PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ESTUDIO DE LA ELIPSE BASADA EN ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA CON ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN

ASESOR:

DRA. VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

Junio, 2020

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la manera en que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad didáctica que requiera el uso de registros de representación semiótica. La investigación se lleva a cabo en una universidad privada de Lima con estudiantes del primer ciclo de la carrera de Arquitectura, cuyas edades oscilan entre los 16 y 18 años. Los sujetos de estudio, mediante una serie de preguntas, deben movilizar sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación de lengua natural, algebraico y gráfico. En relación a eso, se plantea responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse al resolver una actividad didáctica que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico? Para ello, se proponen como objetivos específicos: Identificar y describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes utilizan cuando resuelven una actividad didáctica sobre la Elipse. Por otro lado, justificamos la presente investigación debido a la importancia que tiene el estudio de la Elipse para estudiantes de la carrera de Arquitectura en su formación académica y profesional. Para sustentar nuestra investigación, tomamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, en lo que se refiere a tratamientos y conversiones. También, debido a que parte del enfoque de nuestra investigación es describir comportamientos, opiniones, actitudes e interacciones del estudiante cuando resuelve una actividad didáctica, consideramos, como metodología, la investigación cualitativa. Con respecto a los resultados, muestran que los estudiantes logran movilizar sus conocimientos referentes a la Elipse haciendo uso de los registros de Representación Semiótica, lo cual permite entender que se apropiaron de la noción de Elipse en sus diferentes representaciones. Finalmente, una de las recomendaciones de este trabajo de investigación es la de realizar estudios de textos universitarios en nuestro país para mejorar la enseñanza de la Elipse y las cónicas en general, ya que este tema es visto en los primeros ciclos de la mayoría de carreras universitarias.

Palabras clave: Teoría de registros; Investigación Cualitativa; Elipse.

ABSTRACT

The present work aims to analyze the way in which the students of the Architecture career mobilize the notion of Ellipse, when they solve a didactic activity that requires the use of registers of semiotic representation. The research is carried out at a private university in Lima with students from the first cycle of the Architecture career, whose ages range from 16 to 18 years. The subjects of study by means of a series of questions must mobilize their knowledge about the elements of the ellipse making use of the registers of representation of natural, algebraic and graphic language. In relation to this, it is proposed to answer the following research question: How do students from the Architecture career mobilize the notion of Ellipse, when solving a didactic activity that requires the use of natural, algebraic and graphic language registers? For this, the following specific objectives are proposed: Identify and describe the treatments and conversions that students use when they solve a didactic activity on the Ellipse. On the other hand, we justify this research due to the importance of the study of the Ellipse for students of the Architecture career in their academic and professional training. To support our research we take aspects of the Theory of Records of Semiotic Representation, in what refers to treatments and conversions. Also, because part of the focus of our research is to describe student behaviors, opinions, attitudes and interactions when solving a didactic activity, we consider qualitative research as a methodology. With respect to the results, they show that the students manage to mobilize their knowledge regarding the Ellipse using the Semiotic Representation registers, which allows us to understand that they appropriated the notion of ellipse in their different representations. Finally, one of the recommendations of this research work is to carry out university text studies in our country to improve the teaching of the ellipse and conics in general, since this topic is seen in the first cycles of most careers. university.

Keywords: Theory of records; Qualitative research; Ellipse.

Dedicatoria

A mi querida madre, Tomasa, por su amor y sacrificio en bien de sus hijos.

A mi hermano, Andy, por su afecto y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por guiar mis pasos en este trabajo que presento como tesis y por permitirme este logro en mi vida profesional.

A mi asesora, Dra. Verónica Neira Fernández, por su tiempo, paciencia, enseñanzas sugerencias y apoyo permanente durante el desarrollo de la investigación.

A los miembros del jurado, por sus aportes y oportunas sugerencias realizadas en la elaboración de la presente tesis.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus enseñanzas y exigencia en estos años de estudio.

A mis compañeros de clase, por sus consejos y motivación en los trabajos realizados durante las clases impartidas.

A los estudiantes participantes en el presente trabajo, que en todo momento mostraron su apoyo e interés en la actividad realizada.

A mis familiares, por sus ánimos y estar siempre pendientes de mí.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación se centra en analizar cómo estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

El interés radica en que, en nuestra experiencia como docente del curso de Matemática Básica para Arquitectura y en investigaciones de referencia de este trabajo, se observa que algunos estudiantes presentan dificultades en el proceso de aprendizaje de la cónica Elipse, esto debido a que en su estudio se privilegia el uso de representaciones algebraicas, dejando de lado otras representaciones importantes, como la gráfica y de lengua natural, que además de ser importantes en el estudio de la Elipse lo son también en su formación, ya que los profesionales de la carrera mencionada se caracterizan por diseñar y conceptualizar estructuras y espacios para la vida.

Se estima que esta situación se debe al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Elipse en las instituciones superiores, ocasionando así que, por ejemplo, no se comprendan los conceptos geométricos relacionados a nuestro objeto matemático. Además, gran parte de libros que tienen en su contenido el estudio de la Elipse priorizan problemas que en muchos casos solo buscan que el estudiante logre manipular ecuaciones y realizar operaciones algorítmicas correspondientes a la Elipse.

A continuación, se presenta la estructura de la tesis, la cual está conformada por cuatro capítulos que se describen inmediatamente.

En el primer capítulo, presentaremos una revisión de trabajos de investigación que tengan objetivos similares, que pertenezcan al grado superior y que tengan como marco teórico la teoría de Registros de Representación, los cuales nos servirán de insumo para nuestro estudio de la Elipse. Además, mostraremos la justificación de nuestro trabajo, así como la pregunta y objetivos que guían nuestra investigación.

En el segundo capítulo, presentaremos un estudio de los principales aspectos matemáticos, históricos, didácticos y epistemológicos de la Elipse, así como los aspectos del tema a investigar en los libros didácticos. En cuanto a los aspectos históricos, mostraremos cómo la resolución del problema de la duplicación del cubo origina, entre otros lugares geométricos, a las cónicas y que además es Menecmo el primero en presentar a las cónicas como curvas obtenidas al realizar cortes a un cono. Respecto a los aspectos didácticos, presentaremos cómo son los problemas relacionados a la Elipse en libros usados en el nivel superior.

El tercer capítulo está compuesto sobre el marco teórico, tomando aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y detallaremos la metodología, que es de corte cualitativo. También mostraremos los procedimientos metodológicos presentes en la investigación.

En el cuarto y último capítulo, presentaremos el análisis de los datos. Esto comprende describir a los sujetos de investigación, así como el análisis de la actividad elaborada que consta de cuatro preguntas.

Finalmente, presentaremos las consideraciones finales y los criterios para futuras investigaciones relacionadas con el objeto matemático Elipse.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentaremos las investigaciones relacionadas con la Elipse, publicaciones cuyo marco teórico es la teoría de Registros de Representación Semiótica, así como los estudios relacionados del objeto matemático en el nivel superior. Además, presentaremos la justificación de nuestro estudio, la pregunta y los objetivos de investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

El interés de esta investigación es analizar cómo estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad didáctica que requiera el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico. En ese sentido, se analizan investigaciones ligadas a: concepciones y dificultades que muestran los estudiantes sobre la Elipse, publicaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la Elipse en el nivel superior y aportes de la teoría de Registros de Representación Semiótica al estudio de la Elipse.

Con respecto a investigaciones relacionadas con las dificultades y concepciones sobre la Elipse, Santa y Jaramillo (2014) identifican las dificultades que presentan una amplia población de estudiantes de los últimos años de secundaria y de los primeros ciclos universitarios para comprender el concepto de la Elipse como lugar geométrico, ya que se prioriza el aspecto algebraico. En este sentido, centran su trabajo en el estudio del proceso de comprensión del concepto de Elipse, como lugar geométrico, de cinco estudiantes de una institución pública en Colombia.

Santa y Jaramillo (2014) plantean como objetivo analizar el proceso de comprensión de la Elipse como lugar geométrico por medio de la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo de Van Hiele, apoyándose en el uso de la entrevista de carácter socrático. En este trabajo, la metodología de investigación es de corte cualitativo.

Con respecto a la parte experimental, la publicación presenta el análisis del proceso de aprehensión de uno de los estudiantes, considerando las siguientes fuentes de información: respuestas verbales en la entrevista socrática; la elaboración de materiales de apoyo por parte del estudiante en entrevistas grupales y; las respuestas escritas en el cuestionario abierto que se realizó sobre los saberes previos de Geometría necesarios para la apropiación del concepto de la Elipse como lugar geométrico.

Con respecto a la entrevista dada durante la investigación, está conformada por 31 preguntas las cuales tienen un carácter espiral, ya que para avanzar a las siguientes interrogantes se necesitaba retomar los conceptos que se obtuvieron en las respuestas dadas por el sujeto de investigación.

En la primera pregunta, se presenta una hoja de papel con dos puntos dibujados y tiene como interrogante: ¿Cuántos dobleces crees que pasan por dichos puntos? En la pregunta 2, establece la siguiente interrogante: ¿Cómo determinas el punto medio del segmento trazado en la hoja?, ya que esto se relaciona con la respuesta que se obtuvo por parte del estudiante en la primera pregunta. Finalmente, en la tercera pregunta, busca identificar la relación entre el doblez hecho en la pregunta 2 y el segmento que une los puntos dados en la pregunta 1.

De esta manera, cada pregunta se relaciona con la anterior hasta lograr que el estudiante observe en la hoja dada que es posible afirmar que cada punto que pertenece a la figura que se creó en toda la entrevista cumple la condición de que la suma de sus distancias, a los puntos dados inicialmente, es una constante. Esto es la definición geométrica de la Elipse.

En cuanto a las conclusiones, Santa y Jaramillo (2014) destacan la consolidación de los descriptores de niveles de Van Hiele, ya que esto les permitió a los estudiantes avanzar en su nivel de razonamiento y reflexionar acerca de sus respuestas para poder comprender la propiedad geométrica de la Elipse.

En el nivel cero, el pre descriptivo, el estudiante reconoce algunas nociones de la Geometría euclidiana, la congruencia de segmentos y visualiza la suma de segmentos mediante el doblado de papel. En el primer nivel, de reconocimiento visual, el sujeto de investigación realiza la construcción de una circunferencia y luego la de una Elipse, pero no menciona las propiedades que la caracterizan.

En el segundo nivel, el de análisis, el estudiante, después de ciertos aportes y diversas preguntas intencionadas, logra reconocer que se forma una Elipse llevando cualquier punto de la circunferencia dada hacia un punto interior de la misma. En el tercer nivel, de razonamiento geométrico, el sujeto de investigación afirma que la Elipse es un lugar geométrico, porque todos sus puntos cumplen una condición especial.

También, los investigadores, destacan el rol importante que cumple el lenguaje en la entrevista y en el desarrollo de la actividad, en el sentido que se destaca la forma en cómo los estudiantes se manifestaban ante ciertas preguntas, sus gestos, sus conductas, entre otros. En ese sentido, para el desarrollo y análisis de la actividad de nuestra investigación, se tendrán en cuenta las dificultades y comportamientos mostrados por los estudiantes en la entrevista socrática.

Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014) realizan una investigación con 10 estudiantes de un establecimiento educacional particular subvencionado en Chile, cuyas edades están entre 15-17 años. La problemática del estudio se da porque los estudiantes no consiguen una comprensión profunda de la noción de Elipse, puesto que el programa de estudio nacional espera que los estudiantes puedan reconocerla a partir de las ecuaciones cartesianas que la caracterizan, dejando de lado la condición geométrica.

Los autores consideran que este enfoque promueve la pérdida de su definición como lugar geométrico y plantean, como objetivo general de su investigación, diseñar una propuesta didáctica que favorezca el tránsito entre los diferentes modos de comprenderlas, en concreto, como lugar geométrico, como un conjunto de puntos cuyas coordenadas cumplen una ecuación y como figuras que las representan, utilizando como sistema de referencia el plano en la Geometría del taxista (debido a que la distancia definida en esta geometría favorece la comprensión de la Elipse como lugar geométrico) y como marco teórico los modos de pensamiento planteados por Anna Sierpinska (citado por Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014).

El marco teórico de los modos de pensamiento se especifica tres formas de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-estructural (AE) y analítico-aritmético (AA). Para esta teoría, comprender un objeto matemático significa que los estudiantes transiten entre los diversos modos de comprenderla: pensamiento SG (figuras que la representan), AE (lugar geométrico) y AA (puntos cuyas coordenadas cumplen una ecuación). Por otro lado, el marco metodológico es un estudio de caso, el cual permite analizar el comportamiento de los estudiantes cuando transitan entre los diferentes modos de pensamiento.

En relación con las actividades diseñadas, estas fueron tres y estuvieron orientadas a promover la interacción entre los modos de pensamiento para lograr la comprensión de la cónica Elipse.

La primera actividad tiene dos fines, primero familiarizar a los estudiantes con la Geometría del taxista y segundo plantear una secuencia de preguntas que hacen transitar a los sujetos de investigación entre los modos AE-SG y SG-AE.

La segunda actividad presenta algunas representaciones de la Elipse con centro distinto al origen de coordenadas con el objetivo de que los estudiantes transiten entre los tres modos de pensamiento en el plano cartesiano.

Finalmente, la tercera actividad tiene como objetivo el tránsito de la representación de la Elipse en el plano al espacio y además se plantean dos preguntas para observar cómo los estudiantes recurren al pensamiento AE.

Consideramos importante el aporte del trabajo de Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014) en nuestra investigación, ya que se toma en cuenta cómo los estudiantes movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad que requiere el tránsito entre los diferentes modos de pensamiento. Es decir, como lugar geométrico, como un conjunto de puntos cuyas coordenadas cumplen una ecuación y como figuras que las representan.

La investigación de Flores & Gómez (2013) destaca los obstáculos que tienen los estudiantes de bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) en el aprendizaje del concepto cónicas cuando se trabaja de forma tradicional, que es la forma algebraica. El trabajo tiene como pregunta de investigación: ¿Cuál es el grado de comprensión de la Elipse en estudiantes cuando utilizan la modelación matemática en un ambiente de Geometría dinámica? En respuesta a esta pregunta, se traza como objetivo mostrar cómo se puede utilizar la modelación matemática en el estudio de las cónicas, en particular de la Elipse, con la ayuda del Software de Geometría dinámica Geometer Sketch Pad (GSP).

Los investigadores definen modelación matemática como el proceso de elaborar un modelo matemático, que puede ser una función, una ecuación, una desigualdad, una tabla, entre otros, que ayude a estudiar una situación real o fenómeno (que puede ser natural o social). El proceso de modelación matemática cuenta con las siguientes fases: reconocer el fenómeno a estudiar; convertir los aspectos que nos interesan del fenómeno en un problema a resolver; definir variables y matematizar el problema; establecer un modelo matemático; verificar si el modelo cumple las condiciones del problema matematizado y; si el modelo cumple las condiciones, se pasa a la siguiente fase que es interpretar el modelo con respecto al fenómeno problematizado. Si la interpretación es acorde con el fenómeno, se pasa a la última fase, que es la obtención del modelo matemático definitivo.

Ahora bien, en cuanto al diseño de las actividades, estas son elaboradas siguiendo las fases de la modelación matemática y reportan cómo el programa geométrico Geometer Sketch Pad (GSP) les permite a los estudiantes apropiarse del concepto de Elipse. Esto último se observa en la actividad 4, la cual brinda información de la Capilla de los Susurros y establece como pregunta dónde deberían ubicarse dos personas para que pueden hablar en secreto sin la necesidad de bajar la voz. Esta pregunta generó la atención de los estudiantes y, mediante la ayuda del Software GSP, se comprobó que dicha ubicación se debe dar en los focos de la Elipse que modela la Capilla de los Susurros.

Finalmente, el aporte de la investigación se da en nuestra actividad en el sentido de que se estudiará una situación real, como lo es la forma elíptica del Banco Comercial de Mauricio, y además de tener información de una aplicación de la Arquitectura en la vida real para justificar nuestro estudio.

Con respecto a investigaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la Elipse en el nivel superior, la investigación de Fernández (2011) muestra la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas en el nivel universitario. En ese sentido, el autor propone el diseño de una secuencia de situaciones didácticas que buscan restablecer la condición geométrica de las cónicas sin desligarse del enfoque tradicional.

Esta investigación tiene por objetivo identificar y estudiar algunos fenómenos didácticos, como por ejemplo el efecto Topaze y el efecto Jourdain, que surgen cuando estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de una Universidad de Colombia usan el Software Cabri Geometre II Plus para realizar construcciones geométricas de las cónicas, desde lo puntual a lo global.

El investigador utiliza, como metodología de investigación, aspectos de la Ingeniería didáctica y toma, como marco teórico, la teoría de Situaciones Didácticas como referente para el diseño de sus actividades, ya que permite estudiar y comparar los fenómenos didácticos que se dan cuando un estudiante obtiene un conocimiento sin la participación directa de un profesor.

Acerca de la parte experimental, el investigador elabora dos secuencias didácticas con un total de ocho actividades, las cuales permitieron a los estudiantes realizar construcciones punto por punto de cada una de las curvas y luego, mediante el Software Cabri Geometre II Plus, realizar construcciones geométricas donde se usa la figura completa, obteniendo de esta manera la representación algebraica de las cónicas.

En las conclusiones de la investigación, el autor destaca el uso de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las cónicas, ya que estas permiten al estudiante ser los protagonistas en la construcción de sus conocimientos.

Finalmente, Fernández (2011) resalta la importancia del diseño de secuencias didácticas que busquen despertar las percepciones de los estudiantes y que permitan estudiar y comparar fenómenos didácticos que se producen en un aula. Dichos fenómenos serán tomados en cuenta en el diseño de nuestra actividad para poder evitarlos mientras sea posible.

Por otro lado, el trabajo de León (2014), realizado con estudiantes del primer ciclo de las carreras de Arquitectura y Administración de Proyectos de una universidad privada en Lima, tiene como objetivo favorecer la instrumentalización de la Elipse, mediante una secuencia de actividades en el que hacen uso del software Geogebra. De esta manera, el autor destaca la importancia de utilizar Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), ya que permiten realizar representaciones geométricas de los objetos matemáticos e ir descubriendo conceptos de una manera dinámica.

El marco teórico es el Enfoque Instrumental, pues las actividades propuestas permitieron la aparición y enriquecimiento de las propiedades de la Elipse influenciado por el Geogebra. En cuanto a la metodología, se toman aspectos de la Ingeniería didáctica, principalmente el análisis cognitivo y didáctico, así como la confrontación de los análisis a priori y a posteriori.

En la parte experimental, después de realizar una prueba de diagnóstico, el autor elabora 15 actividades: cinco vinculadas al estudio de herramientas del Geogebra, cinco vinculadas al reconocimiento de la Elipse como lugar geométrico y cinco relacionadas a la representación de la Elipse en los ejes coordenados.

León (2014), en los resultados de su investigación, señala que el diseño de las actividades permite a los estudiantes proponer y ratificar sus respuestas mediante el uso del Software Geogebra, de esta forma se logra el enriquecimiento progresivo de las propiedades del objeto Elipse. Además, el autor destaca la importancia de señalar los esquemas de uso que los estudiantes movilizaron cuando realizaron construcciones geométricas, pues estos esquemas contribuyeron al desarrollo de las actividades.

Finalmente, el autor propone realizar investigaciones en donde la Elipse sea aplicada como instrumento en diversos campos de estudio, por ejemplo, en la medicina, la ciencia y en aplicaciones de la arquitectura, como la elaboración de maquetas, arcos semielípticos y construcciones modernas, en donde se pueda observar la propiedad auditiva o reflexión de los focos. Justamente, siguiendo esta recomendación, en nuestra actividad se plantea una pregunta ligada a la propiedad de reflexión de la Elipse.

La investigación de Pérez (2012) tiene como objetivo analizar ciertas aplicaciones de la Elipse, parábola e hipérbola y, a partir de ello, conceptuar las cónicas como lugares geométricos y lograr la representación analítica. Los sujetos de investigación son 12 estudiantes, con edades entre 16 y 17 años, que cursan el grado undécimo de una institución educativa en la ciudad de Villavicencio-Meta, Colombia.

Con respecto a la metodología, la investigadora trata el concepto en el sentido de la Educación Matemática Realista que, según uno de sus principios, señala que la Matemática surge como una organización de la realidad, por tanto, su aprendizaje debe derivarse de la realidad y, en ese sentido, los problemas deben presentarse en contextos de la vida diaria.

La parte experimental se constituye de tres situaciones problemas: cortes a un cono, capturando cónicas y desplazamiento de las cónicas. En la primera situación, se observan las curvas de las cónicas a partir de los cortes realizados en conos de plastilina, además se nombran elementos de las cónicas y se proponen construcciones geométricas para hallar focos, eje mayor, eje menor, rectas tangentes a una curva, vértices y ángulos. En la segunda situación, se propone partir de representaciones visuales (graficas) para determinar representaciones algebraicas de las cónicas. Para el desarrollo de la tercera situación, se emplea el programa Graph 4.3, el cual permite que los estudiantes relacionen la condición geométrica de las cónicas y sus respectivas representaciones algebraicas.

En cuanto a las conclusiones, se destaca el diseño de la propuesta didáctica, ya que favoreció el entendimiento de las cónicas a través de la construcción, visualización y formalización de sus aspectos analíticos y gráficos.

Con respecto a investigaciones relacionadas con la teoría de Registros de Representación Semiótica al estudio de la Elipse, tenemos la investigación de Olivares (2018) que tiene como objetivo principal analizar la coordinación de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico que estudiantes de Física (18-20 años) movilizan en la noción de Elipse.

El autor usa, como marco teórico para su investigación, aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica, ya que se requiere el uso de los registros de representación algebraico, de lengua natural y gráfico de la cónica Elipse. Usa algunos aspectos de la Ingeniería didáctica, debido a que favorece la validación de las hipótesis planteadas mediante una confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Con respecto a la actividad, el autor elabora una secuencia de cinco preguntas que privilegian la transición entre los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraica y gráfica y así logren apropiarse de la noción Elipse.

En las respuestas de la primera pregunta, se muestra la predilección del registro algebraico por parte de los estudiantes cuando se les pide que identifiquen la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley. Las preguntas 2 y 3 tienen como objetivo que los estudiantes reconozcan los elementos de la Elipse y la ecuación que la representa, para ello realizan una coordinación entre los registros algebraico, lengua natural y gráfica.

Las preguntas 4 y 5 tienen como fin identificar las ecuaciones de las rectas directrices de la Elipse y la representación gráfica del objeto matemático Elipse. Para esto, los estudiantes realizaron conversiones del registro algebraico y lengua natural al gráfico.

En los resultados de este estudio, el autor concluye que los sujetos de investigación, mediante la articulación de los registros gráfico, algebraico y de lengua natural, se apropiaron de la noción del objeto matemático Elipse; sin embargo, señala que los estudiantes muestran cierta predilección por el registro algebraico. Además, como aporte para futuras investigaciones, Olivares (2018) recomienda realizar un estudio acerca de las propiedades de la Elipse en la Arquitectura, como por ejemplo las construcciones de estadios de fútbol acústicos y la proyección de la luz en los focos de las Elipses. Dichas aplicaciones sirven para justificar nuestro estudio, así como también en la elaboración de nuestra actividad.

La investigación de Olano (2018) muestra la preocupación de diversos investigadores por el aprendizaje de la Elipse en estudiantes de los últimos años de secundaria y de los primeros ciclos universitarios a partir de las diferentes representaciones que se pueden realizar con esta cónica, además de la importancia del uso del Geogebra para interactuar activamente y tener una compresión matemática de dicho objeto.

El autor se plantea como objetivo de investigación analizar la coordinación entre los registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria sobre la Elipse mediada por el Geogebra.

Esta investigación usa como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), ya que necesita de una coordinación interna de los registros de representación semiótica que usarán los estudiantes para comprender el objeto matemático Elipse. Como metodología de estudio, toma algunos aspectos de la Ingeniería didáctica, en vista del interés en analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje en aula y su validación interna.

Respecto a la parte experimental, presenta una secuencia con dos actividades, la primera actividad tuvo como finalidad permitir a las duplas de estudiantes la coordinación de los registros de lengua natural y figural y la coordinación de los registros gráfico y algebraicos para comprender la condición geométrica de la Elipse, mientras que, en la segunda actividad, el objetivo fue representar algebraicamente a la Elipse a partir de la representación gráfica, permitiendo de esta manera que los estudiantes reconozcan los elementos de la Elipse.

En cuanto a los resultados del estudio, el investigador muestra en el desarrollo de las actividades que logra responder a la pregunta de investigación, esto debido a que los estudiantes realizaron la conversión entre el registro figural y de lengua natural, así como la coordinación entre los registros gráfico y algébrico. Además, los estudiantes se apropian de la condición geométrica de la Elipse.

Respecto a investigaciones futuras, el autor recomienda motivar el uso de Software de Geometría dinámica para comprender el concepto de lugar geométrico de otras cónicas. Además, sugiere hacer un estudio de las aplicaciones de la Elipse en otras áreas, como la medicina, con el uso del litotriptor, y la Arquitectura, con aplicaciones en arcos semielípticos, maquetas, diseños, entre otros. En este caso, se considera el trabajo de investigación en nuestro estudio por las sugerencias finales respecto a las aplicaciones en Arquitectura, así como la elaboración de la actividad, la cual fue diseñada a través de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Las investigaciones revisadas, además de mostrar su preocupación por el estudio de la Elipse, brindan un provechoso aporte a nuestra investigación, ya que presentan las concepciones y dificultades que muestran los estudiantes sobre la Elipse, la enseñanza y aprendizaje de la Elipse en el nivel superior y los aportes de la teoría de Registros de Representación Semiótica al estudio de la Elipse, ya que todas ellas nos permiten fundamentar nuestro estudio.

A continuación, presentaremos la justificación de la investigación.

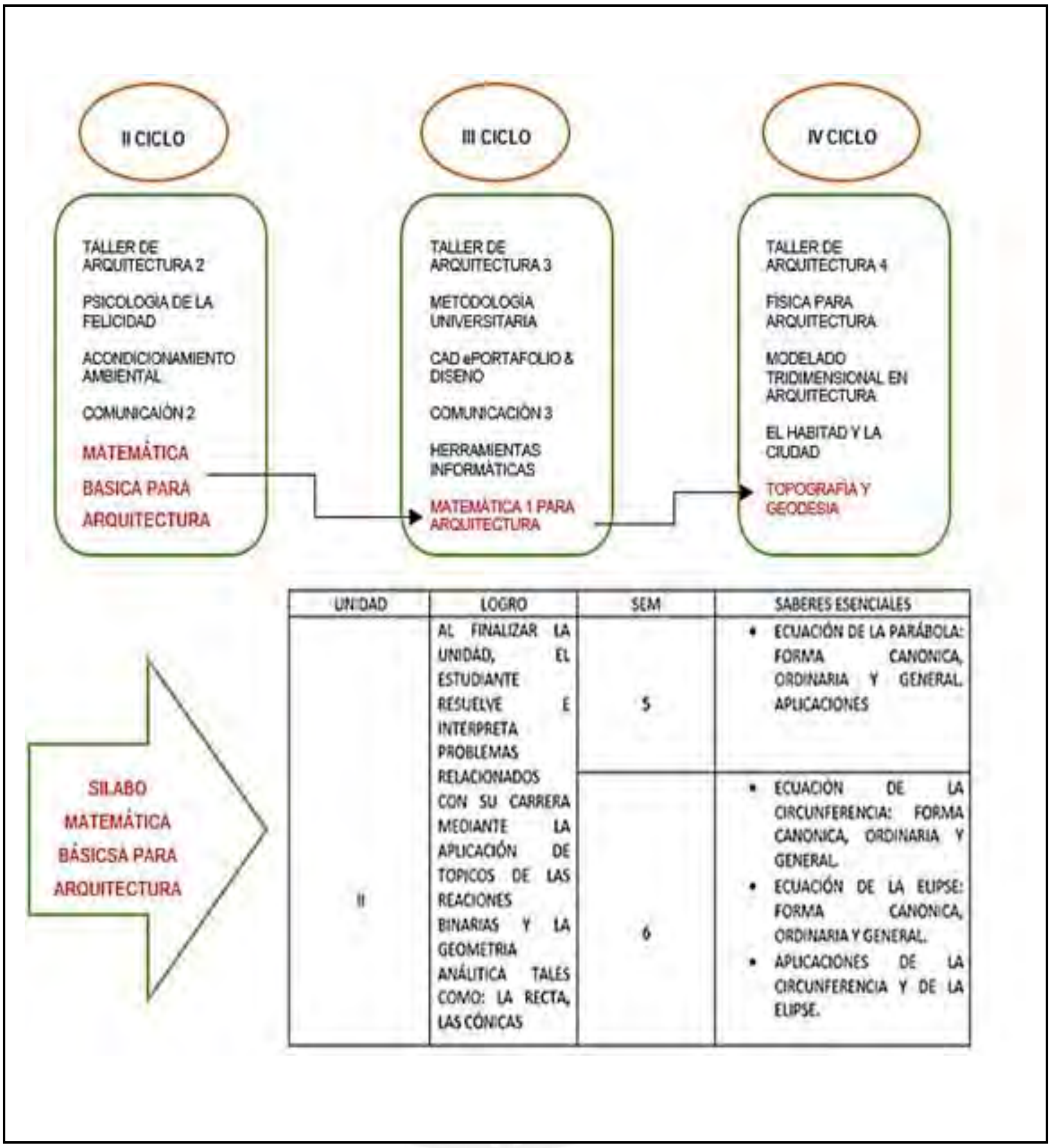
1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia de Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014), Flores y Gómez (2013) y Santa y Jaramillo (2014) presentan las dificultades que tienen los estudiantes de bachillerato y de los primeros ciclos del grado superior en el aprendizaje de la Elipse, esto debido a que en su estudio se privilegia el uso de ecuaciones que describen a la Elipse y sus elementos, ocasionando así que esta ventaja promueva la pérdida de su definición como lugar geométrico y figuras que la representan.

Por su parte, las publicaciones de León (2014), Olano (2018) y Olivares (2018) muestran preocupación por la enseñanza y aprendizaje de la Elipse en estudiantes de los primeros ciclos universitarios. En ese sentido, los investigadores desarrollan actividades que permiten comprender el concepto de la Elipse como lugar geométrico. Además, como recomendaciones finales en sus publicaciones, los autores proponen realizar investigaciones, en donde la Elipse sea aplicada como instrumento en diversos campos de estudio, por ejemplo, en aplicaciones de la Arquitectura, como la elaboración de maquetas, arcos semielípticos y construcciones modernas en donde se pueda observar la propiedad auditiva o de reflexión de la Elipse.

Por otro lado, las investigaciones de Fernández (2011) y Pérez (2012) resaltan la importancia del diseño de actividades que busquen favorecer el entendimiento de los conceptos de la Elipse a través de la construcción, visualización y formalización de sus aspectos analíticos y gráficos.

Debido a que nuestro trabajo de investigación se relaciona con el estudio de la Elipse y está orientado a estudiantes de Arquitectura, revisaremos la malla curricular y el plan de estudio de dos universidades privadas (Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y Universidad Privada del Norte), ya que este objeto matemático tiene muchas aplicaciones dentro del campo laboral de los arquitectos y por ello se estudia en los primeros ciclos (ver Figura 1).

