PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON INECUACIONES CUADRÁTICAS. UNA PROPUESTA EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

NIXO NÚÑEZ SÁNCHEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

MIEMBROS DEL JURADO:

MG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

DRA. JESUS FLORES SALAZAR

LIMA - PERÚ

2012

Agradecimiento

Un profundo agradecimiento al Dr. Uldarico Malaspina, mi asesor de tesis, por su dedicación y sus valiosas orientaciones en la realización de esta investigación.

Especial reconocimiento a la Dra. Jesús Flores Salazar por sus valiosas sugerencias en el plan de tesis y con quien se inició esta investigación.

Un reconocimiento especial a la Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre por su constante colaboración, orientación y por la facilidades prestadas para finalizar el informe final de tesis.

A todos mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por enseñarme el verdadero papel de un educador matemático.

Al profesor William Coronado por su colaboración desinteresada en la organización de las observaciones y en la información recolectada en la experimentación.

Dedicatoria

A mis queridos padres, Exequiel Núñez (en memoria) y Lucía Sánchez quienes me impulsaron a continuar con mis estudios y me enseñaron los verdaderos valores de la vida.

Mi eterna gratitud.

A mis dos pequeños hijos Morghan Dylan y Patrick Enders, por traerme mucha alegría en mi vida.

A mi querida esposa Geovana Linares, por ser tan buena compañera, por su comprensión y paciencia en la realización de esta investigación.

A mis hermanos Oscar, Yoni, Irma, Dilmer y Verónica por su apoyo incondicional para finalizar mis estudios.

Resumen

En este trabajo de investigación se detalla la elaboración, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica orientada a superar las dificultades que tienen los estudiantes tanto en la comprensión de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas, como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático.

La secuencia didáctica fue diseñada teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas, donde las actividades propuestas fueron planteadas para orientar al estudiante a pasar por situaciones de acción, formulación y validación, al resolver problemas relacionados con inecuaciones cuadráticas. Como proceso metodológico se utilizó la Ingeniería Didáctica que sirvió para la concepción, realización, observación y análisis de la situación didáctica al confrontar los comportamientos esperados y observados en la experimentación.

La secuencia didáctica se organizó teniendo en cuenta los conocimientos previos que se requieren sobre desigualdades y lo importante que es la motivación con problemas contextualizados, así como el apoyo gráfico y algebraico usando la función cuadrática. Esta secuencia se aplicó a 26 estudiantes de la escuela de Artes & Diseño Gráfico Empresarial de la universidad Señor de Sipán, de los cuales se recogió información relevante en el proceso de aprendizaje de este objeto matemático.

Las actividades aplicadas sirvieron para lograr los objetivos de entender los procesos de resolución de las inecuaciones cuadráticas y su aplicación en problemas contextualizados. Las fases de formulación y validación resultaron particularmente importantes para aclarar confusiones teóricas y errores de procedimiento que ocurrieron en la situación de acción.

Palabras-clave: Inecuaciones Cuadráticas, Situaciones didácticas, ingeniería didáctica

Abstract

In this research the procedure, application and analysis of the results of a didactic sequence are described in order to improve the difficulties that students have in the comprehension of the processes of the quadratic inequalities development, as well as the development of problems that required the use of this mathematic object.

The didactic sequence was designed on based of a theoretical framework of the didactic situations where the activities were presented in order to guide students to enface situations of action, formulation and validation, resolving problems related to quadratic inequalities. As a methodology process, the engineering didactic was applied and it was used to the development, observation and analysis of the didactic sequence to compare the expected and observed behaviors

This didactic sequence was organized on based to the previous knowledge that are necessary to work about the inequalities and the importance of the motivation in the development of contextualized problems beside the algebraic and graphic design supported using the quadratic function. This sequence was applied in 26 students from the career of art and business graphic design of the Lord of Sipan University, from which relevant information in the learning process of this mathematic object were taken.

The activities applied in the students were very useful to get the objectives of understand the process in the development of the quadratic inequalities and its application in contextualized problems. The formulation and validation phases were particularly important to clarify theoretical problems and errors in the procedure that happened in the situation of action.

Key-words: quadratic inequalities, didactic situations, engineering didactic

Introducción

En el presente trabajo de investigación se presenta una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza de las Inecuaciones Cuadráticas. Esta inquietud surgió a partir de la experiencia en las aulas universitarias, al observar que la enseñanza de este objeto matemático estaba reducida principalmente a una técnica operacional y a su manipulación algebraica, ocasionando en los estudiantes una infinidad de errores de comprensión en los procedimientos de resolución de una inecuación cuadrática, quienes logran una adaptación mecánica y que las técnicas adquiridas olvidan rápidamente al manipular este saber matemático.

Muchos investigadores, tal como detallamos en el planteamiento del problema, hacen notar las limitaciones de la enseñanza de las técnicas de resolución de inecuaciones cuadráticas, pues éstas se enseñan sin considerar la importancia de la dimensión didáctica donde se establezca un ambiente propicio diseñada por el profesor para conectar los contenidos con situaciones problemáticas contextualizadas y que logre la motivación para alcanzar un buen aprendizaje.

A raíz de esto, se formuló como objetivo principal en esta investigación diseñar, aplicar y analizar una secuencia didacticas con actividades de dificultad graduada que contribuya a la construcción del concepto de inecuación cuadrática y a comprender sus procesos de resolución en problemas contextualizados. Para lograr tal objetivo se utilizó la Teoría de Situaciones Didacticas como marco teórico y se siguió los lineamientos de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

Se decidió estudiar las Inecuaciones Cuadráticas por su importancia en el ámbito de las matemáticas para establecer relaciones de comparación y acotamiento, por su utilidad como herramienta para estudiar el dominio y rango de funciones y por su frecuente utilidad en muchos problemas intramatemáticos y contextualizados vinculados con la función cuadrática y la optimización.

Este trabajo de investigación esta distribuido en siete capítulos, divididos en dos partes: aspectos teóricos y el desarrollo de la ingeniería didáctica en la investigación.

En los capítulos 1 y 2 se desarrollan los aspectos teóricos de la investigación donde se presentan: el problema de investigación, que incluye los antecedentes, la definición del problema y los objetivos; los lineamientos más relevantes de la Teoría de las Situaciones Didácticas, usada como marco teórico y las principales concepciones de la Ingeniería didáctica como método de investigación.

