periodo $k \in \mathbb{Z}^+$, dado el vector de estado $(\upsilon_k, r_k) \in \mathbb{R}^2$, si el bien durable aún no se ha comprado, se define la función de utilidad asociada al proceso controlado $U : \mathbb{S} \cup \left\{(\overline{T}, \overline{R})\right\} \times A \rightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k) = \begin{cases} \upsilon_k & si\, h_k = 1,\, \tilde{\upsilon}_k \neq \overline{T},\, \tilde{r}_k \neq \overline{R} \\ c & si\ h_k = 0,\, \tilde{\upsilon}_k \neq \overline{T},\, \tilde{r}_k \neq \overline{R} \\ 0 & si\, \tilde{\upsilon}_k = \overline{T},\, \tilde{r}_k = \overline{R}. \end{cases}$$

Es decir, se asume que la utilidad es 0 cuando se ha llegado al estado $\left\{\overline{(T, R)}\right\}$ al comprarse el bien, no importando la acción $h_k$ que tome el individuo.

Si no se ha comprado el bien, se tiene $U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k) = h_k.\upsilon_k + (1 - h_k).c$.

Dado un momento inicial t con el estado $(\upsilon_t, r_t)$ la esperanza de la utilidad para el periodo t+1 se obtiene como[52]

$$E^h_{t,(\upsilon_t, r_t)} U(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1}, h_{t+1}) = \int_{\tilde{r}'_{t+1}=-\infty}^{+\infty} \int_{\tilde{\upsilon}'_{t+1}=-\infty}^{+\infty} U(\tilde{\upsilon}'_{t+1}, \tilde{r}'_{t+1}, h_{t+1}) P((\upsilon_t, r_t), d(\tilde{\upsilon}'_{t+1}, \tilde{r}'_{t+1}), h_t)$$

De este modo, asumiendo que el bien todavía no se ha comprado, se define la función de valor condicionada por el control $h$, $J^h(\upsilon_t, r_t)$, la cual depende contemporáneamente de $(\upsilon_t, r_t)$ y del control $h$,

[50] La probabilidad de que ese evento suceda es igual a 0

[51] Ver definiciones asociadas a los procesos estocásticos en el Anexo 3.

[52] Y, en general, para $k \geq t$ , utilizando las probabilidades de transición, se tiene que

$$E^h_{t,(\upsilon_t, r_t)} U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k) = \int_{\tilde{r}'_{t+1}=-\infty}^{+\infty} \int_{\tilde{\upsilon}'_{t+1}=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{\tilde{r}'_k=-\infty}^{+\infty} \int_{\tilde{\upsilon}'_{tk}=-\infty}^{+\infty} U(\tilde{\upsilon}'_k, \tilde{r}'_k, h_k) P((\upsilon_t, r_t), d(\tilde{\upsilon}'_{t+1}, \tilde{r}'_{t+1}), h_t) \ldots P((\tilde{\upsilon}'_{k-1}, \tilde{r}'_{k-1}), d(\tilde{\upsilon}'_k, \tilde{r}'_k), h_{k-1})$$

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = E^h_{t,(\upsilon_t,r_t)}\left[\sum_{k=t}^{\infty} \beta^{k-t} U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k)\right] = E^h\left[\sum_{k=t}^{\infty} \beta^{\tilde{k-t}} U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k) \mid r_t\right],$$

donde la esperanza se denota con $E^h[\cdot \mid r_t]$ para hacer explícito el condicionamiento respecto a $r_t$ que es la única variable que condiciona los valores posteriores del vector de estado.

Dado que el estado $(\upsilon_t,\, r_t)$ y la acción $h_t$ ya se conocen en el momento t, se tiene que

$$\begin{gathered} J^h(\upsilon_t, r_t) = E^h_{t,(\upsilon_t,r_t)} \sum_{k=t}^{\infty} \beta^{k-t} U(\tilde{\upsilon}_k, \tilde{r}_k, h_k) = \\ U(\tilde{\upsilon}_t, \tilde{r}_t, h_t) + E^h_{t,(\upsilon_t,r_t)}\left[\sum_{l=t+1}^{\infty} \beta^{l-t} U(\tilde{\upsilon}_l, \tilde{r}_l, h_l)\right]. \end{gathered}$$

Dada la especificación del sistema estocástico controlado, se obtiene

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = U(\tilde{\upsilon}_t, \tilde{r}_t, h_t) + \beta.E^h_{t,(\upsilon_t,r_t)}\left[E^{\tilde{h}}{}_{t+1,(\tilde{\upsilon}_{t+1},\tilde{r}_{t+1})}\left[\sum_{l=t+1}^{\infty} \beta^{l-t} U(\tilde{\upsilon}_l, \tilde{r}_l, h_l)\right]\right]$$

donde el control $\tilde{h}$ toma valores $(\tilde{h}_t, \tilde{h}_{t+1}, ...)$ dados por $\tilde{h}_l = h_l$, para $l \geq t+1$.

Con lo cual,dado que, por la especificación de P, la esperanza $E^{\tilde{h}}{}_{t+1,(\tilde{\upsilon}_{t+1},\tilde{r}_{t+1})}[.]$ se anula cuando $(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1}) = (\overline{T}, \overline{R})$ (lo cual sucede si $h_t = 1$), se arriba a la siguiente ecuación:

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = U(\tilde{\upsilon}_t, \tilde{r}_t, h_t) + \beta.(1-h_t).E^h{}_{t+1,(\upsilon_{t+1},r_{t+1})}\left[\sum_{l=t+1}^{\infty} \beta^{l-t} U(\tilde{\upsilon}_l, \tilde{r}_l, h_l)\right],$$

la cual se puede expresar como

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = [h_t.\upsilon_t. + (1-h_t).c] + \beta.(1-h_t).E\left[J^{\tilde{h}}(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1})|r_t\right]. \qquad (31)$$

Por otro lado, la función de valor óptimo $J(\upsilon_t; I_t) = J(\upsilon_t, r_t)$ que refleja las decisiones que maximizan el flujo esperado de beneficios a lo largo del tiempo, se obtiene tomando el supremo de $J^h(\upsilon_t, r_t)$ sobre los valores posibles de $h$, y está dada por

$$J(\upsilon_t, r_t) = \sup_{\{h_k\}_{k\geq t}} \left\{J^h(\upsilon_t, r_t)\right\} = J^{h^*}(\upsilon_t, r_t), \qquad (32)$$

donde $h^* = \{h^*_k\}_{k\geq t}$ denotará la función de control óptimo que resuelve (32).

A partir de (31), $J^h(\upsilon_t, r_t)$ se puede expresar en función del valor del control $h$ en el momento t, que denotaremos $a$, de la siguiente forma

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = \begin{cases} \upsilon_t & si\, a = 1 \\ c + \beta E\left[J^h(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1})|r_t\right] & si\, a = 0\,. \end{cases} \qquad (33)$$

De este modo, la función $J(\upsilon_t, r_t)$, debe cumplir con la ecuación siguiente

$$J(\upsilon_t, r_t) = \sup_a \{a.\upsilon_t + (1-a).c + (1-a).\beta E\left[J(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1})|r_t\right]\}.$$

Por último, dado que la elección de la acción $a$ será 1 ó 0, se obtiene la siguiente expresión para $J(\upsilon_t, r_t)$

$$J(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\left\{\upsilon_t, c + \beta E\left[J(\tilde{\upsilon}_{t+1}, \tilde{r}_{t+1}) \mid r_t\right]\right\}. \quad (34)$$

De este modo, se ha derivado la ecuación funcional recursiva (34) que debe cumplir la función de valor que solucione el problema y determine el tiempo de parada óptimal[53].

