PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PRAXEOLOGÍAS SOBRE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA FORMACIÓN DE UN INGENIERO QUÍMICO

Tesis para optar el grado de

Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Presentado por:

Walter Orlando Gonzales Caicedo

Dirigida por:

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

San Miguel, 2020

DEDICATORIA

Xiomi Gabriela

Y

Walter Alejandro

AGRADECIMIENTOS

A Dios, razón de mi existencia, por guiarme en el camino del bien para alcanzar y lograr mis metas personales y profesionales propuestas.

A la directora de esta investigación, Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, por su dedicación, orientación y apoyo incondicional en la culminación del trabajo de investigación.

A la Dra. Corine Castela, por sus recomendaciones realizadas en mejora de la investigación.

A mi familia.

RESUMEN

En esta investigación, se busca analizar el papel que cumple la Integral Definida en la formación de estudiantes de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, en la que se identifican praxeologías en las que interviene la Integral Definida y que se desarrollan en la disciplina matemática y en la disciplina intermediaria con la profesión, estableciendo conexiones y diferencias entre las praxeologías identificadas en las diversas organizaciones analizadas.

Para ello, se analizan textos de los cursos de matemáticas y de la especialidad, teniendo en cuenta elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que permiten describir una organización matemática, en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo, donde el uso de la Integral Definida tiene representaciones diferentes y sus significados son desde el margen de la disciplina intermediaria con la profesión.

Para la consecución de nuestro objetivo, se procedió, como primera etapa, identificar y realizar un análisis de los textos de matemáticas, lo que nos permitió ver el significado global de la Integral Definida a través de un estudio epistemológico para identificar el modelo praxeológico de la Integral Definida en la institución de enseñanza de la matemática.

La segunda etapa, sirvió para identificar y realizar el análisis de los textos de las disciplinas intermediarias con la profesión, en la que se consultó a expertos con la finalidad de recoger información sobre los usos de la Integral Definida en su campo de acción, lo que nos posibilitó poner de manifiesto los significados, interpretaciones y argumentaciones realizadas desde su propia institución de enseñanza de disciplinas intermediarias y así identificar el modelo praxeológico de los usos de la Integral Definida.

La investigación muestra cómo estos modelos praxeológicos identificados sustentan el ámbito de la actividad matemática que está en juego, de tal manera que se identifica las matemáticas a enseñar, específicamente aquellos temas en donde se debe poner mayor énfasis, ya que son fundamentales e importantes para los estudiantes de Ingeniería Química en su formación profesional. Asimismo, falta considerar los tipos de tareas específicos donde los estudiantes encuentren una conexión directa con los cursos de las disciplinas intermediarias, para que consideren y valoren la utilidad de la Integral Definida para resolver los tipos de tareas que se presentan en su entorno profesional, viendo de esta manera por qué y para qué estudian la Integral Definida.

Palabras clave: Integral Definida, Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeología, disciplinas intermediarias.

ABSTRACT

In this investigation, we seek to analyze the role of the integral definition in the training of students of Chemical Engineering of the National University Pedro Ruiz Gallo, in which praxeologies are identified in which the integral definition intervenes and which is considered in the discipline Mathematics and intermediary discipline with the profession, establishing connections and differences between the praxeologies identified in the various organizations analyzed.

To do this, analyze the texts of the mathematics and specialty courses, taking into account the theoretical elements of the Anthropological Theory of the Didactic that a mathematical organization can specify, in which the types of tasks, techniques, technologies and theories that support the procedures carried out, where the use of the integral definition has different representations and their meanings from the margin of the intermediary discipline with the profession.

To achieve our goal, the procedure, as a first stage, identify and perform an analysis of the mathematics texts, which identifies us to see the global meaning of the Defined Integral through an epistemological study to identify the praxeological model of the Defined integral in the institution of mathematics teaching.

The second stage, served to identify and perform the analysis of the texts of the intermediary disciplines with the profession, in which experts will be consulted with the determination to gather information on the uses of the Defined Integral in their field of action, which It allowed us to highlight the meanings, interpretations and arguments made from its own institution of teaching intermediate disciplines and thus identify the praxeological model of the uses of the Defined Integral.

The research shows how these identified praxeological models support the scope of the mathematical activity that is at stake, in such a way that the mathematics to be taught is identified, specific topics where greater emphasis should be placed, since they are fundamental and important for students of Chemical Engineering in their professional training. In the same way, it is necessary to consider the types of specific tasks where the students find a direct connection with the courses of the intermediary disciplines, so that they consider and value the utility of the integral definition to solve the types of tasks that are in their professional environment, seeing in this way why and why they study the Definite Integral.

Keywords: Definite integral, Anthropological Theory of the Didactic, praxeology, intermediary disciplines.

ÍNDICE

Lista de Tablas

Lista de Figuras

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones relacionadas con el estudio de la comprensión de la Integral Definida han identificado una serie de dificultades acerca de su enseñanza y aprendizaje, lo que se atribuye a la complejidad de los conceptos, propiedades y representaciones involucradas. Así, desde perspectivas cognitivas, se ha puesto en evidencia la complejidad de los objetos y procesos involucrados en relación a la Integral Definida y las diversas relaciones que se deben establecer entre ellos para generar su comprensión.

Dichos trabajos se centran en la Integral Definida, como áreas de regiones; sin embargo, de un estudio epistemológico de la Integral Definida, se puede concluir que también se relaciona con problemas de cuadratura y tangentes, con máximos y mínimos, centros de gravedad, funciones continuas y discontinuas y funciones integrables y no integrables.

Adicionalmente, de un estudio de la identificación de la razón de ser de la Integral Definida, en un programa de formación de ingenieros, se encuentra que la Integral Definida aparece en otros contextos de uso además del cálculo de áreas y si además se consideran las diversas instituciones involucradas, se encontrará que las praxeologías cambian al transitar de una institución a otra, lo que implica que tanto el bloque práctico como el teórico, se enriquecerán con procedimientos, definiciones, leyes y justificaciones que provienen de otras áreas profesionales. Por ejemplo, en el caso de la formación de ingenieros químicos, se considera en el área de Fisicoquímica, en donde la resolución de una tarea requiere de la aplicación de leyes de la termodinámica o de energía y transferencia de calor.

Por esa razón, en este trabajo, se propone identificar las praxeologías en las que interviene la Integral Definida, tanto en la disciplina matemática como en disciplinas intermediarias con la profesión. Para ello, se analizarán libros de texto de matemáticas y de cursos de la especialidad, teniendo en cuenta elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que permiten describir una organización matemática en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo.

De esa manera, se pretende hacer explícitos los distintos usos de la Integral Definida, así como las diferentes representaciones y significados que esta adopta cuando se emplea en disciplinas intermediarias con la profesión que, en este caso, es la Ingeniería Química.

La tesis considera cinco capítulos. En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación, junto a los antecedentes en la que se abordan aspectos planteados en diferentes investigaciones relacionadas con aspectos epistemológicos de la Integral Definida e investigaciones, desde la TAD relacionadas con la Integral Definida.

En el segundo capítulo, se describe la justificación, teniendo en cuenta las consideraciones fundamentales para la realización de este trabajo, así como el problema de investigación, los objetivos, el método de investigación y los elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), donde se considera el modelo para describir cualquier actividad humana a través de la noción de praxeología propuesto por Chevallard (1999), el modelo praxeológico extendido propuesto por Castela y Romo (2011) y el modelo praxeológico T4TEL propuesto por Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019).

En el tercer capítulo, se presenta un análisis praxeológico de los libros de textos de Cálculo, en donde se realiza una descripción y se presenta el análisis praxeológico de los mismos. Es decir, la organización matemática sobre la Integral Definida usando los elementos teóricos de la TAD.

En el cuarto capítulo, se realiza un análisis praxeológico de los libros de textos de la especialidad de Ingeniería Química, en donde se realiza una descripción y se presenta el análisis praxeológico de estos. Es decir, la organización de los elementos encontrados sobre los usos de la Integral Definida empleando los elementos teóricos de la TAD.

Finalmente, en el quinto capítulo, se describen las consideraciones finales referentes a la investigación realizada, las limitaciones y perspectivas a futuro.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presentarán resultados de diversos trabajos de investigación en torno a la Integral Definida, organizados según hayan sido de corte epistémico e institucional. Estas investigaciones emplean diferentes enfoques, puntos de vista y marcos teóricos. De esa manera, se busca hacer explícitas las razones de ser de la Integral Definida a lo largo del desarrollo de la matemática, así como aspectos claves que se deben tener en cuenta cuando se quiere que estudiantes universitarios comprendan conceptos matemáticos fundamentales, siendo uno de ellos el fenómeno de circulación de saberes entre instituciones.

1.1 Trabajos de investigación sobre aspectos epistemológicos relacionados con la Integral Definida

A continuación, presentaremos una organización de la evolución de la noción de la Integral Definida a lo largo de la historia. Se tomarán como referencia a los trabajos desarrollados por Bobadilla (2012), Crisóstomo (2012), Turégano (1994), Cabañas (2011), Ordóñez (2011), los cuales presentan una descripción de la evolución de la noción Integral Definida, desde la época griega, donde abordan problemas relacionados a calcular longitudes, áreas y cuadraturas de figuras curvilíneas, hasta los inicios del siglo XX.

Cabe resaltar que los trabajos de los griegos fueron fundamentales para el desarrollo de los nuevos métodos que sirvieron para solucionar problemas relacionados con el área bajo una curva y cálculo de tangentes, que se desarrollaron en el siglo XVII y, a partir de ello, se da el desarrollo del cálculo infinitesimal. Luego, estos métodos sirvieron de base para tratar problemas relacionados con funciones, problemas de cuadratura y tangentes, tanto máximos como mínimos, y centros de gravedad, que fueron abordados en el siglo XVIII.

En el siglo XIX e inicios de siglo XX, se produjo un cambio con respecto al concepto de integral, ya que ésta se estudió en base a las funciones de variable real, funciones continuas y discontinuas y funciones integrables y no integrables.

A continuación, presentaremos una organización de diferentes etapas en las que puede organizarse el desarrollo de la Integral Definida, siguiendo a Bobadilla (2012), Crisóstomo (2012), Turégano (1994), Cabañas (2011), Ordóñez (2011).

a) Enfoque geométrico de la Integral

El enfoque geométrico se refiere a usar la Integral para el cálculo del área. Según Cabañas (2011) el área fue tratada desde dos contextos:

-Estático: Caracterizado por usar el método de exhaución de Arquímedes, el método de los indivisibles de Cavalieri, el método basado en la propiedad de las progresiones geométricas de Fermat, el método basado en la aritmetización en términos de razones geométricas de Wallis y el método de las transformaciones de Leibniz.

-Dinámico: Caracterizado por usar el método basado en las cantidades que varían respecto de otras en relación a la variable universal, el tiempo, según Newton.

Considerando estos dos contextos, a continuación, expondremos un estudio de las ideas que originaron los conceptos iniciales de la Integral Definida a partir de Arquímedes, quien utiliza el método de exhaución y el método mecánico para calcular cuadraturas de figuras curvilíneas. Cabe señalar que Arquímedes evita usar todo lo relacionado con los infinitesimales y a los indivisibles.

De acuerdo a los aspectos mencionados, Cavalieri inicia el desarrollo de su método de los indivisibles, que le permitió calcular cuadraturas de regiones limitadas por curvas. Este se refiere a los indivisibles como una línea que está formada por puntos, un plano por líneas y un sólido por áreas planas.

Con la invención de la Geometría Analítica, Fermat trabaja con la suma de los términos de una progresión geométrica para calcular cuadraturas, la cual consiste en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en una figura donde sus bases deben estar en progresión geométrica.

Por su parte, Wallis desarrolla su "*Arithmetica Infinitorum"* que consiste en asignar valores numéricos a los infinitos indivisibles de Cavalieri. De esta manera, trata el problema de las cuadraturas en problemas de calcular el área bajo la curva.

Ante esto, Newton y Leibniz desarrollan sus propios métodos para tratar problemas relacionados con cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes y centros de gravedad.

Newton desarrolla el método de fluxiones, que consiste en las razones de cambio instantáneo de fluentes, y el método de las razones primera y última de cantidades evanescentes. En tanto, Leibniz desarrolla el "*calculus summatorius"*; es decir, que considera el área como una suma infinita de elementos diferenciales o infinitamente pequeño, donde además realiza una formalización de lenguaje y simbolización para la Integral Definida.

El método de exhaución y el método mecánico dados por Arquímedes (287-212)

En el trabajo de Bobadilla (2012), se señala que el método de exhaución y el método mecánico eran considerados por Arquímedes para calcular áreas de figuras curvilíneas, tales como el segmento parabólico. Asimismo, estos métodos son el inicio para tratar con los indivisibles y los infinitesimales.

Respecto al método de exhaución, el autor destaca que era utilizado para determinar aproximaciones de áreas entre figuras geométricas a partir de una medida conocida, en la cual se inscribe y circunscribe y así limitar la figura para determinar su área aproximada requerida.

En dicha investigación, también se afirma que la prueba para justificar este método se hacía por la doble reducción al absurdo y de esa forma se garantizaba su veracidad geométrica.

Respecto al método mecánico o de la palanca, Bobadilla (2012) apunta que Arquímedes determinó la cuadratura de la parábola y que para tal propósito usó el principio de la palanca, donde se elige un triángulo, cuya área era conocida, para balancear cada línea de la parábola con cada línea respectivamente del triángulo. Como las figuras geométricas están formadas por líneas, concluyó que el área obtenida bajo el segmento parabólico es la suma total de las líneas que formaban al segmento, el cual era igual a la suma total de las líneas del triángulo.

En la investigación, también se señala que en los métodos de Arquímedes se identifican dos formas diferentes de intuiciones respecto al área:

-Naturaleza atómica: Se refiere a la intuición de los indivisibles que se propone en el método mecánico.

-Naturaleza continua: Donde la intuición de lo infinitesimal se refleja en el método de exhaución.

A continuación, presentaremos el análisis realizado por Arquímedes respecto a la cuadratura del segmento parabólico por medio del método de exhaución y el método mecánico.

Para determinar la cuadratura del segmento parabólico, aplicando el método mecánico, se tiene:

> Proposición I: Sea ABC un segmento parabólico comprendido entre la recta AC y la parábola ABC, y sea D el punto medio de AC. Se traza la recta DBE paralela al eje de la parábola y uniendo AB y BC. Entonces, el área del segmento parabólico ABC es cuatro tercios del área del triángulo ABC. (Heath, 1912, p. 15)

Arquímedes garantizó su argumentación mediante el método mecánico (ver figura 1). Para tal propósito, considera el punto medio D en la cuerda AC. También considera las rectas DBE y AKF, las cuales son paralelas al eje de la parábola, así como la recta tangente CF y tomó la palanca CH, la cual balancea en su punto medio K, considera igualmente a MO una línea cualquiera del ΔAFC, que es paralela a AKF y a DBE, obteniendo que $CK = KH$.

Luego, considerando las propiedades de la parábola y las construcciones establecidas, comprueba que CK es la mediana del ΔAFC y además obtiene que:

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO} = \frac{CK}{KN} = \frac{HK}{KN}$$

consiguiendo que $\frac{MO}{OP} = \frac{HK}{KN}$. Por otro lado, considera el segmento TG, que es igual al segmento OP, de tal manera que el punto H es su centro de gravedad, obteniendo que $TH = HG$ y además es también el centro de gravedad del segmento MO, donde se obtiene:

$$\frac{MO}{TG} = \frac{HK}{KN}$$

Arquímedes encuentra que el punto H en el segmento TG y el punto N en el segmento MO se encuentran en equilibrio sobre el punto K, el cual es punto de apoyo de la palanca.

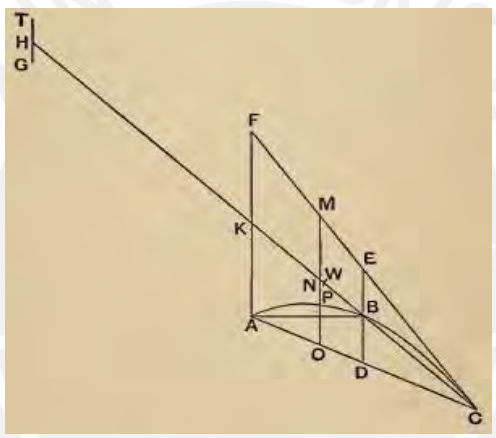


Figura 1. Segmento parabólico – Método Mecánico (Heath, 1912, p. 16)

Luego, Arquímedes, de forma análoga, realiza un tratamiento para los demás segmentos, ya que las figuras geométricas están formadas por líneas y estas cumplen las mismas propiedades y que estarán en equilibrio en el punto K. Concluye que el segmento parabólico ABC, en el punto H, equilibrará al ΔAFC en su centro de gravedad W y teniendo en cuenta que el centro de gravedad de un triángulo es $\frac{1}{3}$ de la distancia de su mediana, obtiene la relación:

$$\frac{\Delta AFC}{ABC_{seg-parab}} = \frac{HK}{KW} = \frac{3}{1}$$

De tal manera que el segmento parabólico ABC es $\frac{1}{3}$ ΔAFC, pero, como el área del ΔAFC es igual a 4 veces el área del ΔABC, Arquímedes concluye que el área del segmento parabólico ABC es igual a $\frac{4}{3}$ al área del ΔAFC.

Obsérvese que, en el método mecánico, se manifiesta los indivisibles; es decir, una región plana está formada por un conjunto de infinitas líneas paralelas, las cuales se consideran como rectángulos infinitesimales delgados, las cuales Arquímedes logró manipular a través de las leyes de la mecánica.

Por otro lado, para determinar la cuadratura del segmento parabólico, aplicando el método de exhaución, tenemos:

> Proposición 24: Cada segmento delimitado por una parábola y una cuerda AC es igual a cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base que el segmento y la misma altura. (Heath, 1897, p. 251)

Con respecto al uso del método de exhaución para determinar la cuadratura del segmento parabólico ABC, Arquímedes realiza una división del segmento parabólico mediante triángulos, de tal manera que los triángulos agoten a dicho segmento (ver figura 2).

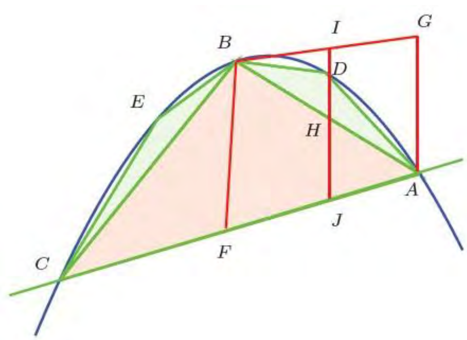


Figura 2. Segmento parabólico – Método de Exhaución. *Adaptación de Stillwell, 2010, p. 64*

Para tal propósito, Arquímedes considera el ΔADB y por las propiedades de la parábola obtiene que $BI = \frac{1}{2}BG$, $ID = \frac{1}{4}IJ$ y como $JH = \frac{1}{2}IJ$, entonces $DH = \frac{1}{4}IJ$. Obteniendo que el área del ΔADB es igual a la suma de las áreas de los ΔHDA y ΔBDH, estos triángulos tienen la misma área, ya que tienen la misma base HD y altura $BI = IG$. Esto es que el área del ΔADB es igual al área del ΔHJA, este a la vez es igual a $\frac{1}{4}$ del área del ΔBFA e igual a $\frac{1}{8}$ del área del área del ΔABC.

Por otro lado, obtiene, por simetría, que el área del ΔBEC es igual al área del ΔADB, donde se obtiene que las suma de las áreas del ΔBEC y del ΔADB es igual a $\frac{1}{4}$ del área del ΔABC. Análogamente, construye un numero finito de triángulos de tal manera que van agotando el segmento parabólico, donde cada secuencia de estos triángulos tiene un $\frac{1}{4}$ del área de la secuencia anterior de los triángulos obtenidos. Con esto, se genera una serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$, después de realizar n pasos, donde Arquímedes obtiene:

$$A_{(seg-parab)} = \Delta ABC\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$$

Arquímedes evita una serie infinita de esta secuencia de triángulos y para concluir aplica la doble reducción al absurdo, con lo cual demuestra que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del área del ΔABC.

Obsérvese que, en el método de exhaución, se manifiesta la intuición infinitesimal, pero que Arquímedes evade al inscribir un numero finito de triángulos en el segmento parabólico.

También determina el área del círculo, el volumen del elipsoide de revolución, volumen de un segmento de paraboloide de revolución, centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución, entre otros.

Analizaremos el volumen de la esfera, según Heath (1912), donde Arquímedes, para tal propósito, utilizo el método mecánico y en la que se tiene:

> Proposición 2:
>
> (1) Cualquier esfera es (con respecto al contenido sólido) cuatro veces el cono de igual base al círculo máximo de la esfera y la altura igual a su radio; y
>
> (2) el cilindro con una base igual a un círculo máximo de la esfera y una altura igual al diámetro es 3/2 veces la esfera. (Heath, 1912, p. 18)

Arquímedes, basándose de su método, garantizó su argumentación. Para la demostración de la parte (1), toma el circulo máximo $ABCD$ de una esfera (ver figura 3) de tal manera que sus diámetros AC y BD formen un ángulo recto entre sí.

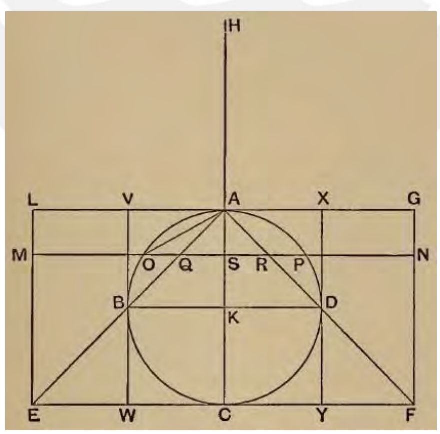


Figura 3. Volumen de la esfera (Heath, 1912, p. 19)

Luego, toma al círculo de diámetro BD y un plano perpendicular a AC y traza el cono, cuyo vértice es el punto A, de tal manera que la superficie del cono se corte con un plano que pasa por C que sea paralelo a su base y la sección que se obtiene será un círculo de diámetro EF. Tomando a este círculo como base, Arquímedes traza un cilindro con eje igual a AC, tal que prolonga AC en el punto H, obteniendo $AH = AC$ y de esta manera obtiene CH como la palanca de equilibrio y cuyo punto medio es A.

Por otro lado, Arquímedes traza la recta MN paralela a BD, la cual corta al círculo $ABCD$ en los puntos O y P, al diámetro AC en S, a la recta AE en Q y a la recta AF en R.

Asimismo, sobre la recta MN, traza un plano perpendicular a AC, el cual, corta al cilindro en un círculo de diámetro MN, a la esfera en un círculo de diámetro OP y al cono en un círculo de diámetro QR.

Con las construcciones establecidas, Arquímedes, partiendo de $AC = MS$ y $AS = SQ$, obtiene:

$$MS.SQ = \mathrm{AC.AS} = AO^2 = OS^2 + SQ^2$$

Luego, tomando $AH = AC$ obtiene:

$$\frac{AH}{AS} = \frac{AC}{AS}$$

Pero como $AC = MS$ y $AS = SQ$, entonces $\frac{AH}{AS} = \frac{MS}{SQ}$. Multiplicando, tanto al numerador como denominador por MS, se tiene:

$$\frac{AH}{AS} = \frac{MS^2}{SQ.MS}$$

Además, se sabe que $SQ.MS = OS^2 + SQ^2$, entonces:

$$\frac{AH}{AS} = \frac{MS^2}{OS^2 + SQ^2}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\frac{MS^2}{OS^2 + SQ^2} = \frac{MN^2}{OP^2 + QR^2}$$

De esta relación, Arquímedes obtiene que el círculo en el cilindro de diámetro MN es la suma del círculo en el cono de diámetro QR y el círculo de la esfera de diámetro OP. Es decir,

$$\frac{AH}{AS} = \frac{círculo\ en\ el\ cilindro}{círculo\ en\ la\ esfera + círculo\ en\ el\ cono}$$

Luego, Arquímedes señala que el círculo que está en el cilindro, en el lugar que se encuentra, equilibrará sobre el punto A, al círculo que se encuentra en la esfera y al círculo que se encuentra en el cono respectivamente, si estos dos círculos colocan su centro de gravedad en el punto H.

De forma análoga, se procede para las tres secciones obtenidas, es decir, si se traza en el paralelogramo LF otra recta paralela a AC, el círculo que se obtiene en el cilindro equilibrará en el punto A a los dos círculos que se obtienen respectivamente, en la esfera y en el cono de tal forma que colocados sobre la palanca en el punto H y manteniendo su centro de gravedad de ambos en el mismo punto H.

Por otro lado, como los sólidos se equilibran en el punto A y manteniendo el cilindro su centro de gravedad en el punto K y transportando la esfera y el cono sobre la palanca, con su centro de gravedad en H, se tiene:

$$\frac{HA}{AK} = \frac{cilindro}{esfera + cono\ AEF}$$

Pero como $HA = 2AK$, entonces $cilindro = 2(esfera + cono\ AEF)$. Además, se sabe que $cilindro = 3\ conoAEF$, por tanto, $cono\ AEF = 2(esfera)$.

Pero, como $EF = 2BD$, se obtiene $cono\ AEF = 8(cono\ ABD)$, entonces $esfera = 4(cono\ ABD)$.

Así es como Arquímedes argumenta y concluye que la esfera es igual a cuatro veces el cono de igual base al círculo máximo de la esfera y de altura igual a su radio.

Para la demostración de la parte (2), Arquímedes considera el paralelogramo LF y traza la recta VBW en el punto B y la recta XDY en el punto D, las cuales son paralelas a AC y considera el cilindro que tiene como base a los círculos de diámetros VX y WY, cuyo eje es AC.

Asimismo, sabía que $cilindro\ VY = 2\ (cilindro\ VD)$ y $cilindro\ VD = 3\ (cono\ ABD)$, entonces, $cilindro\ VY = 6\ (cono\ ABD)$.

Por el resultado obtenido en la parte (1), es decir, $esfera = 4(cono\ ABD)$, entonces se deduce que: $cilindro\ VY = \frac{3}{2}\ (esfera)$.

De esta manera, Arquímedes concluyó que el cilindro con una base igual a un círculo máximo de la esfera que una altura igual a su diámetro es $\frac{3}{2}$ veces la esfera.

Cabe resaltar que el método de exhaución y el método mecánico surgen por la necesidad de poder calcular las cuadraturas de figuras no rectilíneas de interés de esa época.

Cavalieri (1598-1647) y los indivisibles

Según Lombardo (1966), señala que Cavalieri, en la publicación de sus siete libros de Geometría, da a conocer sobre su trabajo y hace una aclaración sobre las figuras planas y sólidas que ya habían sido estudiadas por Euclides y Arquímedes, así como de otras que en esos momentos no habían sido tratadas por nadie, a excepción de Kepler.

Asimismo, señala que realiza un breve estudio de los trabajos de Arquímedes, a los cuales había agregado ciertas condiciones que eran necesarias, donde considera la revolución múltiple alrededor de diferentes ejes de secciones cónicas, sobre todo del círculo, la parábola, la hipérbola y de la elipse. Cavalieri da a conocer que su nuevo método (Primer método indivisibles) es muy eficaz y conveniente para medir los diferentes sólidos, además los sólidos de Arquímedes.

Por otra parte, también se indica que Cavalieri realiza cuadraturas de secciones cónicas, de la espiral, entre otras. Asimismo, indica que en el libro VII, Cavalieri, da a conocer su método de invisibles (segundo método), basado en el primero, al cual le realiza unos cambios, perfeccionando su método.

El método de los indivisibles, como se señala en el trabajo de Bobadilla (2012), consistía en el método colectivo relacionado con las secciones cónicas y, a partir de ello, se determinaba una razón entre dos figuras, luego comparaba los conjuntos completos de indivisibles que se obtenían y, por otro lado, el método distributivo, el cual estaba relacionado a los cilindros, esferas, paraboloides y esferoides, que se fundamentaba en relacionar dos figuras de la misma altura y así comparar, de forma individual, las mismas alturas en las figuras correspondientes.

En el trabajo de Crisóstomo (2012), se señala que lo indivisible, para Cavalieri, no era lo infinitamente pequeño, sino que era un elemento que constaba de $(n-1)$ dimensiones respecto a la magnitud que se estudiaba. De esa forma, se obtenía que los puntos son los invisibles de las líneas, las líneas son los indivisibles de las figuras planas y de las secciones planas de los sólidos.

En dicha investigación, se señala que un indivisible se obtenía entre la intersección de los objetos matemáticos que se traspasan a través de planos o líneas; es decir, se intentaba analizar, mediante los indivisibles, las áreas de figuras planas con sus respectivos volúmenes.

Por otra parte, el método de Cavalieri representaba al área como una suma de infinitos segmentos rectos y al volumen, que era determinado por la suma de infinitas superficies planas.

A continuación, se presentaremos el análisis realizado por Cavalieri, respecto sus métodos.

En relación al método colectivo, a través de éste pudo determinar la razón entre dos figuras, es decir, realiza una comparación de los conjuntos, los cuales están formados por los indivisibles. Además, en este método, Cavalieri hace uso del término *omnes lineae* para referirse a "todas las líneas", que es el concepto más importante en la teoría de Cavalieri, en lo que se refiere a las figuras planas.

Consideremos la figura 4, para ver cómo Cavalieri tomaba en cuenta a "todas las líneas" en este método. Para tal propósito, considera a la figura plana como $F = ABC$, donde BC es la línea *regula*, la cual determina una dirección en el plano F.

Donde "todas las líneas" pertenecientes a F, junto con la línea *regula* BC, conforman un conjunto de cuerdas l de F, que son paralelas a BC, Cavalieri hace uso de la notación $\mathcal{O}_F(l)$ con la finalidad de identificar a este conjunto de cuerdas.

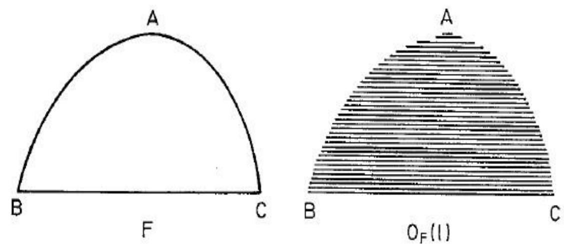


Figura 4. Todas las líneas $\mathcal{O}_F(l)$ (Andersen, 1985, p. 301)

Cabe indicar que Cavalieri, a partir de una figura plana y una línea *regula*, obtiene un conjunto de cuerdas las cuales son generadas al intersectar la figura F con líneas l, las cuales son paralelas a la línea *regula* BC, de tal manera que estas conforman los indivisibles de la figura F.

Por otro lado, Cavalieri al tratar con figuras sólidas los indivisibles se forman al intersectar la figura con los planos; es decir, que "todos los planos" que se toman de la figura sólida S con el plano tangente *regula,* conforman una figura volumétrica a partir de las intersecciones de la figura y el plano en movimiento.

Para tal propósito, consideremos la figura 5, donde Cavalieri define el sólido $S = ABCD$, el cual tiene los planos tangentes opuestos $\propto$ y BCD (Plano *regula*) y además hace uso de la notación $\mathcal{O}_S(p)$ para referirse a toda la colección de estos planos.

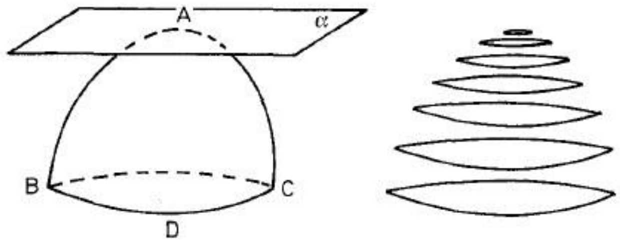


Figura 5. Todos los planos $O_S(p)$ (Andersen, 1985, p. 311)

Respecto al método distributivo, Cavalieri realiza una comparación entre dos figuras que tienen la misma altura. Éste es el conocido principio de Cavalieri:

> Dos figuras $F = BZV$ y $G = CRT$ que tienen la misma altura que la regula YH y las correspondientes cuerdas (o suma de cuerdas) $MN + OP$ y SX son iguales y paralelas a YH, se tiene entonces que $F = G$. (Andersen, 1985, p. 350)

Respecto a este principio, Cavalieri se basó en la superposición para validar su argumentación. (ver figura 6).

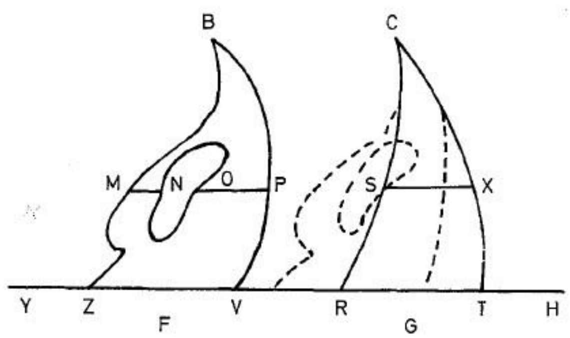


Figura 6. Principio de Cavalieri (Andersen, 1985, p. 350)

Cavalieri parte que las dos figuras F y G son iguales y tienen la misma altura; además que las cuerdas cumplen la propiedad de proporcionalidad, es decir, que para $l_1 = MN + OP$ en F y $l_2 = SX$ en G, se cumple:

$$\frac{MN + OP}{SX} = \frac{l_1}{l_2} = K$$

Entonces, se obtiene que:

$$\frac{F}{G} = K$$

En el método distributivo, se evidencia que, a partir de establecer la razón, se obtiene los indivisibles de las dos figuras, donde Cavalieri realiza una partición de cada indivisible con la finalidad de hacer la comparación más fácil y poder manipular las relaciones obtenidas de la colección de indivisibles.

Así, se tiene que el enfoque principal del método de los indivisibles de Cavalieri se fundamenta en el teorema que lleva su nombre:

> Teorema de Cavalieri: Si dos sólidos tienen la misma altura, y si las secciones hechas por los planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos se encuentran también en la misma razón. (Boyer, 1968, p. 362)

Uno de los ejemplos donde se muestra el uso de los indivisibles de Cavalieri es el siguiente: Si en un paralelogramo, su diagonal (diámetro) lo divide en dos triángulos que están formados por el mismo diámetro, entonces el área del paralelogramo es el doble de cada uno los triángulos determinados por dicha diagonal.

Consideremos la figura 7, donde Cavalieri considera el paralelogramo $ACDF$, donde CF es su diagonal, la cual lo divide en los triángulos CDF y ACF.

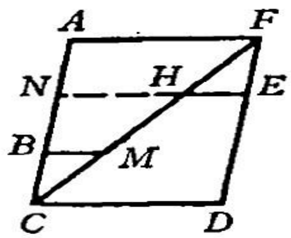


Figura 7. Indivisibles del paralelogramo (Lombardo, 1966, p. 251)

Si EH es un indivisible del triángulo CDF y es paralelo a CD, entonces se obtiene que $EF = CB$. Como EH y BM son paralelos a CD, entonces $EH = BM$, es decir, que se muestra que BM es el indivisible del triángulo ACF. De esta forma, es que Cavalieri determina que "todas las líneas" del triángulo CDF son iguales al del triángulo ACF y por lo tanto concluye que el área del paralelogramo $ACDF$ es el doble del área de cualquiera de los triángulos CDF o ACF.

De acuerdo con Boyer (1968) y Andersen (1985), en los métodos de los indivisibles de Cavalieri se evidencia la suma de potencias, esto a partir de generalizar los conceptos de "todas las líneas" a otros conceptos, tales como todas las potencias de orden n de líneas de una determinada figura F, esto es $\mathcal{O}_F(l^n)$ que, en términos de integración, es:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \text{ para } n = 1,2,\cdots,9$$

Por otro lado, se tiene que los indivisibles de Cavalieri es el elemento fundamental en su teoría, aunque en ninguna parte de sus trabajos aparece una definición explícita de indivisible.

En conclusión, el aporte de Cavalieri; fue fundamental ya que influenció notoriamente en los trabajos de sus contemporáneos y sucesores.

Fermat (1601-1665)

Con la invención de la Geometría Analítica, el Cálculo empieza por un proceso de algebrización del cálculo de áreas.

En el trabajo de Cabañas (2011), se señala que, a partir de Fermat, se establece un cambio de progreso en la forma de comprender el Cálculo, ya que con la introducción de las variables se trabajaron diversos problemas, obteniéndose sus resultados de forma algorítmica. Es así que el método de Fermat estableció una relación explicita entre la variable y y la variable x de la forma $y = f(x)$.

El método de Fermat, por su estructura, era geométrico, ya que estaba basado en la propiedad de las progresiones geométricas. Este método sirvió para determinar las tangentes de una determinada curva que estaba definida por un polinomio.

Respecto al método desarrollado por Fermat, este le permitió determinar cuadraturas de áreas bajo la curva de la forma $y = x^n$ en un intervalo $[0, a]$. El método consistía en inscribir rectángulos infinitesimales, de tal manera que sus bases estén en progresión geométrica.

Para tal propósito, Fermat considera la curva $y = x^n$ y para calcular el área bajo esta curva realiza una división del intervalo $[0, a]$ en subintervalos de tal manera que los puntos en la abscisa son a, aE, aE^2, aE^3,$\cdots$ donde $E < 1$ (ver figura 8).

Luego, determina las áreas de los rectángulos circunscritos, empezando del más grande, donde las bases son $a - aE$, $aE - aE^2$, $aE^2 - aE^3$, $\cdots$ y las alturas correspondientes son a^n, a^nE^n, a^nE^{2n}, a^nE^{3n}, $\cdots$ las áreas obtenidas son $a^n(a - aE) = a^{n+1}(1 - E)$, $a^nE^n(aE - aE^2) = a^{n+1}E^{n+1}(1 - E)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3) = a^{n+1}E^{2n+2}(1 - E)$, $a^nE^{3n}(aE^3 -$

$aE^4) = a^{n+1}E^{3n+3}(1-E), \cdots$ tal que estas se encuentran en progresión geométrica de razón $0 < E^{n+1} < 1$. Fermat consigue obtener la suma infinita de dichas áreas, representada por:

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

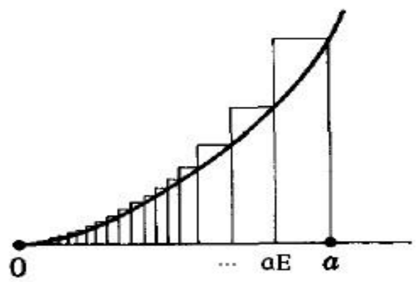


Figura 8. Cuadratura de la curva $y = x^n$ (Boyer, 1968, p. 384)

Obsérvese que el área obtenida es mayor que el área bajo la curva y las sumas de las áreas de los rectángulos se aproxima al área bajo la curva cuando E tiende a 1, ya que los rectángulos se van contrayendo. Cuando $E = 1$, se obtiene que el área bajo la curva $y = x^n$ es $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, en el intervalo $[0, a]$. Esto, en notación integral, se representa por:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Fermat también considera que, si $n = \frac{p}{q}$, tal que $\frac{p}{q} \neq 1$, se obtiene que:

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}$$

Asimismo, realiza cuadraturas para hipérbolas superiores generalizadas del tipo $y = x^{-p/q}$, tal que:

$$\int_0^a x^{\frac{-p}{q}} dx = \frac{q}{q-p} a^{\frac{q-p}{q}}$$

En las cuadraturas realizadas por Fermat para las parábolas e hipérbolas generalizadas, de acuerdo a Boyer (1968) y Mahoney (1994), subyacen aspectos importantes respecto a la Integral Definida, tales como la división del área bajo la curva, al considerar áreas infinitamente pequeñas; así como la aproximación del área, a través de la suma de los elementos de área mediante rectángulos infinitesimales, cuyas alturas están dadas por la ecuación analítica de la curva.

John Wallis (1616-1703)

Respecto al desarrollo de la teoría de Arithmetica Infinitorum, en el trabajo de Bobadilla (2012) se indica que la finalidad de Wallis era establecer un método que le permitiera determinar las cuadraturas de diferentes curvas. Para ello, propone 194 proposiciones estableciendo de esta manera una teoría general para ciertas familias de cuadraturas.

Es así que en los trabajos de Wallis se evidencian cuatro elementos matemáticos fundamentales para la formulación del concepto de la Integral Definida:

-Primer elemento: El cálculo del área del rectángulo como el producto de base por altura.

-Segundo elemento: La partición del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.

-Tercer elemento: Es la aproximación mediante la determinación numérica de la suma de los elementos de área infinitamente pequeños.

-Cuarto elemento: Es el intento de expresar, en forma equivalente, el límite de la suma de los elementos de área infinitamente pequeños cuando el número de elementos crece indefinidamente a medida que se hacen infinitamente pequeños.

Cabe indicar que Wallis es quien establece el símbolo actual de infinito ∞.

De acuerdo con Stedall (2004) y De Oliveira (2016), la mayor contribución de Wallis, tal como él mismo señaló, es haber tratado y transformado los problemas geométricos en suma de secuencias aritméticas; es decir, que un problema de Geometría se reduce específicamente a la Aritmética. Asimismo, señalan que, respecto a las proposiciones establecidas por Wallis, sobre todo en la proposición 1 y 2, se evidencia el desarrollo de su método que denomino *modus induction,* donde se manifiesta lo que Wallis pretendía con su trabajo, donde es plasmado su forma de realizar las cuadraturas para ciertas curvas curvilíneas de la época.

Respecto al método desarrollado por Wallis, analicemos el ejemplo dado por Hooper (1948), como se citó en Kallio (1966).

Wallis establece la relación entre el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo desde O a B con el área del rectángulo $OBAC$ (ver figura 9). Para tal propósito, realiza una subdivisión del intervalo $[O, B]$ y en $m + 1$ partes iguales, de tal manera que obtiene rectángulos cuyas alturas son seleccionadas, con la finalidad de que el área total bajo la curva $y = \mathrm{x}^2$ está dada por $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2$ y el área del rectángulo $OBAC$ está representado por $(m + 1)\mathrm{m}^2$.

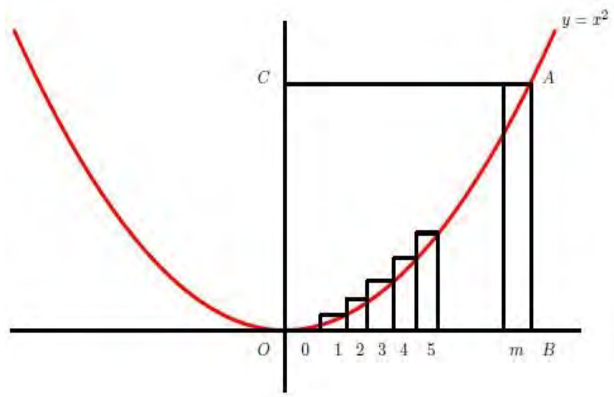


Figura 9. Cuadratura de $y = x^2$ adaptación de Kallio, 1966, p. 13

Al obtener las áreas, Wallis establece una relación de proporcionalidad representada por:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2}{(m+1)\mathrm{m}^2}$$

A partir de esta relación de proporcionalidad entre las áreas, Wallis comprueba que cuando se le da valores a m, se obtiene:

$m = 1$, entonces:

$$\frac{0^2 + 1^2}{(1+1)1^2} = \frac{0 + 1}{(2)1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(1)}$$

$m = 2$, entonces:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{(2+1)2^2} = \frac{0 + 1 + 4}{(3)4} = \frac{0 + 1 + 4}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(2)}$$

$m = 3$, entonces:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{(3+1)3^2} = \frac{0 + 1 + 4 + 9}{(4)9} = \frac{0 + 1 + 4 + 9}{9 + 9 + 9 + 9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(3)}$$

Así, sucesivamente para un m, se tiene:

$$\frac{0^2+\ 1^2+2^2+3^2+\cdots}{(m+1)\mathrm{m}^2}=\frac{0+\ 1+4+9+\cdots}{\mathrm{m}^2+\mathrm{m}^2+\mathrm{m}^2+\mathrm{m}^2+\cdots}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6m}$$

Wallis comprueba que cuanto mayor sea el número de términos, esta se aproxima a $\frac{1}{3}$, es más si esta continua hasta el infinito el valor de $\frac{1}{6m}$ “estará a punto de desaparecer por completo”, tal como lo indica en la proposición 21 Stedall (2004).

Tal como señala Boyer (1968), el resultado anterior es equivalente a su representación en notación integral, a:

$\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$, esto es, si $a=1$ entonces se obtiene $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

Por otro lado, también se indica que, mediante un análisis análogo, se obtiene, una representación para:

$$\int_0^a x^m dx=\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Donde $m\neq -1$, para todas las potencias racionales e irracionales y para potencias superiores de enteros, también cumple.

Cabe destacar que, a través de los análisis realizados por Wallis, se trataron los problemas cuadraturas.

Newton (1643-1727)

Según Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986), Newton establece tres significados distintos del cálculo infinitesimal:

-Significado infinitesimal: Influenciado a partir de los trabajos realizados por Barrow y Wallis, Newton realiza cálculos con cantidades infinitamente pequeñas, a las que llama *momentos*, y que son semejantes a los crecimientos infinitesimales de Fermat. Para ello, utiliza momentos de área, de los que hace depender el método de cuadratura. Para tal finalidad, toma el área de una superficie limitada por la curva representada por la función f y los ejes de coordenada y ordenada, y sea x un punto en la abscisa, entonces toma el crecimiento oy de área cuando la abscisa crece una cantidad infinitesimal que se denota por o, luego determina la tasa de variación instantánea del área en el punto de abscisa x, esto es la derivada, y verifica que es igual a la ordenada y en el punto de abscisa x de la curva (ver figura 10).