En el capítulo 3 se desarrolla el análisis preliminar, que abarca la componente epistemológica, cognitiva y didáctica acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la inecuación cuadrática; y se complementa esta fase con el análisis del campo de restricciones referido a las características de los estudiantes involucrados en la investigación.

El capítulo 4 comprende la concepción de la secuencia didáctica y el análisis a priori, donde se definen las variables didácticas, los comportamientos esperados y las cuatro actividades diseñadas.

El capítulo 5 comprende el desarrollo de la fase de experimentación, donde se presentan los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, se describen de manera detallada las acciones, los comportamientos y los logros y dificultades de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

El capítulo 6 presenta el análisis a posteriori, el cual abarca la comparación entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación. Posteriormente, en base al análisis de resultados se presentan los argumentos para el rediseño o conservación de la situación didáctica.

Finaliza la investigación con el capítulo 7, en el cual se detallan las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones y perspectivas para abordar otras investigaciones relacionadas al tema.

Índice

Lista de figuras

Lista de Tablas

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPITULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Las limitaciones en la formación matemática de los estudiantes ingresantes al nivel universitario se ve reflejada por errores de concepción, de entendimiento y por falta de fundamentos matemáticos necesarios para la formación Profesional. En el tema de las inecuaciones Barbosa (2006, p. 17) manifiesta “la resolución de inecuaciones es emprendida por alumnos de enseñanza media/superior con innumerables errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales”. El docente universitario se ve comprometido a modificar sus clases, buscando alternativas didácticas para superar la inadecuada apropiación de los conocimientos matemáticos.

En el caso de las carreras de humanidades la finalidad de los temas de matemáticas que se imparten debe estar orientada a incorporarlos con situaciones de la vida real, a enriquecer la cultura general de los estudiantes y a utilizar los conocimientos como herramientas para enfrentar otras asignaturas propias de su especialidad. Sin embargo producto de nuestra experiencia en el nivel universitario se pudo observar, la forma como se imparten los conocimientos en el aula; a pesar de la variedad de ideas teóricas, aun están sujetos a los principios tradicionales, donde se siguen procedimientos rígidos y algorítmicos, iniciándose con una explicación de conceptos, definiciones, teoremas y finalmente con algunas aplicaciones; muy parecido a como la mayoría de los libros de texto abordan los temas de pre cálculo en general.

Estas perspectivas de enseñanza tradicional también se utilizan para la enseñanza de las inecuaciones, que se ha convertido en un problema para su aprendizaje en muchos estudiantes de nivel universitario.

Investigadores como Eugenia, Polola, Fernández, Bortolotto y Ecalle (2002) obtuvieron resultados alarmantes en estudiantes ingresantes al nivel universitario “La mayor dificultad aparece en la resolución de inecuaciones: el 68 % de los alumnos no lo hizo o lo hizo mal” (p. 978). Así mismo Malaspina y Bazán (2007) en un análisis preliminar de las percepciones de los temas de la matemática en la educación secundaria de alumnos ingresantes a la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) revelaron que el 20.6 % de los estudiantes declararon que entendieron el tema de inecuaciones pero no lo aprendieron, afirmando que "La existencia de temas entendidos pero no aprendidos es fuertemente preocupante, porque más allá de las precisiones sobre entender y aprender, revelaría un reconocimiento por los estudiantes de que tales temas se trataron inadecuada o insuficientemente"(p. 22).

Estos resultados nos hacen prever que la enseñanza de las inecuaciones y en especial las inecuaciones cuadráticas que se imparte desde la educación secundaria, Según el Diseño Curricular Nacional (2009), y se extiende hasta los niveles universitarios, en la mayoría de los casos están orientados ha indicar los procesos de resolución, a su manipulación algebraica y a la utilización de proceso rutinarios sin poner énfasis en su comprensión y en su aplicación a problemas contextualizados. Investigaciones hechas en universitarios confirman tales resultados; así, en un estudio sobre las dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones Blanco, Garrote e Hidalgo (2004) concluyeron "La ausencia de significados es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones…" (p. 43). Tales evidencias también son identificadas por Gallo y Battú (1997) donde determinan:

> En la didáctica de las desigualdades se ocupan técnicas sin atribuirles algún significado, implementando modelos rígidos que se aplican en forma correcta pero impropia. Dicho fenómeno propicia una confusión entre el concepto de ecuación y el de desigualdad de tal manera que, para resolver desigualdades, se aplican los mismos modelos de las ecuaciones". (Citado por Borello, 2010, p. 22).

Así mismo, Tsamir, Tirosh y Tiano (2004) en una exploración con varios maestros sobre como tratan a los errores cometidos por los estudiantes en el tema de resolución de inecuaciones cuadráticas en sus aulas, describieron en primer lugar cuales fueron esos errores y mencionaron:

> Varios errores comunes fueron identificados incluyendo la tendencia a: 1) Multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un factor que no es necesariamente positivo, 2) frente a los productos, proceden de la

siguiente manera: $a.b > 0 \Rightarrow a > 0 \; y \; b > 0$; $ab < 0 \Rightarrow a < 0 \; y \; b < 0$, 3) tomar decisiones inapropiadas en cuanto a los conectores lógico, y 4) rechazar $\{x/x = a\}$, $\mathbb{R} \; y \; \phi$ como soluciones. (p. 156).

Esta problemática descrita en el caso de las inecuaciones cuadráticas, también se puede percibir en los estudiantes de las carreras de humanidades de la Universidad Señor de Sipán (USS), donde nuestra experiencia como docente en los primeros cursos de matemática ha permitido precisar las siguientes limitaciones y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático:

- Las clases en el aula se inician con la presentación de la definición, la notación formal y rápidamente las técnicas de resolución como simples pasos a seguir.
- En la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas no se consideran aplicaciones de este objeto matemático en problemas contextualizados.
- En la resolución de inecuación cuadrática los estudiantes aprenden las técnicas algebraicas de manera mecánica sin ninguna fundamentación y no tienen una visualización clara de lo que es resolver una inecuación.
- En los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas los estudiantes utilizan los mismos procedimientos utilizados en la resolución de ecuaciones cuadráticas, determinan las raíces del trinomio cuadrático y no logran continuar con el procedimiento, ocasionado limitaciones para determinar el conjunto solución.
- Dificultades para identificar las inecuaciones equivalentes, especialmente cuando el término cuadrático tiene signo negativo.
- Dificultades para determinar el conjunto solución de la inecuación cuadrática cuando su trinomio cuadrático no es factorizable en R.
- Dificultades para utilizar los procedimientos explicados por el profesor en la resolución de una inecuación cuadrática. Estos procedimientos son mayormente el método de los puntos crítico cuando el trinomio es factorizable y el método de completar cuadrados cuando el trinomio no es factorizable en R.

