PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

ESTUDIO LOCAL Y GLOBAL DE UN SISTEMA TIPO KORTEWEG-DE VRIES - BURGER

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas

Autor

Dandy Rueda Castillo

Asesor

Juan Montealegre Scott

Jurado

Julio Alcántara Bode

Ulices Zavaleta Calderón

LIMA - PERÚ

2012

En memoria de mis padres,

Juan y Priscila,

porque este trabajo representa uno de sus anhelos.

Agradecimientos

Al Profesor Juan Montealegre; por sus enseñanzas, orientación, motivación y paciencia durante todo este tiempo.

Al Dr. Alcántara, pues con el aprendí a escuchar la sinfonía de las matemáticas y por que siempre será mi Profesor de Topología.

A mis colegas Aldo Mendoza y Carlos Rodríguez, por su constante motivación para concluir este trabajo.

Al Dr. César Carranza Saravia, por abrirme la puertas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A Gustavo Ulloa, porque con él se empezó a forjar esta historia entre partidas de ajedréz y un poco de música.

A mis sobrinos, Jadit y Jesús David porque son la mejor motivación que tengo.

A mis hermanos, Daly e Yndar por apoyarme incondicionalmente.

A mi querida esposa, Cecilia, por hacer la parte más difícil que es tolerar mis defectos.

RESUMEN

Las ecuaciones de Boussinesq son un tipo de ecuaciones derivadas de las ecuaciones de Euler y que modelan la propagación sensiblemente bidimensional de ondas largas de gravedad y de pequeña amplitud sobre la superficie de un canal. Un modelo de este tipo en un canal de fondo plano está dado por el sistema

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x \eta + \eta \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x w + \partial_x (w\eta) + \partial_x^3 w = 0 \end{cases} \tag{P1}$$

donde las variables adimensionales η y w representan respectivamente, la deflección de la superficie libre del líquido respecto a su posición de reposo y la velocidad horizontal del fluido a una profundidad de $\sqrt{2/3}h$, donde h es la profundidad del fluido en reposo. Dicho modelo es desde luego un sistema de ecuaciones diferenciales de Korteweg-de Vries acopladas a través de los efectos dispersivos y los términos no lineales. Por otro lado, el sistema (P1) al estar referido a un fluido incompresible no viscoso no recoge los efectos de la viscosidad μ, sin embargo al ser desacoplado podemos introducir tales efectos, resultando un sistema del tipo Korteweg-de Vries - Burger dado por

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x G(u,v) - \mu \partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v + \partial_x G(v,u) - \mu \partial_x^2 v = 0 \end{cases} \tag{P2}$$

En este trabajo se estudia el PVI asociado a (2) en los espacios $\mathbb{H}^s$ estableciendo su buena formulación local para $s > 3/2$ y buena formulación global para $s \geq 2$, en este último caso se muestra adicionalmente que la solución global decae asíntoticamente en el tiempo. Finalmente, se muestra que el PVI asociado a (P1) está bien formulado localmente como consecuencia de la buena formulación local de (2).

Contenido

Introducción **vii**

1 Contexto teórico **1**

1.1 Integración vectorial 1

1.1.1 Funciones medibles 1

1.1.2 Funciones integrables. 2

1.1.3 Espacios $L^p(I, X)$ 3

1.1.4 Espacios $\mathrm{W}^{1,p}(I, X)$ 4

1.2 Transformada de Fourier y espacios de Sobolev 5

1.2.1 Distribuciones temperadas 7

1.2.2 Espacios de Sobolev del tipo $L^2(\mathbb{R})$ 8

1.3 Semigrupos de operadores lineales 10

2 Teoría del problema de Korteweg-de Vries - Burger **13**

2.1 El problema lineal asociado 14

2.2 Ecuación integral asociada 19

2.3 Buena formulación local en $\mathbb{H}^s$, $s > \frac{3}{2}$ 30

2.3.1 Existencia y unicidad 30

2.3.2 Dependencia continua de la solución 32

2.4 El problema global en $\mathbb{H}^s$, $s \geq 2$ 40

2.5 Comportamiento asintótico 49

3 Teoría local del problema sin disipación **51**

3.1 El problema lineal no disipativo 51

3.2 Existencia y unicidad de la solución 54

3.3 Dependencia continua de la solución 61

Bibliografía **75**

Introducción

Las ondas constituyen un fenómeno observable fascinante que han dado lugar a numerosas investigaciones teóricas y experimentales, en particular las ondas superficiales en el agua han promovido diversas formulaciones de modelos, tal vez uno de los más relevantes es el modelo unidimensional descrito en 1895 por D. J. Korteweg y G. de Vries mediante la ecuación

$$\partial_t w + \partial_x^3 w + w\partial_x w = 0$$

conocida como la ecuación de Korteweg - De Vries o simplemente KdV, y que modela la propagación de ondas superficiales.

En general (ver [5]), el problema de las ondas de agua para un líquido ideal consiste en describir el movimiento de la superficie libre y, la evolución del campo de velocidad de una capa perfecta de un fluido incompresible e irrotacional bajo la influencia de la gravedad. En esta línea, con una aproximación continua, las ecuaciones que gobiernan este tipo de ondas son la ecuaciones de Euler (1750) como se refiere en [3].

Un tipo de ecuaciones derivadas de las ecuaciones de Euler y que modelan la propagación sensiblemente bidimensional de ondas largas de gravedad y de pequeña amplitud, sobre la superficie de un canal, son las ecuaciones de Boussinesq. Tales ecuaciones resultan ser las más simples que capturan los efectos dispersivos y nolineales de la onda (ver [41]).

Un modelo de este tipo está dado por el sistema del PVI

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x \eta + \eta \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x w + \partial_x (w\eta) + \partial_x^3 w = 0 \\ w(x,0) = w_0(x), \quad \eta(x,0) = \eta_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

que forma parte de una variante de los sistemas de Boussinesq descritos por Bona, Chen y Saut (ver [3]) para describir la propagación unidimensional en la superficie del agua de ondas largas de gravedad, de pequeña amplitud en un canal de fondo plano. Aquí, las variables adimensionales η y w representan respectivamente, la deflección de la superficie libre del líquido respecto a su posición de reposo y la velocidad horizontal del fluido a una profundidad de $\sqrt{2/3}h$, donde h es la profundidad del fluido en reposo.

Dicho modelo resulta ser en realidad un sistema de ecuaciones diferenciales de Korteweg-de Vries acopladas a través de los efectos dispersivos y los términos no lineales. El sistema (1) queda desacoplado en la parte lineal diagonalizándolo por medio de un cambio de variable adecuado, obteniéndose así un sistema equivalente. En efecto, tomando transformada de Fourier al problema lineal asociado con (1) se obtiene

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{w}(t) - i\xi\left(1+\xi^2\right)\widehat{\eta}(t) = 0 \\ \partial_t \widehat{\eta}(t) - i\xi\left(1+\xi^2\right)\widehat{w}(t) = 0 \\ \widehat{w}(0) = \widehat{\varphi}, \quad \widehat{\eta}(0) = \widehat{\psi} \end{cases}$$

que en su forma vectorial se puede escribir como sigue

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{\vec{u}}(\xi,t) - i\xi \widehat{A}(\xi)\widehat{\vec{u}}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{\vec{u}}(\xi,0) = \widehat{\Phi}(\xi). \end{cases}$$

donde $\widehat{\vec{u}}(\xi,t) = \begin{pmatrix} \widehat{w}(\xi,t) \\ \widehat{\eta}(\xi,t) \end{pmatrix}$, $\widehat{A}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\xi^2 \\ 1+\xi^2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\widehat{\Phi}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(\xi) \\ \widehat{\psi}(\xi) \end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta que los autovectores de la matriz $\widehat{A}(\xi)$ son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, escogemos el cambio de variable $\widehat{\vec{u}}(\xi) = 2C\widehat{\vec{v}}(\xi)$, con $C = [v_1 \;\; v_2]$ es decir

$$\begin{cases} \widehat{w}(t) = 2\widehat{\gamma_1}(\xi) + 2\widehat{\gamma_2}(\xi) \\ \widehat{\eta}(t) = 2\widehat{\gamma_1}(\xi) - 2\widehat{\gamma_2}(\xi) \end{cases}$$

de donde $w = 2\gamma_1 + 2\gamma_2$ y $\eta = 2\gamma_1 - 2\gamma_2$.

Así, reemplazando este cambio de variable en (1), se obtiene

$$\begin{cases} \partial_t\gamma_1 + \partial_x\gamma_1 + \partial_x^3\gamma_1 + \frac{3}{2}\partial_x\gamma_1^2 + \partial_x(\gamma_1\gamma_2) - \frac{1}{2}\partial_x\gamma_2^2 = 0 \\ \partial_t\gamma_2 - \partial_x\gamma_2 - \partial_x^3\gamma_2 - \frac{1}{2}\partial_x\gamma_2^2 + \partial_x(\gamma_1\gamma_2) + \frac{3}{2}\partial_x\gamma_2^2 = 0 \\ \gamma_1(x,0) = \frac{1}{4}[w_0(x) + \eta_0(x)], \;\; \gamma_2(x,0) = \frac{1}{4}[w_0(x) - \eta_0(x)] \end{cases} \tag{2}$$

luego, haciendo

$$\begin{cases} \gamma_1(x,t) = u(x-t,t) \\ \gamma_2(x,t) = v(x+t,t) \end{cases}$$

entonces (2) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x G(u,v) = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v + \partial_x G(v,u) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{3}$$

donde $G(u,v) = \dfrac{3}{2}u^2 - uv - \dfrac{1}{2}v^2$.

El sistema (1) al ser derivado de las ecuaciones de Euler está referido a un fluido incompresible no viscoso, como se sabe Navier (1822) e, independientemente, G. Stokes (1845) fueron quienes introdujeron en el modelo euleriano el término de viscosidad y llegaron a lo que hoy denominamos ecuaciones de Navier-Stokes. En este caso, el modelo más simple que recoge el efecto de la viscosidad es la ecuación de Burger que predice la formación de ondas de choque producidas por la turbulencia y su ecuación es

$$u_t + u\partial_x u - \mu\partial_x^2 u = 0$$

En el sistema (3) la influencia de la viscosidad μ en la evolución de la onda de agua puede ser considerada adicionando los términos $-\mu\partial_x^2 u$ y $-\mu\partial_x^2 v$, resultando el sistema tipo Korteweg-de Vries - Burger (KdV - B)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x G(u,v) - \mu\partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v + \partial_x G(v,u) - \mu\partial_x^2 v = 0 \\ u(x,0) = u_0, \;\; v(x,0) = v_0 \end{cases} \tag{4}$$

En su tesis doctoral W. Nunes [34] demostró que la ecuación de KdV-B es bien formulada localmente en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$, usando el teorema de contracción y estimados de energía. Este resultado le sirvió para probar la existencia y la unicidad de la ecuación de KdV. Por otro lado, E. Bisognin, V. Bisognin y G. Perla [1] demostraron que para un problema de Cauchy asociado a un sistema de dos ecuaciones KdV-B con datos iniciales pequeños, existe una solución global en $\mathbb{H}^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$, para lo cual probaron que la solución local es acotada en intervalos finitos de tiempo. Además, mostraron que tal solución global decae asintóticamente cuando en el tiempo crece sin límite.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar en $\mathbb{H}^s$, la buena formulación de los problemas de valores iniciales asociados a los sistemas (1) y (4). Para tal caso se probará en $\mathbb{H}^s$,

1. para $s > \frac{3}{2}$: la buena formulación local del problema de valor inicial asociado al sistema (4), es decir se probará la existencia, unicidad, persistencia (esto significa que la solución $(u(\cdot), v(\cdot))$ describe una curva continua en $\mathbb{H}^s$ siempre que $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}^s$) y dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

2. La existencia de la solución global para el problema de valor inicial asociado al sistema (4) cuando los datos iniciales pertenecen a $\mathbb{H}^s$, $s \geq 2$.

3. Estudiar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución del problema de valor inicial asociado al sistema (1).

NOTACIONES

$\mathbb{N}$	Conjunto de enteros positivos.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
X, Y	Espacios de Banach.
X'	Dual topológico de X.
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espacio de operadores lineales acotados de X en Y.
$X \hookrightarrow Y$	Inclusión continua.
$\mathcal{L}(X)$	$\mathcal{L}(X,X)$
$B_r[x]$	Bola de centro x y radio r.
$C([0,T]:X)$	Espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X.
$AC([0,T]:X)$	Espacio de funciones absolutamente continuas de I en X.
$C^1([0,T]:X)$	Espacio de funciones continuamente diferenciables de $[0,T]$ en X.
$C^k(\mathbb{R})$	Espacio de funciones continuas diferenciables de orden k en $\mathbb{R}$.
$C_0^k(\mathbb{R})$	Espacio de funciones de clase C^k con soporte compacto.
$C_\infty(\mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas que se anulan en el infinito.
$C_0(I,X)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto de I a X.
$C_0^\infty(I,X)$	Espacio de funciones C^∞ con soporte compacto de I a X.
$S(\mathbb{R})$	Espacio de Schwartz en $\mathbb{R}$.
$S'(\mathbb{R})$	Espacio de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}$.

$L^p(\mathbb{R})$	Espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}$ de orden p, $1 \leq p \leq \infty$.
$L^\infty(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones medibles escencialmente acotadas en $\mathbb{R}$.
$\mathbb{L}^p = L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$	Espacio producto de $L^p(\mathbb{R})$ por $L^p(\mathbb{R})$.
$H^s(\mathbb{R}) = J^{-s}L^2(\mathbb{R})$	Espacio de Sobolev de orden s con base en $L^2(\mathbb{R})$.
$H^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{R})$	
$\mathbb{H}^s = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$	Espacio producto de $H^s(\mathbb{R})$ por $H^s(\mathbb{R})$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto escalar para la dualidad X', X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Producto interno en X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_s$	Producto interno en $H^s(\mathbb{R})$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^s} = \langle \cdot, \cdot \rangle_s + \langle \cdot, \cdot \rangle_s$	Producto interno en $\mathbb{H}^s$.
$\lVert \cdot \rVert_{L^P}$	Norma en $L^p(\mathbb{R})$
$\lVert \cdot \rVert_{L^\infty}$	Norma en $L^\infty(\mathbb{R})$.
$\lVert \cdot \rVert_s = \lVert J^s \cdot \rVert_{L^2}$	Norma en $H^s(\mathbb{R})$.
$\lVert \cdot \rVert_{\mathbb{H}^s}^2 = \lVert \cdot \rVert_s^2 + \lVert \cdot \rVert_s^2$	Norma en $\mathbb{H}^s$.
$\mathcal{D}(A)$	Dominio del operador lineal A.
$\mathcal{R}(A)$	Rango del operador lineal A.
$[A, B] = AB - BA$	Conmutador de los operadores A y B.
$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x)\, dx$	Transformada de Fourier.
$\overset{\vee}{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} u(\xi)\, d\xi$	Transformada inversa de Fourier.
J^s	Potencial de Bessel de orden $-s$, $\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + \lvert\xi\rvert^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi)$.
$D^s = \left(-\partial_x^2\right)^{\frac{s}{2}}$	Potencial de Riesz de orden $-s$.
$c.e.t.$	Casi en todo.
C, C_s	Constantes positivas.

Capítulo 1

Contexto teórico

En este capítulo se procura presentar los resultados más relevantes relacionados con los fundamentos teóricos que sustentan el trabajo, muchos de los cuales pueden consultarse por ejemplo en Cazenave - Haraux [11] o Cazenave [10] para el caso de integración vectorial. Respecto a transformada de Fourier y espacios de Sobolev se ha considerado el libro de Folland [16] y Linares [30]; y finalmente, en lo referente a la teoría de semigrupos ha sido de mucha ayuda el material del profesor Montealegre [39] junto a Pazy [35] y Engel - Nagel [14]. En cualquiera de los casos también se destaca la bibliografía que ahí ha sido citada.

1.1 Integración vectorial

En esta sección, $I \subseteq \mathbb{R}$ representa un intervalo y X un espacio de Banach equipado con la norma $\|\cdot\|_X$.

1.1.1 Funciones medibles

Definición 1 *Una función $u : I \to X$ es **fuertemente medible** si existe $J \subset I$ de medida cero y una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I, X)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \ \textit{para todo } t \in I \setminus J.$$

De la definición se sigue que si $u : I \to X$ es medible, entonces $\|u\|_X : I \to \mathbb{R}$ es también medible. Además, si $u : I \to X$ es medible y si Y es un espacio de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$, entonces $u : I \to Y$ es medible.

Proposición 1.1 (Teorema de Pettis) *Una función $u : I \to X$ es medible si y solamente si, u es débilmente medible (es decir, para todo $x' \in X'$, la función $t \mapsto \langle x', u(t)\rangle$ es medible) y existe $J \subset I$ de medida cero tal que $u(I \setminus J)$ es separable.*

Demostración: Véase [11]. ❏

Corolario 1.2 *Si $u : I \to X$ es una función débilmente continua, entonces u es fuertemente medible.*

Demostración: Véase [11]. ❏

1.1.2 Funciones integrables.

Definición 2 *Una función medible $u : I \to X$ es* ***integrable*** *si existe una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I, X)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - u(t)\|_X \, dt = 0.$$

Proposición 1.3 *Si $u : I \to X$ es integrable, entonces existe $x(u) \in X$ tal que para toda sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I, X)$ que verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - u(t)\|_X \, dt = 0,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t) \, dt = x(u),$$

el límite anterior en la topología fuerte de X.

Demostración: Véase [11] ❏

Al elemento $x(u) \in X$ se le denomina la integral de u en I y se escribe

$$x(u) = \int_I u = \int_I u(t) \, dt.$$

Además, si $I = [a, b]$, también escribimos

$$x(u) = \int_a^b u = \int_a^b u\,(t)\,dt,$$

y como para las funciones con valores reales, cuando $a < b$ se verifica que

$$\int_b^a u\,(t)\,dt = -\int_a^b u\,(t)\,dt.$$

Proposición 1.4 (Teorema de Bochner) *Sea $u : I \to X$ medible, entonces u es integrable si y solamente si, $\|u\,(\cdot)\|_X : I \to X$ es integrable. Además,*

$$\left\| \int_I u\,(t)\,dt \right\|_X \leq \int_I \|u\,(t)\|_X\,dt.$$

Demostración: Véase [11]. ❑

Este teorema permite, en general, aplicar los teoremas de convergencia usuales a $\|u(\cdot)\|_X$.

Proposición 1.5 (Teorema de la convergencia dominada) *Sean $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables de I en X, $v : I \to \mathbb{R}$ una función integrable y $u : I \to X$. Si se cumple que*

(i) $\|u_n\,(t)\|_X \leq v\,(t)$, *para casi todo $t \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) $u_n\,(t) \to u\,(t)$ *para casi todo $t \in I$.*

Entonces, u es integrable y

$$\int_I u\,(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n\,(t)\,dt.$$

Demostración: Véase [32]. ❑

1.1.3 Espacios $L^p(I, X)$

Sea $p \in [1, \infty]$, se representa por $L^p(I, X)$ al conjunto de (clases de) funciones medibles $u : I \to X$ tales que la función $t \mapsto \|u\,(t)\|_X$ pertenece a $L^p(I) = L^p(I, \mathbb{R})$. Además, si $u \in L^p(I, X)$ se define

$$\|u\|_{L^p(I,X)} = \begin{cases} \left(\int_I \|u\,(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \inf\{C : \|u\,(t)\|_X \leq C \text{ c.e.t } I\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Es importante señalar que muchas de las propiedades de los espacios $L^p(I,X)$ son semejantes a la de los espacios $L^p(I)$, con esencialmente las mismas pruebas.

Proposición 1.6 *El espacio $L^p(I,X)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ es un espacio de Banach si $p\in[1,\infty]$.*

Demostración: Véase [13]. ❏

Proposición 1.7 *Sea $p\in[1,\infty]$ y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^p(I,X)$. Si existe $u:I\to X$ tal que para casi todo $t\in I$, $u_n(t)\rightharpoonup u(t)$ en X; entonces, $u\in L^p(I,X)$ y $\|u\|_{L^p(I,X)}\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^p}$.*

Demostración: Véase [11]. ❏

Definición 3 *Una función f definida sobre el intervalo $[a,b]$ y tomando valores en el espacio de Banach X es **absolutamente continua en** $[a,b]$ si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n}\|f(b_i)-f(a_i)\|_X<\varepsilon,$$

para cada familia de intervalos disjuntos dos a dos $\{]a_i,b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ para los cuales

$$\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i|<\delta$$

1.1.4 Espacios $\mathbf{W}^{1,p}(I,X)$

Si $1\le p\le\infty$, el espacio vectorial de funciones $f\in L^p(I,X)$ tales que $f'\in L^p(I,X)$ en el sentido de $C_0^\infty(I,X)$ se representa por $W^{1,p}(I,X)$.

Proposición 1.8 *Sean $1\le p\le\infty$ y $f\in L^p(I,X)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $f\in W^{1,p}(I,X)$.

(ii) *existe $g\in L^p(I,X)$ tal que para casi todos $t,t_0\in I$ se tiene*

$$f(t)=f(t_0)+\int_{t_0}^{t}g(s)\,ds.$$

(iii) existen $g \in L^p(I, X)$, $x_0 \in X$, $t_0 \in I$ *tales que*

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

para casi todo $t \in I$.

(iv) f *es absolutamente continua, derivable c.e.t.* I, *y* $f' \in L^p(I, X)$ *c.e.t.* p

(v) f *es débilmente absolutamente continua, débilmente derivable casi en todas partes, y* f' *(en el sentido casi en todas partes) está en* $L^p(I, X)$.

Demostración: Véase [11]. ❑

Proposición 1.9 *Supongamos que* X *sea reflexivo y que* $f \in L^p(I, X)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Luego,* $f \in W^{1,p}(I, X)$ *si y solamente si existe* $\varphi \in L^p(I, \mathbb{R})$ *tal que*

$$\|f(\tau) - f(t)\|_X \leq \left| \int_t^{\tau} \varphi(s)\, ds \right|, \text{ para casi todos los } t, \tau \in I.$$

En ese caso, tenemos $\|f'\|_{L^p(I,X)} \leq \|\varphi\|_{L^p(I,\mathbb{R})}$.

Demostración: Véase [11]. ❑

1.2 Transformada de Fourier y espacios de Sobolev

Definición 4 *Si* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *la transformada de Fourier de* u *se define como sigue*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} u(x) dx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$.

Proposición 1.10 *El operador*

$$\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n)$$

es una transformación lineal acotada con

$$\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}.$$

Demostración: Véase [16]. ❏

Antes de enunciar la siguiente proposición necesitamos establecer algunas notaciones.

Un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es llamado *multi-índice* de orden

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Además, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ escribimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

y para $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se tiene

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x).$$

Proposición 1.11 *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(i) Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) \, dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es la convolución de u *y* v, *entonces*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi).$$

(ii) Para cada $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y todo multi-índice* α *tenemos*

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}(\xi),$$

es decir,

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi_1)^{\alpha_1} \cdots (i\xi_n)^{\alpha_n} \widehat{u}(\xi).$$

Demostración: Véase [16]. ❏

Proposición 1.12 (Teorema de Plancherel) *Si* $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, *entonces se tiene que* $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\|\widehat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}. \tag{1.1}$$

Demostración: Véase [30]. ❑

La proposición establece que el operador

$$\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

definido sobre el subespacio denso $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es lineal acotado. Por tanto, $\widehat{\cdot}$ se extiente por continuidad a un único operador acotado

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

que verifica (1.1). Para mayores detalles puede consultarse [16] ó [30]. ❑

Proposición 1.13 *La transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

es un operador lineal unitario, es decir es una isometría sobreyectiva.

