

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

DESARROLLO DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIO DE
INVERSIÓN, USANDO EL CVaR COMO MEDIDA DE RIESGO Y
EVALUACIÓN DEL IMPACTO DE LOS LÍMITES DE INVERSIÓN, DURANTE
EL PERIODO 2011-2016

Tesis para obtener el Título Profesional de Ingeniero Industrial.

Paul Joaquín Solís Palomino

ASESOR: Mag. Oscar Miranda Castillo

Lima, Febrero 2019

RESUMEN

La presente investigación tiene como finalidad evaluar el impacto de los límites de inversión en el proceso de optimización de un portafolio de inversión, en este caso el fondo 3 de las AFP, el cual es el fondo más riesgoso de los cuatro fondos que existen en la actualidad y está compuesto principalmente de activos de renta variable como las acciones. Para ello se divide el portafolio administrado por clases de activos, Renta Variable Local (RVL) y Renta Variable del Exterior (RVE) y se subdivide la clase de activo Renta Variable del Exterior por países como EEUU, Europa, Latinoamérica (excluyendo a Perú), China y Japón. Seguidamente, se seleccionan como indicadores de referencia (benchmarks) para las diversas subclases de activos por países a los índices MSCI de cada país, por ejemplo, para RVL se seleccionó al índice MSCI All Perú Capped, que está compuesto de las diez acciones locales más representativas, de manera similar se realiza con los otros países donde invierten las AFP. Asimismo, se emplea distintas medidas de riesgo financiero para el análisis (distintas a la volatilidad), tales como el Value at Risk (VaR) y el Conditional Value at Risk (CVaR). Se realiza una comparación de las dos medidas de riesgo, de manera que se use la medida coherente de riesgo, y que cumpla los principios de convexidad y subaditividad, de tal forma que se pueda encontrar un valor de riesgo óptimo en el proceso de optimización del portafolio. Posteriormente se analiza el impacto de los límites regulatorios para los fondos de pensiones, como el límite de inversión en el exterior y se compara los pesos óptimos y las fronteras eficientes obtenidas del modelo CVaR (con y sin restricciones) y del modelo de Media – Varianza de Markowitz (con y sin restricciones).

DEDICATORIA

Dedico esta investigación a mis padres por permitirme tener una buena educación, y ser esa fuerza de apoyo en los momentos malos y buenos, y por aconsejarme en cada paso que deseo dar.

A mi hermano Diego, por guiarme en cada paso que doy y aprender de él.

A mi hermana “Mila” por permitirme cuidarla y madurar a su lado, y por ser la alegría del hogar.



CONTENIDO

RESUMEN	ii
ÍNDICE DE TABLA	vi
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Modelos de programación cuadrática.....	7
2.2. Teoría de Portafolio.....	9
2.2.2. Medida del rendimiento esperado de un activo y portafolio	10
2.2.3. Medida del riesgo de un activo y portafolio.....	13
2.3. Value at Risk (VaR).....	16
2.3.1. Local Valuation – VaR Delta Normal para acciones y bonos.....	18
2.3.2. Método Full Valuation.....	21
2.4. Medida Coherente de Riesgo	24
2.5. Conditional Value at Risk (CVaR).....	25
Capítulo 3. OBJETIVO E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN	27
3.1. Objetivo de la Investigación	27
3.2. Hipótesis de la Investigación	27
3.3. Problemática de la Investigación	27
Capítulo 4. MARCO METODOLÓGICO	29
4.1. Modelo de Media – Varianza de Markowitz.....	29
4.2. Modelo de Optimización <i>Conditional Value at Risk</i> (CVaR)	30
Capítulo 5. ANÁLISIS PROPUESTO	34
5.1. Descripción de la data.....	34
5.1.1. Tratamiento de datos.....	35
5.2. Marco Regulatorio de las AFP's	41
5.3. Elección de la Medida de Riesgo Coherente	43
5.3.1. Subaditividad	43
5.3.2. Convexidad.....	45
5.3.2.1. Análisis para portafolio de dos acciones	45
5.3.2.2. Análisis para portafolio de tres acciones.....	46

5.4. Desarrollo de los modelos de optimización	48
5.4.1. Modelo de Media Varianza – sin restricción de límites de inversión.....	49
5.4.2. Modelo de Media Varianza – con restricción de límites de inversión	50
5.4.3. Modelo CVaR – sin restricción de límites de inversión	51
5.4.4. Modelo CVaR – con restricción de límites de inversión	51
5.5. Portafolios óptimos y pesos óptimos	52
5.5.1. Modelo de Media – Varianza sin límites de inversión	52
5.5.2. Modelo CVaR sin límites de inversión	57
5.5.3. Modelo de Media – Varianza con límites de inversión	61
5.5.4. Modelo CVaR con límites de inversión	65
5.6. Comparación de fronteras eficientes e impacto de los límites de inversión	69
5.6.1. Fronteras eficientes sin restricción de límites de inversión	69
5.6.2. Fronteras eficientes con restricción de límites de inversión.....	70
Capítulo 6. RESULTADOS.....	73
6.1. Impacto del límite de inversión en el exterior	73
Capítulo 7. CONCLUSIONES	75
BIBLIOGRAFÍA	77
ANEXOS	85

ÍNDICE DE TABLA

Tabla 1 - Cantidad de Afiliados por cada AFP a marzo del 2017.....	1
Tabla 2 – Monto invertido en exterior del Fondo 3 de las AFP.....	3
Tabla 3 - Montos invertidos en el exterior del Fondo 3 por las AFPs.....	4
Tabla 4 - Valor critico por nivel de confianza	19
Tabla 5 - Activos proxys seleccionados	34
Tabla 6 - Composición del índice MSCI All Peru Capped Index Net.....	35
Tabla 7 - Valores de percentiles y RIC.....	37
Tabla 8 - Estadística descriptiva de los rendimientos de los activos.....	39
Tabla 9 - Matriz de Varianzas y Covarianzas.....	39
Tabla 10 - Matriz de Correlaciones	40
Tabla 11 - Límites de inversión del Fondo 3	41
Tabla 12 - Límite de Inversión Fondo 3, julio 2016	42
Tabla 13 - Límite de Inversión Fondo 3, Agosto 2016	43
Tabla 14 - Composición del Portafolio BCP Dinámico a junio del 2008.....	44
Tabla 15 - Resultados VaR, CVaR del portafolio.....	44
Tabla 16 - Nombre de variable asociado a cada Índice.....	49
Tabla 17 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo Media – Varianza sin límites de inversión	56
Tabla 18 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo	56
Tabla 19 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo CVaR sin límites de inversión.....	60
Tabla 20 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo	60
Tabla 21 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo Media – Varianza con límites de inversión	64
Tabla 22 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo	64
Tabla 23 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo CVaR con límites de inversión.....	68
Tabla 24 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo	68
Tabla 25 - Rendimiento / riesgo diario y anual del modelo CVaR agregado al modelo de Media - Varianza	72
Tabla 26 - Rendimiento / riesgo diario y anual del modelo de Media – Varianza.	72
Tabla 27 – Comparativo rendimiento / riesgo anual del modelo de Media – Varianza.....	73
Tabla 28 – Comparativo rendimiento / riesgo anual del modelo CVaR.....	74

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Cantidad de Afiliados por cada AFP a marzo del 2017.....	1
Figura 2 - Monto invertido en exterior del Fondo 3 de las AFP	3
Figura 3 - Evolución del porcentaje invertido por el Fondo 3 de las AFPs en el exterior.5	
Figura 4 - Esquema de portafolios factibles.	15
Figura 5 - Portafolio Factibles / Eficiente de más de dos activos.	16
Figura 6 - Distribución de probabilidad de las perdidas en el valor del portafolio	17
Figura 7 - Métodos de cálculo del VaR	18
Figura 8 - Convexidad de las medidas de riesgo.....	32
Figura 9 - MSCI All Peru Capped Index Net - Evolución del nivel de precios.....	36
Figura 10 - MSCI USA Index Net - Evolución del nivel de precios	36
Figura 11 - Evolución de rendimientos MSCI All Peru Capped Index Net	37
Figura 12 - Convexidad VaR y CVaR de un portafolio de dos activos.	46
Figura 13 - VaR para Portafolio de tres activos.	47
Figura 14 - CVaR para Portafolio de tres activos.....	48
Figura 15 - Frontera eficiente: Modelo Media – Varianza sin restricciones de límite de inversión	53
Figura 16 - Mapeo de Pesos Portafolio Media – Varianza, sin límites de inversión	55
Figura 17 - Frontera eficiente: Modelo CVaR sin restricciones de límite de inversión..	57
Figura 18 - Mapeo de Pesos Portafolio CVaR – sin límites de inversión	59
Figura 19 - Frontera eficiente: Modelo Media – Varianza con restricciones de límite de inversión	61
Figura 20 - Mapeo de Pesos Portafolio Media - Varianza – con límites de inversión....	63
Figura 21 - Frontera eficiente: Modelo CVaR con restricciones de límite de inversión .	65
Figura 22 - Mapeo de Pesos Portafolio CVaR – con límites de inversión.....	67
Figura 23 - Comparativo de fronteras eficientes Media – Varianza / CVaR.....	70
Figura 24 - Comparativo de fronteras eficientes Media – Varianza / CVaR.....	71

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

Ante la crisis del sistema estatal de pensiones o como la mayoría lo conoce el Sistema Nacional de Pensiones (SNP), se creó en el Perú, en el año 1992 el Sistema Privado de Pensiones (SPP). “Esta reforma del sistema de pensiones tenía como objetivo reemplazar el sistema impuesto por el estado (SNP), el cual está basado en un sistema de reparto de un fondo único (las pensiones se financian con los aportes de los nuevos trabajadores o afiliados), por un sistema autofinanciado, el cual se basa en los aportes individuales de cada trabajador”, señaló Javier Pereda¹ (2007). Esta reforma, permitió que hoy en día, el Sistema Privado de Pensiones, posea la mayor cantidad de afiliados, repartidos entre las cuatro AFP’s que operan en el País (AFP Hábitat, AFP Integra, Prima AFP y Profuturo AFP), la tabla 1 y la figura 1 muestran la cantidad de afiliados por cada AFP a marzo del 2017, respecto al total del sistema de AFP (los datos fueron extraídos de la web de la SBS).

Tabla 1 - Cantidad de Afiliados por cada AFP a marzo del 2017.

Habitat	Integra	Prima	Profuturo	SISTEMA
1,073,482	2,004,132	1,471,282	1,808,129	6,357,025

Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

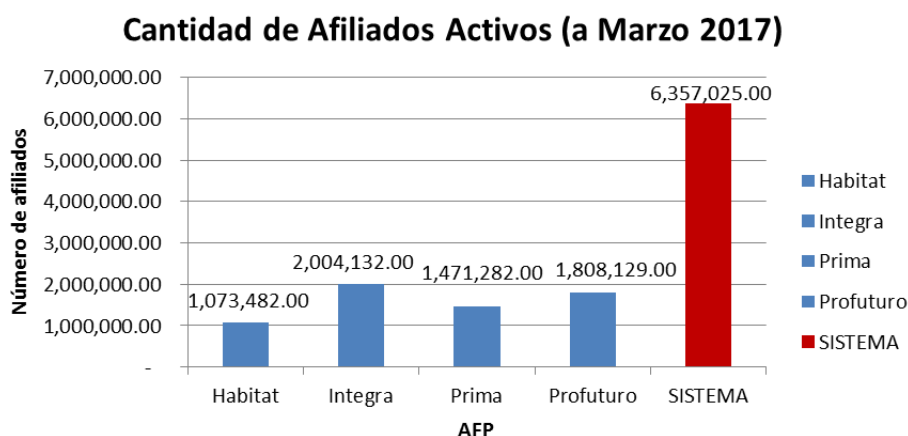


Figura 1 - Cantidad de Afiliados por cada AFP a marzo del 2017.

Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

¹ Working paper BCRP - Estimación de la Frontera Eficiente para las AFP en el Perú y el Impacto de los Límites de Inversión: 1995-2004

Es por ello, que debido a la gran cantidad de afiliados que posee el SPP, es vital tener un manejo óptimo de los fondos de las personas, ya que el dinero manejado permitirá garantizar una jubilación óptima para el afiliado o jubilado.

Rivas Llosa – Camargo (2002), define al SPP como “un régimen de capitalización individual, en el cual, cada afiliado posee una cuenta personal, denominada Cuenta Individual de Capitalización, la cual se incrementa a través de los aportes del afiliado y de la rentabilidad generada por las inversiones del fondo acumulado. Las AFP gestionan el fondo, invirtiendo los aportes realizados por los afiliados en los diversos instrumentos de inversión autorizados por la Ley, y tomando en cuenta la política de riesgo / rendimiento de cada fondo, además considerando los límites de inversión que las AFPs tienen para la gestión de inversión de cada fondo; con la finalidad de buscar un fondo que posea la máxima rentabilidad con el mínimo riesgo” (2002:19).

En el marco de manejar el fondo de pensiones de los afiliados, es necesario un organismo que supervise el comportamiento de los gestores de fondos, en este caso, este proceso de supervisión, control y fiscalización lo realiza la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS).

Como parte del manejo de los fondos de las AFP, el marco regulatorio impuesto por las AFPs resulta un factor importante en la gestión de los fondos, principalmente el impacto que tienen los límites de inversión, en especial el límite de inversión en el exterior. Como se describirá más adelante, las AFPs se rigen en el límite de inversión operativo en el exterior para su manejo e inversión en mercados externos. Este reglamento, limita diversificar el portafolio con activos que pueden pertenecer a mercados externos más desarrollados que el peruano, para el caso del Fondo 3 (que será el fondo de análisis de la presente investigación) la tabla 2 y la figura 2 muestran el monto invertido en el exterior de las cuatro AFPs que operan en el Perú, a noviembre del 2016.

Tabla 2 – Monto invertido en exterior del Fondo 3 de las AFP

AFP	Monto Invertido en el exterior	%
HABITAT	202,257	1.61%
INTEGRA	4,831,955	38.44%
PROFUTURO	3,500,476	27.85%
PRIMA	4,036,561	32.11%
TOTAL	12,571,248	100.00%

Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

Monto Invertido en el Exterior por AFP- Fondo 3

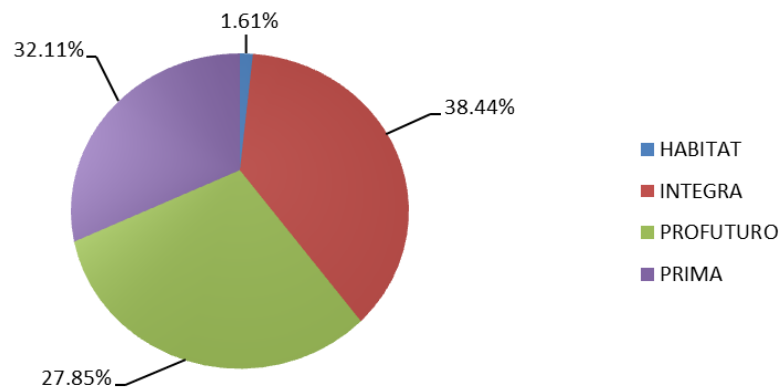


Figura 2 - Monto invertido en exterior del Fondo 3 de las AFP

De la figura 2, se puede indicar que a noviembre del 2016 la AFP que más movimiento tuvo, con respecto a montos invertidos en el exterior, fue AFP Integra, con un porcentaje de 38.44% respecto a las demás, según la Superintendencia de Banca y Seguro y AFP (SBS). Esto sin embargo ha acotado el comportamiento de las AFPs, que tienen limitada su inversión en el exterior, desaprovechando algunos mercados desarrollados que tienen un buen comportamiento. La tabla 3, nos muestra un comportamiento histórico (de enero 2015 a noviembre del 2016, datos mensuales) de los porcentajes invertidos en el exterior del Fondo 3, y el porcentaje invertido en el exterior por el sistema (considerando los tres fondos).

Tabla 3 - Montos invertidos en el exterior del Fondo 3 por las AFPs.

Fecha	AFP Habitat	AFP Integra	Profuturo AFP	Prima AFP	TOTAL
01/01/2015	0.504%	39.448%	26.975%	36.142%	40.61%
01/02/2015	0.549%	42.078%	28.295%	39.046%	41.56%
01/03/2015	0.573%	41.072%	28.244%	38.419%	41.41%
01/04/2015	0.639%	43.513%	27.996%	39.907%	40.95%
01/05/2015	0.682%	44.103%	29.098%	38.450%	40.73%
01/06/2015	0.695%	42.488%	28.868%	39.497%	40.91%
01/07/2015	0.750%	41.049%	29.183%	40.137%	40.42%
01/08/2015	0.782%	38.786%	27.287%	38.541%	39.95%
01/09/2015	0.780%	37.389%	25.847%	36.885%	38.68%
01/10/2015	0.877%	39.954%	28.729%	39.099%	39.95%
01/11/2015	0.948%	41.806%	29.380%	38.940%	40.64%
01/12/2015	1.020%	40.242%	29.088%	38.863%	40.21%
01/01/2016	0.995%	40.979%	29.383%	38.154%	41.66%
01/02/2016	1.078%	39.158%	28.384%	38.699%	40.21%
01/03/2016	1.153%	39.033%	28.150%	38.044%	39.83%
01/04/2016	1.146%	36.274%	28.712%	36.602%	39.04%
01/05/2016	1.193%	38.086%	28.776%	38.940%	39.99%
01/06/2016	1.265%	36.690%	28.412%	36.188%	39.32%
01/07/2016	1.440%	37.262%	29.087%	37.796%	40.01%
01/08/2016	1.463%	38.993%	29.149%	36.460%	39.84%
01/09/2016	1.559%	39.580%	28.759%	35.443%	40.07%
01/10/2016	1.553%	38.230%	27.765%	35.090%	39.15%
01/11/2016	1.609%	38.437%	27.845%	32.109%	39.20%

De la tabla 3, cabe mencionar que la columna TOTAL, muestra el nivel histórico del porcentaje invertido en el exterior considerando los tres fondos de inversión. De los datos de la tabla 3, se puede notar que la evolución del porcentaje invertido por el fondo 3 de las AFPs en el exterior, ha tenido un comportamiento irregular, considerando también que AFP Hábitat tiene pocos años en el mercado y que además fue la AFP de inscripción obligatoria hasta el 2015, esto afectó de cierta manera, la evolución de los porcentajes invertidos por el fondo 3 de las AFPs en el exterior, esto se puede notar en la figura 3.

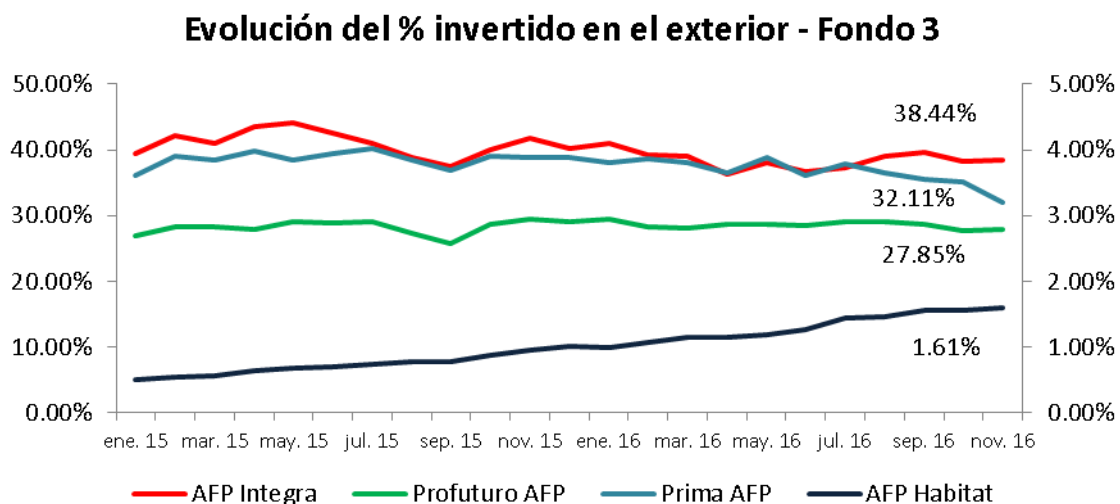


Figura 3 - Evolución del porcentaje invertido por el Fondo 3 de las AFPs en el exterior.

De lo descrito y mencionado, podemos indicar que el empleo de límites de inversión, en particular los límites del exterior, limita la gestión del portafolio de las AFPs.

La presente investigación tiene como finalidad evaluar el impacto de los límites de inversión en el proceso de optimización de un portafolio de inversión, en este caso el fondo 3 de las AFP, el cual es el fondo más riesgoso de los cuatro fondos que existen en la actualidad y está compuesto principalmente de activos de renta variable como las acciones. Para ello se dividirá el portafolio administrado por clases de activos, Renta Variable Local (RVL) y Renta Variable del Exterior (RVE) y se subdivide la clase de activo Renta Variable del Exterior por países como EEUU, Europa, Latinoamérica (excluyendo a Perú), China y Japón. Seguidamente, se seleccionarán como indicadores de referencia (benchmarks) para las diversas subclases de activos por países a los índices MSCI de cada país, por ejemplo para RVL se seleccionó al índice MSCI All Perú Capped, que está compuesto de las diez acciones locales más representativas, de manera similar se realizará con los otros países donde invierten las AFP. Asimismo, se empleará distintas medidas de riesgo financiero para el análisis (distintas a la volatilidad), tales como el Value at Risk (VaR) y el Conditional Value at

Risk (CVaR). Luego, se realizará una comparación de las dos medidas de riesgo, de manera que se use la medida coherente de riesgo, y que cumpla los principios de convexidad y subaditividad, de tal forma que se pueda encontrar un valor de riesgo óptimo en el proceso de optimización del portafolio. Posteriormente se analizará el impacto de los límites regulatorios para los fondos de pensiones, como el límite de inversión en el exterior y se comparará los pesos óptimos y las fronteras eficientes obtenidas del modelo CVaR (con y sin restricciones) y del modelo de Media – Varianza de Markowitz (con y sin restricciones).



Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se abordará la base teórica sobre la cual se desarrollarán los modelos de optimización. Dicho marco conceptual empieza desde definir el modelo matemático base para optimizar un portafolio de inversión (modelo de programación cuadrática), los parámetros y marco teórico sobre que parámetros se usan para medir un portafolio de inversión y las diferentes medidas de riesgo que se emplearán en el desarrollo de la presente investigación.

2.1. Modelos de programación cuadrática

Para definir el modelo de programación cuadrática, es necesario conocer el modelo de programación lineal. Según Schönherr (2002) define al modelo de programación lineal (PL) como el problema de minimización de una función lineal de n variables, sujeto a m restricciones de igualdad o desigualdad en las variables. Además, las variables deben caer dentro de límites pre especificadas. Generalmente, la formulación de un modelo de programación lineal puede ser escrito como

$$(PL) \text{ Minimizar } c^T x \quad (1)$$

$$\text{Sujeto a } Ax \leq = \geq b$$

$$l \leq x \leq u$$

Donde A es una matriz de $m \times n$, b es un m – vector, c un n – vector y l, u son n – vectores limitados (2002: 33-34).

Schönherr (2002) indica que se puede generalizar el modelo PL a un modelo de programación cuadrática, esto reemplazando en la ecuación (1) por la función cuadrática convexa.

$$c^T x + x^T D x,$$

Resultando en el modelo de programación cuadrática (QP) siguiente:

$$(QP) \text{ Minimizar } c^T x + x^T D x \quad (2)$$

$$\text{Sujeto a } Ax \leq b$$

$$l \leq x \leq u.$$

Donde D es una matriz $n \times n$ definida semi – positiva. Si $D=0$, obtendremos un modelo lineal como un caso especial del (QP).

Si un vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ existe y satisface todas las restricciones, el problema es llamado factible (*feasible*) y x^* es llamado solución factible, en otro caso el problema es llamado no factible (*infeasible*). Si la función objetivo $f(x) = c^T x + x^T D x$ está limitada desde abajo sobre el conjunto de soluciones factibles x^* , el problema es llamado “limitado” (*bounded*), en otro caso será llamado “no limitado” (*unbounded*). Si el problema posee ambas características: factible y limitado; la función objetivo asume un único valor mínimo para alguna solución óptima factible x^* . Resolver el modelo cuadrático significa ya sea encontrar una solución óptima x^* si existe o probar que no existe una solución factible o que no es un óptimo limitado Schönherr (2002: 33-34).

A continuación se detallará algunos métodos de solución de un problema de programación cuadrática, desarrollado por Hillier, Lieberman (2010), donde mencionan que para una Optimización no restringida de una variable, existen diversos métodos para su optimización, tales como el método de bisección, el cual es un procedimiento intuitivo y directo y el método de Newton.

Método de bisección

Según Hillier, Lieberman (2010), este procedimiento de búsqueda siempre se puede aplicar cuando la función $f(x)$ es cóncava, de tal manera que la segunda derivada sea negativa o cero para toda x . Si x^* denota la solución óptima, todo lo que se necesita es lo siguiente:

$$\frac{df(x)}{dx} > 0 \quad \text{si } x < x^*,$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{si } x = x^*,$$

$$\frac{df(x)}{dx} < 0 \quad \text{si } x > x^*.$$

Las condiciones mostradas, se cumplirán de manera automática si $f(x)$ es cóncava, y también se pueden cumplir, siempre y cuando la segunda derivada es positiva para algunos (no todos) los valores de x .

Método de Newton

Según Hillier, Lieberman (2010), “ya que el método de bisección es un procedimiento intuitivo y directo, pues tiene la desventaja de que converge de una manera lenta hacia una solución óptima. Se desarrolló el método de Newton, el cual la idea básica es aproximar $f(x)$ a la vecindad de la solución de prueba inicial mediante una función cuadrática y después maximizar (o minimizar) la función aproximada exactamente para obtener la nueva solución de prueba y así iniciar la siguiente iteración.”

2.2. Teoría de Portafolio

El concepto de teoría de portafolio, siempre está asociado al estudio realizado por Harry Markowitz (1952), en su estudio es preciso definir conceptos previos importantes y que son los más usados en la gestión de portafolio, tales como rendimiento y riesgo de un activo individual y de un portafolio (conjunto de activos).

Markowitz (1952) divide el proceso de selección de un portafolio en dos etapas, la primera etapa empieza con la observación y experiencia y termina con la creencia a cerca de un futuro desempeño de los instrumentos disponibles. La segunda etapa empieza con creencias relevantes a cerca de futuros desempeños y termina con la elección del portafolio.

Markowitz se enfoca más en el desarrollo de la segunda etapa, por lo que toma como supuesto que el inversionista desea maximizar su rendimiento, además considera que el inversionista tiene como deseable el retorno esperado y como no deseable a la varianza de los rendimientos.

2.2.1. Hipótesis del modelo de Markowitz

Markowitz plantea una serie de hipótesis que sirven de ayuda para el desarrollo de su modelo. Court y Tarradellas (2010), lo enuncian en su libro “Mercado de Capitales” de la siguiente manera:

- La rentabilidad de cualquier activo o portafolio es una variable aleatoria, cuya distribución de probabilidad para determinado periodo referencial es conocido por el inversionista. La media de dicha variable se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión.
- Es aceptable el uso de la dispersión como medida de riesgo, la cual es medida por la varianza o la desviación estándar de la variable aleatoria que describe la rentabilidad (para el caso de un activo o un portafolio de activos).
- No se considera los impuestos ni los costos de transacción, y si considera la perfecta divisibilidad de los títulos valores, además de no proporcionar ninguna herramienta para que el inversionista valore su actitud ante el riesgo y determine su función de utilidad.

Para el desarrollo de la teoría de portafolio, se necesitan conceptos elementales tales como rendimiento y riesgo expresados de forma matemática, que además servirá de ayuda a Markowitz en la formulación de su modelo de Media – Varianza (2010:131).

2.2.2. Medida del rendimiento esperado de un activo y portafolio

Para medir el rendimiento esperado de un activo es necesario conceptos estadísticos previos, los cuales se detallan a continuación.

Una distribución de probabilidad es una función que asigna la probabilidad de ocurrencia de todos los posibles resultados de una variable aleatoria. Dado la distribución de probabilidad, el valor esperado de una variable aleatoria es simplemente calculado como el peso promedio de los posibles resultados u “outcomes”.

En nuestro caso la variable aleatoria es la incerteza del retorno del activo i . Teniendo la distribución de probabilidad especifica de las posibles tasas de retornos, el valor esperado de la tasa de retorno del activo i es el peso promedio de los posibles resultados. Finalmente, en lugar de usar el término “Valor esperado de los retornos de un activo” simplemente usamos el término “retorno o rendimiento esperado”.

Matemáticamente, el retorno esperado del activo i puede ser expresado como

$$E(R_i) = p_1R_1 + p_2R_2 + \dots + p_NR_N \quad (3)$$

Donde,

R_n = La n^{th} tasa de retorno posible del activo i .

p_n = La probabilidad de alcanzar la tasa de retorno R_n para el activo i .

N = El número de posibles resultados para la tasa de retorno.

Luego es necesario medir el retorno de un portafolio para un solo periodo, Fabozzi, Markowitz (2011) lo calculan de la siguiente manera.

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_cR_c \quad (4)$$

Dónde:

R_p = Tasa de retorno del portafolio en el periodo seleccionado.

R_i = Tasa de retorno del activo i en el periodo seleccionado

w_i = Peso del activo i en el portafolio al inicio del periodo (el peso se calcula como el valor de mercado del activo i respecto al valor de mercado del portafolio total).

G = Número de activos en el portafolio

Adicionalmente, la ecuación (4) puede ser expresado así:

$$R_p = \sum_{i=1}^G w_i R_i \quad (5)$$

La ecuación (5) afirma que el retorno de un portafolio R_p de G activos es igual a la suma ponderada de todos activos individuales respecto a los pesos asignados a ellos.

El retorno del portafolio R_p es comúnmente llamado *holding period return (HPR)* o *ex post return* (2011: 49-50).

Una vez definido el retorno de un portafolio, es preciso definir el concepto de retorno o rendimiento esperado de un portafolio de activos riesgosos. La ecuación (5) muestra como calcular el retorno actual de un portafolio en un periodo de tiempo específico. En la gestión de portafolio, los inversionistas también quieren conocer el retorno esperado (o anticipado) de un portafolio de activos riesgosos. El retorno esperado de un portafolio es el peso promedio del retorno esperado de cada activo en el portafolio. El peso asignado al retorno esperado de cada activo es el porcentaje del valor de mercado del activo respecto al valor de mercado total del portafolio, esto es

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \dots + w_c E(R_c) \quad (6)$$

Donde, $E(x)$ es el valor esperado de una variable aleatoria, en nuestro caso $E(R_p)$ es llamado *retorno ex ante* o valor esperado del retorno del portafolio en un periodo específico de tiempo (2011: 51).

2.2.3. Medida del riesgo de un activo y portafolio

Inversionistas han usado una variedad de definiciones para describir el riesgo, sin embargo, Markowitz cuantificó el concepto del riesgo usando la medida estadística de la desviación estándar y la varianza.

Fabozzi, Markowitz (2011: 53 - 54) nos dicen que la varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión o variabilidad de los posibles resultados alrededor del valor esperado (media). En el caso del retorno de un activo, la varianza es la medida de dispersión de los posibles resultados de tasa de retornos alrededor del retorno esperado.

La ecuación para la varianza del retorno esperado del activo i , denotado como $V(R_i)$ es

$$V(R_i) = p_1[r_1 - E(R_i)]^2 + p_{21}[r_2 - E(R_i)]^2 + \dots + p_N[r_N - E(R_i)]^2 \quad (7)$$

El cual también puede ser denotado como:

$$V(R_i) = \sum_{i=1}^N p_n [r_n - E(R_i)]^2 \quad (8)$$

Dado que la varianza es en unidades al cuadrado, es conveniente usar la medida solo en unidades, por ello es común convertir la varianza a la desviación estándar, tomando la raíz cuadrada positiva

$$SD(R_i) = \sqrt{V(R_i)} \quad (9)$$

De manera similar, para medir el riesgo de un portafolio es preciso definir una propiedad de la varianza, la cual se denota a continuación

$$V(R_i) = E[(R_i - E[R_i])^2] \quad (10)$$

Aplicando dicha propiedad se tiene lo siguiente

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (11)$$

Donde σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los activos i y j , de la misma manera la expresión (11) se puede expresar de la siguiente manera, para un portafolio de n acciones.

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 V(R_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (12)$$

Una vez definido los estadísticos usados en la teoría de portafolio, Markowitz desarrolla el modelo de Media – Varianza, (modelo que será utilizado en el desarrollo de la presente investigación).

El modelo básico de Media – Varianza propuesto por Markowitz (1952) nos menciona que el inversionista puede optimizar su portafolio de inversión, maximizando su rendimiento sujeto a un nivel de riesgo determinado, o de manera similar, puede minimizar su riesgo, sujeto a un rendimiento dado.

Su formulación matemática se muestra a continuación:

Maximizando el nivel de rendimiento

$$\max E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (13)$$

$$s.t. \quad \sigma_{dado} = \sigma_T \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (15)$$

$$w_i \geq 0. \quad (16)$$

Minimizando el nivel de riesgo (volatilidad)

$$\min w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \quad (17)$$

$$s.t. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (19)$$

$$w_i \geq 0. \quad (20)$$

Como resultado del proceso de optimización, se obtienen los portafolios factibles de donde se puede extraer la frontera eficiente, la cual nos muestra todas las posibles combinaciones de rendimiento / riesgo que son óptimas. La figura 4 ilustra lo descrito.

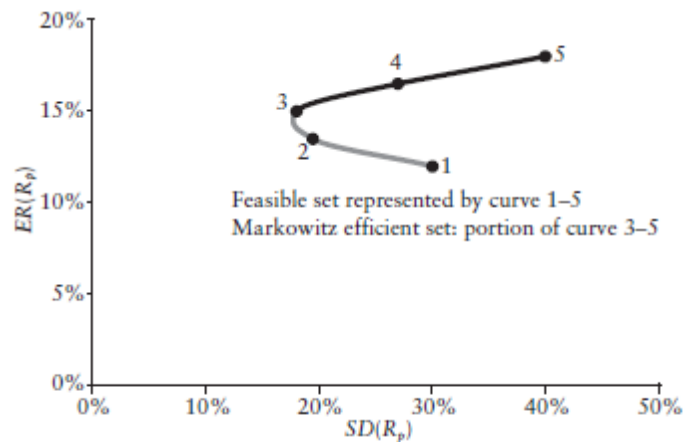


Figura 4 - Esquema de portafolios factibles.

Fuente: Fabozzi, Markowitz (2011). The theory and practice of investment management, (2011: 80)

De manera general para portafolio de varios activos, la frontera eficiente se representa de manera similar, la figura 5 ilustra los portafolios factibles ubicados a lo largo de la curva I-II-III, y los portafolio óptimos o eficientes, ubicados solo a lo largo de la curva II-III, de la figura 5 se puede inferir que el portafolio IV no es eficiente.

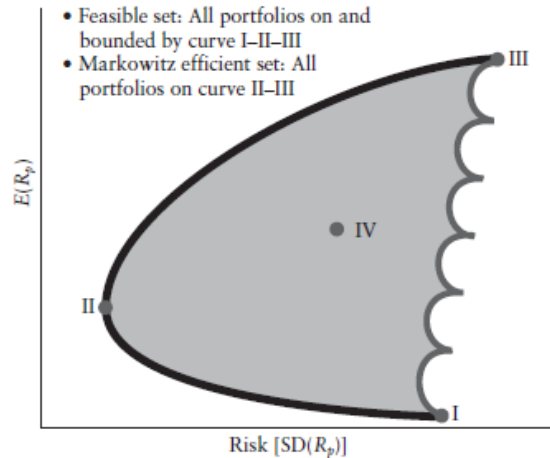


Figura 5 - Portafolio Factibles / Eficiente de más de dos activos.

Fuente: Fabozzi, Markowitz (2011). The theory and practice of investment management, (2011: 81)

2.3. Value at Risk (VaR)

En el desarrollo de cuantificar y medir el riesgo asociado, se definieron distintas medidas de riesgo, que han permitido medir y cuantificar el riesgo y las pérdidas asociadas a determinado portafolio manejado. Una de las medidas más aceptadas y usadas por los gestores de portafolios o fondos es el Value at Risk (VaR).

Jorion (2011) define al Value at Risk (VaR) como la medida de riesgo de las potenciales pérdidas, expresado en unidades monetarias o en porcentaje, su definición general menciona al VaR como “La máxima pérdida en un horizonte de tiempo, bajo una determinada probabilidad de ocurrencia, comúnmente denominada nivel de confianza”. Para entender mejor el enunciado, Hull, explica el concepto mencionado de la siguiente manera:

“Existe una certeza de X % de que no perderemos más que V unidades monetarias en un horizonte de tiempo T”.

De lo enunciado, la variable V es el VaR del portafolio, que es una función de dos parámetros: el horizonte de tiempo T y el nivel de confianza X%. Dicho de otra manera,

es el nivel de pérdida durante un periodo de tiempo, el cual estamos $X\%$ seguros que no será superado o excedido Hull (2015: 255).

VaR puede ser calculado ya sea desde una distribución de probabilidad de ganancias durante un horizonte T o como la distribución de probabilidad de pérdidas durante un horizonte T . (En el primer caso, las pérdidas serán ganancias negativas, y en el segundo caso ganancias serán pérdidas negativas).

La figura 6 grafica el cálculo del VaR para la distribución de probabilidad de las pérdidas en el valor del portafolio; a un nivel de confianza de $X\%$ el valor del VaR es V .

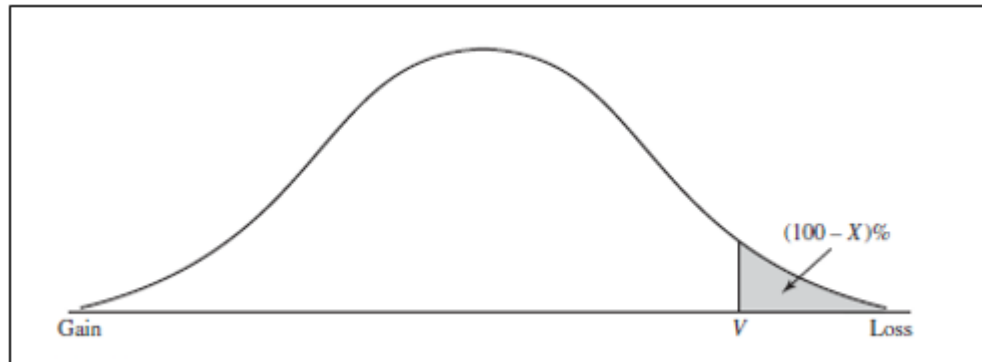


Figura 6 - Distribución de probabilidad de las pérdidas en el valor del portafolio

Fuente: Hull (2015), Risk Management and Financial Institutions, Fourth edition (2015: 257)

De lo descrito, se puede notar el uso del término nivel de confianza, el cual implícitamente nos hace suponer que las pérdidas de la cartera pueden modelarse mediante la metodología estadística. A continuación, se desarrollarán los distintos métodos del cálculo del VaR que serán usados a lo largo de la presente investigación.

La figura 7 muestra una clasificación general de los modelos de riesgo realizada por Jorion (2011), esta clasificación se divide en dos ramas, el método de "*Local Valuation*" que hace la valoración del instrumento al punto actual, junto con la primera y segunda derivada parcial. El segundo método es el "*Full Valuation*", el cual, en contraste con el

método anterior, recalcula el precio del instrumento sobre un amplio rango de valores de factores de riesgo (2011: 304-305).

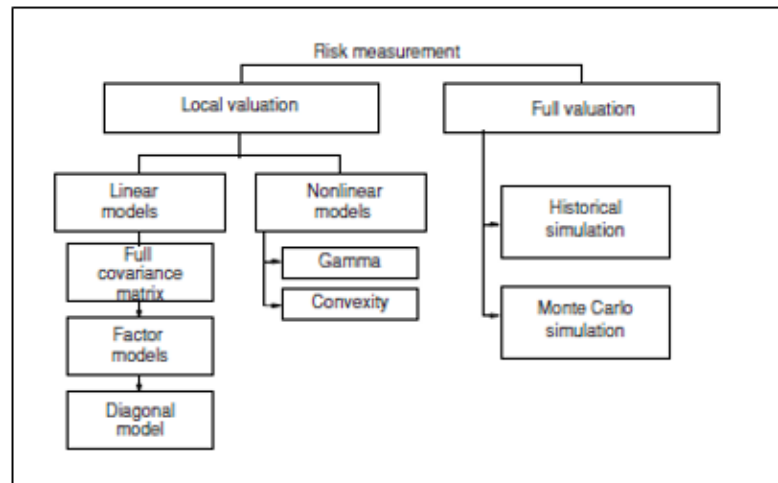


Figura 7 - Métodos de cálculo del VaR

Fuente: Jorion Philippe (2011: 305).

2.3.1. Local Valuation – VaR Delta Normal para acciones y bonos

Dentro del grupo de Local Valuation, el método más usado es el método lineal (*linear methods*), el cual según define Jorion (2011), reemplaza la posición del portafolio con exposiciones lineales en el factor de riesgo apropiado. Por ejemplo, la exposición lineal usada para posiciones de opciones sería el “delta”, mientras que para posiciones de bonos sería la “duración”. Para modelos no lineales, dentro de esta división, se usa la convexidad como una exposición no lineal o medida de sensibilidad.

El método lineal más conocido para modelar el riesgo es el VaR Delta Normal o llamado también VaR Paramétrico, el cual es solo aplicable a portafolios cuyos retornos o P&L (Profit & Loss o Ganancias y Pérdidas) son una función lineal del factor de riesgo de los retornos o de los retornos de los activos. El mayor supuesto que toma es la normalidad de los retornos de los activos, su distribución conjunta es normal multivariada y además como toma supuesto de distribución normal estándar, asume

como valor de la media de los retornos esperados cero. Bajo ese supuesto, es posible derivar una formula explicita para el cálculo del VaR.

VaR Delta Normal para acciones

Para el caso de acciones el VaR Delta Normal, Vilariño lo calcula de la siguiente manera, considerando el VaR decimal base, para un horizonte de tiempo T:

$$\%VaR = Z_{x\%} \sigma_i \sqrt{T}$$

Donde σ es la desviación estándar diaria, T es el horizonte de tiempo para el cual se realiza el cálculo, y Z es el valor critico el cual está en función del nivel de confianza seleccionado. La tabla 4 muestra el resumen de valores críticos más usados para cada nivel de confianza.

Tabla 4 - Valor critico por nivel de confianza

Z	2.33	1.65	1.28
x%	1%	5%	10%

De manera similar el VaR en dolar base (en unidades monetarias), para un horizonte de tiempo T, es calculado de la siguiente forma:

$$VaR = P_0 Z_{x\%} \sigma_i \sqrt{T}$$

Donde σ es la desviación estándar diaria, T es el horizonte de tiempo para el cual se realiza el cálculo, Z es el valor crítico el cual está en función del nivel de confianza seleccionado y P_0 es el valor actual del activo o portafolio.