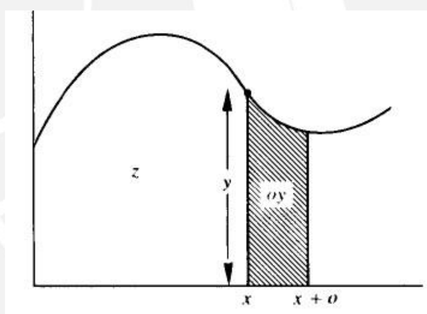


Figura 10. Tasa de variación instantánea del área (Dahan-Dalmedico & Peiffer 1986, p. 191)

Con todo esto, el área se puede representar por: $z = \frac{n}{m+n} a^{(m+n)/n}$ y la tasa de cambio o su derivada se representa por $y = ax^{m/n}$.

De esta forma, es que Newton consideró que las cuadraturas se tenían que tratar de manera inversa.

-Método de las fluxiones: Introducido en su obra *Métodos de las fluxiones y de series infinitas,* Newton considera que las cantidades matemáticas se originan por un aumento continuo; es decir, el espacio que describe un cuerpo en movimiento, el cual fluye o varía lo llamo *fluente*; a las velocidades de los movimientos que originan a ésta las llamo *fluxiones* y a las fluentes las denoto por x y a las fluxiones por $\dot{x}$. Newton, para fundamentar su método en bases sólidas, se inspira en el modelo de la mecánica teórica, en donde considera al tiempo como una variable universal de toda correspondencia funcional.

Newton enuncia el problema fundamental del Cálculo:

> Dada la relación de cantidades fluentes, encuentre la relación de sus fluxiones. E inversamente. (Dahan-Dalmedico & Peiffer 1986, p. 192)

Realiza su explicación de la solución mediante diversos ejemplos. Para ello, considera la curva $y = x^n$, donde toma a o como un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ representan los crecimientos infinitamente pequeños de x y de y, entonces, al reemplazar en la ecuación de la curva la y por $y + \dot{y}o$ y x por $x + \dot{x}o$, se obtiene:

$$y + \dot{y}o \ = (x + \dot{x}o)^n$$

A través de la fórmula del binomio, Newton obtiene una serie infinita de la forma:

$$y + \dot{y}o \ = x^n + n\dot{x}ox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}^2x^{n-2} + \cdots$$

Luego, reemplazando $y = x^n$ y dividiendo por o, llega a la conclusión:

$$\dot{y} \ = n\dot{x}x^{n-1}$$

Obsérvese que se determina una relación entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$, que es lo que realmente le interesa, y realiza diversas operaciones para eliminar todos los términos que contienen a o. Al introducir la noción de fluxión, Newton modifica, de forma sutil, el significado de infinitesimal.

Al suponer que las cantidades se desplazan en el tiempo, Newton esperaba solucionar las dificultades que argumentaban utilizar *pequeños* incrementos de las variables involucradas, como los incrementos son pequeños se podrían despreciar, pero se deberían tener en cuenta, ya que eran necesarios para realizar cocientes entre ellos por ser no nulos.

-El método de las primeras y últimas razones: Aparece en la obra *Quadratura curvarum*, en donde Newton trata de desaparecer todo lo relacionado con lo infinitamente pequeño. Para ello, procede con las notaciones ya establecidas, sin considerar una argumentación convincente de cuáles son los términos que contienen o, estableciendo la relación de la variación que existe entre la variable x con respecto a y y eliminando a o en la relación respectiva.

Newton llama *la última razón de las variaciones evanescentes* al término nx^{n-1} y de la misma forma lo plantea igual a la primera razón para variaciones incipientes, que es la relación de las fluxiones.

Con respecto al *significado infinitesimal*, Bobadilla (2012) señala que uno de los aportes más relevantes en los trabajos de Newton fue el estudio realizado con problemas de cuadraturas, donde realiza un análisis para cuadrar diferentes curvas y establecer una relación entre la cuadratura de una determinada curva con la tangente. Además, consigue determinar la ecuación de una curva que representaba la cuadratura de la otra, propósito que logró mediante el método de las fluxiones, en términos de las primeras y últimas razones. Por tal razón, es considerado uno de los creadores del análisis.

Por otra parte, al considerar o como la cantidad pequeña y luego eliminarla en todo ese proceso, hace uso de los métodos infinitesimales. Esto se debe a que Newton observa que el movimiento descrito por un móvil, genera curvas en un punto arbitrario y por tal motivo, en las cuadraturas de las curvas, se evidencia el conocimiento de la cinemática, que permite usar incrementos infinitamente pequeños.

Otro de los aportes fundamentales es la regla I de Newton, elemento matemático fundamental para el Cálculo, la cual establece, de forma algebraica, la relación inversa entre el cálculo de tangentes con el cálculo de áreas. Es decir, Newton implanta la relación inversa que existe entre las cuadraturas y el trazo de las tangentes, visto esto como un comportamiento geométrico y dinámico.

Newton determino el área de la curva $ax^{m/n}$, cuya cuadratura está dada por $\frac{an}{n+m}x^{(n+m)/n}$. La regla 1 la enunció y demostró en su trabajo *De analysi* de la siguiente forma:

Regla I: Si $ax^{m/n} = y$, entonces $\frac{an}{n+m}x^{(n+m)/n} = Área\ ABD$. (Horsley, 1779, p. 257)

Para garantizar tal argumentación, Newton realiza una demostración considerando lo siguiente: Para cualquier curva de la forma $AD\delta$ (ver figura 11), define la base $AB = x$, la cual es perpendicular a la ordenada $BD = y$ y define el área $ABD = z$. Asimismo, define $B\beta = o, BK = v$ y considera el área del rectángulo $B\beta HK$ (ov), el cual debe ser igual al área de la región $B\beta\delta D$ y de esta manera garantiza la relación entre dichas áreas, de tal manera que la variación de o produce una variación ov en el área total.

Con las definiciones establecidas, se tiene que $A\beta = x + o$ y $A\delta\beta = z + ov$. A partir de esto, Newton establece que, para cualquier relación arbitraria existente entre x y z, puede determinarse el valor de y. Para tal propósito, considera como un caso particular $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ de tal manera que debería determinar $y = x^{1/2}$.

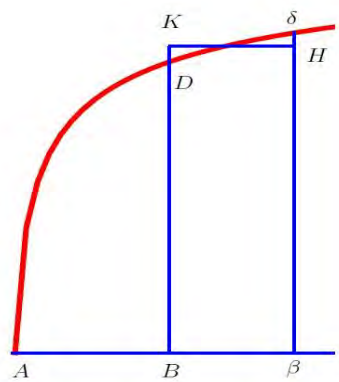


Figura 11. Cuadratura de la curva $AD\delta$. Adaptación de Horsley, 1779, p. 280

Empezamos elevando al cuadrado $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$, tal que se tiene $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, pero como $x = x + o$ y $z = z + ov$, reemplazando en:

$\frac{4}{9}x^3 = z^2$, obsérvese que la variación o produce una variación ov en el área total, tal que;

$\frac{4}{9}(x + o)^3 = (z + ov)^2$, desarrollando los binomios se obtiene,

$\frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2v^2$, pero, como $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, se tiene

$\left(\frac{4}{9}\right)3x^2o + \left(\frac{4}{9}\right)3xo^2 + \left(\frac{4}{9}\right)o^3 = 2zov + o^2v^2$, dividiendo ambos miembros por o, se tiene

$\left(\frac{4}{9}\right)3x^2 + \left(\frac{4}{9}\right)3xo + \left(\frac{4}{9}\right)o^2 = 2zv + ov^2$, Newton hace que $B\beta$ sea infinitamente pequeño, para que v sea igual a y, de tal manera que o se haga cero, obteniéndose:

$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2 = 2zv$, reemplazando los valores de z y v, se obtiene:

$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2 = 2\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) y$, despejando y, se obtiene $y = x^{1/2}$.

De esta forma es que Newton garantiza que, a partir de la cuadratura particular, se puede determinar su curva que la representa.

En términos actuales, Newton establece que $\int_0^x at^{m/n} \mathrm{dt} = \frac{an}{n+m} x^{(n+m)/n}$ si consideramos el punto A como el origen $(0,0)$, el punto B como $(x, 0)$ y la curva ADδ como $y = ax^{m/n}$ y en ella se evidencia que ha derivado la función área, es decir, la integral indefinida.

Estableciendo así una relación inversa entre el cálculo de tangentes y el cálculo de áreas, cabe indicar que Newton estableció una técnica para determinar problemas de cuadraturas y que deberían tratarse de manera inversa.

Según Cabañas (2011), en los trabajos de Newton, se evidencia el movimiento continuo, reflejado en los conceptos de fluxión y rapidez instantánea de la variable en relación al tiempo. Además, determina el área bajo la parábola $x^{m/n}$ a través de las primitivas, esto resume en calcular la Integral, que se basaba en determinar las fluentes de una fluxión especifica.

Para Waldegg (1982) (Citado por Cabañas 2011), la Integral de Newton es una integral indefinida, la cual podría calcular problemas relacionados con áreas y volúmenes.

Por otro lado, Crisóstomo (2012) señala que la concepción de Newton estuvo centrada en el movimiento y, a partir de ello, se obtenían las magnitudes. Por lo cual, en los trabajos de Newton, no se menciona ni utiliza el concepto de los indivisibles; es decir, que, en el movimiento, las fluxiones eran consideradas como derivadas y las fluentes eran consideradas como integrales.

De esta forma, Newton realizó un trabajo estructurado de todos los problemas relacionados con las propiedades de las líneas curvas. Además, con la identificación existente de la relación inversa entre la diferenciación y la integración, elaboró tablas (ver fig. 12) las cuales le permitieron obtener de forma sencilla los cálculos, logrando así minimizar los procesos de los cálculos que conllevaban a determinar e identificar ciertas propiedades de curvas conocidas en su época.

CURVARUM FORMÆ		CURVARUM AREÆ
I	$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II	$\frac{dz^{\eta-1}}{e^2 + 2efz^{\eta} + f^2 z^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2 + \eta efz^{\eta}} = t$, vel $\frac{-d}{\eta ef + \eta f^2 z^{\eta}} = t$

Figura 12. Tabla de fórmulas (Horsley, 1779, p. 378)

A partir de las afirmaciones hechas anteriormente, respecto a cómo las fluentes son generadas a través del movimiento y cómo estas fluyen continuamente en el tiempo, generándose así las razones de cambio, esto es que las velocidades de las fluentes son las fluxiones, es evidente que Newton realizó un tratamiento geométrico de dichas cantidades y estableció una relación inversa entre las cuadraturas y las tangentes.

El análisis realizado por Newton, de acuerdo a Whiteside (1968), parte considerando la figura 13, en donde señala que si las áreas ABC y $ABDG$ son generadas por las ordenadas BC y BD a través de un movimiento uniforme a lo largo de la base AB, las fluxiones de estas áreas están en razón con las ordenadas que son generadas por BC y BD. También indica que pueden expresarse por ellas mismas, ya que están en la misma proporción que los aumentos nacientes de las áreas. Cabe indicar que cuando se refiere a los aumentos nacientes se refiere a las primeras razones.

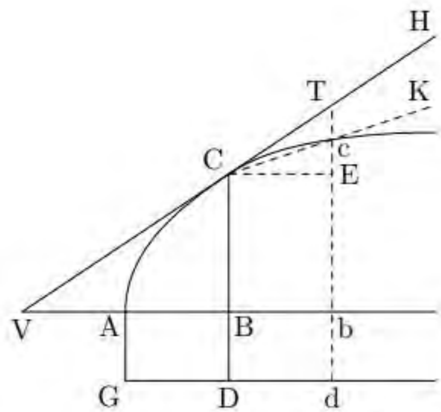


Figura 13. Cuadratura y Tangente (Whiteside, 1968, p. 124)

Para lograr esto, se tiene que realizar un movimiento de la ordenada BC hacía bc para formar el paralelogramo $BCEb$, tal que la línea VTH intersecta a la curva en el punto C y esta a la vez se intersecta con bc en el punto T y con AB en V, donde se tiene que los incrementos son Bb en la abscisa B, EC en la ordenada BC y Cc en la línea curva ACc; obteniéndose que el lado del triángulo CET, se encuentren en proporción de estos aumentos nacientes, de esta forma, es que se logra que las fluxiones de AB, BC y AC son como los lados CE, ET y CT del triángulo CET o por los lados del triángulo VBC, ya que este es semejante.

Por otro lado, si se traza la línea K, la cual se une con Cc, y haciendo que la ordenada bc regrese hacia BC, se logra que la línea CK coincida con la tangente CH, obsérvese que la tangente, en un determinado punto, lo considerara como la última razón; de tal manera que el triángulo evanescente CEc se transforma en el triángulo CET, con la finalidad que sus lados evanescentes CE, Ec y Cc coincidieran con los lados CE, ET y CT del triángulo CET.

Por lo tanto, se tiene que las fluxiones de las líneas AB, BC y AC se encuentren en la misma relación.

Para Newton, si se considera un punto arbitrario y se realiza un movimiento, se genera una curva y por tal motivo es que, en las cuadraturas de las curvas Newton, se parte de la idea de la cinemática, lo que le permitió usar los incrementos infinitamente pequeños.

Leibniz (1646-1716)

Según Knobloch (2015), señala que Leibniz realizó una especificación entre análisis que significa cálculo y analicidad es calculabilidad y que implica a la identificación de los elementos que constituirán su nuevo Cálculo. Tales elementos son: Figura analítica, campo analítico de la nueva Geometría, curva análitica, cálculo analítico exacto, expresión aritmética o analítica, método cierto y analítico, relación analítica, ecuación analítica y cuadratura analítica.

Por otro lado, cabe resaltar que Leibniz define como figura analítica a aquella que relaciona a la ordenada con la abscisa, la cual se expresa a través de una ecuación. De esta manera, las figuras analíticas representan curvas y no áreas delimitadas por curvas.

Respecto a las curvas analíticas, las define como aquellas que se les puede encontrar todos sus puntos mediante un cálculo exacto; al cálculo analítico exacto como aquel cuando la cantidad buscada se determina a partir de los datos dados por medio de una ecuación, donde su incognita es la cantidad buscada. De esta manera, es como Leibniz generaliza la noción de ecuación algebraica.

Asimismo, Laibniz realiza una clasificación de curvas analíticas: En simples y no simples.

Las simples se clasifican en: *racionales*: $y = x$, $y = ax^2$, $y = ax$ (paraboloide) y $xy = a$ (hiperboloide); *no racionales*: $y = \sqrt{x}$, $y^2 = ax^3$ (paraboloide) y $y^2x^3 = a$ (hiperboloide).

Las no simples se clasifican en: *racionales*: $x = py^2 + y$ y *no racionales:* $y^2 + x^2 = r^2$.

Según Baron (1985) (Citado por Crisóstomo 2012), los resultados fundamentales obtenidos en los trabajos desarrollados por Leibniz, para la creación del Cálculo, fueron: Las secuencias de diferencias, el triángulo característico, la transmutación y la serie para π.

Los conceptos básicos para el desarrollo del cálculo que utilizó fueron: Diferenciales, integrales o sumas y las diferenciales de orden superior.

Asimismo, los conceptos, el lenguaje, las notaciones y representaciones simbólicas que Leibniz utilizó fueron fundamentales para el desarrollo y avance del cálculo.

Por otro lado, Ordóñez (2011) señala que Leibniz estableció una relación con el cálculo infinitesimal. Para ello, consideró que el conjunto de valores de una determinada función es el resultado de una sucesión de números y que la diferencia entre dos números es el resultado de realizar la diferencia de dos valores cercanos de dicha función; la cual denota por l a la diferencia de estos dos números.

Asimismo, denota a la suma por omn, obtenida de la palabra latina *omnia*. Con esta notación simbólica, de manera formal, Leibniz denota por $omn. l = y$, $dy = l$ y $\int$ una S de suma estilizada, para omn. De esta manera, se establece la relación $\int dy = y$, notación que se ha conservado hasta hoy, estableciendo un método formal que le permitió determinar sumas y diferencias de infinitesimales.

A través de los trabajos realizados por Pascal, en especial sobre el triángulo característico, Leibniz demuestra que el cálculo de la tangente a una curva depende de las razones establecidas por la diferencia entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas se hacen infinitamente pequeñas y, de esta forma, la cuadratura dependerá de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente finos obtenidos en los intervalos infinitesimales sobre el eje de abscisas. De esta manera, identifica el problema inverso de las tangentes como de las cuadraturas.

Leibniz denota a dy como el crecimiento momentáneo de y. Asimismo, identifica que un arco de curva es un lado de un polígono que tiene una infinidad de lados y, para determinar el área bajo una curva, realiza la suma de todas las áreas de los rectángulos obtenidos.

La operación fundamental, en el cálculo de Leibniz, es obtener el cálculo de las diferenciales. Se obtiene que la sumatoria es la operación inversa y por tal razón se puede obtener una tabla de integrales a partir de una tabla de diferenciales.

Respecto a las áreas y a los volúmenes, los considera como sumas, ya que se obtienen invirtiendo las operaciones de derivación y que es totalmente contrario a lo establecido por Newton, quien consideró a la Integral Indefinida y determinó áreas y volúmenes a partir de su tasa de variación; es decir, que Leibniz obtiene la Integral Definida al interpretar las áreas como la suma de rectángulos y a los volúmenes como la suma de cilindros. Estas dos contribuciones fundamentales del significado de la Integral Definida son consideradas en el cálculo integral elemental.

Según Cabañas (2011), el área fue considerada como una suma de las ordenadas; es decir, para Leibniz, el concepto principal era considerar los diferenciales infinitamente pequeños que se obtenían a partir de dos valores sucesivos de una determinada sucesión y respecto a la noción de la integración, la cual se obtenía a partir de cierta clase de suma de diferenciales.

Respecto a la *regla de transmutación,* esta fue fundamental en el cálculo de Leibniz, ya que le permitió determinar el área bajo una curva partiendo de dos formas diferentes: La primera como la suma de pequeños rectángulos y la segunda como la suma de pequeños triángulos.

Respecto al triángulo característico, usado por Leibniz, de acuerdo con Edwards (1982) y Burton (2007), fue la base fundamental para desarrollar su cálculo. A través de este, establece una relación entre la cuadratura, considerada como la suma de ordenadas, con la pendiente de la tangente, considerada como la diferencia entre ordenadas sucesivas.

Para tal propósito, Leibniz realiza y establece propiedades del triángulo característico (ver figura 14), que es el triángulo rectángulo PQR de lados infinitesimales $PQ = dx$, $RQ = dy$ y PR. Considera la tangente UP a la curva $y = f(x)$ y además, Leibniz se da cuenta que el triángulo característico es semejante a los triángulos PVW, cuyos lados son $PW = n$, que es la normal, la ordenada $PV = y$, que es perpendicular a UW y $VW = \sigma$, que es la subnormal y el triángulo UVP de lados $UP = t$, que es la tangente, $UV = s$ la subtangente y la ordenada $PV = y$.

Leibniz, por la semejanza de los triángulos PQR y PVW, obtiene que:

$$\frac{dy}{\sigma} = \frac{dx}{y}$$

De donde, $ydy = \sigma dx$

Leibniz concluye que:

$$\int y\, dy = \int \sigma\, dx$$

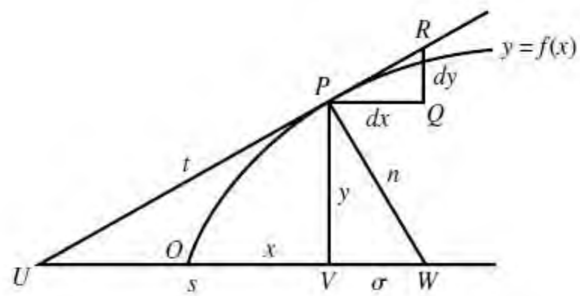


Figura 14. Triángulo Característico (Burton, 2007, p.415)

Por otro lado, Leibniz, al hacer girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x, obtiene una fórmula para superficie de revoluciones al considerar que la cuerda PR tiene la misma longitud que la curva $y = f(x)$, esto al observar que el triángulo característico es semejante al triángulo UVP, obtiene:

$$\frac{n}{ds} = \frac{y}{dx}$$

De donde, $ndx = yds$

Entonces, Leibniz concluye que:

$$\int n\, dx = \int y\, ds$$

En este proceso que realiza Leibniz, se observa que, a través del triángulo característico, plantea los resultados en términos de una ecuación diferencial para obtenerla en una suma.

Por otro lado, se tiene el método de transmutación desarrollado por Leibniz. Según Edwards (1982), éste le permitió realizar cuadraturas de curvas de esa época.

El método se fundamenta en lo siguiente: La curva $y = f(x)$, el eje x, la recta $x = a$ y $x = b$ determinan la región (ver gráfica 15).

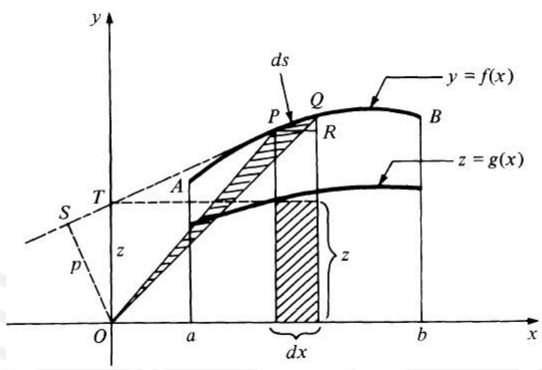


Figura 15. El método de transmutación (Edwards, 1982, p. 246)

Se toman los puntos $P(x, y)$ y $Q(x + dx, y + dy)$de tal manera que se forma el triángulo característico PRQ. Además, se considera la tangente que está determinada por el arco infinitesimal ds que se encuentre entre los puntos P y Q y su prolongación corta al eje y en el punto $T(0, z)$, donde $z = y - x\frac{dy}{dx}$ denotemos al segmento $OS = p$ perpendicular a la tangente SQ. Se tiene que el triángulo OST es semejante al triángulo característico PRQ, de donde se obtiene que $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$. Entonces, el área del triángulo infinitesimal está dada por:

$$a(OPQ) = \frac{1}{2}p\,ds = \frac{1}{2}z\,dx$$

Por otro lado, Leibniz, al considerar el sector OAB, el cual está acotado por $y = f(x)$ y los segmentos OA y OB, además formada por los triángulos infinitesimales OPQ, obtiene:

$$a(OAB) = \frac{1}{2}\int_a^b z\,dx, \text{ donde } z = g(x)$$

De la figura 12 y de las condiciones establecidas, se tiene que:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + a(OAB) = \frac{1}{2}[xy]_a^b + a(OAB)$$

Reemplazando el valor de $a(OAB)$, se obtiene el teorema de transmutación de Leibniz o mejor conocido como el teorema fundamental del Cálculo, dado por:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + a(OAB) = \frac{1}{2}[xy]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b z\,dx$$

Obsérvese que, como consecuencia de esta fórmula, se obtiene la integración por partes.

Aportes significativos del enfoque geométrico de la Integral

El origen de la Integral Definida se evidencia en los trabajos de Arquímedes, reflejados en sus métodos para determinar áreas y volúmenes empleados en el siglo III A.C. Según los sucesos históricos reportados, estos trabajos fueron retomados y se consolidaron en el siglo XVII, a través de los trabajos realizados por Newton y Leibniz.

En la figura 16, se presentamos una síntesis de los aportes más importantes de distintos matemáticos en relación a la evolución de la Integral Definida.

En primer lugar, señalamos el aporte de Arquímedes sobre el cálculo de cuadraturas, en la que, a través de sus métodos, pudo realizar la cuadratura del segmento parabólico, dar una aproximación de π, obtener expresión específica para determinar el área del círculo, el volumen del elipsoide de revolución, el volumen de un segmento de paraboloide de revolución, centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución, entro otros.

Asimismo, en el método mecánico, pudo evidenciar las propiedades de la parábola, nociones de Física y en el método de exhaución propiedades de los triángulos.

Por otro lado, tenemos los aportes de Cavalieri, quien realiza una generalización del cálculo de las cuadraturas mediante sus métodos, en los cuales se tratan los problemas de calcular áreas de figuras planas a través de "todas las líneas" y los volúmenes a través de "todos los planos". Cabe señalar que, en el método colectivo de los indivisibles, Cavalieri crea un tipo de magnitud para representar el área de una determinada figura.

En su trabajo realizado, también se evidencia el intento de imitar las matemáticas griegas, esto está en la similitud entre el método de exhaución y el método de los indivisibles, pues ambos están basados en realizar una comparación de figuras. Además, el objetivo principal de Cavalieri, a través de su método, fue mostrar la validez de este mediante los resultados ya conocidos; como, por ejemplo, el área del paralelogramo y el cálculo del volumen de un cono circular.

Mediante el método de los indivisibles, Cavalieri realiza una comparación de las propiedades de las colecciones de "todas las líneas" de dos figuras en forma directa, tal como lo hizo Arquímedes con su método de exhaución.

Los aportes de Fermat y Wallis destacan por realizar una generalización de los métodos infinitesimales, cada uno con sus respectivos métodos y que consideraron progresiones geométricas y aritméticas.

Fermat trata los problemas de cuadratura para una curva de la forma $y = x^n$ tomando rectángulos circunscritos donde se obtienen cotas superiores, las cuales son acotadas mediante la razón $0 < E^{n+1} < 1$ de la progresión geométrica que se obtiene al dividir el intervalo dado.

Wallis, por su parte, trata los problemas geométricos de cuadratura en problemas aritméticos, donde el énfasis principal es trabajar con el infinito.

A modo de síntesis, podemos afirmar que los trabajos basados en las construcciones de tangentes y sobre el movimiento instantáneo se convirtieron en temas de interés para los matemáticos, los cuales conllevaron a obtener resultados importantes relacionados a las cuadraturas para diversas curvas.

Así tenemos, los aportes de Newton, quien establece una relación entre la derivada y la integración como procesos inversos, propósito que logra al considerar los problemas de cuadratura en relación con la tangente. En cuanto al elemento 0, lo considera como una magnitud pequeña a la que desaparece en todos sus procesos para obtener las cuadraturas de las curvas, donde se evidencia el uso de los métodos infinitesimales; es decir, la intuición de la cinemática.

Además, según lo presentado, se concluye que, a través de los aportes de Leibniz, se formaliza una simbología para representar a la Integral Definida, a través de la cual se obtiene las áreas como la suma de rectángulos y los volúmenes se obtienen como la suma de cilindros, que son aportes fundamentales de la Integral Definida que se consideran en el cálculo integral elemental. Además, obtuvo el teorema de transmutación; es decir, el teorema fundamental del Cálculo, siendo su aporte más importante, ya que a través de él pudo obtener los resultados de cuadraturas de casi todas las curvas conocidas en esa época.

Finalmente, se concluye que mientras que Newton consideró las integrales en su forma indefinida y como inversa a los problemas relacionados a la tasa de cambio, Leibniz los consideró como cantidades netas de diferenciales.

En este enfoque geométrico de la Integral Definida, los trabajos que analizaron los matemáticos, se centraron en determinar el área de figuras curvilíneas, volúmenes y las cuadraturas de curvas. Se evidencia el empleo de elementos teóricos fundamentales asociados al concepto de Integral Definida, tales como partición de un intervalo especifico, área de figuras planas, volumen de sólidos, sumas de series infinitas, derivada, función continua, sumas y diferencias de infinitesimales, teorema fundamental del cálculo, sumas de áreas de rectángulos, volumen de un cilindro y la representación $\int dy = y$.

A continuación, en siguiente esquema (figura 16) se sintetiza los aportes más importantes de distintos matemáticos en relación a la evolución de la Integral Definida, respecto al enfoque geométrico.

EVOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

- **Arquímedes**
  - Cálculo de cuadraturas (Área bajo la curva)
    - Método de exhaución
    - Prueba basada en la doble reducción al absurdo para eludir del infinito
    - Método mecánico
- **Cavalieri**
  - Generalización del cálculo de cuadraturas
    - Método de los indivisibles
    - Método colectivo para el cálculo de áreas de figuras planas
    - Método distributivo para el cálculo de volúmenes de sólidos
- **Fermat**
  - Generalización de los métodos infinitesimales
    - Desarrolla un método que permite cuadrar a través de una progresión geométrica parábolas e hipérbolas
    - Aparición de elementos esenciales para la definición de la Integral Definida para funciones continuas (Sumas de series infinitas)
- **Wallis**
  - Generalización de los métodos infinitesimales
    - Teoría de la aritmética de los infinitesimales, donde las cuadraturas se realizan aritméticamente en términos de razones geométricas
    - Generalización de los resultados obtenidos en sumas finitas a series infinitas
    - Método inductivo en la integral de Wallis
- **Newton**
  - Relación entre la derivada y la integral como procesos inversos
    - Cálculo de cuadraturas y tangentes
    - Método de las fluxiones y de las series infinitas
    - Método de las primeras y últimas razones
    - Establece una relación entre cuadraturas y las derivadas
    - Proporciona una tabla de integración
    - La integración y derivación son procesos Inversos
- **Leibniz**
  - Representación de la Integral Definida como la suma de elementos infinitesimales
    - Las cuadraturas representadas como un proceso inverso de las tangentes
    - Creación de una simbolización para representar la integral
    - La relación $\int dy = y$ permitió establecer un método formal para determinar sumas y diferencias de infinitesimales
    - Las áreas y volúmenes son interpretadas desde la Integral Definida como la suma de áreas de rectángulos y volúmenes de cilindros

Figura 16. Evolución de la Integral Definida – Enfoque Geométrico

b) Enfoque analítico de la Integral

El enfoque desde el punto de vista analítico, se refiere al empleo de un lenguaje algebraico-aritmético y de esta manera se independiza del geométrico y así la definición de la Integral Definida se da en términos de límites de una suma.

En los trabajos de Grabiner (2005), Ordóñez (2011), Bobadilla (2012) y Crisóstomo (2012) se han desarrollado los aspectos anteriormente mencionados, y en este apartado haremos referencia a tales investigaciones. Respecto al desarrollo y evolución de la Integral Definida desde el enfoque analítico, este tuvo sus inicios a fines del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, y a partir de los trabajos realizados por los analistas de esa época, trataron de eliminar toda intuición geométrica en los problemas relacionados al Cálculo; sin embargo, al tratar con los conceptos de continuidad y discontinuidad de funciones, se abordan nuevos problemas que necesitaban obtener su resolución a partir de lo geométrico.

Bobadilla (2012) señala que otra de las consecuencias de la época fue la *aritmetización* del análisis del siglo XIX, que consistió en dejar de lado toda intuición geométrica que había predominado en los trabajos relacionados al Cálculo realizados durante el siglo XVIII y de esta manera separar las nociones de la Geometría Intuitiva que estuvieron relacionadas al movimiento físico y centrarse en los conceptos de función, variables y límites, fundamentalmente mediante la Aritmética y la Lógica; es decir, implementaron una estructura teórica con su propia dialéctica y dejando de lado la parte geométrica, realizando la *desgeometrización* del Cálculo.

Todo esto se produjo a partir de los trabajos realizados por Cauchy, que fueron la base del Análisis Matemático. De esta manera, el problema de la Integral Definida se convirtió en un problema del análisis.

Así, los problemas que se abordaron fueron planteados desde un enfoque distinto al del enfoque geométrico, cuyas soluciones requerían de la creación de nuevos métodos con la finalidad de presentar una teoría más general, donde se puedan abordar y solucionar diferentes problemas, además de presentar una organización y estructuración para la creación del análisis matemático.

A continuación, profundizaremos en los aportes más significativos de algunos matemáticos a la noción de Integral Definida desde el punto de vista analítico. Estudiaremos, por ejemplo, los trabajos de Cauchy, quien realizó un estudio basándose en límites, funciones continuas y convergencia, presenta una demostración del teorema fundamental del Cálculo (Grabiner, 2005; Bobadilla, 2012).

También ahondaremos en el trabajo de Dirichlet, quien trabajó con funciones discontinuas y que no eran integrables desde la teoría desarrollada por Cauchy (Bobadilla, 2012). Por otro lado, también analizaremos los trabajos de Riemann, que desarrolló una teoría ampliando los trabajos de Cauchy y de Dirichlet (Ordoñez, 2011), en la que presenta la Integral Definida en términos de suma de límites, en la que consideró funciones acotas y discontinuas, pero que son integrables.

De igual manera, también nos enfocaremos en los trabajos realizados por Darboux, que se basaron en los desarrollados por Riemann y que presenta la Integral Definida en términos de límites máximos y mínimos, en la que consideró también aquellas funciones que forman un conjunto de medida cero (Ordoñez, 2011; Bobadilla, 2012; Crisóstomo,2012). Por último, abordaremos los trabajos realizados por Lebesgue, que presentó una definición, en forma analítica, de la Integral Definida, considerando condiciones establecidas y planteó una definición de la Integral Definida, partiendo de lo geométrico, a partir de la teoría de medida de los conjuntos (Crisóstomo, 2012).

Cauchy (1789-1857)

Según Grabiner (2005) y Bobadilla (2012), el trabajo realizado por Cauchy sobre Cálculo se fundamenta principalmente en los conceptos de límites, infinitesimal, función continua, convergencia, derivada y diferencial. Partiendo de estos conceptos, define la Integral en forma analítica.

Para Lebesgue: "*Al realizar una explicación de las nociones de área en un dominio plano y el volumen de un cuerpo, despejándolas de su sentido metafísico, y al considerarlas como números"*, por tal razón, quien realmente dio una definición de las nociones de longitud, área y volumen fue Cauchy. A partir de esas nociones, estas deben considerarse como números para tener una definición lógica.

Por otro lado, Grabiner (2005) señala que los trabajos influenciados por Euler, Lacroix y Poisson, fueron decisivos para que Cauchy desarrollará el cálculo aplicando nuevas técnicas y conceptos.

Por ejemplo, Poisson observó que el valor de la integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ era diferente para diversas formas de integración y sugirió que deberían ser evaluadas como sumas. Este hecho fue fundamental para que Cauchy definiera a la Integral Definida como el límite de sumas y además que este límite exista.

Asimismo, tomando la definición de la Integral Definida por Leibniz dada como una suma, Cauchy necesitaba hacerla más precisa y para ello tuvo que especificar las sumas con precisión y probar que el límite exista, ya que no era suficiente decir que la Integral Definida es el límite de las sumas.

Para definir la Integral Definida, Cauchy parte que la función $f(x)$ sea continua en el intervalo que tiene como puntos los extremos x_0 y X, luego realiza una partición del intervalo en n subintervalos no necesariamente iguales.

Cauchy realiza una multiplicación, entre las longitudes de dichos subintervalos por el valor de la imagen de la función evaluada en cada punto del extremo izquierdo de cada subintervalo, y obtiene la suma $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$.

Al respecto, Cauchy observó que el valor de S depende de n como de la división del intervalo y es así que, utilizando la continuidad de $f(x)$, Cauchy pudo demostrar que la forma de la división del intervalo no importa y que S tiene límite único. Es así que Cauchy demostró que la Integral Definida es independiente de la forma de la partición del intervalo $[x_0, X]$. Para tal propósito, eligió, para el caso más simple, que cuando se tiene un solo subintervalo $[x_0, X]$, demostró que para θ, que se encuentra entre 0 y 1, se tiene $S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; y aplicando esta misma técnica, Cauchy obtiene:

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots$$
$$+ (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Luego, definió un conjunto de valores ε_k para $k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ y para $f[x_k + \theta_k(x_{k+1} - x_k)] = f(x_k) \pm \varepsilon_k$, entonces al reemplazar en S, obtiene:

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

Es así como Cauchy argumentó que si los subintervalos de longitud $x_k - x_{k-1}$ se toman lo suficientemente pequeños, entonces k se aproxima muy cerca a cero, de modo que, al tomar una subpartición de la partición original, el resultado del valor de S no cambiará considerablemente.

Cauchy, concluyó que al volverse los valores de $x_k - x_{k-1}$ pequeños y para n muy grande, entonces los diferentes valores de S, para las dos divisiones consideradas anteriormente, estas difieren entre sí de forma imperceptible, es decir, que S alcanza un cierto límite.

Obsérvese que Cauchy define a la Integral Definida como el límite, además que el límite del valor de S solo depende de $f(x)$ y de los extremos x_0 y X del intervalo.

Cauchy, al definir la Integral Definida como el límite de una suma y que esta exista, demostró el primer teorema fundamental de Cálculo:

> Si $f(x)$ es finito y continuo en todo el intervalo $[x_0, X]$ y $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, entonces $F'(x) = f(x)$ (Grabiner, 2012, p. 155-156)

De esta manera, Cauchy relaciona sus nuevas definiciones de derivada e integral, es decir que mediante este teorema vincula el cálculo diferencial con el cálculo integral.

La demostración presentada por Cauchy es muy parecida a la actual. Para su demostración consideró tanto el teorema del valor medio para integrales como la aditividad de la Integral Definda en intervalos. La parte crucial de la demostración está al considerar:

$$F(x) - f(x) = \int_{x_0}^{X+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{X+\alpha} f(x)\,dx$$

$$= f(x + \theta\alpha)$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$.

De esta forma, es que, Cauchy prueba el primer teorema fundamental del Cálculo, basado en sus definiciones y condiciones establecidas.

Crisóstomo (2012), señala que el concepto de Integral Definida dado por Cauchy tiene su origen en aquellas funciones estudiadas por Euler, para las que él no pudo determinar sus primitivas.

Para ello, toma una función $y = f(x)$ continua respecto a la variable x entre dos límites finitos; es decir, $x = x_0$ y $x = X$. Entre estos dos límites, toma los nuevos valores para x, tales como $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$, de tal manera que estos valores siempre crecen o decrecen entre el primer y el segundo límite. Entonces, la diferencia $X - x_0$ puede ser particionada en elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, X - x_{n-1}$ y de esta forma se obtiene una suma aproximada $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, la cual resulta de la suma de todas las áreas de los rectángulos, donde sus bases son elementos de la partición y sus alturas son sus imágenes obtenidas al ser evaluados en la función.

Es así que Cauchy define la Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ como el límite de la suma $S,$ al considerar la mayor longitud $x_i - x_{n-1}$ cuando ésta tiende a cero. La demostración de esta definición se sustenta en la existencia y unicidad de dicho límite cuando se comprueba que los valores numéricos de los elementos son muy pequeños y cuando el número n es muy grande, así la partición del intervalo solo tendría la influencia intangible respecto al valor de la suma S.

Según Bobadilla (2012), Cauchy establece la definición de la Integral totalmente independiente de todo aquello que se relacione con la parte geométrica; es decir, que el concepto de integral es analítico y no geométrico, aunque no rechaza que este objeto matemático tiene sus aplicaciones en la Geometría. Se evidencia, en el trabajo de Cauchy, que el área de una superficie curva es obtenida mediante la solución de una ecuación diferencial parcial.

La definición de la Integral Definida dada por Cauchy se fundamenta en los conceptos de funciones continuas y sucesión convergente obtenida de la partición del intervalo.

También define y demuestra el primer teorema fundamental del Cálculo para integrales, ya que parte de la definición $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, toma a X como una variación, considera a la función $f(x)$ finita y continua en una determinada vecindad y obtiene una función $\mathcal{F}'(x) = f(x)$, también finita y continua en dicha vecindad, para concluir que si $\mathcal{F}'(x) = f(x)$, entonces se tiene $\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x)$ y $\frac{d}{dx}\int_{x}^{X} f(x)dx = -f(x)$, encontrando una relación entre la derivación e integración.

Además, partiendo de $\int f(x)dx = F(x) + \bar{\omega}(x)$, donde $F'(x) = f(x)$, demuestra el segundo teorema fundamental del Cálculo. Para ello, consideró la función $f(x)$ continua en los extremos x_0 y X, tal que si $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(t)dt$, entonces se satisface $F'(x) = f(x)$, además se sabe que cualquier primitiva tiene la forma $F(x) + c$, donde c es una constante, concluyendo que $\int_{x_0}^{X} f(t)dt = F(X) - F(x_0)$.

Tal como señala Crisóstomo (2012), la definición de la Integral dada por Cauchy, complementada luego por Riemann, es la misma definición que se presenta actualmente en los libros de textos de Cálculo integral.

Según Turégano (1994), la definición de integral dada por Cauchy, desde su formulación dada a través del límite de una suma, surge del escenario de la argumentación y estructura teórica realizada en ese momento. Además, se tiene que, una vez definida, se desprende de ella con la finalidad de plantear las aplicaciones correspondientes.

Asimismo, señala que, respecto al concepto de la Integral de Cuachy-Riemann, esta no se plantea para establecer una definición de áreas o volumen, pues su concepción es más general.

Dirichlet (1805-1859)

Según Bobadilla (2012), a partir de los trabajos sobre los análisis establecidos por Cauchy, Dirichlet realiza un estudio sobre ciertas funciones con características especiales y, partiendo de ello, define las integrales de la forma:

$$\int_{0}^{h} \frac{\sin(n\beta)}{\sin(\beta)} f(\beta)\partial\beta$$

donde $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$ y f es una función monótona y continua en el intervalo $[0, h]$. Dicha función será integrable sin que esta cumpla la condición de continuidad, además que no es necesario que el conjunto de puntos discontinuos sea finito en el intervalo de integración.

Asimismo, los resultados obtenidos por Dirichlet, así como la representación de funciones en series de Fourier y la integración de funciones discontinuas, se desarrollaron en forma paralela, al igual que los trabajos de integrabilidad de las funciones discontinuas fueron el foco de atención para Hankel y Cantor, quienes realizaron un estudio minucioso de los conjuntos de puntos, sobresaliendo de esta forma la teoría de los conjuntos de puntos lineales. Luego, se consideran y formulan las representaciones de las funciones discontinuas en series de Fourier, que fueron un elemento indispensable en el desarrollo y evolución de la teoría de Integración relacionado con la teoría de Conjuntos.

En la misma investigación, Bobadilla (2012) señala que otro de los aportes significativos de Dirichlet a la teoría de integración fue la integrabilidad de ciertas funciones arbitrarias, ya que una de las características principales de estas funciones es que presentan infinitos puntos de discontinuidad, debido a que tales funciones arbitrarias son representadas por:

$$f(x) = \begin{cases} c \;\; si\ x\ es\ racional \\ d \;\; si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

Dirichlet establece que la función $f(x)$ así definida no es integrable, aplicando la definición de la Integral Definida dada por Cauchy, además que la misma tampoco se puede expresar en una función en series de Fourier, ya que sus coeficientes están dados en términos de áreas y estos son imposibles realizar sus cálculos.

Riemann (1826-1866)

Según Weber & Dedekind (1876), Riemann hace una reflexión sobre *"la indeterminación que aún prevalece en ciertos puntos fundamentales de la doctrina de la Integral Definida la cual, obliga a reformular su concepto y su validez"* (p. 225).

Por tal motivo, Riemann se pregunta ¿qué debe entenderse por $\int_a^b f(x)dx$?

Pregunta esencial para que Riemann y que, de acuerdo con Crisóstomo (2012), estas fueron las razones para extender la definición de Integral Definida dada por Cauchy para ciertas clases de funciones, así como también para funciones discontinuas.

La definición de Integral Definida dada por Riemann es similar a la que se presenta en los libros de textos de Cálculo y que, de acuerdo a Weber & Dedekind (1876) y Turégano (1993) (Como cita Crisóstomo 2012), se fundamenta de la siguiente manera:

> Tomamos una sucesión de valores $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ entre a y b, ordenados por tamaños, denotados por $x_1 - a = \delta_1$, $x_2 - x_1 = \delta_2$, …, $b - x_{n-1} = \delta_n$ y las fracciones propias positivas de ε_i. Entonces, el valor de la suma $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ dependerá de la elección de los intervalos ε_i. Si ésta tiene la propiedad de que de cualquier forma que sean elegidas δ_i y ε_i tienden a un valor límite A fijo δ_i se hace infinitamente pequeño, entonces este valor se llama $\int_a^b f(x)dx$. Si no tiene esta propiedad, entonces $\int_a^b f(x)dx$ no tiene significado. A partir de aquí, Riemann elige un punto arbitrario $\bar{x}_i = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ en el i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de esta partición $i = 1, \cdots, n$ y define la Integral $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ donde δ denota el máximo de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición $[a, b]$. (Crisóstomo, 2012, p. 124-125)

Asimismo, el surgimiento de esta nueva definición, en términos de suma de límite, el concepto de la Integral Definida es el resultado de un contexto específico de la estructuración y de la fundamentación teórica de la época.

Otra de las características fundamentales evidenciadas fue la concepción de la Integral representada como la primitiva de una función. Esto es que se pueden integrar funciones que no son las derivadas de otra función, además que se pueden integrar funciones a pesar de no tener una primitiva en cualquier intervalo dado.

Por otro lado, Ordóñez (2011) señala que Riemann amplía la teoría de Integración, en forma general, para aquellas funciones que presentan una infinidad de discontinuidad y poderlas representar mediante series de Fourier.

Uno de los aportes principales de Riemann fue sobre funciones acotadas que tienen una infinidad numerable de discontinuidad y que son integrables. En la publicación de su artículo en 1854, presentó un estudio relacionado con las funciones trigonométricas, generalizando, a partir de ello, la definición de la Integral para aquellas funciones que están definidas y acotadas en un intervalo cerrado. Para tal propósito, consideró funciones que presentan un conjunto denso de puntos de discontinuidad y funciones con una discontinuidad aislada.

Bobadilla (2012) señala que Riemann realiza un estudio detallado sobre aquellas funciones que no fueron resueltas por Dirichlet. Por tal motivo, se debe realizar un estudio y análisis para comprender y clarificar dos aspectos importantes.

Uno de ellos está relacionado con los principios del cálculo infinitesimal, refiriéndose específicamente a la integrabilidad, y el otro es sobre las series de Fourier, ya que estas se pueden aplicar a estudios relacionados con la Física, a ciertas ramas de la Matemática pura y a la teoría de Números, pues en todos estos campos se consideran funciones que se expresan en series, las cuales no fueron desarrolladas en su totalidad por Dirichlet.