Así, en el período t, el individuo elige entre comprar el bien y recibir el beneficio $\upsilon_t$ o esperar hasta el siguiente período t+1 y recibir c en ese momento más el valor esperado de $J$ en el siguiente período, es decir, $J(\upsilon_{t+1}; I_{t+1})$.

Si se define el valor de reserva $W(r_k)$ en el momento k como

$$W(r_k) = c + \beta E\left[J(\tilde{\upsilon}_{k+1}, \tilde{r}_{k+1})|r_k\right], \quad (35)$$

la función óptima se puede expresar como

$$J(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\left\{\upsilon_t, W(r_t)\right\}$$

Además, en cada momento t el valor de la acción óptima $h_t^*$, asociada a la expresión (34), se puede expresar en función de un conjunto parada $B_t^* = \{(\upsilon_t, r_t) \mid \upsilon_t \geq W(r_t)\}$, como

$$h_t^* = \begin{cases} 1 & si\, \upsilon_t \in B_t^* \\ 0 & si\, \upsilon_t \notin B_t^*. \end{cases}$$

Lo ideal es encontrar un control markoviano estacionario $h^*$que permita resolver el problema. En ese caso, se tiene un conjunto de parada $B^* = B_k^*$, $\forall k \geq t$ , $\forall t \in \mathbb{Z}^+$, y la acción óptima está dada por

$$h_k^* = \begin{cases} 1 & si\ \{(\upsilon_k, r_k)\} \in B^* \\ 0 & en\, otro\, caso. \end{cases}$$

Por último, reemplazando la probabilidad $P$ en la expresión para $J^h(\upsilon_t, r_t)$, se obtiene

$$J^h(\upsilon_t, r_t) = [y_t.\upsilon_t + (1-y_t).c] + (1-y_t).\beta \int_{r'=-\infty}^{+\infty} \int_{\upsilon'=-\infty}^{+\infty} J(\upsilon', r')dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r_t, dr'),$$

[53] Esta expresión es similar a la planteada por McCall [19] para la búsqueda de empleo (Stokey y Lucas [32], sección 10.10).

con $(\upsilon', r') \in \mathbb{S}$.

Por lo cual, la expresión para la función de valor óptimo será

$$J(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\left\{\upsilon_t, c + \beta \int_{r'=-\infty}^{+\infty} \int_{\upsilon'=-\infty}^{+\infty} J(\upsilon', r' \mid r_t) dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r_t, dr')\right\}.$$

De esta forma, el problema de decisión de compra de bienes durables en un contexto estocástico tiene una estructura similar al problema de elección discreta estático donde el consumidor maximiza su utilidad esperada para un solo periodo, solamente que, en este caso, se reemplaza la función de utilidad de un sólo período por la función de valor. Por lo tanto, este problema se puede ver como una generalización de los modelos de elección discreta para un periodo[54].

Por último, el valor de reserva en el momento t se puede expresar como

$$W(r_t) = c + \beta E\left[\max\left\{\upsilon_{t+1}, W(r_{t+1})\right\} \mid r_t\right] =$$

$$= c + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left\{\upsilon', W(r')\right\} dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r_t, dr').$$

# 4. Existencia y Características de la Solución del Problema de Momento Óptimo de Compra del Bien Durable

En este capítulo se deriva la ecuación funcional que debe cumplir la función de valor óptimo que solucione el problema; se demuestra la existencia de esta función; y se indica sus principales características. Finalmente, se indica la regla que caracteriza el momento óptimo de compra del bien.

## 4.1. Existencia y Características de la Función de Valor Óptimo

***Teorema 9.*** **Existencia de la Función de Valor Óptimo**

El operador $T$ definido como

$$(TJ)(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\left\{\upsilon_t, c + \beta E\left[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t\right]\right\}, \tag{36}$$

donde $E$ es el operador esperanza generado por la función de probabilidad $F(\upsilon' \mid r')$ y por la función de transición $\Psi(r, dr')$, tiene un único punto fijo $J(\upsilon_t, r_t)$ que cumple

[54] Ver Rust [30]

con $J(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\{\upsilon_t, c + \beta E[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t]\}$. Para cualquier valor del vector de estados $(\upsilon, r) \in \mathbb{S}$, la función $J(\upsilon, r)$ determina el valor máximo del flujo de beneficios esperados del consumidor.

Demostración:

Se establece la secuencia de funciones $\left\{J^k(\upsilon, r)\right\}_{k\geq 0}$, para cualquier $J^0$ con $J^{n+1} = (TJ^{n+1})$, y se muestra que, dados los supuestos, estas funciones son acotadas[55]. Luego, dado que el conjunto de funciones acotadas constituye un espacio métrico completo[56] y, que la función $(TJ)(\upsilon, r)$ es un operador[57], basta mostrar que se cumplen las condiciones de Blackwell para establecer que el operador T es una contracción con módulo $\beta$[58]. Como se verifica que las funciones $J^n$ son también continuas, por lo tanto, aplicando el Teorema de la Contracción[59], se deduce que $T$ tiene un único punto fijo $J(\upsilon, r)$ dentro del espacio métrico de las funciones continuas y acotadas, y para cualquier $J^0$, la secuencia $J^{n+1} = (TJ^n)$ converge a $J(\upsilon, r)$.

Para verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Blackwell, en primer lugar, para ver las funciones $\left\{J^k(\upsilon, r)\right\}_{k\geq 0}$ son acotadas, debe notarse que el supuesto F4 garantiza que, $W(r_t)$, el segundo componente del máximo de la ecuación (36), es acotado[60]. Además, la función identidad, aplicada a $\upsilon$, que es acotado al ser el máximo de valores acotados (por el supuesto SA6), también es acotada.

[55] Utilizando la medida de distancia máxima.

[56] Ver definición en p. 47 de Stokey y Lucas [32] y ejercicio 3.4, parte d, de Irigoyen et al. [9].

[57] Dado que mapea este espacio métrico dentro de sí mismo.

[58] Teorema 3.3 de Stokey y Lucas [32].

[59] Teorema 3.2 de Stokey y Lucas [32].

[60] Para ello se utiliza el hecho de que $\upsilon_t \overset{d}{=} r_t + \epsilon$, donde $\epsilon$ es un error que se distribuye valor extremo con moda cero y, por lo tanto, $E[\upsilon_t] = E[r_t] + E[\epsilon] = E[r_t] + \gamma$ (al tener ambas variables aleatorias, $r_t$ y $\epsilon$, distribuciones de valor extremo).

En este caso, si la decisión de compra se hace en un momento $\tau$, se tiene $J(\upsilon_\tau, r_\tau) = \upsilon_\tau$.