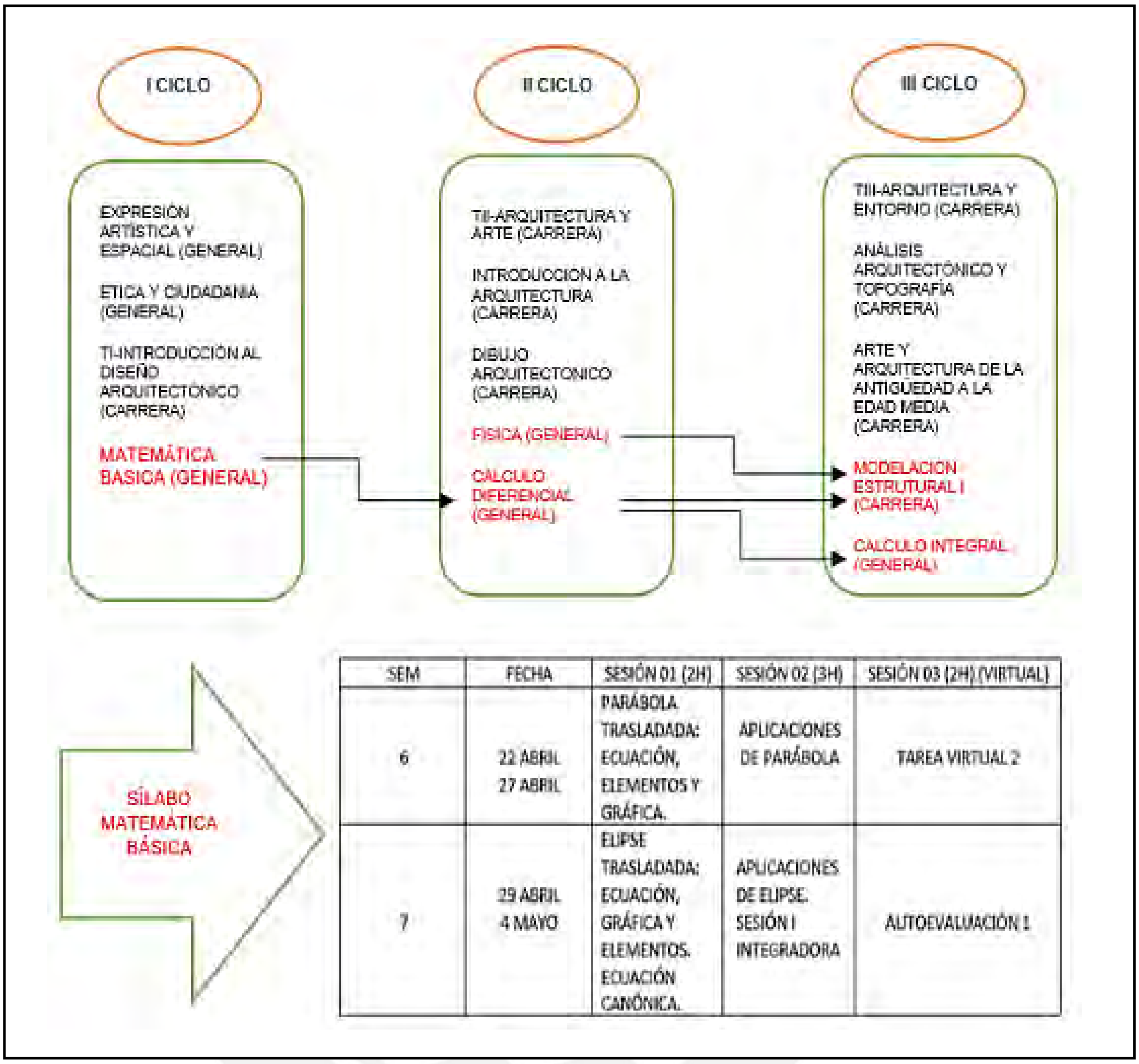


UNIDAD	LOGRO	SEM	SABERES ESENCIALES
II	AL FINALIZAR LA UNIDAD, EL ESTUDIANTE RESUELVE E INTERPRETA PROBLEMAS RELACIONADOS CON SU CARRERA MEDIANTE LA APLICACIÓN DE TOPICOS DE LAS REACIONES BINARIAS Y LA GEOMETRIA ANÁLITICA TALES COMO: LA RECTA, LAS CÓNICAS	5	• ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA: FORMA CANONICA, ORDINARIA Y GENERAL. APLICACIONES
		6	• ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA: FORMA CANONICA, ORDINARIA Y GENERAL. • ECUACIÓN DE LA ELIPSE: FORMA CANONICA, ORDINARIA Y GENERAL. • APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA Y DE LA ELIPSE.

Figura 1. Malla Curricular-Programación de contenidos de Arquitectura-UPN.
Fuente: Adaptado del plan de estudio de la Universidad Peruana del Norte (2019)

En la Figura 1, se observa que el curso de Matemática Básica para Arquitectura es pre requisito para el curso de Matemática 1 para Arquitectura del tercer ciclo y Topografía y Geodesia del cuarto ciclo. Asimismo, el tema de la Elipse es abordado en la sexta semana, según el silabo del curso Matemática Básica, en donde el logro de la sesión consiste en resolver e interpretar problemas relacionados con la carrera.

Mostramos la malla curricular y el plan de estudios de otra universidad privada de Lima (ver Figura 2)



SEM	FECHA	SESIÓN 01 (2H)	SESIÓN 02 (3H)	SESIÓN 03 (2H) (VIRTUAL)
6	22 ABRIL 27 ABRIL	PARÁBOLA TRASLADADA: ECUACIÓN, ELEMENTOS Y GRÁFICA.	APLICACIONES DE PARÁBOLA	TAREA VIRTUAL 2
7	29 ABRIL 4 MAYO	ELIPSE TRASLADADA: ECUACIÓN, GRÁFICA Y ELEMENTOS. ECUACIÓN CANÓNICA.	APLICACIONES DE ELIPSE. SESIÓN I INTEGRADORA	AUTOEVALUACIÓN 1

Figura 2. Malla Curricular-Programación de contenidos de Arquitectura-UPC.
Fuente: Adaptado del plan de estudio de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2019)

La Figura 2 muestra que el curso de Matemática Básica es pre requisito para el curso de Cálculo Diferencial del segundo ciclo. Por otro lado, el tema de la Elipse es abordado en la séptima semana, según el silabo del curso Matemática Básica. Asimismo, se destaca la importancia del estudio de la Elipse en cursos subsiguientes, como Modelación Estructural (tercer ciclo), Arte y Arquitectura de la Antigüedad a la Edad Media (tercer ciclo) y Arte y Arquitectura Moderna y Contemporánea (sexto ciclo), en los cuales se estudian construcciones arquitectónicas y se elaboran maquetas de formas elípticas. De esta forma, se recuerda la forma geométrica de la Elipse, así como algunas propiedades, como la propiedad sonora de la Elipse que está presente en algunas construcciones, como el Convento del Desierto de los Leones, ubicada en México, la cual consiste en que, si se ubican dos oradores en los focos de la forma elíptica de la planta, ambos escucharán sus murmullos, a pesar de que para las otras personas que habitan en ese momento la sala el sonido sea inaudible.

Otra interesante aplicación de la propiedad sonora de la Elipse se encuentra en construcciones como la del Teatro de Bilbao (1800), cuya construcción, de acuerdo con Bilbao (2009), sigue el modelo de herradura o Elipse truncada propuesto por arquitectos del siglo XVIII.

Esta forma, según explica el autor, es perfecta para este tipo de construcciones, ya que el modo en que el sonido se propaga permite que los espectadores escuchen sin ningún inconveniente lo que los actores dicen. En ese sentido, Bails (citado por Bilbao, 2009) señala que *“en torno a esta forma geométrica y por la esencia misma del sonido o de la voz humana, su modo de propagarse y el cuerpo de aire que impele en un parage tranquilo, debe mirarse la Elipse como la mejor planta de un teatro de comedias”* (p.84).

En definitiva, Bilbao (2009) justifica el uso de plantas en forma elípticas aludiendo que ellas ofrecen ciertas condiciones acústicas óptimas. La siguiente figura muestra la planta del Teatro de Bilbao (ver Figura 3).

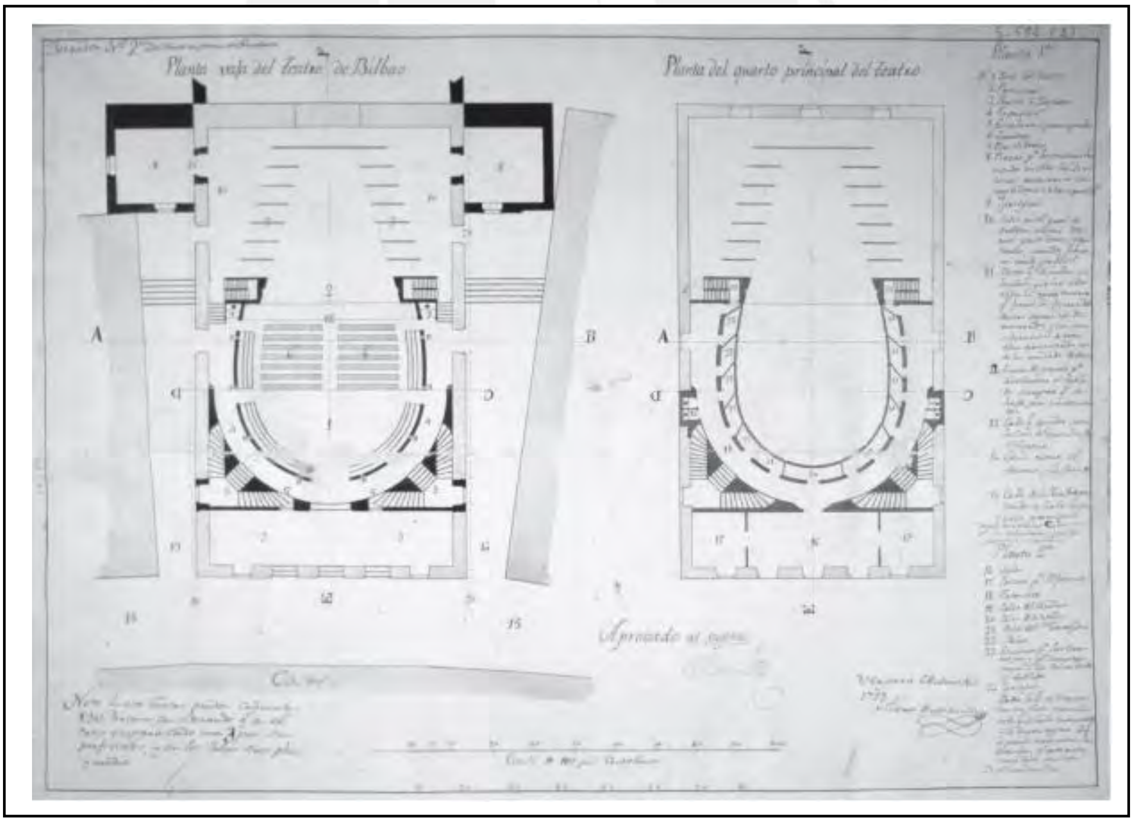


Figura 3. Planta en forma de Elipse truncada del Teatro de Bilbao.
Fuente: Bilbao (2019, p.89)

Por último, destacamos que el artículo 40 de la ley universitaria (2014) muestra que los estudios de pregrado están compuestos por estudios generales y estudios específicos, siendo los primeros de carácter obligatorio y en el cual se encuentra el curso de Matemática Básica.

Esto último resalta la importancia del curso y su respectivo silabo, el cual se encuentra nuestro objeto de estudio.

Debido a las investigaciones de referencia y la importancia que tiene la cónica Elipse, mostrada en el plan de estudio, así como en las diversas aplicaciones en Arquitectura, justificamos nuestro estudio.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Después de presentar las investigaciones de referencia, las cuales están relacionadas con el tema de nuestra investigación, así como la justificación que da cuenta de la pertinencia de la misma, presentaremos la pregunta que servirá de guía para esta investigación:

¿Cómo estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse al resolver una actividad didáctica que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico?

Nota: En este trabajo se entiende por movilizar conocimientos al hecho en el que los estudiantes resuelven problemas de contexto real haciendo uso de los conocimientos previos dados en la parte teórica.

En base a nuestra pregunta de investigación, se presentan los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar la manera en que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad didáctica que requiera el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

En base al objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los registros de representación semiótica que utilizan los estudiantes de la carrera de Arquitectura cuando resuelven una actividad didáctica sobre la Elipse.
- Estudiar los tratamientos y las conversiones en los registros de lengua natural, gráfico y algebraico que utilizan los estudiantes de la carrera de Arquitectura cuando resuelven una actividad didáctica sobre la Elipse.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo, presentaremos aspectos históricos de la Elipse, tomando como referencia al escrito de Boyer (1987) y aspectos matemáticos que son tomados del libro de Lehmann (2003), texto que se caracteriza por sus contenidos conceptuales de Geometría Analítica plana. Además, se muestran aspectos del tema a investigar en el libro de Stewart, Redlin y Watson (2012), titulado "*Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*", que es parte de la bibliografía básica del curso Matemática básica para Arquitectura.

2.1 Aspectos matemáticos e históricos

Aspectos históricos

A continuación, presentaremos un breve recuento del estudio de la Elipse, considerando tres etapas en la historia de la Matemática. El siglo de Pericles (siglo V a.C) y los trabajos realizados por Menecmo (350 a.C), Apolonio de Perga (262 a.C) y Descartes (1596-1650 d.C).

De acuerdo con Boyer (1987), mientras se desarrollaba la guerra del Peloponeso entre Esparta y Atenas, en el año 427 a.C, Atenas sufrió una gran peste que mató a un cuarto de sus habitantes, año conocido como "*el de la gran peste*". Según el autor, debido a esta gran epidemia, los atenienses consultan al oráculo de Apolo qué deben hacer para darle fin, recibiendo como respuesta que si deseaban terminar con esta epidemia debían duplicar el volumen del altar de Apolo.

De esta manera, se origina uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad griega, que es la duplicación de un cubo, que consiste en construir, usando solo regla sin marcas y compás, la arista de un cubo que tenga doble volumen que el primero (los otros dos problemas son conocidos como la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo).

El siglo de Pericles (siglo V a.C) se caracteriza por ser el periodo en que los habitantes de la antigua Grecia, al intentar resolver los tres problemas clásicos originan el descubrimiento de algunos lugares geométricos que conocemos en la actualidad, como la espiral, la trisectriz, la cicloide, las cónicas, entre otros.

Boyer (1987) señala que fue Hipócrates de Chios el primero en intentar buscar solución al problema de la duplicación del cubo y que precisamente en esta búsqueda restringe el problema a interpolar dos medias geométricas entre la medida de la arista de un cubo y la medida que corresponde al doble de la misma. Esto es, dado los segmentos a y b, se pueden construir otros dos segmentos x e y que cumplan la relación: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

De esta forma, realizando operaciones algebraicas en la expresión anterior, obtenemos que $x^2 = ay$ y $y^2 = bx$. En este caso, si consideramos $b = 2a$, se tiene la ecuación $y^2 = 2ax$.

Luego, si se despeja "y" en la expresión $y^2 = 2ax$ y reemplazamos este valor en la primera expresión, elevando ambos miembros al cuadrado y simplificado, se obtiene que $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$, finalmente, $x^3 = 2a^3$, donde x es la longitud de la arista del cubo transformado y a es la longitud de la arista del cubo inicial.

De acuerdo con lo descrito por Boyer (1987), Hipócrates de Chio demostró que si se tienen curvas con la propiedad $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ la duplicación del volumen de un cubo es factible.

Boyer (1987) señala que algunos años después se representan estas curvas gracias al trabajo realizado por Menecmo (350 a.C), ya que descubre curvas que son obtenidas al realizar cortes a un cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices y que además satisfacen la propiedad $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

En la siguiente figura, se muestra lo descrito anteriormente, en donde se obtiene la curva EDG, llamada parábola (ver Figura 4).

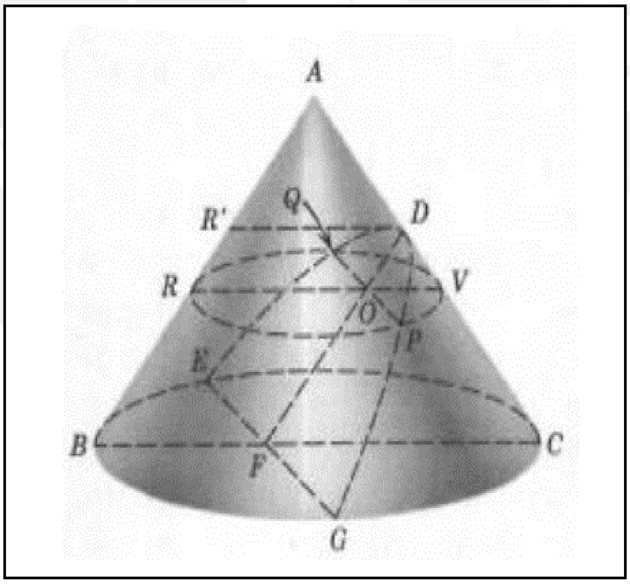


Figura 4. Sección cónica obtenida al cortar un plano perpendicular a la generatriz de un cono.
Fuente: Boyer (1987, p.133)

Así, a partir de un plano que corta a un cono circular de una sola hoja cuyos vértices fuesen rectos, agudos u obtusos, se obtienen parábolas, Elipses e hipérbolas respectivamente.

Hasta esta parte de la historia, las secciones cónicas no son estudiadas al detalle, o por lo menos no se tienen documentos que prueben ello. Al respecto, Boyer (1987) muestra en su trabajo que es Apolonio de Perga, en su obra *Secciones Cónicas,* quien fortalece los resultados referentes a las cónicas y demuestra que es posible obtener parábolas, Elipses e hipérbolas a partir de un cono recto variando la inclinación del plano que corta al cono. De igual modo, Apolonio reemplaza el cono de una hoja por el de dos hojas, lo cual llevaría que más adelante se comprenda que la hipérbola es una curva con dos ramas.

Boyer (1987) señala que se le atribuye los términos Elipse e hipérbola a Apolonio, siguiendo probablemente una recomendación de Arquímedes. Estos términos fueron manejados por los pitagóricos de aquellos tiempos y eran usados cuando se hacían referencia a la solución de ecuaciones cuadráticas por aplicación de áreas.

Respecto a ello, Boyer (1987) afirma:

> El término *Ellipsis*, que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado (u otra figura dada). Mientras que la palabra *Hyperbola* (de "avanzar más allá") se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra *Parábola* (de "colocar al lado" o "comparar") indicaba que no había deficiencia ni exceso. Apolonio utilizó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres para las secciones cónicas. (p.195)

En términos actuales, para la Elipse podemos ejemplificar lo señalado anteriormente con la ecuación $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ aludida al centro y cuya ordena es cero, en la que observamos que, si se despeja el valor de y, se obtiene: $y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}$, luego haciendo $4p=\frac{2b^2}{a}$ y $c=\frac{b^2}{a^2}$, se tiene: $y^2= 4px-c$, lo que resulta $y^2<4p$. Esto último, hace referencia a la deficiencia de algo lo cual concuerda con el nombre "ellipsis ".

En relación a las propiedades de las cónicas, Boyer (1987) señala que los matemáticos griegos clasificaban a las curvas en tres tipos: como "lugares planos", cuando se trataba de rectas y circunferencias; como "lugares sólidos", cuando se trataban de secciones cónicas y; como "lugares lineales" al resto de curvas.

El nombre que se le atribuye a las cónicas era por el hecho de que estas eran descritas a través de una figura tridimensional en el plano. Este hecho permite estudiar a las curvas por la propiedad que las caracteriza y se prescinde del cono.

Boyer (1987) destaca la importancia del trabajo de Descartes (1596-1650), ya que le da un tratamiento moderno a las cónicas haciendo un cambio acerca de las concepciones de la Matemática con el principio de la duda y la demostración.

En su obra, *La géométrie*, Descartes muestra todo el potencial de su trabajo, que se caracteriza por usar procedimientos algebraicos en lugar de representaciones gráficas o representaciones en lengua natural. Además, de acuerdo con Dijksterhuis (2011), en el octavo discurso de La Dioptrique (1637), obra de Descartes acerca de las propiedades de la luz, describe la forma que debería tener un lente para atraer los rayos de luz a un punto del foco, ya que esta forma puede ser elíptica e hiperbólica.

Asimismo, Dijksterhuis (2011) señala que Descartes emplea una forma fácil para dibujar la Elipse, denominada el método del jardinero, el cual consiste en colocar dos pequeñas piezas de madera en forma de clavo, que son encajadas en una superficie, luego se coloca un cable que pasa a través de ellos para luego dibujar una Elipse (ver Figura 5).

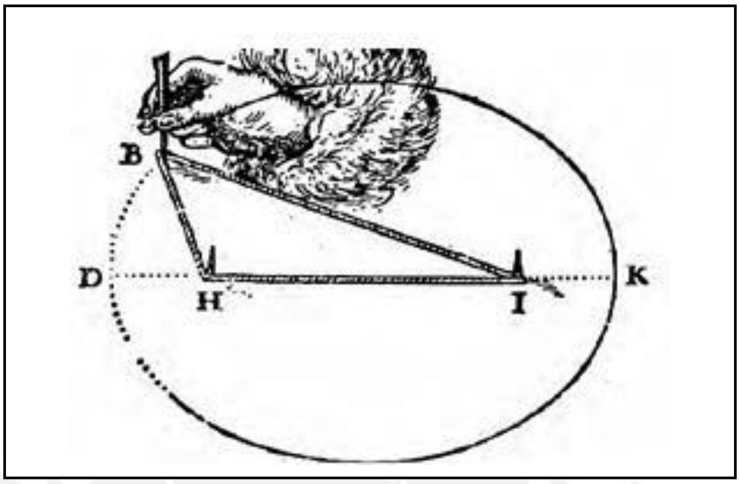


Figura 5. Método del jardinero para representar a la Elipse
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.91)

También Dijksterhuis (2011) señala que es Frans Van Schooten (1615-1660) quien se encarga de la difusión de los trabajos de Descartes, contribuyendo de esta manera con estudios sobre las cónicas. El autor señala que el método del jardinero se da de manera recurrente en el trabajo de Van Schooten (ver Figura 6).

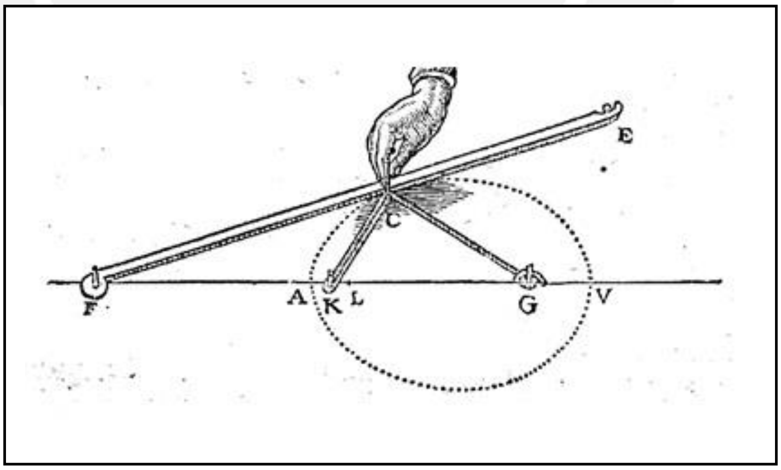


Figura 6. El método del jardinero según Van Schooten descrito en el libro Orgánica.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.92)

Dijksterhuis (2011) señala además que el aporte de Van Schooten, en el estudio de las cónicas, se da en la creación de mecanismos que permiten dibujarlas y que dichos mecanismos son llamados *conicógrafos*. Un ejemplo es el Elipsógrafo, instrumento que está conformado por dos varillas de igual longitud AB y BD, unidas en un punto B que permite la articulación de dichas varillas. Además, el punto A será un punto fijo, mientras que el punto D es el que se deslizará, permitiendo a su vez que cualquier punto E de la varilla BD describa una Elipse (ver Figura 7).

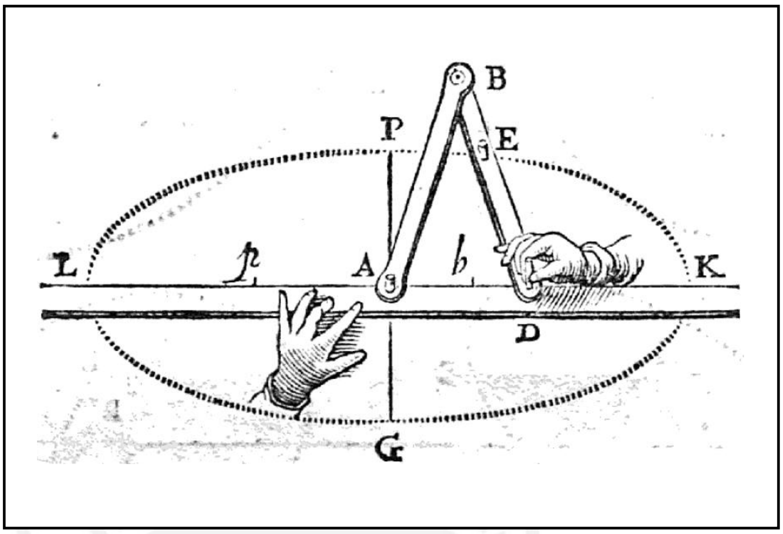


Figura 7. Elipsógrafo de Van Schooten.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.117)

El panorama presentado nos sirve para ampliar la visión acerca de las diversas concepciones atribuidas a la Elipse en su desarrollo histórico, ya que no siempre hablar de cónicas significó hallar ecuaciones algebraicas que están vinculadas a representaciones gráficas.

Aspectos matemáticos

En nuestro estudio de la Elipse, hemos tomado como referencia los aspectos matemáticos que son establecidos en el texto de Lehmann (2003). Por ello nuestra atención se centra en el capítulo VII del libro.

El capítulo VII inicia con la definición del objeto matemático Elipse, como lugar geométrico, luego se da una descripción de los elementos de dicho objeto, tales como el vértice, focos, eje mayor, eje normal, lado recto, entre otros. Enseguida, el autor expresa la ecuación de la Elipse desde su primera ecuación ordinaria, con centro en el origen y ejes coordenados como los ejes de la Elipse, pasando por su segunda ecuación ordinaria, con centro fuera del origen y ejes de la Elipse paralelos a los ejes coordenados hasta la ecuación general de la Elipse.

En la parte final de este capítulo, el autor menciona de forma general algunas aplicaciones en la Arquitectura y las trayectorias elípticas en Astronomía. Además, se muestra la propiedad focal y auditiva de la Elipse a partir de la definición de normal de la Elipse y de los conceptos de reflexión de la luz.

A continuación, mostramos con más detalle lo mencionado anteriormente.

En el texto, Lehmann (2003) define a la Elipse de la siguiente manera:

> Una Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. (p.173)

El autor denota a F y F' como los focos y a V y V' como los vértices de la Elipse. De esta manera, define además al eje focal como la recta l que contiene a los focos y al eje mayor como el segmento de recta del eje focal comprendido entre los vértices.

Por otro lado, se define al centro C como el punto medio del segmento de recta que une a los focos. Además, la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal es llamada eje normal y la denota con la letra l'. Se define también al eje menor como el segmento de recta del eje normal que corta a la Elipse en los puntos A y A'

Designa al segmento BB' que une a cualquier par de puntos distintos de la Elipse como cuerda, en particular, llama a la porción de recta que pasa por uno de los focos como cuerda focal y es denotado por EE'. También señala a la cuerda focal que es perpendicular al eje focal como lado recto y lo denota por LL', obviamente por tener la Elipse dos focos, tendrá también dos lados rectos.

Finalmente, indica que la cuerda DD' que pasa por el centro es llamada diámetro y que los segmentos de recta FP y $F'P$, donde P es cualquier punto de la Elipse y F y F' son los focos, que son llamados radios vectores.

La siguiente figura muestra una representación geométrica de lo mencionado anteriormente (ver Figura 8).

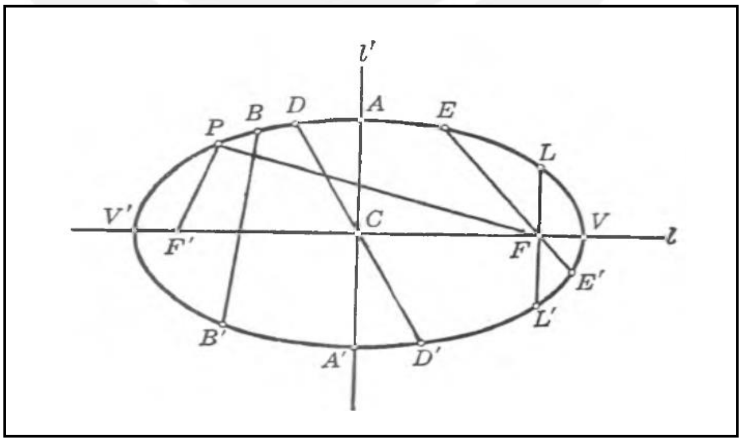


Figura 8. Representación gráfica de la Elipse y sus elementos.
Fuente: Lehmann (2003, p.173)

Para determinar la ecuación de la Elipse en su forma más simple o también llamada ecuación ordinaria de la Elipse, el centro debe estar en el origen de coordenadas y a la vez debe ser el punto medio del segmento de recta FF' . Además, los focos de la Elipse deben estar ubicados sobre el eje X y estar representados por $F(\mathrm{c};0)$ y $F'(-\mathrm{c};0)$, donde la constante c es mayor que cero ($\mathrm{c}>0$) (ver Figura 9).

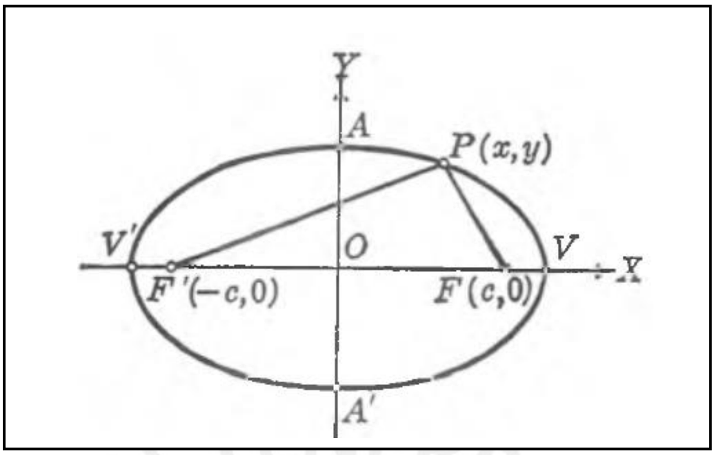


Figura 9. Elipse de centro en el origen y eje focal el eje X.
Fuente: Lehmann (2003, p.174)

Asimismo, se asigna el valor constante "$2a$" a la suma de las distancias de cualquier punto $P(x;y)$ de la Elipse con respecto a los focos $F(c;0)$ y $F'(-c;0)$, obteniéndose:

$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$, donde $|\overline{FP}|$ es la distancia de F a P

En esta última expresión, se realizará una sucesión de tratamientos con el fin de obtener la ecuación de la Elipse en su forma más simple, luego de la fórmula de distancia se obtiene:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

Entonces

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado

$(x-c)^2+y^2=(2a)^2-2(2a)\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

Entonces

$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$

Simplificando

$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx \leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$

Elevando al cuadrado nuevamente

$a^2[(x+c)^2+y^2]=(a^2+cx)^2$

$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+2a^2cx+c^2x^2$

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

Como la suma de las distancias de cualquier punto P de la Elipse a los focos F y F' es mayor que la longitud del segmento de recta FF', se tiene que $2a > 2c > 0$, entonces

$a > c > 0$. Así, $a + c > 0\ y\ a - c > 0$, luego $a^2(a^2 - c^2) > 0$. Dividiendo la ecuación anterior entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos la expresión algebraica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)} = 1$

En la última expresión, denotamos $b^2 = (a^2 - c^2)$, siendo evidente que $b > 0$, $a^2 = b^2 + c^2$ (relación pitagórica) y $b < a$. La siguiente figura muestra la ecuación anterior en términos de $a\ y\ b$ (ver Figura 10).

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Figura 10. Representación algebraica de la Elipse con eje focal el eje X.
Fuente: Lehmann (2003, p.175)

Para hallar la longitud del eje menor, Lehman (2003) reemplaza en la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ el punto $(0; y)$, obteniendo $\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es decir, $y = b\ o\ y = -b$. Así $A(0; b)$ y A'=$(0; -b)$, de donde aplicando la distancia entre dos puntos se obtiene que la longitud del eje menor es $2b$.

Para determinar la longitud del lado recto, el autor repite el proceso hecho anteriormente reemplazando el punto $L(c; y)$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obteniendo, luego de realizar tratamientos en este registro, que $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$. Además, como $a^2 - c^2 = b^2$, se tiene que la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

Se define la excentricidad de una Elipse como la razón $\frac{c}{a}$ y se denota por la letra e. Así:$e = \frac{c}{a}$ y como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, entonces $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Además de la relación $c < a$, se tiene que la excentricidad siempre es menor que uno.