En el caso que la media de los retornos esperados sea distinta de cero, el VaR será calculado de la siguiente forma:

Para el caso de un activo se tiene la siguiente fórmula

$$VaR_{activo} = [E(R) - Z_{x\%} \sigma_i]$$

Para el caso de un portafolio se tiene la siguiente fórmula

$$VaR_{portafolio} = [E(R) - Z_{x\%} \sigma_i] P_0$$

Donde σ es la desviación estándar diaria, Z es el valor crítico el cual está en función del nivel de confianza seleccionado, P_0 es el valor actual del activo o portafolio y $E(R)$ es el esperado de los retorno (2015: 93 – 95).

VaR Delta Normal para bonos

En este caso, el enfoque Delta Normal, descrito en Jorion (2011:305), empieza valorizando el portafolio en un punto inicial, con relación a un factor de riesgo específico S (considerando que solo existe un solo factor de riesgo).

$$V_0 = V(S_0)$$

Con esta expresión, se puede describir la relación entre el cambio en el valor del portafolio y el cambio en el factor de riesgo como:

$$dV = \Delta_0 \times dS$$

Aquí, Δ_0 es la sensibilidad del portafolio para cambios en el factor de riesgo S . Como con cualquier relación lineal, el mayor cambio en el valor del portafolio acompañará al mayor cambio en el factor de riesgo. El VaR a un nivel de significancia dado Z , puede ser escrito como:

$$VaR = |\Delta_0| \times (z\sigma S_0)$$

Dónde:

$$(z\sigma S_0) = VaR_S$$

Generalmente, el VaR desarrollado por el método Delta Normal, es más exacto en el corto plazo que en el largo plazo.

En el caso de un bono, Jorion define que el impacto del factor de riesgo en el valor del portafolio es el cambio de la yield (Δy), por tanto el VaR del portafolio puede ser calculado de la siguiente manera:

$$VaR = D \times Z \times \sigma \times P_0$$

Donde σ es la desviación estándar o volatilidad diaria, D es la duración modificada, Z es el valor crítico el cual está en función del nivel de confianza seleccionado y P_0 es el valor actual del portafolio. Cabe mencionar, que la medida de volatilidad aplicada es la volatilidad del cambio en la yield. En este caso, la medida de volatilidad usada es la desviación estándar de los retornos (2011: 349).

Como se mencionó, este método Delta Normal es solo exacto para exposiciones lineales, en el caso de exposiciones no lineales como la convexidad, no son adecuadamente capturados con este método de VaR. Usando la serie de expansión de Taylor, la convexidad puede ser contabilizada por un portafolio de renta fija, usando el método delta-gamma.

Las ventajas del modelo VaR Delta Normal descrito por Jorion (2011) incluye lo siguiente:

- Fácil de implementar.
- Calculo puede ser desarrollado rápidamente.
- Propicia el análisis, porque los factores de riesgo, correlaciones y volatilidades son identificados.

En cuanto a las desventajas del modelo VaR Delta Normal incluye lo siguiente:

- La necesidad de asumir una distribución normal.
- El modelo es incapaz de contabilizar apropiadamente las distribuciones con colas anchas.

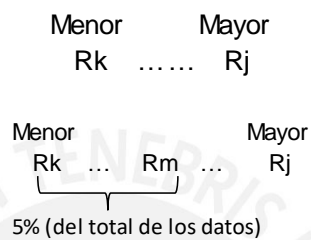
2.3.2. Método Full Valuation

Dentro de este grupo de Full Valuation, los métodos más usados para el cálculo del VaR son el método de Simulación Histórica y el método de Simulación de Monte Carlo.

Método de Simulación Histórica

El método histórico para estimar el VaR es a menudo llamado método de simulación histórica. La forma más fácil de calcular el VaR 5% diario usando el método de simulación histórica es acumulando el número de retornos diarios pasados, ordenar los retornos de mayor a menor e identificar los 5% más bajo del total de retornos. El mayor de esa lista de los menores 5% del total de retornos es el VaR 5% diario.

De manera ilustrativa Vilariño (2015: 83 – 89) lo presenta de la siguiente manera:



Donde R_m es el mayor valor del grupo de los 5% más bajos, y por tanto es el VaR 5% diario.

Ventajas del método de simulación histórica:

- El modelo es fácil de implementar cuando la data histórica es fácilmente disponible.
- Horizonte es una elección positiva basada en los intervalos de la data histórica usada.
- *Full Valuation* del portafolio es basado en precios actuales.

Desventajas del método de simulación histórica:

- No hay suficiente data histórica para todos los activos.
- La variación en tiempo del riesgo en el pasado no representa la variación en el futuro.
- El modelo no reconoce cambios en la volatilidad y correlaciones como cambios estructurales.

Método de Simulación de Monte Carlo:

El método de simulación de Monte Carlo, descrito en Kaplan (2015:10 -11) se refiere al cálculo mediante software simulando datos y generando una gran cantidad de posibles resultados tomando en cuenta la distribución que siguen los inputs, las cuales están definidas por el usuario.

Por ejemplo, un portafolio manager podría definir una distribución para un retorno a una semana para cada una de los miles de acciones en el portafolio. En cada “corrida” (el número de corridas es especificado por el usuario) el paquete estadístico selecciona los retornos de una semana de cada distribución de activos de los posibles retornos y calcula el peso promedio de los retornos del portafolio.

Las millones de pesos promedios de los retornos del portafolio, naturalmente formara una distribución la cual sigue aproximadamente una distribución normal. Usando el retorno esperado del portafolio y la desviación estándar, las cuales son parte del resultado de Monte Carlo, así el VaR es calculado de la misma forma que el método delta normal.

Ventajas del método de simulación histórica:

- Es el modelo más potente con respecto al cálculo del VaR.
- Puede contabilizar riesgos lineales y no lineales.
- Es flexible en extremo y puede incorporar factores de riesgo adicionales fácilmente.
- Un número de escenarios cercano a lo ilimitado, puede producir distribuciones bien formadas.

Desventajas del método de simulación histórica:

- Está sujeto al modelo de riesgo del proceso estocástico elegido.
- Está sujeto a variación muestral a bajo número de simulaciones.

2.4. Medida Coherente de Riesgo

Con el fin de medir adecuadamente el nivel de riesgo, según Kaplan (2015: 52 - 53) se debe en primer lugar definir el concepto de medida de riesgo. Si definimos a R como un conjunto de eventos aleatorios y $p(R)$ como la medida de riesgo para ese evento aleatorio, la medida coherente de riesgo, debería exhibir las siguientes propiedades.

1. Monotonicidad

Un portafolio con un retorno futuro alto probablemente tenga menos riesgo, esto es

$$\text{Si } R_1 \geq R_2, \text{ entonces } p(R_1) \leq p(R_2)$$

2. Subaditividad

El riesgo de un portafolio es menor igual que la suma de los riesgos de los activos individuales que componen el portafolio, esto es

$$p(R_1 + R_2) \leq p(R_1) + p(R_2)$$

3. Homogeneidad positiva

El tamaño del portafolio, β , impactará el tamaño de su riesgo para todo $\beta > 0$, así

$$p(\beta R) = \beta p(R).$$

4. Invarianza transicional

El riesgo de un portafolio es dependiente en los activos que componen el portafolio, esto es, que para todas las constantes c , se cumple lo siguiente:

$$p(c+R) = p(R) - c$$

De las propiedades de las “Medidas de riesgo coherente” descritas; la primera, tercera y cuarta son propiedades más sencillas para distribuciones bien formadas.

La subaditividad es la propiedad más importante de una medida coherente de riesgo, esta propiedad afirma que el portafolio hecho de sub-portafolios tendrá igual o menos

riesgo que la suma de los riesgos de cada sub-portafolio individual. Esta propiedad asume que cuando los riesgos son combinados, habrá mayor beneficio por la diversificación. Para peores casos, existen medidas de riesgo que no cumplen esta propiedad de subaditividad y el efecto de diversificar no hace que el riesgo del portafolio sea menor o igual a la suma de los riesgos de los activos individuales. En el acápite 5.3 se mostrará la aplicación de esta propiedad y se explicará porque el VaR no es una medida coherente de riesgo.

2.5. Conditional Value at Risk (CVaR)

Una vez definido al VaR como la máxima pérdida esperada o el porcentaje de pérdida mínimo igual al retorno que cae en el peor cuantil pre especificado (usualmente se emplea el 5% percentil). Se define el Conditional VaR (CVaR), el cual es la pérdida esperada del portafolio, dado que el retorno del portafolio haya caído debajo del retorno del cuantil del peor caso. En otras palabras, el CVaR es la media de los porcentajes de pérdida entre los retornos que hayan caído debajo del *q-cuantil*. CVaR es también conocido como expected tail loss (ETL) o expected shortfall (ES), Kaplan (2015: 53).

Por ejemplo, asumir que un inversionista está interesado en conocer el 5% VaR (el 5% VaR es equivalente al 5% percentil de los retornos) para un fondo. Además, se asume que el 5% percentil de los retornos para un fondo es igual a -20%. Esto significa, 5% de las veces, el fondo ganará un retorno menor a -20%. En este caso el VaR es -20%. Sin embargo, el VaR no provee buena información respecto al tamaño esperado de las pérdidas si el fondo rinde en el 5% inferior de los posibles resultados. La respuesta es respondida por el CVaR, el cual es el valor esperado de todos los posibles retornos que caen debajo del 5% percentil del total de retornos (es decir debajo del valor del VaR igual a -20%). Para concluir, el CVaR será igual a pérdidas mayores que el VaR y

además a diferencia del VaR, CVaR tiene la habilidad de satisfacer la propiedad de subaditividad, la cual será demostrada más adelante en el apartado 5.3.

Según Jorion (2011), el CVaR nos estima cuán grande es una pérdida esperada si un evento desfavorable ocurre. En cambio, el VaR no provee ningún estimado de la magnitud de las pérdidas solo nos dice la probabilidad de que las pérdidas ocurran.

Otra propiedad que será demostrada en el apartado 5.3 es el concepto de convexidad, se observa que cuando se ajusta *the holding period* y el nivel de confianza a la vez, la curva del CVaR muestra que la interacción de ambos ajustes genera convexidad, propiedad importante al momento de resolver problemas de optimización de portafolio.

El CVaR posee el mismo enfoque que el VaR en el sentido que ambos nos proveen una medida de riesgo consistente y común a través de diferentes posiciones tomadas.

El CVaR puede ser implementado para determinar la probabilidad de pérdida, de la misma manera que el VaR es implementado como medida de riesgo.

Sin embargo, el CVaR es una medida de riesgo más apropiada que el VaR, Jorion (2011) anuncia las siguientes razones:

- El CVaR satisface todas las propiedades de medida coherente de riesgo, incluida la subaditividad, el VaR solo satisface esa propiedad para distribuciones normales.
- La superficie del riesgo del portafolio para el CVaR es convexa, porque la propiedad de subaditividad es encontrada, así el CVaR es más apropiado para resolver problemas de optimización de portafolio, que el método del VaR.
- CVaR da un estimado de la magnitud de las pérdidas para eventos desfavorables, a diferencia del VaR que no provee estimaciones de cuán grande ha sido la pérdida.
- CVaR tiene menos supuestos restrictivos respecto a la regla de decisión de riesgo/retorno.

Capítulo 3. OBJETIVO E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se abordará cual es el objetivo o finalidad de la presente tesis, así mismo se detallará la hipótesis de la presente investigación, indicando que es lo que se quiere demostrar y a qué sector está aplicado.

3.1. Objetivo de la Investigación

El objetivo de la presente investigación consiste en evaluar el impacto de los límites de inversión en la gestión de portafolio de las AFP, del Fondo Tipo 3, considerando una medida de riesgo, como el CVaR, distinta a la volatilidad, que está representada por la desviación estándar de los rendimientos de los activos.

3.2. Hipótesis de la Investigación

La hipótesis planteada considera que el modelo de optimización usando el CVaR como medida de riesgo, obtiene un mejor comportamiento que el modelo de optimización que usa como medida de riesgo la volatilidad o desviación estándar, el cual es conocido como el modelo de Media – Varianza, además de demostrar que los límites de inversión generan un gran impacto en la gestión del portafolio, toda vez que limita la posibilidad de invertir en mercados más desarrollados.

3.3. Problemática de la Investigación

Hoy en día muchos fondos de inversión usan modelos simples para seleccionar un portafolio y medir el nivel de riesgo asociado. Ello es permitido ya que cada fondo de inversión tiene la libertad de elegir un modelo de estrategia de inversión para su *asset allocation*, y al final, es el cliente el que decide si va a colocar su capital en dicho fondo (suponiendo que el fondo ha explicado el modelo a usar), sin embargo para los fondos de las AFP, el afiliado no conoce cómo se está administrando su fondo, siendo esto

una problemática hoy en día, si bien es regulado por la SBS, la mayoría de AFP usan el modelo base de Markowitz para la optimización del portafolio, siendo esto solicitado por ente regulador para su cambio.



Capítulo 4. MARCO METODOLÓGICO

En este presente capítulo se desarrollarán los modelos de optimización teóricos utilizados en la presente investigación y que serán empleados en el capítulo 6 de manera aplicativa al sector de las Administradoras de Fondos de Pensiones.

4.1. Modelo de Media – Varianza de Markowitz

Según *Brandimarte* (2014), en el desarrollo de su libro *Handbook Monte Carlo Simulation*, la habilidad de resolver un problema de optimización es inútil si no se tiene la habilidad de construir un modelo de optimización sensible. Construir un modelo es un arte difícil de aprender, sin embargo es de bastante utilidad ilustrar algunos ejemplos relevantes y analizar las clases de modelos resultantes.

Brandimarte (2014) nos muestra el modelo clásico de optimización que se emplea en el mercado financiero para analizar y encontrar el portafolio óptimo en el proceso de gestión de portafolio, este modelo llamado “Modelo de Media - Varianza” fue desarrollado por Markowitz (1952), el cual establece el marco de referencia para la optimización de portafolio de inversión.

La optimización de Media – Varianza, es el modelo estático clásico de optimización de un portafolio. La decisión se refiere a la fijación de pesos $\omega_i, i = 1, \dots, n$, de un conjunto de n activos, de tal manera que se logre un equilibrio entre el rendimiento y riesgo esperado.

Se define lo siguiente:

- $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$, vector que muestra el rendimiento esperado de cada activo.
- μ_T , será el retorno esperado dado, es decir, el cual se quiere lograr.
- $\Sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, será la matriz de covarianzas, la cual recolecta las covarianzas $\sigma_{i,j}$ entre los retornos de activos $i, j = 1, \dots, n$.

Si asumimos que el riesgo puede ser medido por la desviación estándar de los retornos del portafolio, el modelo de sensibilidad para el *asset allocation* decisión sería

$$\min w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \quad (21)$$

$$s.t. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (23)$$

$$w_i \geq 0. \quad (24)$$

Aquí se minimiza la varianza, en lugar de la desviación estándar, debido a que se produce un problema de programación cuadrática convexo altamente manejable.

La restricción (22) muestra el logro del rendimiento esperado dado, luego se muestra la restricción de sumatoria de pesos igual a 1 y la restricción de no negatividad, prohibiendo venta en corto.

4.2. Modelo de Optimización *Conditional Value at Risk* (CVaR)

Una vez realizado el marco teórico relacionado al CVaR y haber seleccionado al CVaR como medida coherente de riesgo, se formula el modelo de optimización del portafolio CVaR.

Rockafellar y Uryasev (2000) en su "*Journal of Risk Optimization of Conditional Value at Risk*", introduce el término del Conditional Value at Risk, como el promedio ponderado del VaR y las pérdidas que exceden a este.

Tomando en cuenta la expresión matemática del CVaR señalada en el Marco teórico (2.5.) se definió al CVaR como:

$$\text{Para } \alpha \in]0,1[\quad CVaR_{\alpha}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} z dF_X^{\alpha}(z)$$

$$\text{Donde } F_X^{\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } z < VaR_{\alpha}(X) \\ \frac{F_X(z) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{cuando } z \geq VaR_{\alpha}(X) \end{cases}$$

De lo planteado, Uryasev (2010), define la siguiente expresión para el CVaR:

$$CVaR_{\alpha}(X) = \lambda VaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda) CVaR_{\alpha}^{+}(X) \quad , 0 \leq \lambda \leq 1$$

Donde:

El VaR es el valor tal que la probabilidad de que las pérdidas sean mayores e iguales a este valor sea mayor o igual a α , mientras que el CVaR representa las pérdidas que estrictamente sobrepasan al VaR, matemáticamente Uryasev (2010) lo representa como:

- $CVaR^{+}$ (*upper CVaR*), representa el valor esperado de X que excede estrictamente al valor del VaR (también es llamado *Mean Excess Loss* y *Expected Shortfall*).

$$CVaR_{\alpha}^{+}(X) = E[X | X > VaR_{\alpha}(X)]$$

- $CVaR^{-}$ (*lower CVaR*), representa al valor esperado de X que excede débilmente al valor del VaR (también llamado *Tail VaR*).

$$CVaR_{\alpha}^{-}(X) = E[X | X \geq VaR_{\alpha}(X)]$$

- Por último el parámetro λ se calcula de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{F_X(VaR_{\alpha}(X)) - \alpha}{1 - \alpha}$$

De lo desarrollado, Uryasev (2002) menciona las siguientes propiedades para el CVaR, adicionales a las descritas en el marco teórico:

- $CVaR_{\alpha}^{+}(X)$ y $VaR_{\alpha}(X)$, para distribuciones generales de pérdidas, son funciones discontinuas.
- CVaR es continua respecto al nivel de confianza (α).
- CVaR es convexo en X .
- VaR , $CVaR^{-}$, $CVaR^{+}$ pueden ser no convexos.
- $VaR \leq CVaR^{-} \leq CVaR \leq CVaR^{+}$

Esta definición, adicional a la desarrollada en el marco teórico (2.4.) respecto a las propiedades de medida coherente de riesgo, nos muestra un panorama más completo de las medidas de riesgo, para una mejor idea la figura 8 muestra la convexidad de las distintas medidas de riesgo.

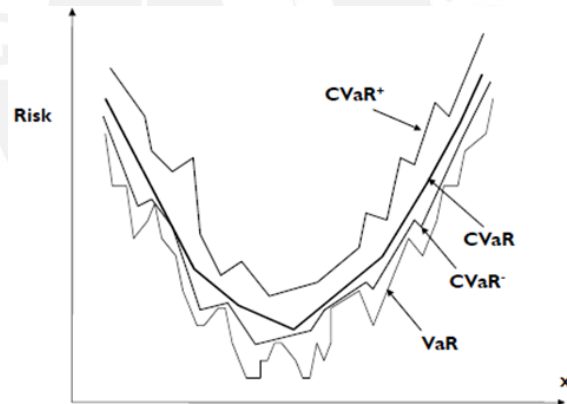


Figura 8 - Convexidad de las medidas de riesgo

Fuente: Uryasev (2010), Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization.

De lo explicado, es posible desarrollar el modelo de optimización del CVaR (como medida de riesgo), el cual se detalla a continuación:

$$\min CVaR_{\alpha}(X) = \lambda VaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda) CVaR_{\alpha}^{+}(X) , 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (25)$$

$$s.t. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (27)$$

$$w_i \geq 0. \quad (28)$$



Capítulo 5. ANÁLISIS PROPUESTO

5.1. Descripción de la data

La presente investigación aplicará lo descrito y desarrollado hasta este momento al sector de las Administradoras de Fondo de Pensiones y como ya se ha señalado en el capítulo 1, se analizará el fondo 3, el cual está compuesto de activos riesgos como los instrumentos de renta variable (acciones), para ello se utilizará índices de referencia, conocidos como *Benchmarks*, por cada clase de activo.

Con el fin de lograr este objetivo, se reducirá el conjunto de instrumentos que son elegibles, a trece clases de activos representativos.

Los *Benchmarks* y las clases de activos elegidos se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5 - Activos proxys seleccionados

CATEGORIA		PAIS		Indices representativos (USD)	Variable	
RENTA VARIABLE	RENTA VARIABLE LOCAL	PERÚ	PERÚ	MSCI All Peru Capped Index Net	x1	
	RENTA VARIABLE EXTERIOR	EEUU	EEUU	MSCI USA Index Net	x2	
		EUROPA	REINO UNIDO (UK)	REINO UNIDO (UK)	MSCI United Kingdom Index Net	x3
			FRANCIA	FRANCIA	MSCI France Index Net	x4
			ALEMANIA	ALEMANIA	MSCI Germany Index Net	x5
			ITALIA	ITALIA	MSCI Italy Index Net	x6
			ESPAÑA	ESPAÑA	MSCI Spain Index Net	x7
		LATINOAMERICA	BRASIL	BRASIL	MSCI Brasil Index Net	x8
			CHILE	CHILE	MSCI Chile Index Net	x9
			MÉXICO	MÉXICO	MSCI Mexico Index Net	x10
			COLOMBIA	COLOMBIA	MSCI Colombia Index Net	x11
		CHINA	CHINA	MSCI China Index Net	x12	
		JAPÓN	JAPÓN	MSCI Japan Index Net	x13	

Elaboración propia

Cada índice seleccionado, replica el comportamiento agregado de la renta variable de cada país, cada índice representa a las diez acciones más cotizadas de cada país.

Por ejemplo, para observar un caso en particular, el índice *MSCI All Peru Capped Index Net*, representa a las diez acciones más cotizadas del Perú a la fecha de enero del 2017, el cual representa el 68.89% del universo de los instrumentos de renta

variable que operan en el mercado peruano. Adicionalmente, este índice incluye instrumentos listados en Perú e inversiones en compañías que no son peruanas, pero están listadas en el país y presentan un gran porcentaje de sus operaciones en el Perú. El resumen del índice se muestra en la tabla 6.