Para $\tau = t + 1$ tenemos que

$W(r_t) = c + \beta E[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t] = c + \beta E[\upsilon_{t+1} \mid r_t] = c + \beta(\gamma + E(r_{t+1} \mid r_t) = c + \beta\gamma + \beta\mu(r_t)$

Para $\tau = t + 2$ tenemos que

$W(r_t) = c + \beta E[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t] =$
$= c + \beta E[\text{máx}\{\upsilon_{t+1}, c + \beta E[\text{máx}\{\upsilon_{t+2}, c + \beta E[J(\upsilon_{t+2}, r_{t+2} \mid r_{t+1}) \mid r_t]\}]\}] =$
$= c + \beta E[c + \beta E[\upsilon_{t+2} \mid r_{t+1}) \mid r_t]] =$
$= c + \beta c + \beta^2(\gamma + E[E[r_{t+2} \mid r_{t+1}] \mid r_t] = c + \beta c + \beta^2(\gamma + E[r_{t+2} \mid r_{t+1} = \mu(r_t)]) =$
$= c + \beta c + \beta^2(\gamma + \mu(\mu(r_t))) = c + \beta c + \beta^2\gamma + \beta^2\mu^2(r_t)$.

Así, en general, se obtiene

$$W(r_t) = c + \beta c + ... + \beta^\tau c + \beta^\tau\gamma + \beta^\tau\mu^\tau(r_t).$$

Luego, al aplicar el operador $(TJ)(.,.)$ también se obtiene una función acotada, al ser el máximo de dos funciones acotadas.

Asimismo, utilizando el supuesto F1 de la sección 3.4.2, se tiene que

$$EJ(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{máx}(\upsilon', W(r'))dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r, dr') = \int_{-\infty}^{+\infty} m(r')\Psi(r, dr')$$

donde $m(r') = F_\upsilon(W(r') \mid r').W(r') + \int_{W(r')}^{+\infty} tdF_\upsilon(t \mid r')$ es continua y acotada (pues, dadas las propiedades de la función de distribución $F_\upsilon$, se tiene que $F_\upsilon(W(r') \mid r').W(r') \leq W(r')$ y $\int_{W(r')}^{+\infty} tdF_\upsilon(t \mid r') \leq E_\upsilon[t \mid r']$)[61]. Así, $EJ(\upsilon_{t+1}, r_{t+1})$ es continua y acotada en r,

De este modo, $W(r_t) = c + \beta E[J^n(\upsilon_t, r_t) \mid r_t]$ también es continua y acotada y, como la función identidad es continua, la función obtenida al aplicar $(TJ^n)(.,.)$ es continua y acotada al ser el máximo de dos funciones continuas y acotadas.

A continuación se muestra que se cumplen las dos condiciones de Blackwell para funciones continuas y acotadas.

1. Monoticidad

Dados $J^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $J^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas, es decir $J^1, J^2 \in C(\mathbb{R})$, y acotadas, con $J^1(.,.) \leq J^2(.,.)$, se tiene $(TJ^1)(\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\{\upsilon_t, c + \beta E[J^1(\upsilon_t, r_t) \mid r_t]\} \leq \text{máx}\{\upsilon_t, c + \beta E[J^2(\upsilon_t, r_t) \mid r_t]\} = (TJ^2)(\upsilon_t, r_t)$, pues $E[J^1(.,.)] \leq E[J^2(.,.)]$.

2. Descuento

Dada una función $J^n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y cualquier constante $\alpha \in \mathbb{R}$

$[T(J^n + \alpha)](\upsilon_t, r_t) = \text{máx}\{\upsilon_t, c + \beta E[J^n(\upsilon_t + \alpha, r_t) \mid r_t]\} =$

$= \text{máx}\{\upsilon_t, c + \beta E[J^n(\upsilon_t, r_t) \mid r_t] + \beta\alpha\} \leq \text{máx}\{\upsilon_t + \beta\alpha, c + \beta E[J^n(\upsilon_t, r_t) \mid r_t] + \beta\alpha\} = (TJ^n)(\upsilon_t, r_t) + \beta\alpha$.

◆

***Teorema 10.*** **Propiedades de la Función de Valor Óptimo**

Bajo los supuestos hechos sobre el proceso de difusión, se cumple que

i. $E[J(.) \mid r]$ es monótona no decreciente en $r$, y

Tomando límite a esta expresión cuando $\tau$ crece se obtiene $W(r_t) = \frac{1}{1-\beta}c + \lim_{T\to\infty} \beta^\tau \mu^\tau(r_t)$. Por lo tanto, dado el supuesto F4, $W(r_t)$ es acotada.

[61] Ver Lema del anexo 4.

ii. $J(\upsilon, r)$ es monótona y no decreciente en ambos argumentos.

Demostración:

i. En primer lugar, se tiene que $\upsilon$ es estocásticamente no decreciente en r, es decir, que si $r_w \geq r_t$ entonces

$P(\upsilon > u \mid r = r_w) = 1 - F_\upsilon(u, r_w) \geq 1 - F_\upsilon(u, r_t) = P(\upsilon > u \mid r = r_t)$,

pues $\forall u$, $F_\upsilon(u, r_w) = exp(-e^{-(u-r_w)}) = exp(-e^{-(u-r_t)+(r_w-r_t)}) = exp(-e^{(r_w-r_t)}e^{-(u-r_t)}) =$

$$= exp(-e^{(r_w-r_t)})exp(-e^{-(u-r_t)}) \leq exp(-e^{-(u-r_t)}) = F_\upsilon(u, r_t).$$

Por lo tanto, la función $m(r') = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(\upsilon', W(r'))dF(\upsilon' \mid r')$ es monótona no decreciente en r'.

Además, $r_{t+1}$ es estocásticamente no decreciente en $r_t$, ya que, por el supuesto F1 de la sección 3.4.2, $\int_{s'}^{\infty} \Psi(r, dr') = 1 - \Phi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right)$ es diferenciable respecto a r, y $\frac{\partial \Psi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right)}{\partial r} = -\varphi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right) . \frac{\partial \varphi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left[-\frac{\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right)^2}{2}\right] . - \frac{\mu'(r)}{\sigma}\right] \geq 0$ pues $\mu'(r) \geq 0$.

Así, si $r_w \geq r_v$ , entonces $P(r_{t+1} > s \mid r = r_w) = 1 - \int_{-\infty}^{s} \psi(r_w, dr') \geq 1 - \int_{-\infty}^{s} \psi(r_v, dr') = P(r_{t+1} > s \mid r = r_v)$, $\forall s \in \mathbb{S}$.

Por lo tanto, se tiene que

$$E\left[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t = r_w\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} m(r')\Psi(r_w, dr') \geq \int_{-\infty}^{+\infty} m(r')\Psi(r_v, dr') = EJ(\upsilon_t, r_v).$$

De este modo, $E\left[J(.) \mid r_t\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} m(r')\Psi(r_t, dr')$ es monótona no decreciente en $r_t$.

ii. Claramente $(TJ)(\upsilon_t, r_t) = \max\left\{\upsilon_t, c + \beta E\left[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t\right]\right\}$ es no decreciente en $\upsilon_t$ al ser el máximo de dos funciones no decrecientes, ya que la función identidad es no decreciente en $\upsilon_t$, y $E\left[J(\upsilon_{t+1}, r_{t+1}) \mid r_t\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max(\upsilon', W(r'))dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r_t, dr')$ no depende de $\upsilon_t$ y, por lo tanto, también es no decreciente en $\upsilon_t$.

En el caso de $r_t$, el primer componente del máximo no dependen de $r_t$ y, por tanto, es no decreciente, mientras que el segundo es no decreciente en $r_t$ por la parte i, con lo cual el máximo de ambos también lo es.