Con la definición de Integral Definida dada por Riemann, mediante la misma, se integran funciones, las cuales no son la derivada de otra función. Asimismo, aparecen estudios relacionados con la Integral de Riemann, en donde se consideran funciones que tienen que satisfacer ciertas condiciones y, a partir de ello, exista su integral.

Darboux (1842-1917)

Según Bobadilla (2012), Crisóstomo (2012) y Ordóñez (2011)), Darboux considera, en su trabajo, la Integral de Riemann basándose en los conceptos de sumas superiores e inferiores que demuestra al considerar las nociones de límite máximo, límite mínimo y oscilación y por tal motivo es reconocido en el campo del Análisis.

Ordóñez (2011) señala que Darboux considera funciones acotadas y que son integrables si cumplen ciertas condiciones; es decir, una función $f(x)$ acotada es integrable sobre $[a, b]$ solo si las discontinuidades de $f(x)$ forman un conjunto de medida cero. A partir de ello, definió las sumas superiores e inferiores de la manera siguiente $\overline{\int_a^b f(x)}\, dx$ y $\underline{\int_a^b f(x)}\, dx$, destacando que esta notación se debe a Volterra.

También realizó una reformulación del teorema fundamental del cálculo para funciones integrables en sentido amplio y que se cumple si $\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$ cuando f' es integrable en el sentido de Riemann-Darboux. En cuanto a su demostración, utilizó el teorema del valor medio y de la condición $f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Por otra parte, Bobadilla (2012) señala que Darboux realiza una clasificación de funciones discontinuas, las cuales tenían que cumplir la condición: $\Delta(f, P)$ tiene límite cuando $\|P\| \to 0$; es decir, que las funciones discontinuas que cumplan la condición pueden ser integrables y no son integrables considerando el concepto de oscilación.

Al establecer estas condiciones, Darboux realizó una redefinición de la Integral de Riemann en términos de sumas superiores e inferiores. Además, formuló y realizó una demostración del teorema fundamental del cálculo para funciones que son acotadas, partiendo de la nueva definición.

Darboux dio una definición sobre oscilación en términos de las nociones de límite máximo y límite mínimo de la siguiente forma:

> La oscilación Δ de la función f en el intervalo $[a, b]$ se define como la diferencia entre el límite máximo M y el límite mínimo m de la función f en el intervalo $[a, b]$; es decir $\Delta = M - m$. (Bobadilla,2012, p. 113)

Asimismo, Darboux definió $M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + M_3\delta_3 + \cdots + M_n\delta_n$, $m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3 + \cdots + m_n\delta_n$ y $\Delta = \Delta_1\delta_1 + \Delta_2\delta_2 + \Delta_3\delta_3 + \cdots + \Delta_n\delta_n$. Además, garantizó que las tres sumas tienden a límites finitos y determinados, cuando todos los intervalos tienden a cero y las denota por M_{ab}, m_{ab} y Δ_{ab}, obteniendo, que $\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{\mathrm{ab}}$.

Partiendo de la definición, Darboux realizó una demostración para garantizar la existencia de los límites máximos y mínimos, los cuales representan a las sumas superior e inferior de una función acotada en un intervalo $[a, b]$. Para tal propósito, consideró el teorema:

> Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ es una partición de dicho intervalo, tal que $a = x_0$ y $b = x_n$, entonces las sumas $\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_1 \, \Delta x_i$, $\underline{S}(f, P) =$

$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $\Delta(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, donde $\Delta_i = M_i - m_i$, para $i = 1,2,\cdots,n$, tienden a un límite finito y determinado. (Bobadilla,2012, p. 113)

Luego de haber establecido sus criterios, Darboux definió la Integral Definida, considerando para ello $x_1 - a$ por $\delta_1, x_2 - x_1$ por $\delta_2, \cdots$ y además $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ son números positivos inferiores o iguales a la unidad. Obtiene:

$$\sum = \delta_1 f(a + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \theta_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n)$$

Para garantizar que esta suma tiene límite, la condición necesaria y suficiente es que la longitud total del intervalo, donde la oscilación es mayor que σ tienda a cero cuando todos los intervalos tiendan a cero también, donde σ es fijo y es tan pequeño como se quiera.

Al cumplirse esta condición, entonces el límite de $\sum$ es la integral de $f(x)$ entre a y b; es decir:

$$\lim \sum = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

De esta forma, es que Darboux define la Integral Definida, al establecer y garantizar sus condiciones.

Por otro lado, se tiene que Darboux, al garantizar la existencia de la Integral Definida, es decir, si $\overline{S}(f, P)$ y $\underline{S}(f, P)$ cumple $\underline{S}(f, P) < \overline{S}(f, P)$ y además si $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f, P) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f, P)$, entonces es igual a $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \Delta(f, P) = 0$, la cual es condición necesaria y suficiente para que exista la Integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$. Desde este concepto, Darboux estableció el primer criterio de integrabilidad de Riemann mediante la igualdad de los límites de las sumas superiores e inferiores.

En el estudio realizado por Darboux, se muestra dos argumentos fundamentales sobre la definición de la Integral Definida: El primero es que se puede representar mediante dos sumas, considerando cada partición del intervalo, y el segundo es que, mediante la definición, se puede considerar una cota superior y una inferior para la Integral Definida.

Lebesgue (1875-1941)

Según Sánchez y Valdés (2004) (Citado por Crisóstomo 2012), Lebesgue presentó una definición de la Integral Definida basándose en la noción geométrica, realizando una generalización de la idea de área bajo la curva para una función dada.

Para ello, consideró que si $f(x)$ es acotada en $[a,b]$ y además es positiva, es posible definir la Integral como la medida del conjunto E_f de puntos del plano, donde $0 \leq y \leq f(x)$ con $x \in [a,b]$ siempre y cuando dicho conjunto sea medible.

Basándose de estas condiciones establecidas, Lebesgue define, de manera analítica, la Integral Definida, considerando la partición del conjunto imagen de $f(x)$ en particiones cada vez más finas y dicha definición es dada de la siguiente manera:

> Si para $x \in [a,b]$, $m \leq f \leq M$ y (a_n) una partición de $[m,M]$, el conjunto E_f esta comprendido entre los rectángulos generalizados de base $E_i = \{x: a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}$ y alturas respectivas a_i y a_{i+1}; es decir, su medida estaría entre $\sum a_i\, m(E_i)$ y $\sum a_{i+1}\, m(E_{i+1})$. Desde luego, para ello debió suponer que los conjuntos E_i eran medibles (o como sería costumbre más tarde, que la función f es medible). La diferencia entre estas dos sumas tendía a cero con la norma de la partición $[m,M]$, así que podía definirse $\int_a^b f = lím \sum a_i\, m(E_i) = lím \sum a_{i+1}\, m(E_i)$. (Crisóstomo, 2012, p. 131)

Según Bobadilla (2012), el objetivo de Lebesgue era realizar definiciones más generales y exactas de la Integral Definida, de la longitud de una curva, del área de una superficie y plantear una definición que le permita encontrar la Integral de una función de la cual se conoce su derivada, que fue uno de los problemas fundamentales del cálculo integral. Para tal finalidad, consideró los trabajos desarrollados por Peano, Jordan y Borel sobre la teoría de la medida.

Teniendo en cuenta esas consideraciones y la teoría de Medida de los Conjuntos, Lebesgue plantea una definición de la Integral Definida partiendo de lo geométrico; es decir, tomándolo como un problema de área, relaciona a la Integral de una función continua con el área de un dominio plano. También relacionó la Integral de una función discontinua y acotada mediante la medida de un conjunto de puntos.

Lebesgue define la Integral Definida de la siguiente manera:

> Dada una curva C por su ecuación $y = f(x)$ (f es una función continua positiva, los ejes son rectangulares), halle el área de un dominio limitado por el arco de C, un segmento de Ox y dos paralelas al eje y, de abscisas dadas por a y b, ($a < b$).
>
> Esta área se llama la Integral Definida de f entre los límites de a y b, se representa por $\int_a^b f(x)dx$. (Bobadilla, 2012, p. 203)

En la misma investigación, se indica que, dada la definición de la Integral Definida, desde la noción geométrica, Lebesgue realiza una generalización de la definición de Integral Definida en términos de la medida de conjuntos, para funciones medibles no necesariamente acotadas en $(-\infty, +\infty)$, y que las series consideradas sean absolutamente convergentes. Por ello, define la Integral Definida de la siguiente manera:

La Integral de una función acotada $f(x)$, definida en términos finitos (a, b), es un número finito $\int_a^b f(x)dx$ que goza de las siguientes propiedades:

Dados a, b, h cualquiera, se tiene que: $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x+h)dx$

Dados a, b, h cualquiera, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx = \int_c^a f(x)dx = 0$$

Cualquiera que sean $f(x)$ y $\varphi(x)$, se tiene que:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Si se tiene $f(x) \geq 0$ y $b > a$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\int_0^1 1.dx = 1$$

Si $f_n(x)$ crece tendiendo a $f(x)$, la Integral de $f_n(x)$ tiende a la de $f(x)$. (Bobadilla, 2012, p. 210)

Realizada la generalización de la definición de la Integral Definida, Lebesgue nota que dicha definición le permitió resolver los problemas formulados por sus antecesores, pero también manifiesta que es imposible obtener una solución partiendo desde el campo del Análisis matemático.

Por otra parte, la concepción que tenía Lebesgue respecto a la actividad matemática fue fundamental para tomar la decisión de retornar a los orígenes del problema, es decir, analizar los trabajos de Arquímedes, los cuales están planteados en la Geometría, y así responder y obtener la solución que requería. Obsérvese que la Integral Definida de Lebesgue se fundamenta en la teoría de la Medida, estableciendo, de esta manera, definiciones axiomáticas que relacionan la medida con la integral.

Consideraciones significativas del enfoque analítico de la Integral Definida

La definición de Integral Definida evolucionó en diferentes contextos matemáticos en las que se empleó. Estos hacen referencia a conceptos relacionados a funciones continuas y discontinuas, límites y convergencia de series desde un enfoque analítico, donde se orienta a construir objetos puros, dejando de lado la intuición geométrica.

En esta evolución de la Integral Definida, a partir de estos contextos, su utilización se evidencia como un objeto matemático.

En la figura 17, se presenta un resumen de los aportes más importantes de los diferentes matemáticos en relación a la evolución de la Integral Definida, en este caso, desarrollando el enfoque analítico.

La necesidad de ampliar el concepto sobre la Integral Definida originó la serie de Fourier, donde los coeficientes estaban formulados en términos de la Integral Definida. Este problema fue fundamental para Cauchy, quien fue el primero en abordarlo y definió la Integral Definida en términos del límite de una suma. Además, es quien realiza la formulación de teoremas generales para la existencia de integrales para ciertas funciones continuas en intervalos cerrados.

Por otro lado, se considera también el trabajo de Dirichlet, que apuntó que las funciones que presentan un conjunto infinito de puntos de discontinuidad a las cuales llama *funciones especiales*.

Los aportes de Riemann, quien realizó una generalización del trabajo de Cauchy, motivado por un teorema dado por Dirichlet, permiten formalizar el concepto de la Integral Definida y la define como el límite de una suma. Asimismo, estableció condiciones de integrabilidad para series de funciones, para funciones que presentan discontinuidades aisladas y para funciones que tienen un conjunto denso de discontinuidad.

También, se consideran los aportes de Darboux, basados en realizar una redefinición de la integral de Riemann, en términos del concepto de oscilación, define la Integral Definida para funciones acotadas, integrables en $[a, b]$ si, y solo si, sus discontinuidades constituyen un conjunto de medida cero.

Por último, los aportes de Lebesgue, quien realiza una generalización del concepto de la Integral Definida, basado en la teoría de la Medida. Para tal propósito, vuelve al origen del problema para dar una definición en forma geométrica y analítica para aquellas funciones medibles en un conjunto medible, así como para funciones medibles no acotadas.

Respecto a la evolución de la Integral Definida, desde el enfoque analítico, se identifican los elementos que lo conforman como un objeto matemático, tales como partición de un intervalo especifico, función continua, suma de series infinitas, el teorema fundamental del Cálculo, la Integral Definida como el límite de una suma, funciones discontinuas, funciones que se expresan en series de Fourier, donde sus coeficientes están expresados en una Integral Definida, sumas de Riemann, la Integral Definida como la suma de límite de una sucesión de sumas de Riemann, la integral de Riemann en términos de sumas superiores e inferiores para funciones que son acotadas, la Integral Definida de Darboux, teniendo en cuenta la teoría de Medida de los Conjuntos, funciones integrables y acotadas en el intervalo $[a, b]$, cuyas discontinuidades constituyan un conjunto de medida cero y, por último, la Integral Definida de Lebesgue, que generaliza el concepto basándose en la teoría de la Medida de Conjuntos, funciones medibles no necesariamente acotadas en $(-\infty, +\infty)$. Cabe recalcar, que los trabajos realizados por Lebesgue fueron fundamentales, ya que a partir de ello se desarrollaron nuevas áreas de la Matemática como el Análisis Funcional.

A continuación, en el siguiente esquema (figura 17) se sintetiza los aportes más importantes de distintos matemáticos en relación a la evolución de la Integral Definida, respecto al enfoque analítico.

EVOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cauchy

La Integral Definida en términos de límite de una suma

- La aritmetización del análisis y su independización de la Geometría
- Desarrollo de los conceptos de límites, continuidad, convergencia de series infinitas
- Definición de la integral en términos de la noción de limites $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_{i-1} - x_i)$
- Teoría de Integración, basado en los conceptos de límites, condiciones de continuidad y condiciones integrables

Dirichlet

Consideración de funciones especiales

- Hacia el estudio de la integral para funciones con infinito puntos de discontinuidad
- Funciones integrables sin tener en cuenta las condiciones de continuidad
- Funciones representadas en series de Fourier
- Definición de la Integral Definida en términos $\int_0^h \frac{\sin(n\beta)}{\sin(\beta)} f(\beta)\partial\beta$

Riemann

Formalización del concepto de la Integral Definida

- Condiciones de integrabilidad para series de funciones
- Demostración de la condición necesaria y suficiente para la unidad de límite de las sumas integrables
- Demostración del teorema fundamental del Cálculo para funciones integrables y teorema del valor medio
- Funciones acotadas que tienen una infinidad numerable de discontinuidad y que son integrables
- Sumas superiores e inferiores de la partición de un intervalo
- La Integral Definida es el límite de las sumas integrables sí existe y es único

Darboux

Redefinición de la integral de Riemann

- Clasificación de funciones discontinuas que son integrables y aquellas no son integrables, considerando el concepto de oscilación
- Redefinición de la integral de Riemann considerando sumas superiores e inferiores para funciones que son acotadas en un intervalo $[a,b]$ f es integrable en $[a,b]$ si sus discontinuidades constituyen un conjunto de medida cero
- Funciones integrables que presentan un conjunto de discontinuidad de medida cero
- El teorema fundamental del Cálculo y del valor medio extendido para el nuevo campo de funciones integrables
- $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ cuando f es integrable en sentido de Riemann-

Lebesgue

Definición generalizada de la Integral Definida

- Lenguaje analítico en términos de un lenguaje conjuntista y topológico
- Teoría de la Medida
- Relación entre la medida con la integración para conjunto más amplio de funciones integrables
- Definición de la Integral Definida en forma geométrica y analítica para funciones medibles en un conjunto medible
- Relación entre la medida de un área y la Integral Definida
- La Integral Definida de una función acotada en un intervalo cerrado es igual a la medida del área bajo la curva

Figura 17. Evolución de la Integral Definida – Enfoque Analítico

1.2 Trabajos de investigación sobre Cálculo diferencial e integral desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), toda investigación en didáctica de la Matemática debe contemplar las diversas instituciones involucradas en el fenómeno de estudio e identificar un modelo epistemológico de referencia que sustente cualquier nueva propuesta. Así, en esa sección, presentaremos los resultados de trabajos realizados desde la TAD en relación a nociones de cálculo diferencial e integral y también algunas que, de manera general, destacan que, cuando el saber matemático circula entre diversas instituciones, las praxeologías cambian.

Otero & Corica (2013) realizan un estudio relacionado a un modelo praxeológico de referencia sobre nociones de Cálculo, específicamente relacionado con el límite y continuidad de funciones; en donde presentan una organización matemática para un curso de Cálculo del nivel superior universitario.

También las autoras señalan que un modelo praxeológico de referencia constituye una herramienta esencial en la organización de la matemática a enseñar y ser enseñada de una cierta institución. Para la construcción del modelo praxeológico de referencia, las investigadoras parten de una pregunta generatriz con la finalidad de obtener la información sobre lo que se quiere estudiar y para qué se estudia el límite y continuidad de funciones, en la que consideran cuatro tipos de género: *demostrar, calcular, analizar funciones y representar gráficamente*, y en base a esto realizan la organización matemática.

Según Otero & Corica (2013) indican que las tareas que se consideran se relacionan entre sí a través de las técnicas que ellas requieren, según el tipo de género considerado. Tal es el caso del genero *analizar funciones*, el cual necesita de las tareas de límites y continuidad de funciones. Luego de realizar la organización matemática, proponen un modelo praxeológico a enseñar, en donde consideran los géneros *demostrar, calcular y representar gráficamente* para las tareas que proponen.

Algunas de las conclusiones a las que llegan es que las tareas que se proponen están enmarcadas en base a la limitación de temas considerados en el curso y esto tiene como consecuencia que exista una desarticulación entre ellas. Las tareas propuestas para su solución solo hacen uso de técnicas y ninguna está formulada para ser argumentada de elementos tecnológicos y esto se debe a la transposición didáctica, donde el saber enseñando se da en forma terminante o, lo que es lo mismo decir, incuestionable.

El análisis praxeológico de un libro de texto didáctico nos enmarca a saber sobre su génesis institucional, así como los cambios secuenciales que ha experimentado.

Por consiguiente, el estudio realizado por Castela (2016) trata sobre las matemáticas presentes en la formación profesional en los diversos escenarios, según sea la naturaleza y el nivel de cualificación de la profesión, así como los fenómenos que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la formación profesional, donde el estudiante se enfrenta a las materias y contextos en su formación profesional.

La autora, señala que cuando un estudiante transita por diversas instituciones, o cuando cruza fronteras, encuentra otras formas de estudiar y para ello es importante conocer los diversos aspectos de los contextos socio-culturales de referencia.

Así tenemos que la TAD plantea que, al transitar por los diferentes contextos, el saber es cambiante. Por tal motivo, la investigadora señala que, en un entorno profesional, el saber matemático tiende a cambios, los cuales deben ser tomados y considerados en la formación profesional de cualquier naturaleza, considerando el nivel de desempeño profesional.

También indica que las instituciones cuentan con sus propias actividades cognitivas, asimismo hacen uso de las praxeologías de otras instituciones generadoras de conocimiento matemático; que además son desarrolladas y adecuadas a sus formas de usos de acuerdo a las instituciones que las requieren.

Como aplicación de lo anterior, están los trabajos en donde se presentan praxeologías sobre la Integral Definida.

González-Martín y Hernandes (2017) realizan una investigación que tuvo como objetivo analizar la presentación de las nociones de Cálculo en un libro de texto clásico de Ingeniería Civil, dirigidos a estudiantes del segundo año de la carrera en una universidad brasileña.

Asimismo, para el análisis del libro de texto, se apoyan en las herramientas brindadas por la TAD, donde identifican los tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría. Para identificar los usos de la Integral Definida, en el contexto de la profesión, se consultan a un ingeniero que se desempeña como profesor y dicta los cursos de especialidad e indica que el libro de texto que se usa como fuente bibliográfica para la signatura de *Resistencia de Materiales* para Ingeniería Civil, se utiliza la Integral Definida para analizar la fuerza de un corte y de flexión en los diferentes tipos de vigas.

Los tipos de tareas que se presentan son enmarcados por las representaciones gráficas, donde las técnicas para solucionarlas se dan de manera explícita, en algunos casos, así como también las técnicas que usan están dadas desde su contexto. La tecnología que justifica las técnicas están basadas en resultados matemáticos de manera implícita y se apoyan de los contextos de la profesión.

Algunos de los resultados obtenidos indican que las técnicas para solucionar los tipos de tareas no están justificadas por la tecnología de la institución productora de matemáticas, sino desde la tecnología propia de la Ingeniería Civil.

Se evidencia que existe una desconexión entre ambas instituciones y que los elementos que brinda la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) permiten identificar y analizar las praxeologías en las instituciones y ver ese tipo de desconexiones.

Por otra parte, señalan que se deben realizar otras investigaciones que permitan identificar los usos de la Integral Definida en instituciones usuarias, con la finalidad de relacionar los contenidos matemáticos en contextos con la disciplina.

Otra de las investigaciones realizadas por González-Martín y Hernandes (2019) es sobre los usos de la Integral Definida en las carreras profesionales de Ingeniería Civil e Ingeniería Eléctrica de una universidad brasileña correspondiente a estudiantes del segundo año.

Para el análisis y organización de los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías y teorías empleadas en las instituciones, se apoyan en los elementos teóricos brindados por la TAD. Para la selección de los cursos, consultan con dos profesores expertos que dictan la asignatura de *Resistencia de materiales* para Ingeniería Civil, donde señalan que el libro de texto que usan como fuente bibliográfica, identifican los diferentes usos y aplicaciones de la Integral Definida, para calcular áreas, momento de inercia, momento polar de inercia, flexión momento y centroides. Para la asignatura de *Física general y experimental* para Ingeniería Eléctrica, en el libro de texto que usan como fuente bibliográfica, identifican los usos de la Integral Definida, donde se aplican los contenidos relacionados con electromagnetismo, así como a nociones propias de la Ingeniería Eléctrica.

Los tipos de tareas identificados en el libro de texto de Ingeniería Civil requieren, para sus soluciones, de técnicas basadas en la utilización de tablas y formulas y que son justificadas por la tecnología, donde aparecen las Integrales Definidas. Asimismo, señalan que, en la mayoría de casos, las justificaciones se fundamentan en el discurso profesional sin relacionarlas con tecnologías que se fundamentan en la institución productora de la matemática (Libros de Cálculo).

Respecto a los tipos de tareas identificados en el libro de texto de Ingeniería Mecánica, estos requieren, para sus soluciones, de técnicas que se basan en usos de propiedades o tablas que ya están dadas. Algunas de las tareas, para su solución, necesitan de las técnicas basadas en encontrar la antiderivada para funciones algebraicas, polinómicas y funciones trigonométricas básicas, es decir no complicadas.

En sus conclusiones, señalan que los tipos de tareas identificados en los cursos de Ingeniería Civil e Ingeniería Eléctrica requieren de los usos de la Integral Definida y cómo se relacionan con los usos en los cursos de Cálculo, donde la Integral Definida es usada para definir nociones propias de Ingeniería. Indican también que la Integral Definida es utilizada en forma implícita y no es necesario calcularlas en algunos casos y en otras tareas es usada como parte de la técnica y son obtenidas de manera sencilla.

Por otro lado, señalan que se debería considerar en los cursos de Cálculo tareas relacionadas con los contextos donde se desempeñan los ingenieros. Asimismo, que deberían considerarse tareas donde los usos de la Integral Definida sean en forma explicitas, como parte de las técnicas, y que estas se relacionen con las que se usan en los cursos de Cálculo.

Lo anterior, muestra la importancia de considerar praxeologías que involucren conceptos matemáticos en instituciones de enseñanza de las matemáticas, pero también en instituciones de disciplinas intermediarias de este concepto, en particular, en la enseñanza de otras disciplinas intermediaria con la profesión.

CAPÍTULO II

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS

Luego de la presentación de los resultados de diversas investigaciones que dan cuenta de la razón de ser de la noción Integral Definida en diversos momentos del desarrollo de la matemática, de la necesidad de reconocer que los saberes viajan de una institución a otra, en este capítulo presentamos el problema de investigación que orienta este trabajo, así como los objetivos que se persiguen y el método que se empleará para conseguirlos.

2.1 Justificación

En la enseñanza universitaria, los temas tratados de Cálculo, como los límites, derivadas e integrales, son enseñados en el primer año de estudios universitarios y son de mucha importancia en la formación académica de los estudiantes; sin embargo, en nuestros antecedentes, desde diferentes posturas teóricas, se reportan dificultades presentadas por los estudiantes, en particular, cuando abordan el concepto de Integral Definida. Cabe señalar que, en la mayoría de esos trabajos, se ha puesto especial énfasis en el significado de la Integral como medida del área de una región.

Asimismo, desde el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se han realizado investigaciones en donde se identifican praxeologías sobre la Integral Definida

(González-Martín y Hernandes, 2017; González-Martín y Hernandes, 2019) y, a partir de ello, se identifican los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías y teorías, con la finalidad de evidenciar los usos de la Integran Definida en las instituciones de disciplinas intermediarias y cómo esta se relaciona con la institución de enseñanza de matemáticas.

En esa línea, en la formación académica de los estudiantes de las carreras de Ingeniería, en particular de la carrera de Ingeniería Química, el concepto de Integral Definida es fundamental debido a sus diferentes usos y aplicaciones. Por ejemplo, en la asignatura de *Fisicoquímica*, la Integral Definida aparece cuando se resuelven problemas relacionados con la ecuación de estado de los gases reales o en la asignatura Principios de Ingeniería Química, en donde la Integral Definida permite resolver problemas sobre cambios de temperatura (Calor sensible y capacidades caloríficas). Por tal motivo, la comprensión del concepto de Integral Definida es fundamental y no puede estar limitado solo a tareas de cálculo de áreas.

Siguiendo a Castela (2016), cuando miembros de una comunidad se trasladan a otra, llevan consigo sus formas de actuar e interactuar, sus herramientas, normas y lenguaje interactuando de un sistema a otro. Una interpretación particular de ese tránsito puede darse cuando los estudiantes se movilizan de una institución de enseñanza a otra, como por ejemplo de enseñanza de las matemáticas a las instituciones de enseñanza de disciplinas intermediarias, relacionadas con los cursos de la disciplina intermediaria. En ese proceso, los saberes también circulan de una institución a otra.

González-Martín y Hernandes (2019) señalan que, por los efectos de la transposición, los saberes que se trasladan de los cursos de Cálculo hacia los cursos de disciplinas intermediarias (de la profesión), los argumentos matemáticos tienden a desaparecer y las justificaciones se hacen en base a los contextos de la profesión.

En este trabajo, se busca explicar los usos y las razones de ser de la Integral Definida, así como las justificaciones dadas desde las instituciones productoras de saberes matemáticos y de las instituciones productoras de saberes de Ingeniería.

Por ello, consideramos que cualquier investigación interesada por el papel de las matemáticas en un contexto profesional, en este caso particular de la Ingeniería Química, debe incluir un estudio praxeológico, basado en el supuesto que cada institución ejerce una actividad cognitiva propia. De esa manera, resultará relevante analizar las praxeologías que se desarrollan tanto en las instituciones productoras de matemáticas (los cursos de Cálculo), como en otras (los cursos de la especialidad), reconociendo las adaptaciones que en estas últimas se ha hecho.

Por lo anterior, consideramos que un trabajo de investigación que proponga un modelo praxeológico para el concepto Integral Definida, en donde se consideren sus diversos usos en cursos de especialidad de un ingeniero químico, será de interés para la comunidad de investigadores de la disciplina didáctica de la matemática y podría ser empleado para evaluar la comprensión matemática en escenarios similares donde se enseñe la Integral Definida.

2.2 Problema de investigación

Por lo descrito anteriormente, nos interesaremos en identificar cuál es la razón de ser de la Integral Definida en la formación universitaria de estudiantes de Ingeniería Química, partiendo del supuesto que la respuesta dependerá de la institución en la que esta se ubique.

2.3 Objetivos de la investigación

Consideraremos los siguientes objetivos:

Objetivo general

Describir y analizar las praxeologías propuestas para la enseñanza de la Integral Definida en cursos de formación matemática y disciplinar para estudiantes de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Objetivos específicos

- Analizar la razón de ser de la Integral Definida en disciplinas matemáticas de Ingeniería Química.
- Analizar la razón de ser de la Integral Definida en cursos de disciplinas de la especialidad de Ingeniería Química.
- Establecer conexiones y diferencias entre las praxeologías identificadas en las diversas organizaciones analizadas.
- Identificar y proponer una organización matemática sobre la Integral Definida (praxeología) para estudiantes de Ingeniería Química, en relación a su entorno; esto contribuirá con el objetivo general ya que permitirá establecer relaciones entre las praxeologías de las instituciones consideradas.

2.4 Elementos teóricos considerados en la investigación

En esta investigación, nos centraremos en identificar y proponer las praxeologías en las que interviene la Integral Definida y que se desarrollan en las instituciones productoras de saberes matemáticos y las instituciones productoras de saberes en la disciplina intermediaria con la profesión (Ingenierías). Por ello, se han considerado elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que permiten describir una organización matemática o una praxeología en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo. En ese proceso, se reconocen distintos usos de la Integral Definida, incluyendo los que consideran disciplinas intermediarias con la profesión.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha desarrollado un modelo para describir cualquier actividad humana o una noción de praxeología (Chevallard, 1999). Según se indica, en una praxeología u organización matemática, el saber se organiza en dos niveles: el nivel de la *praxis* o del *saber- hacer*, constituida por los tipos de tareas y las técnicas que se usan para resolverlas, y el nivel del *logo* o del *saber*, constituida por las tecnologías, que son los discursos que describen, explican y argumentan las técnicas que se emplean.

La noción de praxeología

Según Chevallard (1999), uno de los conceptos fundamentales de la TAD es la noción de praxeología u organización matemática que permite describir y modelizar la actividad matemática, considerada como una actividad humana. Asimismo, en toda praxelogía u organización matemática se identifican dos bloques o niveles:

- El nivel de la praxis o saber-hacer, conformado por un conjunto de tipos de tarea ($\boldsymbol{T}$) y un conjunto de técnicas ($\boldsymbol{\tau}$). Es decir, las maneras de hacer las tareas y que no necesariamente tienen un carácter algorítmico.
- El nivel del logo o del saber, conformado por la tecnología ($\boldsymbol{\theta}$), que es el discurso que describe, explica y argumenta la técnica, y la teoría ($\boldsymbol{\Theta}$), que fundamenta a la tecnología, la cual cumple el mismo rol descriptivo y argumentativo que el de la tecnología respecto a la técnica.

Estos dos bloques o niveles, conforman una unidad mínima de análisis de las actividades humanas, conformadas por tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría. Se representa una praxeología por $[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}]$.

Por otro lado, el autor indica que la noción de tarea ($\boldsymbol{T}$) o tipo de tareas se refiere a un objeto relativamente preciso, que puede ser un ejercicio, un problema y cualquier actividad que se proponga. También se tiene que para resolver una tarea estas requieren de técnicas ($\boldsymbol{\tau}$). Esto es, como saber-hacer una determinada tarea.

Se debe tener presente que, si la técnica solo tiene éxito en una parte de las tareas, se le denomina *alcance de la técnica*; si la técnica fracasa en una parte de las tareas, se dice que no sabe realizar o resolver las tareas. Se dice que una técnica es superior a otra cuando existe otra técnica que puede resolver la tarea. La técnica no necesariamente puede ser algorítmica o casi algorítmica, desde el punto de vista matemático.

Respecto a la tecnología ($\boldsymbol{\theta}$) es considerado como el discurso racional sobre la técnica ($\boldsymbol{\tau}$) y tiene como primer objetivo justificar racionalmente la técnica asegurando de esta manera resolver las tareas ($\boldsymbol{T}$) o realizar lo que se pretende.

El estilo de racionalidad respecto de la tecnología que es usada varía de acuerdo a la institución, tal que una racionalidad de una institución podrá aparecer como poco racional para otra institución. Se debe reconocer que siempre existirá un discurso racional que justifique a la técnica.

Como una segunda función de la tecnología es la de explicar, de hacer intangible, de aclarar la técnica y que consiste en exponer por qué es correcta. Podemos observar que estas dos funciones son desigualmente asumidas por una tecnología dada.

Visto desde las matemáticas, la función de justificación predomina tradicionalmente, a partir de la exigencia demostrativa con respecto a la función de explicación.

Por último, se tiene que la teoría ($\boldsymbol{\Theta}$) desempeña el mismo papel frente a la tecnología y que el que la tecnología desempeña frente a la técnica. La teoría está ubicada en un nivel superior de justificación.

Chevallard (1999) indica que esta regresión justificativa podría perseguirse hasta el infinito o con la teoría de una teoría, entre otros. También señala que la descripción en los tres niveles técnica-tecnología-teoría es suficiente para darse cuenta de la actividad que se quiere analizar. Esto quiere decir que, la teoría produce, justifica y explica la tecnología.

Por otro lado, Castela y Romo (2011) proponen un modelo praxeológico *extendido*, donde consideran la unidad básica de análisis [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$], así como tecnologías teóricas $\boldsymbol{\theta^{th}}$ y tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^p}$ como componentes de la tecnología, en donde las tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^p}$ son obtenidas en las instituciones usuarias (I_u) y las instituciones productoras de saberes (P(S)) son las que justifican a las tecnologías teóricas $\boldsymbol{\theta^{th}}$.

También señalan que las tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^p}$ son un discurso que desempeña seis funciones que permiten: describir, facilitar, motivar, evaluar, validar y explicar la técnica. En las instituciones usuarias, se tiene que la $\boldsymbol{\theta^p}$ no necesariamente requiere de demostración, ya que los expertos desarrollan otros conocimientos de forma práctica basados en los usos continuos que realizan o la experiencia en sí, donde los saberes son reconocidos y validados en la institución usuaria.

De modo que, [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta^p}$, $\boldsymbol{\Theta}$] es una generalización del [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta^{th}}$, $\boldsymbol{\Theta}$] de la institución productora de las matemáticas. El modelo praxeológico extendido propuesto por las autoras es el siguiente:

$$\left[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\tau}, \begin{matrix}\boldsymbol{\theta^{th}} \\ \boldsymbol{\theta^{p}}\end{matrix}, \boldsymbol{\Theta}\right] \begin{matrix} \longleftarrow \boldsymbol{P(S)} \\ \longleftarrow \boldsymbol{I_u} \end{matrix}$$

Se tiene que las tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^p}$ son entendidas como una institución que produce o incorpora un conjunto de praxeologías, de tal manera que posibilita resolver de forma efectiva y consistente las tareas que son propias de la institución usuaria.

Las funciones que contempla la tecnología práctica, según Castela y Romo (2011), son:

- **Describir la técnica:** Se refiere a la elaboración de un discurso que caracteriza el tipo de tarea y la secuencia de pasos que constituyen una técnica se considera como una pieza de saber que no es identificable por sí misma. Las acciones y el entorno social donde se sitúa la noción praxeológica en un sistema compartido se pueden identificar en la elaboración de un sistema de representaciones verbales y simbólicas. La producción de lenguajes y su descripción que realizan conforman una componente fundamental en el proceso de institucionalización y de transmisión de una invención técnica (Castela y Romo 2011, p. 88).

- **Validar la técnica:** Se refiere generalmente a la justificación. Los saberes considerados establecen que la técnica produce bien lo que ella dice que produce y que los pasos que la conforman permiten obtener los objetivos que le son asignados. Se tiene que, para el caso de las matemáticas, esta función es por lo general garantizada por los saberes y justificados por las teorías matemáticas. Asimismo, en otros contextos, los saberes validados experimentalmente en laboratorio o empíricamente en el uso pueden validar una técnica (Castela y Romo 2011, p. 88).
- **Explicar la técnica:** Se refiere a aquellos saberes que permiten analizar cómo la técnica y sus distintos pasos posibilitan lograr los objetivos trazados. Asimismo, aportan a la comprensión de las causas de los sujetos las cuales están relacionadas a su cultura compartida (Castela y Romo 2011, p. 88).
- **Facilitar la técnica:** Cuando los saberes considerados en esta función permiten a los usuarios utilizar con eficacia y comodidad la técnica. Asimismo, conducen a mejoras, como también de advertencias las cuales, permiten evitar errores y desaciertos conocidos como frecuentes. Este dominio de saberes es el terreno privilegiado de las elaboraciones tecnológicas de los usuarios y el mismo produce efectos retomados de descripciones que lo especifican al adaptarlo a las condiciones particulares del contexto institucional de utilización y el enriquecimiento de la memoria de las experiencias acumuladas (Castela y Romo 2011, p. 89).

- **Motivar la técnica:** Se refiere a aquellos saberes que están orientados hacia la práctica. Los saberes relativos a la motivación constituyen a la comprensión de los fines, que son los objetivos esperados que justifican racionalmente los pasos mostrando su razón de ser. Se trata de escribir una historia de la técnica que sitúe sus componentes, unas en relación con las otras: ¿por qué (¿para hacer qué?) se realiza tal paso en tal momento? Los saberes de motivación están seguidos por saberes sobre el tipo de tareas puesto que ellos analizan los objetivos. Permiten anticipar las etapas esperadas y juegan un rol heurístico importante, luego que la aplicación de la técnica necesita adaptaciones (Castela y Romo 2011, p. 89).
- **Evaluar la técnica:** Se refiere a aquellos saberes que tienen que ver con el dominio, las condiciones y los límites de una técnica relativamente a las tareas del tipo $\boldsymbol{T}$. Asimismo, estos saberes pueden considerarse desde el punto de vista de sus usuarios a partir del funcionamiento de la técnica. Se tiene que la función evaluar, facilitar y motivar pueden estar relacionadas entre sí: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (evaluar) puede provocar, al cabo de cierto tiempo, la producción de mejoramientos (facilitar), la motivación es dada por la evaluación (Castela y Romo 2011, p. 89).

Se debe tener en consideración que las seis funciones de la tecnología práctica permiten analizar y argumentar actividades prácticas, así como reconocer el papel que desempeñan para las validaciones experimentales y, a partir de ello, ver si se complementan o no con las validaciones teóricas.

Como se evidencia, la noción de validar la técnica permite realizar el análisis de los discursos tecnológicos prácticos, posibilitando de esta manera los diferentes usos. Asimismo, permite reconocer las relaciones que se establecen con los discursos tecnológicos teóricos que genera la técnica, todo esto se da en el modelo praxeológico *extendido.*

Chaachoua, Bessot (2019); Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019) indican que una organización matemática, es decir una praxeología, es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como para que la organización y estructuración de la praxeología de una disciplina se deba a la confiabilidad y al alcance de las técnicas.

También señalan que, al proponer una praxeología, se debe tener en consideración la noción de generador de un tipo de tareas $(\boldsymbol{GT})$ y de variables $(\boldsymbol{V_i})$. Las variables permiten relacionar entre lo específico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas. Esta noción de variable fue desarrollada por el equipo de Modelos y Tecnologías para el Aprendizaje Humano (MeTAH).

Los autores desarrollaron y propusieron una extensión del modelo praxeológico de referencia, al cual llamaron modelo praxeológico T4TEL, donde T4 se refiere a la praxeológia clásica, como son las tareas, técnicas, tecnología y teoría y TEL se refiere a la Tecnología de Aprendizaje Mejorado.

Por otro lado, Chaachoua, Bessot (2019); Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019) señalan que:

- **Tipo de tareas y subtipos de tareas:** Un tipo de tarea se define mediante un verbo de acción y algunos complementos. Asimismo, en una institución de enseñanza, los tipos de tareas siempre contienen al menos una técnica para llevar a cabo, es decir para iniciar.

El tipo de tareas se fundamenta en la noción del alcance de la técnica. Se denota por $\boldsymbol{P(\tau)}$ al conjunto de tareas donde $\boldsymbol{\tau}$ es la técnica la cual permite resolver bajo ciertas condiciones institucionales, y que son estables durante un determinado período. Al conjunto de tareas $\boldsymbol{T}$ es considerado como un tipo de tareas, la cual contiene al menos una tarea $\boldsymbol{t}$ que puede resolverse a través de la técnica $\boldsymbol{\tau}$, es decir que todas las tareas solucionadas por $\boldsymbol{\tau}$ pertenecen a $\boldsymbol{T}$, o bien que todas las tareas que pertenecen a $\boldsymbol{T}$ pueden resolverse por $\boldsymbol{\tau}$. Si consideramos un conjunto de tareas, donde $\boldsymbol{T_a}$ y $\boldsymbol{T_b}$ son dos tipos de tareas con $\boldsymbol{T_a}$ incluido en $\boldsymbol{T_b}$, entonces este conjunto de tareas se considera como un subtipo de taras (Chaachoua, Bessot 2019, p.236).

- **Descripción de las técnicas:** Una técnica $\boldsymbol{\tau}$ se describe mediante un conjunto de tipos de tareas $\{\boldsymbol{T_i}\}$ y estas son de dos tipos: (1) tareas intrínsecas constituidas por los tipos de tareas que solo existen por la implementación de las técnicas de ciertos otros tipos de tareas; y (2) tareas extrínsecas constituidas por los tipos de tareas que pueden prescribir institucionalmente a los estudiantes, es decir que se indica que los tipos de tareas pueden resolverse de una cierta manera (Chaachoua, Bessot 2019, p.237).
- **Variable y generador:** Un generador de un tipo de tareas ($\boldsymbol{GT}$) se define mediante un tipo de tareas y un sistema de variables. Se tiene que un sistema de variables ($\boldsymbol{V_i}$) es una lista de variables con valores específicos que se pueden tomar dentro de un dominio de la disciplina. Estos valores generan los tipos de tareas de manera específica que el tipo de tarea $\boldsymbol{T}$. Al considerar los valores de las variables de un generador de tipos de tareas, se distingue lo epistemológico, institucional y didáctico. Es decir, las variables epistemológicas para un tipo de tareas que se consideran en un modelo praxeológico de

referencia, los valores que toma su valor modifica el rango de las posibles técnicas de un tipo de tareas, así como la relación con un objeto de conocimiento. La variable institucional está sujeta a condiciones y restricciones que reduce el tipo de tareas y los posibles valores de las variables correspondientes. En el caso de la variable didáctica, es una variable dentro de la institución que esta potencialmente a disposición del profesor. Una variable didáctica dentro de una institución, en un momento dado no necesita ser una variable didáctica en un momento diferente o dentro de otra institución (Chaachoua, Bessot 2019, p.238-239).

Respecto al modelo praxeológico T4TEL y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), considera que las actividades humanas están situadas institucionalmente. Es decir, una institución es una organización social estable y ofrece un marco referencial en donde algunos grupos diferentes de personas realizan distintas actividades, donde las mismas están sujetas a un conjunto de condiciones y restricciones.

Otros elementos teóricos son:

- **Circulación de saberes:** Cuando el saber no permanece invariante, ya que circula de un contexto a otro (Castela 2016, p. 12).
- **Institución:** Es una organización social estable en donde se realizan ciertas actividades sociales, considerando restricciones específicas. Una institución crea un marco que relaciona las actividades que se desarrollan en su entorno de tal forma que las hacen posibles proporcionando ciertos recursos materiales, organizativos y cognitivos (Castela 2016, p. 12).

- **Sujeto:** El término, en la TAD, se refiere, en su sentido etimológico latino, *sub-jectus* (literalmente arrojado debajo de), participio pasado de *subjacere* que significaba "someter". En este sentido, el término no remite a un individuo concreto, sino a un conjunto de actividades, expectativas y restricciones institucionales que caracterizan una posición del sujeto dentro de la institución (Castela 2016, p. 12).
- **Instituciones productoras de saberes:** Son aquellas que tienen como función principal producir praxeologías, haciendo incidir en ellas sus restricciones y condicionamientos o, en pocas palabras, garantizar una pertinencia teórica. Se identifican dos tipos, *instituciones productoras de saberes matemáticos P(M)*, que es la comunidad de matemáticos que produce cuestiones y respuestas en el ámbito de las matemáticas y las i*nstituciones productoras de saberes de Ingeniería P(DI)*, esto es en el ámbito de la Ingeniería (Romo 2014, p. 324).
- **Instituciones de enseñanza:** Son aquellas que tienen por función transmitir, mostrar y difundir las praxeologías. Estas se encargan de realizar operaciones sobre las praxeologías para adaptarlas a las condiciones y restricciones particulares de la enseñanza o hacer las transposiciones necesarias que estas requieren. Se identifican dos, *instituciones de enseñanza de matemáticas E(M)* representadas, por ejemplo, por los cursos de matemáticas y las *instituciones de disciplinas intermediarias E(DI)* representadas, por ejemplo, por los cursos de disciplinas intermediarias como por ejemplo el curso teoría de control (Romo 2014, p. 324).
- **Institución usuarias:** Son aquellas que hacen usos y ponen en funcionamiento las praxeologías matemáticas para atender las necesidades de práctica profesional. Se identifican dos tipos: *instituciones que representan a la práctica profesional Ip*, son las

que representan la práctica profesional del ingeniero y *las instituciones que representan las actividades prácticas Ap* que comprenden actividades idénticas que se desarrollan en su entorno de su formación a manera de proyecto realizados por ellos mismos (Romo 2014, p. 324).

- **"La razón de ser"** de acuerdo a Gascón (2011) se refiere a las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que responde cada uno de los ámbitos de la actividad matemática.

  Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo la razón de ser se refiere al rol que desempeña la Integral Definida en las diferentes aplicaciones que aparecen durante la formación universitaria de estudiantes de ingeniería química. Así, desde el ámbito de la TAD, la dimensión ecológica corresponde a cómo vive el objeto matemático Integral Definida en la *institución productora de saberes matemáticas P(M)* y en la *institución productora de saberes de Ingeniería P(DI)*. Teniendo como referencia esas cuestiones, la finalidad del trabajo es identificar y analizar la existencia de praxeologías asociadas a la integral definida, así como las cuestiones que motivan sus construcciones y usos, esto es su razón de ser.