Tabla 6 - Composición del índice MSCI All Peru Capped Index Net

MSCI ALL PERU CAPED INDEX				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
CREDICORP	PE	8.35	22.08	Financials
SOUTHERN COPPER CORP	PE	4.7	12.44	Materials
BUENAVENTURAMINAS ADR	PE	3.83	10.13	Materials
ALICORP	PE	1.67	4.41	Cons Staples
INTERCORP FINANCIAL	PE	1.55	4.11	Financials
HOCHSCHILD MINING	GB	1.29	3.41	Materials
VOLCAN COMPAÑÍA MINERAB	PE	1.24	3.27	Materials
CIA MINERA MILPO	PE	1.22	3.23	Materials
INRETAIL PERU CORP	PE	1.12	2.97	Cons Staples
FERREYCORP	PE	1.07	2.84	Industrials
		26.04	68.89	

Fuente: MSCI (2017)

De la misma manera se analiza para los demás índices, los cuales se pueden encontrar en el Anexo 1.

5.1.1. Tratamiento de datos

De la serie de datos para cada índice MSCI, es necesario observar la tendencia de los datos, por ejemplo para los casos del *MSCI All Peru Capped Index Net* y del *MSCI USA Index Net*, se puede observar en las figura 9 y 10 la tendencia histórica de los niveles de precios de cada índice respectivamente.

La grafica de la figura 9 muestra un comportamiento diverso de los precios del índice *MSCI All Peru Capped Index Net*, especialmente en los meses de enero y febrero del

2016, donde se puede observar una reducción de los precios de este índice, principalmente debido a coyuntura pre - electoral que vivía el país por esas fechas.

Distinto comportamiento muestra el índice *MSCI USA Index Net*, el cual muestra una evolución ascendente de los precios, sin embargo, se puede notar una ligera baja de precios por lo meses de julio y agosto del 2016, esto debido al tema del “*Brexit*” que sucedió a mediados del 2016.

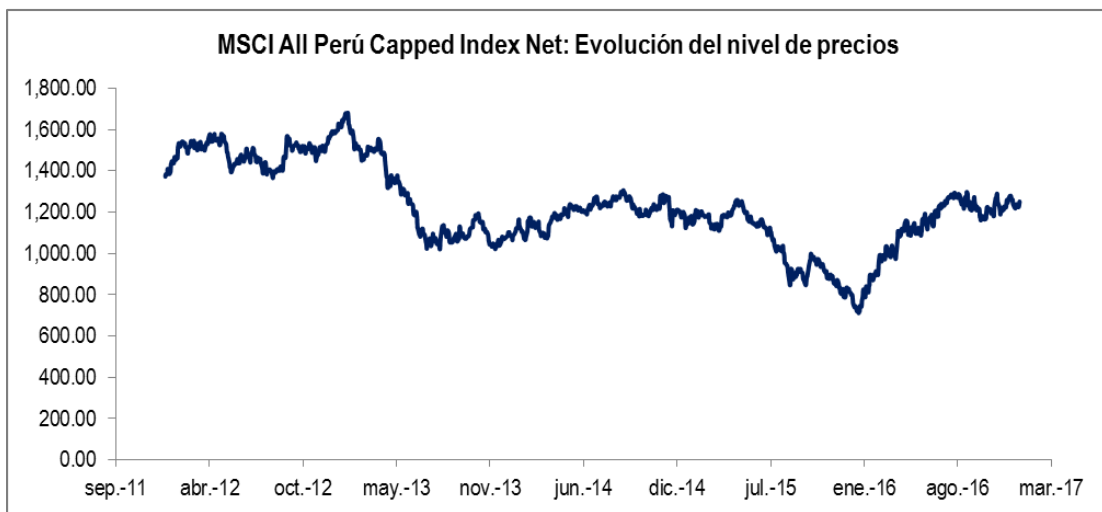


Figura 9 - MSCI All Peru Capped Index Net - Evolución del nivel de precios

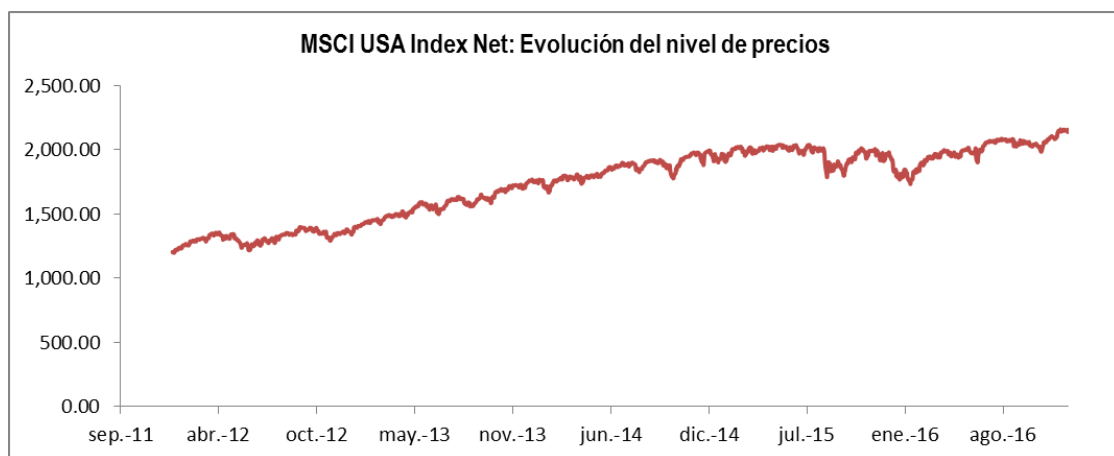


Figura 10 - MSCI USA Index Net - Evolución del nivel de precios

La cantidad total de datos inicialmente contemplaba más de 1300 datos sobre los rendimientos de cada activo proxy usado en el portafolio, sin embargo como se observa en la figura 11, para el caso del índice MSCI All Peru Capped Index Net, se observan varios datos fuera de los límites calculados por el método de outliers, es por ello que se debe realizar una discriminación de datos.

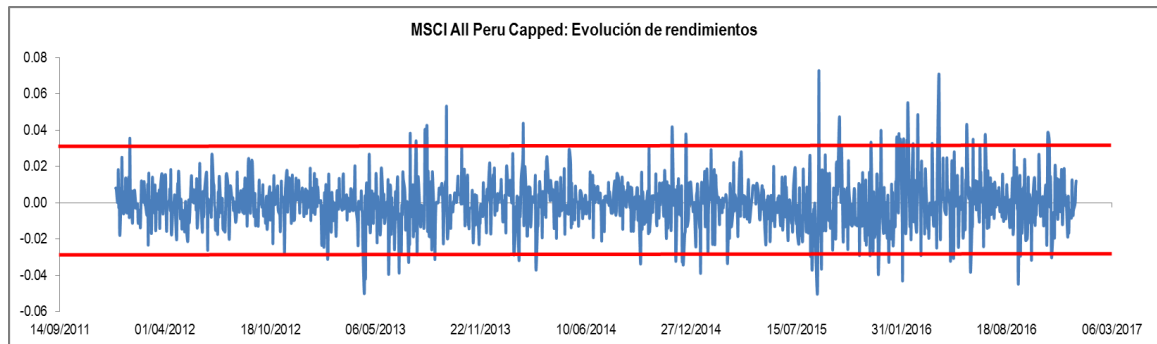


Figura 11 - Evolución de rendimientos MSCI All Peru Capped Index Net

Por ello, para un mejor tratamiento de datos es necesario eliminar los datos fuera de rango (valores atípicos) o también conocidos como *outliers*, para ello se calculan los percentiles Q1, Q2, Q3 y se procede a calcular el rango intercuartil (Q3-Q1), por último se descartan los valores que no pertenecen al siguiente intervalo:

$$[Q1 - 1.5 \times (Q3 - Q1), Q3 + 1.5 \times (Q3 - Q1)]$$

Por ejemplo para la serie de datos del Índice *MSCI All Peru Capped Index Net*, se puede observar el RIC (rango intercuartil) en la tabla 7.

Tabla 7 - Valores de percentiles y RIC

Q1	-0.006956
Q2	0.000000
Q3	0.006312
Limite Inf	-0.026857
Limite Sup	0.026214

De la tabla 7, se procede a eliminar los puntos *outliers* de la serie de datos de rendimiento diario y se obtiene una nueva serie de datos para ser usado en los

modelos de optimización de Media – Varianza y el CVaR, siendo aproximadamente más de 900 datos, partiendo de la fecha de 28 / 12 / 2011 hasta 28 / 12 / 2016.

La tabla 8 muestra los principales estadísticos de cada índice MSCI usado en la presente investigación, tales como la media, desviación estándar, varianza, mínimo y máximo de los rendimientos diarios de los activos.

Además, la tabla 9 muestra la matriz de varianzas y covarianzas de los trece índices representativos o activos *proxys* en el portafolio, y la tabla 10 muestra la matriz de correlaciones de los índices representativos del portafolio, de la cual se puede notar la alta correlación existente entre los índices *MSCI France Index Net* (Francia) y *MSCI Germany Index Net* (Alemania) con un valor de 89.657%, y en el caso del *MSCI All Peru Capped Index Net*, en todas las combinaciones, presenta una baja correlación con los demás índices de los demás países, lo cual puede resultar creíble, debido a que Perú es considerado un país de mercado emergente.

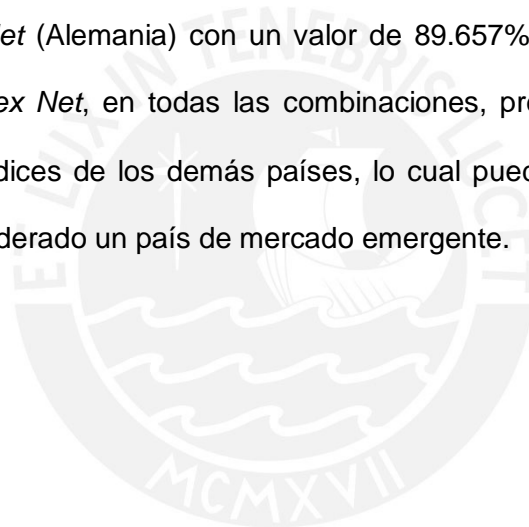


Tabla 8 - Estadística descriptiva de los rendimientos de los activos

	PERU	USA	UK	FRANCIA	ALEMANIA	ITALIA	ESPAÑA	BRASIL	CHILE	MEXICO	COLOMBIA	CHINA	JAPON
Media	-0.0471%	0.0721%	0.0306%	0.0430%	0.0498%	0.0254%	0.0205%	-0.0181%	-0.0372%	0.0031%	-0.0276%	0.0395%	0.0687%
Desviación Estándar	1.0252%	0.5662%	0.7205%	0.8833%	0.8966%	1.2209%	1.0947%	1.3255%	0.8152%	0.9363%	0.9567%	0.9307%	0.9322%
Varianza	0.0105%	0.0032%	0.0052%	0.0078%	0.0080%	0.0149%	0.0120%	0.0176%	0.0066%	0.0088%	0.0092%	0.0087%	0.0087%
Mínimo	-3.0650%	-1.5165%	-2.1961%	-2.6562%	-2.3967%	-3.5821%	-3.3334%	-4.0157%	-2.3465%	-2.8500%	-2.6920%	-2.4465%	-2.5367%
Máximo	2.9068%	1.6416%	2.0646%	2.7474%	2.6845%	3.5980%	3.1073%	3.9555%	2.4181%	2.7114%	2.6062%	2.5841%	2.5689%

Tabla 9 - Matriz de Varianzas y Covarianzas.

	PERU	USA	UK	FRANCIA	ALEMANIA	ITALIA	ESPAÑA	BRASIL	CHILE	MEXICO	COLOMBIA	CHINA	JAPON
PERU	0.000105	0.000023	0.000022	0.000022	0.000022	0.000028	0.000023	0.000051	0.000027	0.000033	0.000022	0.000017	0.000004
USA	0.000023	0.000032	0.000017	0.000022	0.000022	0.000027	0.000022	0.000023	0.000012	0.000024	0.000010	0.000005	-0.000004
UK	0.000022	0.000017	0.000052	0.000048	0.000046	0.000055	0.000047	0.000033	0.000021	0.000031	0.000016	0.000018	0.000010
FRANCIA	0.000022	0.000022	0.000048	0.000078	0.000071	0.000086	0.000075	0.000037	0.000024	0.000036	0.000017	0.000017	0.000005
ALEMANIA	0.000022	0.000022	0.000046	0.000071	0.000080	0.000079	0.000069	0.000033	0.000025	0.000035	0.000017	0.000019	0.000006
ITALIA	0.000028	0.000027	0.000055	0.000086	0.000079	0.000149	0.000109	0.000044	0.000029	0.000042	0.000019	0.000017	0.000000
ESPAÑA	0.000023	0.000022	0.000047	0.000075	0.000069	0.000109	0.000120	0.000036	0.000025	0.000035	0.000016	0.000014	0.000007
BRASIL	0.000051	0.000023	0.000033	0.000037	0.000033	0.000044	0.000036	0.000176	0.000045	0.000060	0.000039	0.000023	0.000010
CHILE	0.000027	0.000012	0.000021	0.000024	0.000025	0.000029	0.000025	0.000045	0.000066	0.000036	0.000030	0.000021	0.000007
MEXICO	0.000033	0.000024	0.000031	0.000036	0.000035	0.000042	0.000035	0.000060	0.000036	0.000088	0.000032	0.000020	0.000006
COLOMBIA	0.000022	0.000010	0.000016	0.000017	0.000017	0.000019	0.000016	0.000039	0.000030	0.000032	0.000091	0.000012	0.000006
CHINA	0.000017	0.000005	0.000018	0.000017	0.000019	0.000017	0.000014	0.000023	0.000021	0.000020	0.000012	0.000087	0.000024
JAPON	0.000004	-0.000004	0.000010	0.000005	0.000006	0.000000	0.000007	0.000010	0.000007	0.000006	0.000006	0.000024	0.000087

Tabla 10 - Matriz de Correlaciones

	PERU	USA	UK	FRANCIA	ALEMANIA	ITALIA	ESPAÑA	BRASIL	CHILE	MEXICO	COLOMBIA	CHINA	JAPON
PERU	1	0.39696	0.30250	0.24813	0.23945	0.22343	0.20882	0.37205	0.32311	0.34871	0.22133	0.17828	0.03747
USA	0.39696	1	0.41350	0.44709	0.43494	0.38465	0.35208	0.30533	0.24975	0.44654	0.18303	0.09713	-0.07319
UK	0.30250	0.41350	1	0.75278	0.72015	0.62202	0.59732	0.35013	0.35584	0.46207	0.23558	0.27455	0.14182
FRANCIA	0.24813	0.44709	0.75278	1	0.89657	0.79945	0.77824	0.31266	0.33461	0.43160	0.19790	0.20862	0.06491
ALEMANIA	0.23945	0.43494	0.72015	0.89657	1	0.72702	0.69942	0.28022	0.34143	0.41789	0.19533	0.22530	0.07681
ITALIA	0.22343	0.38465	0.62202	0.79945	0.72702	1	0.81277	0.26960	0.28703	0.36415	0.16647	0.14663	-0.00243
ESPAÑA	0.20882	0.35208	0.59732	0.77824	0.69942	0.81277	1	0.24582	0.27616	0.34256	0.15173	0.14233	0.06685
BRASIL	0.37205	0.30533	0.35013	0.31266	0.28022	0.26960	0.24582	1	0.41869	0.48259	0.30486	0.18544	0.08360
CHILE	0.32311	0.24975	0.35584	0.33461	0.34143	0.28703	0.27616	0.41869	1	0.47786	0.38472	0.28160	0.09833
MEXICO	0.34871	0.44654	0.46207	0.43160	0.41789	0.36415	0.34256	0.48259	0.47786	1	0.35994	0.23054	0.06602
COLOMBIA	0.22133	0.18303	0.23558	0.19790	0.19533	0.16647	0.15173	0.30486	0.38472	0	1	0.13175	0.06780
CHINA	0.17828	0.09713	0.27455	0.20862	0.22530	0.14663	0.14233	0.18544	0.28160	0.23054	0.13175	1	0.28139
JAPON	0.03747	-0.07319	0.14182	0.06491	0.07681	-0.00243	0.06685	0.08360	0.09833	0.06602	0.06780	0.28139	1

5.2. Marco Regulatorio de las AFP's

Como ya se mencionó, la presente investigación estará enfocada al portafolio del fondo de pensiones tipo 3, conocido también como fondo de apreciación de capital, el cual está compuesto en su mayoría por activos de renta variable o acciones, las cuales se caracterizan por ser los activos más riesgosos, por ello la denominación de fondo agresivo.

La regulación elaborada por la Superintendencia de Banca, Seguro y AFP e indicada en el Texto Único Ordenado de la Ley del SPP, establece ciertos niveles o límites para invertir en determinados activos, según sea la composición del portafolio por cada tipo de fondo, para esta investigación los límites de inversión para el fondo 3 se muestran en la tabla 11.

Tabla 11 - Límites de inversión del Fondo 3

Categoría	% del Valor del Fondo
Instrumentos Representativos de Derechos sobre Participación Patrimonial o Títulos Accionarios.	80%
Instrumentos Representativos de Derechos sobre Obligaciones o Títulos de Deuda.	70%
Instrumentos derivados para cobertura y gestión eficiente de Portafolio.	20%
Instrumentos Representativos de Derechos sobre Obligaciones de Corto Plazo o Activos en efectivo.	30%
Instrumentos Alternativos.	20%

Adicional a los límites de inversión por cada tipo de fondo, según el Texto Único Ordenado de la Ley del SPP – Artículo 25 – D, se establecen límites generales que se deben cumplir. Para la presente investigación, es preciso dar mayor énfasis al inciso d del Artículo 25 – D del Texto Único Ordenado de la Ley del SPP, la cual menciona que: *“La suma de las inversiones en instrumentos emitidos por Gobiernos, entidades financieras y no financieras cuya actividad económica mayoritariamente se realice en el exterior será como máximo cincuenta por ciento (50%) del valor del fondo. El límite operativo seguirá siendo fijado por el Banco Central de Reserva”.*

De lo señalado, es necesario indicar que para la gestión del portafolio del fondo se debe aplicar el límite operativo establecido por el Banco Central de Reserva del Perú como límite de inversión del exterior, tal y como lo señala el del Artículo 25 – D del Texto Único Ordenado de la Ley del SPP:

“El Banco Central de Reserva del Perú podrá establecer porcentajes máximos operativos y/o sublímites a los establecidos en el presente artículo, debiendo contarse con la opinión de la Superintendencia. Las inversiones de los fondos de pensiones sólo podrán efectuarse en dichos porcentajes. En el caso en que el Banco Central de Reserva del Perú no determine los porcentajes máximos, se entenderán aplicables los señalados en la presente Ley”.

Según la nota informativa del 17 de setiembre del 2014 del Banco Central de Reserva del Perú (BCRP)², se decidió elevar el límite operativo de inversión en el exterior de las Administradoras Privadas de Fondo de Pensiones de 40 a 42 por ciento.

Ese límite operativo de inversión en el exterior es un límite global aplicado a los tres fondos, sin embargo para el desarrollo de la presente investigación es necesario determinar el límite operativo de inversión en el exterior, solo para el fondo 3. Para ello se calculó, en base a la información de los montos negociados e inversiones realizadas por las cuatro AFP's que operan en el Perú en el fondo 3 en el exterior de los meses de Julio y Agosto del 2016, tal y como se muestra en la tabla 12 y tabla 13.

Tabla 12 - Límite de Inversión Fondo 3, julio 2016

HA03		IN03		PR03		RI03		TOTAL	
Monto	%	Monto	%	Monto	%	Monto	%	Monto	%
180,992	59.42%	4,684,242	57.44%	3,656,551	63.09%	4,751,392	62.29%	13,273,178	60.76%

² Nota Informativa del 17 de Setiembre del 2014 – BCRP Eleva el Límite de Inversión en el Exterior de las AFP.

Tabla 13 - Límite de Inversión Fondo 3, Agosto 2016

HA03		IN03		PR03		RI03		TOTAL	
Monto	%	Monto	%	Monto	%	Monto	%	Monto	%
183,929	57.94%	4,901,905	58.98%	3,664,373	62.47%	4,583,488	58.90%	13,333,695	60%

Se puede notar que en promedio el límite de inversión para el exterior que se usa en el fondo 3 es de 60%, por ello para la presente investigación se considerará dicho valor como límite máximo para inversiones en el exterior, para el portafolio del fondo 3.

5.3. Elección de la Medida de Riesgo Coherente

Para la toma de decisión relacionada con la elección de la mejor medida de riesgo, es necesario tomar en cuenta el concepto de medida coherente de riesgo, descrito en el apartado 2.4.

Por lo general el VaR es considerado la herramienta más usada para la gestión y valorización del riesgo, Artzner, Delbaen, Eber, and Heath (1998) demuestran que el VaR no cumple las características para ser considerada una medida de riesgo coherente, las cuales son la falta de subaditividad y la no convexidad.

5.3.1. Subaditividad

Como se desarrolló en el apartado 2.4 el principio de subaditividad indica que el efecto de diversificación hace que la medida de riesgo (en este caso el VaR) de un portafolio sea menor o igual que la suma de la medida de riesgo (VaR) de cada uno de los activos que componen el portafolio, para un caso particular de dos activos se tiene lo siguiente

Se define la medida de riesgo $\zeta_a(X_i)$ como la medida VaR asociada con el portafolio X_i , entonces ζ_a es subaditiva si dados los portafolios X_1 y X_2 se tiene que

$$\zeta_a(X_1 + X_2) \leq \zeta_a(X_1) + \zeta_a(X_2) \quad \forall X_1, X_2$$

Para demostrar la falta de subaditividad, se tomarán los estudios realizados por Servan – Tantalean (2008), donde calculan el VaR y CVaR para los activos BVLC1, que corresponde a la acción de la BVL, y el BCP Dinámico, que corresponde al portafolio del BCP (a junio del 2008), conformado por los activos de la tabla 14, donde cabe precisar que a fecha de hoy algunas acciones de empresas han cambiado de denominación, por ejemplo tal es el caso de CEMLIMC1, que correspondía a Cementos Lima, hoy en día denominado UNACEM.