Por otro lado, para obtener la ecuación de una Elipse con centro en el origen y eje focal el eje Y, se seguirá un proceso análogo al que se realizó con la Elipse anterior. De esta manera, los focos se ubicarán en el eje y, en lugar de eje x, lo que es lo mismo decir que las coordenadas de los focos, en este caso, serán $F(0; -c)$ y $F'(0; c)$. Del mismo modo, las coordenadas de los vértices serán $A' = (0; -a)\ y\ A = (0; a)$, mientras que el centro de la Elipse se ubicará en el origen de coordenadas. La ecuación obtenida se presenta de la siguiente manera (ver Figura 11).

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Figura 11. Representación algebraica de la Elipse con el eje focal el eje Y.
Fuente: Lehmann (2003, p.175)

Las ecuaciones dadas en las figuras 10 y 11 son llamadas ecuaciones canónicas o primera ecuación ordinaria de la Elipse. En el libro, también suelen ser conocidas como las ecuaciones más simples de la Elipse.

De acuerdo con Lehman (2003), también es posible encontrar la ecuación de la Elipse con centro distinto al origen de coordenadas y ejes paralelos a los ejes coordenados. La siguiente figura muestra la Elipse con las características mencionadas anteriormente (ver Figura 12).

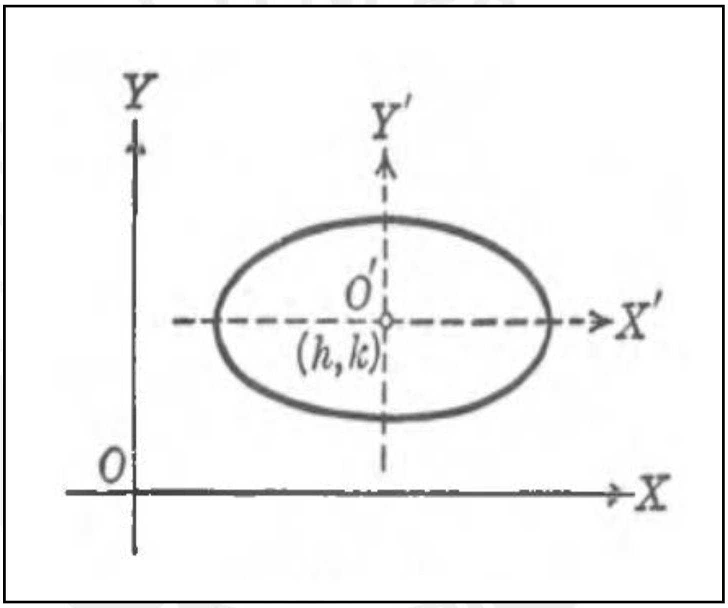


Figura 12. Elipse concentro c(h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados.
Fuente: Lehmann (2003, p.180)

El autor establece que la ecuación de la Elipse es dada por

$\frac{x\prime^2}{a^2} + \frac{y\prime^2}{b^2} = 1$, donde: $x = x' + h$, $y = y' + k$, despejando x' e y' se tiene que:

$$x' = x - h,\ y' = y - k.$$

Luego, reemplazando en la ecuación $\frac{x\prime^2}{a^2} + \frac{y\prime^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Lehmann (2003) resume el resultado anterior enunciando el siguiente teorema:

> La ecuación de la Elipse con centro $c(h;k)$ y eje focal paralelo al eje coordenado X, está dada por la segunda forma ordinaria
>
> $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
>
> Si el eje focal es paralelo al eje coordenado Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria
>
> $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$. (p.181)

El cuadro 1 muestra un resumen de las ecuaciones y elementos de la Elipse con centro en cualquier punto del plano coordenado y eje focal paralelo a los ejes coordenados.

Cuadro 1. Ecuaciones y elementos de la Elipse.

Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Centro	$\mathrm{C(h,k)}$	$\mathrm{C(h,k)}$
Eje focal paralelo a	Eje x	Eje y
Vértices	$V_1(h-a;k)\ y\ V_2(h+a;k)$	$V_1(h;k-a)\ y\ V_2(h;k+a)$
Focos	$F_1(h-c;k)\ y\ (h+c;k)$	$F_2(h;k-c)\ y\ (h;k+c)$
Distancia entre los focos	$2c$	
Eje Mayor	Horizontal Longitud $2a$	Vertical Longitud $2a$
Eje Menor	Vertical Longitud $2b$	Horizontal Longitud $2b$
Excentricidad	$e=\frac{c}{a}$	
Relación pitagórica	$a^2=b^2+c^2$	
Propiedad geométrica	$d(P;F_1)+d(P;F_2)=2a, c<a$	

Respecto a las diversas aplicaciones de la Elipse en el campo de la ciencia, Lehmann (2003) enuncia el siguiente teorema *“La normal a una Elipse en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto”* (p.187)

La figura permite observar la normal a una Elipse (ver Figura 13).

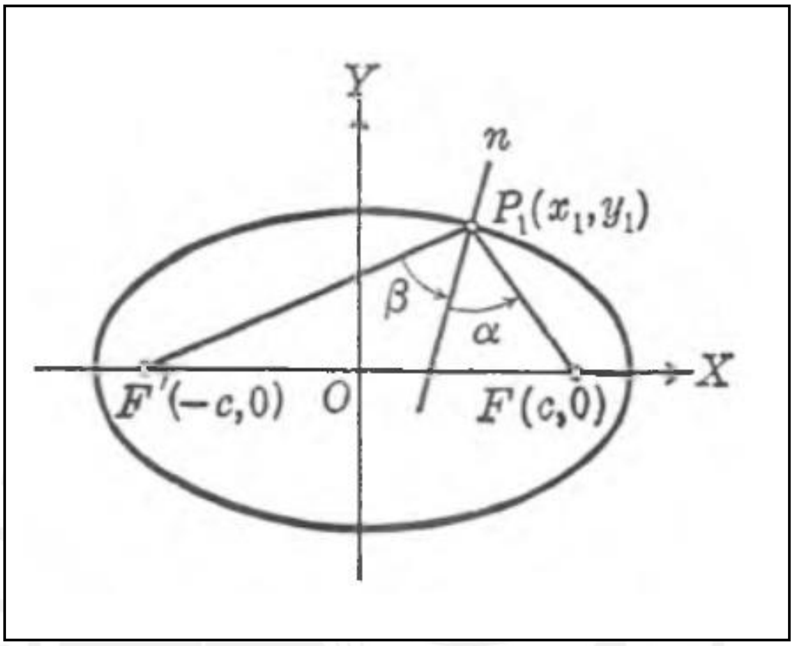


Figura 13. *Normal de la Elipse.*
Fuente: Lehmann (2003, p.187)

Lehmann (2003) señala que el teorema anterior puede asociarse a la ley física de la reflexión. Para ello, considera una sección recta de una superficie de reflexión, que tenga la forma de una Elipse, y señala que, si se coloca en el foco una señal luminosa, cualquier rayo incidente sobre un punto P perteneciente a la cónica, será reflejado de tal forma que se produce una bisectriz de ángulos iguales. Luego, por el teorema anterior, dicho rayo luminoso deberá pasar por el otro foco, así concluye que cualquier rayo colocado en un foco de la Elipse, al incidir sobre una curva elíptica, se reflejará hacia el otro foco.

El autor indica que las ondas sonoras se reflejan de igual manera que las luminosas, por ende, cualquier sonido que se origine en uno de los focos, necesariamente será escuchado de forma clara en el otro foco sin importar que solo sea susurrado. Este principio está presente en ciertas construcciones, como por ejemplo las cámaras secretas.

Otras aplicaciones de la Elipse, según el autor, pueden ser vistas en trayectorias elípticas, arcos elípticos y construcciones arquitectónicas.

2.2 Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos

Se ha seleccionado el libro “Precálculo: Matemáticas para el Cálculo” de Stewart, Redlin y Watson (2012) que utilizan los estudiantes del primer ciclo de la carrera de Arquitectura de una universidad privada de Lima como parte de la bibliografía principal del curso Matemática Básica.

En el texto, Stewart, Redlin y Watson (2012) definen a la Elipse como *"el conjunto de puntos en un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante"* (p.732). A continuación, muestran el registro figural de la Elipse (ver Figura 14).

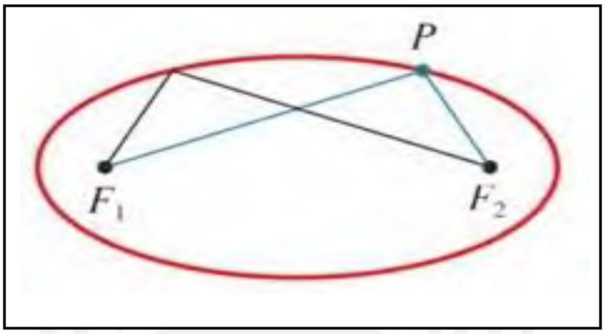


Figura 14. Distancia de un punto de la Elipse a los focos.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.732)

En ese sentido, cuando en el texto se define la Elipse y se muestra de manera inmediata la Figura 14, se esperaba que se plasme la información dada en el registro de lengua natural *"el conjunto de puntos en un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante"* en el registro figural, pero ello no ocurre, por el contrario la Figura 14 genera ciertas dudas, puesto que no se esclarece en ella si la suma de las longitudes de los segmentos de recta de color azul son iguales a la suma de las longitudes de los segmentos de recta de color negro, tampoco se indica si F_1, F_2 y P están en el plano cartesiano, ni se indica que lugar geométrico representa la curva roja. De esta manera se evidencia poco manejo del registro figural por parte de los autores, que como mostraremos en los siguientes párrafos tienen por preferencia trabajar principalmente en el registro algebraico.

Luego de presentar la Figura 14 en el texto, los autores denotan a los focos de la Elipse por F_1 y F_2 y señalan que, para determinar la ecuación de la Elipse en su forma más simple o también llamada Elipse horizontal, el centro debe estar en el origen de coordenadas y a la vez debe ser el punto medio del segmento de recta F_1F_2. Además, los focos de la Elipse deben estar ubicados sobre el eje X y estar representados por $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$, donde la constante *c* es mayor que cero ($c > 0$).

Asimismo, se asigna el valor constante "$2a$" a la suma de las distancias de cualquier punto $P(x; y)$ de la Elipse con respecto a los focos $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$, obteniéndose:

$d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$, donde $d(P; F_1)$; es la distancia de P a F_1

En esta última expresión, se realizará una sucesión de tratamientos algebraicos, obteniéndose la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$, en la que si se denota a $b^2=(a^2-c^2)$, se obtiene la ecuación de la Elipse en su forma más simple.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta ecuación es llamada ecuación canónica de la Elipse horizontal y, para conseguir su gráfica, se necesita encontrar los puntos de corte con los ejes coordenados.

Si hacemos que $x=0$ en la ecuación, obtenemos $\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow y^2=b^2 \rightarrow y=b\ o\ y=-b$

Si hacemos que $y=0$ en la ecuación, obtenemos $\frac{x^2}{a^2}=1 \rightarrow x^2=a^2 \rightarrow x=a\ o\ x=-a$

Así, la Elipse canónica horizontal presenta los siguientes puntos de corte $(-a;0)\ y\ (a;0)$ con el eje X, mientras que sus puntos de corte con el eje Y son $(0;-b)\ y\ (0;b)$, tal como se muestra en la siguiente figura (ver Figura 15).

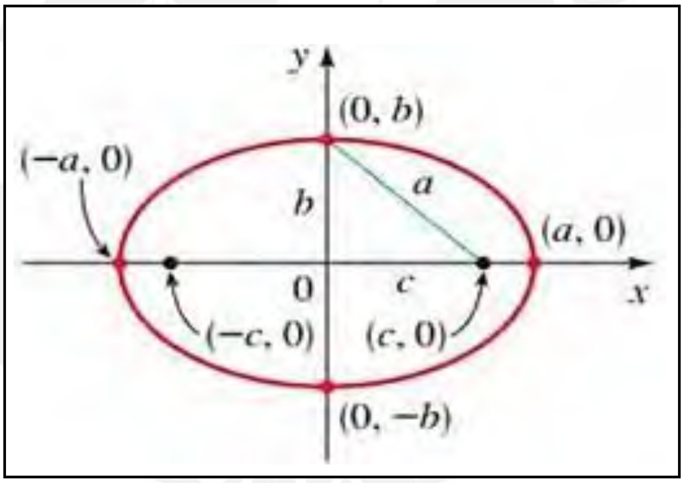


Figura 15. Representación gráfica de la Elipse horizontal.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.734)

En esta última parte Stewart, Redlin y Watson (2012) utilizan la información obtenida en el registro algebraico, como las coordenadas de los elementos de la Elipse y las longitudes que se representan por $a, b\ y\ c$, para ubicarlos en el plano cartesiano y trazar la Elipse horizontal con centro en $C(0;0)$. De esta manera los autores evidencian la facilidad que tienen para trabajar en el registro algebraico y plasmar la información obtenida en el registro gráfico.

Por otro lado, para obtener la ecuación canónica de una Elipse vertical y su representación gráfica se seguirá un proceso análogo al que se realizó con la Elipse horizontal. De esta manera, los focos se ubicarán en el eje Y, en lugar de eje X. Es decir, las coordenadas de los focos en este caso serán $F_1(0;-c)$ y $F_2(0;c)$. Del mismo modo, las coordenadas de los vértices serán $(0;-a)$ y $(0;a)$, mientras que el centro de la Elipse se ubicará en el origen de coordenadas (ver Figura 16).

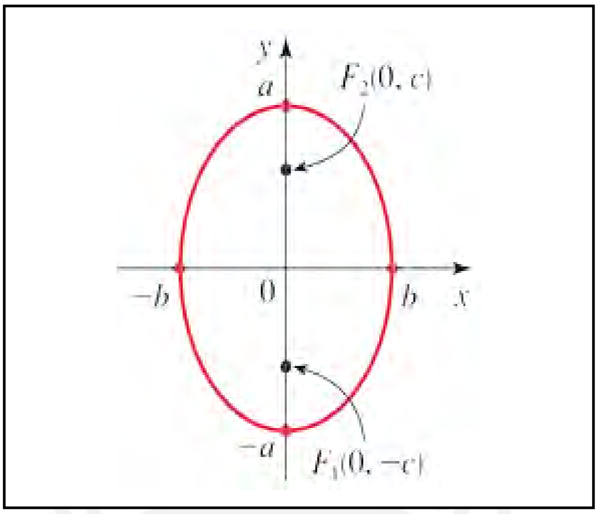


Figura 16. Representación gráfica de la Elipse vertical.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.734)

Por consiguiente, es claro esperar que, si en la ecuación de la Elipse horizontal se intercambian los lugares de x e y, se obtendrá la ecuación canónica de la Elipse vertical, cuya representación algebraica se muestra en la siguiente manera (ver Figura 17).

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Figura 17. Representación algebraica de la Elipse vertical.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.734)

Stewart, Redlin y Watson (2012), como desarrollo de lo aprendido hasta este punto, presentan cuatro ejemplos resueltos, de los cuales, para nuestro análisis, solo serán estudiados dos de ellos, ya que los otros buscan determinar la gráfica de una Elipse mediante una calculadora y la ecuación algebraica de la Elipse a partir de su excentricidad. Estos problemas son dejados de lado, ya que en nuestra actividad no se considera la definición de excentricidad, ni el manejo de alguna calculadora gráfica debido a que el curso de Matemática Básica para Arquitectura no desarrolla actividades que involucren dichos puntos.

En la siguiente figura, mostramos un primer ejemplo en donde se pide hallar los focos y la gráfica de una Elipse, teniendo como información su ecuación (ver Figura 18).

EJEMPLO 2 | Hallar los focos de una elipse

Encuentre los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero ponemos la ecuación en forma normal. Dividiendo entre 144, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como $16 > 9$, ésta es una elipse con sus focos en el eje y y con $a = 4$ y $b = 3$. Tenemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$
$$c = \sqrt{7}$$

Entonces, los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. La gráfica se ilustra en la Figura

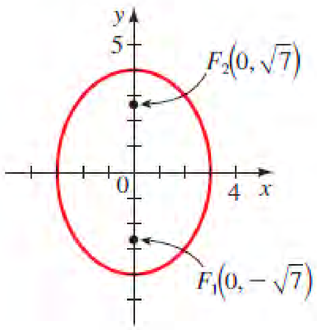


Figura 18. Ejemplo representaciones algebraicas y graficas de una Elipse.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.736)

En este ejemplo, el libro muestra el desarrollo de la parte algebraica, ya que, haciendo ciertos procedimientos, se obtienen las coordenadas de los focos. Para ello, se expresa la ecuación dada $16x^2 + 9y^2 = 144$ en la forma de la ecuación ordinaria de la Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, con centro en el origen y eje focal el eje Y, pues $16 > 9$ y así $a = 4$ y $b = 3$. Luego se usa la relación pitagórica $c^2 = a^2 - b^2$ para hallar el valor de c y de esta manera indicar las coordenadas de los focos de la Elipse.

En ese sentido, en el desarrollo del ejemplo de la figura 17, se observa el manejo de procedimientos propios del Álgebra, esto en nuestro marco teórico, que será visto más adelante, es llamado tratamiento y es caracterizado por realizar procedimientos de manera interna en un registro dado, en este caso ese registro es llamado registro algebraico, el cual también será definido más adelante.

Por otro lado, el ejemplo de la Figura 18, muestra el paso de la representación algebraica de la Elipse a su representación gráfica, debido a que se conoce los valores de a, b y c, además de tener en cuenta que la ecuación ordinaria de la Elipse tiene como eje focal al eje Y. De este modo, se muestra en la solución final la representación gráfica de la Elipse (que más adelante, bajo ciertas condiciones del marco teórico, será llamado *registro gráfico*).

Este proceso externo de realizar transformaciones de un registro a otro será conocido más adelante como *conversión*. De esta manera, el libro nos muestra cómo puede ser movilizado los conocimientos de la Elipse (aprendidos hasta ahora) haciendo uso de representaciones gráficas y algebraicas.

Tenemos un segundo ejemplo del libro, el cual busca determinar la ecuación algebraica de la Elipse y además mostrar su gráfica (ver Figura 19).

EJEMPLO 3 | Encontrar la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, tenemos $a = 4$ y el eje mayor es horizontal. Los focos son $(\pm 2, 0)$, de modo que $c = 2$. Para escribir la ecuación, necesitamos hallar b. Como $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos

$$2^2 = 4^2 - b^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica se muestra en la Figura 7.

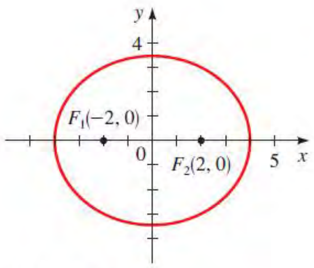


FIGURA 7

Figura 19. Ejemplo representaciones algebraicas, gráficas y de lengua natural de una Elipse.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.736)

Como se observa, los autores usan la información dada en lengua natural y realizan ciertos tratamientos en dicha expresión lingüística, los cuales permiten hallar, en primer lugar, los valores de a y c, para luego determinar con ellos el valor de b. Dichos valores permiten mostrar la representación gráfica de la Elipse.

Por otro lado, también hay una transformación de la información dada en la expresión lingüística a la representación algebraica de la ecuación de una Elipse con centro en el origen, el cual se logra cuando se encontraron los valores de a y b y se reemplazaron en la ecuación ordinaria de la Elipse con eje focal el eje Y. Dichas transformaciones internas y externas serán conocidas más adelante, como se conoció, como tratamiento y conversión respectivamente.

En ese sentido, el libro nos muestra cómo pueden ser movilizado los conocimientos de la Elipse (aprendidos hasta ahora) haciendo uso de representaciones gráficas, algebraicas y de lengua natural.

Continuando con el estudio de la Elipse en el libro didactico, Stewart, Redlin y Watson (2012) muestran que es posible encontrar la ecuación de una Elipse cuando su centro no está en el origen de coordenadas y su eje focal es paralelo a los ejes coordenados, proceso que es llamado por los autores como *Elipses desplazadas*. En el texto, se muestra primero los casos que se presentan al desplazar gráficas de cualquier ecuación e inmediatamente se relaciona este caso general con el de la Elipse desplazada (horizontal y verticalmente), tal y como se muestra en la siguiente figura (ver Figura 20).

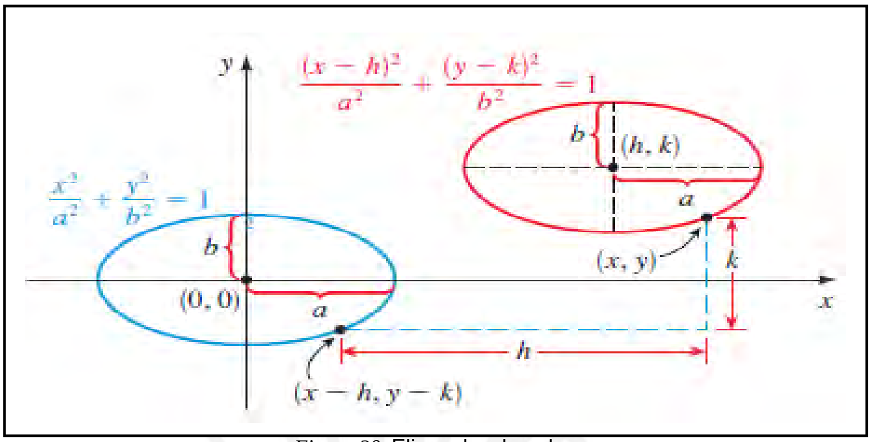


Figura 20. Elipse desplazada.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.750)

A continuación, Stewart, Redlin y Watson (2012) muestran un único ejemplo para esta sección (ver Figura 21).

EJEMPLO 1 | Trazar la gráfica de una elipse desplazada

Trace una gráfica de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

SOLUCIÓN La elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse desplazada}$$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades. Los puntos extremos de los ejes menor y mayor de la elipse con centro en el origen son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$. Aplicamos los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$(2, 0) \rightarrow (2-1, 0+2) = (1, 2)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (-2-1, 0+2) = (-3, 2)$$
$$(0, 3) \rightarrow (0-1, 3+2) = (-1, 5)$$
$$(0, -3) \rightarrow (0-1, -3+2) = (-1, -1)$$

Esto nos ayuda a trazar la gráfica de la Figura 2.

Para hallar los focos de la elipse desplazada, primero hallamos los focos de la elipse con centro en el origen. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, tenemos $c^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. Por lo tanto, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. Desplazando a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, obtenemos

$$(0, \sqrt{5}) \rightarrow (0-1, \sqrt{5}+2) = (-1, 2+\sqrt{5})$$
$$(0, -\sqrt{5}) \rightarrow (0-1, -\sqrt{5}+2) = (-1, 2-\sqrt{5})$$

En consecuencia, los focos de la elipse desplazada son

$$(-1, 2+\sqrt{5}) \quad \text{y} \quad (-1, 2-\sqrt{5})$$

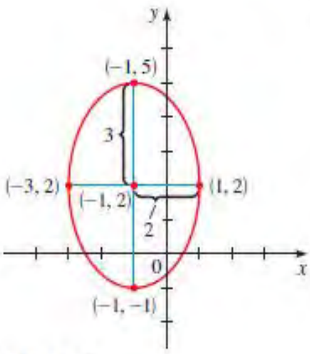


FIGURA 2 $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Figura 21. Ejemplo para encontrar la gráfica de una Elipse desplazada.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.751)

Como se observa en este ejemplo, hay una relación entre las representaciones algebraicas y gráficas de una Elipse. Además, los autores muestran que, para poder resolver este tipo de problemas con Elipses desplazadas, es necesario tener claro los conceptos dados para una Elipse canónica, ya que esto permite simplificar algunos cálculos, como por ejemplo el foco encontrado en la Figura 21.

Respecto a los tres problemas analizados, se puede apreciar que los autores solo mencionan ejemplos que priorizan las representaciones algebraicas; sin embargo, se observa que en las preguntas propuestas se encuentran problemas interesantes como aquellos que están ligados a la Astronomía o la reflexión de la luz en las Elipses.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentaremos aspectos de la teoria de Registros de Representación Semiótica, así como la metodologia de carácter cualitativo. Además, mostraremos los procedimientos metodológicos.

3.1 Marco teórico

Para Duval (2004), se entiende por *aprendizaje* al conjunto de etapas progresivas que dependen de diversos elementos, entre los que se encuentran las interrelaciones que el estudiante puede tener con los profesores, con el medio, con sus compañeros y con los instrumentos que le permite tener acceso a comprender un determinado concepto matemático. Entre estos instrumentos se destacan los sistemas de representación, tales como las gráficas, la escritura en lengua natural, la tabulación, entre otros.

El autor manifiesta que, en Matemáticas, cuando se da el proceso de aprendizaje de un objeto matemático, el individuo no tiene contacto alguno con dicho objeto de estudio, sino más bien con su representación. Incluso se puede garantizar que comprender un concepto matemático remite a trabajar con sus diversas representaciones. Por ejemplo, la Elipse suele ser representada por la ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, pero esta representación no es la Elipse, sino que se trata de una de las diversas maneras de representarla.

Ahora bien, desde lo planteado por el autor, entender cierto concepto matemático conlleva a que un individuo sea capaz de distinguir el objeto matemático de la representación que lo hace accesible, ya sea de una representación mental, computacional o semiótica.

En ese sentido, el investigador señala que las representaciones mentales se basan en un conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener respecto de un objeto, una situación o a lo que está asociado al objeto o la situación. Dichas representaciones tienen como característica la interiorización de las representaciones externas.

Las representaciones computacionales, de acuerdo con Duval (2006), se caracterizan por ser una actividad mecánica que el sujeto ejecuta sin percatarse de todos los pasos que realiza para la solución de una determinada tarea. Este tipo de representaciones son realizadas de manera inconsciente.

Por otra parte, según el investigador, las representaciones semióticas, son producciones constituidas por el uso de signos pertenecientes a un sistema de representación, los cuales tienen sus dificultades propias de significado, ejemplo de representaciones semióticas es la escritura en lengua natural, la escritura algebraica y los gráficos cartesianos.

Vale destacar que uno de los papeles desempeñados por las representaciones semióticas es el de la comunicación, que es exteriorizar las representaciones mentales, haciéndolas accesibles a otras personas; sin embargo, es necesario aclarar que este papel suele a veces confundirse y ocasionar que los registros de representación semiótica sean caracterizados por ello. En ese sentido, Duval (2004) considera como una visión ingenua o errónea comprender que estas representaciones semióticas son simplemente un soporte de las representaciones mentales y para ello hace una distinción entre los términos “semiosis” y “noesis”.

La semiosis es la producción de una representación semiótica y la noesis son las actividades cognitivas de un individuo que originan la aprehensión o producción conceptual de un objeto. Para el autor, no puede existir noesis sin semiosis. Es decir, no hay conceptualización de un objeto matemático si no se emplean las representaciones semióticas de dicho objeto.

El autor define un registro de representación semiótica como un sistema de signos que tiene por objetivo no sólo la comunicación, sino también el tratamiento de la información y su objetivación. Para ser considerado un registro de representación, un sistema necesita permitir tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis, las cuales pasaremos a describir.

La formación de una representación identificable:

Una representación es identificable cuando es permisible diferenciar en esta representación lo que representa. En el caso de las Matemáticas, el objeto matemático que representa.

Para esta premisa, se necesita que el sistema de signos sea común a todos los individuos o estar establecido socialmente. Así, una representación identificable permite a la persona que se enfrenta a ella elegir las características y los datos del contenido que se está representando.

Esta actividad cognitiva se cumple, por ejemplo, en las señales de tránsito. Se establece socialmente que una circunferencia con la letra E y un trazo diagonal indica que está prohibido estacionarse; sin embargo, las señales de tránsito no se consideran registros de representación semiótica, ya que no existe en ellas la posibilidad de tratamiento. Revisar pptss

El tratamiento:

El tratamiento de una representación consiste en la transformación de la misma en otra perteneciente al mismo registro de partida. El tratamiento es, por tanto, una transformación interna a una representación permaneciendo en el mismo registro.

Este tipo de transformación tal vez sea la más utilizada por los profesores de Matemáticas, ya que corresponde a procedimientos de justificación. En la expectativa de que los estudiantes entiendan determinados conceptos, el profesor busca 'el mejor registro' del cual puede hacer uso para justificar una idea referente a ese concepto. Por ejemplo, si el concepto estudiado es Elipse, puede ser que el profesor utilice solamente su ecuación para encontrar alguno de sus elementos (vértices, centro, focos), pero realizar tratamientos en un solo registro, en este caso el algebraico, no significa que el alumno comprendió el concepto de Elipse, ya que significa sí que el alumno sabe manipular (calcular) una de las representaciones de la Elipse (en este tipo de registro). Este modo de trabajar el contenido de la Elipse puede ocasionar confusión, por parte de los estudiantes, entre el concepto Elipse y la representación que lo ha hecho accesible.

De acuerdo con Duval (2004), el tratamiento realizado en un determinado registro presenta sus propias reglas de funcionamiento que se derivan del registro en que se realiza. Por lo tanto, las dificultades en realizar tratamientos dependen del registro en el que se hace.

Igualmente, el autor indica que se puede inferir que las comprensiones emergentes de cada registro también son distintas y dependientes del registro utilizado. De este modo, es adecuado un enfoque que relacione estos registros.

La conversión:

La conversión consiste en la transformación de la representación de un objeto matemático en una representación de este mismo objeto en otro registro, por lo cual las conversiones son transformaciones externas al registro de representación de partida.

Diferente del tratamiento, en el que se hacen transformaciones internas a un registro, en la conversión las transformaciones ocurren entre diferentes registros. Al respecto, el autor manifiesta que es importante no confundir los procesos de tratamiento con los de conversión, ya que este último proceso demanda, por parte de los estudiantes, la diferenciación entre la representación del objeto matemático (significante) y el concepto matemático representado (significado).

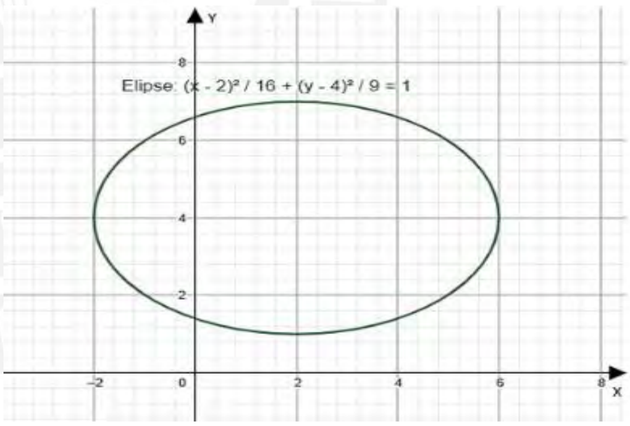
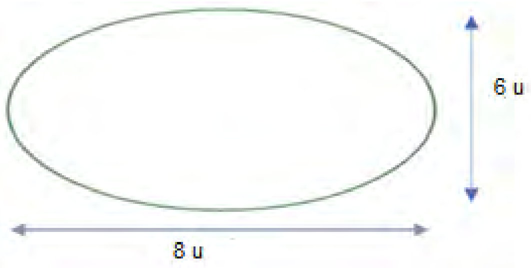
Para Duval (2006), la comprensión en Matemáticas está asociada a la actividad de conversión de al menos dos registros de representación semiótica. En ese sentido, afirma que el uso de diversas representaciones semióticas influye a una reordenación del pensamiento del estudiante y además contribuye a la actividad cognitiva del individuo que las emplea. Saber interpretar la representación producida por el estudiante, puede ayudar al profesor a realizar intervenciones más adecuadas en su proceso de construcción del conocimiento.

Por otro lado, el autor, señala que no se debe confundir la conversión con otras dos actividades que están ligadas a ellas, como lo son la interpretación y la codificación. Por ejemplo, la expresión algébrica $y = 2x^2 + 3x + 10$ puede significar para un estudiante la ecuación de la posición de un punto en el plano y para otro estudiante la ecuación de la velocidad respecto del tiempo, siendo ambos argumentos válidos, ya que eso dependerá de la experiencia que tenga el estudiante en relación a la expresión dada.