- **Pregunta generatriz:** Como oposición a un trabajo matemático caracterizado por proponer a los estudiantes utilizar técnicas, sin haberse cuestionado su pertinencia, ni las razones de ser, surge la necesidad de realizar una pregunta generatriz, que se convierte en problemática, que al tratar de resolverla genera una serie de tareas no rutinarias (Otero & Corica 2013, p.86).

2.5 Método de investigación

La investigación que desarrollaremos se sitúa en el paradigma de la investigación cualitativa, pues donde estudiaremos e identificaremos las praxeologías sobre la Integral Definida; para tal finalidad tomaremos como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Según Chevallard (1999, 2007) se tiene que una de las características de interpretar las matemáticas es mediante su organización. Es decir, a partir del modelo epistemológico de las matemáticas y que la forma de considerar la evolución de las mismas es a través del modelo praxeológico, propuesto en la misma teoría de forma explícita, y que se expresa en términos de praxeologías u organizaciones matemáticas.

A partir de este contexto, surge la necesidad de formular un modelo praxeológico sobre la Integral Definida, que modele los contenidos matemáticos en un entorno educativo específico, donde se describen los procesos de estudio.

Partiendo de la organización matemática que se realizará y analizará de los libros de textos de matemáticas y los libros de textos de la carrera, se identificará que contenidos son los que predominan en la formación de los ingenieros químicos y a su vez proponer un modelo praxeológico, con la finalidad de hacer sugerencias sobre en qué enfatizar, qué dejar de lado, qué le estaría faltando, entre otras cosas.

Para nuestro estudio, relacionado con los usos de la Integral Definida en diversas instituciones de enseñanza, la finalidad es analizar cuál es la razón de ser de la Integral Definida en los libros de texto de Matemática y cuál es su razón de ser en los cursos de disciplinas intermediarias de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. A partir de ello, se pretenden hacer explícitas similitudes y diferencias entre las praxeologías identificadas y proponer recomendaciones para establecer conexiones.

Con el propósito de cumplir con el objetivo planteado, consideramos las siguientes etapas:

- Etapa 1: Análisis de libros de textos sobre Matemática

En esta etapa se consideró las siguientes fases:

- **Fase 1: Revisar el plan de estudios**

  Uno de los primeros criterios que se debe tener en cuenta es la revisión del plan de estudios de la carrera, con la finalidad de identificar los cursos de Cálculo. Luego, identificamos los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica, según la programación curricular académica.

- **Fase 2: Estudio epistemológico de la Integral Definida**

  Realizamos un estudio sobre la evolución de la Integral Definida, desde sus orígenes, relacionado con el problema del área. Es decir, cómo determinar el área de una región plana y los métodos propuestos en las diferentes épocas con la finalidad de lograr tal objetivo. En la sección 1.1, se describe este estudio sobre la evolución de la Integral Definida, donde se consultó diversas investigaciones, así como literatura especializada sobre el tema.

- **Fase 3: Descripción de los libros de textos de Cálculo**

  Como primer paso, consultamos la programación curricular académica de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, con la finalidad de hacer una selección de los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica en la asignatura de Matemática Superior I.

Luego, realizamos una descripción de los libros de textos seleccionados donde aparece el objeto matemático Integral Definida, evidenciando sus usos en las diversas aplicaciones relacionadas al área de regiones planas, volúmenes de un sólido de revolución, área de una superficie de revolución, longitud de arco, trabajo, centroide de una región plana y la integral impropia.

- **Fase 4: Identificación de un modelo praxeológico para la Integral Definida en la institución de enseñanza de la matemática**

De las descripciones realizadas en los libros de textos sobre Cálculo, los cuales presentan elementos matemáticos comunes, propondremos una organización siguiendo el modelo praxeológico que contempla tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida.

Para la organización matemática, utilizamos los elementos teóricos. Es decir, el modelo praxeológico $[\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\Theta}]$ propuesto por Chevallard (1999), así como el generador de un tipo de tareas *($\boldsymbol{GT}$)* y las variables didácticas *($\boldsymbol{V_i}$)* propuestas por Chaachoua, Bessot (2019); Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019), elementos que permiten relacionar entre lo especifico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

- Etapa 2: Análisis de libros de textos sobre Ingeniería Química

En esta etapa consideramos las siguientes fases:

- **Fase 1: Entrevistar a expertos**

Consultamos a profesores expertos (ingenieros químicos) con la finalidad de recoger información sobre los usos de la Integral Definida en su campo de acción, como también saber qué técnicas aplican para la resolución de los tipos de tareas que se proponen y qué argumentación es la que justifica a esas técnicas. Es decir, si tienen fundamentación en la matemática o es propia de su disciplina o de alguna otra.

En esta parte, se le solicitó a uno de ellos que nos mostrara cómo hacen uso de la Integral Definida, en la que se pude observar que, a partir de los datos obtenidos de la tarea, la aplica como una herramienta en la resolución de tareas.

Señalaron que, para solucionar las tareas, necesitan, como una de las técnicas, a la Integral Definida y la razón por la cual la usan es que, a partir de la ecuación de estado (ecuación que describe el comportamiento de todas las sustancias para todas las condiciones que intervienen, como la presión, temperatura, entre otros y se plantea con derivadas parciales), de donde se derivan otros elementos que necesitan de la Integral Definida. Asimismo, indicaron que estas ecuaciones los estudiantes las estudian en los cursos de *Física*, específicamente en termodinámica.

Por ello, se consultó con especialistas que dictan los cursos de Física (físicos de profesión), quienes señalaron que usan la Integral Definida como una herramienta y que necesitan de modelos matemáticos para hacer sus interpretaciones de los fenómenos termodinámicos y que son validados en su campo de acción de acuerdo a los resultados que quieren obtener.

Los profesores expertos (ingenieros químicos) señalaron que, para las asignaturas que dictan los estudiantes deben haber llevado los cursos *de Matemática I, Física I y II.*

También, indicaron los cursos que dictan y los libros de textos que usan como fuente bibliográfica.

- **Fase 2: Descripción de los libros de textos de la especialidad**

De la entrevista realizada a los especialistas del área, indicaron las asignaturas que dictan son *Fisicoquímica I y Principios de Ingeniería Química.* Asimismo, señalaron que, de acuerdo a la programación curricular académica de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica en las asignaturas emplean el libro de texto *Fisicoquímica* (2ª ed.) de Castellan (1998) y el libro de texto *Principios Elementales de los Procesos Químicos* de Felder & Rousseau (2003).

Luego, realizamos una descripción de los libros de textos seleccionados donde aparece el objeto matemático Integral Definida, en la que se identificaron los temas en donde se hace uso del concepto de la Integral Definida, las notaciones, interpretaciones y aplicaciones en los diferentes contextos de la Ingeniería Química.

- **Fase 3: Identificación de un modelo praxeológico para la Integral Definida en las instituciones intermediarias**

De las descripciones realizadas en los libros de textos de la especialidad, los cuales presentan elementos comunes, proponemos una organización siguiendo el modelo praxeológico que contempla tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación a los usos de la Integral Definida en la especialidad de Ingeniería Química.

Para la organización, utilizamos los elementos teóricos, además de usar el modelo praxeológico extendido [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta^p}$, $\boldsymbol{\Theta}$] propuesto por Castela y Romo (2011), que es una generalización del propuesto por Chevallard (1999), donde las tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^p}$ se utilizan para argumentar las técnicas desde su campo de acción. Es decir, desde práctica, basados en los usos continuos que realizan, o lo que es lo mismo decir, la experiencia. También haremos uso del generador de un tipo de tareas *(*$\boldsymbol{GT}$*)* y de las variables didácticas *(*$\boldsymbol{V_i}$*)* propuestas por Chaachoua, Bessot (2019); Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019), que permiten relacionar entre lo especifico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN TEXTOS DE CÁLCULO

En este capítulo, revisaremos algunos libros de texto sobre Cálculo usados por los expertos (matemáticos) que dictan los cursos de matemáticas para estudiantes de la carrera de Ingeniería Química. En estos libros de texto identificaremos las matemáticas que se enseñan en los estudios de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo; específicamente sobre el tema de la Integral Definida. La finalidad de este análisis es para identificar los contenidos relacionados a la Integral Definida, teniendo en cuenta el orden de los temas, si hay definiciones, teoremas y técnicas que se puedan identificar, si hay aplicaciones de la Integral Definida y si la introducción de un nuevo método o teoría se justifica porque el problema lo requiere. El análisis permitirá proponer una organización praxeológica de la Integral Definida en disciplinas matemáticas de Ingeniería Química.

Se tendrá en cuenta los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica en las asignaturas de *Matemática Superior I*, para la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, según se señala en la programación curricular académica en el sílabo del curso *Matemática Superior I*.

Cabe señalar que la asignatura de *Matemática Superior I* es pre requisito para la asignatura de *Física I*, y *Física I* es pre requisito para la asignatura de *Física II* y está a la vez es pre requisito para la asignatura de *Fisicoquímica I*, tal como se observa en una parte de la malla curricular de la carrera de Ingeniería Química (ver figura 18).

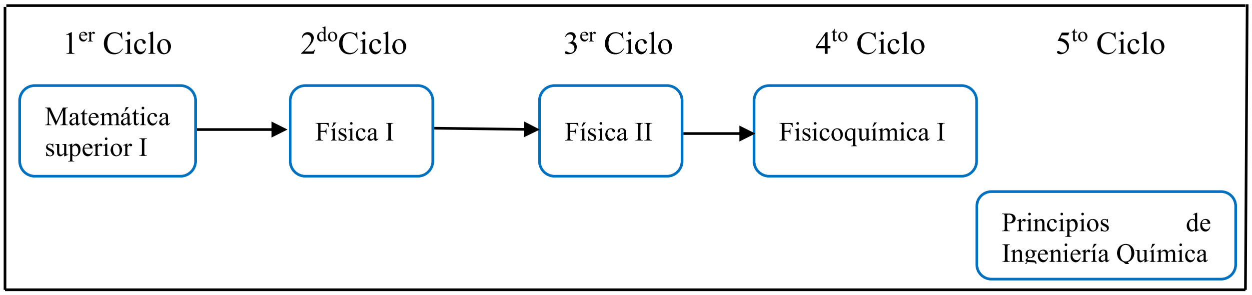


Figura 18. Malla curricular de la carrera Ingeniería Química - UNPRG

Sin embargo, la asignatura de *Principios de Ingeniería Química* no indica como pre requisitos a las asignaturas mencionadas, tal como se muestra en la figura 18, pero de acuerdo a la información brindada por los especialistas del área, sirve de base para otras asignaturas, así como también la asignatura requiere de los conocimientos de *Matemática* y *Física*, específicamente de la Integral Definida.

Nuestro estudio se ha centrado en el análisis para los libros de textos de las asignaturas de *Matemática Superior I, de Fisicoquímica I y Principios de Ingeniería Química* donde se evidenciará la relación de los usos de la Integral Definida. Cabe señalar que queda pendiente el análisis de textos que se usan para las asignaturas de *Física I y II*.

A partir de ello, se propondrá una organización praxeológica para la Integral Definida. En particular, su concepto es estudiado y usado en diferentes contextos y su estudio no sólo se centra en el cálculo de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una determinada función.

Por otra parte, para el análisis praxeológico de los libros de textos, usaremos los elementos teóricos brindados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); presentaremos la descripción de los ejemplos desarrollados, donde identificaremos los tipos de tareas y su relación entre ellas, las técnicas asociadas a los tipos de tareas, las tecnologías y las teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo.

3.1 Descripción de los libros de textos sobre Cálculo

En esta sección realizamos una descripción de los libros de textos sobre Cálculo, con el propósito de reconocer la forma en que la Integral Definida vive en los libros de textos de matemática en el nivel universitario, así como la manera en que estos son usados por los expertos (matemáticos). Asimismo, identificar las definiciones, propiedades, teoremas, ejemplos, problemas y ejercicios que se plantean y que métodos de solución se emplean para su resolución, y que aplicaciones de la Integral Definida consideran. El propósito de esta descripción es para contribuir con la propuesta de una organización praxeológica para la Integral Definida, que se realizará en la sección siguiente.

Los libros de Cálculo usados como fuente bibliográfica en la asignatura de *Matemática Superior I*, para la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, de acuerdo a su programación curricular académica y al programa analítico (sílabo), son:

- Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Pearson Prentice Hall.
- Edwards, H., & Penney, D. (2008). *Cálculo con transcendentes tempranas.* México: Pearson Prentice Hall.
- Larson, R., & Edward, B. (2010). *Cálculo 1 (9a ed.).* México: Mc Graw-Hill.

A continuación, presentaremos una descripción de los libros de textos sobre Cálculo, específicamente a temas relacionados con el concepto de la Integral Definida.

Libro de texto Cálculo diferencial e integral

El libro de texto *Cálculo diferencial e integral* de los autores Purcell, Varberg & Rigdon (2007), presenta una estructura conformada por 9 capítulos. En el capítulo 4, se aborda el concepto Integral Definida y contiene siete secciones (p. 215-274).

A continuación, detallaremos los contenidos relacionados con el concepto Integral Definida, así como los diferentes usos que se relacionan con otros temas matemáticos que se abordan en las secciones de los capítulos considerados.

En la tabla 1, se muestran los contenidos relacionados al área con la Integral Definida.

<table>
<tr><th>AUTORES</th><th>AÑO</th><th>TITULO</th><th>CIUDAD</th><th>EDITORIAL</th></tr>
<tr><td>Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S.</td><td>2007</td><td>Cálculo diferencial e integral</td><td>México</td><td>Pearson Prentice Hall</td></tr>
<tr><td colspan="5">CAPÍTULO 4: LA INTEGRAL DEFINIDA (p. 215-274)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td>4.1 Introducción al área</td><td colspan="4">- Notación sigma.
- Propiedades de ∑
- Teorema A: Linealidad de ∑
- Fórmulas para algunas sumas especiales.
- Demostración de las fórmulas para las sumas especiales.
- Áreas por medio de polígonos inscritos.
- Áreas por medio de polígonos circunscritos.
- Otros problemas con el mismo tema.</td></tr>
<tr><td>4.2 La Integral Definida</td><td colspan="4">- Sumas de Riemann.
- Definición de la Integral Definida.
- ¿Cuáles funciones son integrables?
- Teorema A: Teorema de integrabilidad.
- Cálculo de integrales definidas.
- Propiedad aditiva para intervalos.
- Teorema B: Propiedad aditiva para intervalos.</td></tr>
</table>

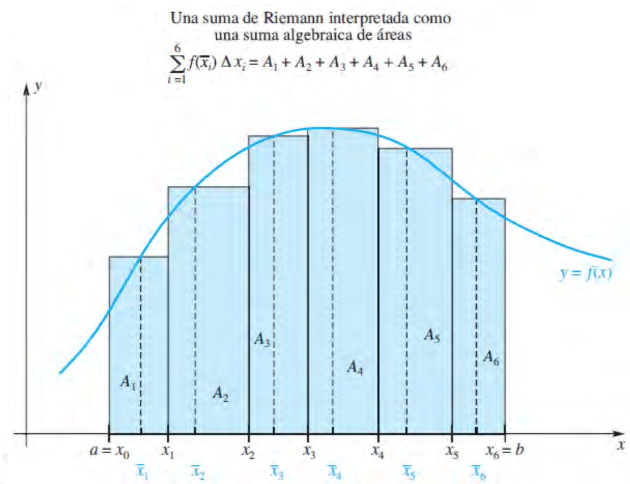
	- Velocidad y posición.  *Figura 19.* Interpretación de las sumas de Riemann (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 224)

Tabla 1. Contenidos que relacionan el área con la Integral Definida.

Se tiene que respecto a la introducción con el tema de área, se verifica que, para calcular el área de una determinada región R a través de polígonos inscritos o circunscritos, cuando se considera una partición del intervalo en n subintervalos, se necesita de una representación para la suma de todas las áreas de los rectángulos y por tal motivo consideran una sección sobre sumatorias ($\sum$), que luego son aplicadas, según el caso que se proponga, para obtener una representación en sumatorias. Luego, aplican el límite a sumatoria, obtenida cuando $n \to \infty$, y así se logra el área solicitada.

También se verifica que no consideran ejemplos para realizar una aproximación del área de alguna región en específico.

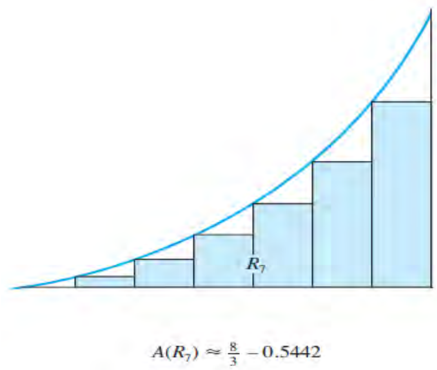


Figura 20. Aproximación de una región por rectángulos inscritos (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 220)

En la figura 20 se muestra una región limitada por la gráfica de una función, donde se realiza una aproximación de la región, consideran una partición del intervalo e indican el área de siete rectángulos, pero solo se muestra, mas no se realiza ningún cálculo para aproximar dicha área.

También se observa que, para definir las sumas de Riemann, necesitan de la representación de las sumatorias, así como de una partición del intervalo que no necesariamente sea regular. Por otro lado, se tiene que los ejemplos considerados estos se basan en considerar una partición del intervalo indicado, para obtener las áreas de los rectángulos en dicha partición, con la finalidad de explicar la suma de Riemann (ver figura 19).

Respecto a la definición de la Integral Definida, donde se considera una función f continua en el intervalo $[a, b]$, una vez obtenida la suma de Riemann, aplican el límite a dicha suma cuando $\|P\| \to 0$ ($\|P\|$ es la norma de mayor longitud del subintervalo de la partición de P) para definir la Integral Definida, en base a la suma de Riemann. Los ejemplos considerados para calcular la Integral Definida de funciones integrables (funciones polinomiales, funciones seno y coseno, funciones racionales, con tal que el intervalo $[a, b]$

no contenga puntos en donde el denominador sea cero), se obtienen aplicando la definición de la Integral Definida.

En la tabla 2 se presentan los temas relacionados entre la antiderivada y la Integral Definida

4.3 El primer teorema fundamental del Cálculo	- Primer teorema fundamental del Cálculo. - Teorema A: Primer teorema fundamental del Cálculo. - Teorema B: Propiedad de comparación. - Teorema C: Propiedad de acotamiento. - Teorema D: Linealidad de la Integral Definida.
4.4 El segundo teorema fundamental del Cálculo y el método de sustitución	- Teorema A: Segundo teorema fundamental del Cálculo. - El método de sustitución. - Teorema B: Regla de sustitución para integrales indefinidas. - Teorema C: Regla de sustitución para integrales definidas.
4.5 el teorema del valor medio para integrales y el uso de simetría	- Definición: Valor promedio de una función. - Teorema A: Teorema del valor medio para integrales. - Teorema B: Teorema de simetría. - Teorema C.

Tabla 2. Relación entre la antiderivada y la Integral Definida.

Según la estructura del libro (ver tabla 2), se parte con el primer teorema fundamental del Cálculo, donde este relaciona la derivada con la Integral Definida. Los ejemplos considerados muestran cómo es el comportamiento de la función integrando con respecto a su límite superior de integración.

El segundo teorema fundamental del Cálculo relaciona la antiderivada y la Integral Definida. Este teorema es una herramienta poderosa para evaluar Integrales Definidas. De igual modo, para determinar las antiderivadas de funciones conocidas, se basa en el teorema B (Regla de sustitución para integrales indefinidas), luego se complementa con el teorema C (Regla de sustitución para integrales definidas). Los problemas que se tratan en esta sección son explicados teniendo en consideración a la función integrando, donde se evidencia la relación que existe entre la antiderivada y la Integral Definida.

A través del teorema del valor medio para integrales, este relaciona que el área de la región determinada por la gráfica de una función (obtenida a través de la Integral Definida) es igual al área de un rectángulo (base $b - a$ por la altura $f(c)$, donde $c \in [a, b]$). Los ejemplos considerados muestran esa relación existente siempre que cumplan las condiciones del teorema.

En la tabla 3 se presenta la integración numérica.

4.6 Integración numérica	- Sumas de Riemann. - Métodos para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ - Sumas de Riemann del punto izquierdo. - Sumas de Riemann del punto derecho. - Sumas de Riemann del punto medio. - Regla del trapecio. - Regla de la parábola. - Análisis del error. - Teorema A.

Tabla 3. Aplicación de la Integral Definida – Integración numérica.

Se tiene que la integración numérica (ver tabla 3) es aplicada a aquellas integrales definidas que no pueden ser evaluadas a través del segundo teorema fundamental del Cálculo. Es decir, aquellas funciones integrables que no tienen una antiderivada conocida.

Cabe mencionar que la integración numérica tiene como propósito ser aplicada a este tipo de funciones integrales; sin embargo, los problemas que se consideran para aplicar la integración numérica son funciones integrables que tienen una antiderivada.

En la tabla 4, se presenta las aplicaciones de la Integral definida, relacionada con el área de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución y longitud de una curva.

CAPÍTULO 5: APLICACIONES DE LA INTEGRAL (p. 275-323)	
Contenidos	
5.1 El área de una región plana	- Una región por arriba del eje x

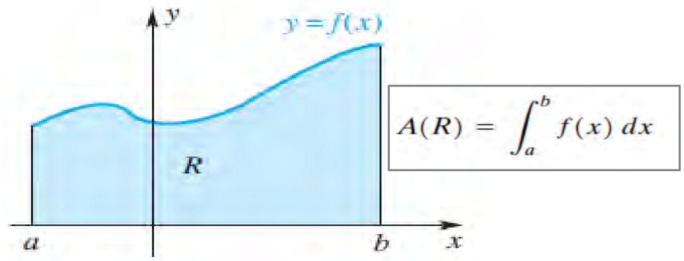
<table>
<tr><td></td><td>- Una región entre dos curvas.
- Distancia y desplazamiento.


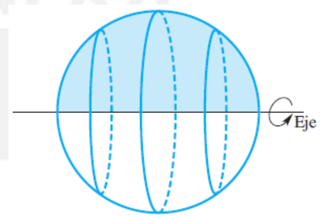
Figura 21. Área de una región R sobre el eje X (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p.</td></tr>
<tr><td>5.2 Volúmenes de sólidos: Capas, discos, arandelas</td><td>- ¿Qué es el volumen?
- Solidos de revolución: Método de los discos.


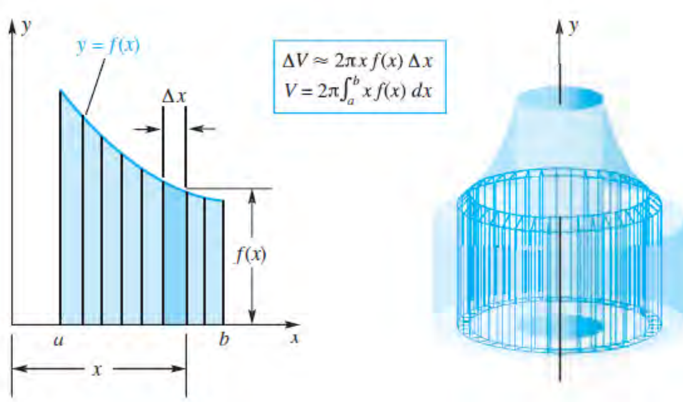
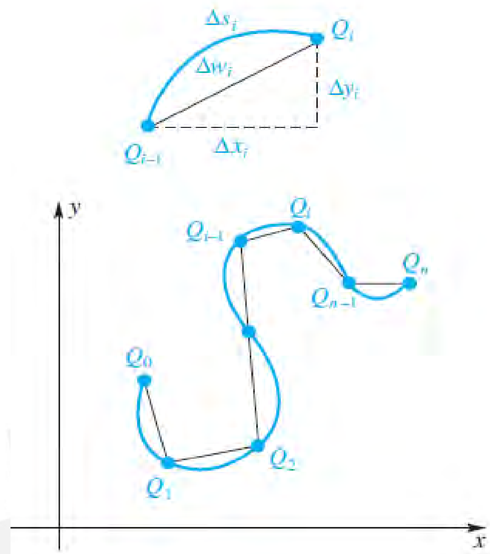
Figura 22. Método de los discos (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 281)
- Otros solidos con secciones transversales conocidas.
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$
Figura 23. Volumen del sólido (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 281)</td></tr>
<tr><td>5.3 Volúmenes de sólidos de revolución: Cascarones</td><td>- Método de los cascarones.


Figura 24. Método de los cascarones (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 281)</td></tr>
<tr><td>5.4 Longitud de una curva plana</td><td>- Definición.
- Longitud de arco.
- Diferencial de la longitud de arco.</td></tr>
</table>

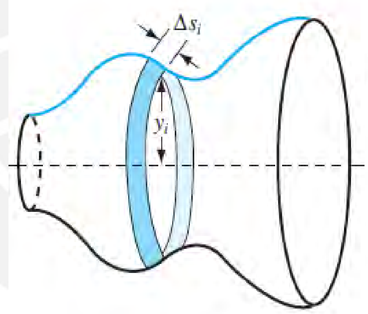
<table>
<tr>
<td></td>
<td>



$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Figura 25. Longitud de una curva *L* (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 296)

- Área de una superficie de revolución.



$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \, \Delta s_i = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Figura 26. Área de una superficie de revolución (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 299)

</td>
</tr>
</table>

Tabla 4. Aplicación de la Integral Definida – Áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos de revoluciones, longitud de una curva.

El concepto de la Integral Definida se aplica para calcular áreas de regiones planas, las cuales son determinadas según las funciones que determinan dichas regiones.

En la figura 27, se muestra un caso donde una región es determinada por la gráfica de dos funciones y cómo se calcula el área de dicha región.

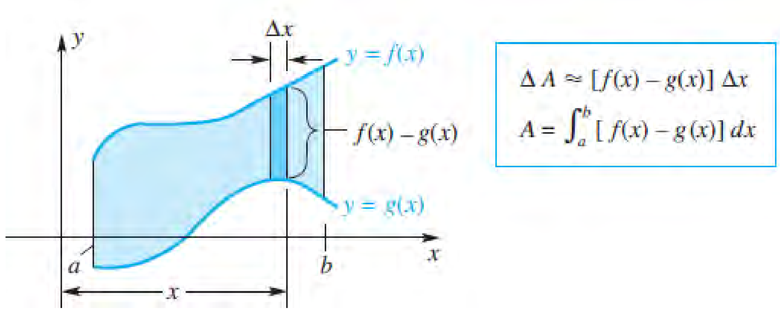


Figura 27. Región determinada por la gráfica de dos funciones (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 277)

Para determinar el volumen de estas regiones planas, se tiene que tener en cuenta su eje de rotación para poder aplicar la Integral Definida. Asimismo, se debe identificar la sección transversal del sólido de revolución, luego se puede aplicar el método del disco, el método de las arandelas y el método de los cascarones cilíndricos.

Los ejemplos considerados para aplicar estos métodos son detallados y comparados entre ellos con la finalidad de ver su funcionamiento y facilidad. Además, para determinar el resultado, se aplica el segundo teorema fundamental del Cálculo.

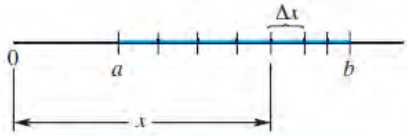
Por otro lado, se tiene que, para determinar la longitud de una curva plana, primero definen una curva plana suave en términos de dos ecuaciones paramétricas. Para calcular la longitud de arco, se usa la ecuación que se muestra en la figura 25.

En la tabla 5, se presenta otras aplicaciones de la Integral Definida relacionada a temas de la Física y Estadística.

5.5 Trabajo y fuerza de un fluido	- Aplicación a resortes - Fuerza de un fluido. $$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\, \Delta x = \int_a^b F(x)\, dx$$ $$\boxed{\begin{array}{l} \Delta W \approx F(x)\, \Delta x \\ W = \int_a^b F(x)\, dx \end{array}}$$ *Figura 28.* Trabajo realizado (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 302)

<table>
<tr>
<td>5.6 Momento y centro de masa</td>
<td>

- Distribución continua de masa a lo largo de una recta.



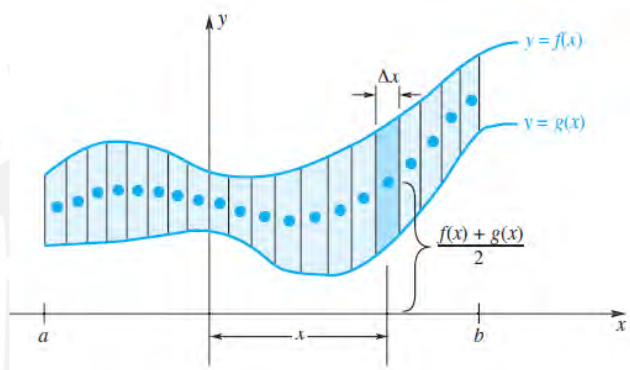
$$\Delta m \approx \delta(x)\,\Delta x \qquad \Delta M \approx x\,\delta(x)\,\Delta x$$
$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad M = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx$$

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Figura 29. Centro de masa (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 309)

- Distribución de masa en un plano.

- Centroide de una región plana.



$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{2}[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Figura 30. Centroide de una región plana (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 311)

- Teorema A: Teorema de Pappus.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5.7 Probabilidad y variables aleatorias</td>
<td>

- Definición: Esperanza de una variable aleatoria.

- Variable aleatoria discreta y continua.

- Teorema A.

$$\boxed{F(x) = \int_A^x f(t)\,dt, \quad A \le x \le B}$$

Figura 31. Función de distribución acumulada (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 319)

</td>
</tr>
</table>

Tabla 5. Aplicación de la Integral Definida a temas relacionados con la Física y a la Estadística.

El concepto de la Integral Definida es aplicado a problemas relacionados con resortes, específicamente con la Ley de Hooke, donde los ejemplos se basan en calcular el trabajo que se necesitan para estirar un resorte desde un punto inicial a un punto final cuando se le aplica una determinada fuerza.

Para determinar la fuerza de un fluido, se plantean y se resuelven problemas a partir de la modelación metamatemática, donde se obtienen los datos que se necesitan para su solución y luego se aplica el segundo teorema fundamental del Cálculo para obtener el resultado solicitado.

La Integral Definida se aplica para determinar el centroide de una región plana (ver figura 30). En los ejemplos considerados, se solicita calcular el centroide de las regiones determinadas por las gráficas de las funciones que se consideran, teniendo en cuenta cada uno de los casos que se han indicado.

En cuanto al teorema de Pappus, se considera un ejemplo para verificar que el volumen del sólido de revolución es igual al área de la región R multiplicada por la distancia recorrida por su centriode. Es decir, verificar el volumen de un sólido de revolución y su centroide.

Asimismo, se tiene que el concepto de la Integral Definida se aplica a problemas relacionados con la Estadística, específicamente con la función de distribución acumulada, la cual es definida como $F(x) = P(X \leq x)$, donde X es la variable aleatoria, la función está definida tanto para variables aleatorias discretas como continuas.

En la tabla 6, se presentan contenidos relacionados con la Integral Definida, específicamente sobre integración impropia.

CAPÍTULO 8: FORMAS INDETERMINADAS E INTEGRALES IMPROPIAS (p. 423-448)	
Sesiones didácticas	Contenidos
8.3 Integrales impropias: límites de integración infinitos	- Un límite infinito. - Definición.

	- Funciones de densidad de probabilidad. - La distribución normal. - La paradoja de la trompeta de Gabriel. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *Figura 32.* Integrales impropias (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 434)
8.4 Integrales impropias: integrandos infinitos	- Integrandos que son infinitos en un punto de frontera. - Integrandos que son infinitos en un punto interior.

Tabla 6. Contenidos relacionados con la Integral Definida - Cálculo diferencial e integral

Respecto al tema sobre la integral impropia, realizan una introducción para su explicación, considerando la Integral Definida en el sentido que si los límites de integración son ∞ o $-\infty$. Para tal propósito, consideran el ejemplo $\int_0^b xe^{-x}\,dx$, donde obtienen su antiderivada por integración por partes, van dando valores al límite superior de integración $b = 1, 2{,}3$, luego consideran para $b = \infty$, entonces aplican el límite a la antiderivada obtenida cuando $b \to \infty$, obteniendo que este límite converge a 1, tal como se puede verificar en la figura 33.

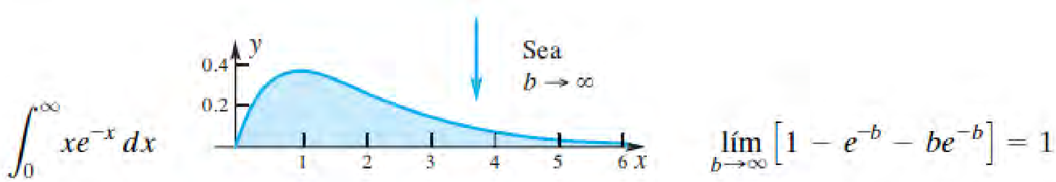


Figura 33. Convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$ (Purcell, Varberg & Rigdon, 2007, p. 434)

Se analiza a través de ejemplos, cuando la integral impropia converge o diverge, según cada caso que se considera.

Como se puede verificar, el concepto Integral Definida es abordada a partir del área como el límite de una suma, la Integral Definida, propiedades de la Integral Definida, el teorema fundamental del Cálculo, el teorema del valor medio e integración numérica. También el concepto Integral Definida es abordado en otros temas que se relacionan con este concepto matemático y se verifica además que sus usos son importantes y fundamentales para tratar con los diferentes problemas que requieren de su aplicación.

Libro de texto Cálculo con transcendentes tempranas

El libro de texto titulado *Cálculo con transcendentes tempranas* de los autores Edward & Penney (2008) presenta una estructura conformada por 14 capítulos. Tenemos que en el capítulo 5, se aborda el concepto Integral Definida y contiene nueve secciones didácticas (p. 313-412).

A continuación, detallaremos los contenidos relacionados con el concepto Integral Definida, así como los diferentes usos que se relacionan con otros temas matemáticos que se abordan en las secciones de los capítulos considerados.

AUTORES	AÑO	TÍTULO	CIUDAD	EDITORIAL
Edwards, H. & Penney, D.	2008	Cálculo con transcendentes tempranas	México	Pearson Prentice Hall
CAPÍTULO 5: LA INTEGRAL (p. 313-412)				
5.1 Introducción	- Breve reseña histórica de Arquímedes. - El problema de la recta tangente motivó el cálculo diferencial explicación mediante una representación gráfica. - El problema del área motivó el cálculo integral explicación mediante una representación gráfica.			
5.2 Antiderivadas y problemas de valor inicial	- Antiderivadas. - Definición: Antiderivada. - Teorema 1: La antiderivada más general. - Teorema 2: Algunas fórmulas de integración. - Ecuaciones diferenciales muy sencillas. - Movimiento rectilíneo. - Aceleración constante. - Movimiento vertical con aceleración gravitacional constante.			
5.3 Cálculos elementales de área	- Concepto de área. - Áreas entre gráficas. - Notación de suma. - Sumas de áreas.			

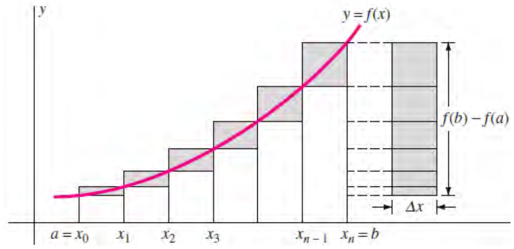
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Figura 34. Área bajo la gráfica de la función $f(x)$ en $[a,b]$ (Edward & Penney, 2008, p. 335)
Para determinar el área A de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, se tiene que $f(x)$ debe ser creciente y continua de valores positivos en el intervalo cerrado $[a,b]$, tomar una subdivisión del intervalo en n subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ representa la base de cada rectángulo inscrito y/o circunscrito que tienen la misma longitud.
Si en la figura 21 se elige el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se tienen dos casos:
➢ Caso 1: Si consideramos el rectángulo inscrito sobre el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, este tendrá una altura $f(x_{i-1})$ y base Δx, se obtiene que el área del rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Para $i = 1,2,3,\cdots,n$, se tiene que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos es:

$$\boxed{\underline{A}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x}$$

Figura 35. Suma de las áreas de los rectángulos inscritos (Edward & Penney, 2008, p. 336)
➢ Caso 2: Si consideramos el rectángulo circunscrito sobre el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, este tendrá una altura $f(x_i)$ y base Δx, se obtiene que el área del rectángulo es $f(x_i)\Delta x$. Para $i = 1,2,3,\cdots,n$, se tiene que la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es:

$$\boxed{\overline{A}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}$$

Figura 36. Suma de las áreas de los rectángulos circunscritos (Edward & Penney, 2008, p.
- Áreas como límites.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Figura 37. Área de una región *R* (Edward & Penney, 2008, p. 336)

Donde A representa el área bajo la gráfica de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, la cual se obtiene al aplicar el límite a $\underline{A}_n$ y $\overline{A}_n$ en los casos 1 y 2 respectivamente cuando $n \to \infty$. Además, se tiene que $x_i = a + i\Delta x$, para $i = 0,1,2,3,\cdots,n$.
</td>
</tr>
</table>

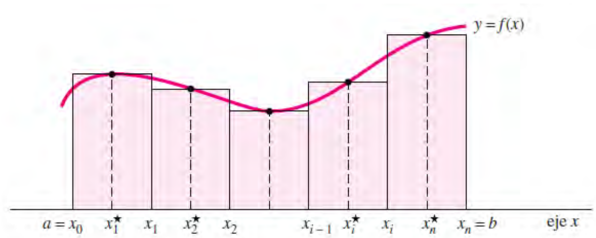
Tabla 7. Aproximación del área de una región R y el área como límite.

En la tabla 7 se presentan los temas relacionados con la aproximación del área de una determinada región y el área como límite. Así, se tiene que, en relación a la introducción para abordar el tema de la Integral Definida, se verifica que consideran un ejemplo relacionado con ecuaciones diferenciales, con el propósito de encontrar una antiderivada. Mediante el teorema 2, proporcionan algunas fórmulas de integración, así como ejemplos donde se verifica su aplicación; sin embargo, no establecen en esta sección ninguna relación directa con el concepto de la Integral Definida, ya que las antiderivadas tienen relación con el teorema fundamental del Cálculo.

Asimismo, consideran la sección relacionada con el área baja la gráfica de una función (ver figura 34) y a través de los ejemplos realizan aproximaciones de las áreas de regiones que están limitadas por las gráficas de ciertas funciones. Para tal propósito, consideran una partición arbitraria del intervalo cerrado donde inscriben o circunscriben rectángulos y calculan sus respectivas áreas para luego sumarlas y obtener la aproximación solicitada de la región. También consideran una sección sobre la notación suma ($\sum$), que es usada para obtener una representación de la suma de las áreas, tal como se muestran en las figuras 35 y 36.

Por otro lado, se tiene que al aplicar el límite a las sumas obtenidas cuando $n \to \infty$, estas coinciden (Figura 37). Los ejemplos que se consideran muestran que se obtiene el área exacta cuando se aplica el límite a las sumas.

En la tabla 8 se presentan los temas sobre sumas de Riemann y la Integral Definida.

5.4 Sumas de Riemann y la integral	- Sumas de Riemann. - Definición: Sumas de Riemann.  *Figura 38.* Sumas de Riemann en términos de áreas de rectángulos (Edward & Penney, 2008, p. 341)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

DEFINICIÓN Suma de Riemann

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si P es una partición de $[a, b]$ y S es una selección de P, entonces la **suma de Riemann** para f determinada por P y S es

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i. \qquad \textbf{(3)}$$

También se dice que la suma de Riemann está **asociada con** la partición P.

Figura 39. Definición de Sumas de Riemann (Edward & Penney, 2008, p. 342)

Donde se tiene que una partición P del intervalo $[a, b]$ es una colección de subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$, tal que a $= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n =$ b. Además, S es una selección de puntos para la partición P, donde $S = \{x_1^*. x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ con x_i^*que pertenece al i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}^*, x_i^*]$.

- La integral como un límite.

- Definición: Integral Definida.

DEFINICIÓN Integral definida

La **integral definida de la función** f **de** a **a** b es el número

$$I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\,\Delta x_i, \qquad \textbf{(8)}$$

siempre y cuando este límite exista, en cuyo caso decimos que f es **integrable** en $[a, b]$. La ecuación (8) significa que, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\,\Delta x_i \right| < \epsilon$$

para toda suma de Riemann asociada con la partición P de $[a, b]$ para la cual $|P| < \delta$.

Figura 40. La Integral Definida (Edward & Penney, 2008, p. 345)

Se tiene que la Integral Definida se puede expresar como un límite, es decir:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\,\Delta x_i.$$

Figura 41. La Integral Definida como un límite (Edward & Penney, 2008, p. 345)

- Teorema 1: Existencia de la integral.

- Teorema 2: La integral como un límite de una sucesión.

- Cálculos de la suma de Riemann.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5.5 Evaluación de integrales</td>
<td>

- Teorema de evaluación.Teorema 1: Evaluación de integrales.

TEOREMA 1 Evaluación de integrales

Si G es una antiderivada de la función continua f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \qquad \textbf{(7)}$$

Figura 42. Teorema de evaluación de integrales (Edward & Penney, 2008, p. 354)

Donde, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

- Propiedades básicas de las integrales.

</td>
</tr>
</table>

Tabla 8. Relación entre las sumas de Riemann y la Integral Definida.

Para definir las sumas de Riemann (ver figura 38), consideran las sumas (ver figuras 35 y 36) que se obtuvieron en la sección anterior, para luego, mediante los ejemplos, explican y comparan las sumas considerando la partición regular del intervalo cerrado cuando eligen el punto izquierdo, el punto medio y el punto derecho y realizan la suma de todas las áreas de los rectángulos para encontrar una aproximación del área de la región limitada por la gráfica de la función dada.

La definición de la Integral Definida la relacionan con el límite de la suma de Riemann (figura 40 y 41), en la que proponen ejemplos donde explican y hacen uso de las definiciones, propiedades y teoremas para calcular la Integral Definida a partir del límite de las sumas de Riemann, donde consideran una partición regular del intervalo en n subintervalos y cualquier punto del i-ésimo subintervalo.

Respecto al teorema evaluación de integrales (ver figura 42), es la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo y que se relaciona con la antiderivada de la función integrable. Se proponen ejemplos donde aplican algunas fórmulas de integración, que se consideran en el teorema 2 de la sección 5.2, y también, mediante ejemplos, explican las propiedades de la Integral Definida.

En la tabla 9 se presenta los temas sobre el teorema fundamental del Cálculo, la Integral Definida y el método de integración por sustitución.

5.6 Teorema fundamental del Cálculo	- Valor promedio de la función. - Definición: Valor promedio de una función.

- Teorema 1: Teorema del valor promedio.

TEOREMA 1 Teorema del valor promedio

Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(6)}$$

para algún número $\overline{x}$ en $[a, b]$.

Figura 43. Teorema del valor promedio (Edward & Penney, 2008, p. 365)

- Teorema fundamental.
- Teorema fundamental del Cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Suponga que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Parte 1: Si la función F está definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \textbf{(7)}$$

entonces F es una antiderivada de f. Es decir, $F'(x) = f(x)$ para x en $[a, b]$.

Parte 2: Si G es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a). \qquad \textbf{(8)}$$

Figura 44. Teorema fundamental del cálculo (Edward & Penney, 2008, p. 366)

Se tiene una representación gráfica del teorema fundamental del Cálculo. En la primera parte, se tiene que si toda función continua f en el intervalo $I = [a, x]$ tiene una antiderivada F en I. Si consideramos para el caso, cuando $f(x) > 0$, entonces $F(x)$ denota el área bajo la gráfica de f desde un punto fijo a en I hasta x.

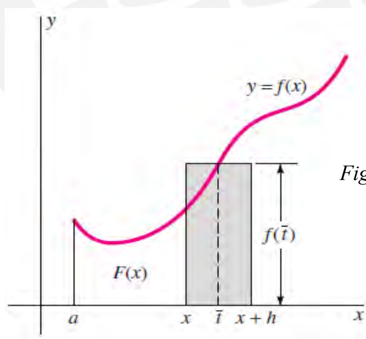


Figura 45. Representación gráfica del Teorema fundamental del cálculo (Edward & Penney, 2008, p. 366)

En la segunda parte, se tiene que si G es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, además se sabe que $G(x) = F(x) + C$ en $[a, b]$. Para determinar la constante C, partimos al elegir $x = a$ donde $C = G(a) - F(a) = G(a)$.

Luego, se tiene que: $G(x) = F(x) + G(a)$, es decir $F(x) = G(x) - G(a)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Sea $x = b$, entonces:

$$F(b) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

	Obsérvese que también el teorema fundamental del Cálculo se interpreta que la derivación y la integración son procesos inversos, así como también que la primera parte se puede expresar de la siguiente manera: $$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$ donde f es continua en un intervalo abierto que contiene a a y a x. La segunda parte se puede expresar como: $$\int_a^x G'(t)\,dt = G(x) - G(a)$$ - Problemas del valor inicial.
5.7 Integración por sustitución	- Sustitución de integrales trigonométricas y exponenciales. - Sustitución de integrales definidas. - Teorema 1: Integración definida por sustitución. **TEOREMA 1 Integración definida por sustitución** Suponga que la función g tiene una derivada continua en $[a, b]$ y que f es continua en el intervalo $g([a, b])$. Sea $u = g(x)$. En este caso $$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du. \qquad \textbf{(14)}$$ *Figura 46.* Integración definida por sustitución (Edward & Penney, 2008, p. 377)

Tabla 9. Relación entre el teorema fundamental del Cálculo y la Integral Definida y el método de integración por sustitución.

Para el teorema del valor promedio, proponen ejemplos donde se verifica las condiciones del teorema, así como la relación que existe entre el área bajo la gráfica de la función en el intervalo cerrado considerado (aplicando la Integral Definida) y el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $\bar{y}$ (ver figura 47).