Los puntos anteriores y las investigaciones revisadas muestran claramente el problema y dicen de la relevancia para realizar la investigación, surgiendo el interés por diseñar una secuencia didáctica, para lograr la construcción del concepto de inecuación cuadrática, la comprensión de los procesos de resolución y su aplicación en problemas contextualizados.

A raíz de todo esto, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo superar las dificultades que tienen los estudiantes tanto en la comprensión de los procesos de resolución de inecuación cuadrática, como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático?

1.2 Antecedentes.

La mayoría de las investigaciones que se pudo revisar están relacionadas con el tema de inecuaciones en general y muy pocas en el tema de inecuaciones cuadráticas en particular. Se hará una breve descripción de éstas, indicando los aspectos más resaltantes y de interés para nuestra investigación.

Diez (1995) identificó que en el aprendizaje de las inecuaciones se observa una adquisición inadecuada de los conocimientos, los alumnos logran una adaptación mecánica de los proceso de resolución de una inecuación y que las técnicas adquiridas se olvidan demasiado pronto y no se adquieren conocimientos permanentes. Ante estas dificultades cree conveniente introducir las inecuaciones de forma diferente, generando estrategias (lecciones) que permitan al alumno enfrentarse a problemas o situaciones nuevas e interactuar con ellas sin necesidad de un entrenamiento específico para cada uno de los tipos que se puedan enfrentar.

En esta investigación el autor utilizó como marco teórico a la teoría de Situaciones Didácticas y a la Ingeniería didáctica como metodología de Investigación.

En la Investigación de Barbosa (2006) se determina que la resolución de las inecuaciones es emprendida por alumnos de enseñanza media y superior con innumerables errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales, tales errores son bastante comunes en los diferentes niveles. Para enfrentar esta problemática utiliza la teoría APOE para proponer un conjunto de construcciones mentales o esquema que el estudiante puede desarrollar con el fin de comprender el concepto de inecuación. En base a estas construcciones presenta una propuesta metodológica de enseñanza para mejorar el aprendizaje de este concepto. En una de sus conclusiones plantea que la enseñanza y aprendizaje del concepto de inecuación debe de abarcar actividades que involucren: resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los números reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras graficas o computadoras.

Por otra parte Borello (2007) enfrenta el problema desde un punto de vista científico cómo las convicciones del maestro constituyen un elemento que influye en las posibilidades de aprendizaje de los alumnos, y se hace hincapié en el tema de las desigualdades. El investigador utiliza como marco teórico la teoría de la reproducibilidad de situaciones didácticas, que concierne al contexto de la socioepistemología. En sus resultados ofrece herramientas de ayuda que permita encontrar enfoques metodológicos y soportes didácticos para los maestros, a fin de apoyarlos en la toma de decisiones adecuadas a la complejidad de los problemas que se le presenta. Producto de la investigación concluye en la importancia del **m**étodo gráfico para la enseñanza de las inecuaciones, con las siguientes prioridades:

- El acercamiento visual resulta "natural" para los alumnos de las nuevas generaciones, ya que viven inmersos en un contexto socio-cultural en que prevalece la cultura de la imagen en detrimento de aquellas habilidades ligadas a la capacidad de abstraer y de reflexionar.
- El enfoque gráfico cambia la concentración de la actividad matemática, pues lleva inevitablemente a trabajar con funciones acercándose el concepto de inecuación al objeto función, favoreciendo una real comprensión de los símbolos de desigualdad e igualdad en el momento en que aprende a "moverse" en el plano cartesiano relacionando correctamente la abscisa y la ordenada de los puntos de la función.
- Favorece el aprendizaje y la forma de razonamiento creativo que contrasta la idea –tristemente muy difundida- que las matemáticas sólo tratan de técnicas y que no tienen que ver con nada de todo lo que es creativo.

Guajardo (2010) expone una propuesta didáctica con la intención de propiciar en los alumnos universitarios la adquisición de un aprendizaje significativo de desigualdades cuadráticas, para aplicarlo en el cálculo del dominio de funciones con raíz cuadrada; utiliza los software el Graphmatica y el Sketchpad. La autora explica que en su experiencia observó que con frecuencia los alumnos tienen dificultades para determinar el dominio de funciones con raíz cuadrada sobre todo cuando es una raíz cuadrada de una expresión cuadrática, ya que tienen que resolver una desigualdad del tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$. Los alumnos resuelven desigualdades cuadráticas como si fueran ecuaciones cuadráticas obteniendo como resultado un intervalo que no tiene fundamento o no coincide con lo que resuelven analíticamente. Manifiesta que los alumnos tiene un conflicto cognitivo al transferir el proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas en la resolución de desigualdades cuadráticas. Frente a esta problemática recomienda establecer con claridad los requerimientos para realizar la transferencia entre los conceptos de ecuación cuadrática y desigualdad cuadrática; y no introducir la definición y la notación formal hasta que el concepto de desigualdad, así como las técnicas de resolución esté, claramente adquirido.

De la Fuente y Valdez (2001) Proponen una alternativa gráfica para la resolución de las desigualdades (lineales, cuadráticas, de valor absoluto y racionales). Determinan que en los estudiantes de educación superior existen serias dificultades para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos y los algorítmicos o procedimientos asociados a los mismos, en la resolución de determinados problemas, por lo tanto se les debe proporcionar la oportunidad de interactuar con el objeto de estudio en su doble status, Herramental (utilización de los conceptos para la resolución de situaciones problemáticas) y objetal (sistematización de los conceptos, su organización y la forma en que estos se relacionan) y en los diferentes contextos (gráfico, algebraico y numérico) para que comprendan que las manipulaciones algebraicas se derivan de los proceso de resolución de las situaciones problemáticas. Concluye que la enseñanza únicamente del concepto y su asociación al contexto algebraico puede ocultar o negar en muchas ocasiones al estudiante la posibilidad de una comprensión auténtica del objeto matemático en juego y que la enseñanza basado en un contexto gráfico y numérico, sin omitir el algebraico dan la oportunidad al estudiante de acercarse al objeto matemático desde diferentes ópticas, permitiéndole la aprehensión de un concepto rico en significados.