En ambos casos, tal como se observa, no fue necesario el cambio de registro. Por otro lado, la codificación suele presentarse cuando, por ejemplo, dado un conjunto de afirmaciones contenidas en un problema, el estudiante es capaz de agrupar y organizar estas informaciones en un registro que no es el registro de lengua natural dado al inicio.

El autor distingue cuatro registros de representación semiótica, los cuales se observan en el Cuadro 2.

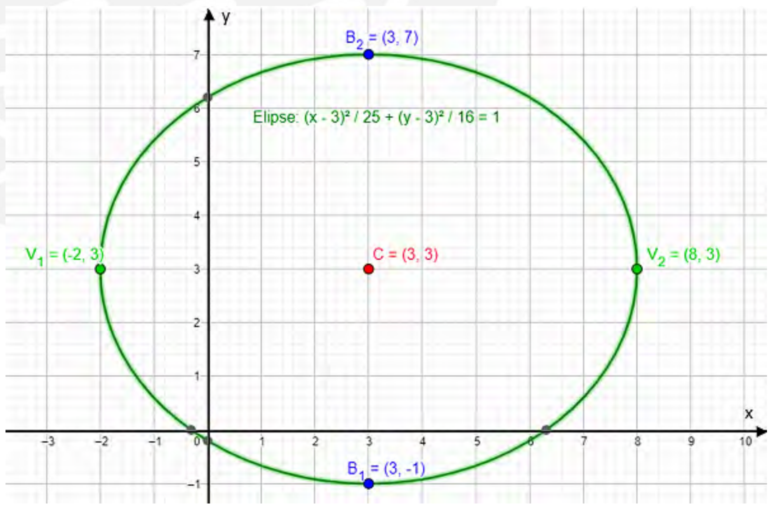
Cuadro 2. Registros de Representación Semiótica de la Elipse.

LA ELIPSE: REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA	
REGISTRO DE LENGUA NATURAL	Elipse con centro (2;4), el eje focal paralelo al eje X, longitud del semieje mayor 4 y del semieje menor 3.
REGISTRO ALGEBRAICO	$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$
REGISTRO GRÁFICO	
REGISTRO FIGURAL	

En el estudio del objeto matemático Elipse, los estudiantes de la carrera de Arquitectura, en su aula, utilizaron representaciones algebraicas y gráficas del objeto matemático de manera aislada. Ante esto, Duval (2004) destaca que el registro de lengua natural está presente en toda investigación, se considerará, en nuestro estudio, los tres registros mencionados anteriormente.

El Cuadro 3 muestra los registros de representación utilizados por estudiantes de la carrera de Arquitectura en el proceso de aprendizaje de la Elipse.

Cuadro 3. Registros de Representación Semiótica de la Elipse en estudiantes de Arquitectura

LA ELIPSE: REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA	
REGISTRO DE LENGUA NATURAL	El eje mayor de la Elipse tiene como vértices a los puntos $V_1 \; y \; V_2$, cuyas abscisas son $-2 \; y \; 8$ respectivamente y tienen por ordenada 3. El eje menor de la Elipse tiene como vértices a los puntos $B_1 \; y \; B_2$ cuya abscisa es 3 y tiene por ordenas a $-1 \; y \; 7$ respectivamente.
REGISTRO ALGEBRAICO	$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$
REGISTRO GRÁFICO	

En el Cuadro 3, se muestra los registros en lengua natural, algebraico y gráfico de la Elipse las coordenadas de los vértices del eje mayor y menor de la Elipse en el registro de lengua natural. Luego, interpretando la información brindada, se realiza la conversión al registro algebraico, en el cual se realizan tratamientos para obtener la ecuación de la Elipse con eje focal paralelo al eje X y centro distinto al origen de coordenadas: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$. Por último, se realiza la conversión del registro algebraico al gráfico, tal y como se evidencia en el Cuadro 3.

A continuación, en la Figura 22, mostramos las transformaciones de tratamiento y conversión de la cónica Elipse a través de sus tres registros de representación semiótica.

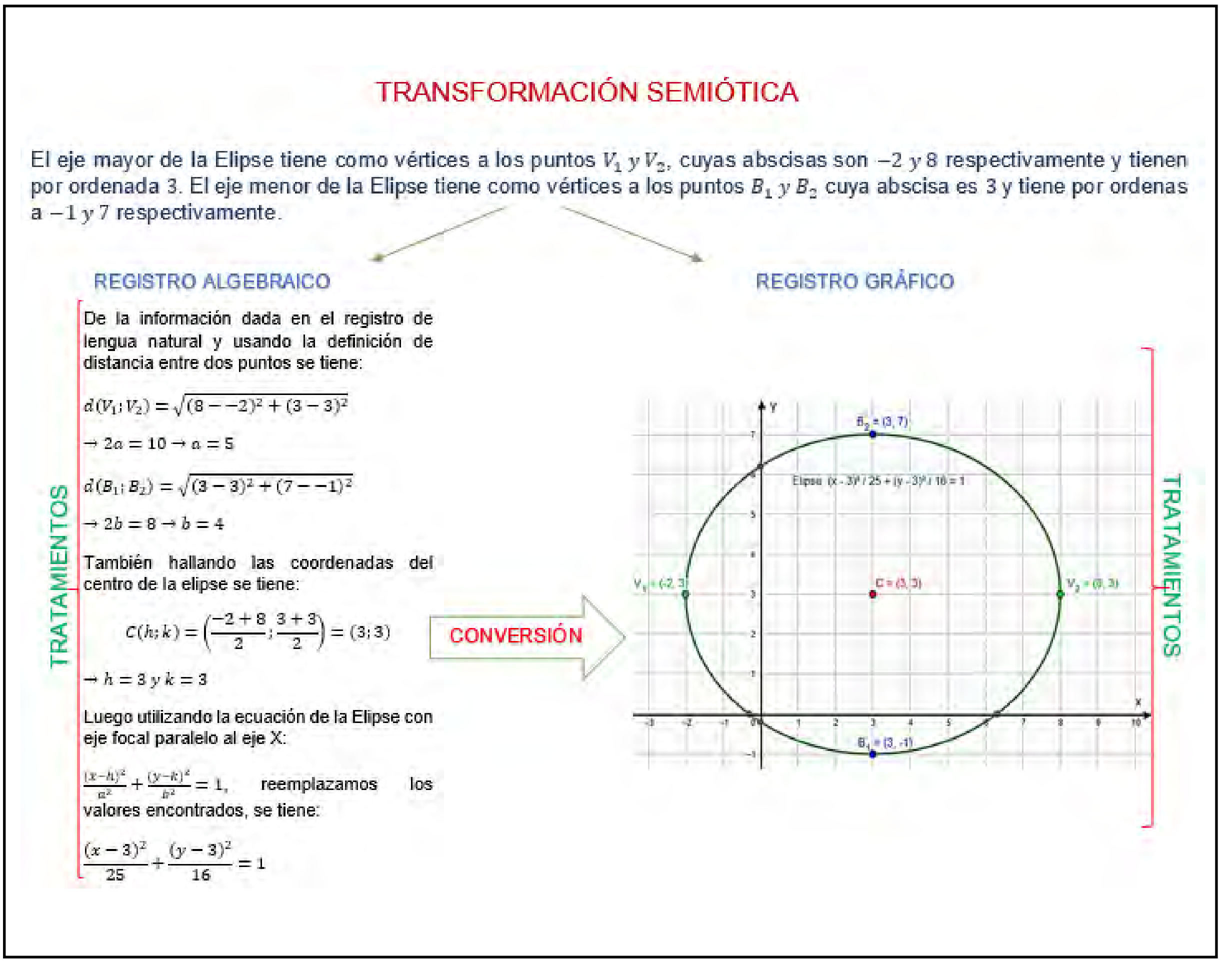


Figura 22. Tratamiento y conversión de la Elipse.
Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la Figura 22, se realizan ciertos tratamientos en el registro de lengua natural, los cuales permiten hallar, en primer lugar, los valores de a y b, para luego determinar con ellos las coordenadas del centro $C(3;3)$. Inmediatamente se enuncia la ecuación de la Elipse con eje focal paralelo al eje X

También hay una conversión de la información dada en el registro algebraico al registro gráfico. En ese sentido en la conversión que mencionamos, se observa que el registro de llegada refleja la información dada en el registro de partida.

En ese sentido, Duval (2006) menciona que una conversión se considera “congruente” cuando el registro de llegada refleja el registro de partida. De manera análoga, se dice que una conversión es “no congruente” cuando en el registro de llegada no hay nada que recuerde el registro de partida.

Un factor que influye en el nivel de congruencia o de no congruencia de una conversión es el sentido en que se da, ya que realizar la conversión del registro de lengua natural para el

algebraico no presenta, la mayoría de las veces, la misma dificultad y el mismo costo cognitivo que realizar una conversión del registro algebraico para el registro de la lengua natural. Del mismo modo, construir un gráfico, dado su expresión algebraica, no presenta la misma dificultad que construir una expresión algebraica dada su representación en el registro gráfico. Es decir, realizar la conversión en un sentido no implica una conversión natural, por parte del alumno, en el otro sentido.

Como nuestra actividad está diseñada para promover que los estudiantes movilicen sus conocimientos matemáticos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico, se cree oportuno el análisis de las acciones realizadas por los estudiantes en su aula cuando resuelven la actividad a la luz de la teoría de registros de representación semiótica.

En ese sentido, mostraremos la metodología de investigación y los procedimientos metodológicos.

3.2 Metodología y procedimientos

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010) la investigación cualitativa permite analizar y describir situaciones, opiniones y comportamientos observables en los sujetos de estudio. Dichas observaciones se llevan a cabo en su entorno natural con el propósito de valorar el desarrollo de los sucesos sin hacer alteraciones de la realidad.

Al respecto, los autores señalan que:

> *El enfoque cualitativo se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados. Es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. También es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema del estudio ha sido poco explorado o no se ha hecho investigación al respecto en algún grupo social específico.* (p.364)

En ese sentido, como nuestro trabajo de investigación tiene como fin identificar, describir y analizar la manera en que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de la Elipse en su aula de clase, se considera que lo mencionado por los autores se adecúa a nuestro interés, ya que se identificarán y analizarán detalladamente las opiniones y significados dados por un estudiante cuando resuelve una actividad dentro de su aula de clase, además de que nuestro trabajo con estudiantes de Arquitectura ha sido poco explorado.

Hernández, Fernández y Baptista (2010) manifiestan que la investigación cualitativa inicia con la idea de qué es lo que se va a estudiar y que de esta manera el investigador debe estar familiarizado con el tema en cuestión, así como conocer al detalle asuntos relacionados con el tema a investigar.

En nuestra investigación, la experiencia particular, como docente del curso de Matemática Básica para Arquitectura, motivó el estudio de la Elipse, ya que se priorizan las representaciones algebraicas en su estudio, además de las aplicaciones que este objeto matemático puede tener en dicha carrera y que serán tomadas en cuenta para la creación de la actividad.

Por otro lado, se tienen en cuenta otros aspectos relacionados a nuestro estudio y que, según lo mencionado anteriormente, deben ser tomados en cuenta. Dichos aspectos son, por ejemplo, la duración de la clase; el grupo con el que se trabajará; la disponibilidad de dicho grupo; la relación que se tiene con ese grupo; la disponibilidad del docente; la posibilidad de llevar a cabo la investigación en la institución; entre otros aspectos.

De acuerdo con los autores, después de tener claro qué es lo que se quiere investigar y conocer detalles referentes a este estudio, se deben plantear los objetivos de la investigación, los cuales manifiestan el propósito fundamental del estudio, buscando reflejar lo que se aspira conocer con la investigación. Como complemento a dichos objetivos, se plantean las preguntas de investigación que se buscan responder en la parte final del estudio para alcanzar los objetivos.

En nuestro trabajo se establece, como pregunta de investigación, *¿Cómo estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse al resolver una actividad didáctica que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico?* En base a nuestra pregunta de investigación, se presenta el objetivo general de nuestra investigación, el cual consiste en analizar cómo los estudiantes movilizan los conceptos matemáticos de la Elipse, aprendidos previamente en clase, cuando se les presenta una actividad en un contexto real y que requiera el uso de registros de representación semiótica.

Los autores señalan que el proceso cualitativo destaca la importancia de la justificación del trabajo, el cual debe tener criterios como la conveniencia, relevancia social, relevancia académica, así como la viabilidad del trabajo que busca responder las siguientes interrogantes: ¿es factible realizar el estudio? ¿contamos con los medios para llevarlo a cabo?

Respecto a lo señalado anteriormente, nuestro trabajo se justifica con las investigaciones de referencia, las cuales muestran su preocupación en el aprendizaje y enseñanza de la Elipse en el nivel superior con la importancia que tiene la cónica Elipse, mostrada en el plan de estudio de las universidades del Perú, con la importancia que tiene la cónica Elipse mostrada en sus aplicaciones en la carrera de Arquitectura (en este punto se presentó la propiedad sonora de la Elipse en la construcción del Teatro de Bilbao). Además, se considera que nuestro trabajo es significativo, ya que a partir de los resultados expuestos aquí se podrían adaptar algunas condiciones para mejorar el estudio de la Elipse en la carrera en la carrera de Arquitectura.

Por último, se justifica nuestro estudio en el artículo 40 de la ley universitaria (2014), el cual muestra la importancia del estudio de los cursos de primer ciclo, en donde se encuentra nuestro objeto de estudio.

Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalan que, una vez realizado el planteamiento del problema, se debe elegir un ambiente en dónde se comenzará a responder la pregunta de investigación. El ambiente, en un inicio, puede cambiar, aumentar o reducirse, puesto que la primera tarea será reconocer el contexto que se escoge al inicio, lo que significará verificar con visitas y evaluaciones si el ambiente es el adecuado. Incluso estas visitas nos permitirán tomar precauciones en caso aparezca alguna situación que pueda dificultar nuestro estudio, como, por ejemplo, si uno es conocido en dicho ambiente, si se tuvo alguna mala experiencia con el grupo donde se va a elaborar la investigación, si se es muy diferente a los sujetos de investigación y otras situaciones que puedan influenciar en el estudio.

Asimismo, respecto al ambiente dos dimensiones, resultan ser esenciales: la accesibilidad y la conveniencia. La accesibilidad discute las interrogantes: ¿se puede acceder a los datos que son necesarios para nuestro estudio?, ¿qué tiempo nos tomará realizar el estudio? La convivencia, en cambio, está relacionada con preguntas como ¿el ambiente elegido contiene sujetos, situaciones, casos, sucesos que permitan responder la pregunta de investigación? o ¿podemos alcanzar los datos que necesitamos?

Una vez justificado nuestro estudio, se examinó si el trabajo de investigación se podía llevar a cabo y para ello, en primer lugar, se tramitaron los permisos necesarios con las autoridades correspondientes de la universidad donde se aplica la actividad, quienes dieron su autorización para utilizar el aula de clase como nuestro ambiente de estudio. Por otro lado, como segundo punto, se consultó al docente del aula la forma de trabajo del curso y la disponibilidad del tiempo para poder llevar a cabo nuestra actividad y, por último, para el desarrollo de la actividad, se procedió a escoger y solicitar un aula que permita el desarrollo de nuestro trabajo.

Hernández, Fernández y Baptista (2010) indican que una vez ingresado al ambiente o campo, los investigadores deben decidir quiénes formaran parte de la muestra (sujetos de investigación) y recabar datos referentes a todo lo relacionado con los participantes. Para los autores, *"la inmersión total en el ambiente implica: observar los eventos que ocurren en el ambiente…, tomar notas y empezar a generar datos en forma de apuntes, mapas, esquemas, cuadros, diagramas y fotografías."* (p.374). El investigador debe tomar nota de todo lo que contempla, oye y percibe, mediante anotaciones o notas de campo.

Para la investigación cualitativa, la recolección de datos debe darse en los ambientes naturales de los sujetos de investigación y debe ser llevada a cabo por el investigador. Los datos pueden ser recolectados a través de diversas técnicas como entrevistas, notas de campo, grabaciones, análisis de documentos, entre otros, indistintamente de cuál sea la forma en cómo se obtienen los datos, dichos elementos tienen como características que fueron elaborados por los sujetos de estudio y se encuentran en su lenguaje natural y, por lo tanto, tienen mucha riqueza de datos.

Una vez obtenidos los datos, como se mencionó, estos deberán ser analizados, interpretados y estructurados por el investigador, siendo esta la razón por la cual el papel que asume debe ser de empático y a la vez deberá minimizar sus creencias y experiencias asociadas con el problema de investigación.

En nuestro trabajo de investigación, la recolección de datos se dio a través de la toma de anotaciones hechas en el aula por parte del investigador y principalmente de la actividad propuesta. Dicha actividad fue desarrollada propiamente por los estudiantes, sin la intervención del docente a cargo ni la del investigador. Una vez adquiridos los datos, se procedió a analizarlos, teniendo en cuenta la teoría de Registros de Representación Semiótica, escogiendo finalmente para nuestro trabajo tres actividades que se mostrarán en el siguiente capítulo.

La investigación cualitativa, de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010), no cuenta con etapas estructuradas en un orden, sino por el contrario, ya que en este tipo de investigación muchas veces es necesario volver a retomar ciertos puntos realizados con el objetivo de responder la pregunta de investigación. En ese sentido, el reporte de los resultados, en la parte final de la investigación, puede necesitar regresar al ambiente para ser modificado o incluso la muestra (participantes) podría ser cambiada con el fin de lograr los objetivos planteados.

Finalmente, de acuerdo con los autores, el reporte de los resultados tiene ciertas características que deben ser cumplidas, las cuales son las razones por las que se originaron la investigación, beneficiarios de la investigación y el contexto académico o no académico en el cual se va a presentar el estudio. Además, es necesario resaltar que existen diversas estructuras del reporte cualitativo, pero la más común es la que mostramos en la siguiente figura (ver Figura 23).

1. Portada
2. Índices
3. Resumen
4. Cuerpo del trabajo
   - *Introducción*: incluye los antecedentes
   - Revisión de la literatura
   - Método
   - Análisis y resultados
   - Discusión
5. Referencias o bibliografía
6. Apéndices

Figura 23. Estructura del reporte cualitativo.
Fuente: Hernández, Fernández y Baptista (2010, p.525)

De acuerdo con lo mencionado, consideramos que nuestro estudio tiene las características de una investigación cualitativa en Educación Matemática, ya que analizaremos y describiremos cómo los estudiantes de la carrera de Arquitectura se desenvuelven cuando resuelven una actividad didáctica que moviliza la noción de Elipse y que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico en su entorno natural.

Procedimientos metodológicos de la investigación:

Con el fin de analizar de qué manera los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad didáctica que requiere el uso de los registros de lengua natural, algebraico y gráfico, planteamos las siguientes etapas:

a) Elección del tema:
Esta etapa parte del interés propio del investigador por estudiar un tema elegido que sea posible de ser elaborado.

En ese sentido, decidimos llevar a cabo una investigación relacionada con el estudio de la Elipse basada en aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica con estudiantes del curso de Matemática Básica de la carrera de Arquitectura de una universidad privada de Lima, ya que se priorizan las representaciones algebraicas en su estudio.

b) Levantamiento bibliográfico:

Luego de elegir nuestro tema, realizamos la búsqueda de investigaciones que están relacionadas con nuestro objeto de estudio, como lo es la Elipse, así como investigaciones que tengan como marco teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y además se buscaron trabajos de investigación cuyos sujetos de estudio son estudiantes de la carrera de Arquitectura.

Del mismo modo, se realizó un estudio referente a los sílabos y mallas curriculares de dos universidades privadas del Perú, con el fin de obtener información referente a la Elipse como contenido matemático, así como la revisión de libros didácticos.

c) Formulación del problema:

Se estableció la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de nuestro estudio. Además, en esta etapa, justificamos el interés de nuestra investigación.

En ese sentido, la pregunta de investigación en nuestro trabajo es *¿cómo estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse al resolver una actividad didáctica que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico?* En base a nuestra pregunta de investigación, se presenta el objetivo general, el cual consiste en analizar cómo los estudiantes movilizan los conceptos matemáticos de la Elipse aprendidos previamente en clase cuando se les presenta una actividad en un contexto real y que requiera el uso de registros de representación semiótica.

Respecto a la justificación, esta se da con las investigaciones de referencia, las cuales muestran su preocupación en el aprendizaje y enseñanza de la Elipse en el nivel superior, con la importancia que tiene la Elipse, mostrada en el plan de estudio de las universidades del Perú y en sus aplicaciones en la carrera de Arquitectura.

d) Elaboración del plan provisional:

Nuestro trabajo de investigación está estructurado conforme al siguiente índice, el cual está formado por cuatro capítulos:

Capítulo I: Problemática
Capítulo II: Objeto matemático en estudio
Capítulo III: Marco teórico y metodológico
Capítulo IV: Parte experimental y análisis de la investigación

e) Diseño y aplicación de la actividad didáctica:

En esta etapa, se diseña una actividad que consta de cuatro preguntas, las cuales tienen como fin promover que los estudiantes movilicen sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico.

Por otro parte, para poder aplicar nuestra actividad dentro del aula de clase, se obtuvo los permisos necesarios con las autoridades correspondientes de una universidad privada de

Perú, así como la carta de consentimiento de cada uno de los estudiantes que realizaron la actividad.

f) Análisis de la actividad didáctica:

En esta etapa de nuestra investigación, se analiza y describe la información obtenida luego de aplicar la actividad didáctica.

g) Redacción del informe:

Se formulan las conclusiones y sugerencias de nuestra investigación.

En el capítulo siguiente presentaremos la parte experimental y el análisis de los datos de la actividad.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el presente capítulo, detallaremos las características de los sujetos de investigación y la descripción de las actividades. Además, mostraremos el análisis de la actividad, la cual fue diseñada a través de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

4.1 Descripción de los sujetos de investigación

Por ser la investigación de corte cualitativo, no necesitamos tener una muestra muy grande, ya que nuestro interés es encontrar los casos necesarios que permitan responder nuestra pregunta de investigación.

En ese sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman que:

> Como ya se ha comentado, en los estudios cualitativos el tamaño de muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia. Lo que se busca en la indagación cualitativa es profundidad. Nos conciernen casos (participantes, personas, organizaciones, eventos, animales, hechos, etc.) que nos ayuden a entender el fenómeno de estudio y a responder las preguntas de investigación. (p.394)

En nuestro trabajo de investigación, participaron 34 estudiantes del curso de Matemática Básica del primer ciclo de la carrera de Arquitectura de una universidad privada de Lima, cuyas edades están entre 16 y 18 años de edad y que cursan por primera vez dicho curso.

Una vez llevado a cabo la actividad, se procedió a analizar los resultados, teniendo en cuenta la teoría de Registros de Representación Semiótica, escogiendo finalmente para nuestro trabajo la resolución dada por tres estudiantes elegidos al azar y que mostraron el desarrollo de la actividad en su totalidad. Es preciso mencionar que la identidad de los estudiantes será preservada por ser menores de edad.

Los tres estudiantes seleccionados tienen conocimientos de Geometría Analítica en temas como sistemas de coordenadas cartesianas, distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, pendiente de una recta, ecuaciones de la recta, gráficas de rectas, intersección de rectas, circunferencia, parábola y la Elipse.

Por último, respecto a la experimentación de la actividad, esta se dio en el salón de clase, en el horario de clase, y se contó con la presencia del profesor del curso, así como la del investigador.

A continuación, presentaremos la descripción de la actividad.

4.2 Descripción de la actividad

La actividad está compuesta por cuatro preguntas y tiene por duración 40 minutos. Dichas preguntas tienen como objetivo promover que los estudiantes movilicen sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico.

A continuación, el Cuadro 4 muestra la organización de la actividad.

Cuadro 4. Detalle de la actividad

Actividad	Descripción
Pregunta 1	En esta pregunta los estudiantes evocan sus conocimientos previos referentes a las longitudes de los ejes mayor y menor de una Elipse y lo asocian con el ancho y el largo de ella, cuya información esta dada en el registro de lengua natural.
Pregunta 2	Esta pregunta se encuentra formada por tres ítems y para responderla los estudiantes deben movilizar sus conocimientos referentes a la ecuación de la Elipse horizontal y sus vértices. Para ello se apoyarán en la figura del Banco mundial de Mauricio y utilizarán el registro algebraico.
Pregunta 3	En esta pregunta los estudiantes analizan la información dada y movilizan sus conocimientos sobre los focos de la Elipse, y para poder responder utilizan el registro gráfico o el registro algebraico.
Pregunta 4	En esta pregunta los estudiantes identifican los elementos de la Elipse dada en el registro gráfico.

4.3 Análisis de la actividad

A continuación, presentamos el análisis de la actividad, que está compuesta por cuatro preguntas y que fue desarrollada con papel y lápiz. Dicha actividad fue diseñada a través de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

La actividad fue planeada con el fin de favorecer que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico.

De aquí en adelante se presenta el análisis de tres estudiantes a quienes llamaremos Rocio, Danilo y Corina.

Análisis de la pregunta 1:

El fin de esta pregunta es que los estudiantes de la carrera de Arquitectura usen la información brindada en el registro de lengua natural y determinen las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio (ver Figura 24).

CONSTRUCCIÓN ELÍPTICA DE LA SEDE DEL BANCO COMERCIAL DE MAURICIO

El Banco Comercial de Mauricio, fundado en 1838, es el banco más antiguo de la región del Océano Índico y se encuentra ubicado en la ciudad de Ebene, en África. Construido por el estudio Jean Francois Koening Architecs, fue elegido en el año 2011, por la Unión Internacional de Arquitectos para representar lo mejor de la arquitectura del continente africano.

La forma elíptica de este edificio de 9 pisos se consigue mediante el uso de estructuras de acero curvadas, columnas de hormigón y elementos curvados prefabricados, además, se sabe que el ancho de la elipse es 30 metros y el largo 65 metros.

1. Si la sede del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica, ¿qué elementos de la elipse se pueden inferir, cuando en el texto se indica que su ancho es de 30 metros y su largo es de 65 metros?

Figura 24. Análisis de la pregunta 1

En esta pregunta, se espera que los sujetos participantes interpreten la información dada en lengua natural: **"…se sabe que el ancho de la Elipse es 30 metros y el largo 65 metros…"** y, evocando sus saberes previos logrados en clase, vinculen respectivamente el valor del ancho y largo de la Elipse con las longitudes del eje menor y mayor de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio.

Respuesta esperada para la pregunta 1:

Relacionar la información brindada en el registro de lengua natural referente al ancho de la elipse con el ancho del edificio del Banco Comercial de Mauricio para hallar la longitud del eje menor. Es decir, $2b = 30$

Relacionar la información brindada en el registro de lengua natural referente al largo de la elipse con el largo del edificio del Banco Comercial de Mauricio para hallar la longitud del eje mayor. Es decir, $2a = 65$

A continuación, mostramos las respuestas de los estudiantes: *Rocio, Danilo y Corina.*

Estudiante Rocio.

En la Figura 25, se muestra la solución dada por la estudiante Rocio.

La forma elíptica de este edificio de 9 pisos se consigue mediante el uso de estructuras de acero curvadas, columnas de hormigón y elementos curvados prefabricados, además, se sabe que el ancho de la elipse es 30 metros y el largo 65 metros.

1. Si la sede del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica, ¿qué elementos de la elipse se pueden inferir, cuando en el texto se indica que su ancho es de 30 metros y su largo es de 65 metros?

Se puede inferir:

largo = $2a = 65$
$a = 32,5$

ancho = $2b = 30$
$b = 15$

Rpta: $a = 32,5$ y $b = 15$

Figura 25. Respuesta de Rocio a la pregunta 1

Se observa que la estudiante *Rocio* realizó tratamientos en el registro de lengua natural al encerrar y/o subrayar con lápiz los siguientes datos: **elementos, ancho, 30 metros, largo y 65 metros**. Tal y como se tenía previsto en nuestra solución esperada, *Rocío* interpretó la información dada dentro del entorno de la actividad: "**ancho de la Elipse es 30 metros y el largo 65 metros"**, denotando al largo y ancho de la Elipse que modela al edificio del Banco Comercial de Mauricio por $2a$ y $2b$ respectivamente. En este caso, se observa que la estudiante asoció la figura dada en la pregunta 1 con la Elipse, cuyo eje focal es paralelo al eje X.

Por otro lado, en la solución de la estudiante, se observa una conversión entre el registro de lengua natural y el registro algebraico, pues interpreta la información dada y escribe: "se puede inferir que el largo es $2a = 65$ y el ancho es $2b = 30$".

Además, *Rocío,* realizó tratamientos en el registro algebraico y determinó los valores de a y b, a pesar de que esto no era lo solicitado en la pregunta, esto quizás se deba a la forma en que se trabaja en el curso, el cual, en gran parte de los ejercicios planteados, busca hallar los valores de a y b para establecer la ecuación de la Elipse.

En consecuencia, el tratamiento dado por la estudiante en el registro de lengua natural le permitió responder que el largo y el ancho de la Elipse son los valores de $2a$ y $2b$ que, de acuerdo con Stewart, Redlin y Watson (2012), son las longitudes del eje mayor y del eje menor de la Elipse.

Ante esto, podemos afirmar que la estudiante logra el objetivo de la actividad, que es determinar las longitudes de los ejes de la Elipse; sin embargo, es importante señalar que, al calcular los valores de a y b *Rocío* muestra su predilección por trabajar en el registro algebraico, esto debido quizás a la forma tradicional en que se estudian estos temas.

Estudiante Danilo.

El estudiante *Danilo*, al recibir la actividad planteada por parte del investigador, usa su lápiz y resaltador para encerrar y realzar el dato dado en el registro de lengua natural: **"ancho de la Elipse es 30 metros y el largo 65 metros"**. Esto evidencia que, en búsqueda de la respuesta a la pregunta planteada, el estudiante realiza tratamientos en el registro de lengua natural para obtener la solución.

Así, como se tenía previsto en nuestra solución esperada, *Danilo*, interpretó correctamente la información brindada en el registro de lengua natural y, usando sus conocimientos previos referentes a la longitud de los ejes mayor y menor de la Elipse, relacionó dichos elementos con los valores del ancho y largo del edificio del Banco Comercial de Mauricio. Esto se ve reflejado cuando el estudiante contesta que: "*los elementos que se pueden encontrar son el eje mayor y el eje menor, siendo el largo 65 m el eje mayor y el ancho 30 m el eje menor*" (ver Figura 26).

La forma elíptica de este edificio de 9 pisos se consigue mediante el uso de estructuras de acero curvadas, columnas de hormigón y elementos curvados prefabricados, además, se sabe que el ancho de la elipse es 30 metros y el largo 65 metros.

1. Si la sede del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica, ¿qué elementos de la elipse se pueden inferir, cuando en el texto se indica que su ancho es de 30 metros y su largo es de 65 metros?

Los elementos que se pueden encontrar son el eje Mayor y el eje Menor;
siendo el largo 65m el eje Mayor
y
el Ancho 30m el eje Menor.