◆

## 4.2. Existencia del Tiempo de Parada Óptimo

***Teorema 11.*** **Existencia del Tiempo Óptimo de Parada**

Existe una política óptima definida por un control (markoviano) estacionario $h$ determinado por un conjunto de parada $S = \{(\upsilon_t, r_t) \mid \upsilon_t \geq W(r_t)\}$, donde es óptimo comprar el bien, es decir

$$h_t = \begin{cases} 1 & si\, \upsilon_t \geq W(r_t) \\ 0 & si\, \upsilon_t < W(r_t). \end{cases}$$

El conjunto S es definido a partir de la función $W(r)$ que resuelve

$$W(r) = c + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{máx}(\upsilon', W(r'))dF(\upsilon' \mid r')\Psi(r, dr') \,. \tag{37}$$

donde $F(\upsilon' \mid r') = exp(-e^{-(\upsilon'-r')})$ y $\Psi(r, dr') = \phi\left(\frac{r'-\mu(r)}{\sigma}\right) dr'$ siendo $\phi$ la densidad normal estándar.

El conjunto de parada S es invariante en el tiempo y determina un tiempo de parada óptima del problema $\tau^* = \text{ínf}\,\{t : (\upsilon_t, r_t) \in S\}$.

Demostración:

Se construye una secuencia de funciones $\left\{J^k(\upsilon, r)\right\}_{k\geq 0}$, con $J^0(\upsilon, r) = \upsilon$ y

$$J^n(\upsilon, r) = \text{máx}\,\{\upsilon, c + \beta E\left[J^{n-1}(\upsilon', r') \mid r\right]\} = \text{máx}\,\{\upsilon, W^n(r)\}.$$

donde $\left\{W^k(r)\right\}_{k\geq 0}$ generada por $W^n(r) = c+\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} J^{n-1}(\upsilon', r')dF(\upsilon' \mid r')\right] d\Psi(r' \mid r)$ es la secuencia de funciones de valor de reserva.

Dado que $\left\{J^k(\upsilon, r)\right\}_{k\geq 0}$ converge a $J(\upsilon, r)$ por el Teorema 9, y $0 \leq J^0(\upsilon, r) \leq ... \leq J^{n-1}(\upsilon, r) \leq J^n(\upsilon, r)$, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 7.8 de Stokey y Lucas [32]), se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} W^n(r) = c + \lim_{n\to\infty} \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} J^n(\upsilon', r')dF(\upsilon' \mid r')\right] \Psi(r, dr') =$$

$$= c + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} J(\upsilon', r')dF(\upsilon' \mid r')\right] \Psi(r, dr') = W(\upsilon, r)$$

Como $W^n(\upsilon, r)$ son funciones acotadas y continuas, $W(\upsilon, r)$ también lo es[62].

◆

# 5. Características de la Dinámica de las Compras Derivada del Modelo

En este capítulo, a partir de la solución del problema de decisión de compra del bien durable, se derivan los valores de las probabilidades de que los individuos, represemtados por un agente representativo, compren el bien durable en cada período, así como las probabilidades de compra de cada tipo de bien durable. Luego, se analizan los determinantes de la probabilidad de comprar, y cómo se calcula esa probabilidad. En la sección final se muestra la forma de la dinámica de las compras agregadas de acuerdo al modelo.

## 5.1. Determinación de las Probabilidades de Comprar en Cada Período

- Probabilidad de posponer la compra

  La probabilidad $\pi_{0t}$ de que un individuo no compre el bien en el momento t se define como

$$\pi_{0t}(r_t) = P\left\{L_{i,t+1} = 0 \mid L_{it} = 0, r_t\right\} = P(\upsilon_t \leq W(r_t)) = F(W(r_t) \mid r_t)$$

  Dado el supuesto de distribución de valor extremo, esta probabilidad resulta

$$\pi_{0t}(r_t) = exp(-exp(-(W(r_t) - r_t))) = exp(-exp(-Y(r_t)), \qquad (38)$$

  donde $Y(r_t) = W(r_t) - r_t$.

- Probabilidad de comprar

  Se define la probabilidad $h_t$ de comprar el bien en el momento t como

[62]Como el conjunto de las funciones acotadas y continuas es un espacio (métrico) normado completo (Teorema 3.1 de Stokey y Lucas [32]) toda serie convergente converge a una función dentro de este mismo espacio pues, por definición, un espacio métrico es completo cuando las series de Cauchy convergen a un elemento del mismo espacio (p. 47 de Stokey y Lucas [32]), y las series convergentes satisfacen el criterio de Cauchy (según el ejercicio 3.5, parte b, de Irogiyen et al. [15]).

$$h_t(r_t) = 1 - \pi_{0t}(r_t)\,. \tag{39}$$

En este caso, usando (38) se tiene que

$$h_t(r_t) = 1 - exp(-exp(-Y(r_t)))\,. \tag{40}$$

- Probabilidad de comprar un bien determinado

  La probabilidad $\pi_{jt}$ de comprar el bien j en el momento t viene dada por

$$\pi_{jt}(r_t) = P(u_{jt} \geq u_{kt}, \forall k \neq j; u_{jt} \geq W(r_t))$$

  Esta probabilidad también puede ser expresada como

$$\pi_{jt}(r_t) = P(u_{jt} \geq W(r_t) \mid u_{jt} \geq u_{kt}, \forall k \neq j)).P(u_{jt} \geq u_{kt}, \forall k \neq j) = h_t(r_t).P(u_{jt} \geq u_{kt}, \forall k \neq j).$$

  Es decir, la probabilidad de elección de una determinada alternativa en un momento t es el producto de dos probabilidades independientes: La probabilidad de comprar el bien y la probabilidad de elegir determinada alternativa entre las disponibles en ese momento.

  Dada la forma funcional de las probabilidades de elección no condicionales para errores con distribución de Valor Extremo, se obtiene

$$\pi_{jt}(r_t) = \frac{h_t(r_t).exp(\delta_{jt})H_j(e^{\delta_{1t}}, .., e^{\delta_{Jt}}; z_J)}{H(e^{\delta_{1t}}, .., e^{\delta_{Jt}}; z_J)} = \frac{h_t(r_t).exp(\delta_{jt})H_j(.; z_J)}{R_t}\,. \tag{41}$$

## 5.2. Determinantes de la Probabilidad de Comprar

Observando $W(r)$ en (37), la probabilidad de comprar $h_t$ dependerá de los distintos valores que tomen c y $\beta$ los cuales reflejan la impaciencia por obtener el bien. Un mayor valor de $c$ o un $\beta$ mayor hacen que la probabilidad de posponer la compra crezca y la probabilidad de comprar disminuya.

Dados los supuestos 3.4.2, la función $\mu$ determina un valor cada vez mayor de la media esperada de la moda de calidad percibida por los consumidores, con lo cual la probabilidad de comprar para cada $r$ será menor porque el valor de reserva $W(r)$ crece. Sin embargo, el efecto a lo largo del tiempo es ambiguo porque también hace que $r$ crezca más rápido. Asimismo, una mayor varianza $\sigma^2$ disminuye la probabilidad de comprar dado que el valor de reserva de esperar aumenta con la volatilidad.

## 5.3. Cálculo de la Probabilidad de Comprar

Para el cálculo de la probabilidad de comprar $h_t(r_t)$ se debe notar que ésta es una transformación monótona de $Y(r) = W(r) - r$, por lo cual es útil derivar una forma funcional para $Y(.)$.