Boero y Bazzine (2004) en su investigación mencionan que en la mayoría de los países las desigualdades se imparten en la escuela medio superior como un tema subordinado (en relación con las ecuaciones), abordado de manera puramente algorítmica que evita en particular, las dificultades inherentes a la noción de función. Este enfoque implica una secuencia de procedimientos rutinarios que no son fáciles para los estudiantes de comprender, interpretar y controlar, como consecuencia, estos son incapaces de manejar desigualdades que no se ajustan a los esquemas aprendidos. Generalmente las gráficas no son aprovechadas para un uso heurístico y las transformaciones algebraicas se llevan acabo sin tener en cuenta las limitaciones debido a la confusión entre los signos de igualdad y de desigualdad. Los autores plantean la hipótesis de que un enfoque alternativo a las desigualdades basado en el concepto de función podría proporcionar una oportunidad para promover el proceso de aprendizaje de los conceptos más difíciles y desarrollar habilidades necesarias para su manejo, también podría garantizar un alto nivel de control de los procesos de solución de ecuaciones y desigualdades.

Las consideraciones presentadas en cada una de las investigaciones tienen una relación con la problemática de nuestra investigación y sus propuestas servirán de referente para considerarlo en el presente trabajo, donde se plantearán situaciones problemáticas que permita al estudiante enfrentarse a problemas contextualizados sin necesidad de un entrenamiento específico, que involucren la resolución de las inecuaciones cuadráticas con fuerte apoyo gráfico y algebraico relacionada con la función cuadrática.

1.3 Perspectiva Teórica

En este trabajo de investigación la componente didáctica tiene una relevancia especial por lo que consideramos adecuado utilizar la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) y la Ingeniería Didáctica de Artigue(1995) como metodología de investigación.

La teoría de situaciones didácticas que fue concebida específicamente para el campo de la didáctica de la matemática, se presenta en la actualidad como un instrumento científico que nos permite diseñar secuencias de clase con el fin de disponer de un medio para generar la construcción del conocimiento matemático. Esta teoría sostiene que el conocimiento matemático se va constituyendo a partir de la interacción del estudiante con situaciones problemáticas, quien va poniendo a prueba sus propios conocimientos, va modificándolos, rechazándolo o produciendo otros nuevos a partir de la interpretación de los resultados de sus acciones.

Partiendo de la idea central de esta teoría, que cada conocimiento matemático se puede caracterizar por una o más situaciones o problemas (situación fundamental), donde el conocimiento que queremos enseñar se presente como la solución apropiada a la situación problemática, es que proponemos un conjunto de situaciones problemáticas secuenciadas con la finalidad de estimular y generar el conocimiento de las inecuaciones cuadráticas, su proceso de resolución y su aplicación en problemas que requieren el uso de este objeto matemático.

Para el diseño de esas actividades el docente cumple un rol principal: cuidando en seleccionar o crear todas las situaciones posibles que hagan funcionar el conocimiento que queremos enseñar; pronosticando los resultados que sean accesible a los estudiantes; que responda al sujeto, que lo haga interactuar y que éste asuma la responsabilidad de construir su aprendizaje.

Para la construcción de estos aprendizajes se conciben momentos, donde el alumno se enfrenta solo a la resolución del problema, sin la intervención del profesor, tales momentos o procesos son la sucesión de situaciones de acción, formulación y validación. En estas situaciones la intervención del profesor se limita a dar orientaciones para centrar al estudiante en las actividades que debe realizar y para encontrar la solución al problema.

Teniendo en cuenta estas perspectivas y a la ingeniera didáctica como metodología de investigación, se resaltarán las condiciones didácticas que las secuencias deben contener para analizar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

1.4 Objetivos de la investigación

Objetivo General

Diseñar, aplicar y analizar una secuencia didáctica fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas para el aprendizaje del concepto de inecuación cuadrática y la comprensión tanto de los procesos de resolución como de los problemas que requieran el uso de este objeto matemático.

La propuesta didáctica se desarrollará con los estudiantes del I ciclo de la escuela de Artes & Diseño Gráfico Empresarial que pertenece a la facultad de Humanidades de la universidad Señor de Sipán.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una secuencia didáctica con actividades y situaciones problemáticas de dificultad graduada, que contribuya a la construcción del concepto de inecuación cuadrática y a comprender sus procesos de resolución.
- Aplicar las secuencias didácticas y analizar los resultados comparando los efectos esperados y los observados en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas.
- Rediseñar las secuencias didácticas ejecutadas inicialmente considerando los resultados de la experimentación y los efectos esperados y observados para garantizar la construcción del concepto de inecuación cuadrática y la comprensión de los procesos de resolución en problemas que requieran el uso de este objeto matemático.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo presentamos los fundamentos de la Teoría de Situaciones Didácticas seleccionada como marco teórico para definir las relaciones y operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático involucrado en la investigación. Así mismo presentamos la ingeniería didáctica como metodología de investigación que nos permitirá diseñar, aplicar, observar y analizar las secuencias de enseñanza y validar la presente investigación.

2.1 La teoría de Situaciones Didácticas

2.1.1 Fundamentos

La Teoría de Situaciones Didácticas tuvo sus orígenes en Francia y fue establecida por Guy Brousseau aproximadamente a fines de la década del sesenta del siglo XX. Esta teoría propone un modelo para abordar la enseñanza de la matemática centrándose en los procesos de producción de los conocimientos matemáticos que según Panizza (2003) "Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea" (p. 60).

Brousseau (1986) sustenta su teoría en una concepción constructivista Piagetiana donde considera: "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios; un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (p. 14).

En ese sentido se considerara que el aprendizaje resulta de un proceso de adaptación desarrollado frente a situaciones problemáticas donde se producen las interacciones entre un sujeto y un medio dando lugar a procesos de producción del conocimiento matemático en el sujeto.

Esta concepción de cómo se aprenden las ideas matemáticas es importante para diseñar las secuencias didácticas y servirán para que el profesor estructure el medio con las intenciones capaces de inducir al estudiante en la adquisición del conocimiento matemático.

Bajo esta perspectiva la situación o problema propuesto por el profesor debe producir un desequilibrio en los conocimientos que posee el estudiante, buscando que ingrese en un proceso incierto, que acepte el problema como suyo y sienta la necesidad de encontrar la respuesta y recurra a sus conocimientos previos para ordenarlos con los conocimientos nuevos que se presentarán como los más apropiados para dar solución al problema. Surge así la necesidad de apropiarse del nuevo conocimiento matemático.