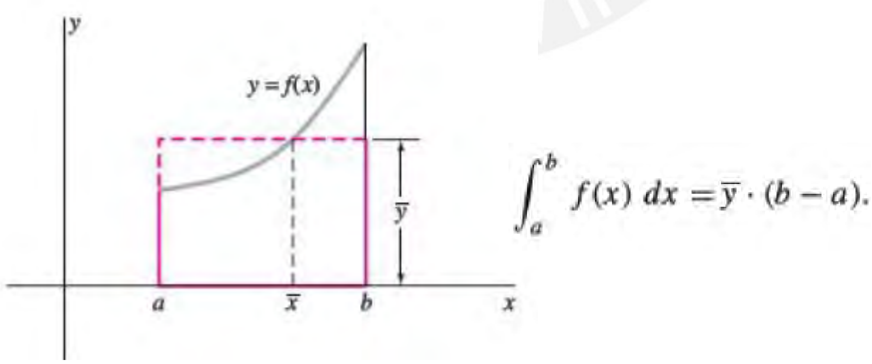
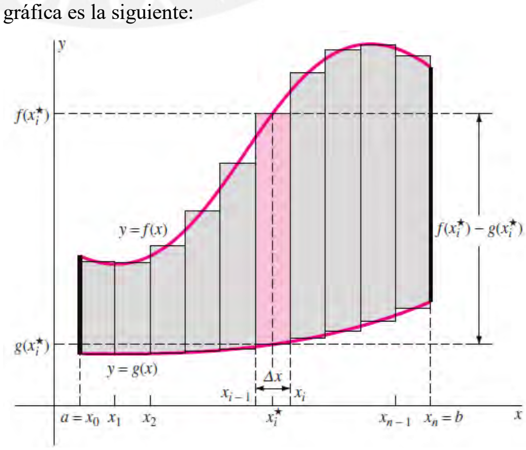


Figura 47. Teorema del valor promedio (Edward & Penney, 2008, p. 364)

El teorema fundamental del Cálculo (ver figura 44) la primera parte, se relaciona con la derivada de una Integral Definida respecto a su límite superior de integración y la segunda parte está relacionada con la antiderivada y la Integral Definida. Los ejemplos que se consideran en esta sección son explicados teniendo en cuenta la función integrable, donde se evidencia la relación que existe entre la derivada, la antiderivada y la Integral Definida.

Respecto a la Integral Definida por sustitución (ver figura 46) es una técnica que permite encontrar otra representación de la Integral Definida inicial en una conocida, ya que los ejemplos que se consideran explican la forma de aplicar esta técnica.

En la tabla 10 se presenta los temas sobre áreas de regiones planas y la Integral Definida.

5.8 Áreas de regiones del plano	- Definición: Áreas entre dos curvas. - Subdivisión de las regiones antes de integrar. - Subdivisión de regiones antes de integrar. - Determinación del área integrando respecto a y. - Definición: Área entre dos curvas. **DEFINICIÓN Área entre dos curvas** Sean f y g continuas con $f(x) \geqq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. Entonces el **área** A de la región acotada entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$ **(2)** *Figura 48.* Área limitada por las gráficas de dos funciones (Edward & Penney, 2008, p. 383) Una representación gráfica es la siguiente:  *Figura 49.* Región limitada por la gráfica de dos funciones (Edward & Penney, 2008, p. 383)

Obsérvese que para determinar el área A limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se tiene que $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Se realiza una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con longitudes todos iguales $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Si consideramos ΔA_i, el área que corresponde al i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y sea $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i = 1,2,3, \cdots, n$. entonces el área aproximada de ΔA_i es dada por $\Delta A_i \approx [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$.

Luego, se tiene que el área total está dada por:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

Si elegimos n suficientemente grande y Δx suficientemente pequeño, se obtiene:

$$A = \lim_{\Delta n \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Se debe tener en cuenta que se presentan casos en las cuales las áreas determinadas por las gráficas de las funciones presentan puntos de intersección o no, de acuerdo al tipo de tarea que se plantea. Asimismo, el área determinada se obtiene también integrando respecto a y. Así, tenemos:

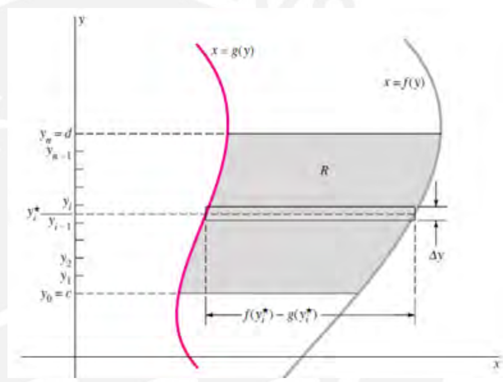


Figura 50. Región limitadas por las gráficas de dos funciones respecto a y
(Edward & Penney, 2008, p. 386)

donde

DEFINICIÓN Área entre dos curvas

Sean f y g funciones continuas de y con $f(y) \geqq g(y)$ para y en $[c, d]$. Entonces, el **área** A de la región acotada por las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y por las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$ es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy. \qquad \textbf{(3)}$$

Figura 51. Área limitada por las gráficas de dos funciones respecto a y
(Edward & Penney, 2008, p. 386)

Tabla 10. Áreas de regiones del plano y la Integral Definida.

Las áreas de regiones del plano son aplicaciones de la Integral Definida y están relacionadas con las diferentes regiones limitadas por las gráficas de las funciones (ver figura 49 y 50) y para determinarlas se emplean las fórmulas según las figuras 48 y 51.

Mediante los ejemplos que se consideran en esta sección, se explican los diferentes casos que se presentan, teniendo en consideración los límites de integración, de acuerdo a la variable de las funciones a integrar.

En la tabla 11 se presenta temas relacionados sobre integración numérica.

<table>
<tr>
<td>

5.9 Integración numérica

Observación:

- La integración numérica se aplica para aproximar numéricamente integrales de funciones cuando estas no tienen una función elemental como antiderivada. No es posible aplicar el teorema fundamental del Cálculo.

Por ejemplo, se tiene que:

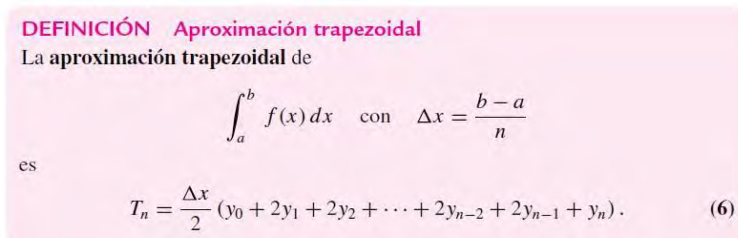
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

no podemos aplicar el teorema fundamental del Cálculo, pues la función $f(x) = e^{-x^2}$ no tiene antiderivada elemental.

- Así tenemos que para realizar aproximaciones numéricas, emplearemos las sumas de Riemann del punto extremo izquierdo y extremo derecho.

</td>
<td>

- Definición: Aproximaciones de punto extremo.
- Aproximación trapezoidal y del punto medio.
- Definición: Aproximación trapezoidal.



DEFINICIÓN Aproximación trapezoidal

La **aproximación trapezoidal** de

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n). \qquad \textbf{(6)}$$

Figura 52. Integración numérica (Edward & Penney, 2008, p. 396)

Donde los puntos de la partición x_0, x_1, $x_2, \cdots$, x_n se emplean para construir trapezoides. Así tenemos que el trapezoide del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tiene altura Δx y sus bases paralelas tiene un ancho de $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ respectivamente. Es decir, que su área está dada por:

$$A_i = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

Gráficamente se tiene:

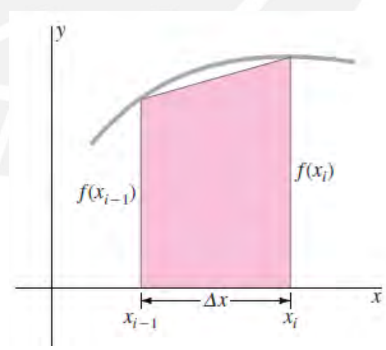


Figura 53. Área del trapezoide A_i (Edward & Penney, 2008, p. 396)

</td>
</tr>
</table>

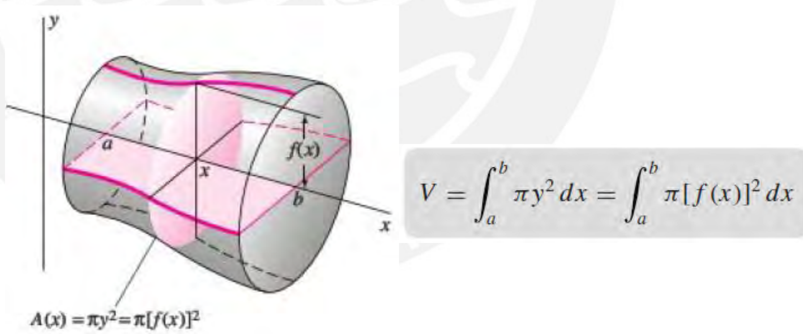
	- Definición: Aproximación del punto medio. **DEFINICIÓN Aproximación del punto medio** La **aproximación del punto medio** a $$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$ es $$M_n = (\Delta x)\left(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + \cdots + y_{n-(1/2)}\right). \qquad \textbf{(7')}$$ *Figura 54.* Aproximación del punto medio (Edward & Penney, 2008, p. 396) - Aproximación de Simpson. **DEFINICIÓN Aproximación de Simpson** La **aproximación de Simpson** de $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\Delta x = (b-a)/n$, asociada con una partición de $[a, b]$ en un número ***n* par** de subintervalos de igual longitud es la suma S_n definida como $$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad \textbf{(12)}$$ *Figura 55.* Aproximación de Simpson (Edward & Penney, 2008, p. 399) - Aproximaciones parabólicas. - Estimación de error. - Teorema 1: Estimación del error. - Teorema 2: Estimación del error de Simpson.

Tabla 11. La Integral Definida y la integración numérica.

La integración numérica es aplicada para aquellas integrales definidas que no pueden ser evaluadas a través del segundo teorema fundamental del Cálculo. Es decir, aquellas funciones integrables que no tienen una antiderivada conocida. Y para encontrar una aproximación de una determinada área se emplean algunos de los métodos, tales como la aproximación trapezoidal (ver figura 52), la aproximación del punto medio (ver figura 54) y la aproximación de Simpson (ver figura 55).

Cabe mencionar que la integración numérica tiene como propósito ser aplicada a este tipo de funciones integrales; sin embargo, los ejemplos que se consideran para aplicar la integración numérica son funciones integrables que tienen una antiderivada.

En la tabla 12 se presentan temas sobre las aplicaciones de la Integral Definida, tales como aproximación por sumas de Riemann, volúmenes de sólidos de revolución y longitud de curva.

CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL (p. 412-514)	
6.1 Aproximaciones por sumas de Riemann	- Aproximación por sumas de Riemann. - Otras cantidades como integrales. - Distancia y velocidad. - Flujo de fluidos en tuberías circulares. - Tasas de flujo y salida cardiaca.
6.2 Volúmenes con el método de secciones transversales	- El método de la sección transversal. - Volúmenes de cilindros. - Definición: Volúmenes por secciones transversales. **DEFINICIÓN Volúmenes por secciones transversales** Si un sólido R está situado al lado del intervalo $[a, b]$ en el eje x y tiene una función de área de la sección transversal $A(x)$ continua, entonces su volumen $V = v(R)$ es $V = \int_a^b A(x)\,dx.$ **(3)** *Figura 56.* Volúmenes por secciones transversales (Edward & Penney, 2008, p. 427) - Secciones transversales perpendiculares al eje y. - Sólidos de revoluciones.  *Figura 57.* Volumen de un sólido de revolución (Edward & Penney, 2008, p. 427) - Revolución de la región entre dos curvas.

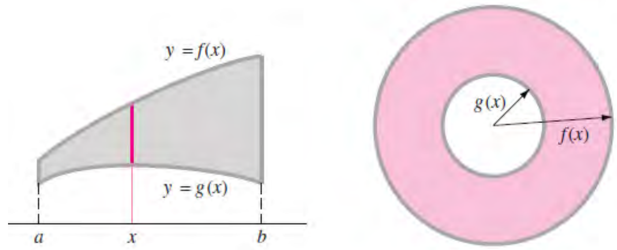
	 $V = \int_a^b \pi [(y_{\text{sup}})^2 - (y_{\text{inf}})^2]\, dx = \int_a^b \pi \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$ *Figura 58.* Método del anillo anular (Edward & Penney, 2008, p. 430)
6.3 Volúmenes por el método de capas cilíndricas	- El método de capas cilíndricas. - Giro de una región entre dos curvas.
6.4 Longitud de arco y área de la superficie de revolución	- Longitud de una curva. $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$ *Figura 59.* Longitud de una curva S (Edward & Penney, 2008, p. 447) - Longitud de arco integrando respecto a y. - Un mecanismo simbólico. - Conos y cónicas truncadas. - Áreas de superficies de revolución. $A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$ *Figura 60.* Área de una superficie de revoluciones (Edward & Penney, 2008, p. 451) - Rotación alrededor del eje y. - Resumen del área de superficie.

Tabla 12. Contenidos relacionados con las aplicaciones de la Integral Definida.

Otras aplicaciones de la Integral Definida están relacionadas con temas de la Física, tales como distancia y velocidad, flujo de fluidos, y se consideran ejemplos donde se presentan tales aplicaciones.

La Integral Definida también es aplicada para calcular volúmenes de sólidos de revolución (ver figura 57). Asimismo, para aquellos casos donde los sólidos son generados de acuerdo a la región limitada por las gráficas de las funciones y sus ejes de rotación, y para calcular dicho volumen se puede emplear el método del anillo anular (ver figura 58).

Mediante los ejemplos, se explican algunos métodos como aquel que permite calcular volúmenes de sólidos cuyas secciones transversales son conocidas y, como el método de discos y el método de capas cilíndricas. Todas las integrales que se formulan se resuelven aplicando la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Por otro lado, también se presenta una fórmula para calcular la longitud de una curva, tal como se muestra en la figura 61, donde se integra con respecto a x; también se puede calcular la longitud de arco, en caso que la función sea $x = g(y)$, y se integra con respecto a y. Se plantean ejemplos donde se evidencia las formas de cómo calcular la longitud de arco, según las condiciones específicas de cada problema planteado.

Asimismo, para calcular el área de una superficie de revolución (ver figura 60), se estable relación entre su eje de rotación y su longitud de arco. En los ejemplos considerados, se evidencia esa relación según las condiciones de los problemas planteados.

En la tabla 13 se presenta otras aplicaciones de la Integral Definida relacionadas con temas de Física.

6.5 Fuerza y trabajo	- Trabajo realizado por una fuerza variable. - Resortes elásticos. - Trabajo realizado contra de la gravedad. - Trabajo realizado para llenar un tanque. - Vaciado de un tanque. - Fuerza ejercida por un líquido. $W = \int_a^b F(x)\,dx.$ *Figura 61.* Trabajo (W) realizado por una fuerza (F) (Edward & Penney, 2008, p. 457)
6.6 Centroides de regiones planas y curvas	- Láminas y placas delgadas. - Principio de simetría. - Propiedad aditiva de los momentos.

	- Fórmulas de integración para centroides. $\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$ donde $A = \int_a^b f(x)\,dx$ es el área de R. *Figura 62.* Centroide de una región *R* (Edward & Penney, 2008, p. - Primer teorema de Pappus: Volumen de revolución. - Momentos y centroides de curvas. - Segundo teorema de Pappus: Área de una superficie de revolución.

Tabla 13. La Integral Definida aplicada a temas de Física.

El concepto de la Integral Definida también es aplicado a diversos temas de la Física. Así, tenemos los problemas sobre resortes, específicamente con la Ley de Hooke; en los ejemplos considerados se solicita calcular el trabajo que se necesitan para estirar un resorte desde un punto inicial a un punto final, cuando se le aplica una determinada fuerza (figura 61).

Por otro lado, para calcular la fuerza de un fluido, se plantean y se resuelven problemas a partir de la modelación metamatemática, donde se obtienen los datos necesarios para formular la Integral Definida y luego se aplica el segundo teorema fundamental del Cálculo para obtener el resultado solicitado.

La Integral Definida es aplicada para determinar el centroide de una región plana (figura 62) y se basa en la ley de la palanca. Los ejemplos considerados muestran y explican los procesos para calcular el centroide de las regiones determinadas por las gráficas de las funciones que se consideran.

Respecto al primer teorema de Pappus, se consideran ejemplos donde se muestra la relación que existe entre el volumen del sólido de revolución, el cual es igual al área de la región R multiplicada por la distancia recorrida por su centriode. Es decir, se verifica la relación del volumen de un sólido de revolución y su centroide.

El segundo teorema de Pappus relaciona el área de una superficie de revolución que es igual al producto de la longitud de curva por la distancia recorrida por el centroide. Se consideran ejemplos donde se explica esta relación.

En la figura 14 se presenta el tema sobre la integración impropia considerada como una generalización de la Integral Definida.

CAPÍTULO 7: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN (p. 515-574)	
Sesiones didácticas	Contenidos
7.8 Integración impropia	- Límites infinitos de integración - Integrandos infinitos. - Funciones especiales e integrales impropias. - Velocidad de escape. - Valor presente de una perpetuidad. - Integrales en estadística y probabilidad. - Muestreo aleatorio. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ *Figura 63.* Integral impropia (Edward & Penney, 2008, p. 556)

Tabla 14. La integral impropia y su relación con la Integral Definida.

Para el tema de la integral impropia, consideran el teorema 1 de la sección 5.4, ya que el mismo garantiza la existencia de la Integral Definida $\int_a^b f(x)\,dx$, siempre y cuando la función f sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, pero ¿qué sucede cuando el intervalo de integración no está acotado; y tiene una de las formas $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty,\infty)$, o si la función integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto c del intervalo $[a, b]$?

Para explicar estos casos, proponen ejemplos donde se evidencia que no es posible usar las técnicas de la Integral Definida y se tiene que aplicar la definición de la integral impropia (ver figura 63), según el caso.

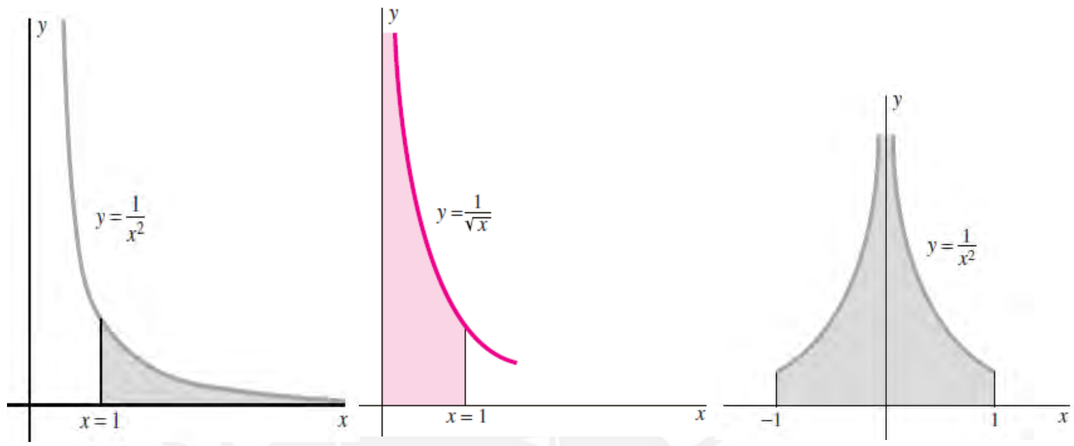


Figura 64. Áreas de regiones limitadas por la gráfica de funciones en intervalos no acotados (Edward & Penney, 2008, p. 555)

En la figura 64, se tiene el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, \infty)$, el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[0,1]$ y el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$. Para calcular sus respectivas áreas, se debe aplicar las definiciones, teoremas y propiedades para la integral impropia.

A modo de síntesis, se tiene que el concepto de la Integral Definida surge de la necesidad de aproximar el valor del área, en particular del área como el límite de una suma, dando lugar a la definición de la Integral Definida, sus propiedades, así como al teorema fundamental del Cálculo y el teorema del valor promedio. También el concepto Integral Definida es abordado en otros temas y se verifica que sus usos son importantes y fundamentales para tratar con los diferentes problemas que requieren de su aplicación.

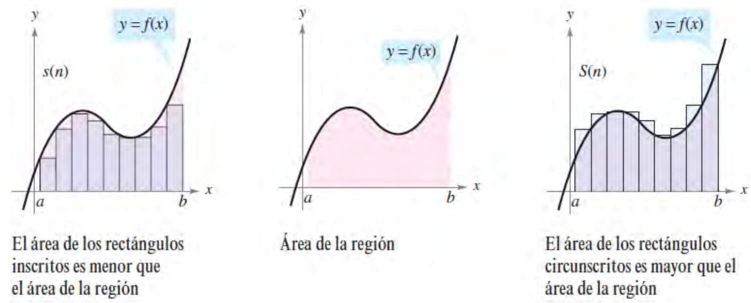
Libro de texto Cálculo 1

El libro de texto *Calculo 1* (9ª ed.) de los autores Larson & Edward (2010) presenta una estructura conformada por 10 capítulos. En capítulo 4, se aborda el concepto Integral Definida y contiene seis secciones didácticas (p. 247-322).

A continuación, detallaremos los contenidos relacionados con el concepto Integral Definida, así como los diferentes usos que se relacionan con otros temas matemáticos que se abordan en las secciones de los capítulos considerados.

En la tabla 15 se presentan los temas relacionados sobre el área y las sumas superiores e inferiores.

<table>
<tr><th>AUTORES</th><th>AÑO</th><th>TÍTULO</th><th>CIUDAD</th><th>EDITORIAL</th></tr>
<tr><td>Larson, R. & Edward, B.</td><td>2010</td><td>Cálculo 1 (9ª ed.)</td><td>México</td><td>Mc Graw-Hill</td></tr>
<tr><td colspan="5">CAPÍTULO 4: INTEGRACIÓN (p. 247-322)</td></tr>
<tr><td>4.1 Antiderivadas o primitivas e integración indefinida</td><td colspan="4">- Antiderivadas o primitivas.
- Definición de una antiderivada o primitiva.
- Teorema 4.1: Representación de antiderivadas o primitivas.
- Notación para antiderivadas o primitivas.
- Reglas básicas de integración.
- Condiciones iniciales y soluciones particulares.</td></tr>
<tr><td>4.2 Área</td><td colspan="4">- Notación sigma.
- Teorema 4.2: Fórmulas de suma empleando la notación sigma.
- Área.
- El área de una región plana.
- Sumas superior e inferior.</td></tr>
</table>



$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$

Figura 65. Aproximación del área por sumas inferiores y superiores (Larson & Edward, 2010, p. 263)

- Teorema 4.3: Límite de la suma superior e inferior.
- Definición del área de una región en el plano.

TEOREMA 4.3 LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

Figura 66. Límite de las sumas inferior y superior (Larson & Edward, 2010, p. 265)

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i \qquad \text{donde } \Delta x = (b - a)/n$$

Figura 67. El área de una región en el plano (Larson & Edward, 2010, p. 265)

Tabla 15. Relación entre el área y la Integral Definida.

En la introducción del capítulo se presenta un ejemplo sobre ecuaciones diferenciales con el propósito de encontrar una antiderivada y para ello usan la notación de la integral indefinida.

Asimismo, proporcionan una lista de fórmulas de integración, proponen ejemplos donde aplican las diversas fórmulas y propiedades; sin embargo, no establecen en esta sección ninguna relación directa con el concepto de la Integral Definida, ya que las antiderivadas tienen relación con el teorema fundamental del Cálculo sin haber definido antes el concepto de la Integral Definida.

La sección relacionada con el área bajo la gráfica de una función inicia con el tema de la notación suma ($\sum$) que será aplicada para obtener la suma de las áreas de los rectángulos. Luego, a través de un ejemplo, realizan una aproximación del área de una región limitada por la gráfica de una función, donde consideran una partición arbitraria del intervalo cerrado indicado e inscriben o circunscriben rectángulos y calculan sus respectivas áreas, para luego sumarlas y obtener la aproximación solicitada de la región.

También consideran un ejemplo donde se solicita calcular las sumas inferiores y superiores de una región limitada por la gráfica de una función en el intervalo cerrado indicado, usando las formulas dadas en la figura 65. Para tal propósito, consideran una partición regular del intervalo cerrado en n subintervalos y toman el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo para calcular la suma inferior y el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo para calcular la suma superior y comparan los resultados.

Por otro lado, se tiene que al aplicar el límite a las sumas obtenidas cuando $n \to \infty$ estas coinciden (ver figura 66), los ejemplos que consideran muestran que se obtiene el área exacta cuando se aplica el límite a las sumas. También se consideran ejemplos donde se calcula el área de una región limitada por la gráfica de una función en el intervalo indicado mediante la definición del límite (ver figura 67).

En la tabla 16 se presentan los temas relacionados sobre sumas de Riemann, la Integral Definida, el teorema fundamental del Cálculo e integración por sustitución.

4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas	- Sumas de Riemann. - Definición de una suma de Riemann. - Integrales definidas. - Definición de la integral definida. - Teorema 4.4: La continuidad implica integrabilidad. - Teorema 4.5: La integral definida como área de una región. - Propiedades de la integral definida. - Teorema 4.6: Propiedad aditiva de intervalos. - Teorema 4.7: Propiedades de las integrales definidas. - Teorema 4.8: Conservación de desigualdades. **DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA** Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$ existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$ El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración. *Figura 68.* La Integral Definida (Larson & Edward, 2010, p. 273) **TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN** Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$ *Figura 69.* La Integral Definida como área de una región (Larson & Edward, 2010, p. 273)
4.4 El teorema fundamental del Cálculo	- El teorema fundamental del Cálculo.

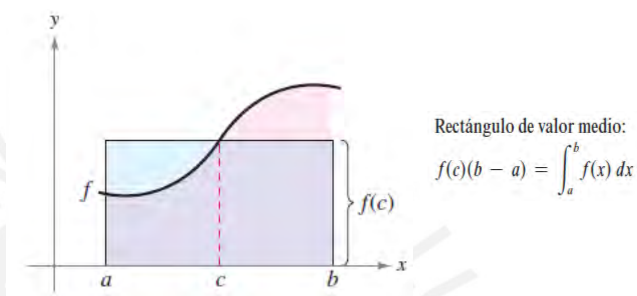
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
- Teorema 4.9: El teorema fundamental del Cálculo.

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$
Figura 70. El teorema fundamental del Cálculo (Larson & Edward, 2010, p. 282)

- El valor medio para integrales.
- Teorema 4.10: Teorema del valor medio para integrales.



TEOREMA 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$
Figura 71. Teorema del valor medio para integrales (Larson & Edward, 2010, p. 285)

- Valor medio de una función.
- Definición del valor medio de una función en un intervalo.
- El segundo teorema fundamental del Cálculo.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x).$$
Figura 72. Segundo teorema fundamental del Cálculo (Larson & Edward, 2010, p. 289)

- Teorema 4.11: el segundo teorema fundamental del Cálculo.
- Teorema del cambio neto.
- Teorema 4.12: El teorema del cambio neto.
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.5 Integración por sustitución</td>
<td>
- Teorema 4.13: Antiderivación de una función compuesta.
- Cambio de variable.
- La regla general de la potencia para integrales.
- Teorema 4.14: La regla general de la potencia para integrales.
- Cambio de variable para integrales definidas.
</td>
</tr>
</table>

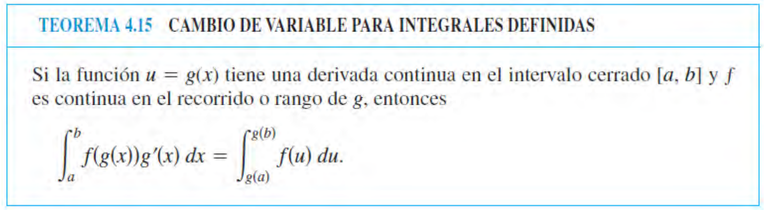
	- Teorema 4.15: Cambio de variable para integrales definidas.  **TEOREMA 4.15 CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS** Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$ *Figura 73.* Cambio de variable para Integrales Definidas (Larson & Edward, 2010, p. 303) - Integración de funciones pares e impares. - Teorema 4.16: Integración de funciones pares e impares.

Tabla 16. La sumas de Riemann y la Integral Definida.

Respecto a las sumas de Riemann, la definen para una función f en el intervalo cerrado $[a, b]$ y la partición Δ de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la suma de Riemann es $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Como ejemplos, consideran las sumas obtenidas en los ejemplos de la sección 4.2.

Para definir la Integral Definida aplican el límite a la suma de Riemann cuando $\|\Delta\| \to 0$ (ver figura 68), consideran un ejemplo para explicar la Integral Definida por definición. Por otro lado, definen la Integral Definida como el área de una región (ver figura 69) y aclaran que las Integrales Definidas pueden ser positivas, negativas o cero, pero el área siempre es un número real positivo y que para obtener la Integral Definida como el área se debe usar el teorema fundamental del Cálculo. Por tal motivo, no consideran ejemplos para esta sección e indican que se verá más adelante.

Para el teorema fundamental del Cálculo (ver figura 70), relacionan la Integral Definida con la antiderivada de la función integrado, donde consideran ejemplos para aplicar las antiderivadas de las funciones que se consideran en el integrando. Asimismo, consideran ejemplos donde calculan las áreas de las regiones limitadas por la gráfica de las funciones aplicando el teorema fundamental del Cálculo.

Respecto al teorema del valor medio para integrales, este muestra la relación que existe entre el área bajo la gráfica de la función en el intervalo cerrado indicado y el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$ (ver figura 71).

Cabe señalar que el autor del libro identifica como el segundo teorema fundamental del Cálculo (ver figura 72), sin embargo, es de conocimiento que la figura 72 representa el primer teorema fundamental del Cálculo donde se señala como calcular la derivada de una función definida a través de una Integral Definida respecto a su límite superior de integración. Los ejemplos que se consideran explican los pasos que se deben realizar cuando se debe hacer un cambio de variable para el límite superior de integración para aplicar el teorema, donde se evidencia la relación que existe entre la derivada, la antiderivada y la Integral Definida.

Respecto al cambio de variable para la Integral Definida (ver figura 73), se consideran ejemplos que explican la forma de aplicar el cambio de variable para las funciones que intervienen y así obtener otra representación de la Integral Definida dada a través de otra cuya antiderivada es conocida para aplicar el teorema fundamental del Cálculo.

En la tabla 17 se presenta el tema sobre la integración numérica, donde se especifican algunos de los métodos para realizar aproximar de aquellas Integrales Definidas cuyas funciones integrales no presentan una antiderivada conocida.

4.6 Integración numérica	- La regla de los trapecios.

	- Teorema 4.17: La regla de los trapecios. **TEOREMA 4.17 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS** Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$ Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$. *Figura 74.* Regla de los trapecios (Larson & Edward, 2010, p. 312) - Regla de Simpson. - Teorema 4.18: Integral de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. - Teorema 4.19: La regla de Simpson. **TEOREMA 4.19 LA REGLA DE SIMPSON** Sea f continua en $[a, b]$ y sea n un entero par. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ es $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$ $+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$ Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$. *Figura 75.* La regla de Simpson (Larson & Edward, 2010, p. 314) - Análisis de errores - Teorema 4.20: Errores en la regla de los trapecios y en la de Simpson.

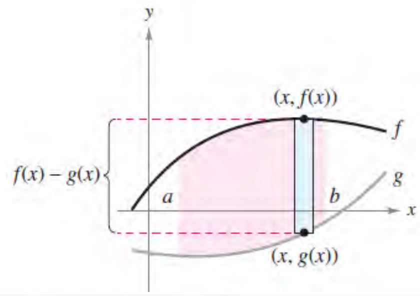
Tabla 17. La Integral Definida - Integración numérica.

La integración numérica se aplica a aquellas Integrales Definidas que no pueden ser evaluadas a través del segundo teorema fundamental del Cálculo o aquellas funciones integrables que no tienen una antiderivada conocida. Cabe mencionar que si bien la integración numérica (ver figura 74 y 75) tiene como propósito ser aplicada a este tipo de funciones, los ejemplos que se consideran para aplicar la integración numérica son funciones integrables que tienen una antiderivada conocida por lo que no resultará un método necesario. Sin embargo, se proponen ejercicios donde si es necesario aplicar tales métodos.

En la tabla 18 se presentan los temas relacionados con las aplicaciones de la Integral Definida, tales como volumen, área de sólidos de revolución y longitud de arco.

<table>
<tr><th colspan="2">CAPÍTULO 7: APLICACIONES DE LA INTEGRAL (p. 447-518)</th></tr>
<tr><td>7.1 Área de una región entre dos curvas</td><td>

- Área de una región entre dos curvas.



ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

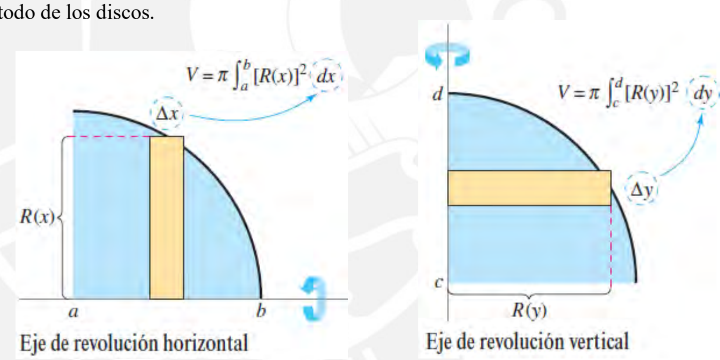
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Figura 76. Área entre dos curvas (Larson & Edward, 2010, p. 449)

- Área de una región entre curvas que se intersecan.
- La integral como un proceso de acumulación.

</td></tr>
<tr><td>7.2 Volumen: el método de los discos</td><td>

- Método de los discos.



Método de los discos

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes

Eje de revolución horizontal

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$$

Eje de revolución vertical

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$$

Figura 77. Método de los discos (Larson & Edward, 2010, p. 449)

- Método de las arandelas (anillos)

</td></tr>
</table>

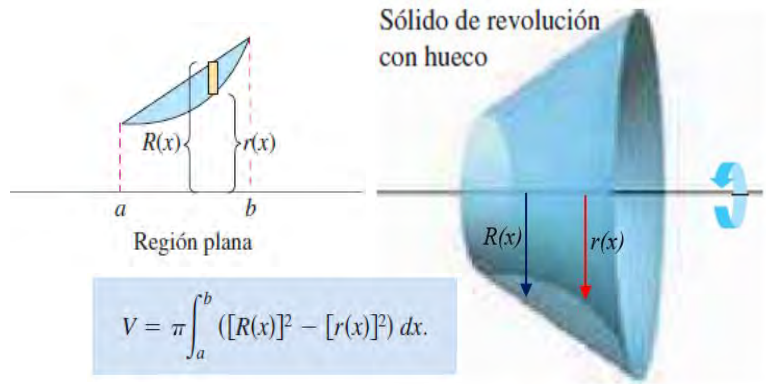
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Figura 78. Método de las arandelas (anillos) (Larson & Edward, 2010, p. 461)

- Sólidos con secciones transversales conocidas.
- Volumen de sólidos con secciones transversales conocidas.
</td>
</tr>
<tr>
<td>7.3 Volumen: el método de las capas</td>
<td>
- Método de las capas.
- Comparación de los métodos de los discos y de las capas.

Método de las capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de las capas, usar alguna de las fórmulas siguientes

Eje de revolución horizontal
$\text{Volumen} = V = 2\pi\int_c^d p(y)h(y)\, dy$

Eje de revolución vertical
$\text{Volumen} = V = 2\pi\int_a^b p(x)h(x)\, dx$

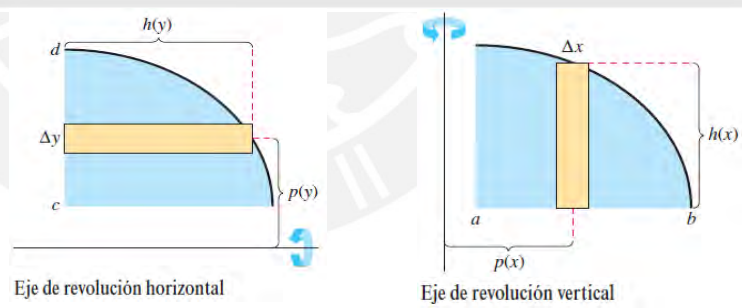


Figura 79. Método de las capas (Larson & Edward, 2010, p. 470)
</td>
</tr>
<tr>
<td>7.4 Longitud de arco y superficies de revolución</td>
<td>
- Longitud de arco.
- Definición de longitud de arco.
</td>
</tr>
</table>

	DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO Sea la función dada por $y = f(x)$ representa una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La **longitud de arco** de f entre a a y b es $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$ Análogamente, para la curva suave dada por $x = g(y)$, la **longitud de arco** de g entre a c y d es $s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$ *Figura 80.* Longitud de arco (Larson & Edward, 2010, p. 479) - Área de una superficie de revolución. - Definición de superficie de revolución. - Definición del área de una superficie de revolución. $S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$ $S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$ *Figura 81.* Área de una superficie de revolución (Larson & Edward, 2010, p. 483)

Tabla 18. Aplicaciones de la Integral Definida – Volumen y área de sólidos de revoluciones, longitud de arco.

La Integral Definida se aplica para determinar las áreas de regiones limitadas por las gráficas de funciones (ver figura 76). Mediante los ejemplos que se consideran en esta sección, se explican los diferentes casos que se presentan, teniendo en consideración los límites de integración, de acuerdo a la variable de las funciones a integrar.

Del mismo modo, se tiene que la Integral Definida se aplica para calcular volúmenes de sólidos de revoluciones según los casos que se presentan. Es decir, aquellos sólidos que son generados de acuerdo a la región limitada por las gráficas de las funciones y sus ejes de rotación. Mediante los ejemplos, se explican los métodos como el método de los discos (ver figura 77), método de las arandelas o anillos (ver figura 78), el método de capas cilíndricas, método de las capas (ver figura 79), donde las integrales que se formulan son obtenidas aplicando el teorema fundamental del Cálculo.

Por otro lado, se tiene que, para determinar la longitud de arco, se presentan casos (ver figura 80) donde se integra con respecto a x, también se puede calcular la longitud de arco cuando la función es $x = g(y)$. En este caso, se integra con respecto a y. En esta parte, se plantean ejemplos donde se evidencia las formas de calcular la longitud de arco según las condiciones específicas de cada problema planteado.

Para calcular el área de una superficie de revolución, se debe tener en cuenta su eje de rotación, según el caso que se presenta se aplica la fórmula correspondiente (ver figura 81). Los ejemplos considerados muestran los pasos a seguir como también las condiciones de los problemas planteados.

En la tabla 19 se presentan temas relacionados con la Física, tales como trabajo, momentos, centro de masa, centroides, presión y fuerza de un fluido.

7.5 Trabajo	- Trabajo realizado por una fuerza constante. - Definición de trabajo realizado por una fuerza constante. - Trabajo realizado por una fuerza variable. - Definición del trabajo realizado por una fuerza variable. **DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE** Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es $W = \lim_{\lVert\Delta\rVert \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \int_a^b F(x)\, dx.$ *Figura 82.* Trabajo realizado por una fuerza (Larson & Edward, 2010, p. 490)
7.6 Momentos, centros de masa y centroides	- Masa. - Centro de masa de un sistema unidimensional. - Momentos y centros de masa: sistema unidimensional. - Centro de masa de un sistema bidimensional. - Momentos y centro de masa: sistema bidimensional. - Centro de masa de una lámina plana.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Momentos y centro de masa de una lámina plana.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$.

1. **Los momentos respecto al eje x y y** son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.

Figura 83. Centro de masa (Larson & Edward, 2010, p. 490)

- Teorema de Pappus.
- Teorema 7.1: El teorema de Pappus.

</td>
</tr>
<tr>
<td>7.7 Presión y fuerza de un fluido</td>
<td>

- Presión y fuerza de un fluido.
- Definición de presión de un fluido.
- Definición de fuerza ejercida por un fluido.

DEFINICIÓN DE FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

La **fuerza F ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$F = w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\, \Delta y$$

$$= w \int_c^d h(y)L(y)\, dy$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

Figura 84. Fuerza ejercida por un fluido (Larson & Edward, 2010, p. 510)

</td>
</tr>
</table>

Tabla 19. Aplicaciones de la Integral Definida a la Física.

El concepto de la Integral Definida es aplicado a diversos temas de la Física, así tenemos que se aplica para calcular el trabajo realizado por una fuerza (ver figura 82), como también a problemas con resortes, específicamente con la Ley de Hooke, y los ejemplos considerados se basan en calcular el trabajo que se necesitan para estirar un resorte desde un punto inicial a un punto final cuando se le aplica una determinada fuerza.

La Integral Definida se aplica también para determinar los momentos y el centro de masa de una región plana (ver figura 83). Los ejemplos considerados muestran y explican los procesos para calcular los momentos y el centro de masa de las regiones determinadas por las gráficas de las funciones que se consideran.

Respecto al teorema de Pappus, se consideran ejemplos donde se calcula el volumen del solido de revolución, el cual es igual al área de la región R multiplicada por la distancia recorrida por su centriode, asimismo, se verifica la relación que existe con el método de capas para determinar dicho volumen; ya que el método de capas usa una fórmula basada en la Integral Definida.

Por otro lado, para calcular la fuerza de un fluido (ver figura 84), se plantean y se resuelven problemas a partir de la modelación metamatemática donde se obtienen los datos necesarios para formular la Integral Definida y luego se aplica el teorema fundamental del Cálculo para obtener el resultado solicitado.

En la tabla 20 se presenta el tema relacionado con las integrales impropias.

8.8 Integrales impropias	**1.** Si f es continuo en el intervalo $[a, \infty)$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx.$ **2.** Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$ **3.** Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$ *Figura 85.* Integrales impropias (Larson & Edward, 2010, p. 580) - Integrales impropias con límites de integración infinitos.

	- Integrales impropias con discontinuidades infinitas. - Teorema 8.5 Un tipo especial de integral impropia.

Tabla 20. Integrales Impropias.

Para el tema de la integral impropia, tienen en cuenta la definición de la Integral Definida $\int_a^b f(x)\,dx$, donde el intervalo cerrado $[a,b]$ tiene que ser finito, además que el teorema fundamental del Cálculo para evaluar integrales definidas requiere que la función f sea continua en $[a,b]$, pero ¿qué sucede cuando el intervalo de integración no está acotado y tiene una de las formas $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$ (ver figura 85) o si la función integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto c del intervalo $[a,b]$? A este tipo de integrales, se le denominan integrales impropias.

Para explicar estos casos, presentan ejemplos donde se aplica la definición de integración impropia (ver figura 85), que se puede interpretar como una extensión de la Integral Definida, en donde se considera un límite infinito teniendo en consideración el intervalo de integración y la función integrando, según sea el caso.

Como se puede verificar, el concepto de la Integral Definida se aborda como el área aproximada, el área como el límite de una suma, la Integral Definida, propiedades de la Integral Definida, el teorema fundamental del Cálculo y el teorema del valor medio. Del mismo modo, el concepto Integral Definida se emplea en problemas de diferentes contextos que requieren de su aplicación.

Por otro lado, se tiene que los tres libros de textos tienen una organización parecida, donde se han identificado definiciones, propiedades, teoremas y métodos relacionadas con la Integral Definida.

Por otro lado, se han identificado elementos matemáticos que constituyen el concepto de la Integral Definida, tal como se identificó en el estudio epistemológico realizado en la sección 1.1; asimismo, se evidencia con el análisis realizado a los tres libros de textos algunos de estos elementos matemáticos, sin embargo, los ejemplos considerados son diferentes a los del estudio epistemológico.

Los ejemplos identificados en los tres libros, así como las aplicaciones de la Integral Definida están relacionadas para calcular áreas de regiones limitadas por las gráficas de funciones continuas en un intervalo cerrado; el volumen de un sólido de revolución; área de un sólido de revolución y longitud de arco. trabajo, fuerza, centro de masa y centroide de una región plana; para su resolución se han identificado técnicas, métodos diferentes a los identificados en el estudio epistemológico.

3.2 Análisis praxeológico de la Integral Definida en textos de Cálculo

Las descripciones realizadas anteriormente de los tres libros de textos sobre Cálculo presentan elementos matemáticos comunes que organizaremos siguiendo el modelo praxeológico que contempla tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida.

En base a estas consideraciones, se describe un modelo praxeológico de referencia, considerando la pregunta generatriz: ¿Cómo determinar el área de una región plana? Esta pregunta se fundamenta desde los trabajos realizados por Arquímedes, según el estudio epistemológico. Pero, para su resolución se consideran las técnicas identificadas en los libros de textos sobre Cálculo considerados.

De acuerdo a Chaachoua, Bessot, Romo & Castela (2019), para organizar y estructurar una praxeología o un determinado dominio de disciplina, se debe a la confiabilidad y al alcance de las técnicas. Asimismo, se debe tener en consideración la noción de variable y generador de un tipo de tareas.

A continuación, se presenta una organización de las prácticas matemáticas identificadas entorno a la Integral Definida en los libros de textos analizados, teniendo en cuenta los criterios siguientes: 1) Que procedimientos (técnicas, métodos) se requieren y son necesarios para la resolución de cada tarea planteada. 2) Que justificaciones (definiciones, propiedades, teoremas) garantizan los procedimientos empleados, y 3) Los procedimientos y justificaciones que requieren las aplicaciones consideradas son enmarcadas desde las matemáticas o desde otra disciplina.

Se consideran las notaciones siguientes, para representar los tipos de tareas ($\boldsymbol{T_i}$), subtipos de tareas ($\boldsymbol{t_{i,j}}$), el generador de tipos de tareas ($\boldsymbol{GT_i}$) y variables ($\boldsymbol{V_i}$).