Como $\upsilon_t \overset{d}{=} r_t + \varepsilon$[63], donde $\varepsilon$ es un error valor extremo con moda cero con función de distribución $F_0(.)$, se tiene que

$$W(r_t) = c + \beta E\left[\text{máx}\left(r_{t+1} + \varepsilon, W(r_{t+1})\right) \mid r_t\right] = c + \beta E\left[r_{t+1} + \text{máx}\left(\varepsilon, W(r_{t+1}) - r_{t+1}\right) \mid r_t\right] . \tag{42}$$

Sustrayendo $r_t$ de ambos lados de (42) se obtiene

$$Y(r_t) = W(r_t) - r_t = c - r_t + \beta E\left[r_{t+1} \mid r_t\right] + \beta E\left[\text{máx}\left(\varepsilon, Y(r_{t+1})\right) \mid r_t\right].$$

Haciendo $M(z) = E\,\text{máx}(z, \varepsilon)$ y utilizando la forma funcional postulada para la ley de movimiento de $r_t$ en (29), se obtiene la siguiente ecuación funcional

$$Y(r_t) = c - r_t + \beta\mu(r_t) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y(x))\phi\left(\frac{x - \mu(r_t)}{\sigma}\right) dx \tag{43}$$

Es importante notar que $M(z)$ es continua, pues $\text{lím}_{z\to z_0} M(z) = \text{lím}_{z\to z_0} E\,\text{máx}(z, \varepsilon) = \text{lím}_{z\to z_0}\left[zF_0(z) + \int_z^{-\infty} \varepsilon f_0(\varepsilon)d\varepsilon\right] = z_0 F_0(z_0) + \int_{z_0}^{\infty} \varepsilon f_0(\varepsilon)d\varepsilon = E\,\text{máx}(z_0, \varepsilon) = EM(z_0)$

***Teorema 12. Existencia de Punto Fijo para Estimación de la Probabilidad de Comprar***

Si se define el operador funcional $\mathsf{T}$ como

$$(\mathsf{T}Y)(r) = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y(x))\phi\left(\frac{x - \mu(r)}{\sigma}\right) dx\,, \tag{44}$$

tiene un único punto fijo que cumple $Y(r) = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y(x))\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx$.

Demostración:

[63] $\overset{d}{=}$ se utiliza para denotar que dos variables aleatorias tienen igual distribución.

Dada una función $Y^0(r) = W^0(r) - r$, la secuencia $\left\{Y^k(r)\right\}_{k\geq 0}$ con $Y^{n+1}(r) = T(Y^n(r))$, obtenida por iteración, converge a una función $Y(.)$ que es acotada y continua en r[64], ya que:

i. Como $W^0(r)$ es acotada y continua y r es un valor acotado, $Y^0(r) = W^0(r) - r$ es una función acotada y continua.

ii. Los elementos de la sucesión$\left\{Y^k(r)\right\}_{k\geq 0}$ también son funciones continuas y acotadas pues $M(z)$ es continua, la densidad $\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right)$ posee la propiedad de Feller, $\mu(r)$ es continua y $\beta$ es acotado.

Por otro lado, $\mathsf{T}$ es un operador que cumple las condiciones de Blackwell suficientes para ser una contracción con módulo $\beta$, y como las funciones sobre las que se aplica son cantinuas, por el Teorema de la Contracción, se deduce que tiene $\mathsf{T}$ un único punto fijo. A continuación se muestra que T cumple las propiedades de Blackwell.

1. Monoticidad

Dados $Y^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Y^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas y acotadas, con $Y^1(.) \leq Y^2(.)$, se tiene $(TY^1)(\upsilon_t, r_t) = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y^1(x))\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx \leq c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y^2(x))\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx = (TY^2)(\upsilon_t, r_t)$, pues $M\left[Y^1(.)\right] \leq M\left[Y^2(.)\right]$.

2. Descuento

Dada una función $Y^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y cualquier constante $\alpha \in \mathbb{R}$

$[\mathsf{T}(Y^n + \alpha)](r) = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} M(Y^n(x) + \alpha)\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} E\, \text{máx}(Y^n(x) + \alpha, \varepsilon)\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx \leq$

$= c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} E\, \text{máx}(Y^n(x) + \alpha, \varepsilon + \alpha)\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx = c - r + \beta\mu(r) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} E\, \text{máx}(Y^n(x), \varepsilon)\phi\left(\frac{x-\mu(r)}{\sigma}\right) dx + \beta\alpha = (TY^n)(r) + \beta\alpha.$

◆

Una vez obtenida la función $Y(r)$, se puede calcular los valores de las probabilidades $h_t(r)$ y $\pi_{ot}(r)$ cuando la moda de la calidad observada es r.

## 5.4. Dinámica de las Proporciones de Compras Agregadas

Para obtener un indicador de las proporciones de compras totales agregadas para la población se integra las probabilidades de comprar $\pi_{ot}(r_t)$ sobre las características de

[64]Ver Nota 55.

la población. Dado que, en este caso, se han asumido características homogéneas (las preferencias son similares y los valores de c y $\beta$ son constantes para todos los individuos), estas proporciones estarán determinadas por los valores de las probabilidades de comprar para el consumidor típico.

La matriz de transición que gobierna los estados del consumidor típico está dada por

$$D(r_t) = \begin{bmatrix} \pi_{ot}(r_t) & h_t(r_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se define la tasa de participación $\mu_t$ en el mercado en el momento t como la probabilidad de que un consumidor típico no haya comprado el bien, $\mu_t = P\{L_{it} = 0\}$, la cual es igual a la proporción de la población que potencialmente todavía puede adquirir el bien en el momento t.

Dados la probabilidad de búsqueda $\pi_{0t}(r_t)$ y la matriz de transiciones $D(r_t)$, la tasa de participación se conduce a lo largo del tiempo de acuerdo a[65]

$$\mu_{t+1} = \mu_t \pi_{0t}(r_t)\,. \tag{45}$$

Asimismo, ajustando las probabilidades de comprar (39) y de elegir un determinado bien (41) por la condición de que la población participe en el mercado, se obtienen las ecuaciones para $s_t$, la proporción de población que compra un bien durable, y para $s_{jt}$, la proporción que compra la alternativa $j$,

$$s_t = \mu_t h(r_t)\,, \tag{46}$$

$$s_{jt} = \mu_t h(r_t) \frac{exp(\delta_{jt}) H_j(.)}{R_t}\,. \tag{47}$$

La combinación de estas tres ecuaciones y la ecuación de la probabilidad de compra individual (39) describen la evolución de las ventas a lo largo del tiempo, constuyendo un sistema de demanda agregada en dos niveles. El nivel de abajo determina la participación relativa en el mercado de los bienes individuales en base a las diferencias en sus calidades, y puede estimarse, a partir de (46) y (47), mediante el siguiente modelo empírico (panel con efectos fijos temporales)

$$\ln s_{jt} - \ln s_t = \delta_{jt} + \ln H_j(.) - r_t.$$

[65]Pues las proporciones de participación y no participación en el mercado cumplen $\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ 1-\mu_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{ot}(r_t) & h_t(r_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_t \\ 1-\mu_t \end{bmatrix}$

El nivel de arriba, proveniente de las ecuaciones (45), (46) y(47), es generado por la solución del problema de optimización intertemporal, y describe la evolución de la dinámica de las ventas agregadas de la industria, dada una forma funcional para el proceso de difusión.