Demostración: Véase [20]. ❑

1.2.1 Distribuciones temperadas

El **espacio de Schwartz** es el conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty,$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$. Escribimos

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right|.$$

Definición 5 *La sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \geq 1}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si*

$$\|f_m - f\|_{\alpha,\beta} \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$.

Definición 6 *El conjunto de las* ***distribuciones temperadas****, representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con la topología definida por $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$.*

Definición 7 *Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de u, representada por $\widehat{u}$ es definida por*

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Espacios de Sobolev del tipo $L^2(\mathbb{R})$

Definición 8 *Sea $s \in \mathbb{R}$, el* ***espacio de Sobolev de orden*** *s denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$ se define por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{J^s u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con la norma $\|\cdot\|_s$ definida como

$$\|u\|_s = \|J^s u\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

Proposición 1.14 *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(i) Si $0 \leq s \leq t$, entonces $H^t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ densamente.

(ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_s = \langle J^s u, J^s v \rangle_{L^2}.$$

(iii) Para todo $s \in \mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Si $r \leq s \leq t$ con $s = (1-\theta)r + \theta t$ y $\theta \in [0, 1]$, entonces

$$\|u\|_s \leq \|u\|_r^{1-\theta} \|u\|_t^{\theta}. \tag{1.3}$$

Demostración: Véase [18]. ❏

El último resultado de la proposición 1.14 será referido como interpolación del espacio H^s entre los espacios H^r y H^t.

Proposición 1.15 *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y para todo $s \in \mathbb{R}$, el operador*

$$D^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$$

es un operador lineal acotado, y $\|D^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \|u\|_{H^s}$.

Demostración: Véase [37]. ❏

Proposición 1.16 (Teorema de inmersión de Sobolev) *Sea $C_{\infty}^{k}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones con k derivadas continuas que se anulan en el infinito. Si $s > \frac{n}{2} + k$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_{\infty}^{k}(\mathbb{R}^n)$. En particular, si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c_s \|u\|_s .$$

Demostración: Véase [18], [30]. ❏

Proposición 1.17 *Si $s > \frac{n}{2}$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra conmutativa respecto a la multiplicación de funciones; es decir, $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|uv\|_s \leq c_s \|u\|_s \|v\|_s .$$

Además, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones débilmente convergentes a u y v en $H^s(\mathbb{R}^n)$ respectivamente, entonces $w - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = uv$.

Demostración: Véase [30]. ❏

Proposición 1.18 *Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 1 + \frac{n}{2}$ y $t \geq 1$; entonces, existe $C = C(s,t,n) > 0$ tal que*

$$|\langle u, v\partial^{\alpha} u\rangle_t| \leq C \left[\|\triangledown f\|_{s-1} \left\|u^2\right\|_t + \|\triangledown f\|_{t-1} \|u\|_s \|u\|_t\right], \tag{1.4}$$

donde $|\alpha| = 1$.

Demostración: Véase [20], [24]. ❏

Proposición 1.19 *Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ y $1 < p < \infty$ y, entonces*

$$\|[J^s, u]\, v\|_{L^p} \leq c \left(\|\partial_x u\|_{L^{p_1}} \left\|J^{s-1} v\right\|_{L^{p_2}} + \|J^s u\|_{L^{p_3}} \|v\|_{L^{p_4}}\right) \tag{1.5}$$

donde $p_2, p_3 \in \left]1, \infty\right[$ y p_1, p_4 son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$.

La desigualdad (1.5) también se cumple si $p_1 = p_4 = \infty$ y $p_2 = p_3 = p$ como se demuestra en [26, lemma X1].

Proposición 1.20 *Si $s > 1$, $r > 1/2$, u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; entonces, existe $C = C(s, r, n) > 0$ tal que*

$$\|[D^s, u]\, v\|_{L^2} \leq C \left(\|u\|_s \|v\|_r + \|u\|_{r+1} \|v\|_{s-1} \right) \tag{1.6}$$

Demostración: Véase [38]. ❑

Proposición 1.21 *Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $v \in H^t(\mathbb{R}^n)$, para cualquier r y t con $t > |r| + n/2$; entonces, existe $C = C(r, t, n)$ tal que*

$$\|uv\|_r \leq C \|u\|_t \|v\|_r \,.$$

Demostración: Véase [37]. ❑

1.3 Semigrupos de operadores lineales

Los resultados que en esta sección se presentan pueden vistos junto a sus demostraciones en [14], [35] y [39].

Definición 9 *Un* ***semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach*** *X es una familia $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

1. *Para todo $t \geq 0 : W(t) \in \mathcal{L}(X)$,*

2. *$W(0) = I$ el operador identidad sobre X,*

3. *Para cada $t, s \geq 0 : W(s + t) = W(s)\, W(t)$, y*

4. *Es fuertemente continuo en el siguiente sentido: Para cada $x \in X$ la aplicación*

   $$t \in [0, +\infty\rangle \mapsto W(t)\, x$$

   es continua.

La última propiedad significa que $\lim\limits_{t\to t_0} W(t)\, x = W(t_0)\, x$ y también puede enunciarse diciendo que la aplicación

$$t \in [0, +\infty\rangle \mapsto W(t)$$

es continua de $[0, +\infty\rangle$ en el espacio $\mathcal{L}(X)$ dotado de la topología fuerte.

Proposición 1.22 *Si* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo sobre* X*, entonces existen contantes* $\omega \geq 0$ *y* $C \geq 1$ *tales que*

$$\|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si en la proposición anterior (proposición 1.22) $\omega = 0$ y $C = 1$, el semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado **semigrupo de contracciones**.

Definición 10 *El* ***generador del semigrupo*** $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre* X *es el operador* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ *definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \left.\frac{d^+}{dt}\right|_{t=0} W(t)x$$

Proposición 1.23 *Si* A *es el generador del semigrupo* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *en* X*, entonces para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *se tiene que* $W(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *para todo* $t \geq 0$*, y*

$$\frac{d}{dt}W(t)x = AW(t)x = W(t)Ax. \tag{1.7}$$

Proposición 1.24 *Si* X *un espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ *es el generador del semigrupo* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre* X*; entonces, para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(A)$*, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ \\ u(0) = \varphi \in \mathcal{D}(A), \end{cases} \tag{1.8}$$

tiene solución única

$$u \in C([0, +\infty[: \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, +\infty[: X)$$

dada por

$$u(t) = W(t)\varphi.$$

Definición 11 *Un operador* L *en el espacio de Banach* X *se denomina* ***disipativo*** *si*

$$\forall \lambda > 0, \ \forall u \in D(L) : \|u - \lambda Lu\|_X \geq \|u\|_X.$$

Proposición 1.25 *Un operador* L *es disipativo en un espacio de Hilbert* H *si y sólo si,* $\langle Lu, u\rangle_H \leq 0$, $\forall u \in H$.

Definición 12 *Un operador* L *en el espacio de Banach* X *se denomina* ***m-disipativo*** *si*

(i) L *es disipativo, y*

(ii) $\forall \lambda > 0,\ \forall x \in X,\ \exists u \in D(L) : u - \lambda L u = x.$

Proposición 1.26 *Sea* L *un operador lineal en el espacio de Hilbert* H*, entonces*

(i) Si L *es autoadjunto y negativo, es decir* $\langle Lu, u\rangle_H \leq 0$ *para todo* $u \in \mathcal{D}(L)$*; entonces,* L *es m-disipativo.*

(ii) Si $\mathcal{D}(L)$ *es denso en* H*, entonces*

$$L \text{ y } -L \text{ son m-disipativos, si y sólo si } L \text{ es antiadjunto.}$$

Proposición 1.27 (Lumer - Phillips) *El operador* $L : \mathcal{D}(L) \subseteq H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ *es generador de un semigrupo de contracciones sobre* $H^s(\mathbb{R})$ *si y sólo si,* L *es m-disipativo y* $\mathcal{D}(L)$ *es denso en* $H^s(\mathbb{R})$.

Teoría del problema de Korteweg-de Vries - Burger

En este capítulo abordaremos dos de los objetivos de este trabajo: Buena formulación local del problema de valor inicial (4) en $\mathbb{H}^s$ si $s > \dfrac{3}{2}$, y existencia de solución global para $s \geq 2$. Además, para ponerle un poco de valor agregado al asunto, aprovechando algunos resultados en el caso global mostraremos que la solución decae asintóticamente en el tiempo.

Sin duda, como se podrá apreciar en el camino, nuestra carta principal o en algunos casos el as bajo la manga lo constituye el teorema 2.4 al que en algunos casos nos referiremos como propiedad regularizante.

Vale precisar que el problema (4) cuya formulación está dada por

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x G(u,v) - \mu \partial_x^2 u = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v + \partial_x G(v,u) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ u(x,0) = v_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

donde $G(u,v) = \dfrac{3}{2}u^2 - uv - \dfrac{v^2}{2}$, puede escribirse en forma vectoarial como sigue

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + A_\mu \vec{u} + \vec{G}(\vec{u}) = 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\vec{u}_0 = (v_0, v_0)$, $\vec{u} = (u, v)$, $A_\mu \vec{u} = \left(\partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u, -\partial_x^3 v - \mu \partial_x^2 v\right)$ y

$$\vec{G}(\vec{u}) = \left(\partial_x G(u, v), \partial_x G(u, v)\right) \tag{2.2}$$

Los principales resultados que sustentan la buena formulación local de (4) son los teoremas 2.7, 2.9 y 2.13. En el teorema 2.7, valiéndonos del teorema del punto fijo de Banach, se resuelve el problema de la existencia de solución de la ecuación integral (2.11) asociada a 2.1 y mediante un argumento usado por Kato y Fujita [25] se logra probar la unicidad de dicha solución. El teorema 2.9 lo que hace es refrendar la sospecha de que la solución de la ecuación integral es también solución del problema (4) y además, consolida la unicidad de tal solución. El primer objetivo del trabajo se alcanza con el teorema 2.13 al establecerse que la solución del problema (4) depende continuamente del dato inicial, cuando éste es tomado en $\mathbb{H}^s$ con $s > \frac{3}{2}$. El segundo objetivo se concreta con el teorema 2.18; y, finalmente el comportamiento asintótico de la solución global se muestra con el teorema 2.20.

2.1 El problema lineal asociado

El primer paso para probar la buena formulación de un problema de valor inicial es estudiar el problema lineal. En este sentido, la teoría de semigrupos nos provee de un resultado fundamental (ver proposición 1.24) que nos conduce a probar el teorema 2.4 y que como veremos nos da información sobre la regularidad de la solución.

Como es evidente, el problema de valor inicial lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v - \mu \partial_x^2 v = 0 & \\ u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x) & \end{cases} \tag{2.3}$$

asociado con (4) tiene la forma vectorial

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t) + A_\mu \vec{u}(t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A_\mu = \begin{pmatrix} \partial_x^3 - \mu \partial_x^2 & 0 \\ 0 & -\partial_x^3 - \mu \partial_x^2 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Definimos ahora el operador A_μ como sigue

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(A_\mu\right) = \mathbb{H}^{s+3},\ s \geq 0 \\ \\ A_\mu \vec{u} = \left(\partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u, -\partial_x^3 v - \mu \partial_x^2 v\right),\ \ \vec{u} = (u,v) \in \mathbb{H}^{s+3}. \end{cases}$$

Empezamos mostrando que $-A_\mu$ es disipativo maximal (proposiciones 2.1 y 2.2), pues junto al hecho que $\mathbb{H}^{s+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^s$ (proposición 1.14) se logra establecer que $-A_\mu$ genera un semigrupo de contracciones (proposición 1.27, Lumer-Phillips).

Proposición 2.1 *El operador $-A_\mu$ es disipativo en $\mathbb{H}^s$, $s \geq 0$.*

Demostración: Veamos primero que $-A_\mu \vec{u} \in \mathbb{H}^s$. En efecto, si $\vec{u} = (u,v) \in \mathbb{H}^{s+3}$; entonces, por definición de $-A_\mu$, la desigualdad triangular, $\left\|\partial_x^k u\right\|_s \leq \|u\|_{s+k}$ (proposición 1.15) y $\|u\|_s \leq \|u\|_{s+1}$ en H^s, se tiene

$$\begin{aligned}
\|-A_\mu \vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2 &= \left\|\left(\partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u, -\partial_x^3 v - \mu \partial_x^2 v\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \\
&= \left\|\partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u\right\|_s^2 + \left\|-\partial_x^3 v - \mu \partial_x^2 v\right\|_s^2 \\
&= \left\|\partial_x^3 u\right\|_s^2 + \mu^2 \left\|\partial_x^2 u\right\|_s^2 + \left\|\partial_x^3 v\right\|_s^2 + \mu^2 \left\|\partial_x^2 v\right\|_s^2 \\
&\leq \|u\|_{s+3}^2 + \mu^2 \|u\|_{s+2}^2 + \|v\|_{s+3}^2 + \mu^2 \|v\|_{s+2}^2 \\
&\leq \|u\|_{s+3}^2 + \mu^2 \|u\|_{s+3}^2 + \|v\|_{s+3}^2 + \mu^2 \|v\|_{s+3}^2 \\
&= \left(1+\mu^2\right)\left(\|u\|_{s+3}^2 + \|v\|_{s+3}^2\right) = \left(4+\mu^2\right)\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^{s+3}}^2
\end{aligned}$$

por tanto, $-A_\mu \vec{u} \in \mathbb{H}^s$.

Ahora demostraremos que $-A_\mu$ es negativo, es decir, $\langle -A_\mu \vec{u}, \vec{u}\rangle_{\mathbb{H}^s} \leq 0$. Por la definición de $-A_\mu$, las propiedades del producto interno y $\left\langle \partial_x^k u, v\right\rangle_s = (-1)^k \left\langle u, \partial_x^k v\right\rangle_s$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle -A_\mu \vec{u}, \vec{u}\rangle_{\mathbb{H}^s} &= \mu \left\langle \partial_x^2 u, u\right\rangle_s + \mu \left\langle \partial_x^2 v, v\right\rangle_s \\
&= -\mu \left\langle \partial_x u, \partial_x u\right\rangle_s - \mu \left\langle \partial_x v, \partial_x v\right\rangle_s \\
&\leq -\mu \left[\|\partial_x u\|_s^2 + \|\partial_x v\|_s^2\right] \\
&= -\mu \|\partial_x \vec{u}\|_s^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Luego, por la proposición 1.25, $-A_\mu$ es disipativo en $\mathbb{H}^s$. ❑

Proposición 2.2 *El operador $-A_\mu$ es disipativo maximal en $\mathbb{H}^s$, $s \geq 0$.*

Demostración: De la proposición 2.1 se tiene que $-A_\mu$ es disipativo, resta probar que el operador $I + A_\mu : \mathbb{H}^{s+3} \subset \mathbb{H}^s \to \mathbb{H}^s$ es sobreyectivo; es decir, para cada $\vec{v} \in \mathbb{H}^s$ mostraremos que existe $\vec{u} \in \mathbb{H}^{s+3}$ tal que $(I + A_\mu)\,\vec{u} = \vec{v}$.

En efecto, sea $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$ buscamos $\vec{u} = (u_1, u_2)$ que verifique

$$(I + A_\mu)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

o lo que es equivalente

$$\begin{cases} u_1 + \partial_x^3 u_1 - \mu \partial_x^2 u_1 = v_1 \\ u_2 - \partial_x^3 u_2 - \mu \partial_x^2 u_2 = v_2 \end{cases}.$$

Tomando transformada de Fourier respecto de la variable espacial se obtiene

$$\begin{cases} \widehat{u_1}(\xi) - i\xi^3 \widehat{u_1}(\xi) + \mu\xi^2 \widehat{u_1}(\xi) = \widehat{v_1}(\xi) \\ \widehat{u_2}(\xi) + i\xi^3 \widehat{u_2}(\xi) + \mu\xi^2 \widehat{u_2}(\xi) = \widehat{v_2}(\xi) \end{cases},$$

de donde $\vec{u}$ resulta definido por las igualdades

$$\widehat{u_1}(\xi) = \frac{\widehat{v_1}(\xi)}{1 + \mu\xi^2 - i\xi^3}$$

y

$$\widehat{u_2}(\xi) = \frac{\widehat{v_2}(\xi)}{1 + \mu\xi^2 + i\xi^3}.$$

La demostración queda concluida si verificamos que $\vec{u} \in \mathbb{H}^{s+3}$. De hecho, por definición se tiene que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^{s+3}}^2 &= \|u_1\|_{s+3}^2 + \|u_2\|_{s+3}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} |\widehat{u_1}(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} |\widehat{u_2}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{|\widehat{v_1}(\xi)|^2}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2 + \xi^6} d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{|\widehat{v_2}(\xi)|^2}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2 + \xi^6} d\xi; \end{aligned}$$

luego, usando las desigualdades $\left(1+\mu\xi^2\right)^2 + \xi^6 \geq 1 + \xi^6 \geq C\left(1+\xi^2\right)^3$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^{s+3}}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{|\widehat{v_1}(\xi)|^2 \, d\xi}{\left(1+\xi^2\right)^3} + C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{|\widehat{v_2}(\xi)|^2 \, d\xi}{\left(1+\xi^2\right)^3} \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} |\widehat{v_1}(\xi)|^2 \, d\xi + C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} |\widehat{v_2}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= C\left(\|v_1\|_s^2 + \|v_2\|_s^2\right) = C \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^s}^2 < +\infty \end{aligned}$$

lo que prueba $\vec{u} \in \mathbb{H}^{s+3}$. ❑

Lema 2.3 *Para todo $\mu > 0$, $t \geq 0$ y $r \geq 0$, se cumple*

$$\xi^{2r} e^{-2\xi^2 \mu t} \leq 2^{-r} r^r e^{-r} (\mu t)^{-r}. \tag{2.5}$$

Demostración: Véase [31]. ❏

El siguiente resultado nos hace concluir satisfactoriamente esta sección, pues no solamente establece la existencia y unicidad de solución de 2.3, sino que además revela que dicha solución es más regular que el dato inicial.

Teorema 2.4 *Si $\mu > 0$, el operador $-A_\mu$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ en $\mathbb{H}^s$, $s \geq 0$, tal que*

$$W_\mu(t)\,\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} E_\mu^+(t)\, u_0 \\ E_\mu^-(t)\, v_0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

donde $E_\mu^\pm(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{E_\mu^\pm(t)\,\vec{u}_0}(\xi) = e^{\lambda_\mu^\pm(\xi)t}\widehat{\vec{u}_0}(\xi) \quad \text{con } \lambda_\mu^\pm(\xi) = -\mu\xi^2 \pm i\xi^3, \tag{2.7}$$

y para cada $t \geq 0$ se tiene que $W_\mu(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^s, \mathbb{H}^{s+r})$ con

$$\|W_\mu(t)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \leq K_r \sqrt{1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}}\, \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \tag{2.8}$$

para todo $r \geq 0$ y $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$. Además, cualquiera sea $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ la función

$$W_\mu(\cdot)\,\vec{u}_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (2.4) en

$$C([0,+\infty[\,, \mathbb{H}^s) \cap C^1\left([0,+\infty[\,, \mathbb{H}^{s-3}\right).$$

Demostración: La primera afirmación es consecuencia de las proposiciones 1.14, 1.27 (de Lumer-Phillips) y 2.2. Para obtener (2.6) y (2.7) es suficiente tomar la transformada de Fourier en la variable espacial y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante. La última afirmación está amparada por la proposición 1.24.

A continuación será probada la desigualdad (2.8). En efecto,

$$\|W_\mu(t)\,\vec{u}_0\|^2_{\mathbb{H}^{s+r}} = \left\|\left(E_\mu^+(t)\,u_0, E_\mu^-(t)\,v_0\right)\right\|^2_{\mathbb{H}^{s+r}} = \left\|E_\mu^+(t)\,u_0\right\|^2_{s+r} + \left\|E_\mu^-(t)\,v_0\right\|^2_{s+r}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+r} \left| e^{\lambda_\mu^+(\xi)t} \widehat{u_0}(\xi) \right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+r} \left| e^{\lambda_\mu^+(\xi)t} \widehat{v_0}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left(\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left(1+\xi^{2r}\right) e^{-2\mu\xi^2 t} \left(\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&= c \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} e^{-2\mu\xi^2 t} \left(\left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&\quad + c \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left(\left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&= c\left(I_1 + I_2\right). \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

De la primera integral del segundo miembro de (2.9) resulta

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} e^{-2\mu\xi^2 t} \left(\left|\widehat{v_0}(\xi)\right| + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right| \right)^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t} \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left(\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t} \left\|\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^s},
\end{aligned}
$$

y de la segunda integral, usando la desigualdad (2.5), se tiene

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left(\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&\leq 2^{-r} r^r e^{-r} (\mu t)^{-r} \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left(\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&= 2^{-r} r^r e^{-r} (\mu t)^{-r} \left(\left\|u_0\right\|_s^2 + \left\|v_0\right\|_s^2 \right) \\
&= 2^{-r} r^r e^{-r} (\mu t)^{-r} \left\|\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}
$$

Así, en (2.9) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|W_\mu(t)\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^{s+r}} &\leq C \sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t} \left\|\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^s} + C r^r e^{-r} (2\mu t)^{-r} \left\|\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq K_r^2 \left[1 + (2\mu t)^{-r}\right] \left\|\vec{u}_0\right\|^2_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}
$$

donde

$$
K_r^2 = \max\left\{ C \sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t}, C r^r e^{-r} \right\}.
$$

por lo tanto,

$$
\left\|W_\mu(t)\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \leq K_r \sqrt{1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}} \left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}
$$

como se quería demostrar. ❏

2.2 Ecuación integral asociada

En la sección anterior, el teorema 2.4 resolvió con éxito el problema lineal asociado con (4). A partir de aquí quedaremos de cara al problema no lineal y empezaremos estableciendo su ecuación integral asociada. Para esto, asumamos que $\vec{u} = (u, v)$ es solución de (4) y definamos

$$\Upsilon(\tau) = W_\mu(t - \tau)\,\vec{u}(\tau),$$

donde $\{W_\mu(t)\}_{t \geq 0}$ es el semigrupo generado por $-A_\mu$ del teorema 2.4.

Derivando el segundo miembro respecto de τ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Upsilon(\tau) &= W_\mu(t-\tau)\,A_\mu\vec{u}(\tau) + W_\mu(t-\tau)\,\partial_\tau\vec{u}(\tau) \\ &= W_\mu(t-\tau)\,A_\mu\vec{u}(\tau) - W_\mu(t-\tau)\left[A_\mu\vec{u}(\tau) + \vec{G}(\vec{u}(\tau))\right] \\ &= -W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)), \end{aligned} \tag{2.10}$$

luego, integrando desde 0 hasta t, se tenemos

$$\Upsilon(t) - \Upsilon(0) = -\int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau))\,d\tau,$$

asimismo, como $\Upsilon(0) = W_\mu(t)\,\vec{u}_0$ y $\Upsilon(t) = \vec{u}(t)$, entonces queda claro que $\vec{u}$ es solución de la ecuación integral

$$\vec{u}(t) = W_\mu(t)\,\vec{u}_0 - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau))\,d\tau. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, toda solución de (4) es solución de (2.11).

En este punto, la pregunta natural que surge es si recíprocamente, toda solución de (2.11) es solución de (4). Antes de aventurarnos a resolver esta interrogante, primero nos aseguraremos que la solución de (2.11) exista y sea única; de ese modo, si la respuesta fuese afirmativa, estaríamos frente a la solución de (4). Para tal fin, prepararemos un verdadero andamiaje que en complicidad del teorema del punto fijo de Banach nos conducirá al resultado esperado.