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_1}$: Aproximar el área de una región plana.

$\boldsymbol{GT_1}$**:** [Aproximar el área de una región limitada por la gráfica de la función; V_1, V_2], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes) y V_2 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{1,1}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,2}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,3}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,4}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A.

- ***Técnica***

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{1,1}}$ y $\boldsymbol{t_{1,2}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{1,1,1}} = \boldsymbol{\tau_{1,2,1}}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos; inscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos izquierdos; aplicar la suma de las áreas de los rectángulos inscritos, es decir:

$$\underline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$\boldsymbol{\tau_{1,1,2}}$: Considerar una partición del intervalo $[a, b]$, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1,2,3, \cdots, n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valor y_i, luego, para obtener la aproximación indicada, reemplazamos los datos en la expresión:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

$\boldsymbol{\tau_{1,1,3}}$: Considerar una partición del intervalo $[a,b]$, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1,2,3,\cdots,n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valor y_i, luego, para obtener la aproximación indicada, reemplazamos los datos en la expresión:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{1,3}}$ y $\boldsymbol{t_{1,4}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{1,3}} = \boldsymbol{\tau_{1,4}}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos; circunscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos derechos y aplicar la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos, esto es:

$$\overline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- ***Tecnología***

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{1,1,1}}$ y $\boldsymbol{\tau_{1,3}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_1}$: Definición 1: Dada una función f continua, no negativa y acotada en el $[a,b]$, una partición P de dicho intervalo es un conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

se define $f(m_i)$ como el valor mínimo y $f(M_i)$ como en valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se tiene que un rectángulo inscrito que se encuentra dentro de la i-ésima subregión tiene altura $f(m_i)$ y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de la i-ésima subregión tiene altura $f(M_i)$. Para cada i-ésima subregión tiene altura i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de *suma inferior* y está dada por

$$\underline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$$

Y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos recibe el nombre de *suma superior* y está dada por

$$\overline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$$

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ es:

$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2}}$: Definición (Aproximación trapezoidal)

La aproximación trapezoidal de $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1},\mathbf{3}}$ es:

$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3}}$: Definición (Aproximación de Simpson)

La aproximación de Simpson de $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, asociada con una partición de $[a, b]$ en un número n par de subintervalos de igual longitud, es la suma S_n definida por:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{1}}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{1,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{1,1}}$: Aproximar el área A, que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 4 + 3x - x^2$ en el intervalo $[-1,4]$ cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,2}}$: Aproximar el área A, que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} + 1$ en el intervalo $[0,1]$ cuando el área aproximada es menor que el área A.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_2}$: Calcular el área de la región plana.

$\boldsymbol{GT_2}$**:** [Calcular el área de una región limitada por la gráfica de la función; V_1, V_2, V_3], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas), V_2 es función polinómica de grado 3 y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_2}$: Calcular el área delimitada por la gráfica de la función algebraica, polinómica de grado 3 en el intervalo cerrado.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_2}$: Aplicar las técnicas $\boldsymbol{\tau_{1,1,1}}$ o $\boldsymbol{\tau_{1,3}}$ y aplicar el límite a las sumas obtenidas es:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{R}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{R}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_2}$: Teorema 1: Si f es una función continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$, los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y suprior existen y son iguales entre sí, esto es que:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{R}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \overline{R}_n$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_2}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_2}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_2}$: Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0,2]$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_3}$: Calcular la Integral Definida.

$\boldsymbol{GT_3}$**:** [Calcular la Integral Definida; V_1, V_2, V_3], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes), V_2 es función polinómica de grado 3 y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{3,1}}$: Calcular la Integral Definida de una función algebraica polinómica de grado 3 en un intervalo cerrado.

$\boldsymbol{t_{3,2}}$: Calcular la Integral Definida de una función algebraica o trascendente en un intervalo cerrado.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{3,1}}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos; elegir $x_i^* = x_i = a + i\Delta x$; obtener la suma de Riemann y aplicar el límite a la suma de Riemann, es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$\boldsymbol{\tau_{3,2}}$: Obtener la antiderivada, de acuerdo a la función integrando, se debe aplicar los diversos métodos, como las fórmulas de integración, sustitución trigonométrica, cambio de variable e integración por partes, donde se debe tener en cuenta las funciones integrando que intervienen (funciones trigonométricas inversas, funciones logarítmicas, funciones algebraicas, funciones trigonométricas, funciones exponenciales) y la integración de funciones racionales.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,1}}$: Se obtiene la antiderivada conocida de la función algebraica o trascendente, usando las fórmulas de integración.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,2}}$: Si cumple la condición $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$, realizar un cambio de variable que transforme la integral en una más simple, teniendo en cuenta el cambio del diferencial respecto a la nueva variable, así como los nuevos límites de integración superior e inferior en función de la nueva variable y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,3}}$: Para obtener la antiderivada de función trigonométrica, se presentan los casos siguientes:

Caso I: Si la función es de la forma $f(x) = \operatorname{sen}^n(x)$ o $f(x) = \cos^n(x)$, se debe tener en cuenta si n es un entero positivo par, aplicar $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ o $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ en la función correspondiente y efectuar los cálculos necesarios para obtener la antiderivada y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si n es un entero positivo impar, considerar $f(x) = \operatorname{sen}^n(x) = \operatorname{sen}^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)$ o $f(x) = \cos^n(x) = \cos^{n-1}(x)\cos(x)$ y aplicar $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, realizar los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Caso II: Si la función es de la forma $f(x) = \tan^n(x)$ o $f(x) = \cot^n(x)$, si n es un entero positivo par, considerar $f(x) = \tan^n(x) = \tan^{n-2}(x)\tan^2(x)$ o $f(x) = \cot^n(x) = \cot^{n-2}(x)\cot^2(x)$ y aplicar $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ o $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$ en la función correspondiente efectuar los cálculos necesarios para obtener la antiderivada y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si n es un entero positivo impar, considerar $f(x) = \tan^n(x) = [\tan^2(x)]^{\frac{n-1}{2}}(x)\tan(x)$ o $f(x) = \cot^n(x) = [\cot^2(x)]^{\frac{n-1}{2}}(x)\cot(x)$ y aplicar $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ o $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$, realizar las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Caso III: Si la función es de la forma $f(x) = \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, si m o n es un entero positivo impar y el otro cualquier entero, entonces se debe considerar $f(x) = \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x) = \operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos^n(x)\operatorname{sen}(x)$ o $f(x) = \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x) = \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-1}(x)\cos(x)$ y aplicar $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ en la función correspondiente, efectuar los cálculos necesarios para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si m y n son entero positivo pares, aplicar $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ o $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ y reemplazar en la función, realizar las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Caso VI: Si la función es de la forma $f(x) = \tan^m(x)\sec^n(x)$ o $f(x) = \cot^m(x)\csc^n(x)$, tener en cuenta que si m es un entero positivo impar y n cualquier entero, entonces considerar $f(x) = \tan^m(x)\sec^n(x) = \tan^{m-1}(x)\sec^{n-1}(x)\tan(x)\sec(x)$ o $f(x) = \cot^m(x)\csc^n(x) = \cot^{m-1}(x)\csc^{n-1}(x)\cot(x)\csc(x)$ y aplicar $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ o $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$, realizar las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si n es un entero positivo par y m cualquier entero, entonces considerar $f(x) = \tan^m(x)\sec^n(x) = \tan^m(x)\sec^{n-2}(x)\sec^2(x)$ o $f(x) = \cot^m(x)\csc^n(x) = \cot^m(x)\csc^{n-2}(x)\csc^2(x)$ y aplicar $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ o $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$, realizar las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,4}}$: Para obtener la antiderivada de una función de la forma $f(x) = A(x)\,\mathrm{T}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $T(x)$ es una función trigonométrica, para este caso, se elige $u = A(x)$ y $dv = T(x)\,dx$ y se aplica $\int u\,dv = uv - \int vdu$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{L}(x)\,\mathrm{A}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $L(x)$ es una función logarítmica, para este caso, se elige $u = L(x)$ y $dv = A(x)\,dx$ y se aplica $\int u\,dv = uv - \int vdu$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{I}(x)\,\mathrm{A}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $I(x)$ es una función inversa trigonométrica, para este caso, se elige $u = I(x)$ y $dv = A(x)\,dx$ y se aplica $\int u\,dv = uv - \int vdu$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{A}(x)\,\mathrm{E}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $E(x)$ es una función exponencial, para este caso, se elige $u = A(x)$ y $dv = E(x)\,dx$ y se aplica $\int u\,dv = uv - \int vdu$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{T}(x)\,\mathrm{E}(x)$, donde $T(x)$ es una función trigonométrica y $E(x)$ es una función exponencial, para este caso, se elige $u = T(x)$

y $dv = E(x)\,dx$ y se aplica $\int u\,dv = uv - \int vdu$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,5}}$: Para obtener la antiderivada de una función que contenga la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$, para este caso, se toma $x = a \operatorname{sen} \theta$ y $dx = a \cos \theta\, d\theta$, se realiza la sustitución y los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función contiene la expresión $\sqrt{x^2 - a^2}$, para este caso, se toma $x = a \sec \theta$ y $dx = a \sec \theta\, \tan \theta\, d\theta$, se realiza la sustitución y los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función contiene la expresión $\sqrt{x^2 + a^2}$, para este caso, se toma $x = a \tan \theta$ y $dx = a \sec^2 \theta\, d\theta$, se realiza la sustitución y los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,2,6}}$: Para obtener la antiderivada de una función que contenga la expresión $\frac{p(x)}{q(x)}$, el método consiste en descomponer en fracciones simples, así tenemos los siguientes casos:

Si el grado de $p(x)$ o igual que el grado de $q(x)$, en este caso, se divide $p(x)$ entre $q(x)$ y se obtiene $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Cuando el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, se presentan los siguiente casos: se tiene que si $q(x)$ tiene todas sus raíces reales y distintas, es decir $q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$, luego se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si $q(x)$ tiene todas sus raíces reales con multiplicidad n, es decir $q(x) = (x-a)^n$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-a)^n}$, con $n > 1$ se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si $q(x)$ tiene raíces complejas distintas, es decir, que $q(x) = ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si $q(x)$ tiene raíces complejas repetidas, es decir, que $q(x) = (ax^2 + bx + c)^2$ con $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ se realizan los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_{3,1}}$: Definición: Integral Definida.

La Integral Definida de la función f de a a b es el número

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

siempre y cuando este límite exista. En este caso, decimos que f es integrable en $[a, b]$. Es decir, que para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

para toda suma de Riemann asociada con la partición P de $[a, b]$, para la cual $P < \delta$.

$\boldsymbol{\theta_{3,2}}$**:** Teorema fundamental del Cálculo: Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$.

Parte 1: Si la función F está definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^X f(t)dt$$

entonces F es una antiderivada de f. Es decir, $F'(x) = f(x)$ para x en $[a, b]$.

Parte 2: Si G es una antiderivada de la función f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_3}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{3,1}}$: Calcular la Integral Definida de la función $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[-1,2]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2}}$**,** se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{3,2}}$: Calcular la Integral Definida de la función $f(x) = (1 - x)e^{-x}$ en el intervalo $[-1,1]$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_4}$: Calcular el área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas.

$\boldsymbol{GT_4}$**:** [Calcular el área de la región plana; V_1, V_2, V_3], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes), V_2 es función que depende de la variable x o de la variable y y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{4,1}}$: Calcular el área de la región limitada por la gráfica de una función algebraica cuando $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$ y $g(x) = k, k \in \mathbb{R}$ en el intervalo cerrado indicado.

$\boldsymbol{t_{4,2}}$: Calcular el área de la región limitada por la gráfica de una función trascendente cuando $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$ y $g(x) = k, k \in \mathbb{R}$ en el intervalo cerrado indicado.

$\boldsymbol{t_{4,3}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de dos funciones algebraicas respecto de x y las rectas paralelas al eje de las ordenadas en el intervalo cerrado indicado.

$\boldsymbol{t_{4,4}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de dos funciones trascendentes respecto de x y las rectas paralelas al eje de las ordenadas en el intervalo cerrado indicado.

$\boldsymbol{t_{4,5}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de dos funciones algebraicas respecto de y y las rectas paralelas al eje de las abscisas en el intervalo cerrado indicado.

- ***Técnica***

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{4,1}}$ y $\boldsymbol{t_{4,2}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{4,1} = \tau_{4,2}}$: Identificar la función que determinan la región acotada para identificar la parte superior e inferior de la región acotada, es decir $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$, e identificar los límites de integración; aplicar las propiedades de la Integral Definida y la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo para calcular el área solicitada aplicar:

$$A = \int_{a}^{c} [f(x) - g(x)]dx + \int_{c}^{d} [g(x) - f(x)]dx$$

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{4,3}}$ y $\boldsymbol{t_{4,4}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{4,3} = \tau_{4,4}}$: Identificar las funciones que determinan la región acotada para ver cuáles de las funciones se encuentran en la parte superior de la región acotada y cuál en la parte inferior, o lo que es lo mismo decir $f(x) \geq g(x)$, e identificar los límites de integración; aplicar las propiedades de la Integral Definida y la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo para calcular el área solicitada aplicar:

$$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

La técnica para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,5}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{4,5}}$: Identificar las funciones que determinan la región acotada para ver cuáles de las funciones se encuentra en la parte superior de la región acotada y cuál en la parte inferior, es decir $f(y) \geq g(y)$, e identificar los límites de integración; aplicar las propiedades de la Integral Definida y la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo para calcular el área solicitada aplicar:

$$A = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]dy$$

- ***Tecnología***

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{4,1}} = \boldsymbol{\tau_{4,2}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_{4,1}} = \boldsymbol{\theta_{4,2}}$: Definición: Sean f y g funciones continuas con $f(x) < 0$ y $f(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ donde $c \in [a, b]$ está dada por:

$$\int_{a}^{c} [f(x) - g(x)]dx + \int_{c}^{b} [g(x) - f(x)]dx$$

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{4,3}} = \boldsymbol{\tau_{4,4}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_{4,3}} = \boldsymbol{\theta_{4,4}}$: Definición: Sean f y g funciones continuas con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

La tecnología para la técnica $\boldsymbol{\tau_{4,5}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_{4,5}}$: Definición: Sean f y g funciones continuas con $f(y) \geq g(y)$ para todo y en $[c, d]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y las rectas verticales $y = c$ y $y = d$ está dada por:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_4}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{4,1}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de la función $f(x) = x^3 - 2x$ y $y = 0$ en el intervalo $[-1,1]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{4,2}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de la función $f(x) = \cos(x-2)$ y $y = 0$ en el intervalo $[1,5]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,3}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{4,3}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de la función $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = x^3 - 2$ en el intervalo $[-1,1]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,4}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{4,4}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de la función $f(x) = e^{2x} + 2$ y $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[-2,1]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{4,5}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{4,5}}$: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de la función $x = y^2$ y $x = 2 - y$ en el intervalo $[0,1]$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_5}$: Calcular el volumen de un sólido de revolución.

$\boldsymbol{GT_5}$**:** [Calcular el volumen de un sólido que es generado; V_1, V_2, V_3], donde V_1 es el eje de rotación; V_2 es región plana determinada por las gráficas de funciones algebraicas o funciones trascendentes y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{5,1}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje x la región plana limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$\boldsymbol{t_{5,2}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje y la región plana limitada por la gráfica de la función $x = g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$.

$\boldsymbol{t_{5,3}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje x la región plana limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$\boldsymbol{t_{5,4}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje y la región plana limitada por la gráfica de las funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$.

$\boldsymbol{t_{5,5}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor de una línea vertical $x = n$ o una línea horizontal $y = m$, la región plana limitada por la gráfica de las funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{5,1,1}}$: Identificar la región limitada por la gráfica de la función y los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje x, para aplicar el método de los discos y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

$\boldsymbol{\tau_{5,1,2}}$: Identificar la región limitada por la gráfica de la función y los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje x, para aplicar el método de las capas cilíndricas y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_c^d 2\pi y f(y)\, dy$$

$\boldsymbol{\tau_{5,2,1}}$: Identificar la región limitada por la gráfica de la función y los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje y , para aplicar el método de los discos y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_c^d \pi x^2\, dy = \int_c^d \pi [g(y)]^2\, dy$$

$\boldsymbol{\tau_{5,2,2}}$: Identificar la región limitada por la gráfica de la función y los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje y, para aplicar el método de las capas cilíndricas y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

$\boldsymbol{\tau_{5,3,1}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, tal que cumplan la condición $f(x) \geq g(x) \geq 0$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje x; identificar los radios interior y exterior para aplicar el método de las arandelas (anillos) y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$$

$\boldsymbol{\tau_{5,3,2}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, tal que cumplan la condición $f(y) \geq g(y)$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje x, aplicar el método de las capas cilíndricas y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_c^d 2\pi y[f(y) - g(y)]dy$$

$\boldsymbol{\tau_{5,4,1}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, tal que cumplan la condición $f(y) \geq g(y) \geq 0$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje y; identificar los radios interior y exterior para aplicar el método de las arandelas (anillos) y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_{c}^{d} \pi\{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}dy$$

$\boldsymbol{\tau_{5,4,2}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, tal que cumplan la condición $f(x) \geq g(x) \geq 0$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje y, aplicar el método de las capas cilíndricas y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_{a}^{b} 2\pi x[f(x) - g(x)]dx$$

$\boldsymbol{\tau_{5,5,1}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, tal que cumplan la condición $f(x) \geq g(x) \geq 0$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje $x = n$, identificar los radios interior y exterior para aplicar el método de las arandelas (anillos) y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_{a}^{b} \pi\{[n + f(x)]^2 - [n + g(x)]^2\}dx$$

De forma análoga, se obtiene cuando gira alrededor de la línea $y = m$.

$\boldsymbol{\tau_{5,5,2}}$: Identificar la región limitada por las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, tal que cumplan la condición $f(x) \geq g(x)$, obtener los límites de integración; para obtener el sólido de revolución R que se ha generado al rotar sobre el eje $x = n$, aplicar el método de las capas cilíndricas y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para obtener el volumen del sólido R, aplicar:

$$V = \int_a^b 2\pi(n + x)[f(x) - g(x)]dx$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_5}$: Definición de volumen**:** Sea S un sólido que se encuentra entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x es $A(x)$, donde A es una función continua en $[a, b]$, entonces el volumen de S es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_5}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{5,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{5,1}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje x la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\text{sen}(x)}$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{5,2}}$**,** se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{5,2}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje y la región plana limitada por la gráfica de $x = \frac{2}{y}$ y el intervalo $1 \leq y \leq 4$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{5,3}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{5,3}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje x la región plana limitada por la gráfica de $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ y el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{5,4}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{5,4}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje y la región plana limitada por la gráfica de $y = x^2$, $y = 2x$ y el intervalo $0 \leq y \leq 4$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{5,5}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{5,5}}$: Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor de la recta $y = -1$ la región plana limitada por la gráfica de $x = (y-2)^2$ y $y = x$ en el intervalo $1 \leq y \leq 4$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$

- ***Tarea***

$\boldsymbol{T_6}$: Calcular la longitud de un arco.

$\boldsymbol{GT_6}$**:** [Calcular la longitud de un arco; V_1, V_2, V_3], donde V_1 corresponde la gráfica de una función algebraica o función trascendente; V_2 función con respecto de la variable x o de y y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{6,1}}$: Calcular la longitud de un arco correspondiente a la gráfica de una función algebraica o función trascendente con respecto de la variable x en el intervalo indicado.

$\boldsymbol{t_{6,2}}$: Calcular la longitud de un arco correspondiente a la gráfica de una función algebraica con respecto de la variable y en el intervalo indicado.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{6,1}}$: Identificar la función suave $f(x)$ y obtener $f'(x)$; determinar los límites de integración y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo. Para calcular la longitud de arco, se aplica la expresión:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$\boldsymbol{\tau_{6,2}}$: Identificar la función suave $g(y)$ y obtener $g'(y)$; determinar los límites de integración y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo. Para calcular la longitud de arco, se aplica la expresión:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_6}$: Definición de longitud de un arco: Sea s la longitud de arco suave C, para aproximar su longitud, inscribir en C un arco poligonal. Supongamos que C es la gráfica de una función suave f definida en $[a, b]$. Tomemos una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, todos con la misma longitud Δx. Sea P_i el punto $(x_i, f(x_i))$ en el arco C correspondiente al punto x_i del i-ésimo subintervalo, el arco poligonal inscrito en C es la unión de segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2, $P_2P_3, \cdots, P_{n-1}P_n$. Donde la aproximación a la longitud s de C es:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Al tomar el límite a esta suma, cuando $n \to \infty$, se tiene $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$. Se sabe que:

$$|P_{i-1}P_i| = [(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función f en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, concluimos la existencia de un punto x_i^* en el i-ésimo subintervalo, tal que: $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, entonces:

$$|P_{i-1}P_i| = \left[1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} (x_i - x_{i-1}) = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x$$

donde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Luego:

$$s \approx \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x$$

Como se observa, es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ en $[a, b]$ y por tanto, como f' es continua, entonces esta suma aproxima a la integral $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ cuando $\Delta x \to 0$. La longitud s del arco suave C se define por:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_6}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{6,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{6,1}}$: Calcular la longitud de un arco correspondiente de la curva $y = \frac{x^4+48}{24x}$ en el intervalo [2,4].

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{6,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{6,2}}$: Calcular la longitud de un arco correspondiente a $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ en el intervalo $1 \leq y \leq e$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_7}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_7}$: Calcular el área de una superficie de revolución.

$\boldsymbol{GT_7}$**:** [Calcular el área de una superficie de revolución generada; V_1, V_2, V_3], donde V_1 corresponde la gráfica de una función algebraica o función trascendente; V_2 función con respecto de la variable x o de y y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{7,1}}$: Calcular el área de una superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje x una curva $y = f(x)$ y el intervalo $[a, b]$.

$\boldsymbol{t_{7,2}}$: Calcular el área de una superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje y una curva $x = g(y)$ y el intervalo $[c, d]$.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{7,1,1}}$: Identificar el arco $y = f(x)$ que rotará alrededor del eje x, los límites de integración, obtener $f'(x)$ y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el área de la superficie de revolución, aplicar:

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

$\boldsymbol{\tau_{7,1,2}}$: Identificar el arco $x = g(y)$ que rotará alrededor del eje x, los límites de integración, obtener $g'(y)$ y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el área de la superficie de revolución, aplicar:

$$A = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy$$

$\boldsymbol{\tau_{7,2,1}}$: Identificar el arco $y = f(x)$ que rotará alrededor del eje y, los límites de integración, obtener $f'(x)$ y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el área de la superficie de revolución, aplicar:

$$A = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dy$$

$\boldsymbol{\tau_{7,2,2}}$: Identificar el arco $x = g(y)$ que rotará alrededor del eje y, los límites de integración, obtener $g'(y)$ y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el área de la superficie de revolución, aplicar:

$$A = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_7}$: Definición del área de una superficie de revolución: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivada continua en $[a, b]$, entonces el área de la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje x del arco de curva $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, está dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_7}$: El análisis real.

Por ejemplo, para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_7}$, podemos considerar del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{7,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{7,1}}$: Calcular el área de una superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje x la curva $y = \text{sen}(x)$ y el intervalo $[0, \pi]$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{7,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{7,2}}$: Calcular el área de una superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje y la curva $x = y^3$ y el intervalo $1 \leq y \leq 2$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_8}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_8}$: Calcular el centroide de la región plana.

$\boldsymbol{GT_8}$**:** [Calcular el centroide de la región plana limitada; V_1, V_2], donde V_1 corresponde la gráfica de funciones algebraicas o funciones trascendentes y V_2 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{8,1}}$: Calcular el centroide de la región plana limitada por las gráficas de dos funciones algebraicas en el intervalo cerrado indicado.

$\boldsymbol{t_{8,2}}$: Calcular el centroide de la región plana limitada por las gráficas de dos funciones trascendentes en el intervalo cerrado indicado.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_8}$: Identificar la región plana; las funciones que determinan dicha región; los límites de integración y usar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de una región plana, aplicar la expresión:

$$\bar{x} = \frac{1}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx} \int_a^b x\, [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx} \int_a^b \frac{1}{2} \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_8}$: Centro de masa. Consideremos una función f continua y no negativa en $[a, b]$ y suponga que R es la región limitada por la gráfica de f y el eje X para $a \leq x \leq b$. Tomar una partición regular $[a, b]$ en n subintervalos, tal que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si se toma a x_i^* el punto medio del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces el rectángulo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i^*)$, tiene área $f(x_i^*)\Delta x$ y centroide $\left(x_i^*, \frac{1}{2} f(x_i^*)\right)$. Si P_n es la unión de estos rectángulos para $i = 1,2,3, \cdots, n$, entonces:

$$M_y(P_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*\, f(\, x_i^*)\Delta x$$

$$M_x(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(x_i^*)\, f(\, x_i^*)\Delta x$$

Se define los momentos $M_y(R)$ y $M_x(R)$ de la región R en sí tomando los límites de $M_y(P_n)$ y $M_x(P_n)$ cuando $\Delta x \to 0$, se tiene:

$$M_y(R) = \int_a^b x\, f(x)\ dx$$

$$M_x(R) = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\ dx$$

Teorema: El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de una región plana R está dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\, f(x)\ dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\ dx$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide de una región R y $A = \int_a^b f(x)\ dx$ es el área de la región R.

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_8}$: Estática, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_8}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{8,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{8,1}}$: Calcular el centroide de la región plana limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 6x + 2$ en el intervalo [0,3].

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{8,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{8,1}}$: Calcular el centroide de la región plana limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x-2}$ y $g(x) = \ln(x)$ en el intervalo [0,3].

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_9}$: Calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión.

$\boldsymbol{GT_9}$**:** [Calcular el trabajo realizado por una fuerza; V_1, V_2, V_3], donde V_1 es la función fuerza (función algebraica o función trascendente); V_2 es el tipo de función, según las leyes físicas y V_3 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{9,1}}$: Calcular el trabajo que se requiere para estirar un resorte que tiene una longitud L_1 a una longitud L_2 si se le aplica una fuerza F para mantenerlo estirado a una longitud l.

$\boldsymbol{t_{9,2}}$: Calcular el trabajo que se requiere para atraer a dos cargas que se encuentran separadas a una distancia L_1 a una distancia L_2 si la fuerza de repulsión es F a una cierta distancia.

$\boldsymbol{t_{9,3}}$: Calcular el trabajo realizado por un gas si con un volumen inicial y a una presión se expande a un volumen final.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{9,1}}$: Se debe aplicar la ley de Hooke. Es decir, $F(x) = kx$ y a partir de los datos se debe calcular la constante k; obtener la función fuerza $F(x)$; los límites de integración y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo aplicar la expresión:

$$W = \int_a^b F(x)\ dx = \int_a^b k\ x\ dx$$

$\boldsymbol{\tau_{9,2}}$: Se debe aplicar la ley de Coulomb. Es decir, $F(x) = k\frac{q_1q_2}{x^2}$ y a partir de los datos se obtiene el valor de la constante k; obtener la función fuerza $F(x)$; los límites de integración y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo, aplicar la expresión:

$$W = \int_a^b F(x)\ dx = \int_a^b k\,\frac{q_1 q_2}{x^2}\ dx$$

$\boldsymbol{\tau_{9,3}}$: Se debe aplicar la ley de Boyle. Es decir $P = \frac{k}{V}$; identificar los límites de integración y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo, aplicar la expresión:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V} dV$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_9}$: Definición de trabajo realizado por una fuerza variante: Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el trabajo W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado desde el punto $x = a$ hasta el punto $x = b$ es:

$$W = \int_a^b F(x)\ dx$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_9}$: Física, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{9,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{9,1}}$: Calcular el trabajo que se requiere para estirar un resorte que tiene una longitud de 30 cm a una longitud de 33 cm si se le aplica una fuerza 15 Newtons para mantenerlo estirado 3 cm.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{9,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{9,2}}$: Calcular el trabajo que se requiere para atraer a dos cargas iguales que se encuentran separadas a una distancia de 5 cm a una distancia de 1cm si la fuerza de repulsión es de 10 Newtons a una distancia de 2 cm.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{9,3}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{9,3}}$: Calcular el trabajo realizado por un gas si con un volumen inicial de 3 litros y a una presión de 600 Pascal se expande a un volumen de 5 litros.

Por otro lado, se considera un tipo de tarea relacionada con la integral impropia como una generalización de la Integral Definida. En el sentido que las integrales impropias se analizan usando antiderivadas, además se usa la Integral Definida y la noción de límite. En este tipo de tarea se hace uso de técnicas usadas para tareas relacionadas a la Integral Definida, por tal motivo se ha considerado a la integral impropia como una generalización de la Integral Definida. Asimismo, este tipo de tarea es usualmente aplicado por los estudiantes de la carrera de Ingeniería Química. Se tiene el tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$.

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_{10}}$: Calcular la integral impropia.

$\boldsymbol{GT_{10}}$**:** [Calcular la integral impropia; V_1, V_2], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes) y V_2 es el intervalo no acotado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{10,1}}$: Calcular la integral impropia de una función algebraica en el intervalo $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ o $(-\infty, +\infty)$.

$\boldsymbol{t_{10,2}}$: Calcular la integral impropia de una función trascendente en el intervalo $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ o $(-\infty, +\infty)$.

$\boldsymbol{t_{10,3}}$: Calcular la integral impropia de una función algebraica cuando presenta una discontinuidad infinita en algún punto c del intervalo $[a, b]$.

$\boldsymbol{t_{10,4}}$: Calcular la integral impropia de una función trascendente cuando presenta una discontinuidad infinita en algún punto c del intervalo $[a, b]$.

- ***Técnica***

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{10,1}}$ y $\boldsymbol{t_{10,2}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{10,1} = \tau_{10,2}}$: Identificar la función integrando y los límites de integración; verificar si la función es continua en el intervalo no acotado indicado y aplicar el límite a la integral cuando $t \to \infty$ (tomar el límite superior $t = \infty$). Luego, para calcular el área $A(t)$ de la región no acotada bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre $[a, +\infty)$, se aplica la expresión:

$$A(t) = \int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\ dx$$

De manera análoga, se tiene para los otros casos de intervalos.

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{10,3}}$ y $\boldsymbol{t_{10,4}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{10,3} = \tau_{10,4}}$: Identificar la función integrando y los límites de integración; verificar si la función es continua en el intervalo $[a, b)$ y aplicar el límite a la integral cuando $t \to b^-$ (tomar el límite superior $t = b$). Luego, para calcular si la integral impropia converge o diverge, es decir si el límite existe, aplicar la expresión:

$$A(t) = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$$

De manera análoga, se tiene para los otros casos de intervalos.

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_{10,1} = \theta_{10,2}}$: Limites infinitos de integración. Consideremos una función f continua y no negativa en el intervalo no acotado $[a, +\infty)$. Entonces, el área $A(t)$ de la región no acotada bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre $[a, +\infty)$ se define como:

$$A(t) = \int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\ dx$$

siempre y cuando el límite exista. Si este límite existe, se dice que la integral impropia converge. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia diverge.

De manera análoga, se tiene para los otros casos, es decir, para:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\ dx$$

y para,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{\infty} f(x)\ dx$$

$\boldsymbol{\theta_{10,3} = \theta_{10,4}}$: Integrandos infinitos. Sea la función f continua en $[a, b)$, entonces el área $A(t)$ de la región no acotada bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre $[a, b)$ se define como:

$$A(t) = \int_a^{b} f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$$

siempre y cuando el límite exista. Si este límite existe, se dice que la integral impropia converge. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia diverge.

De manera análoga, se tiene para los otros casos. Es decir, para f continua en $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\ dx$$

y para f continua en (a,b):

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_{10}}$: El análisis real.

Para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{10,1}}$ la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{10,1}}$: Calcular la integral impropia de una función $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{10,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{10,2}}$: Calcular la integral impropia de una función $f(x) = e^{2-x}$en el intervalo $[0, +\infty)$.

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{10,3}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{10,3}}$: Calcular la integral impropia de una función $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$ cuando presenta una discontinuidad infinita en intervalo [1,3].

Para el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{10,4}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\boldsymbol{t_{10,4}}$: Calcular la integral impropia de una función $f(x) = \tan(2x)$ cuando presenta una discontinuidad infinita en intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

3.3 A modo de síntesis

Como resultado del análisis realizado, se propone una organización matemática para la Integral Definida asociada a la institución de enseñanza de las matemáticas. Se presenta un modelo praxeológico de la Integral Definida (MPID) en relación a la pregunta generatriz: *¿Cómo determinar el área de una región plana?*, responderla requiere de una construcción de una organización matemática, estructurada por un conjunto de tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que permiten describir y argumentar el trabajo realizado.

En la figura 86 se muestran las organizaciones matemáticas que conforman el MPID, así como las relaciones que existen entre los distintos elementos praxeológicos identificados en el análisis anterior.

Tenemos que, de acuerdo a los tipos de tareas, que constituyen la organización matemática, se obtuvo lo siguiente: En el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$, relacionada a realizar una aproximación del área de una región plana, es tomada como básica y a partir de ella se obtiene un generador de tipos de tareas $\boldsymbol{GT_1}$, donde las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$ que se considerarán generan subtipos de tareas más específicas que el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$.

Del mismo modo, se ve la necesidad de desarrollar técnicas, las cuales se apoyan en la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$, que serán fundamentales para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$, relacionada con calcular el área de la región plana, donde se obtiene un generador de tareas $\boldsymbol{GT_2}$, donde a partir de las técnicas obtenidas para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$ se especifica una de las forma de obtener el área para una determinada región plana que cumple ciertas condiciones.

Por otro lado, se tiene que la técnica para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ es una de las más importantes que conlleva a obtener una técnica (herramienta matemática) muy poderosa para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, que se refiere a calcular la Integral Definida, convirtiéndose así en el eje fundamental, en el cual giran los otros tipos de tareas.

Asimismo, a partir del generador $\boldsymbol{GT_3}$, se obtiene dos subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{3,1}}$ y $\boldsymbol{t_{3,2}}$ específicas**,** las cuales requieren de técnicas diferentes para sus soluciones respectivas y están justificadas por las tecnologías $\boldsymbol{\theta_{3,1}}$ y $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ y están relacionadas con la definición propia de Integral Definida y el teorema fundamental del Cálculo.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, que se refiere a calcular el área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas, requiere de la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, como parte para las técnicas para los tipos de tareas que se obtienen del generador $\boldsymbol{GT_4}$. Los tipos de tareas obtenidos por el generador $\boldsymbol{GT_4}$ tienen relación con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$, que está relacionada a calcular el volumen de un sólido de revolución, donde sus técnicas son complementadas con otras para resolver los tipos de tareas obtenidas por el generador $\boldsymbol{GT_5}$.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ está relacionada con calcular la longitud de un arco, que requiere, como parte de su técnica de la tecnología, a $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ para dar solución a los tipos de tareas que se obtiene del generador $\boldsymbol{GT_6}$. Del mismo modo, están relacionadas con el tipo de tareas generadas por $\boldsymbol{GT_7}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_7}$, que está relacionada con calcular el área de una superficie de revolución.

Respecto al tipo de tarea $\boldsymbol{T_8}$, que se refiere a calcular el centroide de la región plana, está relacionada con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$. El tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$ está relacionada con calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión, que es considerada como una de las aplicaciones de la Física y está directamente relacionada con la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,4}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$. Del mismo modo, es parte de su técnica, así como su teoría $\boldsymbol{\Theta_9}$ está relacionada con la Física, específicamente de la mecánica. Se tiene el tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$, relacionado con calcular la integral impropia, considerada como una generalización de la tarea $\boldsymbol{T_3}$, donde la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,4}}$ es parte para las técnicas de los tipos de tareas generadas por $\boldsymbol{GT_{10}}$.

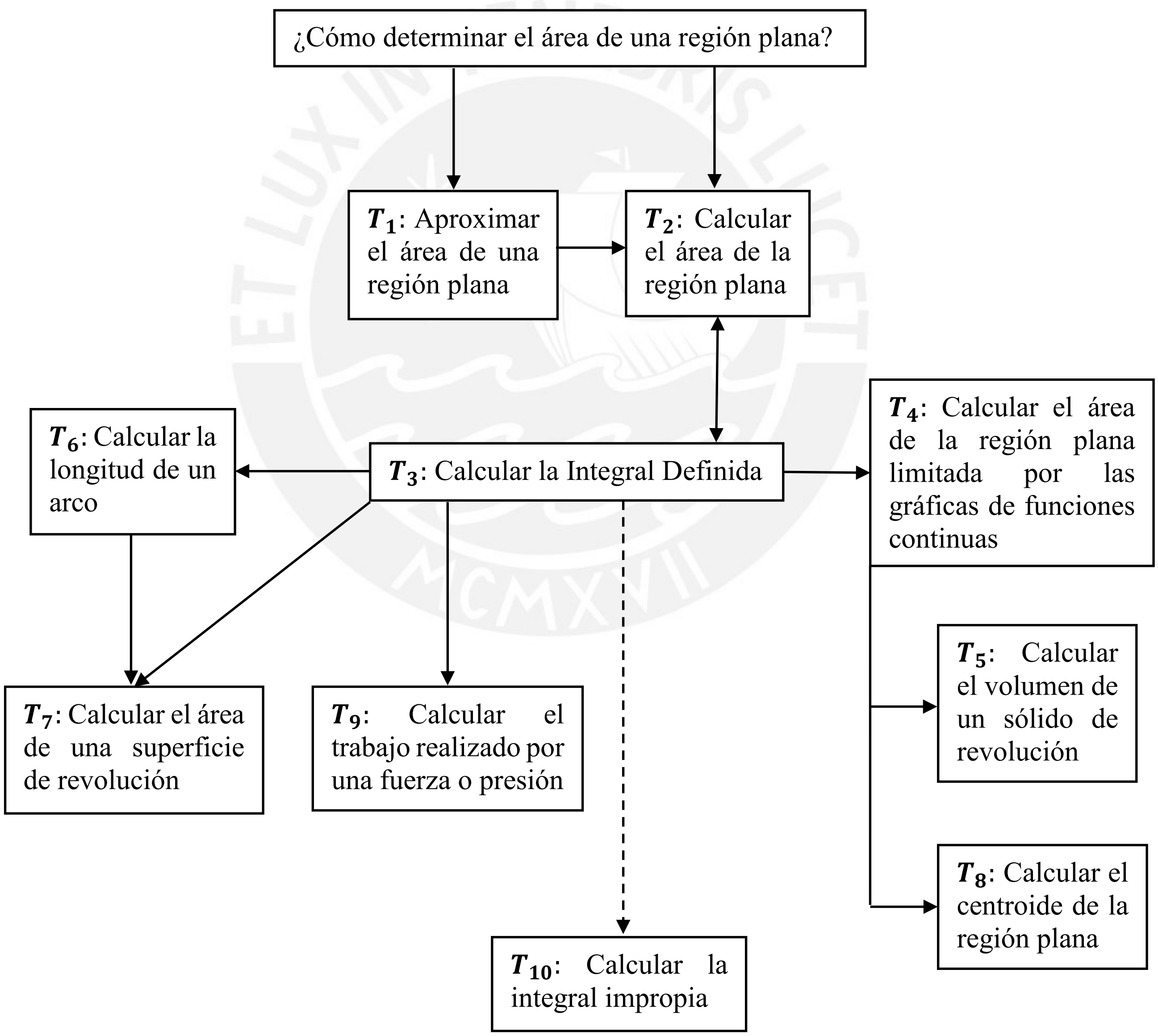


Figura 86. Modelo praxeológico de la Integral Definida

En conclusión, el análisis matemático de los libros de textos, en términos de los elementos práctico – teóricos, nos brinda un panorama de cómo se aborda el concepto Integral Definida y, de acuerdo al MPID (ver figura 86) se verifica cómo se relaciona con los conceptos de área de una región plana, volumen de un sólido de revolución, área de una superficie, longitud de curva, centro de masa, trabajo efectuado por una fuerza y cómo una generalización se considera a la integral impropia, temas que están considerados en la programación curricular académica y al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

De acuerdo al análisis realizado, se evidencia que el concepto de la Integral Definida es usado en diferentes situaciones que se relaciona con algunos contextos de uso, identificados en el estudio epistemológico presentado en la sección 1.1.

En particular, los tipos de tareas que aparecen en los libros de textos contemplan cálculo de áreas mediante el límite de una suma de Riemann, definición de la Integral Definida y aplicando la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo, así como el cálculo de áreas de regiones limitadas por las gráficas de funciones, donde también se aplica la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo y las propiedades de la Integral Definida.

También para el cálculo de volumen de un sólido de revolución, para el cálculo del área de una superficie, para el cálculo de la longitud de curva, centro de masa y trabajo efectuado por una fuerza se aplica la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Para el tipo de tareas relacionadas con la integral impropia, se requiere de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo y condiciones específicas para las funciones que se analizan. Como se puede evidenciar, los tipos de tareas requieren de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo, a partir de la cual involucra desarrollar distintas técnicas, según las clases de funciones que se consideran.

En general los tipos de tareas, las técnicas, la tecnología y teoría identificadas en el análisis de los libros de textos sobre Cálculo son idénticos, existiendo de esta manera una relación directa; por tal motivo se representó a través del MPID (ver figura 86).

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN TEXTOS DE LA ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

En este capítulo, revisaremos algunos libros de texto que se emplean en las asignaturas de la especialidad, con la finalidad de analizar el rol que cumple la Integral Definida en la modelización y solución de problemas de la especialidad de Ingeniería Química. En estos libros de texto identificaremos si existen contenidos matemáticos que se relacionan con el análisis realizado en el capítulo anterior. La finalidad de este análisis es para identificar los contenidos que involucran el rol y usos de la Integral Definida, teniendo en cuenta el orden de los temas, si hay definiciones, teoremas y técnicas que se puedan identificar desde las disciplinas matemáticas o disciplinas de la especialidad de Ingeniería Química. El análisis permitirá proponer una organización praxeológica sobre los usos de la Integral Definida en cursos de disciplinas de la especialidad de Ingeniería Química.

En primer lugar, se describirán los temas que son abordados en los libros de textos que aparecen en las fuentes bibliográficas de las asignaturas *Fisicoquímica I y Principios de Ingeniería Química*, cursos de la especialidad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Para elegir los libros de textos, se entrevistó a los especialistas (ingenieros químicos) del área quienes indicaron que, para las asignaturas de *Fisicoquímica I* emplean el libro de texto

Fisicoquímica (2ª ed.), Castellan (1998) y para la asignatura de *Principios de Ingeniería Química* emplean el libro de texto *Principios elementales de los procesos químicos*, Felder & Rousseau (2003). En estos libros, identificaremos los temas en donde se hace uso del concepto de la Integral Definida, notaciones, interpretaciones y aplicaciones en los diferentes contextos de la Ingeniería Química.

Luego, se propondrá una organización praxeológica sobre los usos de la Integral Definida en la especialidad de Ingeniería Química, donde usaremos los elementos teóricos brindados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), con la finalidad de identificar los tipos de tareas, las técnicas asociadas a los tipos de tareas, las tecnologías y las teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo.

4.1 Descripción de los libros de textos de la especialidad de Ingeniería Química

Los principales libros de textos de la especialidad usados como fuente bibliográfica en las asignaturas de *Fisicoquímica I* y *Principios de Ingeniería Química*, para la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, de acuerdo a su programación curricular académica y al programa analítico (sílabo) son:

El libro de texto considerado para la asignatura de *Fisicoquímica I* es:

- Castellan, G. (1998). *Fisicoquímica (2a ed.).* México: Addison-Wesley.

Y, para la asignatura de Principios de Ingeniería Química es:

- Felder, R., & Rousseau, R. (2003). *Principios Elementales de los Procesos Químicos.* México: Limusa Wiley.

A continuación, presentaremos una descripción de los libros de textos para identificar la presencia de praxeologías que involucren los usos y el rol que desempeña el concepto Integral Definida en la disciplina de la especialidad de Ingeniería Química.

Libro de texto Fisicoquímica

El libro de texto *Fisicoquímica (2ª ed.)* del autor Castellan (1998) presenta una estructura conformada por 35 capítulos.

A continuación, detallaremos los contenidos relacionados con el concepto Integral Definida, así como los diferentes usos de esta que se relacionan con la disciplina de la Ingeniería Química. Se indican las secciones de los capítulos considerados.

En la tabla 21 se presenta los usos de la Integral Definida relacionada con las propiedades empíricas de los gases.

La Integral Definida es aplicada a la ley de la distribución barométrica y para tal propósito se considera un modelo matemático (ver figura 87), donde se identifica la presión, la masa del fluido, la densidad de un fluido y, a partir de estos datos, se obtiene la presión hidrostática en un líquido en términos de la Integral Definida, pero las variables que intervienen son totalmente diferentes a las identificadas en los libros de texto de Cálculo.

Otra de las aplicaciones de la Integral Definida es para representar la distribución de partículas en una solución coloidal, donde se expresa el número total de moles en términos de la Integral Definida. Asimismo, el volumen encerrado entre dos posiciones y la concentración promedio en la capa son expresados en términos de la Integral Definida.

Se consideran ejemplos donde se evidencia estas aplicaciones de la Integral Definida y para obtener los resultados se aplica la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

<table>
<tr><th>AUTOR</th><th>AÑO</th><th>TÍTULO</th><th>CIUDAD</th><th>EDITORIAL</th></tr>
<tr><td>Castellan, G.</td><td>1998</td><td>Fisicoquímica (2a ed.)</td><td>México</td><td>Addison-Wesley</td></tr>
<tr><td colspan="5">CAPÍTULO 2: PROPIEDADES EMPÍRICAS DE LOS GASES (p. 8-28)</td></tr>
<tr><td>2.9 Ley de la distribución barométrica</td><td colspan="4">

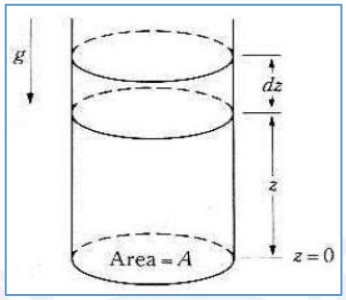


Figura 87. Columna de fluido de un campo gravitacional (Castellan, 1998, p. 23)

Consideremos la columna de fluido (figura 87), donde A es una sección transversal, g aceleración de una determinada partícula que actúa hacia abajo, z altura, p presión, $m = m'$ masa del fluido.