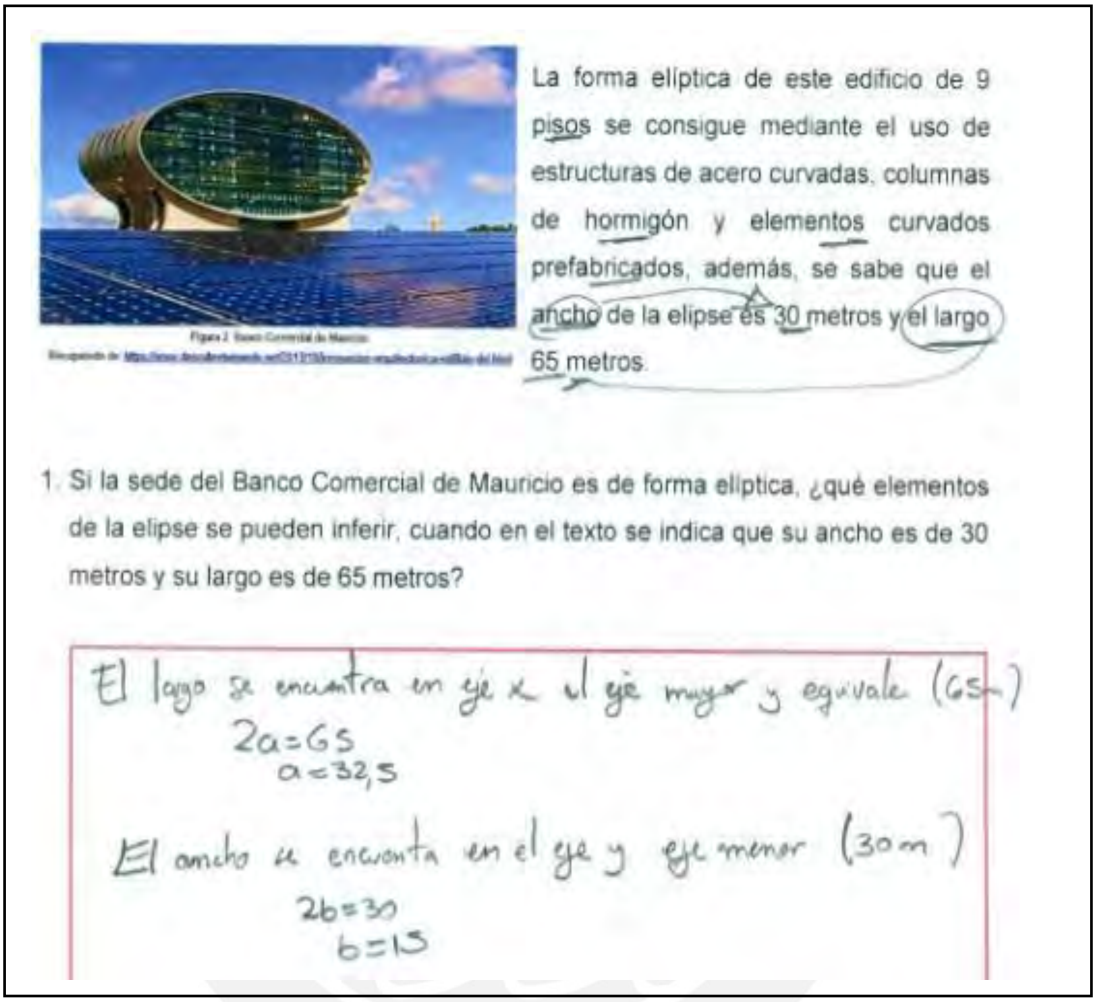
Figura 26. Respuesta de Danilo a la pregunta 1

De la respuesta mostrada por *Danilo*, se concluye que responde a la pregunta planteada asociando la figura dada en la pregunta 1 con la Elipse, cuyo eje focal es paralelo al eje X, y realizando tratamientos en el registro de lengua natural. Dichos tratamientos se evidencian cuando *Danilo* resalta y encierra la información dada en el texto y apoyándose en sus conocimientos previos brinda la solución a la pregunta planteada en el mismo registro de lengua natural. Al respecto, Duval (2004) señala que los tratamientos son transformaciones que corresponden a procesos de justificación y que, en ese sentido, se buscará "el mejor registro" para poder justificar una idea. Ante esto, podemos afirmar que el estudiante *Danilo* usó el registro de lengua natural para justificar su respuesta y obtener lo deseado.

En este análisis se observa, por parte del estudiante, un dominio del registro en lengua natural y además se puede concluir que el objetivo de esta pregunta se cumplió en su totalidad, ya que la finalidad de esta pregunta es que los estudiantes de Arquitectura, con la información brindada en el registro de lengua natural, determinen las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio.

Estudiante Corina.

A continuación, se muestra la solución presentada por la estudiante *Corina* (ver Figura 27).



La forma elíptica de este edificio de 9 pisos se consigue mediante el uso de estructuras de acero curvadas, columnas de hormigón y elementos curvados prefabricados, además, se sabe que el ancho de la elipse es 30 metros y el largo 65 metros.

1. Si la sede del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica, ¿qué elementos de la elipse se pueden inferir, cuando en el texto se indica que su ancho es de 30 metros y su largo es de 65 metros?

El largo se encuentra en eje x el eje mayor y equivale (65m)
2a=65
a=32,5

El ancho se encuenta en el eje y eje menor (30m)
2b=30
b=15

Figura 27. Respuesta de Corina a la pregunta 1

Como se observa, la estudiante *Corina* realizó tratamientos en el registro de lengua natural al subrayar, encerrar y relacionar mediante flechas las palabras **ancho y largo** con los valores **30 metros y 65 metros** respectivamente. Luego, como se tenía previsto en nuestra solución esperada, la estudiante interpretó esta información dada en el registro de lengua natural y la relacionó con los valores de la longitud del eje mayor y del eje menor de una Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X. Esto se evidencia en la respuesta brindada que señala: "…*el largo se encuentra en el eje X, el eje mayor y equivale a* 65 *metros …el ancho se encuentra en el eje menor* $(30\ m)$". En este caso, se observa que la estudiante asoció la figura dada en la pregunta 1 con la Elipse, cuyo eje focal es paralelo al eje X.

Por otro parte se observa en la solución de *Corina* una conversión entre el registro de lengua natural y el registro algebraico, pues interpreta la información dada y escribe: "el largo se encuentra en el eje X y equivale $(65\ m)$, $2a = 65$ …el ancho se encuentra en el eje menor $(30\ m)$, $2b = 30$".

Posteriormente y a pesar de que no era lo solicitado en la pregunta, *Corina,* realizó tratamientos en el registro algebraico y determinó los valores de a y b, notándose su favoritismo por trabajar en el registro algebraico (esto quizás se deba a la forma en que se trabaja en el curso).

De las respuestas brindadas por los estudiantes, se infiere que el objetivo de esta pregunta se logra, ya que *Rocio, Danilo* y *Corina*, en búsqueda de la solución a la pregunta planteada, evocan sus conocimientos previos referentes al elemento de la Elipse, como lo son la longitud de los ejes mayor y menor. Además, dichos estudiante hicieron tratamientos en el registro de lengua natural, con lo cual logran el objetivo planteado en esta parte.

Análisis de la pregunta 2:

Esta pregunta está formada por tres ítems, donde el objetivo de estos es que los estudiantes de Arquitectura identifiquen la ecuación de la Elipse, así como los vértices del eje mayor y del eje menor de la Elipse que modela el edificio del Banco Comercial de Mauricio. Para lograr los objetivos planteados, los estudiantes deben hacer uso de los registros de lengua natural, algebraico y gráfico, apoyándose en la figura dada en el problema.

Análisis del ítem (a):

Este primer ítem, tiene como fin que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos referentes a la ecuación de la Elipse. Este objetivo se logra haciendo uso de la figura dada, así como el uso del registro gráfico y del registro algebraico, para finalmente dar la ecuación de la Elipse.

En la Figura 28 se muestra la pregunta 2 a)

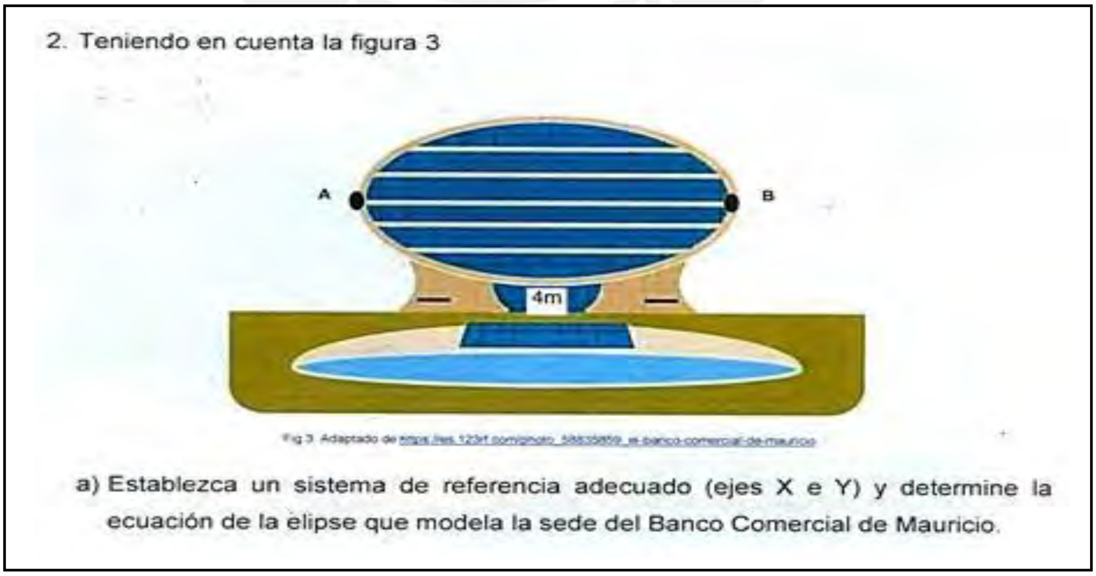


Figura 28. Análisis de la pregunta 2 a)

En esta pregunta, se espera que los estudiantes de la carrera de Arquitectura asocien la figura dada en la pregunta 2 a) con la Elipse, y que puedan darse cuenta que su eje focal es paralelo al eje X de tal forma que elijan el sistema de referencia, que ellos consideren adecuado. Esta elección conlleva a que los estudiantes usen la información obtenida de la pregunta 1), referente a las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse, y el registro gráfico para determinar el centro de la Elipse. En este caso de los 34 estudiantes, 30 eligieron como centro de la Elipse al punto $(0; 0)$, tres estudiantes eligieron como centro de la Elipse al punto $(0,19)$ y un solo estudiante eligió como centro de la Elipse al punto $(32.5; 15)$. La preferencia por la elección del punto $(0; 0)$ como centro de la Elipse se deba quizás a que los estudiantes consideren que esto facilitará los cálculos en el registro gráfico o en el registro algebraico.

Finalmente, para obtener la ecuación solicitada, los estudiantes deben movilizar sus conocimientos previos referentes a las ecuaciones canónicas y trasladadas de la Elipse y realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

En ese sentido cuando se elaboró la actividad se consideró de acuerdo a nuestra experiencia como docentes, que los estudiantes de la carrera de Arquitectura pueden dar las siguientes soluciones esperadas:

Primera solución esperada:

Se espera que los estudiantes asocien la figura dada en el ítem 2 a) con la Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X y luego apoyándose en el registro gráfico elijan como centro al punto $(0; 0)$, determinando así el sistema de referencia mostrado en la Figura 29

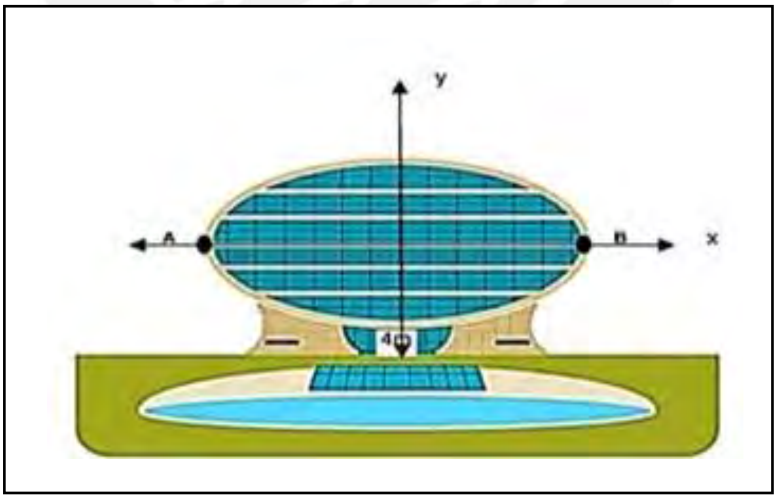


Figura 29. Primer sistema de referencia esperado de la pregunta 2 a)

Luego, para encontrar la ecuación de la Elipse, los estudiantes se apoyarán en los resultados encontrados en el problema 1) y realizando tratamientos en el registro gráfico ubicarán los valores correspondientes a los semiejes mayor y menor de la Elipse:

Así, de acuerdo al sistema de referencia elegido y movilizando conocimientos previos referentes a la ecuación canónica de la Elipse, además de realizar la conversión del registro grafico al registro algebraico se tiene la ecuación pedida en este ítem (ver Figura 30)

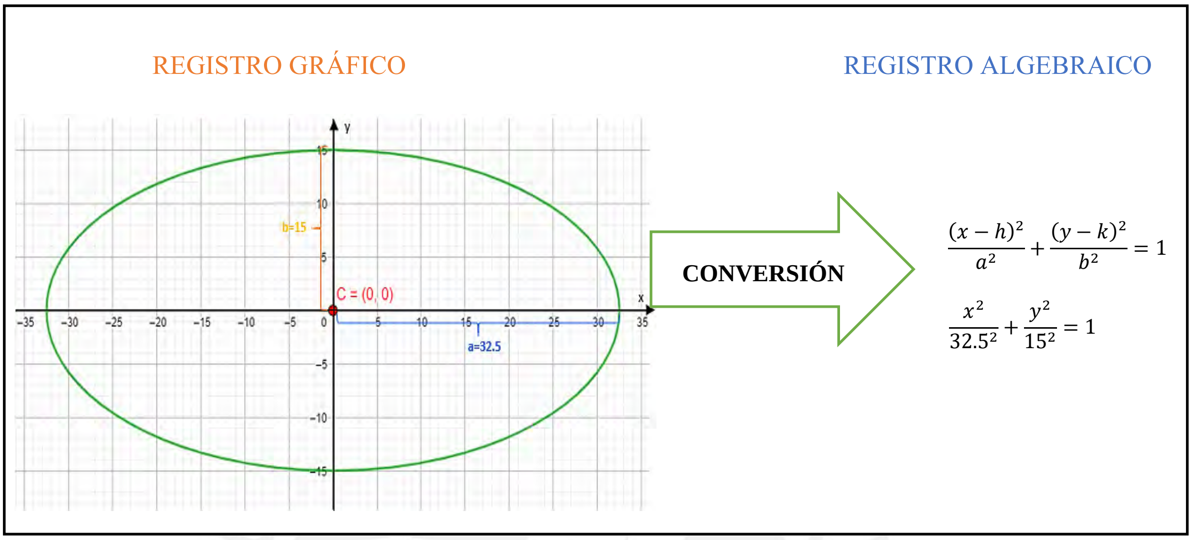


Figura 30. Primera solución esperada de la pregunta 2 a)

Segunda solución esperada:

Se espera que los estudiantes asocien la figura dada en el ítem 2 a) con la Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X y luego apoyándose en el registro gráfico elijan como sistema de referencia el mostrado en la Figura 31

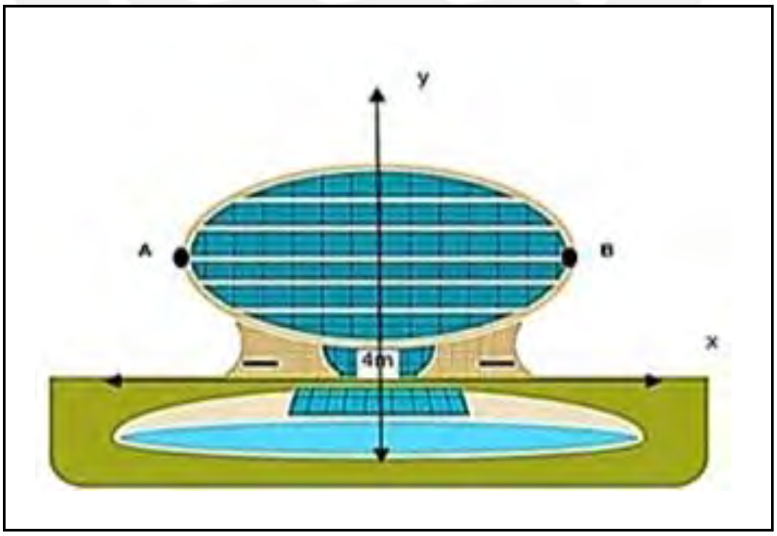


Figura 31. Segundo sistema de referencia esperado de la pregunta 2 a)

Para encontrar el centro de la Elipse los estudiantes deben utilizar la información obtenida en la pregunta 1 referente a las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse y además considerar la distancia del punto más bajo de la forma elíptica del Banco Comercial de Mauricio al nivel del suelo (4 metros)

Con los valores de a y b (longitudes de los semiejes mayor y menor de la Elipse respectivamente) encontrados y el valor de 4 metros, los estudiantes se apoyarán en el registro gráfico mostrado en la Figura 31 y determinarán las coordenadas del centro de la Elipse.

Finalmente, para encontrar la ecuación solicitada se movilizarán conocimientos previos referentes a la ecuación trasladada de la Elipse y se utilizará la información obtenida en el registro gráfico la cual será heredada al registro algebraico, teniendo así una conversión que va del registro gráfico al algebraico. (ver Figura 32)

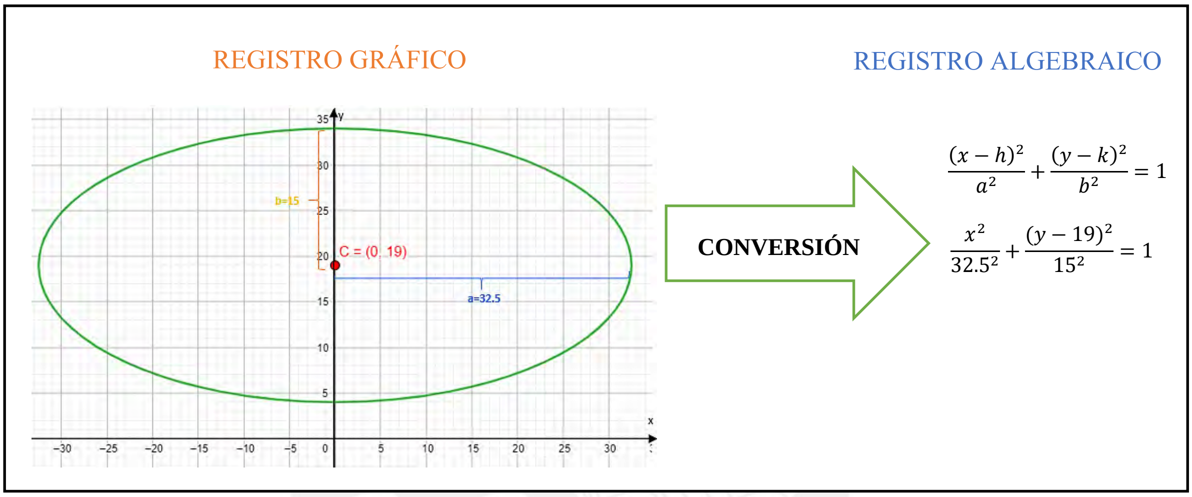


Figura 32. Segunda solución esperada de la pregunta 2 a)

Tercera solución esperada:

Se espera que los estudiantes asocien la figura dada en el ítem 2 a) con la Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X y luego apoyándose en el registro gráfico elijan como sistema de referencia el mostrado en la Figura 33

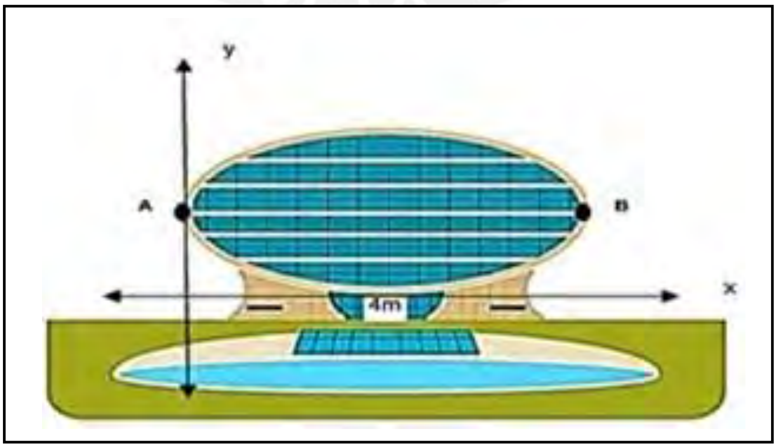


Figura 33. Tercer sistema de referencia esperado de la pregunta 2 a)

Para encontrar el centro de la Elipse los estudiantes deben utilizar la información obtenida en la pregunta 1 referente a las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse. Así con los valores de a y b (longitudes de los semiejes mayor y menor de la Elipse respectivamente) encontrados, los estudiantes se apoyarán en el registro gráfico mostrado en la Figura 33 y determinarán las coordenadas del centro de la Elipse.

Finalmente, para encontrar la ecuación solicitada se movilizarán conocimientos previos referentes a la ecuación trasladada de la Elipse y se utilizará la información obtenida en el registro gráfico la cual será heredada al registro algebraico, teniendo así una conversión que va del registro gráfico al algebraico. (ver Figura 34)

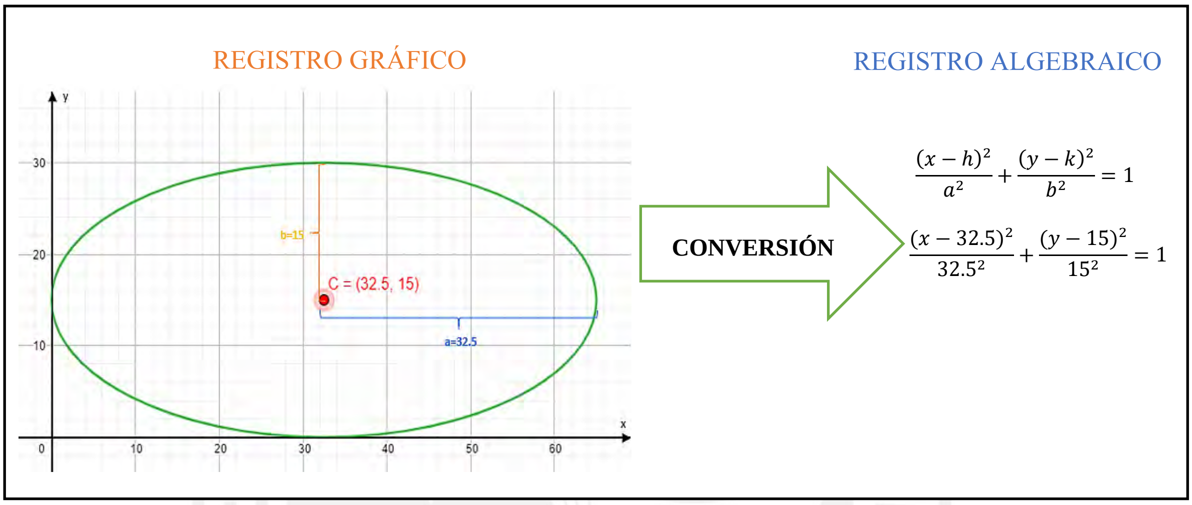


Figura 34 Tercera solución esperada de la pregunta 2 a)

Cuarta solución esperada:

Se espera que los estudiantes asocien la figura dada en el ítem 2 a) con la Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X y luego apoyándose en el registro gráfico elijan como sistema de referencia el mostrado en la Figura 35

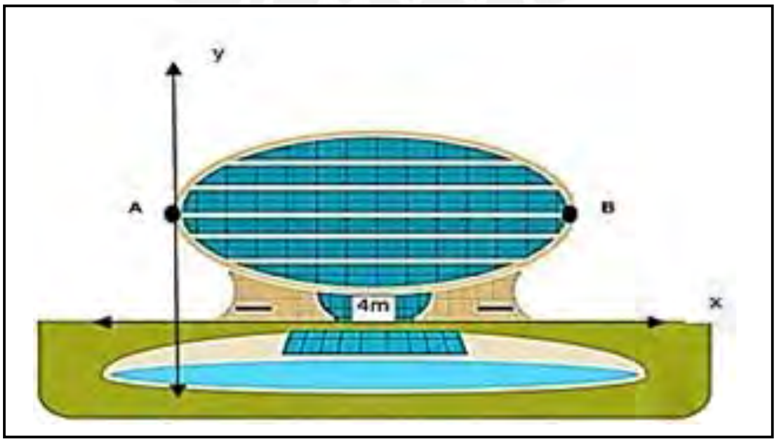


Figura 35. Cuarto sistema de referencia esperado de la pregunta 2 a)

Para encontrar el centro de la Elipse los estudiantes deben utilizar la información obtenida en la pregunta 1 referente a las longitudes de los ejes mayor y menor de la Elipse y además considerar la distancia del punto más bajo de la forma elíptica del Banco Comercial de Mauricio al nivel del suelo (4 metros)

Con los valores de a y b (longitudes de los semiejes mayor y menor de la Elipse respectivamente) encontrados y el valor de 4 metros, los estudiantes se apoyarán en el registro gráfico mostrado en la Figura 35 y determinarán las coordenadas del centro de la Elipse.

Finalmente, para encontrar la ecuación solicitada se movilizarán conocimientos previos referentes a la ecuación trasladada de la Elipse y se utilizará la información obtenida en el registro gráfico la cual será heredada al registro algebraico, teniendo así una conversión que va del registro gráfico al algebraico. (ver Figura 36)

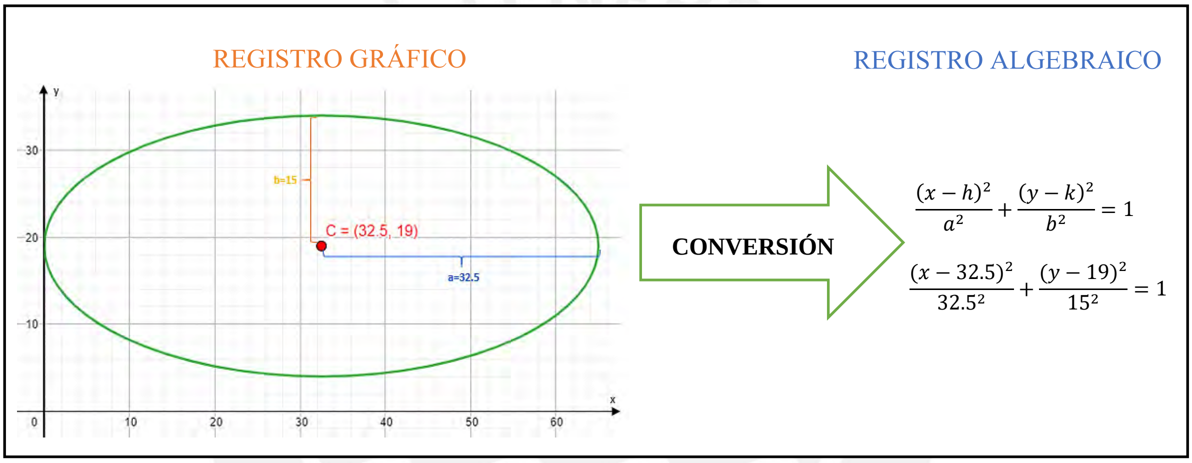


Figura 36 Tercera solución esperada de la pregunta 2 a)

A continuación, presentamos las respuestas de los estudiantes: *Rocío, Danilo* y *Corina.*

<u>Estudiante Rocío.</u>

En la Figura 37, se presenta la solución de la estudiante en mención.

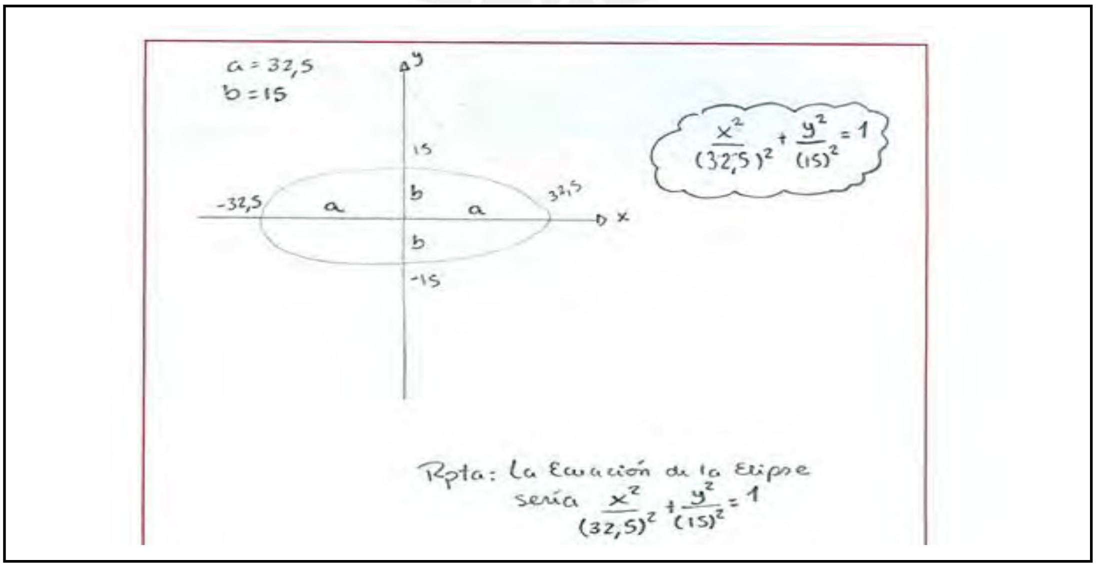


Figura 37. Respuesta de Rocio a la pregunta 2 a)

En este ítem, la estudiante *Rocío* relaciona la figura brindada en la pregunta 2 a) con la Elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X y luego esboza la gráfica de la cónica en el plano cartesiano. Seguidamente, apoyándose en la información obtenida en la pregunta 1, la estudiante realiza tratamientos en el registro gráfico, ubicando e indicando los valores de a y b en el plano cartesiano. La forma en cómo realizó estas acciones en el registro gráfico permite entender que la estudiante escogió como centro de la Elipse, al punto $(0; 0)$.

En ese sentido de acuerdo con Duval (2004), la estudiante realizó tratamientos en el registro gráfico, de tal manera que esto le permitió escoger un sistema de referencia adecuado para la Elipse y así justificar su respuesta

Una vez realizado el tratamiento en el registro gráfico, *Rocío* realizó una conversión del registro gráfico al algebraico y esto se evidencia cuando la estudiante brinda en la respuesta la representación algebraica de la ecuación de la Elipse con eje focal el eje X y centro el origen de coordenadas, indicando que dicha ecuación es: $\frac{x^2}{32.5^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1$.

En esta última parte, en términos de Duval (2004), se realiza una conversión del registro gráfico al registro algebraico, lo cual le permite a la estudiante diferenciar las distintas representaciones de la Elipse, contribuyendo en su actividad cognitiva y permitiéndole llegar a la respuesta de la pregunta dada.

Por otra parte, a pesar de no ser lo solicitado, *Rocío* indicó los valores -15, 15, -32.5 y 32.5 en la gráfica de la Elipse, lo que evidencia que la estudiante no ubica correctamente los puntos en el plano cartesiano, sin embargo, si muestra entendimiento referente a los vértices del eje mayor y menor de la Elipse.

El proceso evidenciado por *Rocío* permite afirmar que, en el desarrollo de la tarea, la estudiante pudo movilizar algunos conceptos matemáticos referentes a la Elipse, como por ejemplo la longitud del semieje mayor y menor y el centro de la cónica.

Estudiante Danilo.

En este ítem, el estudiante *Danilo* observó la figura dada y estableció un sistema de referencia que lo relaciona con la gráfica de la Elipse desplazada cuyo eje focal es paralelo al eje X.A continuación el estudiante realiza el esbozo de la Elipse dada en el ítem 2 a) y recordando los valores obtenidos en el problema 1, realiza tratamientos en el registro gráfico , indicando los valores de las longitudes de los semiejes mayor y menor de la Elipse, el valor de la distancia del punto más bajo de la Elipse hacia el suelo, las coordenadas del centro, las coordenadas de los puntos A y B y las abcisas de los focos de la Elipse. Esto último a pesar de no ser solicitado evidencia que *Danilo* reconoce los elementos de la Elipse en el registro gráfico.

Por otro lado, la forma en como realiza los tratamientos en el registro gráfico evidencia que el estudiante utilizó conceptos como distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento de recta y punto medio entre dos puntos. Sin embargo, *Danilo* no muestra una escala apropiada en el esbozo de la gráfica de la Elipse.

A continuación, mostramos la solución del estudiante en mención (ver Figura 38).