Partimos definiendo, para $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ con $s > \dfrac{3}{2}$, $\vec{u}_0 \neq 0$ y $T \geq 0$, el conjunto

$$\mathcal{E}_s(T) = \left\{\vec{u} \in C([0,T], \mathbb{H}^s) : \|\vec{u}(t) - W_\mu(t)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s},\ 0 < t \leq T\right\}$$

y lo dotamos de la métrica

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \sup_{0\le t\le T} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{\mathbb{H}^s}, \quad \text{para } \vec{u},\vec{v}\in \mathcal{E}_s(T).$$

con lo que $(\mathcal{E}_s(T), d)$ resulta siendo un espacio métrico completo.

Ahora, para $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ fijo y $\mu > 0$, definamos la aplicación

$$\Theta : \mathcal{E}_s(T) \to \mathcal{E}_s(T) \tag{2.12}$$

por

$$\Theta\vec{u}(t) = W_\mu(t)\vec{u}_0 - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau, \quad t\in[0,T],$$

cualquiera sea $\vec{u}\in\mathcal{E}_s(T)$. Para ver que la aplicación Θ está bien definida, notemos que

i. Si $\vec{u}_0\in\mathbb{H}^s$, entonces $W_\mu(t)\vec{u}_0\in\mathbb{H}^s$, a consecuencia del teorema 2.4.

ii. Si $\vec{u} = (u,v)\in\mathbb{H}^s$, resulta que $\vec{G}(\vec{u}(\tau))\in\mathbb{H}^{s-1}$; pues $G(u,v)$ y $G(v,u)$ habitan en $H^s(\mathbb{R})$ en razón de que $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach para $s>1/2$. Además, sustituyendo s por $s-1$ y haciendo $r=1$ en el teorema 2.4, conducen a mostrar que $W_\mu(t)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{s-1},\mathbb{H}^s\right)$; así $W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\in\mathbb{H}^s$ y de ahí que

$$\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau\in\mathbb{H}^s.$$

Por lo tanto, $\Theta\vec{u}(t)\in\mathbb{H}^s$ cualquiera sea $t\in[0,T]$.

Proposición 2.5 *Sea $\mu>0$ y $\vec{u}_0\in\mathbb{H}^s$, $s>\frac{3}{2}$. Para cualquier $T>0$, si $\vec{u}\in\mathcal{E}_s(T)$ se cumple que $\Theta\vec{u}\in C([0,T],\mathbb{H}^s)$.*

Demostración: Elijamos $t_0\in\,]0,T]$ tal que $t<t_0$, luego

$$\begin{aligned}
I &= \|\Theta\vec{u}(t) - \Theta\vec{u}(t_0)\|_{\mathbb{H}^s}\\
&\le \|W_\mu(t)\vec{u}_0 - W_\mu(t_0)\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\\
&\quad + \left\|\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau - \int_0^{t_0} W_\mu(t_0-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau\right\|_{\mathbb{H}^s}\\
&\le \|W_\mu(t)\vec{u}_0 - W_\mu(t_0)\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} + \left\|\int_0^t [W_\mu(t-\tau) - W_\mu(t_0-\tau)]\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau\right\|_{\mathbb{H}^s}\\
&\quad + \left\|\int_t^{t_0} W_\mu(t_0-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\, d\tau\right\|_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \|W_\mu(t)\,\vec{u}_0 - W_\mu(t_0)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t \left\| [W_\mu(t-\tau) - W_\mu(t_0-\tau)]\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\quad + \int_t^{t_0} \left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&= \quad \|W_\mu(t)\,\vec{u}_0 - W_\mu(t_0)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t \left\| W_\mu(t-\tau)\,[I - W_\mu(t_0-t)]\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\quad + \int_t^{t_0} \left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau
\end{aligned}
$$

Por la continuidad fuerte del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ se tiene

$$
\left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} \leq \sup_{\tau\in[0,t_0]} \left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s},
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
I &= \|\Theta\vec{u}(t) - \Theta\vec{u}(t_0)\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \|W_\mu(t)\,\vec{u}_0 - W_\mu(t_0)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t \left\| [W_\mu(t-\tau) - W_\mu(t_0-\tau)]\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau \\
&\quad + |t-t_0| \sup_{\tau\in[0,t_0]} \left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

El primer sumando del segundo miembro de (2.13) converge a cero cuando $t \to t_0^-$ por la continuidad de la aplicación $W_\mu(\cdot)\,\vec{u}_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^s$ demostrada en el teorema 2.4. Por la misma razón y por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, igual suerte corre el segundo sumando. El último sumando, con mejor fortuna, converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Queda así demostrada la continuidad por la izquierda de t_0. La continuidad a la derecha de t_0 se sigue de manera análoga, de ahí la continuidad en t_0. ❏

Proposición 2.6 *Si $\mu > 0$ y $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$, $s > \dfrac{3}{2}$, existe $T_\mu = T_\mu(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu) \in [0,T]$ tal que la aplicación $\Theta : \mathcal{E}_s(T_\mu) \to \mathcal{E}_s(T_\mu)$ es una contracción.*

Demostración: Primero veamos que existe $T_1 = T_1(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu) \in [0,T]$ tal que Θ definida sobre $\mathcal{E}_s(T_1)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Theta)$ contenido en $\mathcal{E}_s(T_1)$.

Sean $T > 0$ y $\vec{u} \in \mathcal{E}_s(T)$, entonces para $0 \leq t \leq T$ y sustituyendo s por $s-1$ y haciendo $r = 1$ en el teorema 2.4 tenemos

$$
\begin{aligned}
\|\Theta\vec{u}(t) - W_\mu(t)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} &= \left\| \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau))\,d\tau \right\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \int_0^t \left\| W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad K_1 \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{2\mu\,(t-\tau)}}\left\|\vec{G}\,(\vec{u}\,(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} d\tau. \qquad (2.14)$$

La bondad de que $H^s\,(\mathbb{R})$ sea un álgebra de Banach para $s > 1/2$ es que $\|uv\|_s \leq C_s\,\|u\|_s\,\|v\|_s$. Así, usando este recurso se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{G}\,(\vec{u}\,(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &\leq \left\|\partial_x\left(\frac{3}{2}u^2+uv-\frac{v^2}{2},\frac{3}{2}v^2+uv-\frac{u^2}{2}\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&\leq \left(\left\|\frac{3}{2}u^2+uv-\frac{v^2}{2}\right\|_s+\left\|\frac{3}{2}v^2+uv-\frac{u^2}{2}\right\|_s\right) \\
&\leq \frac{3}{2}\left\|u^2\right\|_s+\|uv\|_s+\frac{1}{2}\left\|v^2\right\|_s+\frac{3}{2}\left\|v^2\right\|_s+\|uv\|_s+\frac{1}{2}\left\|u^2\right\|_s \\
&= 4\left\|u^2\right\|_s+2\,\|uv\|_s+4\left\|v^2\right\|_s \\
&\leq 4C_s\left(\|u\|_s^2+2\,\|u\|_s\,\|v\|_s+\|v\|_s^2\right) \\
&\leq 4C_s\left(\|\vec{u}\|_s^2+2\,\|\vec{u}\|_s\,\|\vec{u}\|_s+\|\vec{u}\|_s^2\right) \\
&= 16C_s\,\|\vec{u}\|_s^2\,.
\end{aligned}$$

luego

$$\left\|\vec{G}\,(\vec{u}\,(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C_s\,\|\vec{u}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}^2\,; \qquad (2.15)$$

pero, como $\{W_\mu\,(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones (teorema 2.4) y $\vec{u} \in \mathcal{E}_s\,(T)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq \|\vec{u}\,(\tau)-W_\mu\,(t)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}+\|W_\mu\,(\tau)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}+\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}=2\,\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\,. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

así, de (2.16) y (2.15) se deduce que

$$\left\|\vec{G}\,(\vec{u}\,(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C_s\,\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}^2\,. \qquad (2.17)$$

Usando la desigualdad (2.17) en (2.14) y haciendo el cambio de variable $r = 2\mu\,(t-\mu)$ conseguimos

$$\begin{aligned}
\|\Theta\vec{u}\,(t)-W_\mu\,(t)\,\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} &\leq C_s\,\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}^2\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu\,(t-\tau)}}d\tau \\
&\leq \frac{C_s}{2\mu}\,\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}^2\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{r}}dr. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

y puesto que

$$\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau \leq \int_0^{2\mu t}\left(1+\sqrt{\frac{1}{\tau}}\right)d\tau = \left(\tau+2\sqrt{\tau}\right)\Big|_0^{2\mu t} = 2\left[\mu t+\sqrt{2\mu t}\right],$$

entonces

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{C_s}{2\mu}\left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau = 0,$$

lo que implica que existe $T_1 = T_1\left(\left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu\right) \in \left]0, T\right]$ tal que

$$\frac{C_s}{2\mu}\left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}\int_0^{2\mu T_1}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau \leq 1 \text{ siempre que } 0<t<T_1$$

Así en la desigualdad (2.18), para $0<t<T_1$ tenemos

$$\left\|\Theta\vec{u}(t) - W_\mu(t)\,\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s} \leq \left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}.$$

es decir, $\Theta\vec{u}(t) \in \mathcal{E}_s(T_1)$. Por tanto, existe $T_1 = T_1\left(\left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu\right) \in [0, T]$ tal que $\mathcal{R}(\Theta)$ está contenido en $\mathcal{E}_s(T_1)$.

Nuestro responsabilidad es ahora demostrar que existe $T_\mu = T_\mu\left(\left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu\right) \in [0, T_1]$ tal que $\Theta : \mathcal{E}_s(T_\mu) \to \mathcal{E}_s(T_\mu)$ es una contracción. En efecto, si $\vec{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), v_1(\cdot)), \vec{v} = (u_2(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{E}_s(T_1)$, entonces

$$\left\|\Theta\vec{u}(t) - \Theta\vec{v}(t)\right\|_{\mathbb{H}^s} \leq \int_0^t \left\|W_\mu(t-\tau)\left[\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right]\right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau.$$

Reemplazando s por $s-1$ y haciendo $r=1$ en el teorema 2.4 se tiene

$$\left\|\Theta\vec{u}(t) - \Theta\vec{v}(t)\right\|_{\mathbb{H}^s} \leq \int_0^t K_1\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} d\tau.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E &= \left\|\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&= \left\|(\partial_x G(u_1,v_1), \partial_x G(v_1,u_1)) - (\partial_x G(u_2,v_2), \partial_x G(v_2,u_2))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&= \left\|(\partial_x G(u_1,v_1) - \partial_x G(u_2,v_2), \partial_x G(v_1,u_1) - \partial_x G(v_2,u_2))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&= \left\|(\partial_x\left[G(u_1,v_1) - G(u_2,v_2)\right], \partial_x\left[G(v_1,u_1) - G(v_2,u_2)\right])\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&\leq C\left\|(\partial_x\left[G(u_1,v_1) - G(u_2,v_2)\right])\right\|_{s-1} + C\left\|\partial_x\left[G(v_1,u_1) - G(v_2,u_2)\right]\right\|_{s-1} \\
&\leq C_s\left\|G(u_1,v_1) - G(u_2,v_2)\right\|_s + C_s\left\|G(v_1,u_1) - G(v_2,u_2)\right\|_s\ , \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} E_1 &= G(u_1, v_1) - G(u_2, v_2) \\ &= \frac{1}{2}\left[(3u_1 + 3u_2 - v_1 - v_2)(u_1 - u_2) - (u_1 + u_2 + v_1 + v_2)(v_1 - v_2)\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E_2 &= G(v_1, u_1) - G(v_2, u_2) \\ &= \frac{1}{2}\left[(3v_1 + 3v_2 - u_1 - u_2)(v_1 - v_2) - (u_1 + u_2 + v_1 + v_2)(u_1 - u_2)\right] \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|E_1\|_s &= \|G(u_1, v_1) - G(u_2, v_2)\|_s \\ &= \frac{1}{2}\left\|\left[(3u_1 + 3u_2 - v_1 - v_2)(u_1 - u_2) - (u_1 + u_2 + v_1 + v_2)(v_1 - v_2)\right]\right\|_s \\ &\leq \frac{1}{2}C_s\left(3\|u_1\|_s + 3\|u_2\|_s + \|v_1\|_s + \|v_2\|_s\right)\|u_1 - u_2\|_s + \\ &\quad \frac{1}{2}C_s\left(\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|v_1\|_s + \|v_2\|_s\right)\|v_1 - v_2\|_s \\ &\leq C_s\left(3\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathbb{H}^s} + C_s\left(\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathbb{H}^s} \\ &= 4C_s\left(\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathbb{H}^s} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Análogamente

$$\|E_2\|_s = \|G(v_1, u_1) - G(v_2, u_2)\|_s \leq 4C_s\left(\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathbb{H}^s} \tag{2.21}$$

luego, dado que $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathcal{E}_s(T_1)$, por la desigualdad (2.16) se tiene en (2.19)

$$\begin{aligned} \left\|\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &\leq 8C_s\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \\ &\leq 8C_s\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \\ &= 8C_s\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\, d(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

así

$$\begin{aligned} \|\Theta\vec{u}(t) - \Theta\vec{v}(t)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq 8K_1C_s\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\, d(\vec{u}, \vec{v})\int_0^t\sqrt{1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\, d\tau \\ &\leq \frac{C_s}{\mu}\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}\, d(\vec{u}, \vec{v})\int_0^{2\mu t}\sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau \end{aligned}$$

Tomando el supremo en $[0, T_1]$ obtenemos

$$d(\Theta\vec{u}, \Theta\vec{v}) = \sup_{0\leq t\leq T_1} \|(\Theta\vec{u})(t) - (\Theta\vec{v})(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{C_s}{\mu} \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} d(\vec{u}, \vec{v}) \int_0^{2\mu T_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau\,.$$

y como

$$\frac{C_s}{\mu} \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \int_0^{2\mu T_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau \to 0 \text{ cuando } T_1 \to 0^+,$$

se sigue la existencia de $T_\mu = T_\mu(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu) \in]0, T_1]$ tal que

$$0 < \lambda = \frac{C_s}{\mu} \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \int_0^{2\mu T_\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau < 1$$

Así, se concluye que

$$d(\Theta\vec{u}, \Theta\vec{v}) \leq \lambda d(\vec{u}, \vec{v}) \text{ con } 0 < \lambda < 1,$$

es decir, Θ es una contracción. ❏

Teorema 2.7 *Si $\mu > 0$ y $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$, $s > \frac{3}{2}$, entonces existen $T_\mu = T_\mu(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, \mu) > 0$ y una única función*

$$\vec{u}_\mu \in C([0, T_\mu], \mathbb{H}^s)$$

que es solución de la ecuación integral (2.11).

Demostración: Las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach se cumplen gracias a la proposición 2.6, por lo tanto, existe una única $\vec{u}_\mu \in \mathcal{E}_s(T_\mu) \subset C([0, T_\mu], \mathbb{H}^s)$ tal que $\Theta\vec{u}_\mu = \vec{u}_\mu$, es decir

$$\Theta\vec{u}_\mu(t) = W_\mu(t)\vec{u}_0 - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau = \vec{u}_\mu(t)$$

para todo $t \in [0, T_\mu]$.

El teorema queda probado si demostramos que $\vec{u}_\mu$ es única en $C([0, T_\mu], \mathbb{H}^s)$, para lo cual usaremos un argumento clásico debido a T. Kato y H. Fujita [25]. En efecto, sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos soluciones en $C([0, T_\mu], \mathbb{H}^s)$ de la ecuación integral (2.11), para $t \in [0, T_\mu]$ se tiene

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \int_0^t \left\| W_\mu(t-\tau)\left[\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right]\right\|_{\mathbb{H}^s} d\tau$$

Sustituyendo s por $s-1$ y haciendo $r = 1$ en el teorema 2.4, además teniendo en cuenta (2.19), (2.20), (2.21) tenemos

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq K_1 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}} \left\|\vec{G}(\vec{u}(\tau)) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad C_s \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{2\mu\,(t-\tau)}}\,\left(\|\vec{u}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}+\|\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\;d\tau \\
&\leq \quad \frac{C_sM}{\mu}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\cdot \sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \quad \kappa\,(t)\sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\,,
\end{aligned}
$$

donde $M=\max\left\{\sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{u}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\,,\ \sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\right\}$ y $\kappa\,(t)=\dfrac{C_sM}{\mu}\left(\mu t+\sqrt{2\mu t}\right)$.

Como κ es continua y creciente en $[0,+\infty[$, $\kappa\,(0)=0$ y $\lim_{t\to+\infty}\kappa\,(t)=+\infty$, por el teorema del valor intermedio, existe $T^*>0$ tal que $\kappa\,(T^*)=\dfrac{1}{2}$. Sea $T_1=\min\{T_\mu,T^*\}$, entonces $\kappa\,(t)\leq\kappa\,(T_1)\leq k\,(T^*)$ y para $t\in[0,T_1]$ tenemos

$$
\|\vec{u}\,(t)-\vec{v}\,(t)\|_{\mathbb{H}^s}\leq\frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,t]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\leq\frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,T_1]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\,,
$$

y tomando el supremo sobre $[0,T_1]$, obtenemos

$$
\sup_{t\in[0,T_1]}\|\vec{u}\,(t)-\vec{v}\,(t)\|_{\mathbb{H}^s}\leq\frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,T_1]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\,,
$$

por tanto, $\sup_{t\in[0,T_1]}\|\vec{u}\,(t)-\vec{v}\,(t)\|_{\mathbb{H}^s}\leq 0$ y así $\vec{u}=\vec{v}$ en $[0,T_1]$.

Si $T_1=T_\mu$ obtenemos la unicidad, pero si $T_1=T^*$ definiendo $T_2=\min\{T_\mu,2T^*\}$ se sigue que $T_1<T_2$ y para $t\in[0,T_2]$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\,(t)-\vec{v}\,(t)\|_{\mathbb{H}^s} &\leq C_sM\int_{T_1}^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu\,(t-\tau)}}\,\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\;d\tau \\
&\leq \frac{C_sM}{\mu}\int_0^{2\mu(t-T_1)}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau\cdot\sup_{\tau\in[0,T_2]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\leq \frac{C_sM}{\mu}\left[\mu\,(T_2-T_1)+\sqrt{2\mu\,(T_2-T_1)}\right]\sup_{\tau\in[0,T_2]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Como $T_2\leq 2T^*$ y $\mu>0$, tenemos que

$$
\mu\,(T_2-T_1)\leq\mu\,(2T^*-T_1)=\mu T^*,
$$

así de (2.23) resulta que

$$
\|\vec{u}\,(t)-\vec{v}\,(t)\| \quad\leq\quad \frac{C_sM}{\mu}\left[\mu T^*+\sqrt{2\mu T^*}\right]\cdot\sup_{\tau\in[0,T_2]}\|\vec{u}\,(\tau)-\vec{v}\,(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \kappa\left(T^{*}\right) \sup_{\tau\in[0,T_2]} \|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\|_{\mathbb{H}^s} \\
&= \frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,T_2]} \|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\|_{\mathbb{H}^s}
\end{aligned}
$$

Tomando el supremo en $[0,T_2]$ se obtiene

$$\sup_{\tau\in[0,T_2]} \|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,T_2]} \|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\|_{\mathbb{H}^s}$$

de donde obtenemos que $\vec{u}=\vec{v}$ en $[0,T_2]$. Si $T_2=T_\mu$ obtenemos la unicidad, en caso contrario repetimos el proceso para $T_3=\min\{T_\mu,3T^*\}$. Finalmente como el intervalo $[0,T_\mu]$ es acotado, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $T_\mu\leq nT^*$, de ahí que $\vec{u}=\vec{v}$ en $[0,T_\mu]$. ❏

Como consecuencia de la propiedad regularizante del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ mostrada en el teorema 2.4, demostraremos ahora que la solución de la ecuación integral (2.11), obtenida en el teorema 2.7, es más regular que el dato inicial; es decir, si $\vec{u}_0\in\mathbb{H}^s$ con $s>\frac{3}{2}$, entonces $\vec{u}_\mu :]0,T_\mu]\to\mathbb{H}^{s+r}$ es continua para todo $r\geq 0$.

Proposición 2.8 *Sean $\mu>0$ y $\vec{u}_0\in\mathbb{H}^s$, $s>\frac{3}{2}$. La función $\vec{u}_\mu$ obtenida en el teorema 2.7 satisface*

$$\vec{u}_\mu\in C\left(]0,T_\mu],\mathbb{H}^{s+r}\right)$$

para todo $r\geq 0$.

Demostración:. Sea $t\in\,]0,T_\mu]$ y consideremos la ecuación integral

$$\vec{u}_\mu\left(t\right)=W_\mu\left(t\right)\vec{u}_0-\int_0^t W_\mu\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_\mu\left(\tau\right)\right)\,d\tau\equiv W_\mu\left(t\right)\vec{u}_0+\vec{M}\left(t\right). \tag{2.24}$$

Del teorema 2.4 se deduce la continuidad de la aplicación $t\in[0,+\infty[\;\mapsto W_\mu\left(t\right)\vec{u}_0\in\mathbb{H}^{\,s+r}$ para todo $r\geq 0$, es decir, $W_\mu\left(\cdot\right)\vec{u}_0\in C\left(]0,T_\mu],\mathbb{H}^{s+r}\right)$.

Supongamos que $0\leq r<1$. Entonces,

$$\left\|\vec{M}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}}\leq\int_0^t\left\|W_\mu\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_\mu\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}}\,d\tau. \tag{2.25}$$

Sustituyendo en (2.8) s por $s-1$ y r por $r+1$ tenemos,

$$\left\|W_\mu\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_\mu\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} = \left\|W_\mu\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_\mu\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{(s-1)+(r+1)}}$$

$$\leq \quad K_{r+1}\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\mu\left(t-\tau\right)}\right]^{r+1}}\left\|\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}},$$

y de (2.15) se tiene que

$$\left\|\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C_s \left\|\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2, \tag{2.26}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left\|W_{\mu}\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} &\leq C_s\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\mu\left(t-\tau\right)}\right]^{r+1}}\left\|\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \\ &\leq C_s\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\mu\left(t-\tau\right)}\right]^{r+1}}\sup_{0\leq\tau\leq T_{\mu}}\left\|\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2\end{aligned}$$

Así tenemos en (2.25),

$$\begin{aligned}\left\|\vec{M}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} &\leq C_s\sup_{0\leq\tau\leq T_{\mu}}\left\|\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2\int_0^t\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\mu\left(t-\tau\right)}\right)^{r+1}}d\tau \\ &= \frac{C_s}{\mu}\sup_{0\leq\tau\leq T_{\mu}}\left\|\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}}d\tau.\end{aligned}$$

Entonces, puesto que $\frac{r+1}{2}\in[0,1[$, la integral $\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}}d\tau$ es convergente, en consecuencia $\vec{M}\left(t\right)\in\mathbb{H}^{s+r}$ para cualquier $r\in[0,1[$.