Para facilitar el aprendizaje la Teoría de Situaciones Didacticas postula que para todo conocimiento matemático es posible construir una "situación fundamental" que representa la problemática en la que el conocimiento que queremos enseñar aparezca como la solución optima a la situación problemática propuesta.

2.1.2 Conceptos básicos

Medio

Son todos aquellos materiales (objetos, símbolos) que el alumno es capaz de manipular sin cuestionar su naturaleza, así como todas las actividades de ayuda al estudio como son: los cursos de matemáticas, los libros de texto, etc.

Situación didáctica

Una situación didáctica es un conjunto de interrelaciones establecidas entre Profesor, estudiante y un medio didáctico, construidas con la intención de hacer que los alumnos adquieran un determinado saber. En estas interrelaciones el profesor proporciona el medio didáctico en el cual el estudiante construye su conocimiento. Una situación didáctica según Brousseau (1986, p. 14) es "(…) un sistema de interacciones del alumnos con los problemas que él (enseñante) le ha planteado"

Situación a-didáctica

Son momentos de aprendizaje en los cuales el alumno se enfrenta solo a la resolución de un problema, viviendo situaciones como investigador, sin que el profesor haga intervenciones relacionadas al conocimiento que se pretende que el alumno aprenda.

En esta situación el estudiante asume el compromiso y la responsabilidad de su aprendizaje encarando al problema de manera independiente, donde podrá interactuar, reflexionar, utilizar estrategias que desencadenarán en una serie de acciones que producirán el conocimiento. La función principal del profesor es la de preparar la situación a-didáctica seleccionando el problema que planteará al estudiante y se limitará a animarlo para solucionarlo y hacerle consciente de las acciones que puede realizar para construir su aprendizaje. Brousseau (1986) al respecto manifiesta:

> Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica (p. 14).

Las situaciones a-didacticas deben ofrecer la oportunidad a los estudiantes de analizar los resultados de sus acciones, para rectificarlos o reafirmarlos, considerando también que estas producciones pueden modificar el medio.

Devolución

En la situación a-didáctica se produce la fase de aprendizaje que responsabiliza al estudiante en la construcción del conocimiento, pero no existe una fase de enseñanza, porque no hay intervención explicita del profesor, este no puede intervenir y decir previamente cual es la respuesta exacta que espera del estudiante, sin embargo, existe un rol protagónico del docente en hacer que el estudiante acepte la responsabilidad de hacerse cargo del problema o los ejercicios propuestos. Esta concepción dio origen a la devolución, que según Brousseau (2007, p. 87) “Es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”.

En esta definición podemos ver que la responsabilidad en el proceso de devolución es compartida entre docente y alumno, cada uno tiene que asumir compromisos de enseñanza y aprendizaje donde “La enseñanza es la devolución al alumno de una situación a didáctica correcta; el aprendizaje es una adaptación a esta situación” (Brousseau, 1986, p. 15).

Variable didáctica

Las variables didácticas son elementos de las situaciones didacticas que el profesor puede modificarlos con valores diferentes con la intención de cambiar las estrategias de resolución a los estudiantes y de esa manera llegar al saber matemático deseado. Inicialmente el profesor puede utilizar valores para que el alumno enfrente la situación con sus conocimientos previos y posteriormente, con la modificación de estos valores pueda encarar la construcción del nuevo conocimiento al utilizar otras estrategias de resolución.

Bartolomé y Fregona (2003) al respecto afirman:

> (…) Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de estas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. El docente (Brousseau 1995), “puede utilizar valores que permitan al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes” (Citado por Panizza, 2003, p. 69).

Estas ideas precisan que para lograr la construcción del conocimiento matemático es necesario realizar modificaciones en la situación para inducir al estudiante a poner a prueba sus diversas estrategias de solución.

El contrato didáctico

El contrato didáctico comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del profesor, que dependen estrechamente de los conocimientos en juego, pero puede ocurrir que uno de los dos integrantes (docente o alumno) haga algo inesperado por el otro y ocasione una ruptura, pero todo lo que ocurre es permitido como si hubiera un contrato que reglamentara los comportamientos. Al respecto sobre esta posible ruptura Brousseau (1986, p. 16) describe:

> En particular las cláusulas de ruptura y de realización del contrato no pueden ser descritas con anterioridad. El conocimiento será justamente lo que resolverá la crisis nacida de estas rupturas que no pueden estar predefinidas. Sin embargo en el momento de estas rupturas todo pasa como si un contrato implícito uniera al profesor y al alumno: sorpresa del alumno que no sabe resolver el problema y que se rebela porque el profesor no le ayuda a ser capaz de resolverlo, sorpresa del profesor que estima sus prestaciones razonablemente suficientes..., rebelión, negociación, búsqueda de un nuevo contrato que depende del “nuevo” estado de los saberes... adquiridos y apuntados.

Esto señala que el contrato didáctico es una herramienta teórica que modela las interacciones entre el docente y el estudiante para progresar en la comprensión y la resolución del problema, donde las circunstancias ameriten en que momento el docente debe actuar y en que momento debe abstenerse de intervenir.

2.1.3 Tipos de interacciones con el medio

A las relaciones de un alumno con el medio Brousseau (2007, p. 23) las clasifica en tres grandes categorías:

- Intercambios de información no codificada o sin lenguajes (acciones y decisiones)

- Intercambio de informaciones codificadas en un lenguaje (formulación)
- Intercambio de juicios (Validación)

a) La situación acción

Consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos, tome decisiones en cada intento de resolverlo, acepte o rechace una estrategia según su eficacia; pero estas acciones son guiadas por la misma situación al interactuar con el medio sin orientaciones prestablecidas, permitiendo al estudiante juzgar sus resultados, corrigiéndoles o mejorándolos hasta lograr aprenderse un método de resolución. Al respecto Brousseau (2007, p. 21) menciona "La sucesión de situaciones de acción constituyen el proceso por el cual el alumno va a "aprenderse" un método de resolución del problema".

b) la situación de formulación

Es una situación de comunicación que favorece el intercambio de ideas donde los estudiantes comunican a sus compañeros, los resultados logrados utilizando mensajes orales o escritos con simbología matemática acerca de lo encontrado en sus experiencias y exploraciones con el problema.