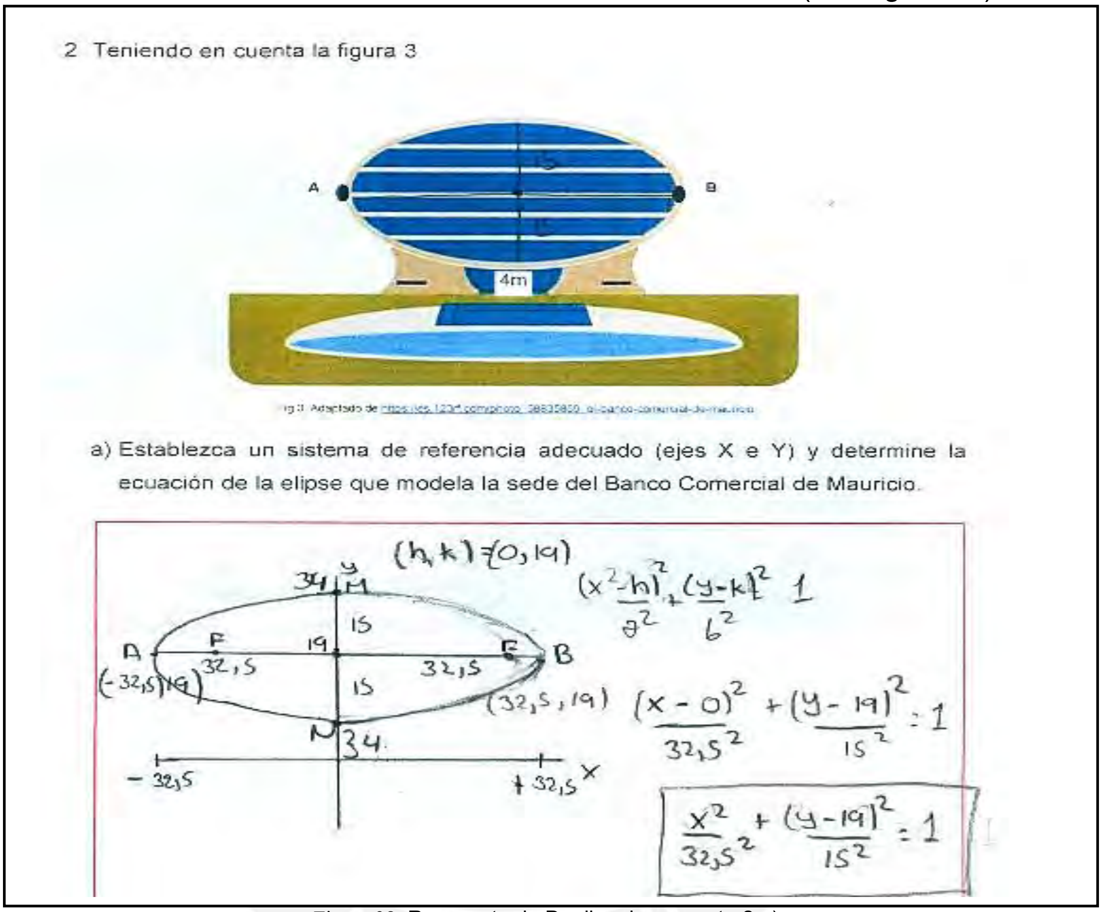


Figura 38. Respuesta de Danilo a la pregunta 2 a)

Una vez determinado el punto del centro de la Elipse, *Danilo* realizó una conversión al registro algebraico, en el cual estableció, primeramente, la ecuación de la Elipse con centro $c(h;k)$ y eje focal paralelo al eje X. Esto demuestra que el estudiante recuerda muy bien lo estudiado en clase y evoca sin ningún problema la ecuación de una Elipse con centro $c(h;k)$.

Luego, de realizar la conversión al registro algebraico, el estudiante realizó tratamientos en este registro, reemplazando los valores de h y k y simplificando, para de esta manera obtener la ecuación de la Elipse solicitada.

El proceso señalado apunta que el estudiante Danilo recordó la ecuación de una Elipse cuando el centro del mismo no es el origen de coordenadas. Además, el estudiante realizó tratamientos en el registro algebraico y en el registro gráfico. Esto último muestra el dominio de ambos registros por parte del estudiante.

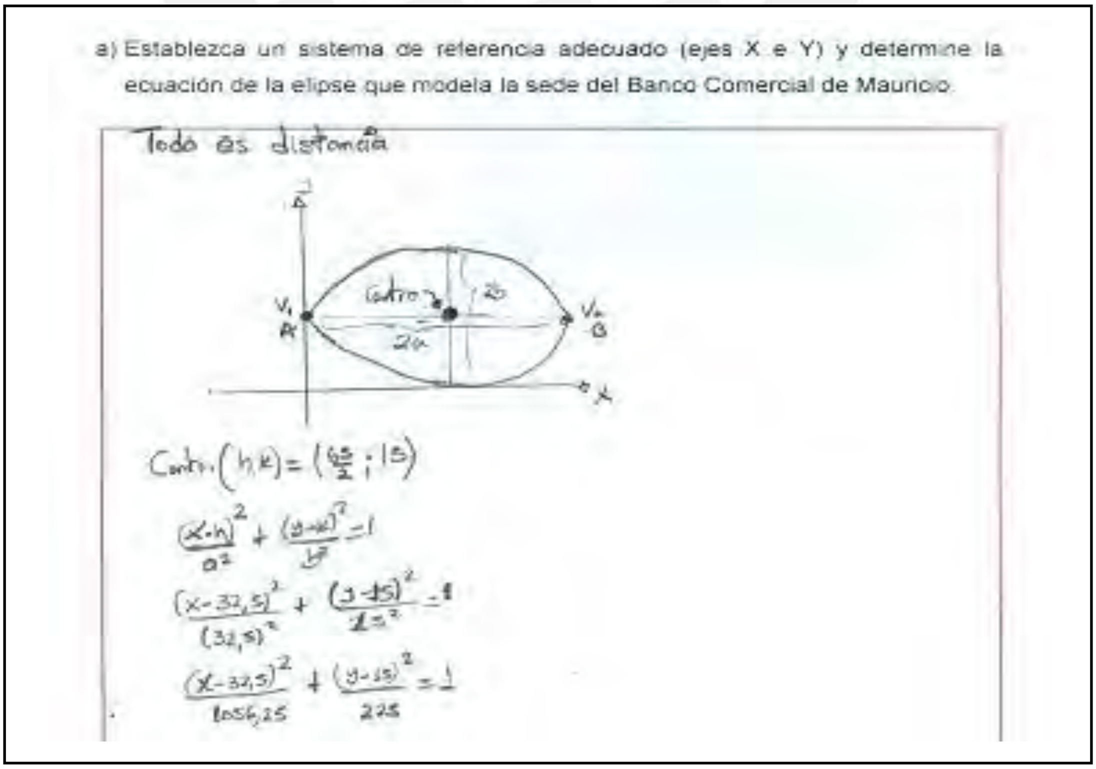
También es importante mencionar que por lo mostrado el estudiante es capaz de transitar del registro gráfico al registro algebraico con cierta facilidad, razón por la cual se puede decir que el estudiante realiza la conversión que va del registro de gráfico al registro algebraico sin ningún inconveniente. Podemos afirmar que el estudiante logró el objetivo de la pregunta y que además mostró dominio de los registros algebraico y gráfico.

<u>Estudiante Corina.</u>

La estudiante *Corina* escribió en su solución la frase “todo es distancia”. Entendemos por esto que la estudiante se guía por esta idea para escoger un sistema de referencia que solo considera la parte positiva del eje X y del eje Y. En otras palabras, *Corina* eligió el primer cuadrante para determinar la ecuación de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio, esto debido quizás a que asocia la pregunta 1 y los términos $2a$ y $2b$ encontrados en ella como valores positivos por representar las longitudes de los ejes mayor y menor de una Elipse.

Una vez dejado en claro esta parte, se observa que la estudiante realizó tratamientos en el registro gráfico, esto se evidencia cuando esboza la gráfica que se muestra en ítem 2 a)) en el plano cartesiano y señala en ella los puntos A y B, V_1 y V_2 y los valores $2a$, $2b$, así como también señala como “centro” a la intersección de los ejes de la Elipse. Esto último se deba quizás a la forma en cómo se presentó en clase al centro de una Elipse.

A continuación, mostramos la solución de la estudiante (ver Figura 39)


a) Establezca un sistema de referencia adecuado (ejes X e Y) y determine la ecuación de la elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio.

Todo es distancia

Centro $(h,k) = \left(\frac{65}{2} ; 15\right)$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-32{,}5)^2}{(32{,}5)^2} + \frac{(y-15)^2}{15^2} = 1$$

$$\frac{(x-32{,}5)^2}{1056{,}25} + \frac{(y-15)^2}{225} = 1$$

Figura 39. Respuesta de Corina a la pregunta 2 a)

Seguidamente, en la solución brindada por la estudiante *Corina*, se observa la conversión del registro gráfico al registro algebraico, notándose que la estudiante usa el punto de intersección de los ejes mayor y menor de la Elipse como su centro. A partir de ello la estudiante realizó tratamientos en el registro algebraico, usando los valores de a y b obtenidos en la pregunta anterior, así como el centro de la elipse, los cuales son reemplazados en la ecuación de la Elipse brindada por *Corina*. Esto evidencia que la estudiante recordó muy bien la ecuación de la Elipse con centro distinto del origen de coordenadas y eje focal paralelo al eje X.

De acuerdo a lo descrito, se afirma que la estudiante logró el objetivo del ítem, el cual tiene como fin que los estudiantes movilicen sus conocimientos de la ecuación de la Elipse haciendo uso del registro algebraico y gráfico.

Análisis del ítem (b):

Este segundo ítem está formado por dos preguntas y tiene como objetivo que los estudiantes de Arquitectura movilicen sus conocimientos de la Elipse relacionado con los vértices del eje mayor (ver Figura 40). Para ello deben analizar la información brindada en lengua natural y usar el sistema de referencia elegido en la pregunta anterior.

> b) Considere que los puntos A y B, de la figura 3, se encuentran a una misma altura y además que la distancia que separa dichos puntos es la máxima posible.
> Responda:
> ¿Qué elementos de la elipse representan los puntos A y B?
> De acuerdo al sistema de coordenadas elegido, ¿cuáles serían las coordenadas de dichos puntos?

Figura 40. Análisis de la pregunta 2 b)

En la primera pregunta de este ítem, se espera que los estudiantes analicen la información proporcionada en lengua natural: **"la distancia que separa dichos puntos es la máxima posible"** y recuerden que los dos puntos de una Elipse que tienen distancia máxima son los vértices del eje mayor. En ese sentido, Stewart, Redlin y Watson (2012) señalan que los puntos de la Elipse que tienen mayor distancia son los vértices del eje mayor de la Elipse.

En la segunda pregunta, se espera que los estudiantes usen el sistema de referencia escogido en la pregunta anterior y la información brindada en el registro de lengua natural: **"considere que los puntos A y B, de la figura 3, se encuentran a una misma altura"** para determinar las coordenadas de los vértices del eje mayor. De acuerdo con esto, esperamos que, para obtener solución a esta pregunta, los estudiantes se ayuden de una representación gráfica de la Elipse, realicen tratamientos en este registro, y luego realicen una transformación al registro algebraico o al registro de lengua natural e indiquen las coordenadas de los vértices del eje mayor de la Elipse.

Respuesta esperada para la pregunta 2 b):

Para responder la primera pregunta de este ítem, los estudiantes movilizan sus conocimientos previos de los vértices de la Elipse y utilizan la información dada en este ítem: **“la distancia que separa dichos puntos es la máxima posible”** para indicar que los puntos A y B que cumplen con esa propiedad son los vértices del eje mayor de la Elipse.

Por otro lado, para responder la segunda pregunta del ítem 2 b), los estudiantes realizan tratamientos en el registro gráfico bosquejando la gráfica de la Elipse en el plano cartesiano obtenida en el ítem anterior y además utilizan la información brindada para señalar que la distancia que separa a los puntos A y B es la longitud del eje mayor, esto implicara que la abscisa de los vértices se hallaran sumando o restando el valor de la longitud del semieje mayor con la abscisa del centro de la Elipse. Además, la ordenada de los vértices A y B se determinarán usando la información: **“considere que los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, de la figura 3, se encuentran a una misma altura”.**

Así, de acuerdo al sistema de referencia elegido en la pregunta 2 ítem a), se consideran las siguientes respuestas para las coordenadas de los vértices del eje mayor de la Elipse denotados por A y B.

Primera solución esperada:

Las coordenadas de los puntos de la Elipse A y B son:

$A = (-32.5; 0)$ y $B = (32.5; 0)$

Segunda solución esperada:

Las coordenadas de los puntos de la Elipse A y B son:

$A = (-32.5; 19)$ y $B = (32.5; 19)$

Tercera solución esperada:

Las coordenadas de los puntos de la Elipse A y B son:

$A = (0; 15)$ y $B = (65; 15)$

Cuarta solución esperada:

Las coordenadas de los puntos de la Elipse A y B son:

$A = (0; 19)$ y $B = (65; 19)$

A continuación, mostramos las respuestas de los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina*.

Estudiante Rocío.

La estudiante *Rocío*, en este ítem, hizo uso del registro gráfico y del sistema de referencia escogido anteriormente, el cual tiene como centro de la Elipse al punto (0;0). Además, ubicó los puntos A y B en su sistema de coordenadas. Es decir, se observa en la solución presentada por la estudiante que realizó tratamientos en el registro gráfico y que usa la información brindada: **“la distancia que separa dichos puntos es la máxima posible”** para ubicar las coordenadas de los puntos A y B (ver Figura 41).

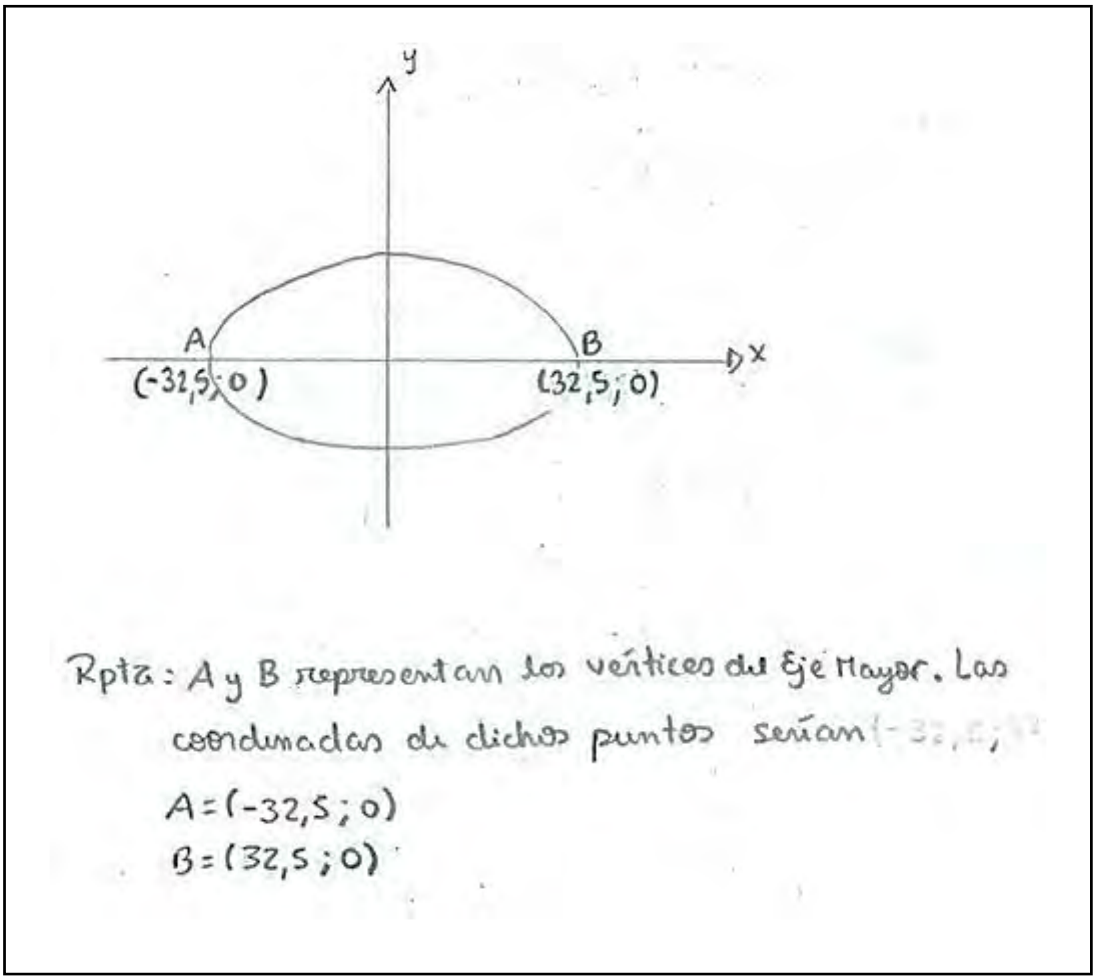


Figura 41. Respuesta de Rocio a la pregunta 2 b)

De acuerdo a la solución de dicha estudiante, podemos inferir que consideró la información del problema referente a la distancia máxima entre los puntos A y B y que este valor lo asoció con la longitud del eje focal que es 65 metros. De esta manera, considerando que el centro de la Elipse es el punto $(0; 0)$ la estudiante realiza una conversión al registro de lengua natural para indicar que los puntos A y B representan las coordenadas de los vértices del eje mayor.

Respecto a la pregunta ¿cuáles serían las coordenadas de dichos puntos?, se observa que la estudiante, al considerar las ordenadas de ambos puntos iguales (a cero), comprendió la información que indica que ambos puntos están a una misma altura y nuevamente se apoyó en el registro gráfico para responder en el registro de lengua natural que las coordenadas de dichos puntos serían: $A = (-32.5; 0)$ y $B = (32.5; 0)$

Por lo mencionado, consideramos que la estudiante *Rocío* alcanzó el objetivo de este ítem, ya que movilizó sus conocimientos de la Elipse relacionado con los vértices del eje mayor, analizando la información brindada y usando el sistema de referencia elegido. Dicho objetivo se logró a través del uso del registro gráfico y del registro de lengua natural.

Estudiante Danilo.

En este ítem se observa que el estudiante Danilo hizo uso del registro de lengua natural para responder las preguntas dadas; sin embargo, es necesario señalar que en la pregunta anterior realizó tratamientos en el registro gráfico ubicando los puntos A y B e indicando sus coordenadas. A continuación, mostramos la respuesta del estudiante (ver Figura 42).

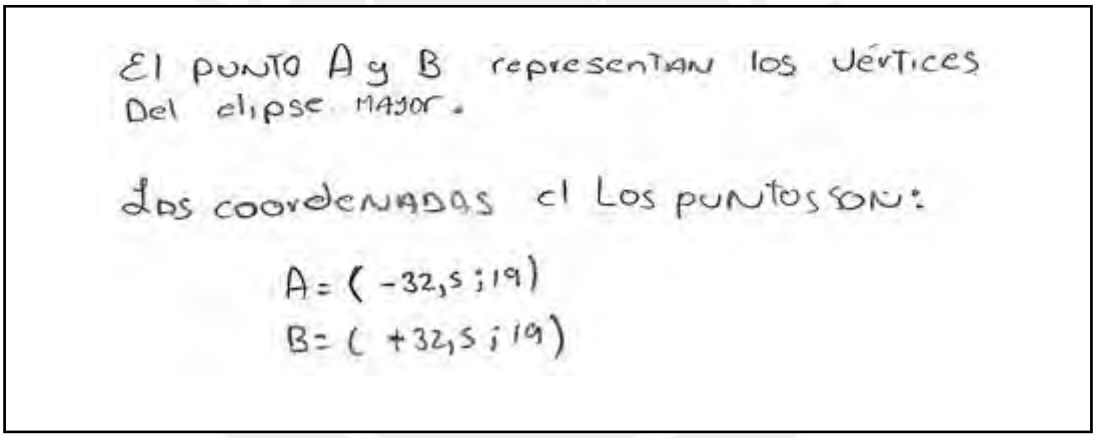


Figura 42. Respuesta de Danilo a la pregunta 2 b)

La solución presentada por el estudiante *Danilo* se basó en la solución a la pregunta 2 a), cuyo centro de la Elipse tiene como coordenadas $c = (0; 19)$. Teniendo en cuenta esto, observamos que dicho estudiante analizó la información dada: los puntos A y B que pertenecen a la Elipse se encuentran a una misma altura y la distancia que los separa es la máxima posible para determinar las coordenadas de dichos puntos y además indicar que son los vértices del eje mayor de la Elipse que representa a la sede del Banco Comercial de Mauricio.

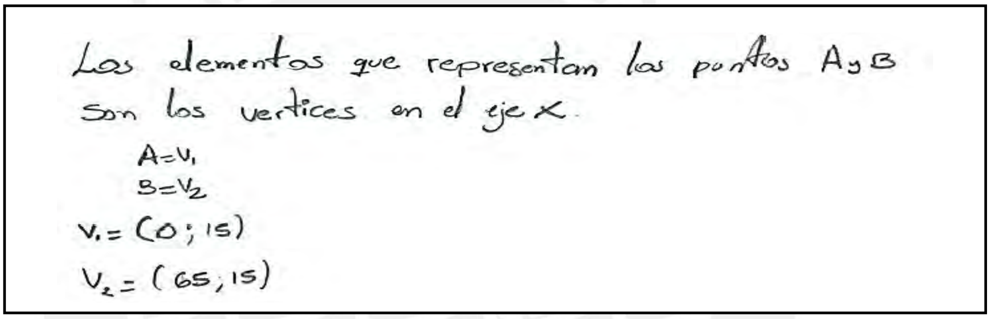
En la solución dada por el estudiante *Danilo*, se observa que respondió en forma correcta en lengua natural que los puntos A y B representan los vértices de la Elipse y que las coordenadas son: $A = (-32.5; 19)$ y $B = (32.5; 19)$

<u>Estudiante Corina.</u>

Según la solución mostrada por la estudiante *Corina*, se entiende que interpretó la información brindada en el enunciado de la pregunta 2 b) cuando se menciona que "**los puntos A y B se encuentran a una misma altura y además que la distancia que los separa es la máxima posible**".

Debido a esto, *Corina* respondió en el registro de lengua natural que "*los elementos que representan los puntos A y B son los vértices en el eje X*". En ese sentido, debemos tener en cuenta que la estudiante en la pregunta anterior, realizó tratamientos en el registro gráfico indicando a los puntos A y B como V_1 y V_2 respectivamente y cuya distancia es la mayor posible e igual a $2a$.

A continuación, en la Figura 43 se muestra la respuesta de *Corina* a la pregunta 2 b)



Los elementos que representan los puntos A y B son los vertices en el eje x.

$A = V_1$

$B = V_2$

$V_1 = (0; 15)$

$V_2 = (65; 15)$

Figura 43. Respuesta de Corina a la pregunta 2 b)

Como se muestra en la solución brindada por *Corina*, la información dada en lengua natural: **"los puntos A y B se encuentran a una misma altura"** es analizada y, a partir de ello, se determina, de acuerdo al sistema elegido en el ítem anterior, que la ordenada de ambos vértices es igual a 15. Luego, se observa que la estudiante indicó, en el registro de lengua natural, que las coordenadas de los vértices del eje mayor de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio son $V_1 = (0; 15)$ y $V_2 = (65; 15)$

De acuerdo a lo mencionado, se observa que la estudiante Corina logró el objetivo de este ítem, el cual consiste en movilizar sus conocimientos relacionados con los vértices del eje mayor, haciendo uso del registro de lengua natural y del sistema de referencia elegido anteriormente.

En este caso, podemos deducir que la estudiante solo realizó tratamientos en el registro de lengua natural y que ello le bastó para responder la pregunta dada en este ítem.

Análisis del ítem (c):

El tercer ítem de la pregunta 2 tiene como objetivo que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos de los vértices del eje menor de la Elipse. Para ello, pueden apoyarse en el registro gráfico o el algebraico y realizar los tratamientos respectivos, luego realizando una conversión al registro de lengua natural indicaran las coordenadas de los vértices del eje menor.

c) Determine las coordenadas de los vértices del eje menor de la elipse.

Figura 44. *Análisis de la pregunta 2 c)*

En este ítem se espera que los estudiantes sigan utilizando el esbozo de la gráfica de la Elipse establecido en la pregunta 2 a) y realizando tratamientos, determinen las coordenadas de los vértices del eje menor de la Elipse.

Por otro lado, otra forma de obtener una solución a la pregunta planteada en este ítem es que los estudiantes realicen tratamientos en el registro algebraico utilizando el origen de coordenadas y el valor de la constante b, para de esta forma determinar las coordenadas de los vértices buscados.

Ya sea mediante el uso del registro gráfico o el registro algebraico, se espera que el estudiante brinde la respuesta esperada en el registro de lengua natural. Esto, según Duval (2004), se asocia a la comprensión de este elemento de la Elipse, ya que hay una conversión de al menos dos registros de representación semiótica.

A continuación, de acuerdo al sistema de referencia elegido en la pregunta 2 ítem a, se consideran las siguientes respuestas para las coordenadas de los vértices del eje menor de la Elipse.

Primera solución esperada:

Se espera que los estudiantes consideren el valor de $b = 15$ y $c(h;k) = (0;0)$. Así, realizando tratamientos en el registro algebraico o en el registro gráfico, obtengan que las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1 = (0;-15)$ y $B_2 = (0;15)$

Segunda solución esperada:

Se espera que los estudiantes consideren el valor de $b = 15$ y $c(h;k) = (0;19)$. Así, realizando tratamientos en el registro algebraico o en el registro gráfico, obtengan que las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1 = (0;4)$ y $B_2 = (0;34)$.

Tercera solución esperada:

Se espera que los estudiantes consideren el valor de $b = 15$ y $c(h;k) = (32.5;15)$. Así realizando tratamientos en el registro algebraico o en el registro gráfico obtengan que las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1 = (32.5;0)$ y $B_2 = (32.5;30)$.

Cuarta solución esperada:

Se espera que los estudiantes consideren el valor de $b = 15$ y $c(h; k) = (32.5; 19)$. Así, realizando tratamientos en el registro algebraico o en el registro gráfico, obtengan que las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1 = (32.5; 4)$ y $B_2 = (32.5; 34)$.

A continuación, mostramos las respuestas de los estudiantes: *Rocío, Danilo* y *Corina*.

Estudiante Rocío.

En este ítem, la estudiante Rocío realizo tratamientos en el registro gráfico señalando con una flecha el eje menor de la Elipse y ubicando las coordenadas de los vértices del eje menor de la Elipse, para ello la estudiante tomo en cuenta las coordenadas del centro $c(0; 0)$, el valor de $b = 15$ y el sistema de referencia obtenidos en la pregunta 2 a) (ver Figura 45).

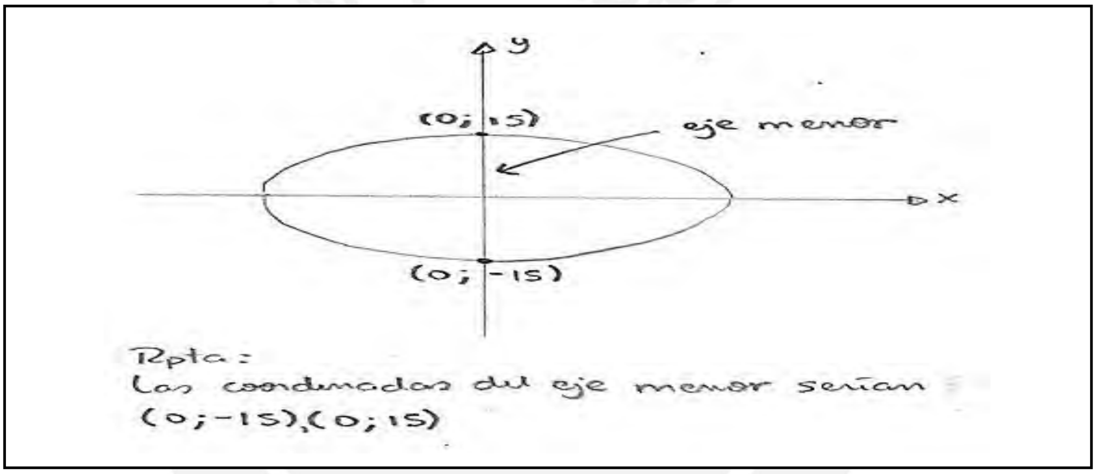


Figura 45. Respuesta de Rocio a la pregunta 2 c)

Es claro que la estudiante, al utilizar la representación gráfica del sistema escogido, también utiliza el valor $b = 15$ y conceptos previos como que el eje menor de la Elipse es perpendicular al eje mayor y que los valores de los vértices de este eje menor se obtienen sumando y restando el valor de 15 a la ordenada del centro.

De la solución presentada por la estudiante *Rocío*, se observa que, realizando tratamientos en el registro gráfico, logró determinar las coordenadas solicitadas para finalmente realizar la conversión al registro de lengua natural e indicar la respuesta esperada, así el objetivo de la pregunta se alcanza, ya que movilizó sus conocimientos previos referentes a la Elipse usando el registro gráfico y el registro de lengua natural.

Luego de exponer los resultados obtenidos por la estudiante *Rocío*, observamos que, para este tipo de pregunta, así como para la pregunta 2 b), la estudiante tiene predilección por usar el registro gráfico. Dicho resultado es debido a la influencia de los cursos que se llevan en el primer ciclo de la carrera de Arquitectura, en donde se suelen realizar diversos gráficos relacionados, por ejemplo, a maquetas, siluetas de figuras, entre otros.

<u>Estudiante Danilo.</u>

A continuación, mostramos la respuesta brindada por el estudiante *Danilo* referente a la pregunta 2 c) (ver Figura 46).

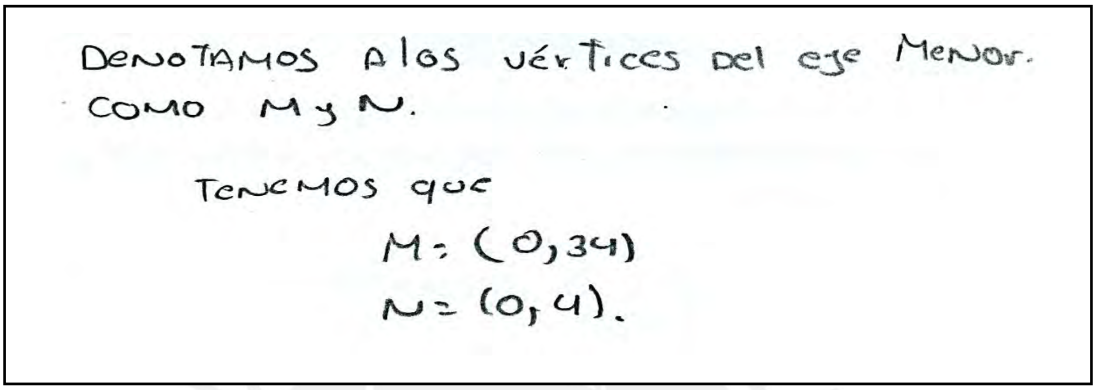

DENOTAMOS A LOS VÉRTICES DEL EJE MENOR.
COMO M y N.
TENEMOS QUE
M: (0,34)
N= (0,4).

Figura 46. Respuesta de Danilo a la pregunta 2 c)

Se observo que cuando el estudiante *Danilo* resuelve el ítem 2 c)), este, regresa a la pregunta 2 a)) y en su gráfica indica los puntos $M\ y\ N$, luego considerando las coordenadas del centro de la Elipse $(0; 19)$, realiza la conversión al registro de lengua natural para realizar tratamientos y escribir "*denotamos a los vértices del eje menor como* $M\ y\ N$*….tenemos que* $M = (0; 34) y\ N = (0; 4)$ " que son los vértices de la Elipse que representa a la sede del Banco Comercial de Mauricio.

Para determinar los puntos M y N, *Danilo* consideró el sistema de referencia establecido en la pregunta 2 a), el cual tomó como centro de la Elipse al punto $(0; 19)$ y eje focal paralelo al eje X. Debido a sus conocimientos previos de grafica de Elipse con centro en un punto diferente al origen de coordenadas, dicho estudiante utilizó el valor de $b = 15$ y determinó las coordenadas pedidas.

Por otro lado, a pesar de que en su resolución no se muestra indicios del uso del registro gráfico, es necesario recalcar que si lo hubo ya que como se mencionó *Danilo* se apoya en el gráfico dado en la pregunta 2 a).

La forma en cómo el estudiante Danilo resolvió la pregunta, muestra su facilidad para trabajar en el registro gráfico cuando se presentan ejercicios de este tipo. La razón de esta inclinación se da por la forma de trabajo en el curso y en la carrera de Arquitectura, donde se priorizan los detalles estéticos y resaltan las formas de las figuras arquitectónicas.