Ahora mostremos que $G\in C\left(]0,T_{\mu}],\mathbb{H}^{s+r}\right)$ siempre que $r\in[0,1[$. En efecto, consideremos $t\in]0,T_{\mu}]$ y $h>0$ tal que $t+h$ pertenece al intervalo $]0,T_{\mu}]$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|\vec{M}\left(t+h\right)-\vec{M}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} &= \left\|\int_0^{t+h}W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\,d\tau\right. \\ &\quad \left.-\int_0^t W_{\mu}\left(t-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\,d\tau\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \\ &\leq \left\|\int_t^{t+h}W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\,d\tau\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \\ &\quad +\left\|\int_0^t\left[W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)-W_{\mu}\left(t-\tau\right)\right]\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\,d\tau\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \\ &\leq \int_t^{t+h}\left\|W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}}d\tau \\ &\quad +\int_0^t\left\|\left[W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)-W_{\mu}\left(t-\tau\right)\right]\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}}d\tau.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Sustituyendo $s-1$ por s y $r+1$ por r en (2.8) y usando (2.26) tenemos,

$$\int_t^{t+h}\left\|W_{\mu}\left(t+h-\tau\right)\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s+r}}d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^{t+h} \left\| W_\mu (t+h-\tau) \vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{(s-1)+(r+1)}} d\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} C \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\mu(t+h-\tau)}\right)^{r+1}} \left\| \vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} d\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} C_s \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\mu(t+h-\tau)}\right)^{r+1}} \left\| \vec{u}_\mu(\tau) \right\|^2_{\mathbb{H}^{s}} d\tau \\
&\leq C_s \sup_{\tau\in]0,T_\mu]} \left\| \vec{u}_\mu(\tau) \right\|^2_{\mathbb{H}^{s}} \int_t^{t+h} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\mu(t+h-\tau)}\right)^{r+1}} d\tau.
\end{aligned}
$$

Entonces, cambiando la variable, resulta

$$
\int_t^{t+h} \left\| W_\mu (t+h-\tau) \vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} d\tau \leq \frac{C}{\mu} \sup_{\tau\in]0,T_\mu]} \left\| \vec{u}_\mu(\tau) \right\|^2_{\mathbb{H}^{s}} \int_0^{2\mu h} \sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}} d\tau.
$$

Como

$$
\int_0^{2\mu h} \sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}} d\tau \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+
$$

porque $\frac{r+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, obtenemos

$$
\int_t^{t+h} \left\| W_\mu (t+h-\tau) \vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} d\tau \longrightarrow 0 \text{ cuando } h \to 0^+.
$$

Por otro lado, la continuidad de la aplicación $t \in [0, +\infty[\mapsto W_\mu(t)\Phi \in \mathbb{H}^{\,s+r}$ para todo $r \geq 0$, la desigualdad (2.8) y $\sqrt{1+\frac{1}{(\cdot)^{r+1}}} \in L^1(]0, 2\mu t], \mathbb{R})$ implican, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue que

$$
\int_0^t \left\| [W_\mu (t+h-\tau) - W_\mu(t-\tau)] \vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} d\tau \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+.
$$

Así en (2.27) se tiene que

$$
\left\| \vec{M}(t+h) - \vec{M}(t) \right\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+,
$$

con lo que demostramos que $\vec{M}$ es continua por la derecha de t. De la misma forma se demuestra la continuidad por la izquierda de t.

Así, de (2.24), probamos que $\vec{u}_\mu \in C(]0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+r})$ si $0 \leq r < 1$.

De igual modo se puede probar que $\vec{M} \in C\left(]0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+2r}\right)$ y con esto $\vec{u}_\mu \in C\left(]0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+2r}\right)$.

Por inducción matemática, si $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\vec{M} \in C(]0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+nr})$ ❑

2.3 Buena formulación local en $\mathbb{H}^s$, $s > \frac{3}{2}$

Probar que el problema de valor inicial (4) está bien formulado locamente en $\mathbb{H}^s$ si $s > \frac{3}{2}$, teniendo como referente al teorema 2.7, pasa por responder la interrogante surgida en la sección precedente. Precisamente, demostraremos (teorema 2.9) que la solución $\vec{u}_\mu$ dada por el teorema 2.7 es la única solución de (4) en relación a la topología en $\mathbb{H}^{s-3}$. La prueba está basada en el trabajo de Iório [19] y el teorema 2.4. La sección se concluye con la prueba de la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial (teorema 2.13).

2.3.1 Existencia y unicidad

Teorema 2.9 *Sean $\mu > 0$ y $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$, $s > \frac{3}{2}$, entonces la función $\vec{u}_\mu$ del teorema 2.7 satisface*

$$\vec{u}_\mu \in C\left([0, T_\mu], \mathbb{H}^s\right) \cap C^1\left([0, T_\mu], \mathbb{H}^{s-3}\right)$$

y es la única solución de (2.1). Además, para todo $r \geq 0$

$$\vec{u}_\mu \in C\left(]0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+r}\right) \cap C^1\left([0, T_\mu], \mathbb{H}^{s+r-3}\right)$$

Demostración: Veamos la existencia de la solución. Del teorema 2.4 y la teoría de semigrupos se tiene,

$$\partial_t W_\mu(t)\,\vec{u}_0 = -A_\mu W_\mu(t)\,\vec{u}_0,$$

para $t > 0$ en $\mathbb{H}^{s-3}$. Para $\mu > 0$, consideramos

$$\vec{M}(t) = \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau \tag{2.28}$$

Para $0 \leq t < T_\mu$ y $h > 0$ tal que $t + h \in]0, T_\mu]$ se sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{M}(t+h) - \vec{M}(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^t \left[W_\mu(t+h-\tau) - W_\mu(t-\tau)\right]\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W_\mu(t+h-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t \left(W_\mu(h) - I\right) W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} W_\mu(t+h-\tau)\,\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{W_\mu(h)-I}{h}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau \\
&\quad + W_\mu(t+h-c_h)\vec{G}(\vec{u}_\mu(c_h)).
\end{aligned}
$$

Donde en la última igualdad se ha usado que $W_\mu(h)-I$ es un operador lineal y el teorema del valor medio para integrales de Bochner (ver [12]) en el intervalo $[t,t+h]$ con $c_h \in [t,t+h]$.

Como $-A_\mu$ es el generador del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$
\lim_{h\to 0^+}\frac{W_\mu(h)-I}{h}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau = -A_\mu\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau.
$$

Además, sigue de $c_h \in [t,t+h]$ que si $h\to 0^+$ entonces $c_h \to t$, por tanto

$$
\lim_{h\to 0^+} W_\mu(t+h-c_h)\vec{G}(\vec{u}_\mu(c_h)) = W_\mu(0)\vec{G}(\vec{u}_\mu(t)) = \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)).
$$

Así, obtenemos

$$
\partial_t^+\vec{M}(t) = -A_\mu\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau + \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)) = -A_\mu G(t)+\vec{G}(\vec{u}_\mu(t))
$$

Análogamente, para $h<0$ conseguimos

$$
\partial_t^-\vec{M}(t) = -A_\mu\int_0^t W_\mu(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau + \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)) = -A_\mu G(t)+\vec{G}(\vec{u}_\mu(t))
$$

Para ello es suficiente tomar $s=-h>0$ y considerar $\partial_t^-\vec{M}(t) = \lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{\vec{M}(t)-\vec{M}(t-s)}{s}$.

Así $\partial_t\vec{M}(t) = \partial_t^+\vec{M}(t) = \partial_t^-\vec{M}(t)$ y

$$
\begin{aligned}
\partial_t\vec{u}_\mu(t) &= \partial_t\left(W_\mu(t)\vec{u}_0 - \vec{M}(t)\right) \\
&= -A_\mu W_\mu(t)\vec{u}_0 + A_\mu\vec{M}(t) - \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)) \\
&= -A_\mu\left[W_\mu(t)\vec{u}_0 - \vec{M}(t)\right] - \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)) \\
&= -A_\mu\vec{u}_\mu(t) - \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)).
\end{aligned}
$$

Luego, como $\vec{u}_\mu \in C([0,T_\mu],\mathbb{H}^s)$ satisface (2.1) y dado que $-A_\mu \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{\,s},\mathbb{H}^{\,s-3}\right)$ y $-\vec{G}(\vec{u}_\mu) \in C\left([0,T_\mu],\mathbb{H}^{s-1}\right) \subseteq C\left([0,T_\mu],\mathbb{H}^{s-3}\right)$, sigue que $\partial_t\vec{u}_\mu \in C\left([0,T_\mu],\mathbb{H}^{s-3}\right)$.

Para la unicidad, sea

$$
\vec{v} \in C([0,T_\mu],\mathbb{H}^s) \cap C^1\left([0,T_\mu],\mathbb{H}^{s-3}\right)
$$

otra solución de (2.1), entonces la función $\vec{v}$ satisface

$$\partial_t \vec{v}(t) + A_\mu \vec{v}(t) + \vec{G}(\vec{v}(t)) = 0,\ 0 \leq t \leq T_\mu \tag{2.29}$$

en $\mathbb{H}^{s-3}$. Aplicando a continuación $W_\mu(t-\tau)$ a $\vec{v}(t)$ y usando (2.29) para $0 \leq t \leq T_\mu$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\tau W_\mu(t-\tau)\,\vec{v}(\tau) &= W_\mu(t-\tau)\,\partial_\tau \vec{v}(\tau) + W_\mu(t-\tau)\,A_\mu \vec{v}(\tau) \\
&= W_\mu(t-\tau)\left[-A_\mu \vec{v}(\tau) - \vec{G}(\vec{v}(\tau))\right] + W_\mu(t-\tau)\,A_\mu \vec{v}(\tau) \\
&= -W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{v}(\tau)).
\end{aligned}$$

Integrando desde 0 hasta t y teniendo en cuenta que $\vec{v}(0) = \vec{u}_0$, tenemos

$$\vec{v}(t) = W_\mu(t)\,\vec{u}_0 - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\vec{G}(\vec{v}(\tau))\,d\tau \tag{2.30}$$

en $\mathbb{H}^{s-3}$. Entonces del teorema 2.4 obtenemos, como en la demostración del teorema 2.8, que el segundo miembro de (2.30) está en $\mathbb{H}^s$. Por lo tanto,

$$\vec{v} \in C([0,T_\mu], \mathbb{H}^s) \cap C^1\left([0,T_\mu], \mathbb{H}^{s-3}\right)$$

es solución de la ecuación integral (2.11). Entonces la unicidad establecida en el teorema 2.7 implica que $\vec{v} = \vec{u}_\mu$ en $[0,T_\mu]$ completando la demostración de unicidad.

La última afirmación sigue inmediatamente del teorema 2.8. ❏

2.3.2 Dependencia continua de la solución

El paso que daremos ahora completa la tarea de alcanzar el primer objetivo del trabajo. Demostraremos que la solución $\vec{u}_\mu$ del problema asociado al sistema (2.7) depende continuamente del dato inicial $\vec{\phi} \in \mathbb{H}^s$; es decir, se mostrará que la aplicación $\vec{\phi} \in \mathbb{H}^s \longmapsto \vec{u}_\mu \in C([0,T] : \mathbb{H}^s)$ es continua.

Lema 2.10 *Sean M, $N > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha \in [0,2\rangle$. Entonces, para $\eta > 0$ existe $c(\eta) > 0$ tal que*

$$M^\alpha N^\beta \leq \eta M^2 + c(\eta)\,N^\gamma \tag{2.31}$$

donde $\gamma = \dfrac{2\beta}{2-\alpha}$ y $c(\eta) = \dfrac{2-\alpha}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\eta}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$.

Demostración: El resultado se sigue de la desigualdad de Young (ver [9])

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, con $p = 2/\alpha$, $q = 2/(2-\alpha)$ y $M^\alpha N^\beta = \left[(\eta p)^{1/p} M^\alpha\right]\left[(\eta p)^{-1/p} N^\beta\right]$. ❑

Lema 2.11 (Desigualdad de Gronwall) *Sean $k \in L^1([a,b])$, $k \geq 0$ y $f, g \in C([a,b])$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) f(\tau)\, d\tau,\quad a \leq t \leq b,$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) \exp\left[\int_\tau^t k(s)\, ds\right] g(\tau)\, d\tau\,,\quad a \leq t \leq b.$$

En particular, si $g(t) = C$ es constante se tiene que

$$f(t) \leq C \exp\left[\int_a^t k(\tau)\, d\tau\right],\quad a \leq t \leq b$$

Si adicionalmente $k(\tau) = K$ es constante se cumple

$$f(t) \leq C \exp\left[K(t-a)\right],\quad a \leq t \leq b$$

Demostración: Véase [29], [11]. ❑

Un inconveniente que debemos resolver primero es ocasionado por tiempo de vida de la solución dada en 2.9, debido a que su existencia está ligada a la viscosidad μ. El siguiente teorema resuelve este impase mostrando que es factible determinar la existencia de un intervalo $[0,T]$ donde la solución puede extenderse de ser necesario, con T independiente de μ. Cabe señalar que en el próximo capítulo este resultado será esencial para probar la buena formulación local de (3).

Teorema 2.12 *Sean $\mu > 0$, $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $\vec{u}_\mu$ la solución del problema de valor inicial (2.1) encontrada en el teorema 2.9. Entonces, existe $T = T(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s) > 0$ tal que $\vec{u}_\mu$ se puede extender al intervalo $[0,T]$. Además, existe $\rho \in C([0,T], \mathbb{R})$ tal que*

$$\begin{cases} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 \leq \rho(t)\,,\quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, T) \end{cases}, \qquad (2.32)$$

donde ρ *satisface*

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2C_s \rho^{\frac{3}{2}}(t), \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|\vec{u}_0\|^2_{\mathbb{H}^s}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Demostración: Consideremos $\vec{u}_\mu = (u,v)$ y $0 \le t \le T_\mu$ con T_μ dado por el teorema 2.7. Teniendo en cuenta que $\vec{u}_\mu \in C([0,T_\mu], \mathbb{H}^s) \cap C^1([0,T_\mu], \mathbb{H}^{s-3})$ la solución de (2.1) dada por el teorema 2.9 se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} &= 2\langle \vec{u}_\mu, \partial_t \vec{u}_\mu \rangle_{\mathbb{H}^s} = 2\left\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu - \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} \\ &= 2\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu \rangle_{\mathbb{H}^s} + 2\left\langle \vec{u}_\mu, -\vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}. \end{aligned}$$

De la prueba de la proposición 2.1 se tiene que

$$\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu \rangle_{\mathbb{H}^s} \le 0,$$

por lo tanto

$$\partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \le 2\left\langle \vec{u}_\mu, -\vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} \le 2\left|\left\langle \vec{u}_\mu, \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\right|. \tag{2.34}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{G}(\vec{u}_\mu) = (\partial_x G(u,v), \partial_x G(v,u))$ con $G(u,v) = \frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{v^2}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \vec{u}_\mu, \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} = \langle u, \partial_x G(u,v)\rangle_s + \langle v, \partial_x G(v,u)\rangle_s \\ &= \left\langle u, \partial_x\left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{v^2}{2}\right)\right\rangle_s + \left\langle v, \partial_x\left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{u^2}{2}\right)\right\rangle_s \\ &= 3\langle u, u\partial_x u\rangle_s - \langle u, \partial_x(uv)\rangle_s - \langle u, v\partial_x v\rangle_s + \\ &\quad +3\langle v, v\partial_x v\rangle_s - \langle v, \partial_x(uv)\rangle_s - \langle v, u\partial_x u\rangle_s \end{aligned} \tag{2.35}$$

Usando el conmutador $[J^s, f]g = J^s(fg) - fJ^s g$, se tiene

$$\langle u, v\partial_x v\rangle_s = \langle J^s u, [J^s, v]\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}, \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} \langle u, \partial_x(uv)\rangle_s &= \langle u, u\partial_x v\rangle_s + \langle u, v\partial_x u\rangle_s \\ &= \langle J^s u, J^s(u\partial_x v)\rangle_{L^2} + \langle u, v\partial_x u\rangle_s \\ &= \langle J^s u, [J^s, u]\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle u, v\partial_x u\rangle_s \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$
\begin{aligned}
\langle v, u\partial_x u\rangle_s &= \langle J^s v, J^s (u\partial_x u)\rangle_s \\
&= \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u + uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} \\
&= \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\langle v, \partial_x (uv)\rangle_s &= \langle v, u\partial_x v\rangle_s + \langle v, v\partial_x u\rangle_s \\
&= \langle v, u\partial_x v\rangle_s + \langle J^s v, J^s (v\partial_x u)\rangle_{L^2} \\
&= \langle v, u\partial_x v\rangle_s + \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\,. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (2.36),(2.37), (2.38) y (2.39) en (2.35) se tiene

$$
\begin{aligned}
E \;=\;& 3\langle u, u\partial_x u\rangle_s + 3\langle v, v\partial_x v\rangle_s - \langle u, v\partial_x u\rangle_s - \langle v, u\partial_x v\rangle_s - \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} \\
& - \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} \\
& - \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Asociando factores en el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_{L^2}$, usando integración por partes y la conmutatividad de la derivada con el potencial de Bessel; los cuatro últimos términos de (2.40) se pueden simplificar como sigue

$$
\begin{aligned}
& - \langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} \\
=\;& \langle \partial_x (vJ^s u), J^s v\rangle_{L^2} - \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x (uJ^s v), J^s u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, v\partial_x J^s u\rangle_{L^2} \\
=\;& \langle (\partial_x v)\, J^s u, J^s v\rangle_{L^2} + \langle vJ^s\partial_x u, J^s v\rangle_{L^2} - \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} \\
& + \langle (\partial_x u)\, J^s v, J^s u\rangle_{L^2} + \langle uJ^s\partial_x v, J^s u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} \\
=\;& \langle (\partial_x v)\, J^s u, J^s v\rangle_{L^2} + \langle (\partial_x u)\, J^s v, J^s u\rangle_{L^2}\,. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

por tanto, reemplazando (2.41) en (2.40) se tiene

$$
\begin{aligned}
E \;=\;& 3\langle u, u\partial_x u\rangle_s + 3\langle v, v\partial_x v\rangle_s - \langle u, v\partial_x u\rangle_s - \langle v, u\partial_x v\rangle_s - \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} \\
& - \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} \\
& + \langle (\partial_x v)\, J^s u, J^s v\rangle_{L^2} + \langle (\partial_x u)\, J^s v, J^s u\rangle_{L^2}\,. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

A continuación estimaremos el segundo miembro de (2.42). Usando la desigualdad (1.18) debida a T. Kato, con $t = s$, la regularidad de $\vec{u}_\mu$ y el teorema 1.16 de inmersión de Sobolev se tiene

$$\begin{aligned} |\langle u, u\partial_x u\rangle_s| &\leq C_s \|\partial_x u\|_{s-1} \|u\|_s^2 \leq C_s \|u\|_s^3 \leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 . && (2.43)\\ |\langle v, v\partial_x v\rangle_s| &\leq C_s \|\partial_x v\|_{s-1} \|v\|_s^2 \leq C_s \|v\|_s^3 \leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 && (2.44)\\ |\langle u, v\partial_x u\rangle_s| &\leq C_s \left(\|\partial_x v\|_{s-1} \|u\|_s^2 + \|\partial_x v\|_{s-1} \|u\|_s^2\right) \leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 && (2.45)\\ |\langle v, u\partial_x v\rangle_s| &\leq C_s \left(\|\partial_x u\|_{s-1} \|v\|_s^2 + \|\partial_x u\|_{s-1} \|v\|_s^2\right) \leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 && (2.46) \end{aligned}$$

Combinando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el estimado del conmutador de la proposición (1.19), la regularidad de la solución $\vec{u}_\mu$ y el teorema de inmersión de Sobolev 1.16, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2}| &\leq \|J^s u\|_{L^2} \|[J^s, v]\,\partial_x v\|_{L^2}\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x v\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} + \|J^s v\|_{L^2} \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right)\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x v\|_{s-1} \|\partial_x v\|_{s-1} + \|v\|_s \|\partial_x v\|_{s-1}\right)\\ &\leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 , && (2.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2}| &\leq \|J^s u\|_{L^2} \|[J^s, u]\,\partial_x v\|_{L^2}\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} + \|J^s v\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x u\|_{s-1} \|\partial_x v\|_{s-1} + \|v\|_s \|\partial_x u\|_{s-1}\right)\\ &\leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 , && (2.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2}| &\leq \|J^s v\|_{L^2} \|[J^s, u]\,\partial_x u\|_{L^2}\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_{L^2} + \|J^s u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)\\ &\leq C_s \|u\|_s \left(\|\partial_x u\|_{s-1} \|\partial_x u\|_{s-1} + \|u\|_s \|\partial_x u\|_{s-1}\right)\\ &\leq C_s \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}^3 , && (2.49) \end{aligned}$$

$$|\langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2}| \leq \|J^s v\|_{L^2} \|[J^s, v]\,\partial_x u\|_{L^2}$$

$$\leq \; C_s \|v\|_s \left(\|\partial_x v\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_{L^2} + \|J^s u\|_{L^2} \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right)$$
$$\leq \; C_s \|v\|_s \left(\|\partial_x v\|_{s-1} \|\partial_x u\|_{s-1} + \|u\|_s \|\partial_x v\|_{s-1}\right)$$
$$\leq \; C_s \|\vec{u}_\mu\|^3_{\mathbb{H}^s} . \tag{2.50}$$

Además, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la regularidad de la solución $\vec{u}_\mu$ y la proposición (1.21), con $r = 0$ y $t = s - 1$ resulta

$$\begin{aligned} \left|\langle(\partial_x v)\, J^s u, J^s v\rangle_{L^2}\right| &\leq \|[(\partial_x v)\, J^s u]\|_{L^2} \|J^s v\|_{L^2} \\ &\leq C_s \|\partial_x v\|_{s-1} \|J^s u\|_{L^2} \|J^s v\|_{L^2} \\ &\leq C_s \|v\|_s \|u\|_s \|v\|_s = C_s \|\vec{u}_\mu\|^3_{\mathbb{H}^s} \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} \left|\langle(\partial_x u)\, J^s v, J^s u\rangle_{L^2}\right| &\leq \|[(\partial_x u)\, J^s v]\|_{L^2} \|J^s u\|_{L^2} \\ &\leq C_s \|\partial_x u\|_{s-1} \|J^s v\|_{L^2} \|v\|_s \\ &\leq C_s \|v\|_s \|u\|^2_s = C_s \|\vec{u}_\mu\|^3_{\mathbb{H}^s} . \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por lo tanto, de (2.43) - (2.52) en (2.34) resulta

$$\partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq 2C_s \|\vec{u}_\mu\|^3_{\mathbb{H}^s} = 2\zeta\left(\|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s}\right) \tag{2.53}$$

donde $\zeta(y) = C_s y^{3/2}$, para $y \geq 0$.

Consideremos $\rho^{1/2}(t) = \dfrac{\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}}{1 - tC_s \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}}$, definida en el intervalo $[0, T^*[$ con $T^* = \dfrac{1}{C_s \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}}$, la solución maximal del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2\zeta(\rho(t)), & t > 0 \\ \rho(0) = \|\vec{u}_0\|^2_s . \end{cases} \tag{2.54}$$

Entonces de (2.53), (2.54) y de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos que,

$$\|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \rho(t), \quad t \in [0, T^*[\cap [0, T_\mu] .$$

Así, para $\mu > 0$, $\vec{u}_\mu$ se puede extender (si fuera necesario) a un intervalo $[0, T]$. Esto prueba (2.32) como se quería. ❑

Teorema 2.13 *Sean $\mu > 0$, $\vec{\phi} \in \mathbb{H}^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $\vec{u}_\mu \in C([0, T] : \mathbb{H}^s)$ la solución del problema de valor inicial (2.1) como en el teorema 2.12. Si $\left\{\vec{\phi}_n\right\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{H}^s$ convergente* *a $\vec{\phi}$ en $\mathbb{H}^s$ y $\{\vec{u}_{\mu,n}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de soluciones de (2.1) con $\vec{u}_{\mu,n}(0) = \phi_n$ y $\vec{u}_{\mu,n} \in C([0,T_n] : \mathbb{H}^s)$. Entonces para todo $\overline{T} \in]0,T[$ se cumple que para n suficientemente grande $\vec{u}_{\mu,n}$ está definida en $[0,\overline{T}]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_{\mu,n}(t) - \vec{u}_{\mu}(t)\|_{\mathbb{H}^s} = 0$$

Demostración: Del teorema 2.12, tenemos para todo n

$$\|\vec{u}_{\mu,n}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \rho_n(t), \quad t \in [0,T_n] \tag{2.55}$$

donde ρ_n satisface

$$\begin{cases} \rho_n'(t) = 2C_s\rho_n^{\frac{3}{2}}(t), & t > 0 \\ \rho_n(0) = \left\|\vec{\phi}_n\right\|^2_{\mathbb{H}^s}, \end{cases}$$

en $[0,T_n^*[$ con $T_n^* = \dfrac{1}{2C_s\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}}$ y $T_n < T_n^*$.