Brousseau (2007, p. 25) sostiene que:

> La formulación de un conocimiento correspondería a la capacidad de un sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información.

c) Situación de validación

Es una situación de discusión y demostración de los logros obtenidos, donde se comparten conclusiones y enunciados. En esta situación el emisor ya no es un informante si no un proponente y el receptor un oponente donde ambos poseen la información necesaria para: discutir una cuestión y cooperar en la búsqueda de la verdad o enfrentarse cuando hayan dudas. Los alumnos proponen enunciados, demostraciones, construyen teorías y convencen a sus compañeros a cerca de sus logros o conclusiones obtenidas demostrando la exactitud y la pertinencia de sus afirmaciones. "El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración" (Brousseau, 2007, p. 23).

Es necesario indicar que en algunas situaciones no necesariamente se debe pasar estrictamente por una situación de acción o formulación para llegar a una validación.

d) Situación de Institucionalización

Es una situación de formalización del conocimiento matemático a partir de la las producciones de los estudiantes y la vinculación con el saber cultural. En esta fase el docente ordena, recapitula y sistematiza las producciones de los diferentes momentos con la intención de darle un estatus científico. Además podemos afirmar que la institucionalización es complementaria al proceso de devolución donde el docente cumple una función determinante. A este tipo de relación Brousseau (1986) la describe:

> En la devolución el maestro pone al alumno en situación a – didáctica o pseudo a – didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno, con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un estatus. (p. 39).

2.2 La Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica surge en Francia a principios de los años 80 como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. Artigue (1995) al respecto comenta:

> Se denomina con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Sin embargo, al mismo tiempo se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar

prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (p. 34)

También se determina que la ingeniería didáctica desarrollada específicamente en el área de Educación Matemática se utiliza con una doble función:

- Como metodología de investigación especifica; y
- Como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje

En nuestro trabajo utilizaremos la primera función, que según Artigue (1995) “Como metodología de investigación, (…) se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36).

En esta concepción se percibe que el profesor modela las secuencias de enseñanza al igual que un proyecto hecho por un ingeniero, donde utiliza todos sus conocimientos científicos y pone a prueba sus resultados. En esta investigación utilizaremos los argumentos de la ingeniería didáctica para analizar detalladamente todos los componentes involucrados en los procesos de construcción, análisis y validación de las secuencias didácticas.

2.2.1 Fases de La ingeniería didáctica

En la metodología de la ingeniería didáctica según Artigue (1995, p. 38) fundamentalmente se consideran cuatro fases:

- Análisis preliminar
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas
- Experimentación
- Análisis a posteriori y validación

En particular presentamos las consideraciones de cada fase

Los análisis preliminares

Tiene como objetivo realizar un conjunto de análisis correspondientes al objeto matemático en estudio y es el punto de partida para la fase de concepción. En esta fase se realiza el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Específicamente estos análisis se presentan en tres dimensiones:

- En la dimensión epistemológica: aquí se analizan las características del saber en juego. En este caso se hará un estudio epistemológico del objeto matemático en estudio.
- En la dimensión cognitiva: aquí se analizan las características cognitivas del publico al cual se dirige la enseñanza, en este estudio se analizará como los estudiantes, interpretan el concepto de inecuación cuadrática, también las dificultades y errores comunes en los procesos de resolución.
- En la dimensión didáctica: se analizan las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. En este estudio, se analizará la forma como se desarrolla el proceso de enseñanza de la inecuación cuadrática en la institución donde se realiza la investigación, los recursos didácticos y estrategias de enseñanza.

También es necesario realizar un análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica, describiendo al grupo de estudiantes con los que se experimentará tal situación así como los recursos de la institución. Consideramos que la edad de los alumnos, conocimientos anteriores sobre el tema, disponibilidad de tiempo para estudiar; son datos que no se pueden modificar por el docente y no son consideradas variables didácticas de la situación, pero juegan un papel importante para diseñar la situación didáctica.

La concepción y el análisis a priori

Según Artigue (1995, p. 42) menciona que: “En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado”. Además, el autor (1995, p. 45) argumenta que:

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En el análisis a priori se analizarán dificultades, errores y estrategias posibles que podrían utilizar los estudiantes en la resolución de las actividades relacionadas con la construcción del concepto de inecuación cuadrática y con la comprensión de los procesos de resolución, es decir determinar si las restricciones consideradas y la manipulación de las variables didácticas elegidas permitirán controlar el comportamiento de los alumnos. Todo este análisis es un conjunto de hipótesis sobre lo que se espera de los estudiantes.

La experimentación

En esta fase se pone en acción la secuencia didáctica con una cierta población de estudiantes, entrando en contacto el investigador, el profesor, el observador y los estudiantes. También se implementan las condiciones de control de las actividades y el registro de los sucesos, pues la información recopilada servirá para la calidad y la fidelidad de la siguiente etapa. Por lo tanto la experimentación según De Farías (2006, p. 5) supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes participantes en la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de las observaciones.

En la ejecución de esta etapa se respetará las deliberaciones hechas en la fase anterior. Si la experimentación dura más de una sesión, se hará un análisis a posteriori de una sesión a otra, con la intención de hacer las correcciones necesarias.

El análisis a posteriori y la validación

Última fase de la ingeniería didáctica, que se basa en una exhaustiva revisión del conjunto de datos recogidos de la experimentación; entre estos datos tenemos las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, avances logrados, argumentos, actitudes, reflexiones y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementaran con otros obtenidos externamente tales como entrevistas y cuestionarios aplicados en distintos momentos de la clase. Para realizar la validación interna se confrontará las hipótesis elaboradas en el análisis a priori y el análisis de los resultados obtenidos de la fase experimental o análisis a posteriori. Al respecto Artigue (1995, p.48) argumenta “En la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación”

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA

CAPITULO 3: ANÁLISIS PRELIMINAR

En esta fase preliminar se hace un análisis sistémico del objeto matemático Inecuación Cuadrática, teniendo en cuenta, las tres componentes:

1. Epistemológica: Se hace un estudio histórico y se presentan los fundamentos teóricos de la inecuación cuadrática en una variable, con la intención de dar una explicación de las características del contenido matemático, su funcionamiento y sus diversas formulaciones.
2. Cognitiva: aquí se analizan las características cognitivas de los estudiantes, a los cuales se dirige la enseñanza, teniendo en cuenta como interpretan el concepto de inecuación cuadrática, las dificultades y errores comunes en los procesos de resolución, considerando sus conocimientos previos acumulados anteriormente.
3. Didáctica: se analizarán las características de cómo se desarrolla el proceso de enseñanza de las inecuaciones cuadráticas en la institución, los recursos didácticos y estrategias de enseñanza que utilizan y el análisis de algunos libros de textos utilizados en la enseñanza.