Sea la presión $p + dp$ a la altura $z + dz$, es decir:

$$p + dp = \frac{m'g}{A}$$

Pero $m' + dm = m$, entonces $m' = m - dm$

Si dm es la masa del fluido en la porción entre z y $z + dz$, donde se tiene:

$$p + dp\frac{(m - md)g}{A} = \frac{mg}{A} - \frac{gdm}{A}$$

Se obtiene:

$$dp = -\frac{gdm}{A}$$

Si ρ es la densidad del fluido, entonces:

$$dm = \rho A dz$$

Por tanto,

$$dp = -\rho g dz$$

Si la densidad de un fluido es independiente de la presión, como en los líquidos, podemos integrar de manera inmediata:

$$\boxed{\int_{p_0}^{p} dp = -\rho g \int_0^{z} dz,}$$

Figura 88. Presión hidrostática en un líquido (Castellan, 1998, p. 24)

De la figura 87, que representa la columna de fluido de un campo gravitacional, se obtiene la presión hidrostática en un líquido, donde dp diferencial de presión, dz diferencial de la altura (incremento en la altura), p_0 representa la presión en el fondo de la columna, p es la presión a la altura z.

</td></tr>
</table>

Obsérvese que, para un gas, la densidad se considera como una función de la presión. Así tenemos que, para un gas ideal, se tiene que si $\rho = \frac{Mp}{RT}$, entonces:

$$dp = -\frac{Mpg}{RT}dz$$

donde, Mmasa molar, $R = 8.31441\, J\, K^{-1} mol^{-1}$. Integrando se obtiene:

$$\ln(p) = -\frac{Mgz}{RT} + c$$

La constante c se determina cuando $z = 0$ y $p = p_0$, es decir $c = \ln(p_0)$. Luego, se obtiene que la Ley de distribución barométrica es:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

- Distribución de partículas en una solución coloidal.

$$\boxed{\langle \tilde{c} \rangle = \frac{n(z_1, z_2)}{V(z_1, z_2)} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} \tilde{c} A\, dz}{\int_{z_1}^{z_2} A\, dz}.}$$

Figura 89. Concentración promedio (Castellan, 1998, p. 27)

donde $n(z_1, z_2)$ representa el número total de moles entre dos posiciones cualesquiera z_1 y z_2, $\tilde{c}$ es la concentración en z, A área, dz diferencial de la altura, $V(z_1, z_2)$ es el volumen encerrado entre z_1 y z_2 y $\langle \tilde{c} \rangle$ representa la concentración promedio.

Tabla 21. Relación de la Integral Definida con las propiedades empíricas de los gases.

En la tabla 22 se presenta la relación de la integral impropia con la estructura de los gases.

Respecto al tema relacionado con la teoría cinética de los gases, se señala que el tipo de integral que se muestra en la figura 90 es uno de los casos sobre integral impropia que se aplican en la teoría cinética de los gases. Se presenta una lista de integrales de este tipo con sus respectivos resultados.

Asimismo, se indica que cuando el límite superior de integración en la función error se extiende hasta $x \rightarrow \infty$, se obtiene una integral impropia. Se presenta una lista con algunos valores de la función error.

Por otro lado, se tiene la energía cinética promedio, que se obtiene a partir de la fórmula que se muestra en la figura 92, y, a partir de esta expresión, se obtiene las constantes A y β.

Se consideran ejemplos donde se evidencia los procesos para obtener los resultados relacionados a estos temas que se indican aplicando la integral impropia.

CAPÍTULO 4: LA ESTRUCTURA DE LOS GASES (p. 53-89)	
4.7 Interludio matemático	- Caso 1. - Caso 2. $$I_n(\beta) = \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\beta x^2}\, dx \qquad (\beta > 0; n > -1).$$ *Figura 90.* Integral en la teoría cinética de los gases (Castellan, 1998, p. 65) donde $I_n(\beta)$ representa las integrales en la teoría cinética de los gases y se aplica para el valor de la constante β. - Función de error. $$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du.$$ *Figura 91.* Función de error (Castellan, 1998, p. 68) donde $fer(x)$ es la función de error.
4.8 Evolución de A y β	- Constantes de la distribución de Maxwell. $$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_{c=0}^{c=\infty} \frac{1}{2} mc^2\, dn_c}{N}.$$ *Figura 92.* Energía cinética promedio (Castellan, 1998, p. 69) donde $\langle \epsilon \rangle$ representa la energía cinética promedio, dn_c es el número de moléculas que tiene esa energía y N es el número total de moléculas.
4.9 Cálculo de valores medio usando la distribución de Maxwell	- Valor medio de la cualquier cantidad que dependa de la rapidez.

Tabla 22. Relación entre la integral impropia y la estructura de los gases.

En la tabla 23 se presenta la relación sobre los usos de la Integral Definida con los tipos de trabajo.

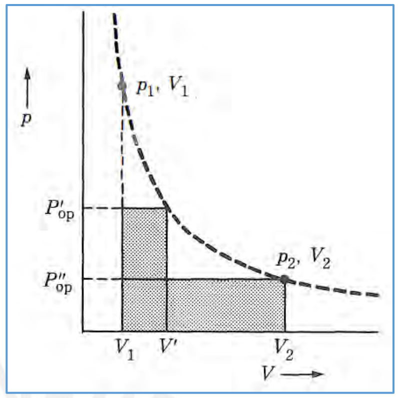
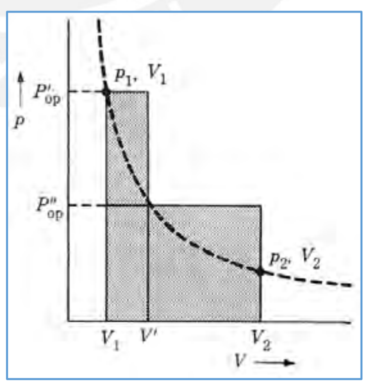
Así, tenemos que el trabajo de expansión de un gas está relacionado con la presión P y el volumen V y se presenta para un sistema de expansión en dos etapas (ver figura 93), donde el trabajo producido por una expansión en dos etapas, en la que se observa que la primera etapa produce un trabajo que está representado por el área $P'_{op}(V' - V_1)$ y, en la segunda etapa, produce un trabajo representado por el área $P''_{op}(V_2 - V')$. Ambos casos están en un estado inicial y es expresado en términos de una Integral Definida (ver figura 94) que representa el trabajo de expansión de un sistema cualquiera.

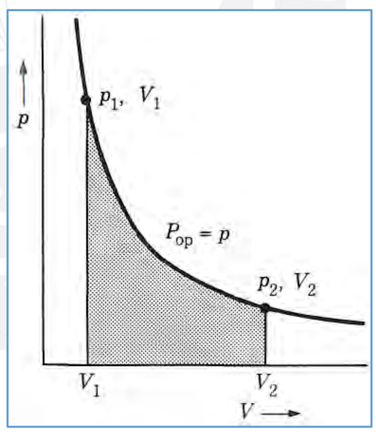
Asimismo, se tiene que el trabajo de comprensión de un gas para un sistema cualquiera, su comportamiento es diferente (ver figura 95), donde el trabajo destruido en una expansión en dos etapas, en las que se observa que la primera etapa se destruye el trabajo que está representado por el área $P''_{op}(V_2 - V')$ y, en la segunda etapa, se destruye el trabajo que está representado por el área $P'_{op}(V' - V_1)$. Ambos casos están en un estado inicial (estado final) y es expresado en términos de una Integral Definida (ver figura 94), que representa el trabajo destruido en una expansión de un sistema cualquiera.

Otra de las aplicaciones de la Integral Definida, es para calcular cantidades mínimas y máximas de trabajo en una expansión y comprensión (ver figura 97), donde el trabajo máximo se da en una expansión y el trabajo mínimo se da en una comprensión respectivamente.

Por otra parte, se tiene que la Integral Definida se aplica para calcular el trabajo máximo o mínimo para un cambio de estado isotérmico (ver figura 98) y también se aplica para calcular el trabajo en una expansión y en una comprensión para transformaciones reversibles e irreversibles de un gas (ver figura 99).

En los ejemplos considerados en estas secciones se presentan procedimientos para calcular los diferentes tipos de trabajo para los gases, según su comportamiento y para obtener los resultados, se requiere de la aplicación de la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo, donde las antiderivadas de las funciones integrando son conocidas.

CAPÍTULO 7: ENERGÍA Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA; TERMOQUÍMICA (p. 107-160)	
7.3 Trabajo de expansión	- Trabajo de expansión. - Expansión en dos etapas.  *Figura 93.* Trabajo producido por una expansión en dos etapas (Castellan, 1998, p. 112) En la figura, los rectángulos sombreados representan el trabajo de expansión en dos etapas, es decir, que el trabajo total está dado por: $W = W_{primera\ etapa} + W_{segunda\ etapa} = P'_{op}(V' - V_1) + P''_{op}(V_2 - V')$ donde W representa el trabajo, P'_{op} y P''_{op} representan la presión que se opone al movimiento y V_1, V' y V_2 representan los volúmenes. - Expansión en varias etapas. $\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} P_{op} dV}$ *Figura 94.* Trabajo total producido en una expansión (Castellan, 1998, p. 113) donde W representa el trabajo total producido en una expansión, P_{op} representa la presión que se opone al movimiento, V_1 es el volumen inicial y V_2 es el volumen final y dV representa el diferencial de volumen.
7.4 Trabajo de compresión	 *Figura 95.* Trabajo destruido en una comprensión en dos etapas (Castellan, 1998, p. 114) En la figura, los rectángulos sombreados representan el trabajo destruido en la compresión en dos etapas y está dado por: W= $P''_{op}(V' - V_2) + P'_{op}(V_1 - V')$

	Donde W representa el trabajo, P'_{op} y P''_{op} representan la presión que se opone al movimiento y V_1, V' y V_2 representan los volúmenes.
7.5 Cantidades mínimas y máximas de trabajo	Se tiene que el trabajo de expansión está dado por: $$W = \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{op}}\, dV.$$ *Figura 96.* Trabajo expandido (Castellan, 1998, p. 115) donde W representa el trabajo total en la expansión que va desde V_i hasta V_f (V_i, V_f volumen inicial y final), dV diferencial de volumen y P_{op} es la presión que se opone al movimiento. Obsérvese que: - En una expansión, P_{op} debe ser menor que la presión p de un gas, entonces el trabajo máximo de expansión está dado por: $$W_m = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$$ - En una compresión, P_{op} debe ser infinitesimalmente mayor que la presión p del gas, entonces el trabajo mínimo de comprensión está dado por: $$W_m = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$$ - Para un gas ideal, la cantidad máxima de trabajo producido en la expansión o la cantidad mínima de trabajo destruido en la compresión es igual al área sombreada bajo la isoterma (de igual temperatura).  *Figura 97.* Trabajo máximo o mínimo (Castellan, 1998, p. 115) Tenemos que, para un cambio de estado isotérmico, el trabajo máximo o mínimo, para $p = \frac{nRT}{V}$, está dado por:

	$$W_{\max,\min} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$ *Figura 98.* Trabajo máximo y trabajo mínimo (Castellan, 1998, p. 115) donde $W_{max,min}$ representa el trabajo máximo o mínimo, V_i, V_f representan los volúmenes inicial y final respectivamente, dV es el diferencial de volumen, n número de moles y T temperatura.
7.6 Transformaciones reversibles e irreversibles	- Proceso I. - Proceso II. $$W_{exp} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV \qquad W_{comp} = \int_{V_2}^{V_1} p\, dV$$ *Figura 99.* Trabajo en la expansión y en la comprensión (Castellan, 1998, p. 116) donde W_{exp} representa el trabajo producido en la expansión de un gas, p presión del gas, V_1, V_2 representan los volúmenes inicial y final respectivamente, dV es el diferencial de volumen y W_{comp} representa el trabajo producido en la compresión.

Tabla 23. Relación de la Integral Definida con los tipos de trabajo.

En la tabla 24 se presenta la relación de los usos de la Integral Definida con la entalpía.

Tenemos que, respecto a los cambios de estado de un sistema a volumen constante, la Integral Definida se aplica para calcular la variación de la energía (ver figura 100), así como también esta expresión se puede aplicar a cualquier sistema, como sólidos, líquidos, gases, mezclas, entre otros.

Por otro lado, se tiene que la Integral Definida se aplica para calcular el cambio de entalpía (ver figura 101), así como también para los cambios de estado de un sistema a presión constante. Además, se aplica para calcular el valor de aumento de entalpía, específicamente para el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura dada.

En los ejemplos que se consideran, se verifica los diferentes usos de la Integral Definida para calcular los cambios de energía y de entalpía, que se obtiene aplicando la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo.

7.11 Cambios de estado a volumen constante	$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT$$ *Figura 100.* Variación de la energía (Castellan, 1998, p. donde ΔU es la variación de energía, C_v es la capacidad calorífica específica a volumen constante, T_1 y T_2 son las temperaturas inicial y final respectivamente y dT es el diferencial de temperatura.
7.13 Cambios de estado a presión constante	$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, dT.$$ *Figura 101.* Cambio de entalpía (Castellan, 1998, p. donde ΔH representa el cambio de entalpía, C_p es la capacidad calorífica específica a presión constante, T_1 y T_2 son las temperaturas inicial y final respectivamente y dT es el diferencial de temperatura.
7.25 Dependencia del calor de reacción con la temperatura	$$\Delta H_T^\circ = \Delta H_{T_0}^\circ + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^\circ \, dT.$$ *Figura 102.* Valor de aumento de entalpía (Castellan, 1998, p. 147) donde ΔH_T^0 representa el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura T, $\Delta H_{T_0}^0$ representa el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura T_0, ΔC_P^0 representa el cambio en la capacidad calorífica estándar de reacción y dT es el diferencial de temperatura.

Tabla 24. Relación de la Integral Definida con la entalpía.

En la tabla 25 se presenta la relación de los usos de la Integral Definida con la entropía.

Tenemos que la Integral Definida se emplea para calcular los cambios de entropía (ver figura 103), así como para determinar el cambio de entropía de un gas ideal (ver figura 104).

Otro de los usos de la Integral Definida es para determinar la entropía de la tercera ley de la termodinámica (ver figura 105).

En los ejemplos que se consideran se verifica los diferentes usos de la Integran Definida, donde se aplica la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo, donde las funciones integrando son funciones algebraicas de primer y segundo grado, y sus antiderivadas son conocidas.

CAPÍTULO 9: PROPIEDADES DE LA ENTROPÍA Y LA TERCERA LEY DE LA TERMODINÁMICA (p. 182-215)	
9.6 La entropía como función de la temperatura y el volumen	$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T}\, dT.$$ *Figura 103.* Cambio de entropía (Castellan, 1998, p. 190) donde ΔS representa el cambio de entropía, C_v es la capacidad calorífica específica a volumen constante, T es temperatura, T_1 y T_2 son las temperaturas inicial y final respectivamente y dT es el diferencial de temperatura.
9.9 Cambios de entropía en el gas ideal	$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T}\, dT + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}.$$ *Figura 104.* Cambio de entropía de un gas ideal (Castellan, 1998, p. 195) donde ΔS representa el cambio de entropía de un gas ideal, C_v es la capacidad calorífica específica a volumen constante, T es temperatura, T_1 y T_2 son las temperaturas inicial y final respectivamente, dT es el diferencial de temperatura, n y R son constantes, V es el volumen, dV es diferencial de volumen y V_1, V_2 representan los volúmenes inicial y final respectivamente.
9.10 Tercera ley de la termodinámica	$$S_T = \int_0^T \frac{C_p}{T}\, dT,$$ *Figura 105.* Entropía de la tercera ley (Castellan, 1998, p. 197) donde S_T representa la entropía de la tercera ley de termodinámica o entropía del sólido a una temperatura T, C_p es la capacidad calorífica específica a presión constante, T es temperatura y dT es el diferencial de temperatura.

Tabla 25. Relación de la Integral Definida con la entropía.

Como se puede verificar en las secciones de los capítulos descritos, el concepto Integral Definida aparece para resolver problemas relacionados con Fisicoquímica, la cual forma parte del plan de estudios de un ingeniero químico. En los temas, están involucrados los conocimientos de Física y Química, tales como trabajo, presión, energía, densidad, masa, gravedad, temperatura, entalpía, entropía entre otros, además de conocimientos propiamente matemáticos.

Libro de texto Principios Elementales de los Procesos Químicos

El libro de texto *Principios Elementales de los Procesos Químicos (3ª ed.)* de los autores Felder & Rousseau (2003) presenta una estructura conformada por 14 capítulos.

A continuación, detallaremos los contenidos relacionados con el concepto Integral Definida, así como sus diferentes usos que se aplica a temas relacionados con la disciplina de la Ingeniería Química. Se indican las secciones de los capítulos considerados.

En la tabla 26 se presenta los usos de la Integral Definida relacionada con los temas de cambios de temperatura y la ecuación general de balance.

<table>
<tr><th>AUTOR</th><th>AÑO</th><th>TÍTULO</th><th>CIUDAD</th><th>EDITORIAL</th></tr>
<tr><td>Felder, R & Rousseau, R</td><td>2003</td><td>Principios Elementales de los Procesos Químicos (3a ed.)</td><td>México</td><td>Limusa Wiley</td></tr>
<tr><td colspan="5">CAPÍTULO 8: BALANCE EN PROCESOS NO REACTIVOS (p. 357-439)</td></tr>
<tr><td>8.3 Cambios de temperatura</td><td colspan="4">- Calor sensible y capacidades caloríficas.
$$\boxed{\Delta\hat{U} = \int_{T_1}^{T_2} C_v(T)\, dT}$$
Gas ideal: exacta
Sólido o líquido: buena aproximación
Gas no ideal: válida sólo si V es constante
Figura 106. Cambio de energía interna específica (Felder & Rousseau, 2003, p.
donde $\Delta\hat{U}$ representa el cambio de energía interna específica, $C_v(T)$ es la función temperatura y dT es el diferencial de temperatura.
- Estimación de las capacidades caloríficas.
$$\Delta\hat{H} = \int_{T_1}^{T_2} (C_p)_{\text{mezcla}}(T)\, dT$$
Figura 107. Cambio de entalpía específica (Felder & Rousseau, 2003, p. 373
donde $\Delta\hat{H}$ representa cambio de entalpía específica del mezclado, $(C_p)_{mezcla}$ es la capacidad calorífica de la mezcla y dT es el diferencial de temperatura.</td></tr>
<tr><td colspan="5">CAPÍTULO 11: BALANCE DE PROCESOS TRANSITORIOS (p. 545-)</td></tr>
<tr><td>11.1 Ecuación general de balance</td><td colspan="4">- Balances integrales.
Se tiene que el balance diferencial está dado por:
$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_{\text{entrada}} + \dot{r}_{\text{gen}} - \dot{m}_{\text{salida}} - \dot{r}_{\text{cons}}$$
que se puede escribir como:
$$dM = \dot{m}_{\text{entrada}}\, dt + \dot{r}_{\text{gen}}\, dt - \dot{m}_{\text{salida}}\, dt - \dot{r}_{\text{cons}}\, dt$$
integrando se tiene:
$$\int_{t_0}^{t_f} dM = M(t_f) - M(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_{\text{entrada}}\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{r}_{\text{gen}}\, dt - \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_{\text{salida}}\, dt - \int_{t_0}^{t_f} \dot{r}_{\text{cons}}\, dt$$
Figura 108. Ecuación integral de balance (Felder & Rousseau, 2003, p. 548)</td></tr>
</table>

	donde M es la masa, la Integral Definida del lado izquierdo representa la cantidad de valor balanceado en el sistema entre el tiempo inicial t_0 y el tiempo final t_f, $\dot{m}_{entrada}$, $\dot{m}_{salida}$, $\dot{r}_{gen}$ (velocidad de generación), $\dot{r}_{cons}$ (velocidad de consumo)son las velocidades de flujo de masa y estas pueden variar con el tiempo.

Tabla 26. Contenidos relacionados con la Integral Definida – Principios Elementales de los Procesos Químicos

La Integral Definida se aplica calcular el cambio de energía interna específica (ver figura 106), así como para los cambios de entalpía específica (ver figura 107), es decir para los cambios de temperatura.

Otra de las aplicaciones de la Integral Definida es para calcular la cantidad de valor balanceado en un sistema. Los ejemplos que se consideran verifican los diferentes usos de la Integral Definida, donde se explican los diversos procedimientos de su formulación para obtener los resultados solicitados en cada uno de ellos.

Como se puede verificar en las secciones de los capítulos descritos, el concepto Integral Definida se aborda con otros temas para resolver problemas relacionados a la disciplina de un Ingeniero Químico y sus usos son importantes y fundamentales para tratar con los diferentes problemas que requieren de su aplicación.

Asimismo, se observa que las variables empleadas son diferentes a las usadas en los libros de Cálculo y su significado e interpretaciones son distintas. Las áreas que son determinadas por las gráficas de las funciones, según la variable que interviene, representan trabajo, energía, cambio de entropía o masa.

En conclusión, el análisis de los dos libros de texto relacionados con la especialidad de Ingeniería Química nos brinda un panorama de cómo se aborda el concepto de la Integral Definida y los significados que representan para tratar problemas en su campo de acción y del mismo modo cómo se relacionan los conceptos de presión hidrostática en un líquido;

concentración promedio en la capa de una columna de fluido en un campo gravitacional; energía cinética promedio de las moléculas de un gas; trabajo total; variación de la energía; cambio de estado a presión constante de un gas; presión osmótica; entalpía a una temperatura fija; cambio de entropía; cambio de entalpía y fuerza externa, temas que están considerados en la programación curricular académica y al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Por otro lado, un estudiante de la especialidad de Ingeniería Química debería haber construido su noción del concepto Integral Definida a un nivel de objeto matemático para ser aplicado como una herramienta matemática que le permita hacer usos en diferentes contextos para resolver problemas relacionado a su campo de acción.

4.2 Identificación e interpretación de elementos en la disciplina de la especialidad de Ingeniería Química

De acuerdo a Castela (2016), cuando un estudiante transita por diversas instituciones o cuando cruza fronteras, se encuentra con otras formas de estudiar los objetos matemáticos. Para ello, es importante conocer los diversos aspectos de los contextos socio-culturales de referencia.

En las *P(DI)***,** los objetos matemáticos tienen sus propias representaciones e interpretaciones, así tenemos que de Castellan (1998) y Felder & Rousseau (2003) se identificaron los siguientes elementos:

- Se tiene que el volumen (V), la presión (P) y la temperatura (T) carecen de significados cuando se aplican a pocas moléculas, ya que las coordenadas termodinámicas son coordenadas macroscópicas que reflejan el estado interno de un sistema termodinámico, mediante las cuales se puede determinar su energía interna. Es decir, en termodinámica (Termoquímica), todo infinitésimo debe satisfacer la condición de representar un cambio en la magnitud que sea pequeño respecto a la magnitud misma y mayor en comparación con el efecto producido por el comportamiento de algunas moléculas. Un sistema termodinámico se caracteriza por sus propiedades y sus diferentes relaciones que se establecen entre ellas y que son estudiados a partir de sus ecuaciones de estado.

- Se puede representar la ecuación de estado de un sistema, en forma general, por: $f(P,V,T) = 0$. Esta ecuación relaciona las variables de estado que las describen y para un sistema de equilibrio termodinámico. En particular, se tiene que la ecuación de estado para V que relaciona a T y P está dada por:

$$V = V(T,P)$$

donde un cambio infinitesimal de un estado de equilibrio a otro se representa por:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

La ecuación de estado para P, en función de V y T, está dado por:

$$P = P(T,V)$$

donde

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$$

La ecuación de estado para T, en función de V y P, está dado por:

$$T = T(P,V)$$

donde

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV$$

Se tiene que las diferenciales dP, dV y dT son diferenciales de funciones reales y se denominan diferenciales exactas.

Por otro lado, se tiene que si un infinitésimo que no es diferencial de una función real se denomina *diferencial inexacta* y no se puede representar mediante una ecuación de estado como las anteriores.

Cabe señalar que las ecuaciones de estado están formuladas en ecuaciones diferenciales ordinarias en donde sus términos están dados en derivadas parciales, y tienen sus propios significados los cuales, requieren para su solución e interpretación el uso de la Integral Definida.

- En el trabajo de expansión, se tiene que en un sistema una cantidad de gas que está contenida en un cilindro dotado de un pistón D (ver figura 109 (a)), si se sujeta el pistón contra una serie de topes S, resulta que se encuentra en un estado inicial del sistema que se describe por T, p_1 y V_1.

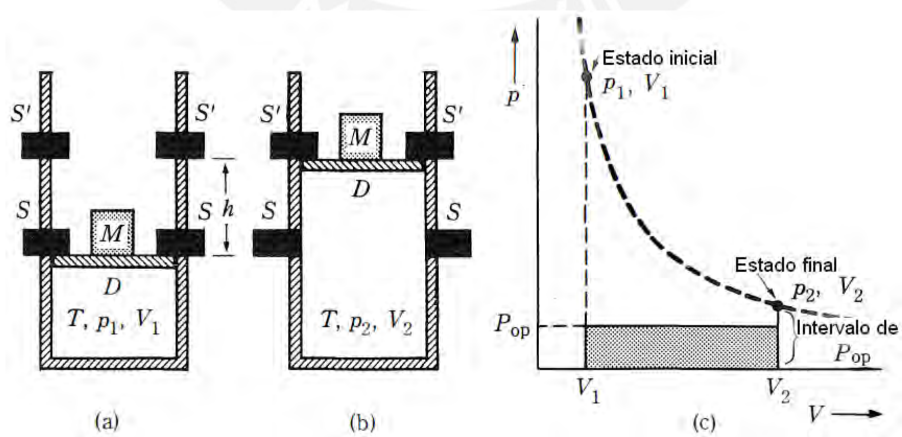


Figura 109. Trabajo producido en una expansión en una sola etapa (Castellan, 1998, p. 111)

Si se coloca una peqeña masa M sobre el pistón y al retirar los topes S, el pistón debe subir hasta chocar con los topes S' (ver figura 109 (b)).

Se tiene que el sistema se encuentra en un estado final que se describe por T, p_2 y V_2. En estos dos procesos, se ha producido un trabajo y en esta transformacion, en el entorno, se ha elevado una masa M a una altura h contra la fuerza de la gravedad Mg. Tenemos que el trabajo producido está dado por:

$$W = Mgh$$

Si el área del pistón es A, se tiene que la presión que actúa hacia abajo sobre el pistón es $\frac{Mg}{A} = P_{op}$, la presión que se opone al movimiento del pistón. Entonces, resulta que el trabajo se expresa por:

$$W = P_{op}Ah$$

La figura 109 (c) representa el trabajo producido en el cambio de estado, la curva punteada (discontinua) representa la isoterma del gas sobre la cual se han indicado los estados inicial y final.

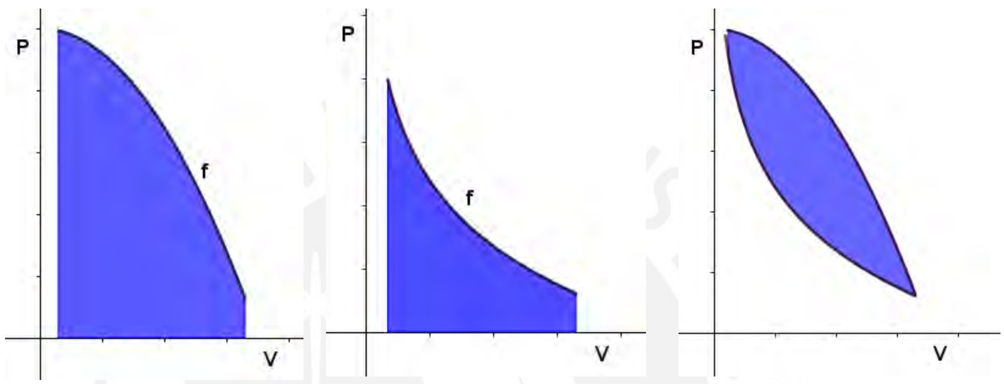
- En un sistema, se realiza una cantidad infinitesimal de trabajo, que se denota por $đW$ y se expresa por:

$$đW = P_{\mathrm{op}}\, dV. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde se tiene que P_{op} permanece constante y el volumen aumenta una cantidad infinitesimal dV ver figura 109.

Una cantidad infinitesimal de trabajo es una diferencial inexacta, ya que no representa una diferencial de una función real de las coordenadas termodinámicas. No existe una función de las coordenadas termodinámicas que represente el trabajo en un cuerpo. Se considera al trabajo como una actividad o proceso exterior que produce un cambio en un cuerpo, específicamente en la energía de un cuerpo.

- Las representaciones gráficas para representar el trabajo en un sistema de coordenadas se procede de la siguiente manera: El volumen V es representado en el eje X y la presión P se representa en el eje Y.



(a) Trabajo de expansión

(b) Trabajo de comprensión

(c) Ciclo de trabajo

Figura 110. Representación del trabajo (Castellan, 1998, p. 111-115)

En la figura 110 (a) el área bajo la gráfica de la función representa el trabajo de expansión durante los cambios de presión y volumen de un gas cuando se expande. El trabajo se considera negativo en este proceso.

El área bajo la gráfica de la función representa el trabajo de comprensión (ver figura 110 (b)), cuando un gas es comprimido. El trabajo, en este proceso, se considera positivo.

El área representada en la figura 110 (c) representa el trabajo neto realizado durante un ciclo. Se considera un ciclo cuando un gas es llevado a su estado inicial, el cual es obtenido al sumar el trabajo de expansión y el trabajo de comprensión.

- Del primer principio de termodinámica: *Si un sistema se somete a cualquier transformación cíclica, el trabajo producido en el entorno es igual al calor que fluye* *desde el entorno*. Se obtiene una función de las coordenadas de un sistema termodinámico, que se expresa a través de su valor del estado final menos su valor del estado inicial es igual al trabajo adiabático que se realiza al pasar de un estado a otro. La función del sistema termodinámico es denominada *función energía interna* y se denota por U. Se tiene que $U_{final} - U_{inicial}$ significa, físicamente, como la variación de energía del sistema.

- La primera ley o primer principio de termodinámica es expresado en su forma diferencial como:

$$dU = dQ - dW \qquad \text{.....................................} (2)$$

La expresión indica un proceso infinitesimal, ya que solo implica variaciones infinitesimales de las coordenadas termodinámicas. Para un cambio finito de estado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_i^f dU &= \int_i^f dQ - \int_i^f dW \\ \Delta U &= Q - W \end{aligned} \qquad \text{...............................} (3)$$

donde $\Delta U = U_{final} - U_{inicial}$, Q es el calor y W es el trabajo que se manifiestan en el entorno inmediato por los cambios de temperatura de los cuerpos y los cambios de alturas de las masas.

- Para un sistema de masas fijas, se puede describir la ecuación de estado en función de V y T. Es decir, en la función $U = U(T, V)$, el cambio de energía dU está relacionado con los cambios de temperatura dT y los cambios de volumen dV, mediante:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \qquad \text{...........................} (4)$$

Reemplazando (1) y (2) en (4), se tiene que:

$$dQ - P_{\mathrm{op}}\,dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad \text{..........................} \;(5)$$

Se debe tener en cuenta que las derivadas parciales $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ son propiedades importantes del sistema, ya que estas indican la rapidez de cambio de la energía respecto a la temperatura a volumen constante o respecto al volumen a temperatura constante.

- Si el volumen es constate, entonces $dV = 0$, se tiene que la ecuación (2) se transforma en:

$$dU = dQ_V \quad \text{..} \;(6)$$

donde el subíndice V indica la restricción a volumen constante. Esto quiere decir que la ecuación (5) se convierte en:

$$dQ_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \quad \text{.......................................} \;(7)$$

Obsérvese que al dividir la ecuación (7) por dT, obtenemos:

$$C_v \equiv \frac{dQ_V}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{....................................} \;(8)$$

donde se obtiene la capacidad calorífica del sistema a volumen constante.

Si reemplazamos $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $dV = 0$ en la ecuación (4), se obtiene:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T 0$$

$$dU = C_v dT \quad \text{.....................................} \;(9)$$

Esta ecuación representa un cambio infinitesimal del sistema, si integramos desde T_1 a T_2 obtenemos un cambio finito o la variación de energía del sistema:

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT \quad \text{.............................} \;(10)$$

- Si $P_{op} = p$, entonces para un cambio de estado a presión constante la primera ley (ecuación 2) se convierte en:

$$dU = dQ_p - p\,dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11)}$$

Integrando la ecuación (11), resulta:

$$\int_1^2 dU = \int_1^2 đQ_p - \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

$$U_2 - U_1 = Q_p - p(V_2 - V_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(12)}$$

donde $Q_p = (U_2 + pV_2) - (U_1 - pV_1)$, pero como la presión es constante se tiene que $p = p_1 = p_2$, resulta que:

$$(U_2 + p_2V_2) - (U_1 - U_1) = Q_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(13)}$$

- En un sistema, se tiene que el volumen y la presión solo dependen del estado. Del mismo modo, el producto pV también depende del estado del sistema. Resulta que la función:

$$H = U + pV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(14)}$$

es una combinación de variables de estado, donde H representa la entalpía del sistema.

Si tomamos $H_2 = U_2 + p_2V_2$ y $H_1 = U_1 - p_1V_1$ y reemplazamos en la ecuación (13), resulta:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = Q_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(15)}$$

- Para un cambio infinitesimal en el estado de un sistema la ecuación (15), se expresa por:

$$dH = đQ_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(16)}$$

Se tiene que H es una función de estado, entonces dH es un diferencial exacta. Resulta que la función H, en términos de T y p, se expresa por:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Para una transformación a presión constante, se tiene que $dp = 0$ donde la ecuación (17), resulta:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Reemplazando la ecuación (18) en la ecuación (16) se obtiene:

$$đQ_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Obsérvese que al dividir la ecuación (19) por dT obtenemos:

$$C_p \equiv \frac{đQ_p}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

donde C_p es la capacidad calorífica del sistema a presión constante.

Si reemplazamos $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ y $dp = 0$ en la ecuación (17) se obtiene:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp = C_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T 0$$

$$dH = C_p dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Esta ecuación representa un cambio infinitesimal del sistema, si integramos desde T_1 a T_2 obtenemos un cambio finito o la variación de entalpía del sistema:

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

- Dependencia de calor de reacción con la temperatura, se sabe que H^0 representa la entalpía estándar y ΔH^0 representa el cambio de entalpía estándar. Para una reacción, se tiene que ΔH^0 está dada por:

$$\Delta H^0 = H^0(productos) - H^0(reactivos) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Si queremos obtener la dependencia de esta cantidad con la temperatura, se deriva la ecuación (23) con respecto a la temperatura. Es decir:

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = \frac{dH^0}{dT}(productos) - \frac{dH^0}{dT}(reactivos) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Por la ecuación (21), se tiene que $\frac{dH^0}{dT} = C_p^0$. Por ende, la ecuación (24) resulta:

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = C_p^0(productos) - C_p^0(reactivos)$$

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = \Delta C_p^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Obsérvese que H^0 y ΔH^0 son funciones que dependen solo de la temperatura. Luego, $d\Delta H^0 = \Delta C_p^0\, dT$, integrando para una temperatura fija T_0 y cualquier otra temperatura T, se tiene:

$$\int_{T_0}^{T} \Delta H^0\, dT = \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^0\, dT$$

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^0\, dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

- La entropía está definida por la ecuación diferencial siguiente:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

se tiene que la entropía es una propiedad de estado extensiva univoca del sistema. Para obtener un cambio de estado finito (variación de entropía) que va desde el estado 1 al estado 2, se integra la ecuación (27) y se obtiene:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

- Se tiene que, cuando sólo se realiza trabajo, presión y volumen en una transformación reversible, la primera ley o primer principio termodinámico se convierte en:

$$dQ_{\text{rev}} = dU + p\, dV. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Si dividimos por T a la ecuación (29) y teniendo en consideración la ecuación (27) se obtiene:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

donde se tiene que en la ecuación (30) se relaciona la variación de entropía dS con la variación de energía dU y la variación de volumen dV y con la temperatura y la presión del sistema.

Obsérvese que la ecuación (30) es una combinación de la primera y segunda ley y es la ecuación fundamental de la termodinámica.

- La entropía se puede expresar en función T y V, es decir $S = S(T, V)$. El cambio de entropía dS está relacionado con los cambios de temperatura dT y los cambios de volumen dV mediante:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Se sabe que $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$, entonces:

$$dU = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Reemplazando la ecuación (32) en la ecuación (30), se tiene:

$$dS = \frac{C_v}{T}dT + \frac{1}{T}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Se obtiene que la ecuación (31) es igual a la ecuación (33), de donde:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_v}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Reemplazando la ecuación (34) en la ecuación (31) y como $dV = 0$, se tiene:

$$dT = \frac{C_v}{T}\, dT \qquad \text{………………………………..} (36)$$

Para un cambio finito de temperatura a volumen constante, la variación de entropía es obtenida al integrar la ecuación (36) para T_1 a T_2 y está dada por:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT \qquad \text{………………...………….} (37)$$

- Si se considera en la transformación de un sólido a presión constante desde el cero absoluto hasta una temperatura T inferior a su temperatura de fusión, entonces la variación de entropía, de acuerdo a la ecuación (37), está dada por:

$$\Delta S = S_T - S_0 = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

$$S_T = S_0 + \int_0^T \frac{C_p}{T} dT \quad \text{……………………………..} (38)$$

En 1913, M. Planck sugirió que el valor de S_0 es cero para toda sustancia pura perfectamente cristalina. Es decir, la tercera ley de la termodinámica: *La entropía de una sustancia pura perfectamente cristalina es cero en el cero absoluto de temperatura.*

Por la tercera ley de la termodinámica, la ecuación (38) queda expresada por:

$$S_T = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

Como se verifica, los elementos identificados tienen sus propias representaciones e interpretaciones en las *P(DI)* (Ingeniería Química), las cuales son usados para argumentar los procesos tratados y desarrollados desde su propio enfoque de estudio y análisis de los diferentes objetos que viven en esta institución.

4.3 Análisis praxeológico de la Integral Definida en textos de la especialidad de Ingeniería Química

Las descripciones realizadas anteriormente de los dos libros de textos de la especialidad de Ingeniería Química de los cursos de disciplinas intermediarias presentan una estructura parecida. Por tal motivo, para nuestro estudio, se propone una forma de organizar de las distintas tareas, técnicas y tecnologías en término a la Integral Definida, donde usaremos los elementos teóricos brindados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

De acuerdo a Chaachoua, Bessot, Romo & Castela (2019), para organizar y estructurar una praxeología o un determinado dominio de disciplina, se debe a la confiabilidad y al alcance de las técnicas.

A continuación, se presenta una organización sobre los usos de la Integral Definida identificados en los libros de textos analizados, teniendo en cuenta los criterios siguientes: 1) Que procedimientos (técnicas, métodos) se requieren y son necesarios para la resolución de cada tarea planteada. 2) Que justificaciones (definiciones, propiedades, teoremas) garantizan los procedimientos empleados, y 3) Los procedimientos y justificaciones que requieren las tareas consideradas son enmarcadas desde las matemáticas o desde las disciplinas de la especialidad de Ingeniería Química.

Se debe tener en consideración la noción de variable y generador de un tipo de tareas, donde se presentan los tipos de tareas ($\mathbf{T_i}$), subtipos de tareas ($\mathbf{t_{i,j}}$), el generador de tipos de tareas ($\mathbf{GT_i}$), variables ($\mathbf{V_i}$) y la tecnología $\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{p}}\right)$.

Se propone una organización de los elementos descritos anteriormente.

Tipo de tarea $\mathbf{T_1}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_1}$: Calcular la cantidad de sustancia en una solución coloidal presente en un campo gravitacional que se encuentra entre dos posiciones cualesquiera.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_1}$: Identificar cada una de variables que intervienen en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, las funciones integrando, y aplicar la segunda parte del teorema fundamental de Cálculo. Para calcular el número de moles $n(z_1, z_2)$ entre dos posiciones cualesquiera z_1 y z_2, aplicar la expresión:

$$n(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{c}Adz$$

donde: $\tilde{c} = \tilde{c}_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$, $T = °K$ es temperatura, $z = \ m$ es altura, $M = \frac{kg}{mol}$ es masa, $R = 8.314\ \frac{J}{°k\ mol}$, $g = \frac{m}{s^2}$ es la gravedad y A es el área de la sección transversal.

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_1^p}$: Por la concentración volumétrica que se obtiene dividiendo la cantidad de sustancia entre el volumen de la mezcla. Es decir, $\tilde{c} = \frac{n}{V}$, tenemos:

$$n = \tilde{c}V$$

de donde el número total de moles o cantidad de sustancia en el elemento de volumen entre las posiciones z_1 y z_2 está dado por:

$$dn = \tilde{c}\ dV = \tilde{c}\ A\ dz$$

Integrando desde z_1 y z_2 en la columna (ver figura 87) se obtiene el número total de moles:

$$n(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dn = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{c} A dz$$

donde $\tilde{c}$ es la concentración volumétrica (Ley de distribución de Boltzmann), V es volumen y n es el número de moles.

- ***Teoría***

$\mathbf{\Theta_1}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_1}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_1}$: Calcular la cantidad de sustancia en una solución coloidal presente en una columna de aire a $20\ °C$ en un campo gravitacional que se encuentra por debajo de una altitud de $20\ km$.

Tipo de tarea $\mathbf{T_2}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_2}$: Calcular la fracción que existe entre la cantidad de sustancia en una solución coloidal presente en la atmosfera y la cantidad de sustancia que se encuentra por debajo de la altitud dada.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_2}$: Para calcular la cantidad de sustancia $n(z_1, z_2)$ que se encuentra por debajo de una altitud, se aplica la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$. Para calcular la cantidad de sustancia en una solución coloidal presente en la atmosfera, se debe aplicar la expresión $n(0, \infty)$, que representa el número total de moles presente en la atmosfera, y está dado por:

$$n(0, \infty) = \int_0^{\infty} \tilde{c} A dz$$

Para calcular esta integral impropia, se debe identificar las funciones integrando, los límites de integración y aplicar el límite a la integral cuando $t \to \infty$ (tomar el límite superior $t = \infty$). Luego, considerar la fracción:

$$\frac{n(z_1, z_2)}{n(0, \infty)}$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_1^p}$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_2}$: Fisicoquímica, la Integral Definida y la integral impropia.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_2}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_2}$: Calcular la fracción que existe entre la cantidad de nitrógeno presente en la atmosfera a $45\ °C$ y la cantidad de sustancia que se encuentra por debajo de una altitud de 30 km.

Tipo de tarea $\mathbf{T_3}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_3}$: Calcular el trabajo total producido en una expansión.

$\mathbf{GT_3}$**:** [Calcular el trabajo de expansión; V_1, V_2], donde V_1 es la forma de expansión del trabajo, V_2 es la ecuación de estado del gas (ley de los gases).

- ***Subtipos de tareas***

$\mathbf{t_{3,1}}$: Calcular el trabajo si se conoce el número de moles de un gas ideal a una temperatura dada que se expanden isotérmica y reversiblemente desde un volumen inicial hasta un volumen final.

$\mathbf{t_{3,2}}$: Calcular el trabajo producido de un gas de Van Der Waals que se encuentra a una temperatura dada, que se expanden isotérmica y reversiblemente desde un volumen inicial hasta un volumen final.

$\mathbf{t_{3,3}}$: Calcular el trabajo para una expansión politrópica reversible.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{3,1}}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo en una expansión isotérmica y reversible, reemplazamos los datos en la expresión:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

donde T $(°k)$ es temperatura, n es número de moles, $R = 8.314 \, \frac{J}{°k \, mol}$, V_i es el volumen inicial, V_f es el volumen final y $f(V) = \frac{1}{V}$ es la función integrando.

$\boldsymbol{\tau_{3,2}}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo en una expansión reversible, reemplazamos los datos en la expresión:

$$W_{exp} = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT}{\bar{V} - b} - \frac{a}{\bar{V}^2}\right) d\bar{V}$$

donde T $(°k)$, $R = 8.314\ \frac{J}{°k\ mol}$, V_1 es el volumen inicial, V_2 es el volumen final, a y b son constantes y $f(\bar{V}) = \frac{RT}{\bar{V}-b} - \frac{a}{\bar{V}^2}$ es la función integrando, a y b son valores conocidos .

$\boldsymbol{\tau_{3,3}}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el trabajo en una expansión politrópica reversible, reemplazamos los datos en la expresión:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^n} dV$$

donde C es una constante, n es el índice politrópico, V_1 es el volumen inicial, V_2 es el volumen final y $f(V) = \frac{C}{V^n}$ es la función integrando.

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_3^p}$: Se tiene que el trabajo producido en una expansión (ver figura 109), esta dado por:

$$W = Mgh$$

Si el área del pistón es A, se tiene que la presión que actúa hacia abajo sobre el pistón es $\frac{Mg}{A} = P_{op}$, la presión que se opone al movimiento del pistón. Entonces resulta que el trabajo se expresa por:

$$W = P_{op}Ah$$

En un sistema, se realiza una cantidad infinitesimal de trabajo que se expresa por:

$$dW = P_{\text{op}}\, dV.$$

donde se tiene que P_{op} permanece constante y el volumen aumenta una cantidad infinitesimal dV. Esto quiere decir que, en un proceso finito en el cual el volumen varia de V_i a V_f, el trabajo es:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P_{op}\, dV$$

- ***Teoría***

$\mathbf{\Theta_3}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_3}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\mathbf{t_{3,1}}$ la tarea siguiente:

$\mathbf{t_{3,1}}$: Calcular el trabajo si tiene que tres moles de un gas ideal a una temperatura de $27°C$ se expanden isotérmica y reversiblemente desde 20 $litros$ hasta 60 $litros$.