Tabla 14 - Composición del Portafolio BCP Dinámico a junio del 2008.

Agrarias	Bancos y Financieras	Diversas	Industrial	Mineras	Servicios Públicos
CASAGRC1 POMALCC1	CONTINC1 BAP	FERREYC1 GRAMONC1	ALICORC1 AUSTRAC1 CEMLIMC1 CEMLIMI1 CORAREI1 CORJRLI1 CPACASC1 CPACASI1 SIDERC1 RELAPAC1	BROCALC1 BVN MILPOC1 MINSURI1 VOLCABC1 CVERDEC1 PCU	EDEGELC1 EDELNOC1 ENERSUC1 LUSURC1

Fuente: Servan – Tantalean (2008)

Empleando el VaR Histórico para el cálculo, se obtienen los resultados de la tabla 15.

Tabla 15 - Resultados VaR, CVaR del portafolio.

	VaR Historico	CVaR
VaR (BCP Dinámico)	2,072,479.33	3,006,753.18
VaR (BVLC1)	2,774.22	4,759.03
VaR (BCP Dinámico) + VaR (BVLC1)	2,075,253.55	3,011,512.21
VaR (Cartera Agregada)	2,084,028.56	3,007,934.54

Fuente: Servan – Tantalean (2008)

De los resultados de la tabla 15, se puede demostrar que el VaR del portafolio formado por el activo BVLC1 y el portafolio BCP Dinámico es mayor a la suma del VaR de los activos individuales, lo cual podemos concluir que no cumple el principio de subaditividad para que sea una medida coherente de riesgo, caso contrario es el CVaR, donde el CVaR de la cartera agregada es menor a la suma del CVaR de los

activos individuales, es por ello que aquí si se cumple el principio de subaditividad y el efecto de diversificación.

5.3.2. Convexidad

La propiedad de convexidad nos indica que existe un solo mínimo para la función a ser analizada, en este caso, nuestro objetivo es minimizar la medida de riesgo, por ende bajo este principio podemos inferir que debe existir un único vector de pesos, de manera que las pérdidas potenciales sean mínimas.

Por tanto es de esperar que la gráfica del cálculo del VaR respecto al peso invertido en un activo del portafolio, sea no convexa y tenga varios valores mínimos.

Para demostrar lo indicado en primer lugar, tomaremos como caso particular a un portafolio formado por dos acciones (Alicorp y BVN) y en segundo lugar, un portafolio formado por tres acciones (Alicorp, BVN y Credicorp).

5.3.2.1. Análisis para portafolio de dos acciones

En el análisis de un portafolio de dos acciones (Alicorp y BVN) se calculó el VaR y el CVaR del portafolio para cada variación de pesos (w_1 , w_2) que son las proporciones invertidas en cada activo, donde el w_1 va desde 10% hasta 90%. La figura 12 muestra la evolución del VaR y el CVaR versus el aumento de porcentaje invertido en la acción de BVN (Buenaventura), para el análisis se ha empleado un nivel de confianza del 95% y el cálculo realizado es diario, es decir, un horizonte temporal de un día.

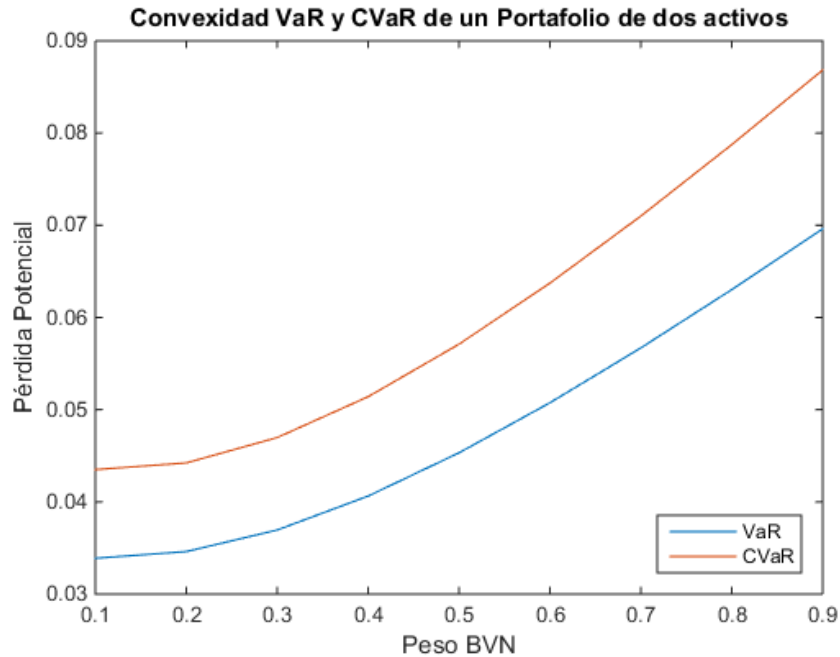


Figura 12 - Convexidad VaR y CVaR de un portafolio de dos activos.

Estudios realizados demuestran que al construir un portafolio de dos acciones, el VaR posee problemas de convexidad, es decir, posee varios puntos mínimos, a diferencia de la medida de riesgo CVaR, la cual si posee un único punto mínimo, lo que nos hace suponer que es una función optimizable que nos permitirá obtener un único óptimo.

Si bien en la figura 12 no se puede notar con exactitud si la curva que representa al VaR es no convexa, se puede observar que tiene ciertos puntos mínimos, que nos hacen suponer la falta de convexidad, sin embargo para analizar esta propiedad se construirá otro portafolio con las mismas acciones y agregando una acción más (Credicorp – BAP).

5.3.2.2. Análisis para portafolio de tres acciones

En el análisis del portafolio de tres acciones, de manera similar al caso anterior, se tomaron las acciones de Buenaventura (BVN), Alicorp (ALICORC1), y adicionado a Credicorp (BAP), para este caso, se procedió a calcular el VaR por cada peso invertido en las tres acciones (w_1 , w_2 , w_3), el peso de BVN (w_1) va desde 10% hasta 42%, el

peso de Alicorp va desde 10% a 50%, y el peso de Credicorp ($w_3 = 1-w_1-w_2$) es lo restante, tal que el peso de las tres acciones sea el total del portafolio (100%). Se calculó el VaR del portafolio considerando el portafolio de tres acciones, con un nivel de confianza de 95% y un horizonte de tiempo diario, las observaciones del precio transcurren desde el 28/02/2014 hasta el 19/03/2015, el gráfico del VaR se muestra en la figura 13.

De la figura 13 se puede observar que el gráfico del VaR presenta problema de convexidad, esto debido a que presenta varios puntos mínimos (existencia de óptimos locales) y no presenta un único punto mínimo (falta de un óptimo general), al presentar este problema, hace que el proceso de optimizar un portafolio, usando al VaR como medida de riesgo, no sea exacto y se esté considerando un punto mínimo como óptimo, cuando puede existir otro que sea más óptimo.

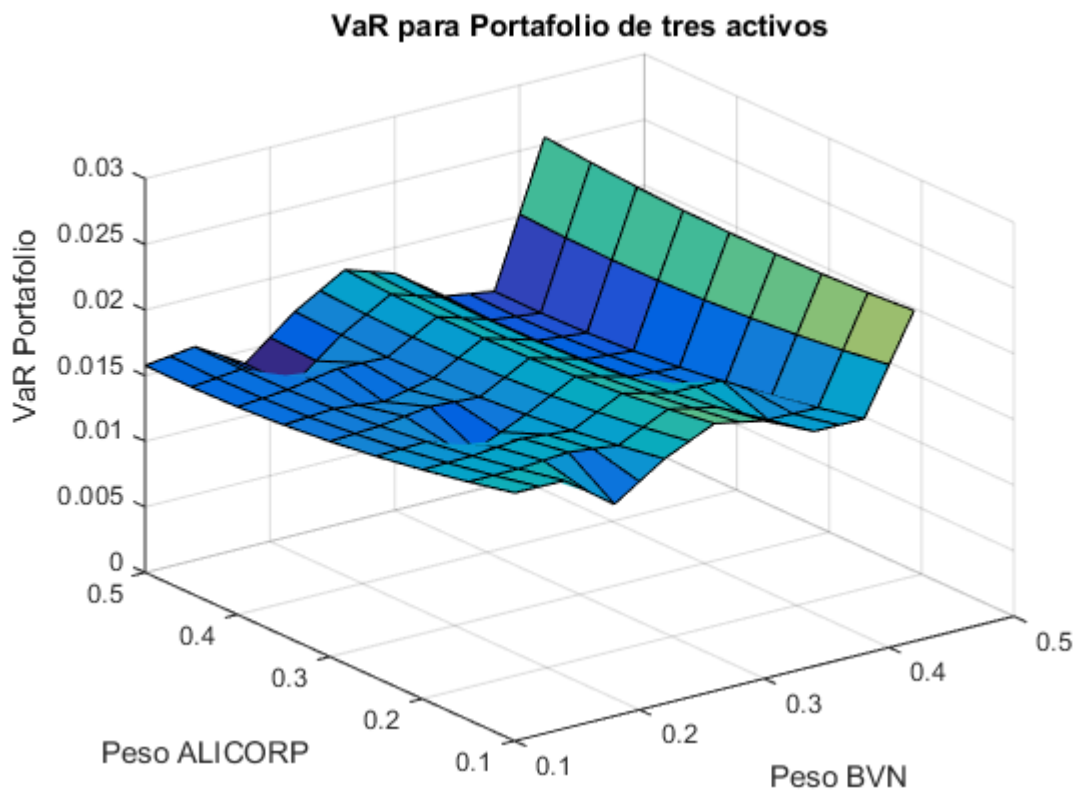


Figura 13 - VaR para Portafolio de tres activos.

De manera similar y considerando los mismos datos y supuestos, se realizó el cálculo del CVaR. Para este caso se puede notar que no posee problemas de convexidad, debido a la existencia de un único punto mínimo que optimizará el portafolio, por tanto se puede considerar al CVaR como medida coherente de riesgo. El gráfico del CVaR se puede observar en la figura 14.

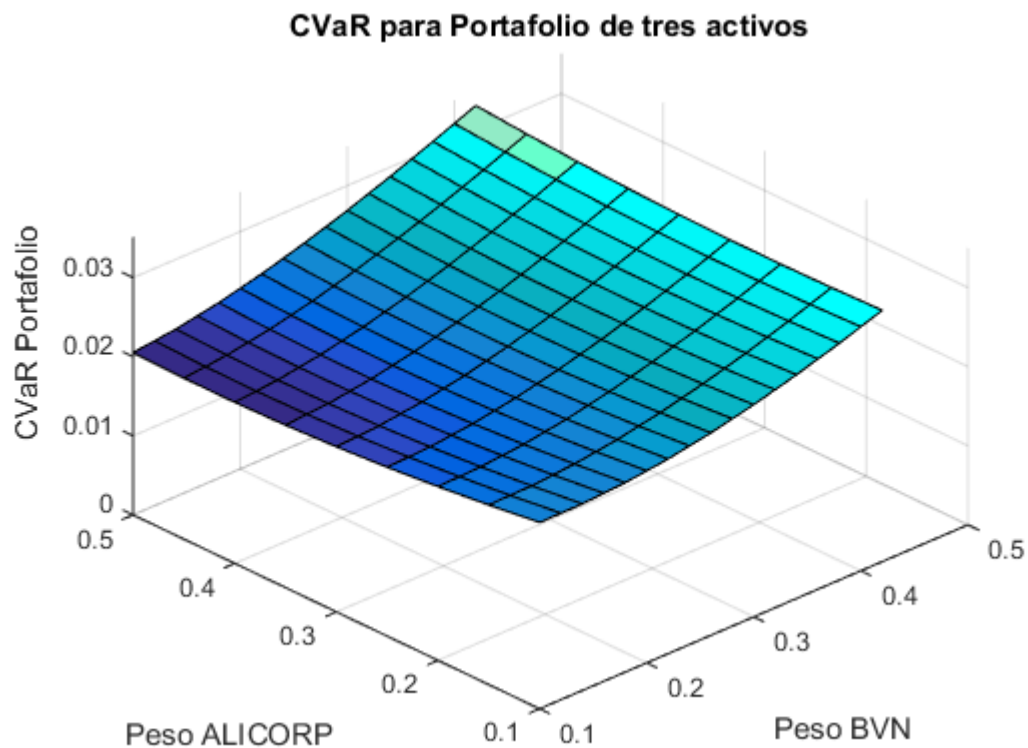


Figura 14 - CVaR para Portafolio de tres activos.

5.4. Desarrollo de los modelos de optimización

Con la finalidad de conseguir el portafolio óptimo del fondo 3, es necesario aplicar los modelos de optimización descritos en el Marco Metodológico. Para un mejor entendimiento, se definen los siguientes nombres para cada índice de referencia o *benchmark* elegido, los cuales se muestran en la tabla 16.

Tabla 16 - Nombre de variable asociado a cada Índice

PAIS	Indices representativos (USD)	Variable
PERÚ	MSCI All Peru Capped Index Net	w1
EEUU	MSCI USA Index Net	w2
REINO UNIDO (UK)	MSCI United Kingdom Index Net	w3
FRANCIA	MSCI France Index Net	w4
ALEMANIA	MSCI Germany Index Net	w5
ITALIA	MSCI Italy Index Net	w6
ESPAÑA	MSCI Spain Index Net	w7
BRASIL	MSCI Brasil Index Net	w8
CHILE	MSCI Chile Index Net	w9
MÉXICO	MSCI Mexico Index Net	w10
COLOMBIA	MSCI Colombia Index Net	w11
CHINA	MSCI China Index Net	w12
JAPÓN	MSCI Japan Index Net	w13

Una vez nombradas las variables, se definen los modelos de optimización del marco metodológico, considerando los límites de inversión en el exterior.

5.4.1. Modelo de Media Varianza – sin restricción de límites de inversión

Este modelo de optimización, basado en el modelo de Media – Varianza de Markowitz, nos permitirá calcular y obtener los pesos y la frontera eficiente del portafolio óptimo sin considerar los límites de inversión en el exterior como restricción.

Para obtener los pesos óptimos y la frontera eficiente, se correrá diez veces el modelo, dado diez rendimientos, de manera que se pueda obtener diez puntos que permita dibujar la frontera eficiente y obtener los pesos óptimos por cada corrida.

El modelo de optimización sin restricciones de límites en el exterior, se detalla a continuación

$$\min w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{13} w_i \sigma_{ij} w_j \quad (29)$$

$$st. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^{13} w_i = 1 \quad (31)$$

$$w_i \geq 0. \quad (32)$$

5.4.2. Modelo de Media Varianza – con restricción de límites de inversión

Usando el mismo enfoque anterior, se detalla el modelo de optimización de Media – Varianza, considerando los límites de inversión del exterior. Para ello se adiciona la restricción de sumatoria de pesos de los índices de referencias o benchmarks de países del exterior como un peso máximo de 60% del portafolio, según se indicó en la parte 5.2.

$$\min w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{13} w_i \sigma_{ij} w_j \quad (33)$$

$$st. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^{13} w_i = 1 \quad (35)$$

$$\sum_{i=2}^{13} w_i \leq 0.6 \quad (36)$$

$$w_i \geq 0. \quad (37)$$

Los índices de referencias o benchmarks de países del exterior son las variables w_2 hasta la variable w_{13} .

5.4.3. Modelo CVaR – sin restricción de límites de inversión

De manera similar al enfoque usado en la sección 5.4.1, se detalla el modelo de optimización usando como medida de riesgo el Conditional Value at Risk (CVaR), y usando un nivel de confianza del 95%.

$$\min CVaR_{\alpha}(X) = \lambda VaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda) CVaR_{\alpha}^{+}(X) , 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (38)$$

$$s.t. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (39)$$

$$\sum_{i=1}^{13} w_i = 1 \quad (40)$$

$$w_i \geq 0. \quad (41)$$

5.4.4. Modelo CVaR – con restricción de límites de inversión

Usando el mismo enfoque del modelo de optimización del CVaR, ahora se considerará el límite de inversión del exterior, el cual como ya fue descrito, será un límite máximo de 60% de inversión para activos del exterior. El modelo de optimización se detalla a continuación

$$\min CVaR_{\alpha}(X) = \lambda VaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda) CVaR_{\alpha}^{+}(X) , 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (42)$$

$$s.t. \quad \mu^T w = \mu_T \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^{13} w_i = 1 \quad (44)$$

$$\sum_{i=2}^{13} w_i \leq 0.6 \quad (45)$$

$$w_i \geq 0. \quad (46)$$

Los índices de referencias o benchmarks de países del exterior son las variables w_2 hasta la variable w_{13} .

5.5. Portafolios óptimos y pesos óptimos

5.5.1. Modelo de Media – Varianza sin límites de inversión

Para la obtención del portafolio y peso óptimo es necesario resolver matemáticamente este modelo de programación cuadrática, sin embargo con la ayuda del Matlab, se optimiza el proceso de desarrollo matemático y nos permite obtener el punto óptimo que resuelva el modelo de programación cuadrática

Como ya se mencionó, el modelo de optimización de Media – Varianza implica como restricción un rendimiento dado, de manera que a ese nivel de rendimiento se obtenga el mínimo riesgo para el portafolio. En este caso, se ha realizado diez corridas, cada una a un nivel de rendimiento dado distinto, de manera que se obtengan diez puntos óptimos que permitan graficar la frontera eficiente, y se obtenga un mapeo de los pesos óptimos por cada corrida.

Para este modelo de Media – Varianza, que no considera límites de inversión, los resultados de la optimización se muestran en la figura 15, mediante el gráfico de la frontera eficiente, que nos indica los puntos óptimos a distintos niveles de rendimiento y riesgo, en este caso va desde el punto de rendimiento 0.0483% diario y riesgo 0.4286% diario, hasta el punto de rendimiento 0.0721% diario y riesgo 0.5662% diario.

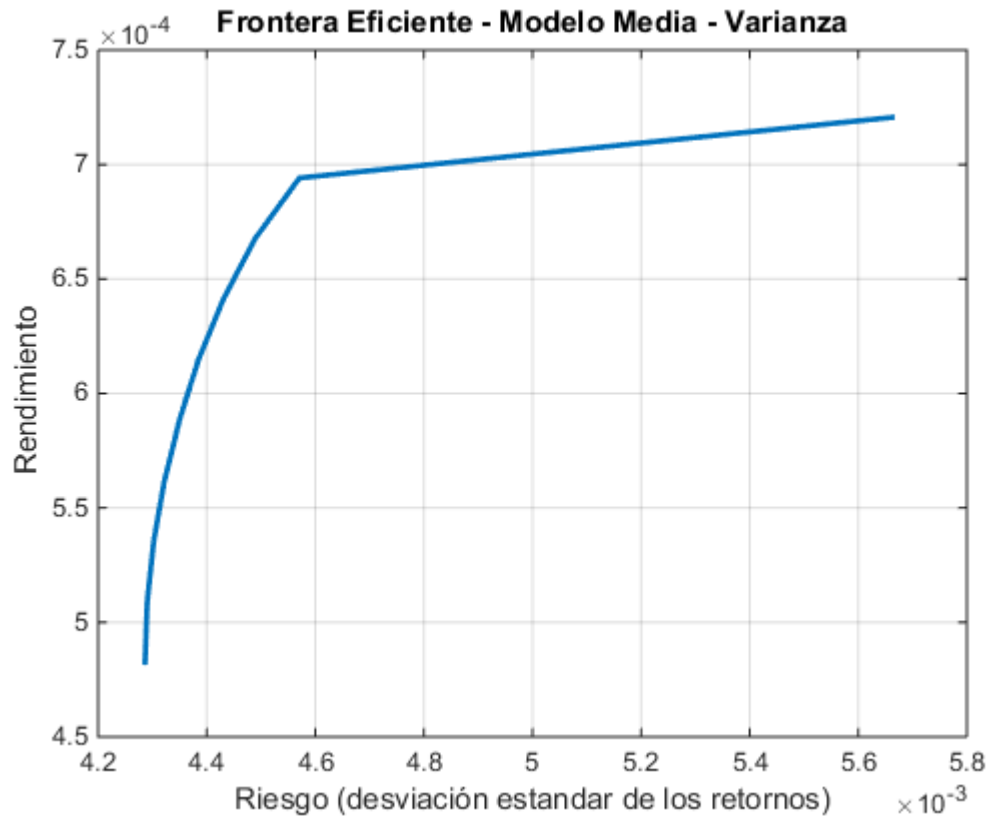


Figura 15 - Frontera eficiente: Modelo Media – Varianza sin restricciones de límite de inversión

Por otra lado, la figura 16, muestra la evolución del peso óptimo por cada una de las diez corridas realizadas al modelo, de donde se puede observar que el porcentaje invertido en el activo proxy *MSCI USA Index Net*, aumenta desde un valor de 48.82% hasta el 100%, siendo el índice más representativo del portafolio por el porcentaje de inversión, lo cual es coherente, puesto que se está comparando un índice de un país desarrollado con países que en su mayoría son mercados emergentes, sin embargo en las corridas iniciales, si se observa el porcentaje invertido en los índices de los otros países desarrollados como China, Japón y Reino Unido (UK).