Es factible estimar los valores de los parámetros subyacentes a los datos utilizando este tipo de modelos mediante técnicas econométricas complejas que se basan en métodos numéricos para encontrar los parámetros que determinen una solución para este sistema de ecuaciones (se requiere que constituyan un punto fijo para la ecuación (43)[66]).

Melnikov [23] muestra, utilizando datos agregados de compras generados mediante simulaciones de Montecarlo a partir de la ecuaciones mencionadas, que las técnicas econométricas basadas en modelos de elección discreta estáticos tienen una capacidad predictiva muy baja, y conducen a estimadores sesgados de los parámetros, específicamente una subestimación de los parámetros de preferencia por la calidad de los consumidores. Además, los resultados de la estimación empírica del sistema de ecuaciones para datos del mercado de impresoras de computadores en E.E.U.U., mediante la utilización de técnicas *ad hoc,* indican que el comportamiento previsor de los consumidores juega un rol muy importante la evolución observada de las compras que no se solía tomar en cuenta en los estudios econométricos sobre la demanda de bienes durables[67].

[66]Como los métodos utilizados por Rust[29] y Prince [27]

[67]Sobre este punto, ver también Prince [27], sección 5

**Anexos**

## 1. Relación entre Maximización de la Utilidad Aleatoria Ingreso-aditiva y Sistemas de Elección Probalísticos Invariantes a Traslacciones (SEPIT)

La afirmacón de que un SETIP se puede corresponder con una forma MUAIA, constituye una versión más específica de las condiciones determinadas por Daly y Zachary (1979) para establecer cuándo un SEP es consistente con MUAIA.

En general, un grupo de las condiciones SPT puede interpretarse como requisitos básicos para que las probabilidades dadas por $\pi_j(q_J, r, w_J, J, s)$ sean consistentes con la lógica de elección basada en maximización de la utilidad[68]. Al establecer que $\pi_j(q_J, r, w_J, J, s)$ sea SEP se cumple con que las probabilidades de elección sean no negativas y sumen 1.

De acuerdo a SP3 sólo las diferencias en utilidad promedio entre altenativas, no sus valores absolutos, determinan las probabilidades de las elecciones.

Según SP4 si la utilidad de una alternativa crece indefinidamente su probabilidad de elección será 1.

SP5 implica que se cumple condición $\frac{\partial^{(J-1)}\pi_j}{\partial q_j}(q_J, r, w_J, J, s) \geq 0$, la cual se puede interpretar como que si todas las alternativas, excepto la $j$ se vuelven menos atractivas, la probabilidad de elegir $j$ no debe decrecer.

SP6 es la versión análoga para el caso de elecciones discretas de la condición de simetría de derivadas cruzadas de las demandas de dos bienes[69].

### *Teorema.* Relación entre SEPIT y MUAIA

Un SEP que cumple las propiedades SPT es consistente con MUAIA.

Demostración:

Se define $F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \pi_1(0, \varepsilon_2 - t, ..., \varepsilon_m - t)\psi(t)dt$, donde $\psi(t)$ es una función de densidad arbitraria .

Dado que $q_j = u_j + \varepsilon_j$, por SPT4, $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F(\varepsilon_J) = 0$

y $\lim_{\varepsilon_j \to \infty} F(\varepsilon_J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(0, +\infty, ..., +\infty)\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 1$.

Además, por SPT5 y SPT6, $F_{1,...,m}(\varepsilon_J) = \pi_{1,2,..,m}(0, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, ..., \varepsilon_m - \varepsilon_1)\psi(\varepsilon) \geq 0$,

[68] Koning y Ridder [16], p. 9

[69] Para una demostración y discusión sobre este punto ver Mas-Colell et al. [18], p. 70.

con lo cual $F(\varepsilon)$ define una función de distribución acumulada que caracteriza una forma MUAIA.

Por otro lado, la propiedad MUA2, es decir, que la medida de las funciones de utilidad con empates en la utilidad proporcionada por distintas alternativas es nula, se deriva de que F es absolutamente continua, es decir, posee una función de densidad asociada, y de que F es no defectiva, es decir $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F(\varepsilon_J) = 0$ y $\lim_{\varepsilon_j \to \infty} F(\varepsilon_J) = 1$[70]. Además, la propiedad MUA1 se deriva directamente de SPT7.

◆

## 2. Uso de funciones de excedente social para comparaciones de bienestar

***Lema.*** **Función de Excedente Social y Maximización de la Utilidad Esperada de Elección Discreta**

Si MUAIA se cumple y la distribución F tiene primeros momentos finitos, entonces

$$G'(q_J, r, w_J, J, s) = E_{U|s} \max_{i \in J}[-q_i - \alpha(r, w, i; U)] = \int_{\varepsilon_J = -\infty}^{+\infty} \max_{i \in J}(\varepsilon_i - q_i) f(\varepsilon_J) d\varepsilon_J,$$

es una función de excedente social.

<u>Demostración</u>:

McFadden [22] demuestra que, bajo las condiciones mencionadas, la siguiente función

$$G(q_J, r, w_J, J, s) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \{\max_{i \in J}(\varepsilon_i - q_i) - \max_{i \in J} \varepsilon_i)\} f(\varepsilon_J) d\varepsilon_J,$$

es equivalente a (13)[71].

Por otro lado, se tiene que

$$G'(q_J, r, w_J, J, s) = G'(0_J, r, w_J, J, s) + \int_{t=-\infty}^{+\infty} [F(0_J + t, r, w_J, J, s) - F(q_J + t, r, w_J, J, s)] dt =$$

$$= G'(0_J, r, w_J, J, s) + G(q_J, r, w_J, J, s).$$

Dado que el primer término de esta ecuación es constante, la prueba de la parte i del Teorema 6 sobre la relación entre ES y MUAIA implica que también $G'(q_J, r, w_J, J, s)$ es una función de excedente social (Ver McFadden[22], apéndice).

◆

[70] Koning y Ridder [16]

[71] Lema 5.1 de McFadden [22]

## 3. Definiciones Básicas para un Sistema Dinámico Estocástico

### Proceso Estocástico[72]

Un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un conjunto de $\sigma$-álgebras $\{\mathscr{F}_k, k \in T\}$ donde $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{t+1} \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}$, un espacio medible $(Z, \mathscr{Z})$, y una colección indexada de variables aleatorias $X_k$:$\Omega \rightarrow Z$, $\{X_k\}_{k\in T}$ , tal que $X_k$ es medible respecto a $\mathscr{F}_k$, siendo $\Omega$ el conjunto de estados posibles, $\mathscr{F}$ una $\sigma$-álgebra, y P una medida de probabilidad[73].

En el caso especifico en que $\{\mathscr{F}_k, k \in T\}$ sea una filtración, es decir, $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+1} \subset ... \subset \mathscr{F}$[74], el espacio de probabilidad se denomina “filtrado” y se denota $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_k, k \in T\}, P)$.

Usualmente, se asume T es igual a $\mathbb{Z}^+$(tiempo discreto) o al intervalo $[0, \infty)$ (tiempo continuo). Además, se suele asumir que $Z = \mathbb{R}^l$ y $\mathscr{Z} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^l)$, siendo $\mathscr{B}(R^l)$ los borelianos de $\mathbb{R}^l$.

De este modo, se puede identificar la $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ como $\mathscr{B}(\mathbb{R}^l)^T$ asociada a un espacio medible $((\mathbb{R}^l)^T, \mathscr{B}(\mathbb{R}^l)^T)$[75], sobre el cual está definida la medida de probabilidad P.