Para el subtipo de tarea $\mathbf{t_{3,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\mathbf{t_{3,2}}$: Calcular el trabajo producido por $a = 5.49\ \frac{l^2 atm}{mol}$ y $b = 0.064 \frac{l}{mol}$ para una mol de gas de Van Der Waals a $27°C$ que se expanden isotérmica y reversiblemente desde 10 $litros$ a 30 $litros$.

Para el subtipo de tarea $\mathbf{t_{3,3}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\mathbf{t_{3,3}}$: Calcular el trabajo para una expansión politrópica reversible. Si un mol de gas se expande desde un volumen inicial con una temperatura de $300°C$ a un volumen final a una temperatura $200°C$ con un índice politrópico de 3.

Tipo de tarea **T_4**

- ***Tipo de tarea***

T_4: Calcular la variación de energía para la transformación de una sustancia química a volumen constante desde una temperatura inicial hasta una temperatura final, según la capacidad calorífica del sistema a volumen constante.

- ***Técnica***

τ_4: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular la variación de energía, se aplica la expresión:

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT$$

donde T_1, T_2 son las temperaturas en unidades $°K$, $C_p = \frac{a}{b} R$ y $R = 8.314 \, \frac{J}{°k \, mol}$.

- ***Tecnología***

θ_4^p: La primera ley o primer principio de termodinámica es expresado, en su forma diferencial, como:

$$dU = đQ - đW$$

La expresión indica un proceso infinitesimal, ya que solo implica variaciones infinitesimales de las coordenadas termodinámicas. Para un cambio finito de estado, se tiene que:

$$\int_i^f dU = \int_i^f đQ - \int_i^f đW$$

$$\Delta U = Q - W$$

donde $\Delta U = U_{final} - U_{inicial}$, Q es el calor y W es el trabajo que se manifiestan en el entorno inmediato por los cambios de temperatura de los cuerpos y los cambios de alturas de las masas. Para un sistema de masas fijas, se puede describir la ecuación de estado en función de V y T. Es decir, la función $U = U(T, V)$ y el cambio de energía dU están relacionados con los cambios de temperatura dT y los cambios de volumen dV mediante:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

Se tiene que:

$$dQ - P_{\text{op}}\, dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

Se debe tener en cuenta que las derivadas parciales $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ son propiedades importantes del sistema, ya que estas indican la rapidez de cambio de la energía respecto a la temperatura a volumen constante o respecto al volumen a temperatura constante. Si el volumen es constate, entonces $dV = 0$, se tiene:

$$dU = dQ_V$$

donde el subíndice V indica la restricción a volumen constante y con ella tenemos:

$$dQ_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

donde se obtiene la capacidad calorífica del sistema a volumen constante:

$$C_v \equiv \frac{dQ_V}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Como $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $dV = 0$ se obtiene:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T 0$$

$$dU = C_v dT$$

Esta ecuación representa un cambio infinitesimal del sistema, ya que si integramos desde T_1 a T_2, obtenemos un cambio finito o la variación de energía del sistema:

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT$$

- ***Teoría***

$\mathbf{\Theta_4}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_4}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_4}$: Calcular la variación de energía para la transformación de $1\,mol$ de helio a volumen constante, desde una temperatura de $25°K$ a $45°K$, si la capacidad calorífica del sistema a volumen constante es $\frac{3}{2}R$.

Tipo de tarea $\mathbf{T_5}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_5}$: Calcular el cambio de entalpía si se calienta una cierta cantidad en moles de un elemento químico desde una temperatura inicial hasta su punto de fusión bajo una presión, según la capacidad calorífica del sistema a presión constante.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_5}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entalpía, se aplica la expresión:

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, dT$$

donde T_1, T_2 son las temperaturas en unidades $°K$ y las unidades de C_p están dadas en $\frac{J}{°k \, mol}$.

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_5^p}$: En un sistema se tiene que el volumen y la presión solo dependen del estado. Del mismo modo, el producto pV también depende del estado del sistema. Entonces resulta que la función:

$$H = U + pV$$

es una combinación de variables de estado, donde H representa la entalpía del sistema. Si tomando $H_2 = U_2 + p_2V_2$ y $H_1 = U_1 - p_1V_1$ resulta:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = Q_p$$

Para un cambio infinitesimal en el estado de un sistema la ecuación anterior, se expresa por:

$$dH = đQ_p$$

Se tiene que H es una función de estado, entonces dH es un diferencial exacta. Resulta que la función $H(T, p)$ se expresa por:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

Para una transformación a presión constante, se tiene que $dp = 0$, resulta que:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT$$

de donde se obtiene:

$$đQ_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT$$

Obsérvese que, al dividir la ecuación anterior por dT, obtenemos:

$$C_p \equiv \frac{dQ_p}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

donde C_p es la capacidad calorífica del sistema a presión constante. Como $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ y $dp = 0$ se obtiene:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp = C_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T 0$$

$$dH = C_p dT$$

Esta ecuación representa un cambio infinitesimal del sistema si integramos desde T_1 a T_2 obtenemos un cambio finito o la variación de entalpía del sistema:

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, dT$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_5}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_5}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_5}$: Calcular el cambio de entalpía si se calientan 3 $moles$ de plata, desde $25°C$ hasta su punto de fusión, $961°C$, bajo una presión de 1 atm, si se tiene que la capacidad calorífica de la plata a presión constante está dado por $23.43 + 0.00628\,T$.

Tipo de tarea $\mathbf{T_6}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_6}$: Calcular el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura dada para una reacción química si se conoce el cambio de entalpía estándar de reacción a temperatura fija y el cambio de la capacidad calorífica estándar de la reacción química.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_6}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el valor de aumento de entalpía, se aplica la expresión:

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^0 \, dT$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_6^p}$: De la dependencia de calor de reacción con la temperatura, se sabe que H^0 representa la entalpía estándar y ΔH^0 representa el cambio de entalpía estándar. Para una reacción se tiene que ΔH^0 está dada por:

$$\Delta H^0 = H^0(productos) - H^0(reactivos)$$

Si queremos obtener la dependencia de esta cantidad con la temperatura, se deriva la ecuación anterior con respecto a la temperatura, es decir:

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = \frac{dH^0}{dT}(productos) - \frac{dH^0}{dT}(reactivos)$$

Se tiene que $\frac{dH^0}{dT} = C_p^0$. Entonces la ecuación anterior resulta:

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = C_p^0(productos) - C_p^0(reactivos)$$

$$\frac{d\Delta H^0}{dT} = \Delta C_p^0$$

Obsérvese que H^0 y ΔH^0 son funciones que dependen solo de la temperatura. Luego, $d\Delta H^0 = \Delta C_p^0\, dT$, integrando para una temperatura fija T_0 y cualquier otra temperatura T, se tiene:

$$\int_{T_0}^{T} \Delta H^0\, dT = \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^0\, dT$$

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p^0\, dT$$

- ***Teoría***

Θ_6: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_6}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_6}$: Calcular el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura de $125°C$ para la reacción $C(grafito) + H_2O(g) \rightarrow CO(g) + H_2(g)$, si el cambio de entalpía estándar de reacción a una temperatura fija de $298.15°K$ es de $31.3822\ Kcal$ si el cambio de la capacidad calorífica estándar de la reacción química para el grafito es 2.066; $H_2O(g)$ es 8.025; $CO(g)$ es 6.965 y $H_2(g)$ es 6.892.

Tipo de tarea **T_7**

- ***Tipo de tarea***

T_7: Calcular la variación de entropía de un elemento químico que es calentado a presión constante desde una temperatura inicial hasta una temperatura final para una transformación con capacidad calorífica específica a volumen constante.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_7}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía, se aplica la expresión:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_7^p}$: La entropía está definida por la ecuación diferencial siguiente:

$$dS = \frac{đQ_{\text{rev}}}{T}$$

se tiene que la entropía es una propiedad de estado extensiva univoca del sistema. Para obtener un cambio de estado finito (variación de entropía) que va desde el estado 1 al estado 2, se integra la ecuación anterior y se obtiene:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{đQ_{\text{rev}}}{T}$$

Se tiene que, cuando sólo se realiza trabajo, presión y volumen en una transformación reversible, la primera ley o primer principio termodinámico se convierte en:

$$đQ_{\text{rev}} = dU + p\, dV.$$

Si dividimos por T a la ecuación anterior se obtiene:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

donde se tiene que esta ecuación se relaciona la variación de entropía dS con la variación de energía dU, y la variación de volumen dV, y con la temperatura y la presión del sistema.

Obsérvese que la ecuación es una combinación de la primera y segunda ley y es la ecuación fundamental de la termodinámica.

La entropía se puede expresar en función T y V, es decir $S = S(T, V)$. El cambio de entropía dS está relacionado con los cambios de temperatura dT y los cambios de volumen dV mediante:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

Se sabe que $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$, entonces:

$$dU = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

donde se obtiene:

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{1}{T}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] dV$$

Además, se sabe que:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_v}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]$$

como $dV = 0$, se tiene:

$$dT = \frac{C_v}{T}\, dT$$

Para un cambio finito de temperatura a volumen constante, la variación de entropía es obtenida al integrar la ecuación anterior para T_1 a T_2 donde se obtiene:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT$$

- ***Teoría***

$\mathbf{\Theta_7}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_7}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_7}$**:** Calcular la variación de entropía para un mol de hidrógeno gaseoso que es calentado a presión constante desde $300°K$ hasta $500°K$ para esta transformación si la capacidad calorífica específica a volumen constante está dada por $6.9469 - 0.1999x10^{-3}\,T + 4.808x10^{-7}\,T^2\,\frac{J}{°K\,mol}$.

Tipo de tarea $\mathbf{T_8}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_8}$: Calcular el cambio de entropía de un gas ideal.

$\mathbf{GT_8}$**:** [Calcular el cambio de entropía de un gas ideal; V_1, V_2], donde V_1 es la forma de expansión del trabajo y V_2 es la ecuación de estado del gas (ley de los gases).

- ***Subtipos de tareas***

$\mathbf{t_{8,1}}$: Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Conociendo su capacidad calorífica específica a volumen constante, se sabe que se encuentra a una temperatura y a un volumen inicialmente se transforma a otra temperatura y a otro volumen.

$\mathbf{t_{8,2}}$: Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Conociendo su capacidad calorífica específica a presión constante, se sabe que se encuentra a una temperatura y a una presión inicialmente se transforma a otra temperatura y a otra presión.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_{8,1}}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y volumen, se aplica la expresión:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$\boldsymbol{\tau_{8,2}}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y la presión, se aplica la expresión:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T} dT - nR \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta^{p}_{8,1}}$: Cambios de entropía en el gas ideal en función de la temperatura y volumen.

Para los gases ideales, el comportamiento de la energía y la temperatura son variables equivalentes, es decir, $dU = C_v\, dT$. Sabemos que:

$$dS = \frac{C_v}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

Se tiene que la presión está dada por $p = \frac{nRT}{V}$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{nR}{V} dV$$

Para una variación finita de estado, es decir para el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y volumen, está dado por:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$\boldsymbol{\theta_{8,2}^{p}}$: Cambios de entropía en el gas ideal en función de la temperatura y la presión.

Se sabe que otra forma de representar la ecuación fundamental que relaciona a dS con variaciones de entalpía y presión es:

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{V}{T} dp$$

La entropía del gas ideal puede expresarse en función de la temperatura y la presión. Además, por propiedad del gas ideal, se tiene que $dH = C_p\, dT$. Entonces:

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{V}{T} dp$$

Se tiene que el volumen está dada por $V = \frac{nRT}{p}$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{nR}{p} dp$$

Para una variación finita de estado o para el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y la presión, está dado por:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T} dT - nR \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_8}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_8}$, podemos considerar como ejemplo del subtipo de tarea $\mathbf{t_{8,1}}$ la tarea siguiente:

$\mathbf{t_{8,1}}$: Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Si su capacidad calorífica específica a volumen constante es $\frac{3}{2}R$, si inicialmente a $20°C$ y a un volumen $39.35\ \frac{l}{mol}$ se transforma a una temperatura de $60°C$ a un volumen $69.22\ \frac{l}{mol}$.

Para el subtipo de tarea $\mathbf{t_{8,2}}$, se tiene la tarea siguiente:

$\mathbf{t_{8,2}}$: Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Si su capacidad calorífica específica a presión constante es $\frac{5}{2}R$, si inicialmente a $20°C$ y $1\ atm$ de presión se transforma a una temperatura de $50°C$ y a $8\ atm$ de presión.

Tipo de tarea $\mathbf{T_9}$

- ***Tipo de tarea***

$\mathbf{T_9}$: Calcular la entropía de un sólido que se encuentra a una cierta temperatura, si se tiene que su capacidad calorífica específica a presión constante.

- ***Técnica***

$\boldsymbol{\tau_9}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la Integral Definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía, se aplica la expresión:

$$S_T = \int_0^T \frac{C_p}{T}\, dT$$

- ***Tecnología***

$\boldsymbol{\theta_9^p}$: Si se considera en la transformación de un sólido a presión constante desde el cero absoluto hasta una temperatura T inferior a su temperatura de fusión, entonces la variación de entropía, de acuerdo a la ecuación (37), está dada por:

$$\Delta S = S_T - S_0 = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

$$S_T = S_0 + \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

En 1913, M. Planck sugirió que el valor de S_0 es cero para toda sustancia pura perfectamente cristalina. Es decir, la tercera ley de la termodinámica: *La entropía de una sustancia pura perfectamente cristalina es cero en el cero absoluto de temperatura.*

Por la tercera ley de la termodinámica, la ecuación anterior queda expresada por:

$$S_T = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_9}$: Fisicoquímica, la Integral Definida.

Para el caso del tipo de tarea $\mathbf{T_9}$, podemos considerar como ejemplo la tarea siguiente:

$\mathbf{t_9}$: Calcular la entropía para el zinc metálico que se encuentra a una temperatura de $1°K$, si se tiene que su capacidad calorífica específica a presión constante es $0.000172\ T^2$ en $\frac{J}{°k\ mol}$.

4.4 A modo de síntesis

Como resultado del análisis realizado, se propone una organización de las distintas tareas, técnicas y tecnologías donde se evidencia los usos de la Integral Definida asociada a la *P(DI)*, en este caso de la Ingeniería Química, específicamente de las disciplinas intermediarias *Fisicoquímica I* y *Principios de Ingeniería Química*.

Se presenta un modelo praxeológico sobre los usos de la Integral Definida (MPSUID) en relación a la pregunta generatriz: *¿Cómo aplicar la Integral Definida?* Responder a esta pregunta requiere de una organización estructurada por un conjunto de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que permitan describir y argumentar el trabajo realizado.

En la figura 111 se muestran las organizaciones que conforman el MPSUID, así como las relaciones que existen entre los distintos elementos praxeológicos identificados en el análisis anterior.

Tenemos que el tipo de tarea $\mathbf{T_1}$ está relacionada a calcular la cantidad de sustancia, para su solución necesita de la formulación de la Integral Definida, así como parte de la técnica en uno de sus pasos de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Con respecto al tipo de tarea $\mathbf{T_2}$ para su solución, necesita de la Integral Definida y de la integral impropia, es decir que en este tipo de tarea se considera la integral impropia como una generalización de la Integral Definida, como se consideró en el modelo praxeológico de referencia anterior (ver figura 86), específicamente el tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$.

En el tipo de tarea $\mathbf{T_3}$, se obtiene dos subtipos de tareas a partir del generador $\mathbf{GT_3}$, donde las técnicas $\boldsymbol{\tau_{3,1}}$ y $\boldsymbol{\tau_{3,2}}$ están argumentadas por la tecnología $\boldsymbol{\theta_3^p}$. Además, en ambas técnicas, como uno de sus pasos, se aplica la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Por otro lado, la $\mathbf{T_4}$, relacionada con la variación de energía, para su solución, necesita de la Integral Definida, de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo, como parte de la técnica, además de la tecnología $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{p}}$, que se sustenta a partir de la ecuación de estado $U = U(T,V)$, obtenida a parir de la primera ley de termodinámica en su representación matemática expresada en derivadas parciales.

El tipo de tarea $\mathbf{T_5}$, relacionada al cambio de entalpía, para su solución, necesita de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo como parte de la técnica. Su tecnología $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{5}}^{\mathbf{p}}$ se sustenta a partir de la ecuación de estado $H(T,p)$.

Respecto al tipo de tarea $\mathbf{T_6}$, relacionada con el cambio de entalpía estándar, como parte en su solución necesita de la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo, que es uno de los pasos que se considera en su técnica.

Se tiene que el tipo de tarea $\mathbf{T_7}$, relacionada con la variación de entropía, en su técnica considera, como uno de sus pasos, a la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo, además que su tecnología $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{7}}$ se sustenta a partir de la ecuación de estado $S(T,V)$ y relaciona la primera y segunda ley de la termodinámica.

El tipo de tarea $\mathbf{T_8}$, relacionada con el cambio de entropía de un gas, se obtiene dos subtipos de tareas a partir del generador $\mathbf{GT_8}$, donde la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo es uno de los pasos que se consideran en ambas $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{8,1}}$ y $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{8,2}}$.

Respecto al tipo de tarea $\mathbf{T_9}$, relacionada con la entropía de un sólido, en su técnica considera en uno de sus pasos a la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo y su tecnología $\boldsymbol{\theta_9^p}$, que se encuentra argumentada en relación con la tercera ley de la termodinámica.

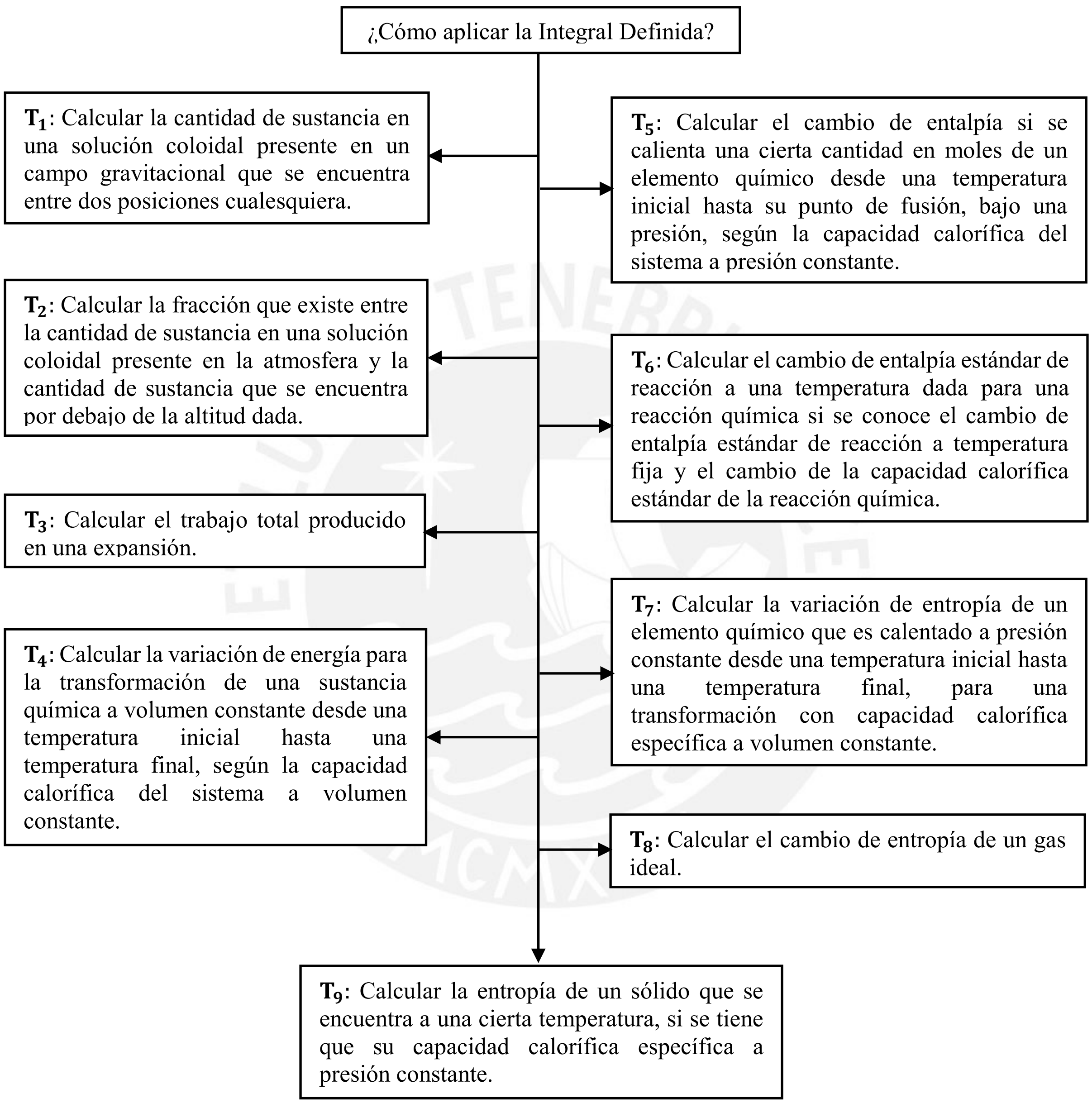


Figura 111. Modelo praxeológico sobre los usos de la Integral Definida

El análisis de los libros de textos relacionados con la especialidad de Ingeniería Química, en términos de los elementos práctico – teóricos, nos brinda un panorama de cómo se usa el concepto Integral Definida y cómo se relaciona con los conceptos de presión hidrostática en un líquido, concentración promedio en la capa de una columna de fluido en un campo gravitacional, energía cinética promedio de las moléculas de un gas, trabajo total, variación de la energía, cambio de estado a presión constante de un gas, presión osmótica, entalpía a una temperatura fija, cambio de entropía, cambio de entalpía y fuerza externa, elementos que tienen significados y que están presentes para tratar problemas en su campo de acción. Del mismo modo, estos temas son considerados en la programación curricular académica y al plan de estudios de la especialidad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

4.5 Conexiones y diferencias entre las praxeologías identificadas en las diversas organizaciones analizadas

Como resultado del análisis realizado de los libros de textos del curso de matemáticas (Matemática Superior I) de la *institución de enseñanza de matemáticas E(M)* y de los cursos de disciplinas intermediarias (Fisicoquímica I y Principios de Ingeniería Química) de la *institución de disciplinas intermediarias E(DI)*, se puede verificar que en la organización matemática (MPID) se desarrollan praxeologías centradas en la resolución de tareas que involucran aplicaciones; sin embargo, se ha identificado que el centro está en el desarrollo de las técnicas para el cálculo de integrales y la justificación de estas se fundamenta desde la institución productora de saberes matemáticas *P(M).*

Por otro lado, se tiene que el modelo praxeológico sobre los usos de la Integral Definida (MPSUID) se resuelven tareas usando modelos previamente aceptados y las matemáticas se convierten en una herramienta, como el caso de la Integral Definida.

Los MPID y MPSUID identificados sustentan el ámbito de la actividad matemática que está en juego, de tal manera que identifican las matemáticas a enseñar, específicamente aquellos temas que necesitan los estudiantes de Ingeniería Química en su formación profesional, del mismo modo que estas se relacionen y además sean de utilidad para resolver situaciones de su entorno, es decir la razón de ser.

En relación a la conexión entre ambas proaxeologías identificadas, está en considerar aquellas tareas que involucran los usos de la Integral Definida en las aplicaciones relacionadas a la Ingeniería Química, con el propósito de involucrar ambas instituciones, una como productoras de saberes matemáticos y la otra como usuaria de aquellos saberes dándole el valor de los usos y el sentido de las interpretaciones desde su entorno. En base a ello, proponemos un Modelo praxeológico a enseñar sobre la Integral Definida MPESID (figura 112).

En base a lo anterior, se propone un modelo praxeológico a enseñar sobre la Integral Definida (MPESID) para estudiantes de Ingeniería Química.

En la figura 112, se ha considerado el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$, ya que para su solución requiere de las técnicas $\boldsymbol{\tau_{3,2,1}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, que se refiere a calcular la Integral Definida. El tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$, que se refiere a calcular el área de una región plana, es importante por la razón que el estudiante de Ingeniería Química requiere para interpretar a partir del área, la representación del trabajo (trabajo de expansión, trabajo de comprensión), se tiene que $\boldsymbol{T_2}$ se relaciona con el tipo de tarea $\mathbf{T_3}$, que se refiere a calcular el trabajo total producido en una expansión y que corresponde al MPSUID.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$ es el eje fundamental, ya que es el que se relaciona con los otros tipos de tareas que se han considerado. El generador $\boldsymbol{GT_3}$ es importante, ya que permite identificar dos subtipos de tareas específicas $\boldsymbol{t_{3,1}}$ y $\boldsymbol{t_{3,2}}$, que de acuerdo al MPSUID el estudiante de Ingeniería Química requiere del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2}}$, de donde se puede obtener otros subtipos de tareas más específicas, como por ejemplo:

$\boldsymbol{t_{3,2_1}}$: (Calcular la Integral Definida de una función algebraica; V_1 es una función polinómica, V_2 es de grado (1,2,…n) y V_3 es el intervalo cerrado).

$\boldsymbol{t_{3,2_2}}$: (Calcular la Integral Definida de una función algebraica; V_1 es una función racional, V_2 es de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x) \neq q(x)$, V_3 es el grado de $p(x)$, V_4 es el grado de $q(x)$, V_5 donde el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$ y V_6 es el intervalo cerrado).

Se tiene que para la resolución de $\boldsymbol{t_{3,2_1}}$ requiere de la técnica $\boldsymbol{\tau_{3,2,1}}$ y para la resolución de $\boldsymbol{t_{3,2_2}}$ requiere de la técnica $\boldsymbol{\tau_{3,2,6}}$. Se verifica que, tanto la técnica $\boldsymbol{\tau_{3,2,1}}$ resuelven $\boldsymbol{t_{3,2}}$ y $\boldsymbol{t_{3,2_1}}$, así como la técnica $\boldsymbol{\tau_{3,2,6}}$ resuelven los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{3,2}}$ y $\boldsymbol{t_{3,2_2}}$.

Por otro lado, se tiene que los subtipos de tareas $\mathbf{t_{3,1}}$, $\mathbf{t_{3,2}}$ y $\mathbf{t_{3,3}}$, del tipo de tarea $\mathbf{T_3}$, el tipo de tarea $\mathbf{T_7}$ y los subtipos de tareas $\mathbf{t_{8,1}}$ y $\mathbf{t_{8,2}}$ del tipo de tarea $\mathbf{T_8}$ del MPSUID se relacionan con el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2_2}}$, del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$.

Los tipos de tareas $\mathbf{T_4}$, $\mathbf{T_5}$ y $\mathbf{T_6}$ del MPSUID se relacionan con el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2_1}}$ del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, que se refiere a calcular el área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas, es importante por la razón que el estudiante de Ingeniería Química requiere para interpretar a partir del área la representación del ciclo de trabajo se tiene que el generador $\boldsymbol{GT_4}$ clasifica los subtipos de tareas, específicamente los estudiantes de Ingeniería Química requieren de los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{4,1}}$ y $\boldsymbol{t_{4,3}}$.

Respecto al tipo de tarea $\boldsymbol{T_8}$, que se refiere a calcular el centroide de la región plana y que se relaciona con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, se debe considerar para relacionarla con la distribución de partículas en una solución coloidal, específicamente con la concentración promedio (ver figura 89). Asimismo, se debe considerar el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$ que se relaciona con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, además en la concentración promedio se requiere del volumen.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$, relacionada con calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión, se relaciona con el subtipo de tarea $\mathbf{t_{3,1}}$ del tipo de tarea $\mathbf{T_3}$ del MPSUID.

Se tiene el tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$, relacionado con calcular la integral impropia, es considerada como una generalización de la tarea $\boldsymbol{T_3}$**,** donde la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,4}}$ es parte para las técnicas de los tipos de tareas generadas por $\boldsymbol{GT_{10}}$. Este tipo de tarea se relaciona con el tipo de tarea $\mathbf{T_2}$ del MPSUID, donde los estudiantes de Ingeniería Química necesitan para solucionar situaciones en su campo de acción.

Se ha presentado el MPESID, donde los tipos de tareas se relacionan y para su resolución usan técnicas, las cuales se justifican por tecnologías propias de la *P(M)*. Asimismo, este MPESID es llevado a la *E(DI)*, en donde se les realiza ciertas transformaciones con la finalidad de atender sus actividades en su entorno profesional, de acuerdo a las necesidades de las instituciones usuarias.

Por otro lado, se tiene que las instituciones usuarias (estudiantes de Ingeniería Química) deben conocer el origen de las praxeologías, las cuales son de utilidad en su entorno profesional. Si bien es cierto que estas cambian de una institución a otra con el propósito de hacer sus propias interpretaciones de los comportamientos de fenómenos que estudian, donde estos son formulados a partir de la modelación matemática que requieren para ser estudiados, propios de su entorno profesional. A partir de ello surgen nuevas praxeologías, que son fundamentadas a partir de los resultados que obtienen, porque funcionan.

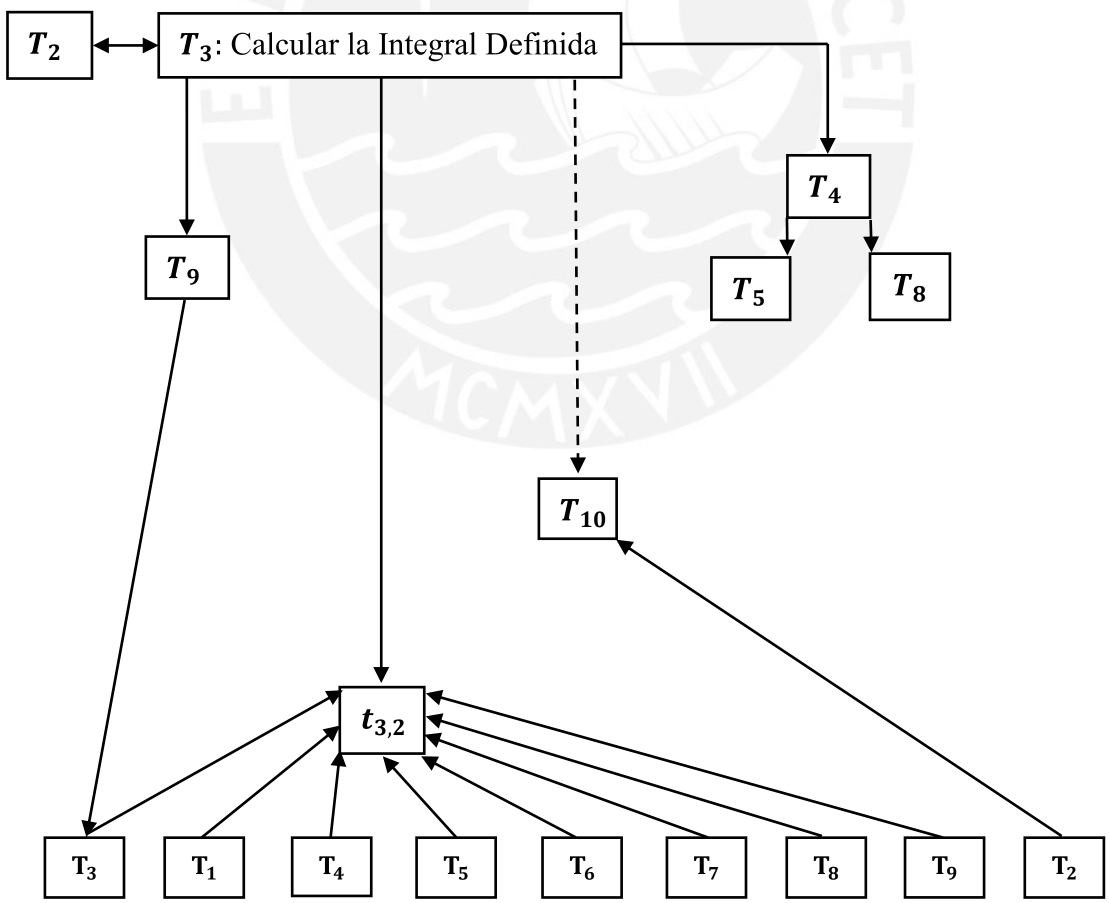


Figura 112. Modelo praxeológico a enseñar sobre la Integral Definida

Por otro lado, se tiene que en el MPESID aún falta considerar tipos de tareas específicos para que los estudiantes encuentren una conexión directa con los cursos de las disciplinas intermediarias. En este sentido, Castela (2017) señala al respecto sobre qué praxeologías matemáticas son útiles para tales dominios de ingeniería o profesionales; qué necesidades serían satisfechas y qué discurso hace que la técnica matemática sea inteligible, de tal manera, que los estudiantes de Ingeniería Química consideren y valoren la utilidad que tiene la Integral Definida para resolver los tipos de tareas que se proponen respecto a su entorno profesional, viendo de esta manera el por qué y para qué estudian la Integral Definida.

CAPÍTULO V

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo, presentaremos las consideraciones finales sobre los modelos praxeológicos identificados en ambas instituciones respecto a la Integral Definida, así como las limitaciones y perspectivas a futuro.

Consideraciones finales

Con respecto al objetivo de la investigación de describir y analizar las praxeologías propuestas para la enseñanza de la Integral Definida en los cursos de formación para estudiantes de Ingeniería Química, se obtuvo que, en el análisis realizado de los libros de textos del curso de matemáticas (*Matemática Superior I*) de la institución de enseñanza de matemáticas (*E(M))*, se desarrollan praxeologías centradas en la resolución de tipos de tareas propias de la *E(M)*, como también consideran tipos de tareas que involucran aplicaciones: esto es su razón de ser.

Además, se ha identificado que el centro está en el desarrollo de las técnicas para el cálculo de integrales, sin dejar de lado que las justificaciones (tecnologías) de estas se fundamenta desde las *P(M)* y en el análisis de los cursos de disciplinas intermediarias (*Fisicoquímica I* y *Principios de Ingeniería Química*) de la *E(DI)* se desarrollan praxeologías que necesitan de las praxeologías dadas en la *E(M)*, realizándoles ciertas transformaciones con la finalidad de atender sus actividades propias de su entorno profesional. Esto es la Integral Definida se usa como una herramienta para solucionar tareas propias de su entorno profesional, su razón de ser.

Los tipos de tareas que se consideran requieren, para su resolución, de técnicas de los tipos de tareas de las praxeologías dadas en la *E(M)*, pero que son usadas como herramientas de solución. Los elementos teóricos brindados por la TAD, específicamente la noción de praxeología como los propuestos por Chevallard (1999); Castela y Romo (2019); Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019), permitieron identificar las praxeologías en ambas instituciones de enseñanza.

En relación a lo que se refiere a los elementos teóricos, como el generador de un tipo de tareas $\boldsymbol{GT}$, permitieron identificar subtipos de tareas, de tal manera que estas sean explicitas y se lograron a partir de las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$. Se tiene que estos elementos permiten relacionar entre lo específico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

El elemento teórico $\boldsymbol{\theta^p}$, que se refiere a las tecnologías prácticas, fue utilizado para argumentar las técnicas que se usan en la resolución de los tipos de tareas que se consideran en las praxeologías de la *E(DI)* y estas son obtenidas en la institución usuaria, a partir de su campo de acción o desde prácticas basadas en los usos continuos que realizan, esto es, de la experiencia.

Respecto a los procedimientos metodológicos considerados, fue fundamental consultar e entrevistar a los especialistas (ingenieros químicos) con la finalidad de obtener información sobre los usos de la Integral Definida en su campo de acción, así como también saber qué técnicas aplican para la resolución de los tipos de tareas que se proponen y qué tecnologías

($\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{p}}$) justifican a esas técnicas si son propias de su disciplina o de alguna otra. Esto nos permitió realizar la selección de los libros de textos para analizar e identificar las organizaciones praxeológicas propuestas.

Como consecuencia de los pre requisitos que se consideran para la asignatura de *Fisicoquímica I*, se consultó con especialistas que dictan los cursos de Física (físicos de profesión), quienes señalaron que usan la Integral Definida como una herramienta y que necesitan de modelos matemáticos para hacer sus interpretaciones de los fenómenos termodinámicos y que son validados en su campo de acción, de acuerdo a los resultados que quieren obtener. Esta información brindada por los expertos sirvió para poder identificar las tecnologías ($\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{p}}$) que justifican a las técnicas que utilizan en la resolución de los tipos de tareas.

Como resultado del análisis realizado de los libros de textos del curso de matemáticas (*Matemática Superior I*) de la *E(M)* y de los cursos de disciplinas intermediarias (*Fisicoquímica I* y *Principios de Ingeniería Química*) de la *E(DI)*, se han identificado dos praxeologías en ambas instituciones de enseñanza, el modelo praxeológico de la Integral Definida (MPID) y el modelo praxeológico sobre los usos de la Integral Definida (MPSUID). En ellos, se pueden identificar los tipos de tareas donde consideran a la Integral Definida desde la noción de área, así como sus diferentes usos para realizar diferentes interpretaciones, según el contexto que se quiera analizar, es decir, su razón de ser.

Se ha identificado que la Integral Definida se relaciona con los conceptos de área de una región plana, volumen de un sólido de revolución, área de una superficie, longitud de curva, centro de masa, trabajo efectuado por una fuerza y cómo una generalización se considera a la integral impropia. También la Integral Definida se relaciona con los conceptos de presión hidrostática en un líquido, concentración promedio en la capa de una columna de fluido en un campo gravitacional, energía cinética promedio de las moléculas de un gas, trabajo total, variación de la energía, cambio de estado a presión constante de un gas, presión osmótica, entalpía a una temperatura fija, cambio de entropía, cambio de entalpía y fuerza externa. Verificándose de esta manera los contenidos matemáticos, específicamente la Integral Definida y sus usos en diferentes contextos se enseñan en los estudios de Ingeniería Química.

Asimismo, se ha identificado que el concepto de Integral Definida no solo se centra en la interpretación de área, por tal motivo se sugiere que en la formación de ingenieros se deben considerar tipos de tareas basadas desde sus propias representaciones, interpretaciones y justificadas desde las instituciones productoras de saberes de Ingeniería *P(DI).*

Si bien se han identificado muchos trabajos con foco en la comprensión de la Integral Definida, entendiéndola como área, no se ha encontrado un cuestionamiento de la de razón de ser de la Integral Definida, la organización de los libros de textos, entre otros, si siempre se usa como área.

En los trabajos desde la TAD, esto sí se cuestiona, tanto desde la matemática como desde los usos que se le dan en otras disciplinas intermediarias y en los trabajos previos desde la TAD es esto en que se enfatiza, tal como se verifica en el trabajo realizado y del mismo modo que se confirma la necesidad de definir un contexto determinado como el de la Ingeniería Química.

A partir de los MPID y MPSUID identificados, estos sustentan el ámbito de la actividad matemática que está en juego, de tal manera que se identifica las matemáticas a enseñar, específicamente aquellos temas en donde se debe poner mayor énfasis, ya que son fundamentales e importantes para los estudiantes de Ingeniería Química en su formación profesional.

Asimismo, los tipos de tareas considerados en el MPID se relacionan con los tipos de tareas del MPSUID a través de ciertas técnicas. En base a esto, se propone el MPESID para estudiantes de Ingeniería Química, pero aún falta considerar tipos de tareas específicos donde los estudiantes encuentren una conexión directa con los cursos de las disciplinas intermediarias.

En este sentido, Castela (2017) señala al respecto sobre qué praxeologías matemáticas son útiles para tales dominios de ingeniería o profesionales; qué necesidades serían satisfechas y qué discurso hace que la técnica matemática sea inteligible. Es decir, para que los estudiantes de Ingeniería Química consideren y valoren la utilidad que tiene la Integral Definida para resolver los tipos de tareas que se presentan en su entorno profesional, viendo de esta manera el por qué y para qué estudian la Integral Definida.

Nuestro estudio se ha centrado en identificar y analizar las praxeologías sobre la Integral Definida en los cursos de formación para estudiantes de Ingeniería Química, específicamente para los libros de textos del curso de *Matemática Superior I* de la *E(M)* y para libros de textos de los cursos de disciplinas intermediarias (*Fisicoquímica I* y *Principios de Ingeniería Química*) de la *E(DI)*. Con la finalidad de relacionar las praxeologías identificadas a fin de sugerir la matemática que se debe enseñar a los estudiantes de Ingeniería Química en su formación profesional.

Cabe señalar que la asignatura de *Matemática Superior I* es pre requisito para la asignatura de *Física I* y este es pre requisito para la asignatura de *Física II* y a la vez es pre requisito para la asignatura de *Fisicoquímica I*, de acuerdo a la malla curricular de la carrera de Ingeniería Química, donde se observa que los cursos de disciplinas intermediarias (*Física I* y *II*) de la *E(DI)* se relacionan con los cursos de matemática y los cursos de la carrera, pero por limitaciones de tiempo no se ha podido concretar ese análisis, quedando abierta la posibilidad que para futuros trabajos se realice el análisis de los libros de textos de los cursos de Física.

Referencias

Andersen, K. (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences, 31*(4), 291-367.

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo Conceptual de la Integral y la Medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* (Tesis inédita doctoral). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.

Boyer, K. (1968). *A History of Mathematics.* Wiley International Edition.

Burton, D. (2007). *The History of Mathematics: An Introduction (Sixth Edition).* McGraw - Hill Companies.

Cabañas, M. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* (Tesis inédita doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa, México DF.

Castela, C. y Romo-Vázquez, A. (2011). Des Mathématiques A L'Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(1), 79-130.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29.

Castela, C. (2017). When praxeologies move from an institution to another: an epistemological approach to boundary crossing. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H. Rück, *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline Conference Proceedings* (pp. 418-425). Kassel.

Castellan, G. (1998). *Fisicoquímica (2a ed.).* México: Addison-Wesley.

Chaachoua , H., & Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa (EMP), 21*(4), 234-247.

Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A., & Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. In M. Bosch, Y. Chevallard , J. Garcia, & J. Monaghan, *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook.* In press.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. In L. Ruiz, A. Estepa, & L. García, *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de Estudio del Cálculo Integral en la Formación de Profesores de Matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* . (Tesis inédita doctoral). Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, España.

Dahan-Dalmedico, A., & Peiffer , J. (1986). *Une histoire des mathématiques.* Paris: Éditions du Seuil.

De Oliveira, G. (2016). Contribuições dos Métodos de John Wallis em sua Obra Arithmetica Infinitorum para Professores de Matemática. *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, 1 - 12.

Edwards, C. (1982). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag.

Edwards, H., & Penney, D. (2008). *Cálculo con transcendentes tempranas.* México: Pearson Prentice Hall.

Estruch, V., Boigues, F., & Llinares, S. (2010). El papel de sistemas de cálculo formal en la comprensión de las matemáticas: el caso de la integral definida. *Modelling in Science Education and Learning (MSEL), 3*(1), 3-16.

Felder, R., & Rousseau, R. (2003). *Principios Elementales de los Procesos Químicos.* México: Limusa Wiley.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(2), 203-231.

González-Martín, A., & Hernandes , G. (2017). How are Calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. In T. Dooley , & G. Gueudet, *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 2073–2080). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

González-Martín, A., & Hernandes, G. (2019). How engineers use integrals: The cases of Mechanics of Materials and Electromagnetism. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien , & P. Vale, *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 280-287). Pretoria, South Africa: PME.

Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* New York: Dover Publications, Inc.

Heath, T. (1897). *The Works of Archimedes.* Cambridge University Press.

Heath, T. (1912). *The Method of Archimedes: A supplement to the Works of Archimedes 1897.* Cambridge University Press.

Horsley, S. (1779). *Isaaci Newtoni: Opera Quae Exstant Omnia. Recuperado de: https://archive.org/details/b3041202x/page/280.*

Kallio, B. (1966). *A history of the definite integral.* University of British Columbia. Department of Mathematics, Vancouver.

Knobloch, E. (2015). Analyticité, équipollence et théorie des courbes chez Leibniz. In N. Goethe, P. Beeley, & D. Rabouin , *G. W. Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy* (pp. 89-110). Dordrecht: Springer.

Larson, R., & Edward, B. (2010). *Cálculo 1 (9a ed.).* México: Mc Graw-Hill.

Lombardo, L. (1966). *Geometria Degli Indivisibili di Bonaventura Cavalieri.* Unione Tipografico - Editrice Torinese.

Mahoney, M. (1994). *The Mathematical Career of Pierre De Fermat 1601 - 1665.* (Second, Ed.) Princeton University Press.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones Institucionales en las Matemáticas de 2° de Bachillerato en Cuanto al Significado del Objeto Integral Definida.* (Tesis inédita doctoral). Universidad de Jaén.

Otero, M., & Corica, A. (2013). Diseño de un modelo proxeológico de referencia para el análisis de prácticas universitarias sobre cálculo. In M. Otero, A. Corica, M. Fanaro,

V. LLanos, P. Sureda, & V. Parra, *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática* (pp. 85-100). Buenos Aires: BUNKEN.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Pearson Prentice Hall.

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 314-338.

Stedall, J. (2004). *The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656.* New York: Springer Science+Business Media.

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History (Third Edition).* New York: Springer.

Trigueros, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. *Centre de Recerca Matemàtica, CRM , 10*, 77-116.

Turégano, P. (1994). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Weber , H., & Dedekind , R. (1876). *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* Königsberg: LEIPZIG DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

Whiteside, D. (1968). *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (Vol. VIII). Cambridge University Press.