Para $\overline{T} \in]0,T[$ consideremos $\varepsilon = \varepsilon\left(\overline{T}, \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) > 0$ tal que

$$\varepsilon + \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} = \left(\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right)\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Entonces existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $\left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. De la definición de ρ_n tenemos para $n \geq N_0$,

$$\rho_n^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\left\|\vec{\phi}_n\right\|_{\mathbb{H}^s}}{1 - 2C_s\left\|\vec{\phi}_n\right\|_{\mathbb{H}^s} t} \leq \frac{\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon}{1 - 2C_s\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon\right)\overline{T}} \equiv \rho_{\overline{T}}(t), \quad \text{para } t \in [0,\overline{T}]$$

pues

$$2C_s\left\|\vec{\phi}_n\right\|_{\mathbb{H}^s} t \leq 2C_s\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon\right)t \leq 2C_s\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon\right)\overline{T} = 2C_sT\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} < 1$$

donde la última desigualdad sigue de la elección de T. De este modo, tenemos

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \rho_n(t) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right). \tag{2.56}$$

Así, $\vec{u}_{\mu,n}(t)$ puede ser extendida a $[0,\overline{T}]$ satisfaciendo (2.55).

Consideremos ahora $\vec{u}_{\mu} = (u,v)$, $\vec{u}_{\mu,n} = (u_n,v_n)$ y $\vec{w} = (w_1,w_2) = \vec{u}_{\mu} - \vec{u}_{\mu,n}$, luego w_1 y w_2 satisfacen

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x^3 w_1 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3u+3u_n-v-v_n)\,w_1 - (u+v+u_n+v_n)\,w_2\right] - \mu\partial_x^2 w_1 = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x^3 w_2 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3v+3v_n-u-u_n)\,w_2 - (u+v+u_n+v_n)\,w_1\right] - \mu\partial_x^2 w_2 = 0 \\ \vec{w}\,(0) = \vec{\phi}_n - \vec{\phi} \end{cases} \tag{2.57}$$

Por otro lado, de la definición del producto interno en $\mathbb{H}^s$, la igualdad $\left\langle z, \partial_x^3 z\right\rangle_s = 0$ e integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} E &= \partial_t \|\vec{w}\,(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 = 2\left\langle w_1, \partial_t w_1\right\rangle_s + 2\left\langle w_2, \partial_t w_2\right\rangle_s \\ &= 2\left\langle w_1, -\partial_x^3 w_1 - \frac{1}{2}\partial_x\left[(3u+3u_n-v-v_n)\,w_1 - (u+v+u_n+v_n)\,w_2\right] + \mu\partial_x^2 w_1\right\rangle_s + \\ &\quad\; 2\left\langle w_2, \partial_x^3 w_2 - \frac{1}{2}\partial_x\left[(3v+3v_n-u-u_n)\,w_2 - (u+v+u_n+v_n)\,w_1\right] + \mu\partial_x^2 w_2\right\rangle_s \\ &= -\left\langle w_1, \partial_x\left[(3u+3u_n-v-v_n)\,w_1 - (u+v+u_n+v_n)\,w_2\right]\right\rangle - 2\mu\left\langle \partial_x w_1, \partial_x w_1\right\rangle \\ &\quad\; -\left\langle w_2, -\partial_x\left[(3v+3v_n-u-u_n)\,w_2 - (u+v+u_n+v_n)\,w_1\right]\right\rangle_s - 2\mu\left\langle \partial_x w_2, \partial_x w_2\right\rangle \\ &= \left\langle w_1\partial_x w_1, 3u+3u_n-v-v_n\right\rangle_s - \left\langle w_2\partial_x w_1, u+v+u_n+v_n\right\rangle_s - 2\mu\left\|\partial_x w_1\right\|_s^2 + \\ &\quad\; \left\langle w_2\partial_x w_2, 3v+3v_n-u-u_n\right\rangle_s - \left\langle w_1\partial_x w_2, u+v+u_n+v_n\right\rangle_s - 2\mu\left\|\partial_x w_2\right\|_s^2 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, desigualdad triangular y el hecho que H^s es un álgebra de Banach, se sigue que

$$\begin{aligned} \left\langle w_1\partial_x w_1, 3u+3u_n-v-v_n\right\rangle_s &\leq C_s\|w_1\|_s\|\partial_x w_1\|_s\|3u+3u_n-v-v_n\|_s \\ &\leq C_s\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}\|\partial_x\vec{w}\|_s \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned} \left\langle w_2\partial_x w_1, u+v+u_n+v_n\right\rangle_s &\leq C_s\|w_2\|_s\|\partial_x w_1\|_s\|u+v+u_n+v_n\|_s \\ &\leq C_s\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}\|\partial_x\vec{w}\|_s \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} \left\langle w_2\partial_x w_2, 3v+3v_n-u-u_n\right\rangle_s &\leq C_s\|w_2\|_s\|\partial_x w_2\|_s\|3v+3v_n-u-u_n\|_s \\ &\leq C_s\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}\|\partial_x\vec{w}\|_s \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} \left\langle w_1\partial_x w_2, u+v+u_n+v_n\right\rangle_s &\leq C_s\|w_1\|_s\|\partial_x w_2\|_s\|u+v+u_n+v_n\|_s \\ &\leq C_s\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}\|\partial_x\vec{w}\|_s \end{aligned} \tag{2.62}$$

Por lo tanto, usando las desigualdades (2.59), (2.60), (2.61) y (2.62), en (2.58) se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} &\leq C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} \|\partial_x \vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} - 2\mu \|\partial_x \vec{w}\|^2_{\mathbb{H}^s} \\ &\leq \eta \|\vec{w}\|^2_{\mathbb{H}^s} + \frac{C_1^2}{4\eta} \|\partial_x \vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} - 2\mu \|\partial_x \vec{w}\|^2_{\mathbb{H}^s},\end{aligned}$$

donde $C = C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right)$, y para deducir la última desigualdad se ha utilizado la desigualdad 2.31, con $M = \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}$, $N = c\|\partial_x \vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}$. Eligiendo $\eta = \dfrac{C^2}{8\mu}$ se tiene

$$\partial_t \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{C^2}{8\mu} \|\vec{w}\|^2_{\mathbb{H}^s}$$

y al integrar de 0 a t

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \|\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{H}^s} + \frac{C^2}{8\mu} \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|^2_{\mathbb{H}^s} \, d\tau.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, tenemos

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \|\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{H}^s} \exp\left(\frac{C^2 \overline{T}}{8\mu}\right) = C_\mu \|\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{H}^s}.$$

es decir,

$$\|\vec{u}_{\mu,n}(t) - \vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_\mu \left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Tomando supremo sobre $\left[0, \overline{T}\right]$ y aplicando límite queda completa la demostración. ❑

2.4 El problema global en $\mathbb{H}^s$, $s \geq 2$

El problema asociado al sistema (4) está bien formulado globalmente si podemos mostrar que el tiempo de vida se puede tomar arbitrariamente grande. Para alcanzar tal resultado se prueba previamente que $\partial_t \|\partial_x \vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{L}^2}$ y la solución local $\vec{u}_\mu$ están acotadas en la norma de $\mathbb{L}^2$, para lo cual se recogieron algunas ideas desarrolladas por E. Bisognin, V. Bisognin y G. Perla en [1]. Estos resultados conducen a un estimado de $\vec{u}_\mu$ en $\mathbb{H}^1$ que conjuntamente con el teorema 2.4 y la ecuación integral permiten establecer $\vec{u}_\mu$ es acotada en tiempos finitos. Con este resultado en mano se demuestra el teorema principal del capítulo (teorema 2.18) que está organizado según lo desarrollado por Nunes en su tesis doctoral [34]. Finalmente, el resultado para el comportamiento asintótico se obtiene casi gratuitamente fruto de algunos estimados obtenidos en este capítulo.

Proposición 2.14 *Sean $\mu > 0$, $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ con $s \geq 1$ y $\vec{u}_\mu = (u, v)$ la solución del problema de valor inicial (4) como en el teorema 2.12. Entonces, para cualquier s con $s \geq 1$ se tiene*

$$\|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \exp\left(C \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau\right) \tag{2.63}$$

donde

$$\psi(s) = \|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|\partial_x v\|_{L^\infty}$$

Demostración: Consideremos $\vec{u}_\mu = (u, v)$ y $0 \leq t \leq T_\mu$ con T_μ dado por el teorema 2.7. Teniendo en cuenta que $\vec{u}_\mu \in C([0, T_\mu], \mathbb{H}^s) \cap C^1([0, T_\mu], \mathbb{H}^{s-3})$, la solución de (2.1) dada por el teorema 2.9, se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} &= 2\langle \vec{u}_\mu, \partial_t \vec{u}_\mu\rangle_{\mathbb{H}^s} = 2\left\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu - \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\\ &= 2\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu\rangle_{\mathbb{H}^s} + 2\left\langle \vec{u}_\mu, -\vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}.\end{aligned}$$

De la prueba de la proposición 2.1 se tiene que

$$\langle \vec{u}_\mu, -A_\mu \vec{u}_\mu\rangle_{\mathbb{H}^s} \leq 0,$$

por lo tanto

$$\partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq 2\left\langle \vec{u}_\mu, -\vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} \leq 2\left|\left\langle \vec{u}_\mu, \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\right|. \tag{2.64}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{G}(\vec{u}_\mu) = (\partial_x G(u, v), \partial_x G(v, u))$ con $G(u, v) = \frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{v^2}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}E &= \left\langle \vec{u}_\mu, \vec{G}(\vec{u}_\mu)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} = \langle u, \partial_x G(u, v)\rangle_s + \langle v, \partial_x G(v, u)\rangle_s\\ &= \left\langle u, \partial_x\left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{v^2}{2}\right)\right\rangle_s + \left\langle v, \partial_x\left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{u^2}{2}\right)\right\rangle_s\\ &= 3\langle u, u\partial_x u\rangle_s + 3\langle v, v\partial_x v\rangle_s - \langle u, \partial_x(uv)\rangle_s - \langle u, v\partial_x v\rangle_s - \langle v, \partial_x(uv)\rangle_s - \langle v, u\partial_x u\rangle_s\end{aligned} \tag{2.65}$$

Usando el conmutador $[J^s, f]\, g = J^s(fg) - fJ^s g$ e integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned}\langle u, u\partial_x u\rangle_s &= \langle J^s u, J^s(u\partial_x u)\rangle_{L^2}\\ &= \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle J^s u, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

$$= \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x u, (J^s u)^2\right\rangle_{L^2} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}\langle v, v\partial_x v\rangle_s &= \langle J^s v, J^s (v\partial_x v)\rangle_{L^2}\\ &= \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x v, (J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\langle u, v\partial_x v\rangle_s = \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}, \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}\langle u, \partial_x (uv)\rangle_s &= \langle u, u\partial_x v\rangle_s + \langle u, v\partial_x u\rangle_s\\ &= \langle J^s u, J^s (u\partial_x v)\rangle_{L^2} + \langle J^s u, J^s (v\partial_x u)\rangle_s\\ &= \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} + \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} +\\ &\qquad \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x v, (J^s u)^2\right\rangle_{L^2}\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\langle v, u\partial_x u\rangle_s &= \langle J^s v, J^s (u\partial_x u)\rangle_{L^2}\\ &= \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u + uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\\ &= \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\end{aligned} \tag{2.70}$$

y

$$\begin{aligned}\langle v, \partial_x (uv)\rangle_s &= \langle v, u\partial_x v\rangle_s + \langle v, v\partial_x u\rangle_s\\ &= \langle J^s v, J^s (u\partial_x v)\rangle_s + \langle J^s v, J^s (v\partial_x u)\rangle_{L^2}\\ &= \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x u, (J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\\ &\qquad + \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Reemplazando (2.66),(2.67), (2.68), (2.69) y (2.70) en (2.71) se tiene

$$\begin{aligned}E &= 3\langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \tfrac{3}{2}\left\langle \partial_x u, (J^s u)^2\right\rangle_{L^2} + 3\langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \tfrac{3}{2}\left\langle \partial_x v, (J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\\ &- \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2} + \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x v, (J^s u)^2\right\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} + \tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x u, (J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\\ &- \langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\rangle_{L^2}\\ &- \langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2} - \langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2} - \langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\end{aligned} \tag{2.72}$$

Asociando factores en el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$, usando integración por partes y la conmutatividad de la derivada con el potencial de Bessel; los cuatro últimos términos de (2.72) se pueden simplificar como sigue

$$\begin{aligned}
&-\langle J^s u, vJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}-\langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}-\langle J^s v, uJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}-\langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\\
&=\langle \partial_x\left(vJ^s u\right), J^s v\rangle_{L^2}-\langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}+\langle \partial_x\left(uJ^s v\right), J^s u\rangle_{L^2}-\langle J^s v, v\partial_x J^s u\rangle_{L^2}\\
&=\langle \partial_x vJ^s u, J^s v\rangle_{L^2}+\langle vJ^s\partial_x u, J^s v\rangle_{L^2}-\langle J^s u, uJ^s\partial_x v\rangle_{L^2}\\
&+\langle \partial_x uJ^s v, J^s u\rangle_{L^2}+\langle uJ^s\partial_x v, J^s u\rangle_{L^2}-\langle J^s v, vJ^s\partial_x u\rangle_{L^2}\\
&=\langle \partial_x vJ^s u, J^s v\rangle_{L^2}+\langle \partial_x uJ^s v, J^s u\rangle_{L^2}. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

por tanto, reemplazando (2.73) en (2.72) se tiene

$$\begin{aligned}
E&=3\langle J^s u,[J^s,u]\,\partial_x u\rangle_{L^2}-\tfrac{3}{2}\left\langle \partial_x u,(J^s u)^2\right\rangle_{L^2}+3\langle J^s v,[J^s,v]\,\partial_x v\rangle_{L^2}-\tfrac{3}{2}\left\langle \partial_x v,(J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\\
&-\langle J^s u,[J^s,v]\,\partial_x u\rangle_{L^2}+\tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x v,(J^s u)^2\right\rangle_{L^2}-\langle J^s v,[J^s,u]\,\partial_x v\rangle_{L^2}+\tfrac{1}{2}\left\langle \partial_x u,(J^s v)^2\right\rangle_{L^2}\\
&-\langle J^s u,[J^s,v]\,\partial_x v\rangle_{L^2}-\langle J^s u,[J^s,u]\,\partial_x v\rangle_{L^2}-\langle J^s v,[J^s,u]\,\partial_x u\rangle_{L^2}-\langle J^s v,[J^s,v]\,\partial_x u\rangle_{L^2}\\
&+\langle \partial_x vJ^s u, J^s v\rangle_{L^2}+\langle \partial_x uJ^s v, J^s u\rangle_{L^2}. \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

A continuación estimaremos cada término del segundo miembro de (2.74). De la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de la regularidad de $\vec{u}_\mu$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\langle \partial_x vJ^s u, J^s v\rangle_{L^2}\right|&\le \left\|[\partial_x vJ^s u]\right\|_{L^2}\|J^s v\|_{L^2}\\
&\le C_s\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|J^s u\|_{L^2}\|J^s v\|_{L^2}\\
&\le C_s\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle \partial_x uJ^s v, J^s u\rangle_{L^2}\right|&\le \left\|[\partial_x uJ^s v]\right\|_{L^2}\|J^s u\|_{L^2}\\
&\le C_s\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|J^s v\|_{L^2}\|v\|_s\\
&\le C_s\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s}. \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

análogamente

$$\left|\left\langle \partial_x u,(J^s u)^2\right\rangle_{L^2}\right|\le C_s\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|\vec{u}_\mu(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \qquad (2.77)$$

$$\left|\left\langle \partial_x v, (J^s v)^2 \right\rangle_{L^2}\right| \leq C_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \tag{2.78}$$

$$\left|\left\langle \partial_x v, (J^s u)^2 \right\rangle_{L^2}\right| \leq C_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \tag{2.79}$$

$$\left|\left\langle \partial_x u, (J^s v)^2 \right\rangle_{L^2}\right| \leq C_s \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \tag{2.80}$$

Combinando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el estimado del conmutador de la proposición (1.19) y la regularidad de la solución $\vec{u}_\mu$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\langle J^s u, [J^s, v]\, \partial_x v\rangle_{L^2}\right| &\leq \left\|J^s u\right\|_{L^2} \left\|[J^s, v]\, \partial_x v\right\|_{L^2} \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} + \left\|J^s v\right\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x v\right\|_{s-1} + \left\|v\right\|_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s + \left\|v\right\|_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle J^s u, [J^s, u]\, \partial_x v\rangle_{L^2}\right| &\leq \left\|J^s u\right\|_{L^2} \left\|[J^s, u]\, \partial_x v\right\|_{L^2} \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} + \left\|J^s v\right\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x v\right\|_{s-1} + \left\|v\right\|_s \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C_s \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2
\end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle J^s v, [J^s, u]\, \partial_x u\rangle_{L^2}\right| &\leq \left\|J^s v\right\|_{L^2} \left\|[J^s, u]\, \partial_x u\right\|_{L^2} \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_{L^2} + \left\|J^s u\right\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_s \left\|u\right\|_s \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x u\right\|_{s-1} + \left\|u\right\|_s \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C_s \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{H}^s}^2,
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle J^s v, [J^s, v]\, \partial_x u\rangle_{L^2}\right| &\leq \left\|J^s v\right\|_{L^2} \left\|[J^s, v]\, \partial_x u\right\|_{L^2} \\
&\leq C_s \left\|v\right\|_s \left(\left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_{L^2} + \left\|J^s u\right\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_s \left\|v\right\|_s \left(\left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x u\right\|_{s-1} + \left\|u\right\|_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C_s \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|\vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{H}^s}^2,
\end{aligned} \tag{2.84}$$

del mismo modo

$$\langle J^s u, [J^s, u]\, \partial_x u\rangle_{L^2} \le C_s \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \tag{2.85}$$

$$\langle J^s v, [J^s, v]\, \partial_x v\rangle_{L^2} \le C_s \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \tag{2.86}$$

$$\langle J^s u, [J^s, v]\, \partial_x u\rangle_{L^2} \le C_s \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \tag{2.87}$$

$$\langle J^s v, [J^s, u]\, \partial_x v\rangle_{L^2} \le C_s \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \tag{2.88}$$

Por lo tanto, de (2.75) - (2.88) en (2.74) y junto (2.64) resulta

$$\partial_t \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \le C_s \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right) \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s}\,. \tag{2.89}$$

Integrando de 0 a $t \le T_\mu$ se tiene

$$\|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s} \le \|\vec{u}_0\|^2_{\mathbb{H}^s} + C_s \int_0^t \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right) \|\vec{u}_\mu\|^2_{\mathbb{H}^s}\, ds,$$

luego, el resultado (2.63) se sigue del lema de Gronwall (lema 2.11).

Lema 2.15 *Sean $\mu > 0$, $\vec{u} \in \mathbb{H}^s$ con $s \ge 2$ y $\vec{u}_\mu = (u, v)$ la solución del problema de valor inicial (4) como en el teorema 2.12. Entonces,*

$$\|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{L}^2} \le C \tag{2.90}$$

Demostración: Del sistema (4), multiplicando por u a la primera ecuación y por v a la segunda ecuación, luego integrando sobre $\mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u\partial_t u dx + \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^3 u dx + \int_{\mathbb{R}} u\partial_x\left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{1}{2}v^2\right) dx - \mu \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u dx = 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} v\partial_t v dx - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^3 v dx + \int_{\mathbb{R}} v\partial_x\left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{1}{2}u^2\right) dx - \mu \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v dx = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{L^2} + \textstyle\int_{\mathbb{R}} u\partial_x^3 u dx + 3\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u^2\partial_x u dx - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x(uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} uv\partial_x v dx - \mu \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u dx = 0 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\partial_t \|v\|^2_{L^2} - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^3 v dx + 3\int_{\mathbb{R}} v^2\partial_x v dx - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x(uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} uv\partial_x u dx - \mu \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v dx = 0 \end{cases}$$

teniendo en cuenta regularidad de $\vec{u}_\mu$ y usando integración por partes obtenemos

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{L^2} - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x(uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} uv\partial_x v dx - \mu \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u dx = 0 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\partial_t \|v\|^2_{L^2} - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x(uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} uv\partial_x u dx - \mu \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v dx = 0 \end{cases} \tag{2.91}$$

usando integración por partes y sumando las ecuaciones dadas en (2.91) se obtiene

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\partial_t \|v\|_{L^2}^2 + \mu \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2\, dx + \mu \int_{\mathbb{R}} (\partial_x v)^2\, dx = 0$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\partial_t \|v\|_{L^2}^2 + \mu \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \mu \|\partial_x v\|_{L^2}^2 = 0$$

Finalmente, integrando de 0 a t se tiene

$$\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_0^t \left(\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2\right) dt = \|u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 \tag{2.92}$$

por tanto se tiene que

$$\|\vec{u}_\mu (t)\|_{\mathbb{L}^2} \le C$$

❑

Lema 2.16 *Sean $\mu > 0$, $\vec{u} \in \mathbb{H}^s$ con $s \ge 2$ y $\vec{u}_\mu = (u, v)$ la solución del problema de valor inicial (4) como en el teorema 2.12. Entonces,*

$$\partial_t \|\partial_x \vec{u}_\mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 \le C \tag{2.93}$$

Demostración: En el sistema (4), multiplicando por $-\partial_x^2 u$ a la primera ecuación y por $-\partial_x^2 v$ a la segunda ecuación e integrando sobre $\mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\partial_t \|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \partial_x^3 u dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \partial_x \left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{1}{2}v^2\right) dx + \mu \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x^2 u\right)^2 dx = 0 \\ \frac{1}{2}\partial_t \|\partial_x v\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 v \partial_x^3 v dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 v \partial_x \left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{1}{2}u^2\right) dx + \mu \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x^2 v\right)^2 dx = 0. \end{cases}$$

Usando integración por partes se tiene

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\partial_t \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \mu \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \partial_x \left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{1}{2}v^2\right) dx \\ \frac{1}{2}\partial_t \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \mu \left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 v \partial_x \left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{1}{2}u^2\right) dx. \end{cases} \tag{2.94}$$

Usando la desigualdad de Cauchy Schwartz, los términos de la derecha de (2.94) quedan acotados como sigue

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \partial_x \left(\frac{3}{2}u^2 - uv - \frac{1}{2}v^2\right) dx \\ &= 3\int_{\mathbb{R}} u \partial_x^2 u \partial_x u dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \partial_x (uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} v \partial_x^2 u \partial_x v dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u\partial_x u - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u\partial_x v dx - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 u\partial_x u dx - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 u\partial_x v dx \\
&\leq 3\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} \qquad (2.95)
\end{aligned}
$$

análogamente

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 v\partial_x\left(\frac{3}{2}v^2 - uv - \frac{1}{2}u^2\right) dx \\
&= 3\int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v\partial_x v dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 v\partial_x (uv) dx - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 v\partial_x u dx \\
&= 3\int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v\partial_x v dx - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 v\partial_x v dx - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x^2 v\partial_x u dx - \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 v\partial_x u dx \\
&\leq 3\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}. \qquad (2.96)
\end{aligned}
$$