Para un valor dado de $\omega \in \Omega$, $\{X_k(\omega)\}_{k\in T}$ es llamado la “senda” o camino muestral del proceso, siendo un vector aleatorio definido por funciones de T hacia $\mathbb{R}^l$.

Se denota con $x_t$ el valor que toma la variable $X_t$.

Asumiendo que T es igual a $\mathbb{Z}^+$, la $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ contendrá la $\sigma$-álgebra de Borel generada por los conjuntos de la forma

$$\{\omega : x_{t+1}(\omega_{t+1}) \in F_{t+1}, ..., x_{t+n}(\omega_{t+n}) \in F_{t+n}\} \text{ donde } F_{t+n} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^l),\ t = 0, 1, 2, ... \text{ y } n = 1, 2, ...$$

A partir de la medida P se define las medidas de probabilidad finito-dimensionales del siguiente modo:

$$P_{t+1,...,t+n}(F_{t+1} \times ... \times F_{t+n}) = P\{\omega \in \Omega : X_{t+1}(\omega_{t+1}) \in F_{t+1}, ..., X_{t+n}(\omega_{t+n}) \in F_{t+n}\},$$
$$\text{donde } F_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^l), \text{ y } n = 1, 2, ...$$

En general, $\forall C \in \mathscr{F}$, se tiene

[72] Basado en Oksendal [26], Definición 2.1.4.
[73] Ver definición de p. 223 de Stokey y Lucas[32]
[74] Ver definición 3.2.2 de Oksendal[26]
[75] Dada la topología producto. Ver sección 7.5 de Stokey y Lucas [32]

$$P_{t+1,...,t+n}(C) = P(\{\omega \in \varOmega : [X_{t+1}(\omega), ..., X_{t+n}(\omega)] \in C\}),\ n = 1, 2, ...$$

Se dice que un proceso estocástico es estacionario si las probabilidades $P_{t+1,...,t+n}(C)$ no dependen de t.

Asimismo, la probabilidad condicional de un evento $\{\omega \in \varOmega : [X_{t+1}(\omega), ..., X_{t+n}(\omega)] \in C\}$ dado el evento $\{\omega \in \varOmega : X_\tau(\omega) = x_\tau, \tau = t-s, ..., t-1, t\}$ se define como

$$P_{t+1,...,t+n}(C \mid x_{t-s}, ..., x_{t-1}, x_t),\ s = 1, 2, ..., t-1, n = 1, 2, ...$$

Un proceso estocástico es markoviano si cumple la siguiente propiedad $\forall C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{l+n})$

$$P_{t+1,...,t+n}(C \mid x_{t-s}, ..., x_{t-1}, x_t) = P_{t+1,...,t+n}(C \mid x_t),\ s = 1, 2, ..., t-1,\ n = 1, 2, ...$$

Para un período t determinado, la probabilidad de $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{l+n})$ en el período siguiente $P_{t+1}(C \mid x_t)$, se denomina probabilidad de transición, y se denota $P_t(x_t, C)$. Cuando el proceso es homogéneo en el tiempo posee “transiciones estacionarias”, es decir, para un estado $x$, se tiene la probabilidad $P(x, C)$, $\forall C \in \mathscr{F}$ que no depende del momento.

En general, dado el espacio medible $(\mathbb{R}^l, \mathscr{B}(\mathbb{R}^l))$, una función $P : \mathbb{R}^l \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^l) \to [0, 1]$ es una función de transición si cumple[76]:

i. Para cada $x \in \mathbb{R}^l$, $P(x, .)$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^l, \mathscr{B}(\mathbb{R}^l))$.

Para un valor dado $x_0 \in \mathbb{R}^l$, esta medida se puede expresar como $P(x_0, C) = \int_C P(x_0, dx) = \int_C dP(x_0, x)$, donde $P(x_0, dx) = dP(x_0, x)$ denota la densidad de transición.

ii. Para cada $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^l)$, $P(., C)$ es una función medible respecto a $\mathscr{B}(\mathbb{R}^l)$.

### Sistema Dinámico Estocástico en Tiempo Discreto

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, un espacio de estados $\mathbb{S}$ y un momento inicial $t$, el proceso $\{X_k\}_{k \geq t}$, donde $X_k : \Omega \to \mathbb{S}$ es un vector aleatorio que genera los valores de las variables de estado en el momento k, es un sistema dinámico estocástico si sigue una ley de movimiento generada mediente una función f como [77]:

$$X_{k+1} = f(k, X_k).$$

[76]En general, siguiendo a Lucas y Stokey [32](sección 8.1).

[77]Una formulación más general es $X_{k+1} = f(k, X_k, V_{k+1})$ donde $V_{k+1}$ es un vector de variables aleatorias que toman valores en un conjunto $\mathscr{V}$ (ya sea enumerable o $\mathbb{R}^n$con $n \geq 1$) y que afectan el valor de las variables de estado en cada momento. Ver Seierstad [31], Sección 1.1.

La probabilidad de que $X_{k+1} = x \in \mathbb{S}$ depende del valor de $X_k$, $x_k \in \mathbb{S}$, y del momento k.

Suponiendo que $\mathbb{S}$ es un conjunto discreto, si $Pr\,[X_{k+1} = x] = p_k(x \mid x_k)$ constituye una probabilidad de transición que indica la probabilidad de que el proceso se mueva al estado $x \in \mathbb{S}$ en el periodo $k+1$ a partir del estado $x_k \in \mathbb{S}$ en el momento k.

### Sistema Dinámico Estocástico Controlado en Tiempo Discreto

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, un espacio de estado $\mathbb{S}$ y un momento inicial $t$, una función $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{S} \to Y \subset \mathbb{R}^r$ que genera un vector de variables de control, se define el proceso controlado $\{X_k\}_{k \geq t}$, donde $X_k : \Omega \to \mathbb{S}$ es un vector aleatorio que genera los valores variables de estado en el momento k, mediante

$$X_{k+1} = f(k, X_k, h_k).$$

$\forall x \in \mathbb{S}$, la probabilidad de que $X_{k+1} = x$ depende de los valores de $X_k$ y del valor del control $h_k$ en el momento k.

Suponiendo que $\mathbb{S}$ es discreto, se tiene un mapeo $P : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{S} \times A \to Prob(\mathbb{S})$, donde $Prob(\mathbb{S})$ es el conjunto de medidas de probabilidad sobre $\mathbb{S}$, que caracteriza al proceso estocástico. Si este procesos es homogéneo en el tiempo, el mapeo se simplifica a $P : \mathbb{S} \times A \to Prob(\mathbb{S})$, y $\{X_k\}_{k \geq t}$ es un proceso de Markov. En ese caso, $p(x \mid x_k, h_k)$ indica la probabilidad de que, dado el estado $x_k \in \mathbb{S}$ y el valor del control $h_k$ en el momento k, el proceso se mueva al estado $x \in \mathbb{S}$ en el periodo $k+1$.[78]

En este caso, como el control $h$ no depende de la historia pasada de los vectores de estado[79] se denomina control markoviano. Si no depende del periodo será un control markoviano estacionario, $h : \mathbb{S} \to A$.