En este espacio también se desarrollará el análisis del campo de restricciones de los alumnos con los que se llevará acabo la experimentación de la situación diseñada. Estos alumnos pertenecen al I ciclo de la escuela de Artes & Diseño Gráfico Empresarial de la facultad de Humanidades de la USS y están matriculados en el curso de “Lógico - matemática” que dentro de su distribución de contenidos programados en el sílabo comprende el estudio del tema Inecuaciones Cuadráticas.

3.1 Análisis epistemológico

En este análisis presentamos una referencia histórica relacionada a las inecuaciones cuadráticas, sus fundamentos y su aplicación en la resolución de problemas, que constituirán el sustento epistemológico disciplinar de la investigación.

3.1.1 Proceso histórico

En la historia de la matemática se detalla que el símbolo de la desigualdad aparece en el siglo XVII y XVIII y se reconoce a Thomas Harriot (1560 - 1621) como el primero en introducir los signos $>$, $<$ para las relaciones "mayor que" y "menor que". Así mismo se considera a Pierre Bouguer (1698 - 1758) como el primero en introducir los signos "mayor o igual que" y "menor o igual que" $\geq$, $\leq$; pero esta idea de desigualdad es identificada en mucho trabajo de la antigüedad y es utilizada en actividades relacionadas a la comparación y al acotamiento.

Bagni (2008) examina el desarrollo histórico de las ecuaciones e inecuaciones a fin de subrayar sus papeles muy distintos en diversos contextos socio culturales; en este estudio específico:

- La historia de las ecuaciones es bastante rica; en muchas culturas y en diferentes rincones del mundo se encontraron procesos relacionados con las ecuaciones. En el Renacimiento la denominada *Regola d'Algebra* (regla algebraica) fue el proceso para resolver problemas aritméticos basados en la resolución de una ecuación algebraica. Sin embargo la historia de las inecuaciones no es tan rica; antiguamente las desigualdades fueron expresadas por registros verbales como hace, por ejemplo, Euclides en los elementos, cuando habla de las desigualdades relativas a los elementos de un triángulo.
- Algunas desigualdades reconocidas en el buen sentido como inecuación pueden estar relacionadas con el desarrollo del cálculo por ejemplo para minorizaciones y mayorizaciones ((Hairer y Wanner, citados por Bagni, 2008. P. 6).
- Una cita interesante puede ser considerada con la referencia al siglo XX. Odifreddi escribe: "Una contribución por Von Neumann era la solución, en 1937, de un problema propuesto por L. Walras en 1874. Él notó que un modelo debe ser expresado por desigualdades (como se hace generalmente hoy en día) y no debe expresarse solo por las ecuaciones (como los matemáticos estaban acostumbrados a hacer hasta aquel periodo), entonces él encontró una solución por el teorema de Brouwer".

- Se observa la presencia de una interesante asimetría histórica: por lo general, los matemáticos expresaban el problema para ser solucionado por ecuaciones; luego, por las desigualdades (en el sentido propio de inecuación), ellos expresaban algunas condiciones para las soluciones de las ecuaciones consideradas. Por otra parte, en la historia, la resolución de una desigualdad (inecuación) a menudo se ha obtenido mediante la resolución de una ecuación que prácticamente sustituyó a la desigualdad asignada. Contextos sociales y culturales fueron tomados en cuenta: con frecuencia "la solución práctica" ha sido considerada el resultado principal para ser obtenido, mucho más importante que "el campo de posibilidades". Entonces una significativa importancia social ha sido atribuida al proceso por el cual puede obtenerse la solución; al respecto Hairer y Wanner (1996, citado por Bagni, 2008. P. 7) nos testimonia el uso de métodos prácticos para mejorar la precisión de las soluciones.

De estas evidencias históricas podemos deducir que las ecuaciones han influido en el tratamiento de resolución de las inecuaciones.

3.1.2 Las inecuaciones cuadráticas y su aplicación en la resolución de problemas contextualizados.

Existen pocas referencias de la evolución histórica de las inecuaciones cuadráticas, pero en este espacio presentaremos el objeto matemático en si, su definición, métodos de resolución y finalmente estudiaremos su aplicación en la resolución de un problemas contextualizado. Esta teoría básica descrita de Leithold (1998) se considerara como significado de referencia para analizar si las respuestas de los estudiantes a cada una de las situaciones problemáticas están conformes con esta teoría aceptada por la ciencia.

a) Inecuaciones cuadráticas en una variable

Existen diferentes formas de definir a las inecuaciones cuadráticas o desigualdades cuadráticas, pero esto depende del enfoque que el autor utiliza. Al respecto Leithold describe:

Una desigualdad cuadrática es aquella que tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

(El símbolo $<$ puede reemplazarse por $>$, $\leq$ o $\geq$)

Donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c}$ son números reales y $\boldsymbol{a \neq 0}$. Para resolver una desigualdad cuadrática, se emplearán los conceptos *número crítico* y *número de prueba*.

Un **número crítico** de la desigualdad anterior es una raíz real de la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Suponga que $r_1\ y\ r_2$ son los números críticos y $r_1 < r_2$. Entonces, el polinomio $ax^2 + bx + c$ puede cambiar de signo algebraico sólo en $r_1\ y\ r_2$. Así, el signo (más o menos) de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos.

$$(-\infty, r_1) \quad (r_1, r_2) \quad (r_2, +\infty)$$

A fin de determinar el signo en uno de los intervalos en particular, se calcula el valor de $ax^2 + bx + c$ en un **número de prueba** arbitrario en el intervalo. A partir de los resultados se obtiene el conjunto solución de la desigualdad. (Leithold, 1998. p. 117-118).

Como resultado de esta descripción, sistematizamos el siguiente procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas:

- Trasladar todos los términos diferentes de cero a un lado de la desigualdad y el otro lado se deja únicamente con el valor de 0.
- Factorizar la expresión cuadrática de la desigualdad; si no se puede factorizar directamente, utilizar la formula cuadrática.
- Hallar los números críticos $r_1\ y\ r_2$ de la ecuación cuadrática y localizar los puntos correspondientes a estos números sobre la recta real. Estos puntos separan a la recta en los intervalos $\langle -\infty, r_1 \rangle$, $\langle r_1, r_2 \rangle$, $\langle r_2, +\infty \rangle$
- Utilizar valores de prueba ubicados en dichos intervalos para determinar el signo de cada factor en cada intervalo. A partir de los resultados se obtiene el conjunto solución de la desigualdad.

En el ejemplo 1 y 2 presentamos los procedimientos indicados.