Estudiante Corina.

En el presente ítem, de acuerdo a lo observado en su solución, se entiende que la estudiante Corina utilizó el sistema de referencia obtenido en el ítem 2 a) y realiza un esbozo de la Elipse que representa la sede del Banco Comercial de Mauricio.

A continuación, mostramos la solución de la estudiante en mención (ver Figura 47).

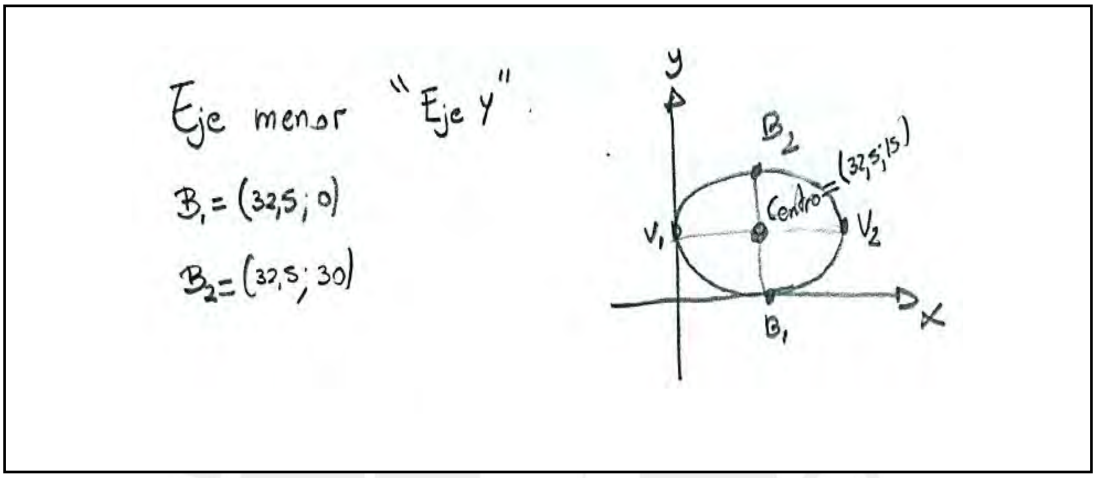


Figura 47. Respuesta de Corina a la pregunta 2 c)

De la solución presentada por *Corina*, observamos que realiza tratamientos en el registro gráfico escribiendo la palabra centro e indicando sus coordenadas, luego escribe en los puntos más altos y más bajos de su grafica $B_1\ y\ B_2$ para denotar los puntos de los vértices del eje menor de la Elipse. Una vez indicados estos elementos en su gráfica, la estudiante, apoyándose en la noción de distancia, determinó, en el registro de lengua natural, que el eje menor de la Elipse es paralelo al eje Y. Esto se nota cuando *Corina* utiliza la expresión: "Eje menor, eje Y ".

Finalmente, la estudiante utilizó el registro de lengua natural para indicar las coordenadas de los vértices del eje menor, realizando así una conversión del registro gráfico al registro de lengua natural.

Luego de mostrar los resultados logrados por la estudiante, señalamos que logró el objetivo de este ítem, el cual consiste en que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos de los vértices del eje menor de la Elipse aprendidos en sesiones de clase anteriores y haciendo uso del registro gráfico o algebraico indiquen, en el registro de lengua natural, las coordenadas de dichos vértices.

Análisis de la pregunta 3:

En esta pregunta, el objetivo es que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos de los focos de una Elipse y, a partir de la información brindada, respondan la pregunta en el registro de lengua natural. Para el logro de este objetivo, los estudiantes también deberán realizar tratamientos en el registro algebraico y así encontrar las coordenadas de los focos de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio

A continuación, se muestra en la Figura 48 la pregunta 3

3. La propiedad de reflexión de la elipse indica que toda onda de luz que sea generada en un foco, se reflejara en el otro, logrando así una mayor propagación de la luz en edificios cuya estructura este formada por vidrios (como lo es el edificio del Banco Comercial de Mauricio).
Si por motivos de iluminación durante la noche se desean colocar dos potentes reflectores en el edificio del Banco Comercial de Mauricio, señale las coordenadas donde deben ubicarse dichos reflectores de acuerdo al sistema de referencia elegido.

Figura 48. Análisis de la pregunta 3

En esta pregunta, se espera, en primer lugar, que los estudiantes conozcan una aplicación de la Elipse en la carrera de Arquitectura. Para ello, se muestra la propiedad de reflexión de los rayos de luz, la cual consiste en que si un rayo es emitido en un foco de la Elipse este se reflejará en el contorno de la Elipse pasando por el otro foco, generando así un sinfín de rayos que transitan por toda la Elipse.

Como la estructura del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica y está formada por estructuras de vidrio, la posición de los reflectores debe darse en los focos, pues así se lograría una mejor iluminación. Es necesario mencionar que, debido al corto tiempo brindado por la Universidad en donde se realizó la aplicación de la actividad, esta propiedad no fue detallada al máximo y por ello se muestra información concreta en la pregunta 3, referente a esta propiedad de la Elipse.

En segundo lugar, se espera que los estudiantes interpreten la información dada en el registro de lengua natural y comprendan que para encontrar las coordenadas donde deben colocarse los reflectores deben hallar, según el sistema elegido, las coordenadas de los focos de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio. Por otro lado, para el cálculo de dichas coordenadas, deben realizar tratamientos en el registro algebraico utilizando la relación pitagórica que permita hallar el valor de c. Finalmente, se espera que los sujetos de estudio den la respuesta en lengua natural.

Respuesta esperada para la pregunta 3:

Según el sistema de referencia elegido en la pregunta 2 a), consideraremos bajo nuestra experiencia como docente las siguientes respuestas para las coordenadas de los reflectores.

Primera solución esperada:

De acuerdo con las preguntas anteriores, se obtuvo los valores de $a = 32.5$ y $b = 15$. Así, utilizando la relación pitagórica de la Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, y realizando tratamientos en el registro algebraico, como despejar el valor de c^2, obtenemos el valor de c :

$32.5^2 = 15^2 + \mathrm{c}^2$

$\rightarrow \mathrm{c}^2 = 32.5^2 - 15^2$

$\rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{32.5^2 - 15^2}$

$\rightarrow \mathrm{c} \approx 28.83$

Luego, considerando el sistema de referencia, cuyo centro de la Elipse es el origen de coordenadas, realizamos un segundo tratamiento en el registro algebraico, el cual consiste en sumar o restar el valor de c a la abscisa del centro de la Elipse, obteniéndose así que las coordenadas de los focos son:

$F_1 = (0 - 28.83; 0)$ y $F_2 = (0 + 28.83; 0)$

$\rightarrow F_1 = (-28.83; 0)$ y $F_2 = (28.83; 0)$

Finalmente, se espera que los estudiantes respondan en lengua natural que “las coordenadas donde deben ubicarse los reflectores según el sistema de referencia dado, son $F_1 = (-28.83; 0)$ y $F_2 = (28.83; 0)$”

Segunda solución esperada:

De acuerdo con las preguntas anteriores, se obtuvo los valores de $a = 32.5$ y $b = 15$. Así, utilizando la relación pitagórica de la Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, y realizando tratamientos en el registro algebraico, como despejar el valor de c^2, obtenemos el valor de c :

$32.5^2 = 15^2 + \mathrm{c}^2$

$\rightarrow \mathrm{c}^2 = 32.5^2 - 15^2$

$\rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{32.5^2 - 15^2}$

$\rightarrow \mathrm{c} \approx 28.83$

Luego, considerando el sistema de referencia, cuyo centro de la Elipse es $c(h; k) = (0; 19)$, realizamos un segundo tratamiento en el registro algebraico, el cual consiste en sumar o restar el valor de c a la abscisa del centro de la Elipse, obteniéndose así que las coordenadas de los focos son:

$F_1 = (0 - 28.83; 19)$ y $F_2 = (0 + 28.83; 19)$

$\rightarrow F_1 = (-28.83; 19)$ y $F_2 = (28.83; 19)$

Finalmente, se espera que los estudiantes respondan en lengua natural que "las coordenadas donde deben ubicarse los reflectores según el sistema de referencia dado, son $F_1 = (-28.83; 19)$ y $F_2 = (28.83; 19)$"

Tercera solución esperada:

De acuerdo con las preguntas anteriores, se obtuvo los valores de $a = 32.5$ y $b = 15$. Así, utilizando la relación pitagórica de la Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, y realizando tratamientos en el registro algebraico, como despejar el valor de c^2, obtenemos el valor de c :

$32.5^2 = 15^2 + \mathrm{c}^2$

$\rightarrow \mathrm{c}^2 = 32.5^2 - 15^2$

$\rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{32.5^2 - 15^2}$

$\rightarrow \mathrm{c} \approx 28.83$

Luego, considerando el sistema de referencia, cuyo centro de la Elipse es $c(h; k) = (32.5; 15)$

, realizamos un segundo tratamiento en el registro algebraico, el cual consiste en sumar o restar el valor de c a la abscisa del centro de la Elipse, obteniéndose así que las coordenadas de los focos son:

$F_1 = (32.5 - 28.83; 15)$ y $F_2 = (32.5 + 28.83; 15)$

$\rightarrow F_1 = (3.67; 15)$ y $F_2 = (61.33; 15)$

Finalmente, se espera que los estudiantes respondan en lengua natural que "las coordenadas donde deben ubicarse los reflectores según el sistema de referencia dado, son $F_1 = (3.67; 15)$ y $F_2 = (61.33; 15)$"

Cuarta solución esperada:

De acuerdo con las preguntas anteriores, se obtuvo los valores de $a = 32.5$ y $b = 15$. Así, utilizando la relación pitagórica de la Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, y realizando tratamientos en el registro algebraico, como despejar el valor de c^2, obtenemos el valor de c :

$32.5^2 = 15^2 + \mathrm{c}^2$

$\rightarrow \mathrm{c}^2 = 32.5^2 - 15^2$

$\rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{32.5^2 - 15^2}$

$\rightarrow \mathrm{c} \approx 28.83$

Luego, considerando el sistema de referencia, cuyo centro de la Elipse es $c(h;k) = (32.5;19)$, realizamos un segundo tratamiento en el registro algebraico, el cual consiste en sumar o restar el valor de c a la abscisa del centro de la Elipse, obteniéndose así que las coordenadas de los focos son:

$F_1 = (32.5 - 28.83; 19)$ y $F_2 = (32.5 + 28.83; 19)$

$\rightarrow F_1 = (3.67; 19)$ y $F_2 = (61.33; 19)$

Finalmente, se espera que los estudiantes respondan en lengua natural que “las coordenadas donde deben ubicarse los reflectores según el sistema de referencia dado, son $F_1 = (3.67; 19)$ y $F_2 = (61.33; 19)$“

A continuación, mostramos las respuestas de los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina.*

<u>Estudiante Rocío.</u>

Se observó en el desarrollo de la solución presentada por la estudiante *Rocío*, que inició la solución del problema mostrando la identidad pitagórica de la Elipse $a^2 = b^2 + c^2$, luego utilizando los valores de a y b encontrados en los problemas anteriores realiza tratamientos en el registro algebraico. Esto se observa cuando se reemplazan dichos valores en la ecuación obteniéndose la siguiente igualdad $1056.25 = 225 + c^2$, de donde continuando con los tratamientos en el registro algebraico se tiene finalmente que el valor de $c = 28.83$ (ver Figura 49).

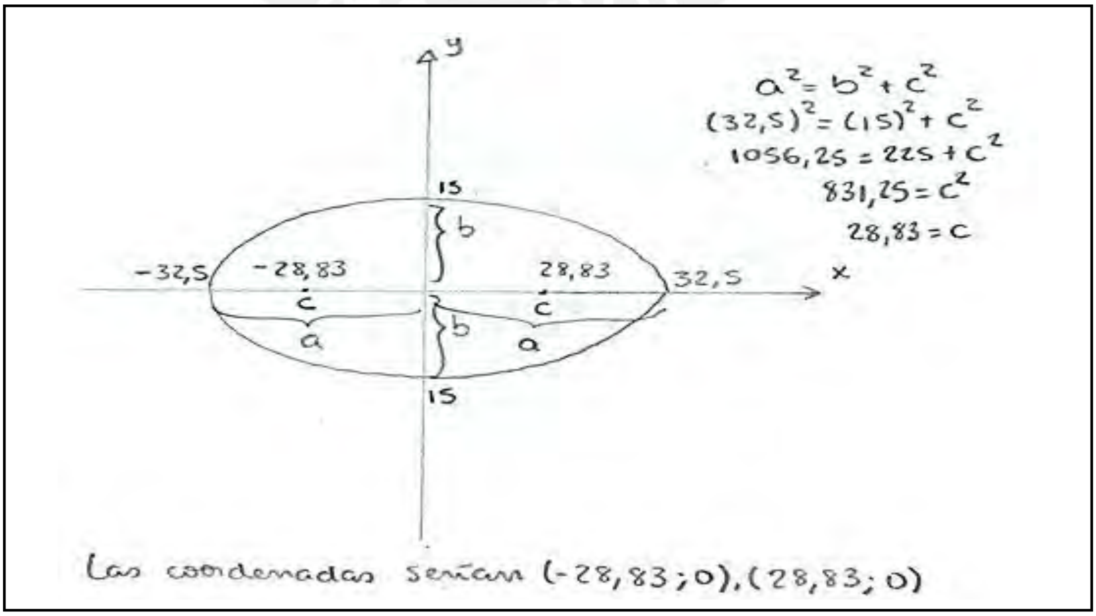


Figura 49. Respuesta de Rocio a la pregunta 3

A continuación, la estudiante realiza la conversión del registro algebraico al registro gráfico, esto se evidencia cuando en su solución traza el plano cartesiano y esboza la gráfica de la Elipse con centro en el origen de coordenadas, indicando aquí los valores $-15, 15, -32.5, 32.5, -28.83, 28.83, a, b$ y c. Al ubicar estos valores en la gráfica, a pesar de no escribirlo, *Rocío* evidencia su interés por ubicar los reflectores en la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio.

Luego de realizar tratamientos en el registro gráfico, la estudiante realiza una conversión al registro de lengua natural, utilizando la información mostrada en el plano, indicando así que las coordenadas de los reflectores, según el sistema de referencia elegido anteriormente en la pregunta 2 “serán $(-28.83; 0) y$ $(28.83; 0)$"

Como se observa, la estudiante utilizó los registros de lengua natural, gráfico y algebraico para determinar las coordenadas en dónde se deben ubicar los reflectores del Banco Comercial de Mauricio. Para ello, realizó tratamientos en el registro algebraico y conversiones del registro algebraico al registro gráfico y del registro gráfico al registro de lengua natural.

Debido a que la estudiante comprende que la información dada en el registro de lengua natural está asociada a la búsqueda de los focos de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio y además que en dicha búsqueda la estudiante realizó tratamientos en el registro algebraico, así como conversiones entre registros, podemos afirmar que el objetivo de la pregunta 3 fue logrado.

Estudiante Danilo.

En la respuesta del estudiante *Danilo,* se observa que analizó la información brindada en el enunciado del problema 3 *“la propiedad de reflexión de la Elipse indica que toda onda de luz que sea generada en un foco, se reflejara en el otro…”* y dedujo que, para encontrar las coordenadas de los reflectores debe hallar, según su sistema de referencia elegido, las coordenadas de los focos de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio.

A continuación, se muestra la solución del estudiante (ver Figura 50).

$F^2 + 15^2 = 32{,}5^2$
$F^2 + 225 = 1056.25$
$F^2 = 831.25$
$F = 28.83$

Dichos replectores se ubicovian en Los puntos (28,83 ; 19) y(-28,83 ; 19)

Figura 50. Respuesta de Danilo a la pregunta 3

Como se observa en la solución, el estudiante evidenció que, para encontrar lo solicitado en la pregunta 3, primero debe calcular el valor de "F" y para ello realiza tratamientos en el registro algebraico, apoyándose en el uso de los valores de a, b obtenidos en las preguntas anteriores y de la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ que se brindó en clases anteriores referentes al tema de Elipse. De esta manera *Danilo* reemplaza los valores de $a\ y\ b$ en la relación pitagórica obteniéndose que $F^2 = 831.25,$ de donde el valor de F es igual a 28.83. Nótese que el estudiante utilizó la letra F en vez de c, lo que muestra lo mencionado anteriormente, referente a que el estudiante entiende que, para calcular las coordenadas de los reflectores, debe hallar las coordenadas de los focos de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio.

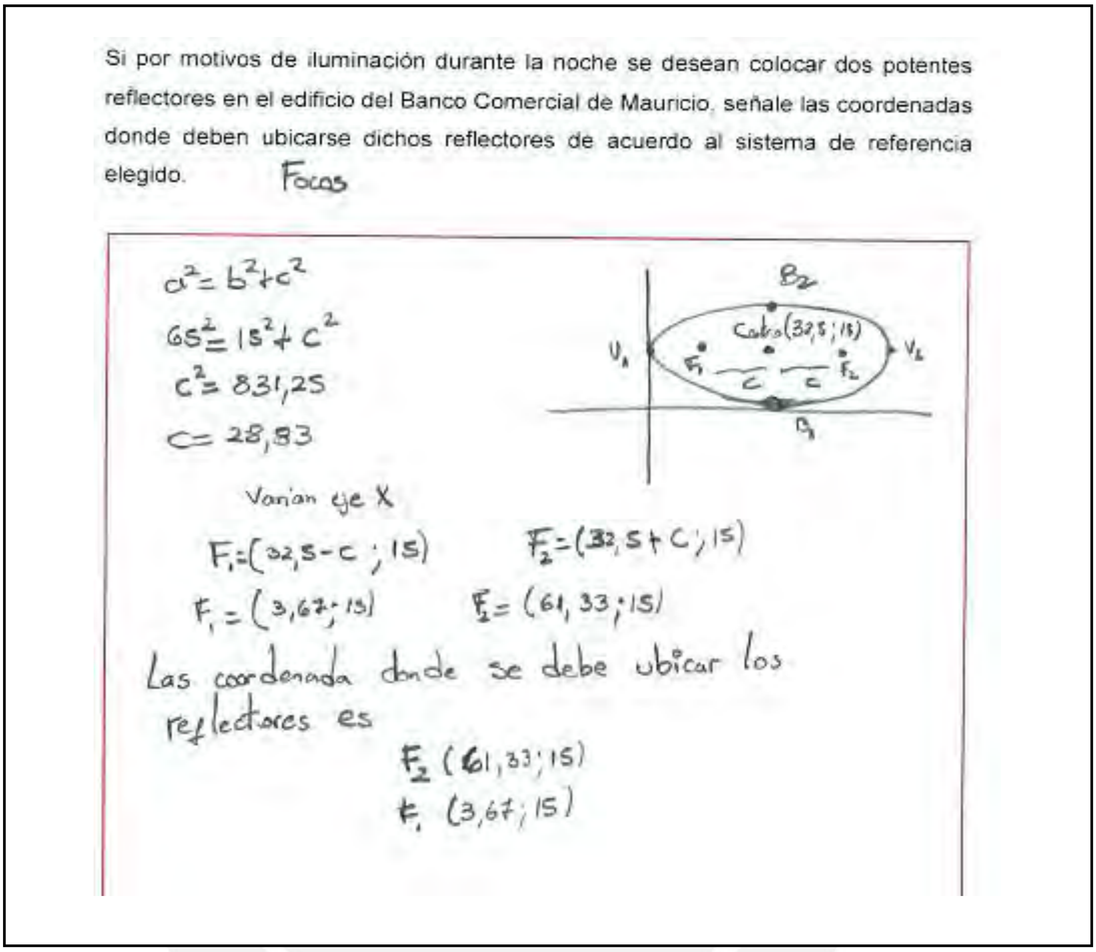
Una vez realizado los tratamientos en el registro algebraico para el cálculo del valor de F, el estudiante realizó la conversión al registro de lengua natural, utilizando el valor encontrado de F y considerando la coordenada del centro de la Elipse $(0; 19)$, brindando como respuesta que "dichos reflectores se ubican en los puntos $(28.83; 19) y\ (-28.83; 19)$". En ese sentido observamos que el registro de lengua natural refleja la información que se obtuvo en el registro algebraico. Es decir, de acuerdo con Duval (2006), la conversión que va del registro algebraico al registro de lengua natural permitió la comprensión matemática de los focos de una Elipse.

Por lo mencionado anteriormente, *Danilo* tiene un dominio de los registros de lengua natural y algebraico, realizando la conversión del registro algebraico al registro de lengua natural para llegar a la respuesta solicitada. Esta actividad relacionada a la conversión entre el registro algebraico y el de lengua natural, en términos de Duval (2003), refleja la comprensión del elemento de la Elipse: "foco"; sin embargo, el manejo de estos dos registros, por parte del estudiante, no significa que deje de lado el registro gráfico, ya que como se observa en la solución de la Figura 38, relacionada con la pregunta 2 a), *Danilo* señaló con la letra F la ubicación de los focos.

Por último, en vista de que el estudiante, a partir de la información dada en el problema, entiende que al pedírsele la ubicación de las coordenadas de los reflectores debe calcular los focos de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio, y además de hacer uso de los registros de lengua natural y algebraico para movilizar sus conocimientos referentes a los focos de la Elipse, podemos afirmar que el objetivo de esta pregunta fue logrado por el estudiante.

<u>Estudiante Corina.</u>

Por parte de la estudiante *Corina* se observa que relacionó la información dada en el enunciado de la pregunta 3 *"la propiedad de reflexión de la Elipse indica que toda onda de luz* *que sea generada en un foco, se reflejara en el otro…"* con la búsqueda de los focos de la Elipse, cuando inicia la solución al problema escribiendo la palabra "focos" (ver Figura 51).


Si por motivos de iluminación durante la noche se desean colocar dos potentes reflectores en el edificio del Banco Comercial de Mauricio, señale las coordenadas donde deben ubicarse dichos reflectores de acuerdo al sistema de referencia elegido. Focos

$a^2 = b^2 + c^2$

$65^2 = 15^2 + c^2$

$c^2 = 831{,}25$

$c = 28{,}83$

Varian eje X

$F_1 = (32{,}5 - c\,; 15)$ $F_2 = (32{,}5 + c\,; 15)$

$F_1 = (3{,}67; 15)$ $F_2 = (61{,}33; 15)$

Las coordenada donde se debe ubicar los reflectores es

$F_2\ (61{,}33; 15)$

$F_1\ (3{,}67; 15)$

Figura 51. Respuesta de Corina a la pregunta 3

Una vez entendido que lo que se busca en la pregunta 3 son las coordenadas de los focos, la estudiante enunció la propiedad pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ presente en el estudio de la Elipse para el cálculo del valor c. En esta parte, *Corina* realizó tratamientos en el registro algebraico, reemplazando los valores de $a\ y\ b$ obtenidos en las preguntas anteriores, obteniendo que $c^2 = 831.25$, de donde el valor de c es igual a 28.83.

Luego, la estudiante realiza tratamientos en el registro gráfico, para ello hace un bosquejo de Elipse en el plano cartesiano, indicando las letras $V_1, V_2, B_1, B_2, F_1\ y\ F_2$ que representan los elementos de la Elipse encontrados en los problemas anteriores. Además, *Corina* muestra las coordenadas del centro y lo ubica a una misma altura de los focos y vértices del eje mayor, señalando que la distancia que separa a los focos del centro es el valor de c.

Después de realizar tratamientos en el registro gráfico la estudiante escribió "varia en el eje X", lo que significa, según la respuesta dada, que quizás la estudiante considera que la ubicación del eje focal es paralela al eje X.

Como siguiente paso, la estudiante de Arquitectura sumó y restó el valor de c a la abscisa del centro de la Elipse y obtiene las coordenadas de los focos de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio. Finalmente, como se observa en la figura 51 *Corina* dio la respuesta en el registro de lengua natural, indicando que las coordenadas donde deben ubicarse los reflectores son $(3.67; 15)$ y $(61.33; 15)$. Este último paso implica que la estudiante realizó una conversión del registro algebraico al registro de lengua natural.

Según lo observado, la estudiante *Corina* alcanza el objetivo planteado en la pregunta 3, ya que, en primer lugar, interpretó, según los datos brindados, que buscar las coordenadas de los reflectores implica encontrar las coordenadas de los focos de la Elipse. En segundo lugar, la estudiante realizó tratamientos en el registro algebraico para encontrar el valor de c, luego se apoyó en el registro gráfico para mostrar que el valor de las abscisas de los focos se determina sumando y restando el valor de c a las abscisas del centro de la Elipse y, por último, realizó la conversión del registro algebraico al registro de lengua natural para dar respuesta a lo solicitado. En otras palabras, la estudiante, haciendo uso de los registros de representación semiótica y evocando sus conocimientos referentes a los focos de una Elipse, logró el objetivo de la actividad.

Análisis de la pregunta 4:

Esta última pregunta fue planeada con el objetivo de que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos acerca de la gráfica de una Elipse con centro en $c(h; k)$ y eje focal paralelo al eje X. También se busca que los estudiantes indiquen, en el registro gráfico, las coordenadas de los elementos de la Elipse, como: focos, centro, vértices del eje mayor y vértices del eje menor, además que se deben indicar las longitudes de los ejes de la Elipse.

Para conseguir el objetivo, se debe hacer uso del registro gráfico de la ecuación de la Elipse, además del sistema de referencia elegido en el problema 2 a). Seguidamente, en la Figura 52 se muestra la pregunta 4.

4. Represente gráficamente, en el plano cartesiano, la elipse que modela el edificio del Banco Comercial de Mauricio, indicando sus elementos.

Figura 52. Análisis de la pregunta 4

Respuesta esperada para la pregunta 4:

Según el sistema de referencia elegido, se espera que los estudiantes de la carrera de Arquitectura realicen los siguientes tratamientos en el registro gráfico: ubicar las coordenadas de los elementos de la Elipse encontrados en las preguntas anteriores, trazar la gráfica de la Elipse, indicar los valores de los ejes mayor y menor de la Elipse y mostrar en la gráfica la ecuación de la Elipse. Por último, se espera que los estudiantes utilicen adecuadamente la escala brindada en la actividad y mejoren los esbozos de las gráficas que brindaron en las preguntas anteriores.

Primera solución esperada:

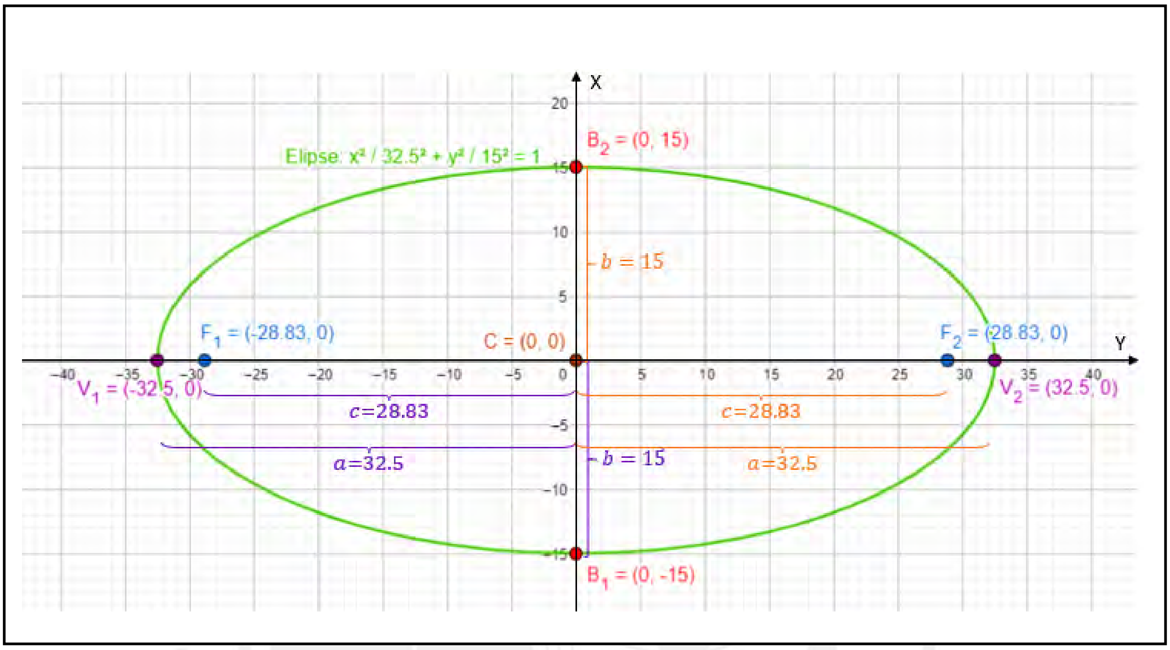


Figura 53. Primera solución esperada para la pregunta 4

Segunda solución esperada:

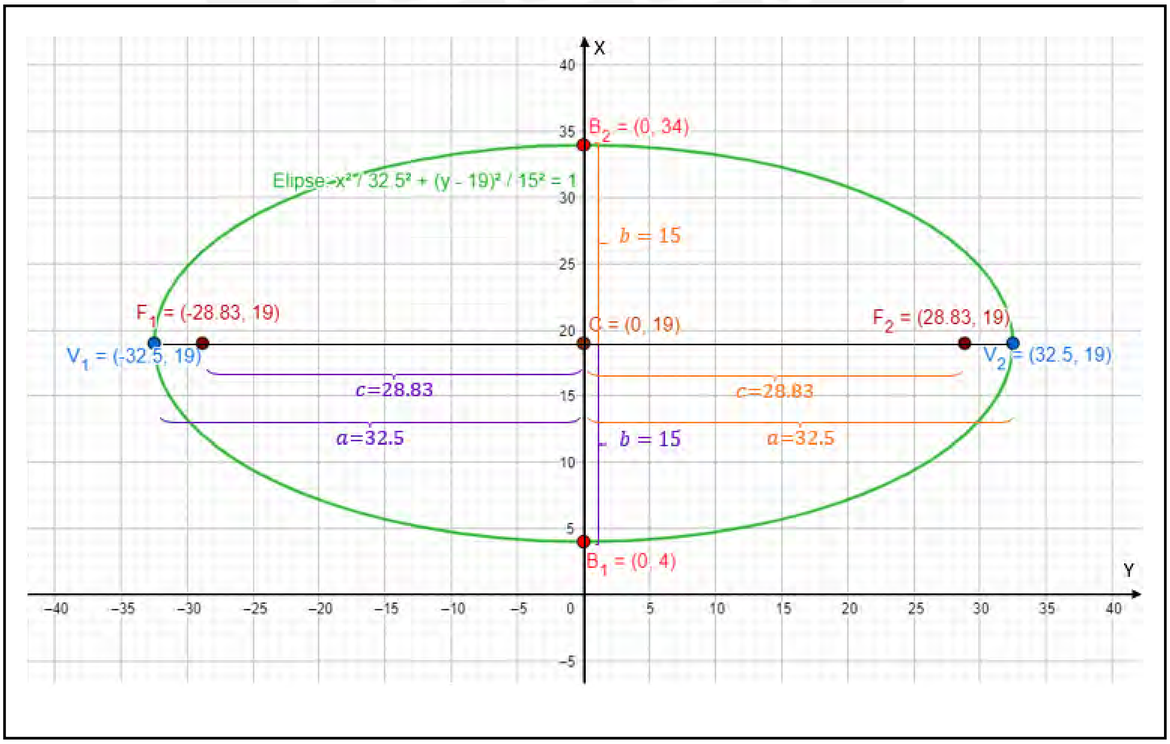


Figura 54. Segunda solución esperada para la pregunta 4

Tercera solución esperada:

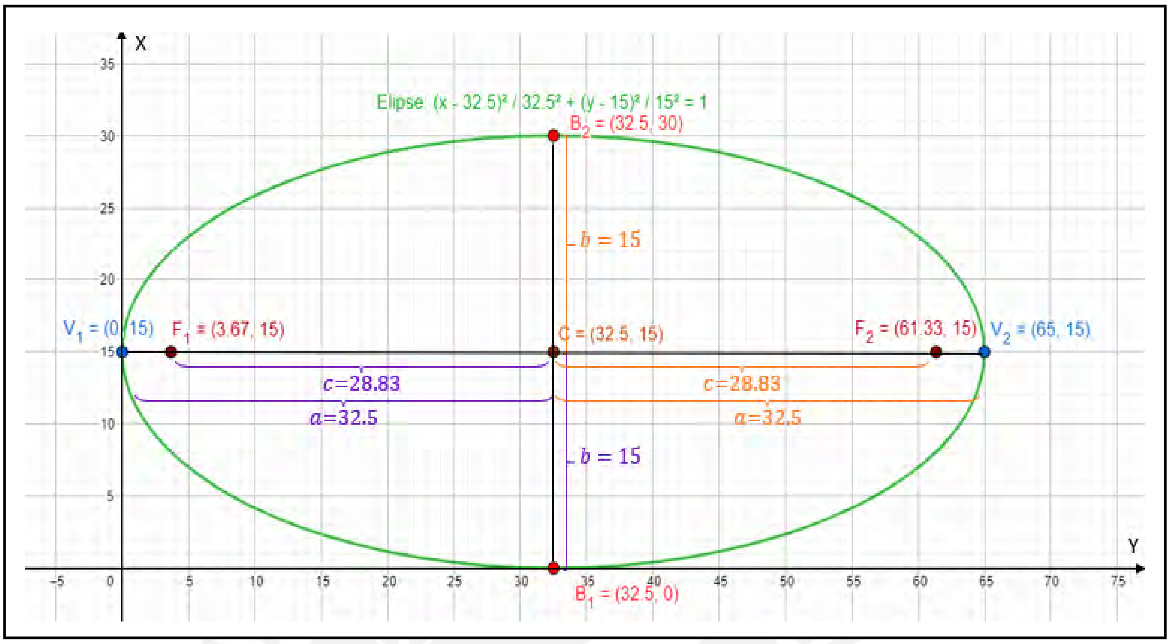


Figura 55. Tercera solución esperada para la pregunta 4

Cuarta solución esperada:

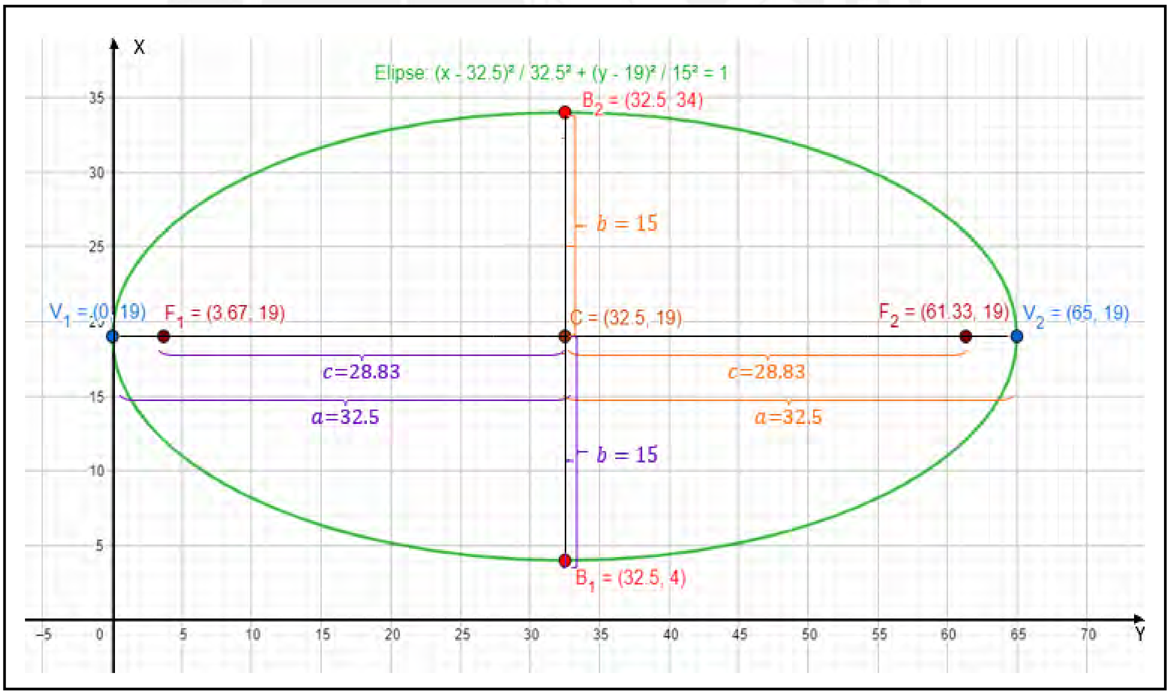


Figura 56. Cuarta solución esperada para la pregunta 4

Análisis de los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina*.