Ahora, usamos la desigualdad de Gagliardo-Niremberg's: Si $f \in H^1(\mathbb{R})$, entonces, $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|\partial_x f\|_{L^2}^{1/2}\|f\|_{L^2}^{1/2}$ y si $f \in H^2(\mathbb{R})$, entonces $\|\partial_x f\|_{L^2} \leq C\left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2}^{1/2}\|f\|_{L^2}^{1/2}$ (ver [33]). Además, teniendo en cuenta el estimado (2.90) el lado derecho de (2.95) y (2.96) se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{7/4} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{5/4}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{1/2} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{3/2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{1/4} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{3/4} \\
&\leq C\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{L^2}^{7/4} \qquad (2.97)
\end{aligned}
$$

del mismo modo

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{7/4} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{1/4}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{3/2} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{1/2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^{5/4} + C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^{3/4}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} \\
&\leq C\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{L^2}^{7/4} \qquad (2.98)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (2.97) y (2.98) en (2.94) y sumando ambas desigualdades se tiene

$$
\partial_t\|\partial_x \vec{u}_\mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2\mu\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{L}^2}^{7/4}
$$

Así, usando la desigualdad (2.31) para $\eta > 0$

$$
\partial_t\|\partial_x \vec{u}_\mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2\mu\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \eta C\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + c(\eta) C
$$

de donde

$$
\partial_t\|\partial_x \vec{u}_\mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + (2\mu - \eta)\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\mu\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C \qquad (2.99)
$$

eligiendo $\eta < 2\mu$, se concluye que

$$\partial_t \left\| \partial_x \vec{u}_\mu \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C.$$

❑

Proposición 2.17 *Sean $\mu > 0$, $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ con $s \geq 2$ y $\vec{u}_\mu = (u, v)$ la solución del problema de valor inicial (4) como en el teorema 2.12. Entonces, para cualquier s con $s \geq 2$ se tiene*

$$\left\| \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_t. \tag{2.100}$$

Demostración: Integrando de 0 a t en la desigualdad 2.93 se tiene

$$\left\| \partial_x \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq Ct + \left\| \partial_x \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \tag{2.101}$$

luego, de 2.90 y 2.101 se deduce que

$$\left\| \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{H}^1}^2 \leq C + Ct + \left\| \partial_x \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

Por otro lado, tomando norma en $\mathbb{H}^2$ en la ecuación integral se tiene

$$\left\| \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{H}^2} \leq \left\| W_\mu (t) \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^2} + \int_0^t \left\| W_\mu (t - \tau) \vec{G} (\vec{u}_\mu (\tau)) \right\|_{\mathbb{H}^2} d\tau$$

donde usando la propiedad regularizante con $s = r = 1$ y las desigualdades 2.15 y 2.4 conseguimos

$$\begin{aligned} \left\| \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{H}^2} &\leq K_1 \left\| \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^2} + \int_0^t K_1 \left\| \vec{G} (\vec{u}_\mu (\tau)) \right\|_{\mathbb{L}_2} d\tau \\ &\leq K_1 \left\| \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^2} + \int_0^t K_1 \left\| \vec{u}_\mu (\tau) \right\|_{\mathbb{H}^1}^2 d\tau \\ &= K_1 \left\| \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^2} + \int_0^t K_1 \left(C + C\tau + \left\| \partial_x \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right) d\tau := m_t \end{aligned}$$

Por tanto, usando el teorema de inmersión de Sobolev en la desigualdad (2.63) de la proposición (2.14) y reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \vec{u}_\mu (t) \right\|_{\mathbb{H}^s} &\leq C \left\| \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^s} \exp \left(C \int_0^t \left\| \vec{u}_\mu (s) \right\|_{\mathbb{H}^2} ds \right) \\ &\leq C \left\| \vec{u}_0 \right\|_{\mathbb{H}^s} \exp \left(C \int_0^t m_t ds \right) := C_t \end{aligned}$$

❑

Teorema 2.18 *Sean $\mu > 0$ y $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$, $s \geq 2$ y T^* el mayor real positivo tal que si para todo $T < T^*$ la solución de (4) dada por el teorema 2.12 está en $C([0,T], \mathbb{H}^s) \cap C^1([0,T], \mathbb{H}^{s-3})$. Entonces, $T^* = +\infty$ y la solución es global. Además, dicha solución depende continuamente del dato inicial.*

Demostración:

Supongamos que $T^* < +\infty$, de la proposición (2.17) se tiene que

$$\|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_t$$

para $t \in [0, T^*[$. De este modo, existe $A > 0$ tal que

$$\|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq A \qquad \text{para todo } t \in [0, T^*[$$

Eligiendo T pequeño de manera que $A < \dfrac{1}{CT}$ con C como en (2.32) y considerando el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t \vec{w} + A_\mu \vec{w} + \vec{G}(\vec{w}) = 0 \\ \vec{w}(0) = \vec{u}\left(\cdot, T^* - \dfrac{1}{2}T\right) \end{cases} \tag{2.102}$$

se deduce, por el teorema (2.12), que para $\tilde{T} \in [T, 1/\|\vec{w}(0)\|_{\mathbb{H}^s}]$ existe una única $\vec{w} \in C\left(\left[0, \tilde{T}\right], \mathbb{H}^s\right) \cap C^1\left(\left[0, \tilde{T}\right], \mathbb{H}^{s-3}\right)$ solución de (2.102). Pero, $T^* - \frac{1}{2}T + \tilde{T} \geq T^* + \frac{1}{2}T$ se sigue que

$$\vec{z}(t) = \begin{cases} \vec{u}_\mu(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T^* - \dfrac{1}{2}T \\ \vec{w}\left(t - T^* + \dfrac{1}{2}T\right) & \text{si} \quad T^* - \dfrac{1}{2}T \leq t \leq T^* + \dfrac{1}{2}T \end{cases}$$

es una extensión de $\vec{u}_\mu$ al intervalo $\left[0, T^* + \frac{1}{2}T\right]$, esto contradice la maximalidad de T. Por tanto, $T^* = +\infty$ y la solución es global.

Finalmente, la dependencia continua se hereda del caso local. ❑

2.5 Comportamiento asintótico

Lema 2.19 (Lema de Barbalat) *Sea $f : [0, +\infty[\to R$ una función uniformemente continua tal que*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

existe y es finita, entonces $\lim_{t\to+\infty} f(\tau) = 0.$

Demostración: Véase [17] ❑

Teorema 2.20 *Sean* $\mu > 0$, $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$, $s \geq 2$ *y* $\vec{u}_\mu = (u, v)$ *la solución global de (4), entonces*

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{L}^\infty} = 0$$

Demostración: Puesto que la solución de (4) es global, la desigualdad (2.92) implica que

$$\int_0^t \left(\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2\right) < +\infty \tag{2.103}$$

Por otro lado, la desigualdad (2.99) establece que

$$\partial_t \|\partial_x \vec{u}_\mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C \tag{2.104}$$

lo que equivale a decir que la función

$$H(t) = \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2$$

tiene derivada acotada y por tanto uniformemente continua en t.

Luego, teniendo en cuenta (2.103) y el lema de Barbalat (lema 2.19) se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{L}^2} = 0$$

Por lo tanto, de la desigualdad $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|\partial_x f\|_{L^2}^{1/2}\|f\|_{L^2}^{1/2}$ y (2.82) se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{L}^\infty} = 0.$$

❑

Capítulo 3

Teoría local del problema sin disipación

El hecho que el dominio de la solución u_μ para el sistema (4) no dependa de μ, probado en el teorema (2.12) del capítulo 2, juega un rol preponderante para alcanzar nuestro tercer y último objetivo que es demostrar la buena formulación local de (3) y en consecuencia de (1). Desde luego, puesto que asociado a cada $\mu > 0$ se tiene un problema de valor inicial con la misma condición inicial que (3); las respectivas soluciones forman la familia $\{\vec{u}_\mu\}_{\mu>0}$ de las cuales se espera que converjan a $\vec{u}$ (solución local de (3)) cuando $\mu \to 0^+$. Precisamente, esta sospecha y la unicidad de $\vec{u}$ están plasmadas en el teorema 3.3, donde usamos las ideas de Iório dadas en [19]. Finalmente, para probar la dependencia continua de la solución seguimos la idea del trabajo de Bona - Smith.

3.1 El problema lineal no disipativo

En esta sección estudiamos el problema de valor inicial lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = 0 & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v = 0 & \\ u\,(x,0) = u_0\,(x)\,,\; v\,(x,0) = v_0\,(x) & \end{cases} \tag{3.1}$$

asociado con (4) para el caso $\mu = 0$, que tiene la forma vectorial

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t) + A_0 \vec{u}(t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

siendo $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, A_0 el operador definido por $A_0 = \begin{pmatrix} \partial_x^3 & 0 \\ 0 & -\partial_x^3 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_0 = (u_0, v_0)$.

Equivalentemente

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_0) = \mathbb{H}^{s+3},\ s \geq 0 \\ \\ A_0 \vec{u} = \left(\partial_x^3 u, -\partial_x^3 v\right), \quad \vec{u} = (u, v) \in \mathbb{H}^{s+3}. \end{cases}$$

Proposición 3.1 *Si $s \geq 0$ es un número real cualquiera, el operador $A_0 : \mathbb{H}^{s+3} \subseteq \mathbb{H}^s \to \mathbb{H}^s$ es lineal, con dominio denso y antiadjunto en $\mathbb{H}^s$. En particular, A_0 y $-A_0$ son operadores disipativos maximales en $\mathbb{H}^s$.*

Demostración: La linealidad del operador A_0 y la densidad del dominio son inmediatas. Además, si $\vec{u} = (u, v) \in \mathbb{H}^{s+3}$, por la definición de $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^s}$, las desigualdades $\left\|\partial_x^k u\right\|_s \leq \|u\|_{s+k}$, $\|u\|_s \leq \|u\|_{s+1}$ y la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned} \|A_0 \vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2 &= \left\|\left(\partial_x^3 u, -\partial_x^3 v\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 = \left\|\partial_x^3 u\right\|_s^2 + \left\|-\partial_x^3 v\right\|_s^2 \\ &\leq \|u\|_{s+3}^2 + \|v\|_{s+3}^2 = \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^{s+3}}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Luego $\|A_0 \vec{u}\|_{\mathbb{H}^s} \leq C \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^{s+3}}$, lo que indica que $A_0 \vec{u} \in \mathbb{H}^s$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(A_0) \subseteq \mathbb{H}^s$ cualquiera sea $\vec{u} \in \mathbb{H}^{s+3}$. Del mismo modo $-A_0$ tiene las mismas propiedades.

Ahora mostraremos que A_0 es antiadjunto, para lo cual es suficiente probar que $\langle A_0 \vec{u}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{H}^s} = -\langle \vec{u}, A_0 \vec{v}\rangle_{\mathbb{H}^s}$. En efecto, si $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{H}^{s+3}$ y $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$, usando definición de A_0, las propiedades de producto interno e integración por partes $\left\langle \partial_x^k u, v\right\rangle_s = (-1)^k \left\langle u, \partial_x^k v\right\rangle_s$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle A_0 \vec{u}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{H}^s} &= \left\langle \left(\partial_x^3 u_1, -\partial_x^3 u_2\right), (v_1, v_2)\right\rangle_{\mathbb{H}^s} \\ &= \left\langle \partial_x^3 u_1, v_1\right\rangle_s + \left\langle -\partial_x^3 u_2, v_2\right\rangle_s \\ &= -\left\langle u_1, \partial_x^3 v_1\right\rangle_s + \left\langle u_2, \partial_x^3 v_2\right\rangle_s \end{aligned}$$

$$= \; -\left\langle (u_1, u_2), \left(\partial_x^3 v_1, -\partial_x^3 v_2\right)\right\rangle_{\mathbb{H}^s}$$
$$= \; -\left\langle \vec{u}, A_0\vec{v}\right\rangle_{\mathbb{H}^s};$$

por lo tanto, A_0 es antiadjunto. Luego, por la proposición 1.26 se sigue que A_0 y $-A_0$ son operadores disipativos maximales. ❑

Teorema 3.2 *El operador $-A_0$ genera un semigrupo de contracciones $\{W_0(t)\}_{t\geq 0} = \left\{e^{-tA_0}\right\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{H}^s$, $s \geq 0$, tal que*

$$W_0(t)\,\vec{u}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_0^+(t)\,v_0 \\ E_0^-(t)\,v_0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

para todo $\vec{u} = (u, v) \in \mathbb{H}^s$, donde $E_\mu^\pm(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{E_0^\pm(t)\,\varphi}(\xi) = e^{\lambda_0^\pm(\xi)t}\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{con } \lambda_0^\pm(\xi) = \pm i\xi\left(1-\xi^2\right).$$

Además, $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende a un grupo de operadores unitarios en $\mathbb{H}^s$ y, cualquiera sea $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^{s+3}$ la función

$$W_0(\cdot)\,\vec{u}_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (3.2).

Demostración: La primera afirmación es consecuencia de la proposición 3.1 y el teorema de Lumer-Phillips (ver proposición 1.27).

Para demostrar (3.3), resolvemos el problema de valor inicial (3.1). En efecto, tomando la transformada de Fourier en la variable espacial, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en t)

$$\begin{cases} \partial_t\widehat{u}(t) - i\xi^3\widehat{u}(t) = 0 \\ \partial_t\widehat{v}(t) + i\xi^3\widehat{v}(t) = 0 \\ \widehat{u}(0) = \widehat{u_0}, \quad \widehat{v}(0) = \widehat{v_0} \end{cases}$$

que en su forma vectorial resulta

$$\begin{cases} \partial_t\widehat{\vec{u}}(\xi,t) + \widehat{A_0}(\xi)\,\widehat{\vec{u}}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{\vec{u}}(\xi,0) = \widehat{\vec{u}_0}(\xi). \end{cases}$$

donde $\widehat{\vec{u}}(\xi,t) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(t) \\ \widehat{v}(t) \end{pmatrix}$, $\widehat{A_0}(\xi) = \begin{pmatrix} -i\xi^3 & 0 \\ 0 & i\xi^3 \end{pmatrix}$ y $\widehat{\vec{u}_0}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{v_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix}$.

La solución es dada por

$$
\begin{aligned}
\widehat{\vec{u}}(\xi,t) &= e^{-\widehat{A_0}(\xi)t}\widehat{\vec{u}_0}(\xi)\\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\xi^3 t} & 0 \\ 0 & e^{i\xi^3 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{v_0}(\xi)\\ \widehat{v_0}(\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0^+(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\\ e^{\lambda_0^-(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widehat{E_0^+(t)\,v_0}(\xi)\\ \widehat{E_0^-(t)\,v_0}(\xi)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donde hemos definido $\widehat{E_0^{\pm}v_0}(\xi,t) = e^{\lambda_0^{\pm}(\xi)t}\widehat{v_0}(\xi)$. La última afirmación se sigue de las proposiciones 1.24, 3.1 y el teorema 3.24 de [14]. ❑

3.2 Existencia y unicidad de la solución

Teorema 3.3 *Sean $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^s$ y $s > \frac{3}{2}$; entonces, existe $T = T\left(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s\right) > 0$ y*

$$\vec{u} \in C\left([0,T],\mathbb{H}^s\right) \cap C^1\left([0,T],\mathbb{H}^{s-3}\right)$$

única solución de (3). Además,

$$\begin{cases} \|\vec{u}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C\left(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, T\right) \end{cases}, \tag{3.4}$$

donde ρ satisface 2.33 y $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos. Además, si $\vec{u}_0 \in \mathbb{H}^{s+r}$ con $r \geq 0$, entonces

$$\sup_{[0,T]} \|\vec{u}(t)\|^2_{\mathbb{H}^{s+r}} \leq C\left(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, T\right)\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^{s+r}} \tag{3.5}$$

Demostración: Si para cada $\mu > 0$, $\vec{u}_\mu = (u_\mu, v_\mu)$ es la solución de (2.1) con dato inicial $\vec{u}_0$ dada por los teoremas 2.12 y 2.13 en $[0,T]$, afirmamos que existe $\vec{u} = (u,v)$ tal que

$$\vec{u}(t) = \lim_{\mu\to 0^+} \vec{u}_\mu(t) \quad \text{en } \mathbb{L}^2 \tag{3.6}$$

uniformemente en $t \in [0,T]$.

Para esto, consideremos la familia $\{\vec{u}_\mu\}_{\mu>0}$ y probemos que es de Cauchy. Con ese fin, sean μ, $\nu > 0$ cualesquiera tales que $\vec{u}_\mu = (u_\mu, v_\mu)$ y $\vec{u}_\nu = (u_\nu, v_\nu)$ son solucines de (2.1), con dato inicial $\vec{u}_0$ (su existencia es garantizada por los teoremas 2.12 y 2.13). Considerando $\vec{w} := (w_1, w_2) = \vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu$, entonces $\vec{w}$ satisface

$$\begin{cases} \partial_t \vec{w} + A_\mu \vec{w} + (A_\mu - A_\nu)\vec{u}_\nu + \vec{G}(\vec{u}_\mu) - \vec{G}(\vec{u}_\nu) = \vec{0} \\ \vec{w}(0) = \vec{0}. \end{cases}$$

Luego, para $t \in [0,T]$ tenemos

$$\begin{aligned}\partial_t \|\vec{w}\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= 2\langle \vec{w}, \partial_t \vec{w}\rangle_{\mathbb{L}^2}\\ &= 2\langle \vec{w}, -A_\mu \vec{w}\rangle_{\mathbb{L}^2} + 2\langle \vec{w}, (A_\nu - A_\mu)\vec{u}_\nu\rangle_{\mathbb{L}^2} - 2\left\langle \vec{w}, \vec{G}(\vec{u}_\mu) - \vec{G}(\vec{u}_\nu)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}.\end{aligned}$$

Por la proposición 2.1, con $s = 0$, tenemos

$$\langle \vec{w}, -A_\mu \vec{w}\rangle_{\mathbb{L}^2} \leq 0,$$

entonces, por la desigualdad triangular,

$$\partial_t \|\vec{w}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 2\left|\langle \vec{w}, (A_\nu - A_\mu)\vec{u}_\nu\rangle_{\mathbb{L}^2}\right| + 2\left|\left\langle \vec{w}, \vec{G}(\vec{u}_\mu) - \vec{G}(\vec{u}_\nu)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}\right|. \tag{3.7}$$

A continuación acotaremos cada uno de los productos internos del segundo miembro de (3.7). Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\begin{aligned}S_1 &= \left|\langle \vec{w}, (A_\nu - A_\mu)\vec{u}_\nu\rangle_{\mathbb{L}^2}\right|\\ &\leq \left|\left\langle u_\mu - u_\nu, (\mu-\nu)\partial_x^2 u_\nu\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle v_\mu - v_\nu, (\mu-\nu)\partial_x^2 v_\nu\right\rangle_{L^2}\right|\\ &\leq \|u_\mu - u_\nu\|_{L^2}\left\|(\mu-\nu)\partial_x^2 u_\nu\right\|_{L^2} + \|v_\mu - v_\nu\|_{L^2}\left\|(\mu-\nu)\partial_x^2 v_\nu\right\|_{L^2}\\ &\leq 2|\mu-\nu|\,\|\vec{w}\|_{\mathbb{L}^2}\left\|\partial_x^2 \vec{u}_\nu\right\|_{\mathbb{L}^2}\\ &\leq 2|\mu-\nu|\left(\|\vec{u}_\nu\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{u}_\mu\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u}_\nu\|_{\mathbb{H}^s}\\ &\leq 2C|\mu-\nu|,\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde en la última desigualdad utilizamos (2.32) y $C = C\left(\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s}, s, T\right)$. También, de (2.2) y en analogía a (2.57) se tiene

$$\begin{aligned}\vec{G}(\vec{u}_\mu) - \vec{G}(\vec{u}_\nu) = \Big(&\frac{1}{2}\partial_x\left[(3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta)w_1 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_2\right],\\ &\frac{1}{2}\partial_x\left[(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta)w_2 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_1\right]\Big)\end{aligned}$$

Luego, usando integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}S_2 &= 2\left\langle \vec{w}, \vec{G}(\vec{u}_\mu) - \vec{G}(\vec{u}_\nu)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}\\ &= \langle w_1, \partial_x\left[(3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta)w_1 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_2\right]\rangle_{L^2}\\ &\quad + \langle w_2, \partial_x\left[(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta)w_2 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_1\right]\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle w_1, \partial_x \left[\left(3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta\right) w_1 - \left(u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta\right) w_2 \right] \right\rangle_{L^2} \\
&\quad + \left\langle w_2, \partial_x \left[\left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) w_2 - \left(u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta\right) w_1 \right] \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle w_1, \partial_x \left[\left(3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta\right) w_1 \right] \right\rangle_{L^2} - \left\langle w_1, \partial_x \left[\left(v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon\right) w_2 \right] \right\rangle_{L^2} \\
&\quad + \left\langle w_2, \partial_x \left[\left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) w_2 \right] \right\rangle_{L^2} - \left\langle w_2, \partial_x \left[\left(u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta\right) w_1 \right] \right\rangle_{L^2} \\
&= -\left\langle w_1 \partial_x w_1, 3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta \right\rangle_{L^2} + \left\langle w_2 \partial_x w_1, v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon \right\rangle_{L^2} \\
&\quad - \left\langle w_2 \partial_x w_2, 3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta \right\rangle_{L^2} + \left\langle w_1 \partial_x w_2, v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon \right\rangle_{L^2} \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle w_1^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} - \frac{1}{2} \left\langle w_2^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} \\
&\quad - \left\langle w_1 w_2, \partial_x \left(v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon\right) \right\rangle_{L^2} \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle \vec{w}, \vec{G}\left(\vec{u}_\nu\right) - \vec{G}\left(\vec{u}_\mu\right) \right\rangle_{\mathbb{L}^2} \right| &\leq \frac{1}{2} \left| \left\langle w_1^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \left\langle w_2^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} \right| \\
&\quad + \left| \left\langle w_1 w_2, \partial_x \left(v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon\right) \right\rangle_{L^2} \right| \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz e inmersión de Sobolev, acotamos cada una de las expresiones en (3.10):

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle w_1^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} \right| &\leq \frac{1}{2} \left\| \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\|_{L^\infty} \left\| w_1 \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_s \left(\left\| u_\nu \right\|_s + \left\| u_\mu \right\|_s \right) \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\leq C_s \left(\left\| \vec{u}_\nu \right\|_{\mathbb{H}^s} + \left\| \vec{u}_\mu \right\|_{\mathbb{H}^s} \right) \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\leq C_s \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle w_2^2, \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\rangle_{L^2} \right| &\leq \left\| \partial_x \left(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta\right) \right\|_{L^\infty} \left\| w_2 \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_s \left(\left\| \vec{u}_\nu \right\|_{\mathbb{H}^s} + \left\| \vec{u}_\mu \right\|_{\mathbb{H}^s} \right) \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\leq C_s \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2, \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle w_1 w_2, \partial_x \left(v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon\right) \right\rangle_{L^2} \right| &\leq \left\| \partial_x \left(v_\varepsilon + v_\delta + u_\delta + u_\varepsilon\right) \right\|_{L^\infty} \left\| w_1 \right\|_{L^2} \left\| w_2 \right\|_{L^2} \\
&\leq C_s \left\| \vec{u}_\mu \right\|_{\mathbb{H}^s} \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\leq C_s \left\| \vec{w} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Luego, sustituyendo (3.11), (3.12), (3.13), obtenemos

$$\left|\left\langle \vec{w}, \vec{G}\left(\vec{u}_{\nu}\right)-\vec{G}\left(\vec{u}_{\mu}\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}\right| \leq C_s \left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2, \tag{3.14}$$

por tanto, de (3.8), (3.14) se tiene

$$\partial_t \left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 4c_s \left|\mu-\nu\right| + 2c_s \left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 = c_s \left|\mu-\nu\right| + c_s \left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2. \tag{3.15}$$

Integrando de 0 a t obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq C\int_0^t \left|\mu-\nu\right| d\tau + \int_0^t C\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 d\tau \\
&\leq C\left|\mu-\nu\right| t + \int_0^t C\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 d\tau. \\
&\leq CT\left|\mu-\nu\right| + \int_0^t C\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, se logra

$$\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq CT\left|\mu-\nu\right| \exp\left(\int_0^t C d\tau\right) \leq CT\left|\mu-\nu\right| e^{CT}, \quad t\in[0,T].$$

Así obtenemos (3.6) y además, $\vec{w}\in C\left([0,T],\mathbb{L}^2\right)$.