### Tiempo de Parada

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, y una secuencia de $\sigma$-álgebras $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{t+1} \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}$, una función $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ se denomina tiempo de parada respecto a $\{\mathscr{F}_t\}$ si

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ , para todo } t \geq 0.$$

[78] Si el conjunto el conjunto $\mathbb{S}$ es finito enumerable, se denomina cadena de Markov (ver Stokey y Lucas [32], sección 11.1), y tiene asociada una matriz de transición $P^h = (p(w|x, h(x)); x, w \in \mathbb{S})$.

[79] Ni de posibles perturbaciones aleatorias.

Es decir, es posible decidir si ha ocurrido $\tau \leq t$ sobre la base de la información de $\mathscr{F}_t$[80].

En general, dado un proceso estocástico $\{X_k\}_{k\geq t}$ para un tiempo de parada $\tau$, $\forall t \geq 0$ existe un conjunto $B_t \subseteq \mathscr{F}^t$, tal que $\{\tau = t\} = \{\tilde{x_t} \in B_t\}$, donde $\mathscr{F}_t = \sigma(\tilde{x_t})$ es la $\sigma$-álgebra generada por los valores del vector aleatorio $\tilde{x}_t = (x_1, x_2, , ..., x_t)$ que representa una senda del proceso.

**4. *Lema.* La esperanza de funciones reales de valor real calculada utilizando $\Phi(r, .)$ es acotada y continua en r.**

Para toda función acotada Borel-medible $h : R \to \mathbb{R}$ , el operador $K(h) = \int h(s)\Phi(r, ds)$ es una función acotada de r (ya que $\Phi(r, .)$ es una probabilidad de transición[81]. Además, al ser $\Phi(r, .)$ continua y diferenciable, $\Phi(r, .)$ tiene la propiedad de Feller, es decir, la función obtenida aplicando el operador K a la función h también será continua y acotada en r[82].

Una discusión general de las condiciones para la resolución del problema de decisión intertemporal, planteado como uno de optimización dinámica a partir de las elecciones de los agentes, se presenta en Rust [30], quien establece su relación con las funciones de excedente social y las distribuciones de valor extremo de los errores asumidas para la utilidad aleatoria aditiva[83].

80 Ver Definición 7.2.1 de Oksendal [26].

81 Por lo cual, según el Corolario del Teorema 8.1 de Stokey y Lucas [32], el operador H mapea este espacio dentro de si mismo

82 Ver definición de propiedad de Feller en Stokey y Lucas [32] p. 220, y para ver que se cumple la propiedad de Feller, para este caso, consultar el Teorema 8.1.4 de Oksendal [26]que abarca el caso más general de los procesos de difusión de Ito.

83 Ver Teoremas 3.2 y 3.3 de Rust [30], los cuales utilizan el concepto de función de excedente social (propuesto por McFadden [22]) ya presentado en el capítulo 2.

## Referencias

[1] Athreya. K & Lahiri, S. (2009). Measure Theory and Probability Theory. New York: Springer.

[2] Bartle, R. (1966). The Elements of Integration. New York: Wiley.

[3] Berry, S. (1994). Estimating Discrete Choice Models of Product Differentiation. RAND Journal of Economics, Vol. 25, No. 2, pages 242-262.

[4] Berry, S. & Levinsohn, J. & Pakes. A. (1995). Automobile Prices in Market Equilibrium. Econometrica, Vol. 63, No. 4, pages 841-90.

[5] Bertsekas, D. (1995). Dynamic Programming and Optimal Control, Athena Scientific, U.S.A.

[6] Brzezniak, Z. & Zastawniak, T. (1999). Basic Stochastic Processses. A Course Through Exercises. Springer.

[7] Cameron, A. & Trivedi, P. (2005). Microeconometrics: Methods and Applications. Cambridge University Press.

[8] De la Fuente, A. (2000) Mathematical Methods and Models for Economists. Cambridge Universtity Press.

[9] Dixit, A. & Pindyck, R. (1994). Investment Under Uncertainty. Princeton University Press.

[10] Embrechts, P. & Klüppelberg, C. & Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Spring Verlag.

[11] Goldberg, P. (1995). Product Differentiation and Oligopoly in International Markets: The Case of the U.S. Automobile Industry. Econometrica, Vol. 63, No. 4, pages 891-951.

[12] Gumbel, E. (1954). Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications. National Bureau of Standards Applied Mathematical Series 33, Washington D.C.

[13] Gowrisankaran, G. & Rysman, M. (2007). Dynamics of Consumer Demand for New Durable Goods. Mimeo. Boston University.

[14] Hairer, M. (2006). Ergodic Properties of Markov Process. Lecture given at The University of Warwick.

[15] Irigoyen, C. & Rossi-hansberg, E. & Wright, M. (2003). Solutions Manual For Recursive Methods In Economic Dynamics. Harvard University Press.

[16] Koning, R. y G. Ridder (1999). Discrete Choice and Stochastic Utility Maximization. Econometrics Journal, Royal Economic Society, Vol. 6, No. 1, pages 1-27, 06.

[17] Luce, R. D. (1959). Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis. New York: Wiley.

[18] Mas-Colell, A. & Whinston, M. & Green, J. (1995). Microeconomic Theory. USA: Oxford University Press.

[19] McCall, J. (1970). Economics of Information and Job Search. Quaterly Journal of Economics, Vol. 84. No. 1, pages 113-126.

[20] McFadden, D. (1973). Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior En: Frontiers of Econometrics, ed. by P. Zarembka. New York: Academic Press.

[21] McFadden, D. (1978). Modelling the Choice of Residential Location. In Spatial Interaction Theory and Planning Models (Karlqvist, A. & Lundqvist, L. & Snickars, F. & Weibull, J. eds.). North-Holland, Amsterdam. Pages 75-96.

[22] McFadden, D. (1981). Econometric Models of Probabilistic Choice, En: Structural Analysis of Discrete Data, ed, by C. Manski and D. McFadden. Cambridge: MIT. Press. Pages 198-271.

[23] Melnikov, O. (2001). Demand for Differentiated Durable Products: The Case of the U.S. Computer Printer Market. Yale University. Mimeo.

[24] Moral, M. (2004). An Approach to the Demand of Durable and Differentiated Products. Documentos de Traballo No. 412. Universidad de Vigo.

[25] Norris, J. (2007). Optimization and control. Mimeo.

[26] Oksendal, B. (1995). Stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag.

[27] Prince, J. (2007). Repeat Purchase Amid Rapid Quality Improvement: Structural Estimation of Demand for Personal Computers. Mimeo. Cornell University.

[28] Rust, J. (1985). Stationary Equilibrium in a Market for Durable Assets. Econometrica, Vol. 53, No. 4, pages 783-805.

[29] Rust, J. (1987). Optimal Replacement of GMC Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher. Econometrica, Vol. 55, No. 5, pages 999-1033.

[30] Rust, J. (1994). Structural Estimation of Markov Decision Processes. En: Engle, R. and McFadden, D. (eds.), Handbook of Econometrics, Elsevier Science, North Holland, Amsterdam, Vol. 4, pages 3082-3139.

[31] Seierstad, A. (2009). Stochastic Control in Discrete and Continuos Time. Springer.

[32] Stokey, N. & Lucas, R. (1989). Recursive Methods In Economic Dynamics. Cambridge: Harvard University Press.

[33] Torregrosa, R. La Teoría Dual del Consumidor. Microeconomía Superior I. Mimeo.

[34] Tversky, A. (1977). Features of Similarity. Psychological Review, Vol. 84, No. 4, pages 327-352.