<u>Estudiante Rocio.</u>

En la solución brindada por *Rocío*, se observa que realizó tratamientos en el registro gráfico, para ello la estudiante consideró las coordenadas de los focos, centro, vértices del eje mayor y menor, los valores de $a, b\ y\ c$, que fueron encontrados en los problemas anteriores. Con estos datos, la estudiante realizó el trazo de la Elipse y ubicó sus elementos en el plano cartesiano.

En ese sentido se observó que la estudiante inicia ubicando en el plano cartesiano las coordenadas de los elementos de la Elipse, para luego trazar el gráfico de la Elipse tomando en cuenta la escala que se brinda. Inmediatamente *Rocío* ubica los valores de $a, b\ y\ c$.

A continuación, se muestra la respuesta de la estudiante *Rocío* (ver Figura 57).

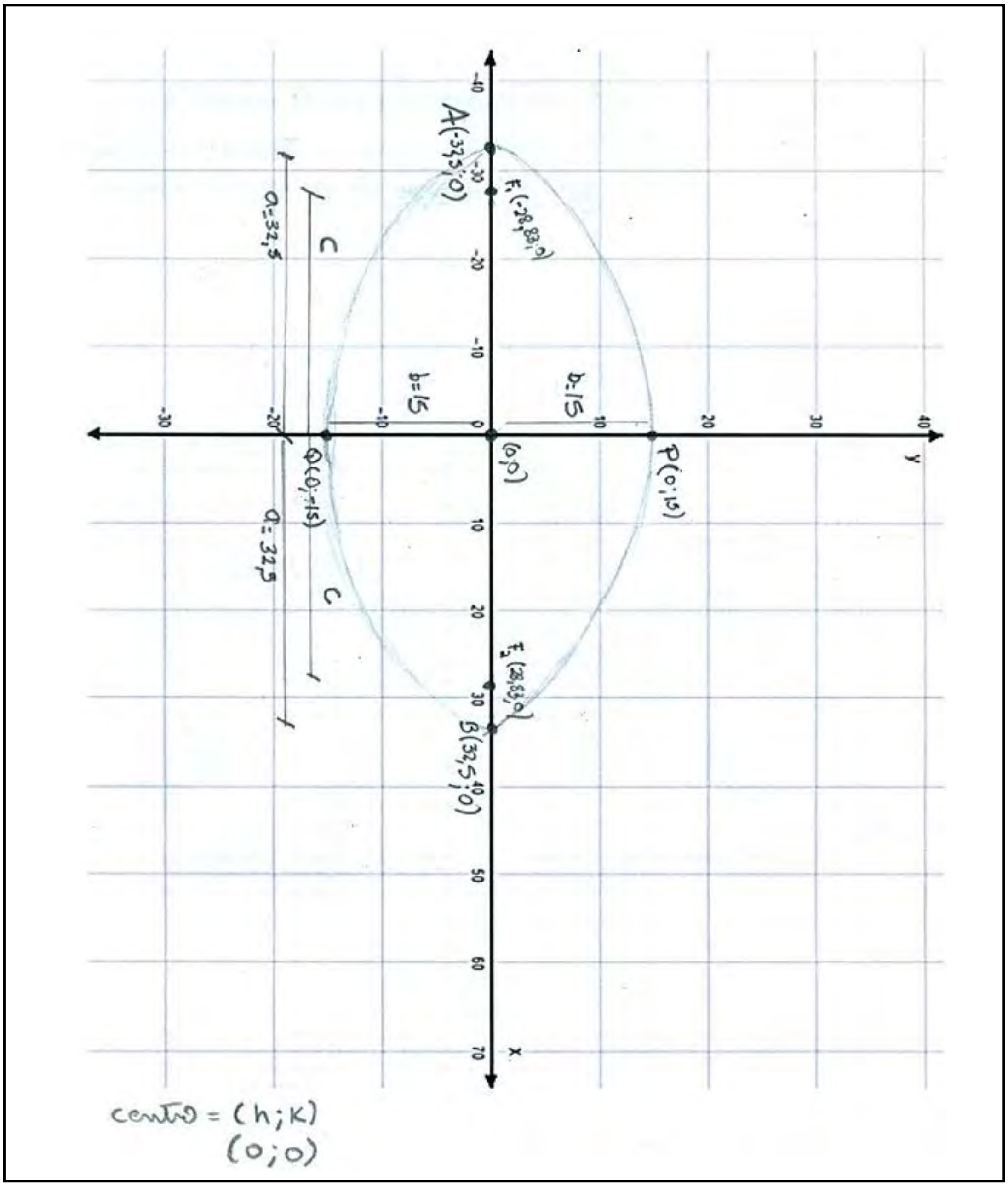


Figura 57. Respuesta de Rocio a la pregunta 4

Como se observa en la solución brindada por *Rocío*, no muestra la ecuación de la Elipse, puesto que para realizar la gráfica solo fue necesario trabajar en el plano, considerando los elementos de la Elipse.

En esta pregunta se observa que *Rocío* evocó sus conocimientos previos referentes al gráfico de la Elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal el eje X, además que hace uso de los resultados anteriores y del registro gráfico para ubicar los elementos de la Elipse solicitada. Este proceso implica que el objetivo de problema se logra.

<u>Estudiante Danilo.</u>

En relación a la representación gráfica que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio dada por el estudiante *Danilo*, se observa que esbozó dicha sede, indicando los elementos de la Elipse que fueron obtenidos en las preguntas anteriores (ver Figura 58).

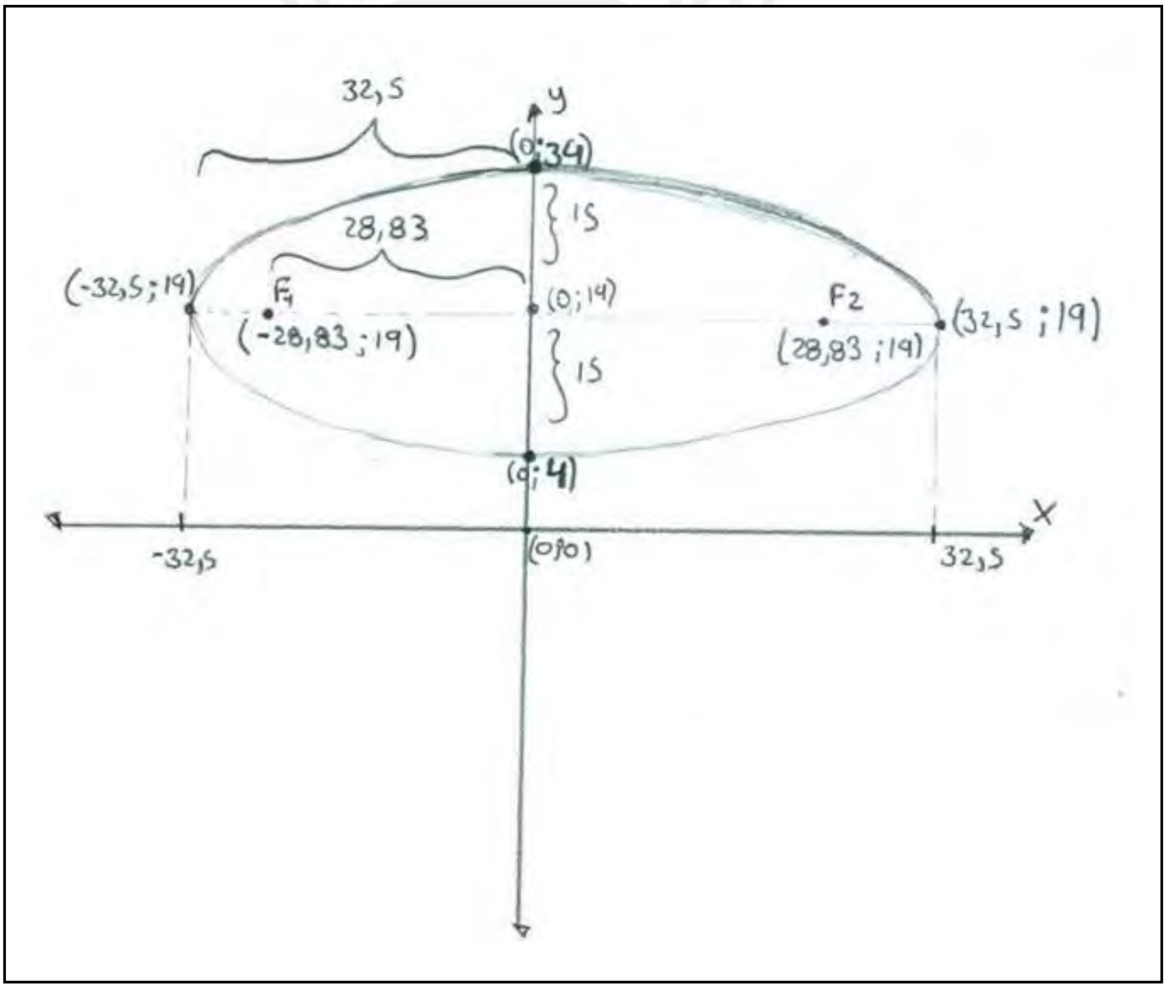


Figura 58. Respuesta de Danilo a la pregunta 4

Para la representación gráfica, el estudiante solicitó una hoja en blanco y cuando le se le preguntó por qué no trabajó con el plano dado en la actividad, indicó que *"el plano no tenía la escala adecuada"*. Se entiende, en este caso, que Danilo no visualizó que los ejes dados en la actividad estaban invertidos, esto quizás se deba a la forma en que se trabaja en las instituciones educativas en el país, donde el eje X siempre aparece en posición horizontal y el eje Y en posición vertical.

Inmediatamente, recibida la hoja, el estudiante realizó los trazos de los ejes coordenados y realizo los siguientes tratamientos en el registro gráfico: ubico las coordenadas del centro, focos y vértices e indico los valores de a, b y c en el plano cartesiano. Seguidamente *Danilo* esbozo la gráfica de la Elipse apoyándose en la Figura 38 dada en la pregunta 2, sin embargo, todo este proceso no fue realizado a una escala adecuada ocasionando que el estudiante no muestra una gráfica aproximada a la sede del Banco Comercial de Mauricio.

En este caso, a pesar de que el estudiante se apoyó en la Figura 38 para realizar de manera inmediata la gráfica de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio, se entiende que, para posicionar el eje mayor y el eje menor, evocó sus conocimientos previos referente a la gráfica de la Elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje X.

Por lo mencionado anteriormente, afirmamos que *Danilo* logró el objetivo de la pregunta 3, ya que evocó sus conocimientos previos referentes a la gráfica de la Elipse, en la que utilizó la ecuación de la Elipse y además indicó, en el registro gráfico, los elementos de dicha Elipse.

Estudiante Corina.

Con respecto a la estudiante *Corina,* se observa el manejo del registro gráfico y los tratamientos que realiza en él, los cuales consistieron en ubicar las coordenadas de los elementos de la Elipse, así como los valores de a, b y c, además una vez realizado este proceso, la estudiante traza la gráfica de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio como se muestra en su solución. Sin embargo, se observa que al ubicar el valor de a y c a la derecha del centro de la Elipse *Corina* confunde su ubicación, tomándolos como valores iguales, es necesario indicar que ese error quizás es debido al tiempo dado para realizar la actividad ya que cuando se recogió las hojas de trabajo al estudiante pidió un poco más de tiempo.

Por otro lado, al igual que sus compañeros, se observa que para la estudiante no es necesario escribir la ecuación de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio con centro en el punto $(32.5; 15)$ y eje focal paralelo al eje X; ya que su gráfica se basa en la ubicación de los elementos de la Elipse en el plano cartesiano.

A continuación, mostramos la solución de la estudiante *Corina* (ver Figura 59).

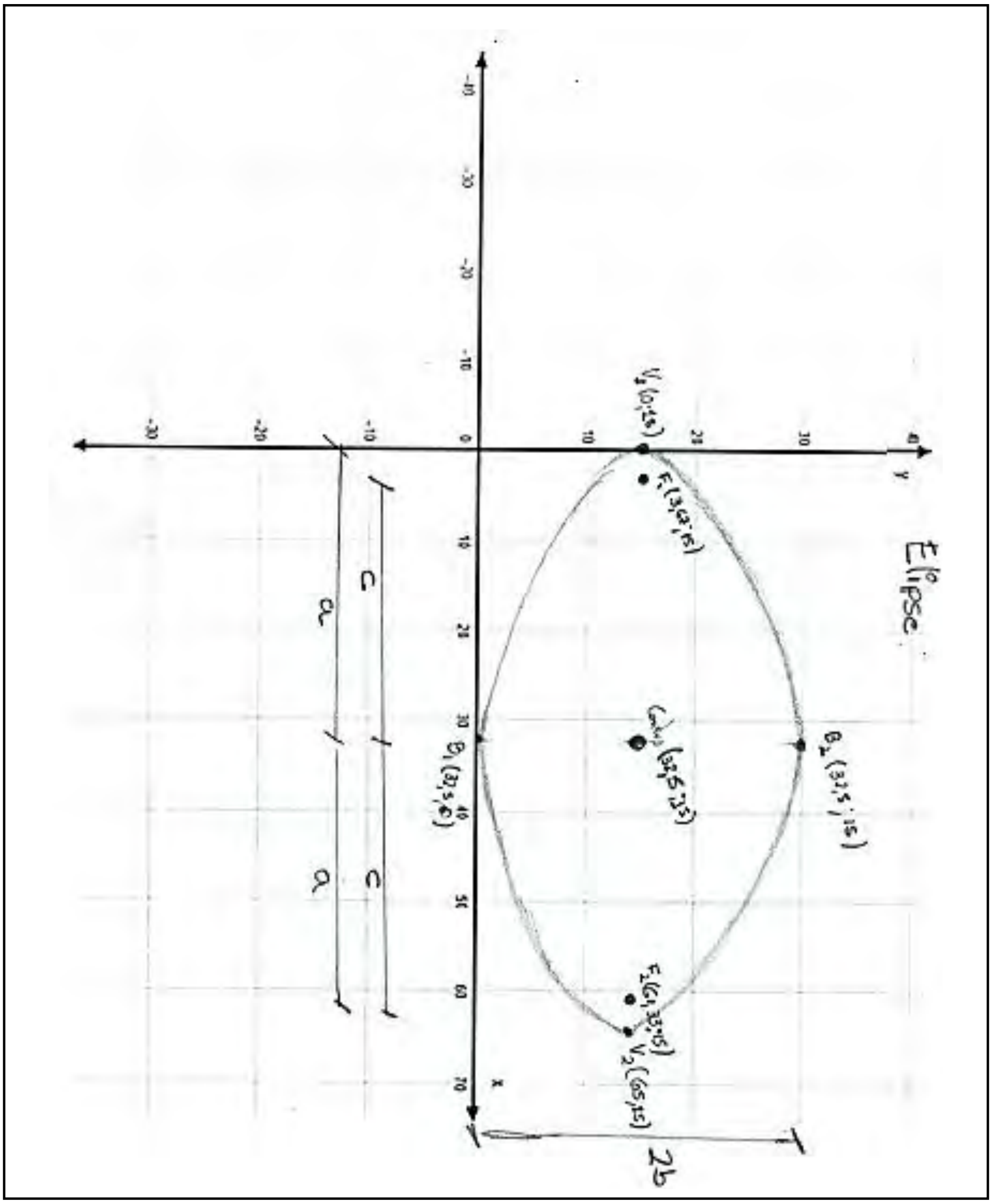


Figura 59. Respuesta de Corina a la pregunta 4

De acuerdo a lo evidenciado por parte de la estudiante, podemos afirmar que logró el objetivo de la pregunta, ya que evocó sus conocimientos previos referentes a la gráfica de la Elipse con eje focal paralelo al eje X. Además de ello, se observa, por parte de la estudiante, que ubicó adecuadamente las coordenadas de los elementos de la Elipse trazada.

Resultados de la parte experimental.

Con respecto a la actividad, consideramos que los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina* lograron alcanzar el objetivo, el cual consiste en promover que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse, haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico.

Con respecto a la actividad en la pregunta 1, los estudiantes sujetos de estudio, después de realizar tratamientos en el registro de lengua natural, respondieron por el mismo registro que los elementos, que se pueden inferir son la longitud de los ejes mayor y menor.

En la pregunta 2(a), los estudiantes eligieron un sistema de referencia de acuerdo a la figura brindada haciendo uso del registro gráfico y luego realizaron la conversión al registro algebraico para dar la ecuación de la Elipse.

En la pregunta 2(b), los estudiantes analizaron la información brindada en el registro de lengua natural y, evocando sus conocimientos previos referente a los vértices del eje mayor, determinaron que los puntos dados son los vértices del eje mayor. Además, para calcular las coordenadas de dichos vértices, los estudiantes se apoyaron en el registro gráfico.

En la pregunta 2(c), los estudiantes se apoyaron en el registro gráfico y también en el registro algebraico para determinar las coordenadas de los vértices del eje menor.

En la pregunta 3, los estudiantes analizaron la información brindada en el registro de lengua natural, realizando tratamientos en este registro. Luego, realizaron una conversión al registro algebraico para indicar las coordenadas solicitadas.

Finalmente, en la pregunta 4, se planteó como objetivo que los estudiantes representen gráficamente los elementos de la Elipse, así como el trazo continuo de la ecuación que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio. Para ello, los estudiantes realizaron tratamientos en el registro gráfico.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta sección, reflexionaremos acerca de los aspectos importantes de la investigación y para ello tendremos en cuenta la metodología, fundamentación teórica y las contribuciones para futuras investigaciones.

La secuencia de preguntas permitió que los estudiantes hicieran uso de los registros de lengua natural, gráfico y algebraico, mientras movilizaban sus conocimientos referentes a la Elipse.

En relación a ello, los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), en lo que se refiere a tratamientos y conversiones, nos proporcionaron las herramientas necesarias para el análisis de los resultados de los estudiantes de la carrera de Arquitectura. De esta manera, pudimos observar si los sujetos alcanzaban los objetivos de cada pregunta o si surgían inconvenientes.

La pregunta 2 a) fue relevante, ya que dio la libertad al estudiante de elegir el sistema de referencia en el cual se sentía más familiarizado o cómodo. Esta elección indujo a obtener diferentes análisis y resultados.

En lo que refiere a las preguntas 3 y 4, se observa que los estudiantes movilizaron, de manera correcta, sus conocimientos previos referentes a los elementos de la Elipse, como centros, focos, vértices, longitud de los ejes mayor y menor. Para ello, los sujetos de investigación hicieron uso de los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

Concluimos, a partir de las respuestas dadas, que los sujetos de investigación recuerdan los conceptos matemáticos de Elipse y esto se demuestra durante la secuencia de preguntas que modelan la sede del Banco Comercial de Mauricio.

Por otro lado, la metodología cualitativa nos permitió describir las acciones, comportamientos e interrelaciones que los estudiantes mostraron durante el desarrollo de la actividad.

También es necesario mencionar que, durante el desarrollo de la actividad, la teoría de Registros de Representación Semiótica evidenció todo su potencial, ya que siempre se trabajó realizando tratamientos conversiones de los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

Los objetivos específicos de investigación fueron logrados de manera satisfactoria.

- Identificar los tratamientos y las conversiones que los estudiantes de la carrera de Arquitectura utilizan cuando resuelven una actividad didáctica sobre la Elipse.
- Describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes de la carrera de Arquitectura utilizan al desarrollar una actividad didáctica sobre la Elipse.

Para el primer objetivo, se considera aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica, lo concerniente a tratamientos y conversiones, lo que nos permitió dar fundamento teórico para el diseño de la actividad didáctica mediante la elaboración de una secuencia de preguntas.

Se observa en la actividad didáctica que, mediante la secuencia de preguntas, se logra identificar los tratamientos y las conversiones realizados por los estudiantes Rocío, Danilo y Corina en lengua natural, gráfica y algebraica. De manera particular, la pregunta 2, que contó con tres ítems y que tuvo como objetivo que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos referentes a los elementos de la Elipse, como vértices del eje mayor, menor y centro de la Elipse, ha permitido que los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina* transitaran entre los registros de representación semiótica.

Para el segundo objetivo, describimos los tratamientos y las conversiones que los estudiantes de la carrera de Arquitectura utilizan al desarrollar la actividad didáctica sobre la Elipse. En la pregunta 3, por ejemplo, se describe el tratamiento realizado por los estudiantes en el registro algebraico para indicar las coordenadas de los focos, en donde los estudiantes se apoyaron de la relación pitagórica y realizaron los cálculos correspondientes. En el caso de las conversiones, por ejemplo, en la pregunta 4, los estudiantes tuvieron que realizar el cambio del registro algebraico al registro gráfico cuando se les pidió que indicaran la gráfica de la Elipse que modela el Banco Comercial de Mauricio y que en ella señalen sus elementos.

Al lograr identificar y describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes *Rocío, Danilo* y *Corina* utilizaron al desarrollar la secuencia de preguntas, podemos asegurar que se alcanzó el objetivo general, el cual es *"Analizar de qué manera estudiantes de la carrera de Arquitectura movilizan la noción de Elipse cuando resuelven una actividad didáctica que requiera el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico".*

Con respecto a la pertinencia de nuestra investigación, consideramos que se da, ya que en nuestro país hay pocas investigaciones relacionadas con el estudio de la Elipse en el nivel superior. Hacemos hincapié que, en el Perú, este tema es visto en diferentes carreras como Ingeniería, Medicina, Administración, Física, Matemática, entre otras.

El aporte de nuestro trabajo a futuras investigaciones es mostrado a continuación:

- Realizar estudios relacionados a la Elipse apoyados por Software, como por ejemplo el Geogebra, ya que estos programas permiten una mejor comprensión del objeto matemático Elipse debido a las herramientas que tiene.
- Debido a las aplicaciones de las propiedades de la Elipse en la medicina como, por ejemplo, el uso del litotriptor en la pulverización de los cálculos en las vías urinarias,

así como en la Física en el estudio de los cuerpos celestes, se recomienda hacer un estudio sobre estas aplicaciones.

- Recomendamos realizar estudios de los textos universitarios y analizarlos para mejorar la enseñanza en nuestro país referente al estudio de las cónicas, ya que este tema es visto en los primeros ciclos de la mayoría de carreras universitarias.
- Diseñar actividades en contexto real, ya que permiten al estudiante motivarse e investigar asuntos respectos a su carrera, así como ver las aplicaciones de la Matemática en la vida real.

REFERENCIAS

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España.

Bonilla, Daniela; Parraguez, Marcela; Solanilla, Leonardo (2014). *Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 779-786). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bilbao, M. (2009). El teatro de la calle Ronda. Primer ejemplo de arquitectura teatral en el Bilbao de 1800.*Revista de humanidades y ciencias sociales de Bilbao, 20(1), pp. 79-90.* Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3169214

Dijksterhuis, F. (2011). Moving around the ellipse. Conic sections in Leiden, 1620-1660. In S. Dupré, & C. Lüthy (Eds.), Silent messengers: the circulation of material objects of knowledge in the early modern Low Countries (pp. 89-124). (Low Countries studies on the circulation of natural knowledge; No. Vol. 1). Berlin: LIT

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 91, pp. 143-168.* Recuperado de: http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Geometre II Plus*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf

Flores, A. & Gómez, A. (2013). *La modelación matemática y la enseñanza de las cónicas.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1179-1185). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4215/

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación-Quinta edición. México: Interamericana Editores S.A.* Recuperado de: https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Lehmann Ch. (2003). *Geometría Analítica.* Versión en español por R.García. México,D.F: Editorial LIMUSA, S.A. Trigésimo quinta impresión.

León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la Elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de Arquitectura y Administración de proyectos.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/5652

Olano, M. (2018). *Registros de representación semiótica de la Elipse: secuencia de actividades mediada con el Geogebra para estudiantes de quinto de secundaria.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/12039

Olivares, E. (2018). *Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de Elipse en estudiantes de física.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/12989

Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/7098/

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de Elipse como lugar geométrico. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 41, pp. 45-60. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194229980005

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012) *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*. Santa Fe. Colombia. Cengage Learning.

ANEXOS

La actividad fue planeada con el objetivo de favorecer a que los estudiantes de la carrera de Arquitectura movilicen sus conocimientos acerca de los elementos de la Elipse haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico.

CONSTRUCCIÓN ELÍPTICA DE LA SEDE DEL BANCO COMERCIAL DE MAURICIO

El Banco Comercial de Mauricio, fundado en 1838, es el banco más antiguo de la región del Océano Indico y se encuentra ubicado en la ciudad de Ebene, en África. Construido por el estudio Jean Francois Koening Architecs, fue elegido en el año 2011, por la Unión Internacional de Arquitectos para representar lo mejor de la arquitectura del continente africano.

Fig1. Banco Comercial de Mauricio.
Recuperado de: https://decoracion.trendencias.com/varios/la-arquitectura-futurista-triunfa-por-el-mundo

Figura 2. Banco Comercial de Mauricio.
Recuperado de: https://www.descubretumundo.net/2013/10/innovacion-arquitectonica-edificio-del.html

La forma elíptica de este edificio de 9 pisos se consigue mediante el uso de estructuras de acero curvadas, columnas de hormigón y elementos curvados prefabricados, además, se sabe que el ancho de la Elipse es 30 metros y el largo 65 metros.

1. Si la sede del Banco Comercial de Mauricio es de forma elíptica, ¿qué elementos de la Elipse se pueden inferir, cuando en el texto se indica que su ancho es de 30 metros y su largo es de 65 metros?

2. Teniendo en cuenta la figura 3

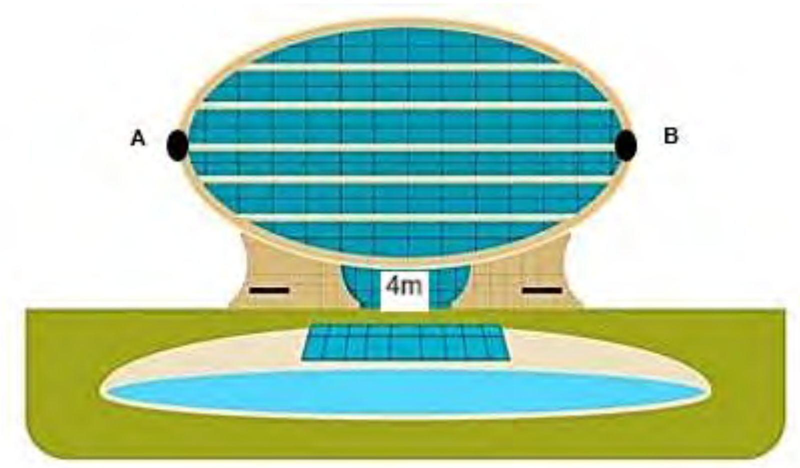


Fig 3. Adaptado de https://es.123rf.com/photo_58835859_el-banco-comercial-de-mauricio

a) Establezca un sistema de referencia adecuado (ejes X e Y) y determine la ecuación de la Elipse que modela la sede del Banco Comercial de Mauricio.

b) Considere que los puntos A y B, de la figura 3, se encuentran a una misma altura y además que la distancia que separa dichos puntos es la máxima posible. Responda:

¿Qué elementos de la Elipse representan los puntos A y B?

De acuerdo al sistema de coordenadas elegido, ¿cuáles serían las coordenadas de dichos puntos?

c) Determine las coordenadas de los vértices del eje menor de la Elipse.

3. La propiedad de reflexión de la Elipse indica que toda onda de luz que sea generada en un foco, se reflejara en el otro, logrando así una mayor propagación de la luz en edificios cuya estructura este formada por vidrios (como lo es el edificio del Banco Comercial de Mauricio). Si por motivos de iluminación durante la noche se desean colocar dos potentes reflectores en el edificio del Banco Comercial de Mauricio, señale las coordenadas donde deben ubicarse dichos reflectores de acuerdo al sistema de referencia elegido.

4. Represente gráficamente, en el plano cartesiano, la Elipse que modela el edificio del Banco Comercial de Mauricio, indicando sus elementos.