Ahora probaremos que

$$\vec{u}(t) = \omega - \lim_{\mu\to 0^+} \vec{u}_{\mu}(t) \quad \text{en } \mathbb{H}^s, \tag{3.16}$$

uniformemente en $t\in[0,T]$. Para esto, por el teorema de representación de Riesz (ver [9]), consideremos $\vec{u}_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{H}^s$ cualquiera. Entonces, por la densidad de $\mathbb{H}^{2s}$ en $\mathbb{H}^s$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\vec{u}_{0,\varepsilon} = (\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in \mathbb{H}^{2s}$ tal que $\left\|\vec{u}_{0,\varepsilon} - \vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s} < \varepsilon$. Sean $\mu, \nu > 0$ y $\vec{u}_\mu$, $\vec{u}_\nu$ como antes. Usando (2.32) con $C = C\left(s, T, \left\|\vec{u}_0\right\|_{\mathbb{H}^s}\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \vec{u}_\mu(t) - \vec{u}_\nu(t), \vec{u}_0\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\right| &= \left|\left\langle \vec{u}_\mu(t) - \vec{u}_\nu(t), \vec{u}_0 - \vec{u}_{0\varepsilon}\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\right| + \left|\left\langle \vec{u}_\mu(t) - \vec{u}_\nu(t), \vec{u}_{0,\varepsilon}\right\rangle_{\mathbb{H}^s}\right| \\
&\leq \left|\left\langle u_\mu - u_\nu, \varphi - \varphi_\varepsilon\right\rangle_s\right| + \left|\left\langle v_\mu - v_\nu, \psi - \psi_\varepsilon\right\rangle_s\right| \\
&\quad + \left|\left\langle u_\mu - u_\nu, \varphi_\varepsilon\right\rangle_s\right| + \left|\left\langle v_\mu - v_\nu, \psi_\varepsilon\right\rangle_s\right| \\
&\leq \left\|u_\mu - u_\nu\right\|_s \left\|\varphi - \varphi_\varepsilon\right\|_s + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_s \left\|\psi - \psi_\varepsilon\right\|_s \\
&\quad + \left|\left\langle u_\mu - u_\nu, J^{2s}\varphi_\varepsilon\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle v_\mu - v_\nu, J^{2s}\psi_\varepsilon\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left\|u_\mu - u_\nu\right\|_s \left\|\varphi - \varphi_\varepsilon\right\|_s + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_s \left\|\psi - \psi_\varepsilon\right\|_s \\
&\quad + \left\|u_\mu - u_\nu\right\|_{L^2} \left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{2s} + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_{L^2} \left\|\psi_\varepsilon\right\|_{2s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\|u_\mu\|_s + \|u_\nu\|_s\right)\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_s + \left(\|v_\mu\|_s + \|v_\nu\|_s\right)\|\psi - \psi_\varepsilon\|_s \\
&\quad + \|u_\mu - u_\nu\|_{L^2}\|\varphi_\varepsilon\|_{2s} + \|v_\mu - v_\nu\|_{L^2}\|\psi_\varepsilon\|_{2s} \\
&\leq \left(\|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{u}_\nu(t)\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u}_0 - \vec{u}_{0,\varepsilon}\|_{\mathbb{H}^s} \\
&\quad + \|\vec{u}_\mu(t) - \vec{u}_\nu(t)\|_{\mathbb{L}^2}\|\vec{u}_{0,\varepsilon}\|_{\mathbb{H}^{2s}} \\
&\leq C\varepsilon + \|\vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu\|_{\mathbb{L}^2}\|\vec{u}_{0,\varepsilon}\|_{\mathbb{H}^{2s}}, \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

para cada $t \in [0, T]$. Como ε es arbitrario, de (3.6) y (3.17) obtenemos (3.16).

Además, de (3.17) sigue que $\vec{u} \in C_w([0,T], \mathbb{H}^s)$, y por la proposición 3.5 de [9] así como la desigualdad (2.32)

$$\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \liminf_{\mu \to 0^+} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \rho^{\frac{1}{2}}(t), \quad t \in [0, T],$$

por lo que $\vec{u}(t)$ satisface (3.4).

Ahora mostraremos que $\vec{u}(t)$ satisface el problema (3) c.e.t. $[0,T]$ en $\mathbb{H}^{s-3}$. Para ello definamos

$$G_\mu(\vec{u}_\mu(t)) = A_\mu \vec{u}_\mu(t) + \vec{G}(\vec{u}_\mu(t)). \qquad (3.18)$$

Entonces, de (3.16) y porque la función $(u, v) \in \mathbb{H}^s \mapsto uv \in H^s(\mathbb{R})$ es débilmente continua cuando $s > \frac{1}{2}$, sigue que

$$w - \lim_{\mu \to 0^+} G_\mu(\vec{u}_\mu(t)) = A_0 \vec{u}(t) + \vec{G}(\vec{u}(t)) \equiv G(\vec{u}(t)) \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-3}, \qquad (3.19)$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Del teorema 2.9 y de (3.18) tenemos

$$\partial_t \vec{u}_\mu(t) = G_\mu(\vec{u}_\mu(t)), \quad t \in [0, T].$$

Integrando desde t' hasta t, con $0 \leq t' \leq t \leq T$, obtenemos

$$\vec{u}_\mu(t) - \vec{u}_\mu(t') = \int_{t'}^{t} G_\mu(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau. \qquad (3.20)$$

Como $\vec{u} \in C_w([0,T], \mathbb{H}^s)$, de (3.18) y (3.19) la función $G(\vec{u}(\cdot)) : [0,T] \to \mathbb{H}^{s-3}$ es débilmente continua. Como las funciones dédilmente continuas son fuertemente medibles (corolario 1.2) y por lo tanto integrables en el sentido de Bochner (proposición 1.4), de (3.19), $A_\mu \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^s, \mathbb{H}^{s-3}\right)$, $s > \frac{3}{2}$ y el teorema de la convergencia dominada (proposición 1.5) tenemos que

$$w - \lim_{\mu \to 0^+} \int_{t'}^{t} G_\mu(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau = \int_{t'}^{t} G(\vec{u}(\tau))\, d\tau \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-3},$$

para $0 \leq t' \leq t \leq T$. Tomando en (3.20) el límite débil cuando $\mu \to 0^+$ obtenemos

$$\vec{u}(t) - \vec{u}(t') = \int_{t'}^{t} G(\vec{u}(\tau))\, d\tau \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-3}$$

para $t, t' \in [0,T]$. Entonces, por el teorema 1.8, $\vec{u} \in AC\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$ y satisface (3) c.e.t. el intervalo $[0,T]$.

Para completar la demostración de existencia debemos mostrar que $\vec{u} \in C([0,T], \mathbb{H}^s)$, pues esto y el hecho que $\vec{u}$ satisface (3) c.e.t. $t \in [0,T]$ implican que $\vec{u} \in C^1\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$. Para esto probaremos antes la unicidad en $C_w([0,T], \mathbb{H}^s) \cap AC\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$. En efecto, si $\vec{u},\ \vec{u}_1 \in C_w([0,T], \mathbb{H}^s) \cap AC\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$ satisfacen (3) c.e.t. el intervalo $[0,T]$, definiendo $\vec{z} = (z_1, z_2) = \vec{u} - \vec{u}_1 = (u - u_1, v - v_1)$, tenemos que $\vec{z}$ satisface

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \partial_x^3 z_1 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3u + 3u_1 - v - v_1) z_1 - (u + v + u_1 + v_1) z_2\right] = 0 \\ \partial_t z_2 - \partial_x^3 z_2 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3v + 3v_1 - u - u_1) z_2 - (u + v + u_1 + v_1) z_1\right] = 0 \\ \vec{z}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Usando los mismos argumentos que se usaron para obtener 3.15, obtenemos

$$\partial_t \|\vec{z}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C_s \|\vec{z}\|_{\mathbb{L}^2}^2, \tag{3.22}$$

c.e.t. $t \in [0,T]$. Integrando (3.22) de 0 a t tenemos

$$\|\vec{z}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C_s \int_0^t \|\vec{z}\|_{\mathbb{L}^2}^2\, d\tau, \quad t \in [0,T]$$

de donde, utilizando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, se sigue que

$$\|\vec{z}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 0, \quad t \in [0,T].$$

Luego $\vec{u}(t) = \vec{u}_1(t)$ en $\mathbb{L}^2$ para $t \in [0,T]$.

Sea ahora $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \vec{z}, \Phi\rangle_{\mathbb{H}^s} &= \langle \vec{u} - \vec{u}_1, \Phi\rangle_{\mathbb{H}^s} \\ &= \langle u - u_1, \varphi\rangle_s + \langle v - v_1, \psi\rangle_s \\ &= \langle J^s(u - u_1), J^s\varphi\rangle_{L^2} + \langle J^s(v - v_1), J^s\psi\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle u - u_1, J^{2s}\varphi\right\rangle_{L^2} + \left\langle v - v_1, J^{2s}\psi\right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Luego la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica

$$\begin{aligned} |\langle \vec{z}, \Phi\rangle_{\mathbb{H}^s}| &\leq \|u-u_1\|_{L^2} \left\|J^{2s}\varphi\right\|_{L^2} + \|v-v_1\|_{L^2} \left\|J^{2s}\psi\right\|_{L^2}. \\ &\leq \|u-u_1\|_{L^2} \|\varphi\|_{2s} + \|v-v_1\|_{L^2} \|\psi\|_{2s} \\ &\leq \|\vec{u}-\vec{u}_1\|_{\mathbb{L}^2} \left(\|\varphi\|_{2s} + \|\psi\|_{2s}\right) \\ &\leq \|\vec{u}-\vec{u}_1\|_{\mathbb{L}^2} \|\Phi\|_{\mathbb{H}^{2s}} = 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbb{H}^s$, obtenemos $\vec{u}(t) = \vec{u}_1(t)$ en $\mathbb{H}^s$ para $t \in [0,T]$, y en consecuencia la unicidad en la clase $C_w([0,T], \mathbb{H}^s) \cap AC\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$.

Probaremos ahora que $\vec{u} \in C([0,T], \mathbb{H}^s)$. Primero veamos que $\vec{u}$ es continua a la derecha de 0 en $\mathbb{H}^s$. En efecto, como $\vec{u} \in C_w([0,T], \mathbb{H}^s)$ es inmediato que

$$w - \lim_{t\to 0^+} \vec{u}(t) = \vec{u}_0 \text{ en } \mathbb{H}^s, \tag{3.23}$$

y de (3.4)

$$\limsup_{t\to 0^+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \lim_{t\to 0^+} \rho^{\frac{1}{2}}(t) = \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{H}^s} \tag{3.24}$$

y la afirmación sigue de (3.23) y (3.24) por la proposición 3.32 de [9].

Veamos ahora que $\vec{u}$ es continua a la derecha de $\tau \in]0,T[$. En efecto, definimos $\vec{v}(x,t) = \vec{u}(x, t+\tau)$ con $t \in [0, T-\tau[$, entonces $\vec{v} \in C_w([0,T-\tau], \mathbb{H}^s) \cap AC\left([0,T-\tau], \mathbb{H}^{s-3}\right)$ y satisface

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}(t) + A\vec{v}(t) + \vec{G}(\vec{v}(t)) = 0, & \text{c.e.t. } t \\ \vec{v}(0) = \vec{u}(\tau) \end{cases} \tag{3.25}$$

que es "esencialmente" el problema estudiado, cuya solución es única y continua a la derecha de cero, así, $\vec{u}$ es continua a la derecha de τ.

Para la continuidad a la izquierda de $\tau \in]0,T]$, consideramos $\vec{v}(x,t) = \vec{u}(-x, \tau - t)$ con $t \in [0,\tau]$. Así, $\vec{v}$ satisface (3.25). Así, $\vec{v}$ es continua a la derecha de cero y por lo tanto $\vec{u}$ es continua a la izquierda de τ.

De esta forma $\vec{u} \in C([0,T], \mathbb{H}^s)$, y como $\vec{u}$ satisface (3) en $\mathbb{H}^{s-3}$, entonces $\vec{u} \in C^1\left([0,T], \mathbb{H}^{s-3}\right)$.

❑

3.3 Dependencia continua de la solución

Sean $\vec{u} = \vec{u}(t)$ y $\vec{u}_n = \vec{u}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, soluciones del problema (3) con datos iniciales $\vec{\phi}$ y $\vec{\phi}_n$, respectivamente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\phi}_n = \vec{\phi}$ en $\mathbb{H}^s$. Se construye las funciones, $\vec{\phi}_\varepsilon$ y $\vec{\phi}_{\varepsilon,n} \in \mathbb{H}^\infty$ tales que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \vec{\phi}_\varepsilon = \vec{\phi}$ y $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \vec{\phi}_{\varepsilon,n} = \vec{\phi}_n$ en $\mathbb{H}^s$, donde el segundo límite es uniforme en $n \in \mathbb{N}$. Considerando $\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}_\varepsilon(t)$ y $\vec{u}_{\varepsilon,n} = \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)$ las soluciones de (3), con datos iniciales $\vec{\phi}_\varepsilon$ y $\vec{\phi}_{\varepsilon,n}$ respectivamente, se prueba que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \vec{u}_{\varepsilon,n}(t) = \vec{u}_n(t)$ en $\mathbb{H}^s$ y que la solución "aproximada" $\vec{u}_\varepsilon$ depende continuamente de $\vec{\phi}_\varepsilon$ en $\mathbb{H}^s$. Finalmente, la convergencia uniforme en n de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \vec{\phi}_{\varepsilon,n} = \vec{\phi}_n$, implicará que $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{u}_n(t) = \vec{u}(t)$ en $\mathbb{H}^s$ y por lo tanto la dependencia continua.

Para construir las funciones $\vec{\phi}_\epsilon$ con las propiedades antes requeridas se utiliza el siguiente teorema.

Proposición 3.4 (Aproximaciones de Bona-Smith) *Sea $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, tal que sop $(\eta) \subset [-1,1]$ y si $\psi(x) = 1 - \eta(x)$ entonces $\psi^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Para $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in H^s$ con $s > 0$ definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \left(\eta(\varepsilon\xi)\,\widehat{\varphi}\right)^\vee(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.26}$$

Entonces, $\varphi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R})$ y para $0 < \varepsilon \leq 1$, $r \geq 0$ existe $C = C(s,r,\eta) > 0$ tal que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{s+r} \leq C\varepsilon^{-r}\|\varphi\|_s \tag{3.27}$$

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{s-r} \leq C\varepsilon^{r}\|\varphi\|_s \tag{3.28}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_\varepsilon = \varphi \text{ en } H^s. \tag{3.29}$$

Además, si $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en H^s entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\varphi_{\varepsilon,n} - \varphi_n\| = 0 \tag{3.30}$$

uniformemente en n.

Demostración: Véase [8] ❏

Proposición 3.5 *Sean $s > \frac{3}{2}$, $0 < \delta \leq \varepsilon < 1$ y $\vec{\phi}_\delta$, $\vec{\phi}_\varepsilon \in \mathbb{H}^\infty$ las aproximaciones de Bona-Smith para $\vec{\phi}$ dadas por la proposición 3.4. Si $\vec{u}_\delta$ y $\vec{u}_\varepsilon$ son las soluciones del problema (1) con* *datos iniciales* $\vec{\phi}_\delta$ *y* $\vec{\phi}_\varepsilon$ *respectivamente, entonces para* $\overline{T} \in [0,T]$, T *es el tiempo de vida del problema* (1), *existe* $C = C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right) > 0$ *tal que*

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_\delta(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_\delta - \vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) \tag{3.31}$$

donde $0 < \nu \leq s - 3/2$

Demostración: Observemos primero que si fuera necesario, $\vec{u}_\delta$ y $\vec{u}_\varepsilon$ se pueden extender a $\left[0,\overline{T}\right]$. En efecto, del teorema 3.3, se tiene

$$\begin{cases} \|\vec{u}_\delta(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \rho_\delta(t) \quad , \quad t \in [0,T_\delta] \\ \|\vec{u}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \rho_\varepsilon(t) \quad , \quad t \in [0,T_\varepsilon] \end{cases} \tag{3.32}$$

Si $T_\delta, T_\varepsilon < \overline{T}$, entonces de la definición de ρ_δ, ρ_ε y del teorema 2.12 se tiene

$$\begin{cases} \rho_\delta(t) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, T_\delta\right) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right), \\ \rho_\varepsilon(t) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, T_\varepsilon\right) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right). \end{cases} \tag{3.33}$$

Luego, $\vec{u}_\varepsilon$ y $\vec{u}_\delta$ pueden extenderse a $\left[0,\overline{T}\right]$ satisfaciendo a (3.32) en este intervalo.

Sea $\vec{w} = (w_1, w_2) = \vec{u}_\varepsilon - \vec{u}_\delta = (u_\varepsilon - u_\delta, v_\varepsilon - v_\delta)$. Entonces, $\vec{w}(0) = \vec{\phi}_\varepsilon - \vec{\phi}_\delta$ y se verifica

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x^3 w_1 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta)w_1 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_2\right] = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x^3 w_2 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[(3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta)w_2 - (u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta)w_1\right] = 0 \\ \vec{w}(0) = \vec{\phi}_\varepsilon - \vec{\phi}_\delta \end{cases} \tag{3.34}$$

Por lo tanto, de (3.34) y siguiendo el mismo procedimiento como para (3.15), obtenemos

$$\partial_t \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq C_s \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.35}$$

Luego, integrando desde 0 hasta t, obtenemos

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq \|\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{L}^2} + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|^2_{\mathbb{L}^2}\, d\tau.$$

Usando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, la desigualdad (3.28) con $r = s$ y el hecho que $\delta \leq \varepsilon$,

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \quad \leq \quad \|\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{L}^2} \exp(C_s t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|\vec{\phi}_\varepsilon - \vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \exp\left(C_s\overline{T}\right) \\
&\leq C\left(\left\|\vec{\phi}_\varepsilon - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\|\vec{\phi}_\delta - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right) \\
&\leq C\left(\varepsilon^{2s} + \delta^{2s}\right)\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\leq C\varepsilon^{2s}, \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

donde $C = C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right)$. Luego,

$$
\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{w}\,(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\varepsilon^s. \qquad (3.37)
$$

Ahora, como $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{H}^r$ con $r \geq 0$, haciendo

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta \\
f_2 &= u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_\delta + v_\delta \\
f_3 &= 3v_\varepsilon + 3v_\delta - u_\varepsilon - u_\delta
\end{aligned}
$$

en (3.34), usando integración por partes se tiene

$$
\begin{aligned}
I &= \partial_t \|D^s\vec{w}\,(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \partial_t \|D^s w_1\,(t)\|_{L^2}^2 + \partial_t \|D^s w_2\,(t)\|_{L^2}^2 \\
&= 2\left\langle D^s w_1, \partial_t D^s w_1\right\rangle_{L^2} + 2\left\langle D^s w_2, \partial_t D^s w_2\right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle D^s w_1, D^s \partial_t w_1\right\rangle_{L^2} + 2\left\langle D^s w_2, D^s \partial_t w_2\right\rangle_{L^2} \\
&= -2\left\langle D^s w_1, D^s \partial_x^3 w_1\right\rangle_{L^2} - \left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_1 w_1\right)\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_2 w_2\right)\right\rangle_{L^2} + \\
&\quad 2\left\langle D^s w_2, D^s \partial_x^3 w_2\right\rangle_{L^2} - \left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_3 w_2\right)\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_2 w_1\right)\right\rangle_{L^2} \\
&= -\left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_1 w_1\right)\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_2 w_2\right)\right\rangle_{L^2} + \\
&\quad -\left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_3 w_2\right)\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_2 w_1\right)\right\rangle_{L^2} \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Usando la desigualdad triangular se obtiene

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|D^s\vec{w}\,(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq\; & \left|\left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_1 w_1\right)\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w_1, D^s \partial_x\left(f_2 w_2\right)\right\rangle_{L^2}\right| + \\
& \left|\left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_3 w_2\right)\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w_2, D^s \partial_x\left(f_2 w_1\right)\right\rangle_{L^2}\right| \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

A continuación acotaremos a cada uno de los términos del segundo miembro de (3.39) en el orden de ocurrencia. En efecto, usando las propiedades del producto interno y la desigualdad triangular tenemos

$$I = |\langle D^s w_1, D^s \partial_x (f_1 w_1)\rangle_{L^2}| \leq |\langle D^s w_1, D^s (\partial_x f_1 \cdot w_1)\rangle_{L^2}| + |\langle D^s w_1, D^s (f_1 \cdot \partial_x w_1)\rangle_{L^2}| \quad (3.40)$$

De la definición de conmutador, la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la proposición 1.20 con $r \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[\cap [s-2, s-1[$ para estimar el conmutador, la desigualdad $\|D^s f\|_t \leq \|f\|_{s+t}$ e inmersión de Sobolev, tenemos para el primer sumando de (3.40).

$$\begin{aligned}
I_1 &= |\langle D^s w_1, D^s (\partial_x f_1 \cdot w_1)\rangle_{L^2}| \\
&\leq |\langle D^s w_1, [D^s, \partial_x f_1] w_1\rangle_{L^2}| + |\langle D^s w_1, \partial_x f_1 \cdot D^s w_1\rangle_{L^2}| \\
&\leq \|D^s w_1\|_{L^2} \|[D^s, \partial_x f_1] w_1\|_{L^2} + \|D^s w_1\|_{L^2}^2 \|\partial_x f_1\|_{L^\infty} \\
&\leq C_s \|w_1\|_s \left(\|\partial_x f_1\|_s \|w_1\|_r + \|\partial_x f_1\|_{r+1} \|w_1\|_{s-1}\right) + C_s \|w_1\|_s^2 \|f_1\|_s \\
&\leq C_s \|w_1\|_s \left(\|f_1\|_{s+1} \|w_1\|_r + \|f_1\|_{r+2} \|w_1\|_{s-1}\right) + C_s \|w_1\|_s^2 \|f_1\|_s \\
&\leq C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \left(\|f_1\|_{s+1} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^r} + \|f_1\|_{r+2} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^{s-1}}\right) + C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 \|f_1\|_s \\
&= C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{s+1} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^r} + C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{r+2} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&\quad + C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 \|f_1\|_s \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

De (3.4) y (3.27) con $r = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{s+1} &= \|3u_\varepsilon + 3u_\delta - v_\varepsilon - v_\delta\|_{s+1} \leq 3\|u_\varepsilon\|_{s+1} + 3\|u_\delta\|_{s+1} + \|v_\varepsilon\|_{s+1} + \|v_\delta\|_{s+1} \\
&\leq 4\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\mathbb{H}^{s+1}} + 4\|\vec{u}_\delta\|_{\mathbb{H}^{s+1}} \\
&\leq C_s\left(\left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right)\left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^{s+1}} + C_s\left(\left\|\vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right)\left\|\vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^{s+1}} \\
&\leq C_s\left(\varepsilon^{-1} + \delta^{-1}\right) \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Interpolando $\mathbb{H}^r$ entre $\mathbb{L}^2$ y $\mathbb{H}^s$, (ver desigualdad 1.3) resulta

$$\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^r} \leq C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^{\frac{r}{s}} \|\vec{w}\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\frac{r}{s}}. \qquad (3.43)$$

Por lo tanto, de (3.37), (3.42) y (3.43), el primer sumando (3.41) resulta

$$\begin{aligned}
C_s \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{s+1} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^r} &\leq C_s\left(\varepsilon^{-1} + \delta^{-1}\right) \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^r} \\
&\leq C_s \varepsilon^{s-r-1} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^{1+\frac{r}{s}}.
\end{aligned}$$