Se puede observar que en la primera corrida el portafolio está compuesto por 48.92% del índice *MSCI USA Index Net*, 7.085% del índice *MSCI United Kingdom Index Net*,

8.313% del índice MSCI Chile Index Net, 8.48% del índice MSCI Colombia Index Net, 8.28% del índice MSCI China Index Net y 18.90% del índice MSCI Japan Index Net.

Adicionalmente, se muestran las siguientes características:

- Los índices MSCI USA Index Net y MSCI Japan Index Net aumentan su participación en el portafolio, a medida que aumenta el rendimiento del portafolio, llegando a tener una participación de 69.107% para el caso del índice MSCI USA Index Net y 25.392% para el caso del índice MSCI Japan Index Net en la corrida 9. Sin embargo el índice MSCI USA Index Net compone el 100% del portafolio en la última corrida.
- El índice MSCI China Index Net aumenta su participación hasta la corrida 6, llegando a tener una participación de 9.14% del portafolio y generando un portafolio de rendimiento 15.37% anual en esa corrida, sin embargo a partir de allí, va disminuyendo su participación en el portafolio, sin afectar el rendimiento general del portafolio, que continúa aumentando.
- Los índices MSCI United Kingdom Index Net, MSCI Chile Index Net y MSCI Colombia Index Net, presentan una disminución de su participación en el portafolio, conforme va aumentando el nivel de rendimiento del portafolio.

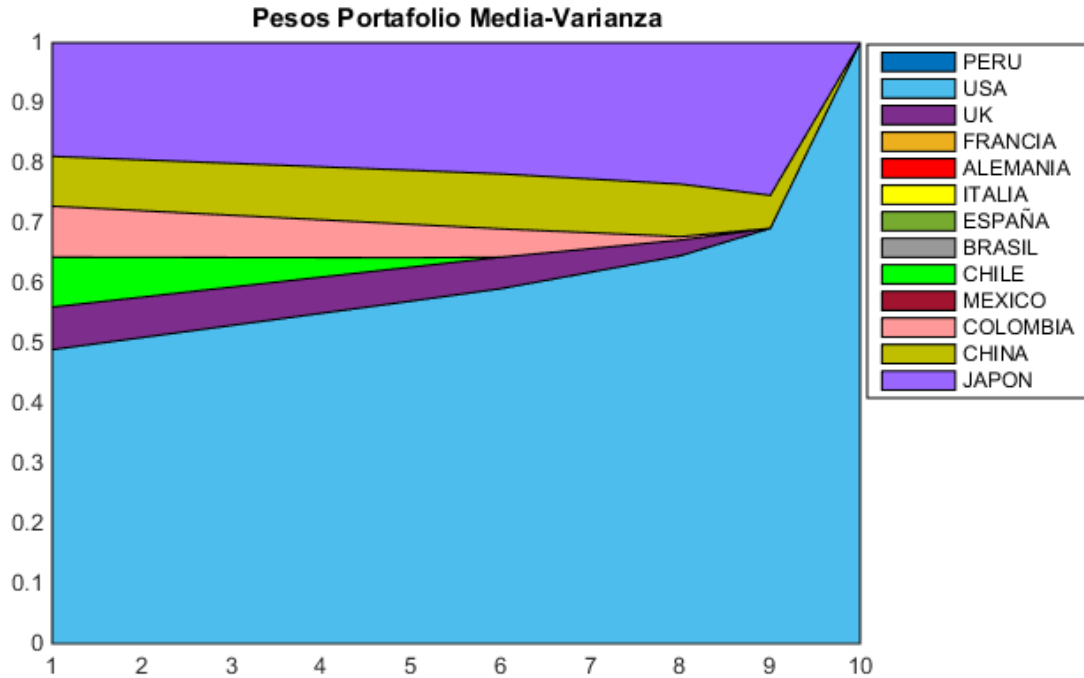


Figura 16 - Mapeo de Pesos Portafolio Media – Varianza, sin límites de inversión

El porcentaje invertido por cada corrida y por cada activo proxy usado en el modelo se muestran en la tabla 17.

A manera de resumen, la tabla 18 muestra el rendimiento / riesgo diario y anual óptimo para cada corrida, que permitió esbozar la frontera eficiente. El rendimiento anual dado va desde un nivel de 12.06% hasta 18.01% anual, mientras que el nivel óptimo de riesgo asociado al portafolio va desde un nivel de 6.77% hasta 8.95% anual, respectivamente por cada tipo de corrida.

Tabla 17 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo Media – Varianza sin límites de inversión

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PERU	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
USA	48.9263%	50.9467%	52.9672%	54.9876%	57.0081%	59.0856%	61.8256%	64.5656%	69.1067%	100.0000%
UK	7.0854%	6.7299%	6.3744%	6.0189%	5.6634%	5.2317%	3.9156%	2.5995%	0.0000%	0.0000%
FRANCIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
ALEMANIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
ITALIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
ESPAÑA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
BRASIL	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
CHILE	8.3131%	6.6237%	4.9342%	3.2448%	1.5554%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
MEXICO	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
COLOMBIA	8.4807%	7.7487%	7.0166%	6.2846%	5.5525%	4.7145%	2.6470%	0.5795%	0.0000%	0.0000%
CHINA	8.2874%	8.4652%	8.6430%	8.8208%	8.9987%	9.1458%	8.9375%	8.7292%	5.5013%	0.0000%
JAPON	18.9071%	19.4858%	20.0645%	20.6432%	21.2219%	21.8223%	22.6743%	23.5263%	25.3920%	0.0000%
Σ Wi	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 18 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento diario	0.0483%	0.0509%	0.0535%	0.0562%	0.0588%	0.0615%	0.0641%	0.0668%	0.0694%	0.0721%
Riesgo diario	0.4286%	0.4290%	0.4302%	0.4322%	0.4350%	0.4385%	0.4431%	0.4489%	0.4571%	0.5662%
Rendimiento anual	12.0648%	12.7259%	13.3870%	14.0481%	14.7092%	15.3703%	16.0313%	16.6924%	17.3535%	18.0146%
Riesgo anual (desv.)	6.7775%	6.7838%	6.8026%	6.8339%	6.8775%	6.9331%	7.0056%	7.0981%	7.2270%	8.9526%

5.5.2. Modelo CVaR sin límites de inversión

Siguiendo la misma metodología, se obtiene la frontera eficiente del Modelo CVaR, sin considerar los límites de inversión en el exterior, a partir del rendimiento y riesgo (CVaR) obtenido del proceso de optimización del modelo CVaR. En la figura 17 se puede observar la frontera eficiente del modelo CVaR, que va desde el punto de rendimiento 0.0492% diario y riesgo 0.8573% diario, hasta el punto de rendimiento 0.0721% diario y riesgo 1.1683% diario.

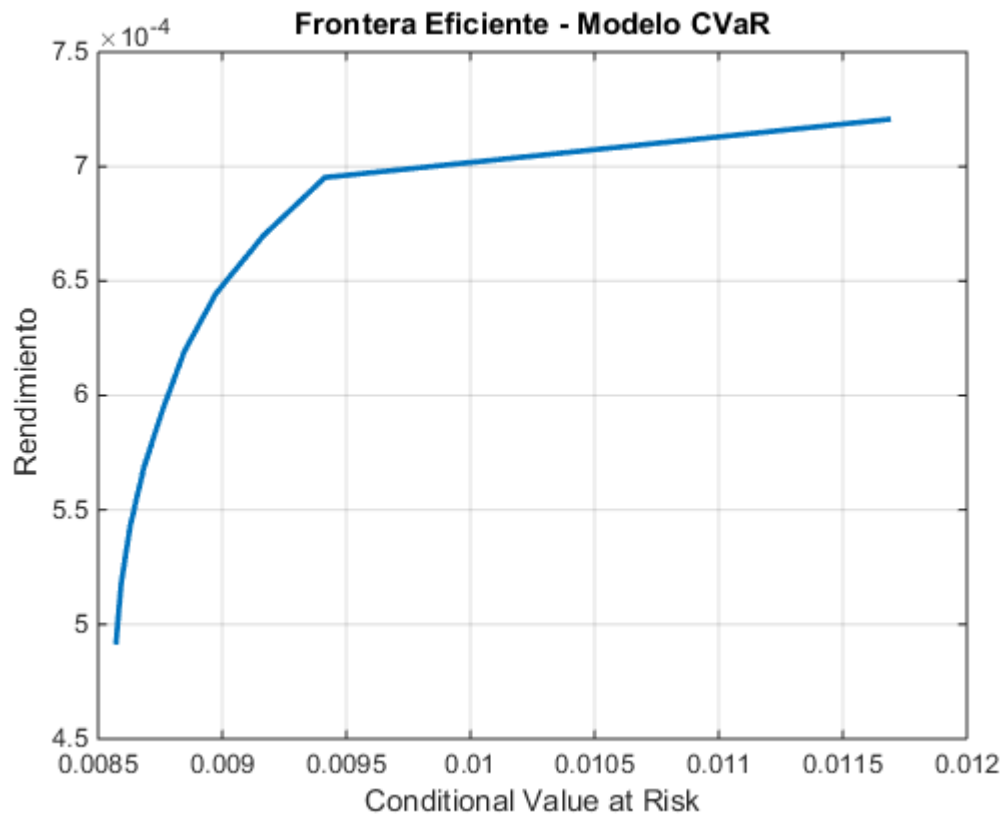


Figura 17 - Frontera eficiente: Modelo CVaR sin restricciones de límite de inversión

Por otro lado, para los pesos óptimos de este modelo de optimización CVaR, la Figura 18 muestra la evolución de los pesos óptimos de los índices de referencias o activos proxys que compone el portafolio por cada tipo de corrida.

Se puede observar que en la primera corrida el portafolio está compuesto por 48.775% del índice MSCI USA Index Net, 5.492% del índice MSCI United Kingdom Index Net, 7.130% del índice MSCI Chile Index Net, 8.081% del índice MSCI Colombia Index Net, 12.604% del índice MSCI China Index Net y 17.918% del índice MSCI Japan Index Net.

Adicionalmente, se muestran las siguientes características:

- Los índices MSCI USA Index Net y MSCI Japan Index Net aumentan su participación en el portafolio a medida que aumenta el rendimiento del portafolio, llegando a tener una participación de 64.814% para el caso del índice MSCI USA Index Net y 30.548% para el caso del índice MSCI Japan Index Net en la corrida 9. Sin embargo el índice MSCI USA Index Net compone el 100% del portafolio en la última corrida.
- El índice MSCI China Index Net aumenta su participación hasta la corrida 6, llegando a tener una participación de 13.609% del portafolio y generando un portafolio de rendimiento 15.4788% anual en esa corrida, sin embargo a partir de allí, va disminuyendo su participación en el portafolio, sin afectar el rendimiento general del portafolio, que continúa aumentando.
- El índice MSCI United Kingdom Index Net aumenta su participación en el portafolio solo hasta la corrida 3, llegando a tener una participación de 6.446% del portafolio y generando un portafolio de rendimiento 13.5769% anual en esa corrida, sin embargo a partir de allí presenta un comportamiento variado, llegando a tener en la corrida 6 una participación de 8.285%, y luego disminuir hasta la corrida final.

- Los índices MSCI Chile Index Net y MSCI Colombia Index Net, presentan una disminución de su participación en el portafolio, conforme se va aumentando el nivel de rendimiento del portafolio, a excepción de la participación del índice MSCI Colombia Index Net en la corrida 4, donde presenta una participación de 7.264%, para continuar disminuyendo hasta la corrida final.

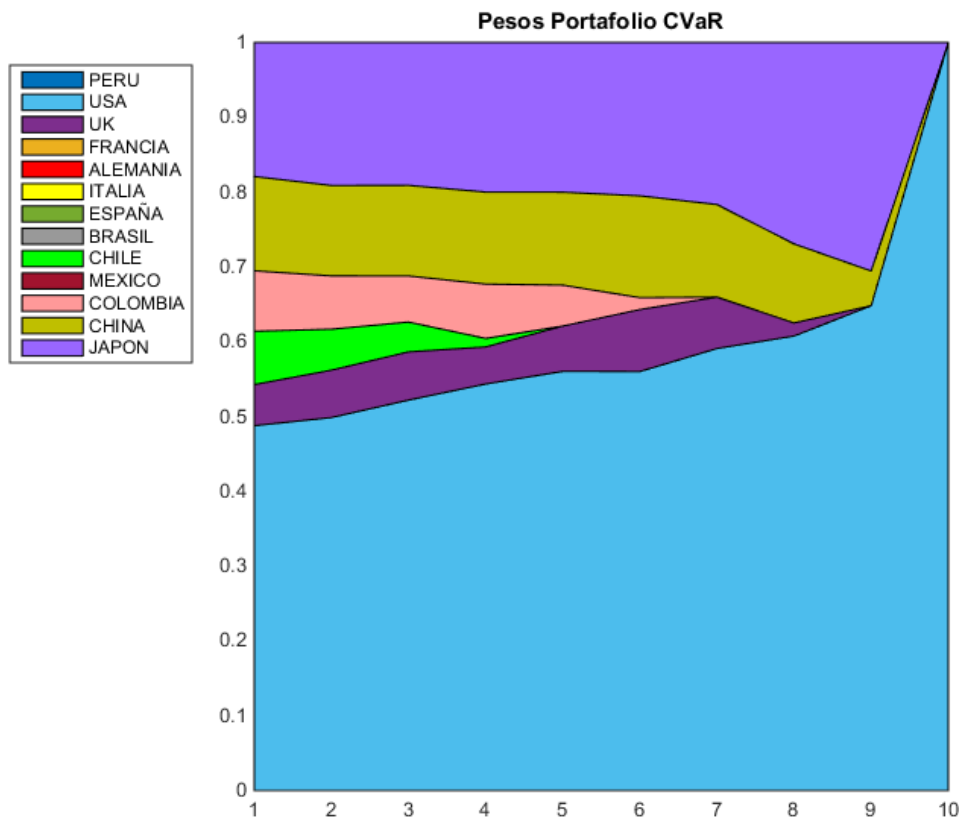


Figura 18 - Mapeo de Pesos Portafolio CVaR – sin límites de inversión

Para las demás corridas de la optimización del portafolio, la tabla 19 muestra el resumen de los pesos invertidos por cada tipo de activo proxy seleccionado.

A manera de resumen, la tabla 20 muestra el rendimiento / riesgo diario y anual óptimo por cada corrida realizada, que permitió obtener la frontera eficiente. Para este caso, el rendimiento anual dado del portafolio, va desde un nivel de 12.309% hasta 18.014% anual, mientras que el nivel óptimo de riesgo asociado al portafolio va desde un nivel de 13.5544% hasta 18.4728% anual, respectivamente por cada tipo de corrida.

Tabla 19 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo CVaR sin límites de inversión

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PERU	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
USA	48.775%	49.863%	52.196%	54.346%	56.036%	56.014%	59.093%	60.757%	64.814%	100.000%
UK	5.492%	6.333%	6.446%	4.950%	6.053%	8.285%	6.869%	1.754%	0.000%	0.000%
FRANCIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ALEMANIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ITALIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ESPAÑA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
BRASIL	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
CHILE	7.130%	5.476%	3.983%	1.142%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
MEXICO	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
COLOMBIA	8.081%	7.128%	6.166%	7.264%	5.470%	1.592%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
CHINA	12.604%	12.087%	12.109%	12.301%	12.425%	13.609%	12.376%	10.559%	4.638%	0.000%
JAPON	17.918%	19.113%	19.100%	19.996%	20.015%	20.499%	21.662%	26.929%	30.548%	0.000%
Σ Wi	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%

Tabla 20 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento diario	0.0492%	0.0518%	0.0543%	0.0568%	0.0594%	0.0619%	0.0645%	0.0670%	0.0695%	0.0721%
CVaR diario	0.8573%	0.8593%	0.8629%	0.8684%	0.8760%	0.8847%	0.8974%	0.9166%	0.9413%	1.1683%
Rendimiento anual	12.3090%	12.9429%	13.5769%	14.2108%	14.8448%	15.4788%	16.1127%	16.7467%	17.3807%	18.0146%
CVaR anual	13.5544%	13.5862%	13.6442%	13.7309%	13.8509%	13.9883%	14.1898%	14.4933%	14.8840%	18.4728%

5.5.3. Modelo de Media – Varianza con límites de inversión

Considerando ahora los límites de inversión del exterior que están reglamentados y supervisados por la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP's para el proceso y manejo del portafolio de cada fondo existente en las AFP's, se vuelve a optimizar el modelo de Media – Varianza.

Como se ha descrito en la parte 5.2 sobre el Marco regulatorio a las AFP's y en el modelo de optimización de la parte 5.4.2., el límite de inversión a considerar es de 60% para activos del exterior. Resolviendo el modelo de optimización, se obtiene la frontera eficiente del portafolio, la cual se muestra en la figura 19, donde se puede observar que la frontera eficiente parte del punto de rendimiento diario 0.0155% y riesgo diario 0.5647% hasta el punto de rendimiento diario 0.0244% y riesgo diario 0.6278%.

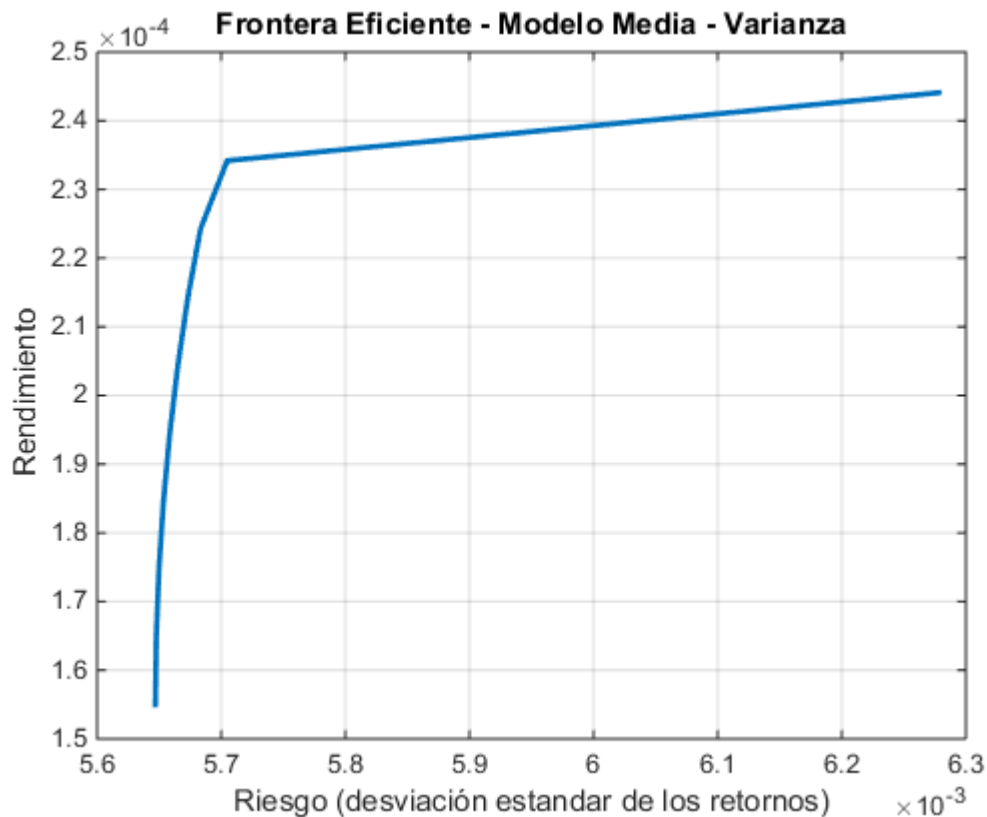


Figura 19 - Frontera eficiente: Modelo Media – Varianza con restricciones de límite de inversión

Por otro lado, para los pesos óptimos de este modelo de optimización de Media - Varianza, la Figura 20 muestra la evolución de los pesos óptimos de los índices de referencias o activos proxys que compone el portafolio por cada corrida.

Se puede observar que en la primera corrida el portafolio está compuesto por 40% del índice MSCI All Peru Capped Index Net, 27.712% del índice MSCI USA Index Net, 2.571% del índice MSCI United Kingdom Index Net, 5.467% del índice MSCI Colombia Index Net, 5.417% del índice MSCI China Index Net y 18.833% del índice MSCI Japan Index Net.

Adicionalmente, se muestran las siguientes características:

- El índice MSCI All Peru Capped Index Net presenta un porcentaje de participación en el portafolio constante e igual a 40%.
- Los índices MSCI USA Index Net y MSCI Japan Index Net aumentan su participación en el portafolio, a medida que aumenta el rendimiento del portafolio, llegando a tener una participación de 36.869% para el caso del índice MSCI USA Index Net y 22.398% para el caso del índice MSCI Japan Index Net en la corrida 9.
- Para la corrida 10, el portafolio está compuesto de 40% del índice MSCI All Peru Capped Index Net y 60% del índice MSCI USA Index Net.
- Los índices MSCI United Kingdom Index Net, MSCI China Index Net y MSCI Colombia Index Net, presentan una disminución de su participación en el portafolio, conforme va aumentando el nivel de rendimiento del portafolio.