Luego, usando la desigualdad (2.31) con $\alpha = 1 + \frac{r}{s}$, $\beta = s - r - 1$, $\eta = 1$ y $\nu = s - r - 1$ resulta que

$$C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{s+1} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^r} \leq C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s(s-r-1)}{s-r}} \right) = C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} \right). \tag{3.44}$$

También de (3.5) y (3.27) con r sustituido por $r + 2 - s$ sigue que

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{r+2} &\leq 4 \|\vec{u}_\varepsilon\|_{\mathbb{H}^{r+2}} + 4 \|\vec{u}_\delta\|_{\mathbb{H}^{r+2}} \\ &\leq C_s \left(\left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T} \right) \left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^{s+(r+2-s)}} + C_s \left(\left\|\vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T} \right) \left\|\vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^{s+(r+2-s)}} \\ &\leq C_s \left(\varepsilon^{s-2-r} + \delta^{s-2-r} \right) \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} \\ &\leq C_s \varepsilon^{s-2-r} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Interpolando $\mathbb{H}^{s-1}$ entre $\mathbb{L}^2$ y $\mathbb{H}^s$, (se deduce de la desigualdad 1.3) resulta

$$\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^{\frac{s-1}{s}} \|\vec{w}\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\frac{s-1}{s}}. \tag{3.46}$$

Luego, de (3.37), (3.45), y (3.46) se tiene

$$C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{r+2} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C_s \varepsilon^{(s-2-r)+1} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^{1+\frac{s-1}{s}},$$

y usando la desigualdad 2.31 con $\alpha = 1 + \dfrac{s-1}{s}$, $\beta = (s-2-r)+1$ y $\eta = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} \|f_1\|_{r+2} \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &\leq C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{2s[(s-2-r)+1]} \right) \\ &= C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{2s\nu} \right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde y $\nu = s - r - 1$. Así, en (3.41), de (3.44), (3.47) y el hecho que $\varepsilon < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \varepsilon^{2s\nu} \right) \\ &\leq C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} \right). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Para el segundo sumando de (3.40), de la definición de conmutador, desigualdad de Cauchy-Schwartz, integración por partes, la proposición 1.20 con $r = s - 1$ e inmersión de Sobolev, se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \langle D^s w_1, D^s (f_1 \cdot \partial_x w_1) \rangle_{L^2} \right| \\ &\leq \left| \langle D^s w_1, [D^s, f_1] \, \partial_x w_1 \rangle_{L^2} \right| + \left| \langle D^s w_1, f_1 D^s \partial_x w_1 \rangle_{L^2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|\langle D^s w_1, [D^s, f_1]\, \partial_x w_1\rangle_{L^2}\right| + \frac{1}{2}\left|\left\langle (D^s w_1)^2, \partial_x f_1\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \|D^s w_1\|_{L^2} \|[D^s, f_1]\, \partial_x w_1\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|D^s w_1\|_{L^2}^2 \|\partial_x f_1\|_{L^\infty} \\
&\leq \|w_1\|_s \|[D^s, f_1]\, \partial_x w_1\|_{L^2} + C_s \|w_1\|_s^2 \|f_1\|_s \\
&\leq C_s \|w_1\|_s \left(\|f_1\|_s \|\partial_x w_1\|_{s-1} + \|f_1\|_s \|\partial_x w_1\|_{s-1}\right) + C_s \|w_1\|_s^2 \|f_1\|_s \\
&\leq C_s \|w_1\|_s^2 \|f_1\|_s \\
&\leq C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 \left(4\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + 4\|\vec{u}_\delta\|_{\mathbb{H}^s}\right) \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (3.32) y (3.33) resulta que

$$I_2 \leq C_s \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2. \qquad (3.50)$$

Por lo tanto, de (3.48) y (3.50) en (3.40) obtenemos

$$I \leq C_s \left(\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}}\right). \qquad (3.51)$$

Los términos restantes del segundo miembro de (3.39) se estiman como en en la deducción de (3.51), por lo tanto:

$$\partial_t \|D^s \vec{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C_s \left(\|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}}\right). \qquad (3.52)$$

Luego, integrando desde 0 hasta t,

$$\begin{aligned}
\|D^s \vec{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \|D^s \vec{w}(0)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + C_s \int_0^t \left(\|\vec{w}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}}\right) d\tau \\
&\leq \|\vec{w}(0)\|_{\mathbb{H}^s}^2 + C_s\, \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}^2\, d\tau. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Así, puesto que

$$\|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 \leq \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|D^s \vec{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 &\leq C_s\, \varepsilon^s + \|\vec{w}(0)\|_{\mathbb{H}^s}^2 + C_s\, \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}^2\, d\tau \\
&\leq C_s\, \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_\varepsilon - \vec{\phi}_\delta\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}^2\, d\tau
\end{aligned}$$

donde se ha usado (3.37) y (3.53) en la penúltima desigualdad. Luego, por la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, sigue que

$$\|\vec{u}_\delta(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{H}^s}^2 \leq \left(C_s\, \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \|\phi_\varepsilon - \phi_\delta\|_{\mathbb{H}^s}^2\right) e^{\overline{T}}$$

$$\leq \quad C_s \left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\phi_\varepsilon - \phi_\delta\|_{\mathbb{H}^s} \right)^2 e^{\overline{T}}.$$

extrayendo la raíz cuadrada y tomando el supremo en $\left[0, \overline{T}\right]$ se obtiene (3.31). ❏

Es preciso observar que de la proposición 3.5 se concluye que $\{\vec{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy en $C\left(\left[0, \overline{T}\right] : \mathbb{H}^s\right)$, de ahí que existe $\vec{v} \in C\left(\left[0, \overline{T}\right] : \mathbb{H}^s\right)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \vec{u}_\varepsilon = \vec{v} \quad \text{en } C\left(\left[0, \overline{T}\right] : \mathbb{H}^s\right) \tag{3.54}$$

A continuación probaremos que $\vec{v}$ satisface el problema (3) y por lo tanto $\vec{v} = \vec{u}$.

Proposición 3.6 *Sea $0 < \varepsilon < 1$ fijo y sean $\vec{u}_\varepsilon$ y $\vec{u}$ las soluciones del problema (3) en $\left[0, \overline{T}\right]$ con datos iniciales $\vec{\phi}_\varepsilon$ y $\vec{\phi}$, respectivamente, como en la proposición 3.5. Entonces $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \vec{u}_\varepsilon = \vec{u}$ en $C\left(\left[0, \overline{T}\right] : \mathbb{H}^s\right)$.*

Demostración: Por la observación anterior, es suficiente que $\vec{v}$ satisfaga la ecuación integral asociada con el problema (3) en $\mathbb{H}^{s-2}$. En efecto, como $\vec{u}_\varepsilon$ es solución de (3) con $\vec{u}_\varepsilon(0) = \vec{\phi}_\varepsilon$ tenemos que $\vec{v}(0) = \vec{\phi}$ para $t \in \left[0, \overline{T}\right]$ y

$$\vec{u}_\varepsilon(t) = W_0(t)\,\vec{\phi}_\varepsilon - \int_0^t W_0(t-\tau)\,\vec{G}\left(\vec{u}_\varepsilon(\tau)\right) d\tau \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-1}, \tag{3.55}$$

donde

$$\vec{G}\left(\vec{u}_\varepsilon(\tau)\right) = \left(3u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon - \partial_x\left(u_\varepsilon v_\varepsilon\right) - v_\varepsilon\partial_x v_\varepsilon, 3v_\varepsilon\partial_x v_\varepsilon - \partial_x\left(u_\varepsilon v_\varepsilon\right) - u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon\right)$$

Definiendo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y

$$\vec{G}\left(\vec{v}(\tau)\right) = \left(3v_1\partial_x v_1 - \partial_x\left(v_1 v_2\right) - v\partial_x v, 3v_2\partial_x v_2 - \partial_x\left(v_1 v_2\right) - v_1\partial_x v_1\right)$$

se tienen los siguientes hechos :

a) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} W_0(t)\,\vec{\phi}_\varepsilon = W_0(t)\,\vec{\phi}$ pues $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \vec{\phi}_\varepsilon = \vec{\phi}$ y $W_0(t) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{s-2}\right)$.

b)
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} W_0(t-\tau)\,\vec{G}\left(\vec{u}_\varepsilon(\tau)\right) = W_0(t-\tau)\,\partial_x\vec{G}\left(\vec{u}(\tau)\right) \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-2} \tag{3.56}$$

para $\tau \in [0, t]$, pues $W_0(t-\tau) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{s-1}\right)$.

c) $\left\|W_0(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\varepsilon(\tau))\right\|_{\mathbb{H}^{s-2}} \leq g(\tau)$, para $g \in L^1([0,t]:\mathbb{R})$

En efecto,

$$\begin{aligned}
E &= \left\|W_0(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\varepsilon(\tau))\right\|^2_{\mathbb{H}^{s-2}} \leq \left\|\vec{G}(\vec{u}_\varepsilon(\tau))\right\|^2_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&= \|3u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon - \partial_x(u_\varepsilon v_\varepsilon) - v_\varepsilon\partial_x v_\varepsilon\|^2_{\mathbf{s-1}} + \|3v_\varepsilon\partial_x v_\varepsilon - \partial_x(u_\varepsilon v_\varepsilon) - u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon\|^2_{s-1} \\
&\leq C_s\left(\|u_\varepsilon\|^2_{\mathbf{s}} + \|u_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathbf{s}} + \|v_\varepsilon\|^2_{\mathbf{s}}\right)^2 + C_s\left(\|v_\varepsilon\|^2_{\mathbf{s}} + \|u_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathbf{s}} + \|u_\varepsilon\|^2_{\mathbf{s}}\right)^2 \\
&\leq C_s\left(\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{\mathbb{H}^s}\right)^2 \leq C_s
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad utilizamos 3.32 y 3.33.

Por lo tanto, de a), b), c) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue sigue que

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \vec{u}_\varepsilon(t) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(W_0(t)\vec{\phi}_\varepsilon - \int_0^t W_0(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}_\varepsilon(\tau))\,d\tau\right) \\
&= W_0(t)\vec{\phi} - \int_0^t W_0(t-\tau)\vec{G}(\vec{u}(\tau))\,d\tau \quad \text{en } \mathbb{H}^{s-2}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\vec{v}$ satisface el problema (3), y por la unicidad probada en el teorema 3.3 concluimos que $\vec{v} = \vec{u}$. ❑

Proposición 3.7 *Sean* $\varepsilon > 0$, $s > \frac{3}{2}$ *y* $\lim_{n\to\infty}\vec{\phi}_n = \vec{\phi}$ *en* $\mathbb{H}^s$. *Entonces, dado* $\overline{T} \in]0,T[$ *existe* $N_0 = N_0(\overline{T})$ *tal que las soluciones* $\vec{u}_{\varepsilon,n}$ *y* $\vec{u}_\varepsilon$ *del problema* (3) *en* $[0,\overline{T}]$ *con datos iniciales* $\vec{\phi}_{\varepsilon,n}$ *y* $\vec{\phi}_\varepsilon$ *respectivamente, están definidas en* $[0,\overline{T}]$ *si* $n \geq N_0$. *Además, cada vez que* $n \geq N_0$ *se cumple que*

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}]}\|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n} - \vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) \tag{3.57}$$

Demostración: Como en la prueba de la proposición 3.5, se puede demostrar que $\vec{u}_\varepsilon$ puede ser definida en $[0,\overline{T}]$ y satisfacer (3.32) y (3.33). Demostraremos que lo mismo sucede con $\vec{u}_{\varepsilon,n}$. Para esto consideremos $\zeta = \zeta\left(\overline{T}, \left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) > 0$ tal que

$$\zeta + \left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s} = \frac{T\left\|\vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s}}{\overline{T}}. \tag{3.58}$$

Como

$$\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n} - \vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s} = \left\|\left(\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right)_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, \tag{3.59}$$

por (3.27) y (3.28) con $r=0$, existe $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que

$$\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n} - \vec{\phi}_{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{H}^s} < \zeta \tag{3.60}$$

siempre que $n \geq N_0$. De modo que, de la definición de $\rho_{\varepsilon,n}$, la desigualdad (3.60) y el teorema 3.3, para $n \geq N_0$ tenemos

$$\left[\rho_{\varepsilon,n}(t)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n}\right\|_{\mathbb{H}^s}}{1-2C_s t\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n}\right\|_{\mathbb{H}^s}} \leq \frac{\zeta+\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{H}^s}}{1-C_s t\left(\zeta+\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right)} \leq \frac{\zeta+\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}}{1-C_s t\zeta+\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}} = \rho_{\overline{T}}(t) \tag{3.61}$$

para $t \in \left[0,\overline{T}\right]$, pues de 3.58

$$C_s t\left(\zeta + \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) \leq C_s\overline{T}\left(\zeta + \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) = C_s T\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} < 1$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la elección de T en el teorema 3.3. Entonces de (3.61) para $n \geq N_0\left(\overline{T}\right)$ tenemos

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \rho_{\varepsilon,n}(t) \leq C\left(\left\|\vec{\phi}_{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right).$$

Luego, del teorema 3.3, si $n \geq N_0\left(\overline{T}\right)$ entonces $\vec{u}_{\varepsilon,n}$ puede ser definida en $\left[0,\overline{T}\right]$ satisfaciendo

$$\left\|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 \leq \rho_{\varepsilon,n}(t), \quad t \in \left[0,\overline{T}\right]. \tag{3.62}$$

Para verificar (3.57), consideremos $\vec{w} = (w_1, w_2) = \vec{u}_{\varepsilon} - \vec{u}_{\varepsilon,n} = (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}, v_\varepsilon - v_{\varepsilon,n})$ y $\vec{\phi}_{\varepsilon} - \vec{\phi}_{\varepsilon,n} = (\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon,n}, \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,n})$. Entonces como en las relaciones (3.34) y (3.35) se tiene

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x^3 w_1 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[\left(3u_\varepsilon + 3u_{\varepsilon,n} - v_\varepsilon - v_{\varepsilon,n}\right)w_1 - \left(u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_{\varepsilon,n} + v_{\varepsilon,n}\right)w_2\right] = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x^3 w_2 + \dfrac{1}{2}\partial_x\left[\left(3v_\varepsilon + 3v_{\varepsilon,n} - u_\varepsilon - u_{\varepsilon,n}\right)w_2 - \left(u_\varepsilon + v_\varepsilon + u_{\varepsilon,n} + v_{\varepsilon,n}\right)w_1\right] = 0 \\ \vec{w}(0) = \vec{\phi}_{\varepsilon} - \vec{\phi}_{\varepsilon,n} \end{cases} \tag{3.63}$$

y

$$\partial_t\left\|\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C_s\left\|\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

donde la desigualdad es necesario usar (3.62). Integrando desde 0 hasta t y luego aplicando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, obtenemos

$$\left\|\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_s\left\|\vec{w}(0)\right\|_{\mathbb{L}^2}, \quad t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

por lo que

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_\varepsilon - \vec{u}_{\varepsilon,n}\|_{\mathbb{L}^2} = \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_s \|\vec{w}(0)\|_{\mathbb{L}^2} = C_s \|\phi_{\varepsilon,n} - \phi_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.64}$$

Además, como en la deducción de (3.52), se tiene

$$\partial_t \|D^s\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq C_s \left(\|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} \right).$$

Luego, integrando desde 0 hasta t

$$\|D^s\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq \|D^s\vec{w}(0)\|^2_{\mathbb{L}^2} + C_s\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|^2_{\mathbb{H}^s} d\tau$$

Así,

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} &\leq \|\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} + \|D^s\vec{w}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq C_s\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n} - \vec{\phi}_\varepsilon\right\|^2_{\mathbb{H}^s} + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|^2_{\mathbb{H}^s} d\tau \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, lema 2.11, resulta

$$\|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq C_s \left(\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_{\varepsilon,n} - \vec{\phi}_\varepsilon\right\|_{\mathbb{H}^s} \right)^2, \quad t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

y al extraer la raíz cuadrada y tomar el supremo en $\left[0,\overline{T}\right]$, obtenemos 3.57. ❑

Con los resultados anteriores estamos listos para probar la dependencia continua. Para esto consideramos $\vec{\phi}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{\phi}_\varepsilon$ las aproximaciones de Bona-Smith asociados a $\vec{\phi}_\varepsilon$ y $\vec{\phi}$, respectivamente, y las soluciones $\vec{u}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{u}_\varepsilon$ del problema (3) con datos iniciales $\vec{\phi}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{\phi}_\varepsilon$ respectivamente.

Teorema 3.8 *Sean $\vec{\phi} \in \mathbb{H}^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $\vec{u} \in C([0,T] : \mathbb{H}^s)$ la solución del problema de valor inicial (3) que satisface 3.4. Si $\left\{\vec{\phi}_n\right\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{H}^s$ convergente a $\vec{\phi}$ en $\mathbb{H}^s$ y $\{\vec{u}_n\}_{n\geq 1}$es una sucesión en $C([0,T_n] : \mathbb{H}^s)$ de soluciones de (3) con $\vec{u}_n(0) = \vec{\phi}_n$. Entonces, para todo $\overline{T} \in]0,T[$ existe $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que para $n \geq N_0$, $\vec{u}_n$ está definida en $\left[0,\overline{T}\right]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} = 0 \tag{3.65}$$

Demostración: Como los estimados para $\|\vec{u}_n(t)\|_{\mathbb{H}^s}$ son los mismos que para $\|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s}$, la existencia de $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que $n \geq N_0$ implica que $\vec{u}_n$ está definida en $\left[0,\overline{T}\right]$ se prueba como en el teorema 3.5. Para $\varepsilon \in]0,1[$, tenemos como en (3.31),

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_{\delta,n}(t) - \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_s \left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_{\delta,n} - \vec{\phi}_{\varepsilon,n}\right\|_{\mathbb{H}^s} \right)$$

en donde $0 \leq \nu < 3/2$ y $C = C\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}, s, \overline{T}\right)$. Luego, si $\delta \to 0^+$, obtenemos

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_{\varepsilon,n}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right).$$

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_{\varepsilon,n} = \varphi_n$ en $\mathbb{H}^s$ uniformemente en n, entonces

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \longrightarrow 0, \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+ \tag{3.66}$$

uniformemente en n.

Consideremos ahora, para $n \geq N_0$,

$$\|\vec{u}_n(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{H}^s} + \|\vec{u}_\varepsilon(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Tamando supremo en $\left[0, \overline{T}\right]$ tenemos de (3.57) y (3.59)

$$\begin{aligned} \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \quad \leq \quad & \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbb{H}^s} + C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + C\left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}\right) \\ & + \sup_{[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_\varepsilon(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s}. \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \to 0^+$, de (3.66) y de la proposición 3.6 resulta

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}]} \|\vec{u}_n(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C_s\left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s},$$

y cuando $n \to \infty$ obtenemos lo que queríamos demostrar. ❏

Bibliografía

[1] E. Bisognin, V. Bisognin, and G. M. Menzala, *Asymptotic Behavior in Time of the Solutions of a Coupled System of KdV Equations*, Funkcialaj Ekvacioj, Serio Internacia **40** (1997), 353–370.

[2] J. L. Bona and H. Chen, *Solitary waves in nonlinear dispersive systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **2** (2002), 313–378.

[3] J. L. Bona, M. Chen, and J-C Saut, *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media I: Derivation and Linear Theory*, J. Nonlinear Sci. **12** (2002), 283–318.

[4] ———, *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media II: Derivation and Linear Theory*, J. Nonlinear Sci. **17** (2004), 925–952.

[5] J. L. Bona, T. Colin, and D. Lannes, *Long Wave Approximations for Water Waves*, Arch. Rational Mech. Anal. **178** (2005), 373–410.

[6] J. L. Bona, Z. Crujić, and H. Kalisch, *A KdV- Type Boussinesq System: From the energy level to Analytic Spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **26** (2010), 1121 – 1139.

[7] J. L. Bona, G. Ponce, J. C. Saut, and M. M. Tom, *A model Sytem for Strong Interaction Between Internal Solitary Waves*, Comm. Math. Phys. **143** (1992), 287–313.

[8] J. L. Bona and R. Smith, *The Initial-Value Problem for the Korteweg-De Vries Equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser A **278** (1975), 555–601.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1 ed., Universitext, Springer Science+Business Media, LLC, 2011.

[10] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, third ed., Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

[11] T. Cazenave and A. Haraux, *Introduction to Semilinear Evolutions Equations*, Oxford: Clarendon Press, 1998.

[12] J. Diestel and Jr. J.J. Uhl, *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1977.

[13] N. Dinculeanu, *Integration on Locally Compact Spaces*, Noordhoff International Publishing Leyden, 1974.

[14] K-J Engel and R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Universitext, Springer Science+Business Media, LLC. 2006.

[15] M. Panthee F. Linares, *On the Cauchy problem for a coupled system of KdV equations*, Communications on Pure and Applied Analysis **3** (2004), 417–431.

[16] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Aplications*, 2 ed., A Wiley-Interscience Publication Jhon Wiley & Sons, Inc., 1999.

[17] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control.A Lyapunov-Based Approach*, Princeton University Press, 2008.

[18] D. D. Haroske and H. Triebel, *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, European Mathematical Society, 2008.

[19] R. J. Iório Jr., *On the Cauchy Problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. PDE **11** (1986), 1031–1081.

[20] R. J. Iório Jr. and V. de Magalhães Iorio, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, University Press, Cambridge, 2001.

[21] R. J. Iório Jr. and W. L. V. Nunes, *Introdução à equações de evolução não lineares*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, 1991.

[22] T. Kato, *On the Korteweg-de Vries equation*, Manuscripta Math. **28** (1975), 89–99.

[23] ———, *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lecture Notes in Math. **448** (1975), 25–70.

[24] ———, *On the Cauchy problem for the (Generalized) KdV equations*, Advances in Math. Suppl. Stud. **8** (1983), 93–128.

[25] T. Kato and H. Fujita, *On the non-stationary Navier-Stokes system*, Red. Sem. Mat. Uni. Padova **32** (1962), 243–260.

[26] T. Kato and G. Ponce, *Commutator stimates and Euler and Navier - Stokes equation*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 891–907.

[27] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. Journal **71** (1993), 1–21.

[28] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contracción Principle*, Communications on Pure and Applied Mathematics **46** (1993), 527–620.

[29] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3 ed., Prentice Hall, 2002.

[30] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive equations*, Universitext, Springer, New York, 2009.

[31] A. Mendoza, *Estudio local del problema de valor inicial asociado con la ecuación de Korteweg-de Vries*, Tesis presentada para optar el Grado de Magíster en Matemáticas, PUCP, 2003.

[32] J. Mikusinski, *The Bochner Integral*, Academic Press, New York, 1978.

[33] L. Nirengber, *On elliptic partial differential equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 3e série **13** (1959), 115–162.

[34] W. V. L. Nunes, *O problema de Cauchy global para equações dispersivas com coeficientes dependentes do tempo*, Tese apresentada para obtenção do Título de Doutor em Ciências, INPA, Rio de Janeiro, 1991.

[35] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[36] R. Racke, *Lectures on Nnonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems*, Aspects of Mathematics E19, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[37] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Reverté S.A., 1979.

[38] J. C. Saut and R. Teman, *Remarks on the Korteweg- de Vries equation*, Israel J. of Math. **24** (1976), 78–87.

[39] J. Montealegre Scott, *Ecuaciones de evolución dipersivas*, Informe de Proyecto. Semestre de Estudio e Investigación, 2007 - II.

[40] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, 2 ed., Springer Science Business Media, LLC 1996, 2011.

[41] M. A. Walkley, *A numerical Method for Extended Boussinesq Shallow - Water Wave Equations*, The University of Leeds, School of Computer Studies (1999).