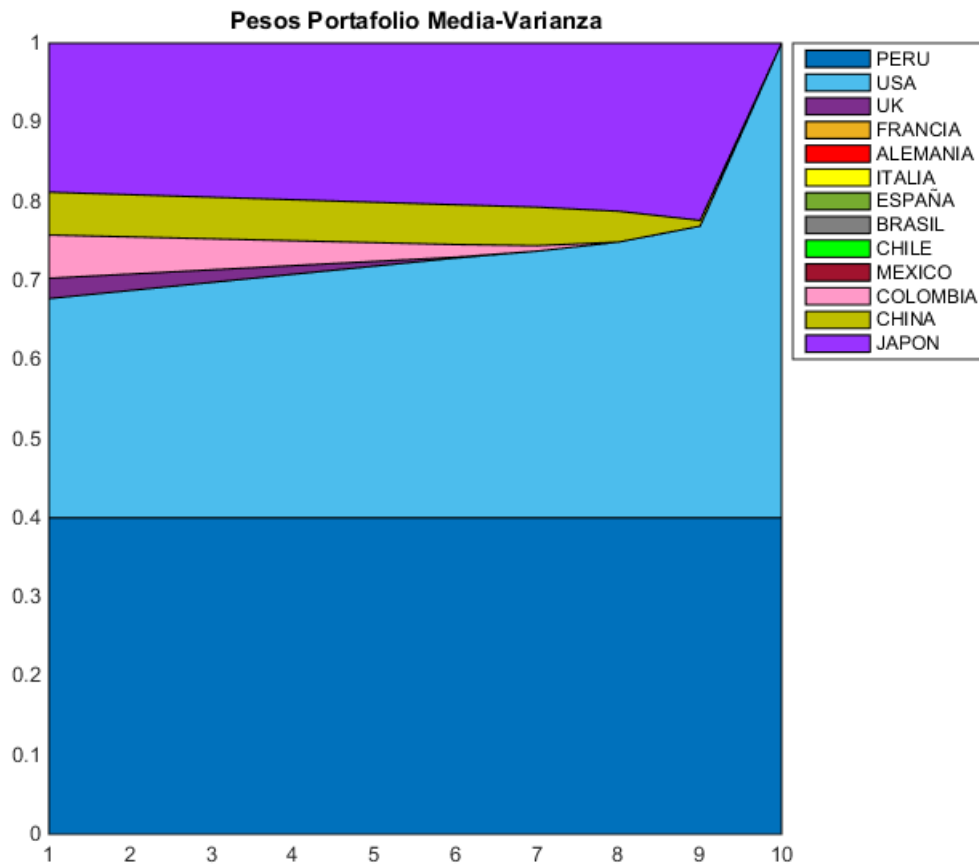


Figura 20 - Mapeo de Pesos Portafolio Media - Varianza – con límites de inversión

Para las demás corridas de la optimización del portafolio, la tabla 21 muestra el resumen de los pesos invertidos por cada tipo de activo proxy seleccionado.

A manera de resumen, la tabla 22 muestra el rendimiento / riesgo diario y anual óptimo por cada corrida realizada, que permitió obtener la frontera eficiente. Para este caso, el rendimiento anual dado del portafolio, va desde un nivel de 3.8748% hasta 6.102% anual, mientras que el nivel óptimo de riesgo asociado al portafolio va desde un nivel de 8.9286% hasta 9.9268% anual, respectivamente por cada tipo de corrida.

Tabla 21 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo Media – Varianza con límites de inversión

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PERU	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%	40.000%
USA	27.712%	28.738%	29.763%	30.789%	31.815%	32.840%	33.715%	34.863%	36.869%	60.000%
UK	2.571%	2.079%	1.586%	1.093%	0.601%	0.108%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
FRANCIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ALEMANIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ITALIA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
ESPAÑA	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
BRASIL	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
CHILE	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
MEXICO	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
COLOMBIA	5.467%	4.693%	3.919%	3.145%	2.371%	1.598%	0.691%	0.000%	0.000%	0.000%
CHINA	5.417%	5.339%	5.261%	5.183%	5.105%	5.027%	4.868%	3.888%	0.733%	0.000%
JAPON	18.833%	19.151%	19.470%	19.789%	20.108%	20.427%	20.726%	21.249%	22.398%	0.000%
Σ Wi	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%

Tabla 22 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento diario	0.0155%	0.0165%	0.0175%	0.0185%	0.0195%	0.0204%	0.0214%	0.0224%	0.0234%	0.0244%
Riesgo diario	0.5647%	0.5648%	0.5650%	0.5654%	0.5659%	0.5665%	0.5673%	0.5683%	0.5705%	0.6278%
Rendimiento anual	3.8748%	4.1223%	4.3698%	4.6172%	4.8647%	5.1122%	5.3596%	5.6071%	5.8546%	6.1020%
Riesgo anual (desv.)	8.9286%	8.9298%	8.9332%	8.9390%	8.9470%	8.9574%	8.9701%	8.9862%	9.0201%	9.9268%

5.5.4. Modelo CVaR con límites de inversión

De manera similar al modelo anterior, para el desarrollo y solución del modelo de optimización CVaR, se considerará los límites de inversión que regula la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP's, se considerará un límite de inversión de 60% para activos del exterior, tal y como se ha demostrado y mencionado en la parte 5.2 y 5.4.4.

Resolviendo el modelo de optimización CVaR, se obtiene la frontera eficiente del portafolio, la cual se muestra en la figura 21, donde se puede observar que la frontera eficiente inicia en el punto de rendimiento diario 0.0166% y riesgo diario 1.1549% hasta el punto de rendimiento diario 0.0244% y riesgo diario 1.2986%.

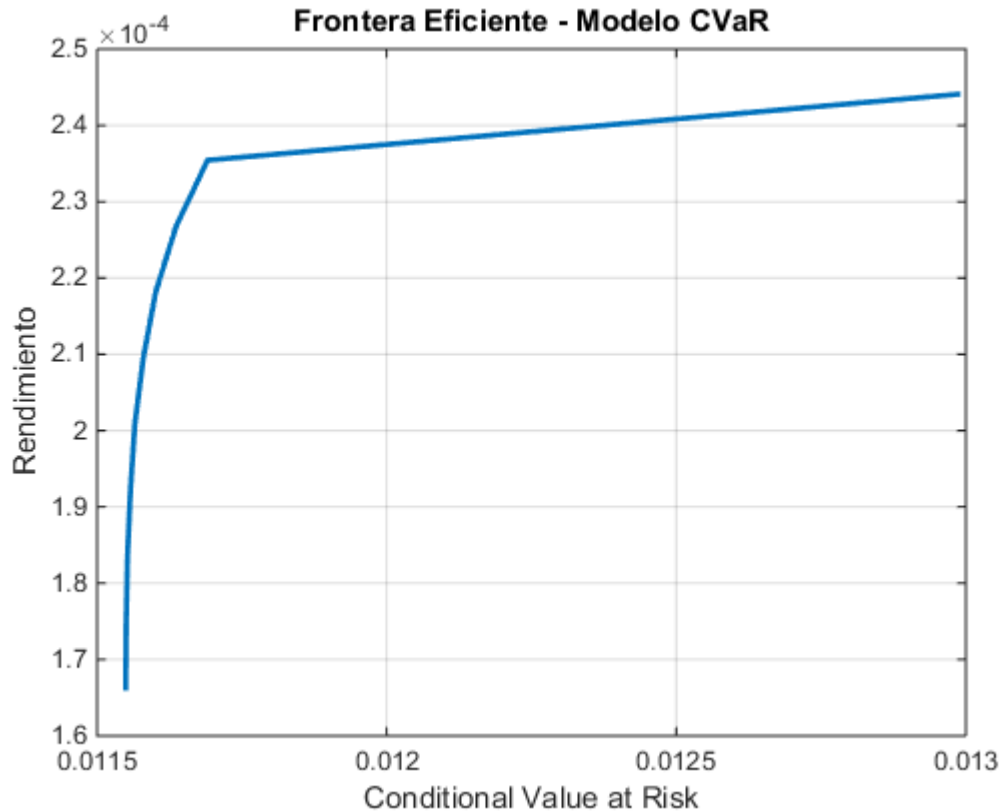


Figura 21 - Frontera eficiente: Modelo CVaR con restricciones de límite de inversión

Por otro lado, para los pesos óptimos de este modelo de optimización de Media - Varianza, la Figura 22 muestra la evolución de los pesos óptimos de los índices de referencias o activos proxys que compone el portafolio por cada corrida.

Se puede observar que en la primera corrida el portafolio está compuesto por 40% del índice MSCI All Peru Capped Index Net, 27.6724% del índice MSCI USA Index Net, 5.3690% del índice MSCI United Kingdom Index Net, 2.928% del índice MSCI Colombia Index Net, 6.2635% del índice MSCI China Index Net y 17.7671% del índice MSCI Japan Index Net.

Adicionalmente, se muestran las siguientes características:

- El índice MSCI All Peru Capped Index Net presenta un porcentaje de participación en el portafolio constante e igual a 40%.
- Los índices MSCI USA Index Net y MSCI Japan Index Net aumentan su participación en el portafolio, a medida que aumenta el rendimiento del portafolio, llegando a tener una participación de 37.8236% para el caso del índice MSCI USA Index Net y 21.761% para el caso del índice MSCI Japan Index Net en la corrida 9.
- Para la corrida 10, el portafolio está compuesto de 40% del índice MSCI All Peru Capped Index Net, 59.9955% del índice MSCI USA Index Net, 0.0041% del índice MSCI Japan Index Net, 0.0001% del índice MSCI China Index Net, 0.0001% del índice MSCI Francia Index Net y 0.0002% del índice MSCI Germany Index Net.
- El índice MSCI China Index Net presenta un comportamiento variado, aumentando su participación hasta la corrida 6 llegando a tener 7.4116% de participación, y generando un portafolio de rendimiento 5.2376% hasta esa corrida, y luego disminuir hasta la corrida final.

- Los índices MSCI United Kingdom Index Net, y MSCI Colombia Index Net, presentan una disminución de su participación en el portafolio, conforme va aumentando el nivel de rendimiento del portafolio.

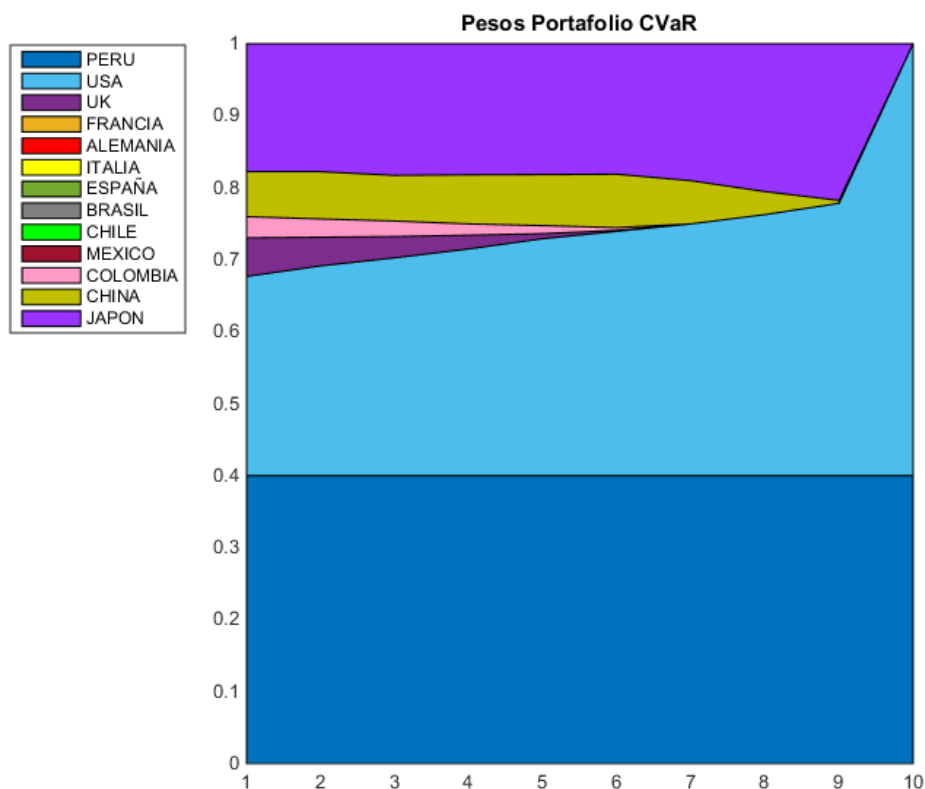


Figura 22 - Mapeo de Pesos Portafolio CVaR – con límites de inversión

Para las demás corridas de la optimización del portafolio, la tabla 23 muestra el resumen de los pesos invertidos por cada tipo de activo proxy seleccionado.

A manera de resumen, la tabla 24 muestra el rendimiento / riesgo diario y anual óptimo por cada corrida realizada, que permitió obtener la frontera eficiente. Para este caso, el rendimiento anual dado del portafolio, va desde un nivel de 4.1572% hasta 6.1019% anual, mientras que el nivel óptimo de riesgo asociado al portafolio va desde un nivel de 18.2611% hasta 20.5326% anual, respectivamente por cada tipo de corrida.

Tabla 23 - Pesos óptimos por cada corrida del modelo CVaR con límites de inversión

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PERU	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%	40.0000%
USA	27.6724%	29.1387%	30.2526%	31.4859%	32.9121%	33.9396%	34.9690%	36.2644%	37.8236%	59.9955%
UK	5.3690%	3.9792%	2.9631%	1.9170%	0.7043%	0.1406%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
FRANCIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0001%
ALEMANIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0002%
ITALIA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
ESPAÑA	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
BRASIL	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
CHILE	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
MEXICO	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
COLOMBIA	2.9280%	2.5408%	2.1511%	1.5667%	1.1155%	0.3772%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
CHINA	6.2635%	6.5611%	6.3397%	6.8119%	7.0846%	7.4116%	5.9986%	3.1916%	0.4147%	0.0001%
JAPON	17.7671%	17.7802%	18.2935%	18.2185%	18.1834%	18.1310%	19.0324%	20.5440%	21.7617%	0.0041%
Σ Wi	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%

Tabla 24 - Rendimiento y riesgo diario y anual del portafolio óptimo

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento diario	0.0166%	0.0175%	0.0184%	0.0192%	0.0201%	0.0210%	0.0218%	0.0227%	0.0235%	0.0244%
CVaR diario	1.1549%	1.1550%	1.1552%	1.1558%	1.1565%	1.1580%	1.1601%	1.1636%	1.1691%	1.2986%
Rendimiento anual	4.1572%	4.3733%	4.5894%	4.8054%	5.0215%	5.2376%	5.4537%	5.6698%	5.8859%	6.1019%
CVaR anual	18.2611%	18.2625%	18.2661%	18.2741%	18.2861%	18.3092%	18.3429%	18.3989%	18.4847%	20.5326%

5.6. Comparación de fronteras eficientes e impacto de los límites de inversión

En esta sección se realizara un análisis comparativo de las fronteras eficientes para los modelos de Media – Varianza y el CVaR, inicialmente sin considerar los límites de inversión y luego considerando los límites de inversión para observar que efecto tiene la inclusión de los límites de inversión en los resultados de los pesos óptimos del portafolio.

5.6.1. Fronteras eficientes sin restricción de límites de inversión

Para este primer caso, no se tomarán en cuenta los límites de inversión. De los resultados de pesos óptimos, rendimientos y riesgos óptimos obtenidos en los modelos de Media – Varianza y CVaR, se realizará la comparación de las fronteras eficientes obtenidas, para ello se debe agregar los resultados obtenidos en el modelo de optimización CVaR al modelo de optimización de Media – Varianza, esto se realiza reemplazando los pesos obtenidos del modelo CVaR en el modelo de Media – Varianza y calcular por cada corrida el rendimiento y riesgo del modelo CVaR para compararlo con el modelo de Media – Varianza y así obtener un comparativo de las fronteras eficientes de ambos modelos en una sola medida de riesgo (desviación estándar).

La figura 23 muestra el comparativo de fronteras eficientes, donde se puede observar que la frontera eficiente del modelo de Media – Varianza obtiene un mejor resultado que la frontera eficiente del modelo CVaR, esto debido a que a un mismo nivel de rendimiento, el modelo de Media – Varianza presenta menos nivel de riesgo que el modelo CVaR.

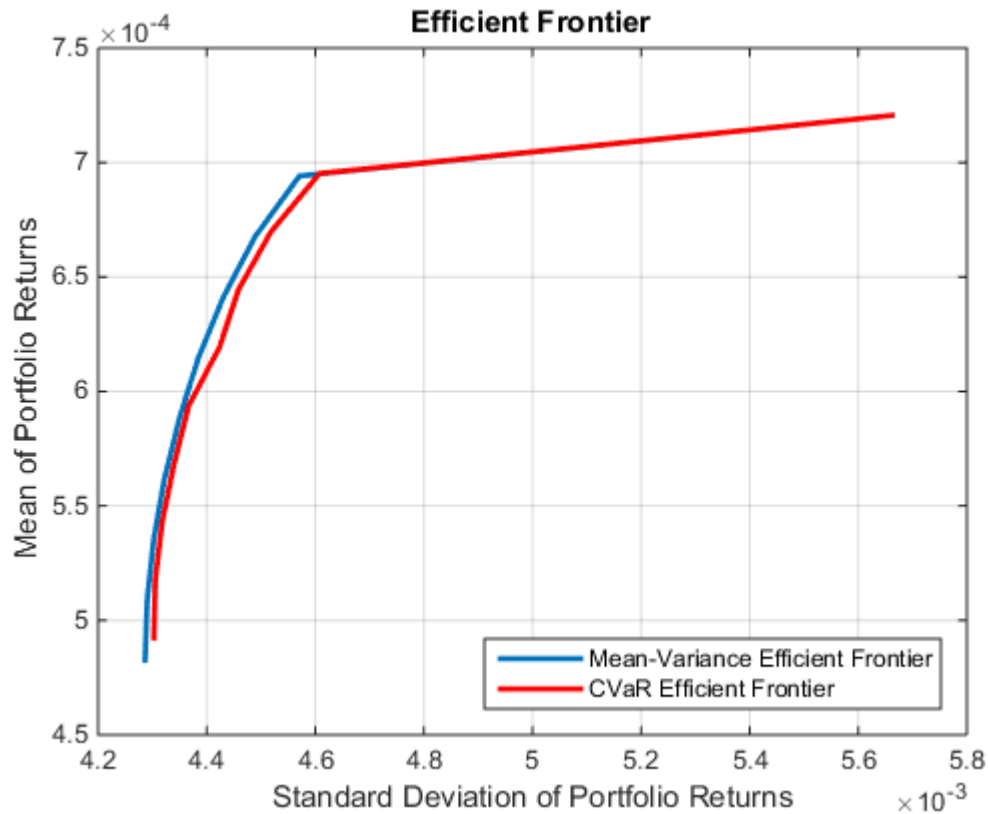


Figura 23 - Comparativo de fronteras eficientes Media – Varianza / CVaR.

5.6.2. Fronteras eficientes con restricción de límites de inversión

Para este caso, si se va a considerar los límites de inversión que por reglamento de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP's se debe tomar en cuenta para las inversiones de un fondo de AFP. Como se ha mencionado, el porcentaje máximo para activos del exterior del fondo 3 es de 60%, limite que ha sido considerado para obtener las fronteras eficientes de los modelos de Media – Varianza y CVaR.

Siguiendo la misma metodología que el caso anterior, se debe uniformizar la medida de riesgo, en este caso a la desviación estándar o riesgo del portafolio de Media – Varianza; para ello se reemplazan los pesos obtenidos del modelo CVaR en el modelo de Media – Varianza, y se obtienen los rendimientos y riesgos por cada corrida para el modelo CVaR.

La figura 24 muestra el comparativo de las fronteras eficientes de los dos modelos de optimización, para este caso, podemos notar que la frontera eficiente del modelo CVaR supera a la frontera eficiente del modelo de Media – Varianza en gran parte del tramo de la curva, para ser más exactos, la tabla 25 muestra el nivel de rendimiento / riesgo diario y anual del modelo CVaR agregado al modelo de Media - Varianza y que además nos permite compararlo con el nivel de rendimiento / riesgo del modelo de Media – Varianza que se muestra en la tabla 26, con esto se logra tener una misma medida de riesgo (desviación estándar o volatilidad) que nos permite concluir que el modelo CVaR es más eficiente que el modelo de Media – Varianza.

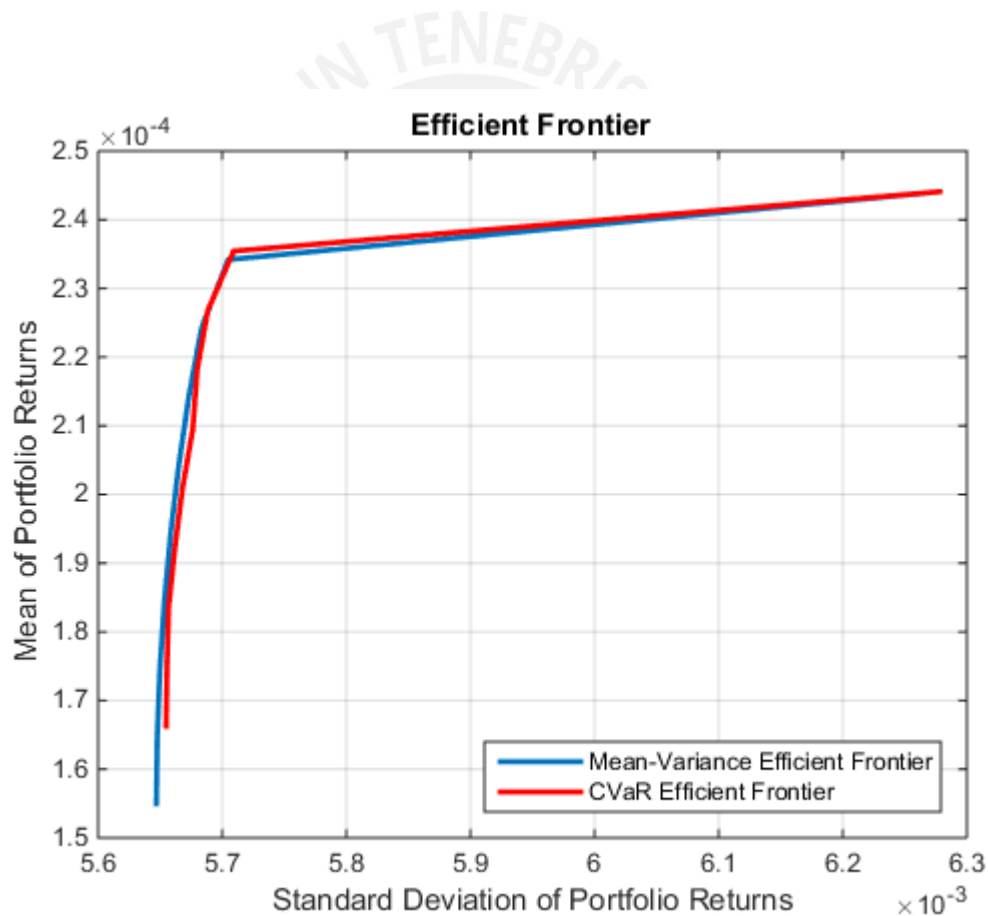


Figura 24 - Comparativo de fronteras eficientes Media – Varianza / CVaR.

Tabla 25 - Rendimiento / riesgo diario y anual del modelo CVaR agregado al modelo de Media - Varianza

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Renidmiento diairo	0.0166%	0.0175%	0.0184%	0.0192%	0.0201%	0.0210%	0.0218%	0.0227%	0.0235%	0.0244%
Riesgo diario	0.5652%	0.5653%	0.5654%	0.5659%	0.5665%	0.5673%	0.5677%	0.5685%	0.5706%	0.6275%
Renidmiento anual	4.1572%	4.3733%	4.5894%	4.8054%	5.0215%	5.2376%	5.4537%	5.6698%	5.8859%	6.1019%
Riesgo anual (desv.)	8.9363%	8.9374%	8.9394%	8.9474%	8.9571%	8.9702%	8.9758%	8.9894%	9.0222%	9.9212%

Tabla 26 - Rendimiento / riesgo diario y anual del modelo de Media – Varianza.

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Renidmiento diairo	0.0155%	0.0165%	0.0175%	0.0185%	0.0195%	0.0204%	0.0214%	0.0224%	0.0234%	0.0244%
Riesgo diario	0.5647%	0.5648%	0.5650%	0.5654%	0.5659%	0.5665%	0.5673%	0.5683%	0.5705%	0.6278%
Renidmiento anual	3.8748%	4.1223%	4.3698%	4.6172%	4.8647%	5.1122%	5.3596%	5.6071%	5.8546%	6.1020%
Riesgo anual (desv.)	8.9286%	8.9298%	8.9332%	8.9390%	8.9470%	8.9574%	8.9701%	8.9862%	9.0201%	9.9268%

Capítulo 6. RESULTADOS

En el presente capítulo, se mostrará los resultados de la presente investigación, de las dos principales primeras corridas para cada caso: Modelo Media – Varianza sin y con límites de inversión, así mismo el Modelo CVaR sin y con límites de inversión.

6.1. Impacto del límite de inversión en el exterior

Para este caso, analizaremos el impacto de los límites de inversión en el exterior que según normativa de la SBS (Superintendencia de Banca y Seguro) y el BCR, se ubica en 42% (límite operativo de inversión para los tres fondos). Del cual, como se desarrolló y calculó, para el fondo tres, el límite considerado es de 60%.

De las corridas desarrolladas, para el análisis de fronteras, podemos notar el impacto que se genera en volatilidad y rendimiento del portafolio al considerar dicho límite de inversión.

La tabla 27 muestra el comparativo del portafolio optimizado, considerando el modelo de media – varianza, de donde podemos notar la disminución del rendimiento del portafolio al considerar la restricción de límite de inversión en el exterior (de 12.06% anual a 3.8748%), lógicamente, al incluir una restricción en el proceso de optimización la volatilidad es distinta, pues el portafolio considera otros activos en su selección.

Tabla 27 – Comparativo rendimiento / riesgo anual del modelo de Media – Varianza.

	Sin restricciones		Con restricciones	
Corrida	1	2	1	2
Rendimiento anual	12.0648%	12.7259%	3.8748%	4.1223%
Riesgo anual (desv.)	6.7775%	6.7838%	8.9286%	8.9298%

De manera similar, la tabla 28 muestra el comparativo del portafolio optimizado, considerando el modelo CVaR, de donde de igual forma, se puede notar la disminución del rendimiento del portafolio al considerar la restricción de límite de inversión en el exterior (de 12.3090% anual a 4.1572%).

Tabla 28 – Comparativo rendimiento / riesgo anual del modelo CVaR.

Corrida	Sin restricciones		Con restricciones	
	1	2	1	2
Rendimiento anual	12.3090%	12.9429%	4.1572%	4.3733%
Riesgo anual (desv.)	13.5544%	13.5862%	18.2611%	18.2625%



Capítulo 7. CONCLUSIONES

La presente investigación realizó como primer objetivo, un análisis del impacto que generan los límites de inversión en la gestión de los portafolios de los fondos tipo 3 de las AFPs en el Perú. El análisis realizado se desarrolló sobre la base de los tipos de clases de activos que invierten las AFP, es decir, sobre la base del sistema de pensiones del Perú, y no sobre una AFP en especial. Para esto se dividió en tipos de clases de activos como el mercado de Renta Variable Local (RVL) y Renta Variable Extranjera (RVE), debido a que es conocido que el Fondo Tipo 3 de las AFPs es el más riesgoso en comparación con los otros 3 fondos que existen (fondo tipo 0, fondo tipo 1 y fondo tipo 2). Sobre la base de esas dos subclases de activos se separó en países, como se describió en el apartado 5.4 y se seleccionó los activos proxys del MSCI para cada subclase (países).

Una vez obtenido los activos proxys o indicadores de referencia (benchmark) se desarrolló los modelos de optimización de tal manera que nos permita obtener resultados que demuestre la hipótesis planteada en la presente investigación.

En primer lugar, el empleo de una medida coherente de riesgo fue fundamental en el proceso de optimización del portafolio, para ello se formó un portafolio simple de dos activos (acciones), y se demostró que el Value at Risk (VaR) no es una medida coherente de riesgo, debido a que no cumple dos propiedades importantes, tales como la falta de convexidad, es decir la existencia de un único mínimo que permita obtener el punto de portafolio mínimo y óptimo con certeza; y sobre todo no cumple la propiedad de subaditividad, es decir que el VaR del portafolio formado por los activos sea menor a la suma del VaR de cada activo por individual, caso contrario a lo que ocurre con el

CVaR que si cumple dichas propiedades, por tanto se concluyó que el CVaR si es una medida coherente de riesgo y puede ser usado en la optimización del portafolio.

Una vez definido las medidas de riesgo a usar, en este caso la volatilidad (representada por la desviación estándar de los retornos) y el CVaR, se desarrollaron los modelos de optimización, sin considerar y considerando los límites de inversión, de tal forma que nos permitió evaluar en primer lugar qué medida de riesgo es más óptima y en segundo lugar evaluar el impacto de los límites de inversión.

Por último, se concluyó que el modelo CVaR es más óptimo que el modelo de media varianza (representando por la volatilidad de los rendimientos), esto fue comprobado calculando y esbozando las fronteras eficientes de cada modelo, y observar qué modelo entrega un menor riesgo a un mismo nivel de rendimiento, o qué modelo entrega un mayor rendimiento a un mismo nivel de riesgo.

Así mismo se comprobó el impacto de los límites de inversión en el exterior (según reglamentación) en la gestión de los portafolios. Esto se desarrolló adicionando restricciones que limiten el porcentaje invertido en activos del exterior, según normativa de la SBS. Por lo que se concluyó que el uso de límites de inversión genera un impacto a la gestión del portafolio, limitando la diversificación del portafolio en activos de mercados desarrollados, y limitando obtener mayores niveles de rendimiento para el portafolio, sin embargo, es preciso mencionar que este tipo de regulación para las AFP's es necesario a fin de evitar portafolio expuestos a niveles altos de volatilidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. ANDREW JOHNSON, Christian
2000 Métodos de evaluación del riesgo para portafolios de inversión. Documento de trabajo. Santiago de Chile: Banco Central de Chile. Consulta: 12 de marzo del 2017.
<http://si2.bcentral.cl/public/pdf/documentos-trabajo/pdf/dtbc67.pdf>
2. ARTZNER, Philippe y otros
1998 Coherent Measures of Risk. Strasbourg: Université Louis Pasteur. Consulta: 01 de marzo del 2017.
<https://people.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf>
3. Banco Central de Reserva del Perú
2007 Límite de Inversión en el Exterior para las AFP. Consulta: 13 de febrero del 2017.
<http://www.bcrp.gob.pe/docs/Publicaciones/Presentaciones-Discursos/2007/Presentacion-02-2007.pdf>
4. Banco Central de Reserva del Perú
2014 BCRP eleva el límite de inversión en el exterior de las AFP. Nota Informativa. Consulta: 13 de febrero del 2017.
<http://www.bcrp.gob.pe/docs/Transparencia/Notas-Informativas/2014/nota-informativa-2014-09-17.pdf>
5. BRANDIMARTE, Paolo
2014 Handbook in Monte Carlo Simulation, applications in finance engineering, Risk management and economics. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

6. CAROL, Alexander
2008 Market Risk Analysis IV, Value at Risk Models. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.
7. COURT, Eduardo y Joan TARRADELLAS
2010 Mercado de Capitales. Pearson Educación, México.
8. DOWD, Kevin
2005 Measuring Market Risk Second Edition. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.
9. ENGELS, Marnix
2004 Portfolio Optimization: Beyond Markowitz. Master's Thesis. Leiden: Universiteit Leiden. Consulta: 29 de enero del 2017.
http://members.chello.nl/m.engels677/Scriptie/Portfolio_Optimization_Beyond_Markowitz.pdf
10. FABOZZI, Frank y Harry MARKOWITZ
2011 The Theory and Practice of Investment Management. Second Edition. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.
11. FORGHIERI, Simone
2014 Portfolio Optimization using CVaR, Italia: Libera Università Internazionale Degli Studi Sociali. Department of Economics and Finance. Consulta: 29 de enero del 2017.

12. FRANCO ARBELÁEZ, Luis y Eduardo FRANCO CEBALLOS

2005 El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo. Colombia: Revista Ingenierías Universidad de Medellín, vol. 4, num. 6. pp. 43-54. Consulta: 09 de enero del 2017.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=75040604>

13. GARCÍA, Romero

2005 Optimización del Conditional Value at Risk: Aplicación a las Compañías de Seguros en Chile. Santiago de Chile: Universidad de Chile. Consulta: 20 de enero del 2017.

http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/garcia_r3/sources/garcia_r3.pdf

14. HILLIER, Frederick y Gerald LIEBERMAN

2010 Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw – Hill / Interamericana Editores. Consulta: 28 de febrero del 2020.

15. HULL, John

2015 Risk Management and Financial Institutions”. Fourth Edition. Wily Finance Series. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

16. JORION, Philippe

2011 Financial Risk Manager Handbook. FRM part I/ part II. Sixth Edition GARP – Global Association of Risk Professionals. New Jersey: John Wiley & Sons, Ltd.

17. KANURA, Vinay
2008 Portfolio Optimization using Value at Risk. London: Imperial College
London
18. KAPLAN, Schweser
215 Kaplan, Inc., d.b.a. Kaplan Schweser. FRM 2016 Part I Book 4:
Valuation and Risk Models
19. KISIALA, Jakob
2015 Conditional Value at Risk: Theory and Applications. Edinburgh:
University of Edinburgh, Dissertation Presented for the Degree of
MSc in Operational Research. Consulta: 29 de enero del 2017.
http://www.maths.ed.ac.uk/~prichtar/docs/Kisiala_Dissertation.pdf
20. KROKHMAL, Pavlo y otros
2001 Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and
Constraints. Florida: University of Florida. Dept. of Industrial and
Systems Engineering. Consulta: 22 de enero del 2017.
http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/kro_CVaR.pdf
21. MARKOWITZ, Harry
1952 Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol 7, No 1 (Mar.,1952),
pp. 77-91. Consulta: 25 enero 2017.
https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf

22. MARTIN MATOS, Miguel

2005 El Condicional Value at Risk en la gestión de carteras latinoamericanas. Lima: Superintendencia de Banca y Seguros.

23. MOLOCHE, Guillermo

2012 Política óptima de inversiones de las AFPs. CIES consorcio de investigación económica y social. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Consulta: 01 de abril del 2017.

<http://www.cies.org.pe/sites/default/files/investigaciones/politica-optima-de-inversiones-de-las-afps.pdf>

24. OSPINA, Valentina y Victoria TANGARIFE

2008 Medición del VaR en los Portafolios de Acciones Mercado Colombiano. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. Consulta: 02 de abril del 2017.

<http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/919/33263861G633.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

25. PACHAMANOVA, Dessislava y Frank FABOZZI

2010 Simulation and Optimization in Finance, Modeling with Matlab, @Risk or VBA. New Jersey: John Wiley & Sons, Ltd. Consulta: 24 de enero del 2017.

26. PEREDA, Javier

2007 Estimación de la Frontera Eficiente para las AFP en el Perú y el Impacto de los Límites de Inversión: 1995-2004. Banco Central de Reserva del Perú, Series de documentos de trabajo, Mayo 2007.

27. RIVAS LLOSA, Roddy y Gonzalo CAMARGO

2002 Eficiencia financiera de los límites de inversión para las AFP: una aplicación al caso peruano. Consulta: 01 de mayo del 2017.

http://www.rhoworks.com/research/Paper_LimitesAFPs_RivasLlosa_Camargo_2002.pdf

28. ROCKAFELLAR, Ralph y Stanislav URYASEV

2000 Optimization of Conditional Value at Risk. Consulta: 01 de febrero del 2017.

http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/CVaR1_JOR.pdf

29. ROCKAFELLAR, Ralph y Stanislav URYASEV

2001 Conditional Value at Risk for General Loss Distributions. University of Florida, Dept. of Industrial and Systems Engineering. Consulta: 15 de febrero del 2017.

http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/cvar2_jbf.pdf

30. ROCKAFELLAR, Ralph y Stanislav URYASEV

2002 Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization. University of Florida, Dept. of Industrial and Systems Engineering. Consulta: 12 de marzo del 2017.

https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=365640.

31. ROMERO – MEZA, Rafael

2007 Medida de riesgo financiero. Universidad de Chile. Consulta: 09 de febrero del 2017.

http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/127411/149%20Medidas_de_Riesgo_Financiero_Rafael_Romero_M.pdf?sequence=1

32. SCHÖNHERR, Sven

2002 Quadratic Programming in Geometric Optimization: Theory, Implementation, and Applications. Consulta: 10 de febrero del 2017.

<https://www.inf.ethz.ch/personal/emo/DoctThesisFiles/schoenherr02.pdf>

33. SERVÁN, Sergio y Elizabeth TANTALEÁN

2008 Value at Risk vs Conditional Value at Risk, ¿Cuál es la herramienta más adecuada para la gestión de riesgos? Dept. Economía, Universidad del Pacífico. Consulta: 22 de enero del 2017.

34. SOLÍS, Diego

2015 Portafolio Óptimo en Escenarios de Saltos Estocásticos: Aplicación a las Administradoras de Fondos de Pensiones de Perú. Consulta: 22 de enero del 2017.

35. Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

2016 Texto único ordenado de la ley del sistema privado de Administración de Fondos de Pensiones. Consulta: 15 de enero del 2017.

36. URYASEV, Stan

2010 VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization. Florida: University of Florida. Consulta: 12 de marzo del 2017.

http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/VaR_vs_CVaR_CARISMA_conference_2010.pdf

37. VILARIÑO, Angel

2015 Riesgos de Mercado. Fundamentos, modelos y aplicaciones. Consulta:
25 de marzo del 2017.

38. Zanberk, Felipe (2007).

2007 Análisis del riesgo de portafolios: Estrategia de Inversión por medio de
la minimización del VaR. Santiago: Universidad Diego Portales.
Consulta: 20 de febrero del 2017.



ANEXOS

ANEXO 1

El anexo 1 muestra las composiciones de acciones de todos los índices que se ha usado en la presente investigación, así como la capitalización de mercado, el porcentaje total que representa las acciones más representativas del índice, así como el sector al que pertenecen.

MSCI EUROPA				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
NESTLE	CH	214.09	2.92	Cons Staples
HSBC HOLDINGS (GB)	GB	157.24	2.15	Financials
ROCHE HOLDINGS GENUSS	CH	156.35	2.13	Health Care
NOVARTIS	CH	154	2.1	Health Care
ROYAL DUTCH SHELL A	GB	108.22	1.48	Energy
BP	GB	107.04	1.46	Energy
TOTAL	FR	106.39	1.45	Energy
BRITISH AMERICAN TOBACCO	GB	102.33	1.4	Cons Staples
ROYAL DUTCH SHELL B	GB	99.14	1.35	Energy
SANOFI	FR	93.51	1.28	Health Care
		1298.31	17.72	

MSCI JAPON				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
TOYOTA MOTOR CORP		155.82	5.36	Cons Discr
MITSUBISHI UF J FIN GRP		74.96	2.58	Financials
SOFTBANK GROUP CORP		56.58	1.94	Telecom Srvc
SUMITOMO MITSUI FINL GRP		49.59	1.7	Financials
KDDI		48.28	1.66	Telecom Srvc
HONDA MOTOR CO		47.67	1.64	Cons Discr
MIZUHO FINANCIAL GROUP		42.29	1.45	Financials
JAPAN TOBACCO		38.09	1.31	Cons Staples
SONY CORP		36.43	1.25	Cons Discr
FANUC		33.15	1.14	Industrials
		582.86	20.03	

MSCI CHINA				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
TENCENT HOLDINGS LI (CN)		140.95	13.1	Info Tech
ALIBABA GROUP HLDG ADR		105.57	9.81	Info Tech
CHINA MOBILE		67.04	6.23	Telecom Srvc
CHINA CONSTRUCTION BK H		62.7	5.83	Financials
BAIDU ADR		45.3	4.21	Info Tech
ICBC H		45.18	4.2	Financials
BANK OF CHINA H		36.15	3.36	Financials
PING AN INSURANCE H		28.83	2.68	Financials
CNOOC		22.52	2.09	Energy
CHINA LIFE INSURANCE H		21.63	2.01	Financials
		575.87	53.52	

MSCI USA				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
APPLE		653.89	3.17	Info Tech
MICROSOFT CORP		478.6	2.32	Info Tech
EXXON MOBIL CORP		347.86	1.69	Energy
AMAZON.COM		331.83	1.61	Cons Discr
JOHNSON & JOHNSON		309.84	1.5	Health Care
JPMORGAN CHASE & CO		305.68	1.48	Financials
FACEBOOK A		302.73	1.47	Info Tech
WELLS FARGO & CO		270	1.31	Financials
GENERAL ELECTRIC CO		266.15	1.29	Industrials
AT&T		259.37	1.26	Telecom Srvc
		3525.95	17.1	

MSCI ALL PERU CAPED INDEX				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
CREDICORP	PE	8.35	22.08	Financials
SOUTHERN COPPER CORP	PE	4.7	12.44	Materials
BUENAVENTURA MINAS ADR	PE	3.83	10.13	Materials
ALICORP	PE	1.67	4.41	Cons Staples
INTERCORP FINANCIAL	PE	1.55	4.11	Financials
HOCHSCHILD MINING	GB	1.29	3.41	Materials
VOLCAN COMPAÑÍA MINERA B	PE	1.24	3.27	Materials
CIA MINERA MILPO	PE	1.22	3.23	Materials
INRETAIL PERU CORP	PE	1.12	2.97	Cons Staples
FERREYCORP	PE	1.07	2.84	Industrials
		26.04	68.89	

MSCI CHILE				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
FALABELLA SACI		4.81	10.13	Cons Discr
EMPRESAS COPEC		4.42	9.29	Energy
CENCOSUD		4.19	8.82	Cons Staples
BCO SANT ANDER CHILE (NEW)		3.58	7.53	Financials
ENERSIS AMERICAS		3.21	6.75	Utilities
BANCO DE CHILE		2.77	5.83	Financials
SOQUIMICH PREF B		2.75	5.79	Materials
LAT AM AIRLINES GROUP		2.65	5.58	Industrials
EMPRESAS CMPC		2.57	5.42	Materials
ENEL GENERACION CHILE		2.05	4.32	Utilities
		33	69.46	

MSCI COLOMBIA				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
BANCOLOMBIA PEF		3.85	22.9	Financials
GP INV SURAMERICANA		2.72	16.22	Financials
ECOPETROL		2.13	12.69	Energy
GRUPO ARGOS		1.71	10.2	Materials
CEMENTOS ARGOS (NEW)		1.65	9.82	Materials
GRUPO AVAL ACCIONES PEF		1.34	7.96	Financials
INTERCONEXION ELEC (NEW)		1.26	7.48	Utilities
GP INV SURAMERICANA PEF		1.14	6.76	Financials
CORP FIN COLOMBIANA		1	5.98	Financials
		16.8	100.0	

MSCI MEXICO				
Accion	Country	Mkt. Cap (USD Billions)	% w del index	Sector
AMERICA MOVIL L		19.44	14.25	Telecom Srvc
FEMSA UNIT UBD		14.44	10.58	Cons Staples
GRUPO FIN BANORTE O		12.03	8.81	Financials
CEMEX CPO		10.95	8.03	Materials
GRUPO MEXICO B		10.49	7.69	Materials
GRUPO TELEVISACPO		10.16	7.44	Cons Discr
WALMART MEXICO V		9.66	7.08	Cons Staples
FIBRA UNI ADMINISTRACION		4	2.93	Real Estate
GRUPO BIMBO A		3.81	2.79	Cons Staples
ALFA		3.74	2.74	Industrials
		98.72	72.34	