Ejemplo 1: resolver la inecuación

$$x^2 - 3 \leq -2x$$

Escribimos una desigualdad equivalente con todos los términos diferentes de cero a un lado de la desigualdad. De esta manera se tiene:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$(x+3)(x-1) \leq 0$$

De la forma factorizada de la desigualdad determinamos que la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 3 = 0$ tiene las raíces -3 y 1, las cuales son los números críticos de la desigualdad. Los puntos correspondientes a estos números al ser ubicados en la recta real la dividen en tres intervalos:

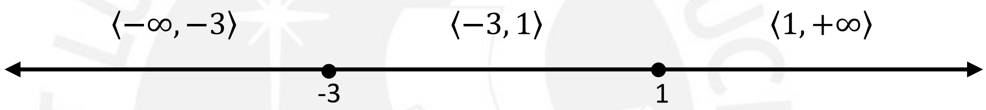


Figura 1. Localización de los números críticos del ejemplo 1

En cada uno de estos intervalos, el signo de $(x+3)(x-1)$ es constante; para determinarlo seleccionamos los **valores de prueba** en cada intervalo y se calcula los signos de cada factor $(x+3)$ y $(x-1)$ con este número de prueba. Si seleccionamos -5 en $\langle -\infty, -3 \rangle$, 0 en $\langle -3, 1 \rangle$ y 2 en $\langle 1, +\infty \rangle$ se obtiene los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados con números de prueba en el ejemplo 1

Intervalo	$\langle -\infty, -3 \rangle$	$\langle -3, 1 \rangle$	$\langle 1, +\infty \rangle$
Número de prueba	-5	0	2
Signo de $(x+3)$	**-**	**+**	**+**
Signo de $(x-1)$	**-**	**-**	**+**
Signo de $(x+3)(x-1)$	**+**	**-**	**+**

A partir del cuadro se observa los intervalos sobre los que $(x+3)(x-1)$ es positivo o negativo. Se concluye que el conjunto solución de la inecuación $(x+3)(x-1) \leq 0$ es el intervalo $[-3, 1]$ por ser el intervalo donde $(x+3)(x-1)$ es negativo. Incluimos los extremos -3 y 1 porque se buscan valores de x tales que el producto es menor o igual a cero.

Resolución gráfica: La desigualdad cuadrática también puede resolverse gráficamente; para esto consideramos

$$y = x^2 + 2x - 3$$

La gráfica de esta ecuación es:

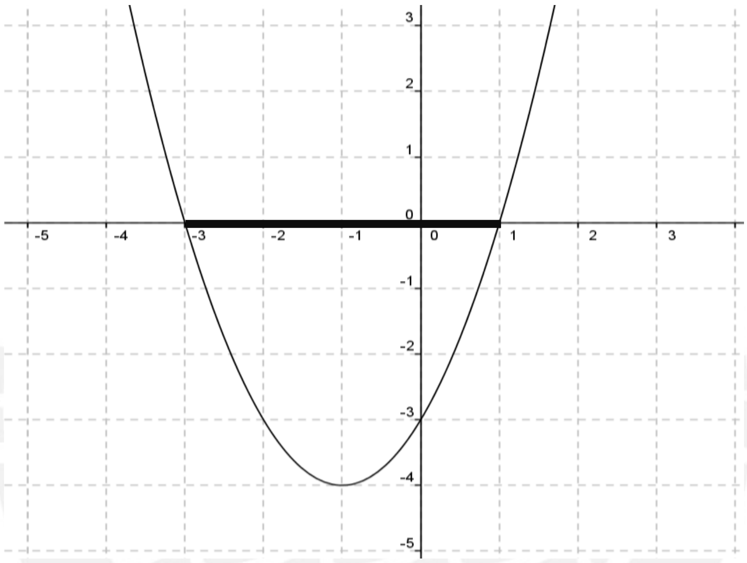


Figura 2. Gráfica de y = x^2 + 2x - 3 correspondiente al ejemplo 1

La gráfica ésta por debajo del eje x (es decir $y \leq 0$) cuando x está en el intervalo cerrado $[-3,\ 1]$, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos algebraicamente. $y = x^2 + 2x - 3$

Ejemplo 2: resolver la inecuación

$$x^2 - 12 \geq 4x$$

Solución:

La inecuación dada es equivalente a

$$x^2 - \ 4x - 12 \geq 0$$

$$(x - 6)(x + 2) \geq \ 0$$

Los números críticos son -2 y 6. Los puntos correspondientes a estos números están localizados en la recta numérica y determinan los siguientes intervalos

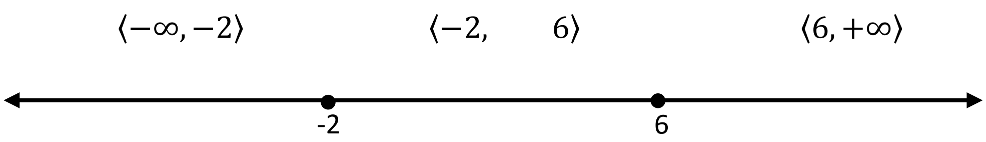


Figura 3. Localización de los números críticos del ejemplo 2

Se calcula los signos de cada factor $(x+2)$ y $(x-6)$ eligiendo un número de prueba y determinamos el signo de $(x+2)(x-6)$ sobre dichos intervalos.

Tabla 2. Resultados con números de prueba en el ejemplo 2

Intervalo	$\langle -\infty, -2\rangle$	$\langle -2, \quad 6\rangle$	$\langle 6, +\infty\rangle$
Número de prueba	-4	0	8
Signo de $(x+2)$	**-**	**+**	**+**
Signo de $(x-6)$	**-**	**-**	**+**
Signo de $(x+2)(x-6)$	**+**	**-**	**+**

A partir del cuadro se observa los intervalos sobre los que $(x+2)(x-6)$ es positivo o negativo. Entonces $(x+2)(x-6) \geq 0$ si x esta en $\langle -\infty, -2] \cup [6, +\infty\rangle$. Se concluye que el conjunto solución de la inecuación es el intervalo $\langle -\infty, -2] \cup [6, +\infty\rangle$. por ser los intervalos donde $(x+2)(x-6)$ es positivo. Incluimos los extremos -2 y 6 porque se buscan valores de x tales que el producto de los factores es mayor o igual a cero.

Resolución gráfica: graficamos la expresión

$$y = x^2 - 4x - 12$$

La gráfica de esta ecuación es:

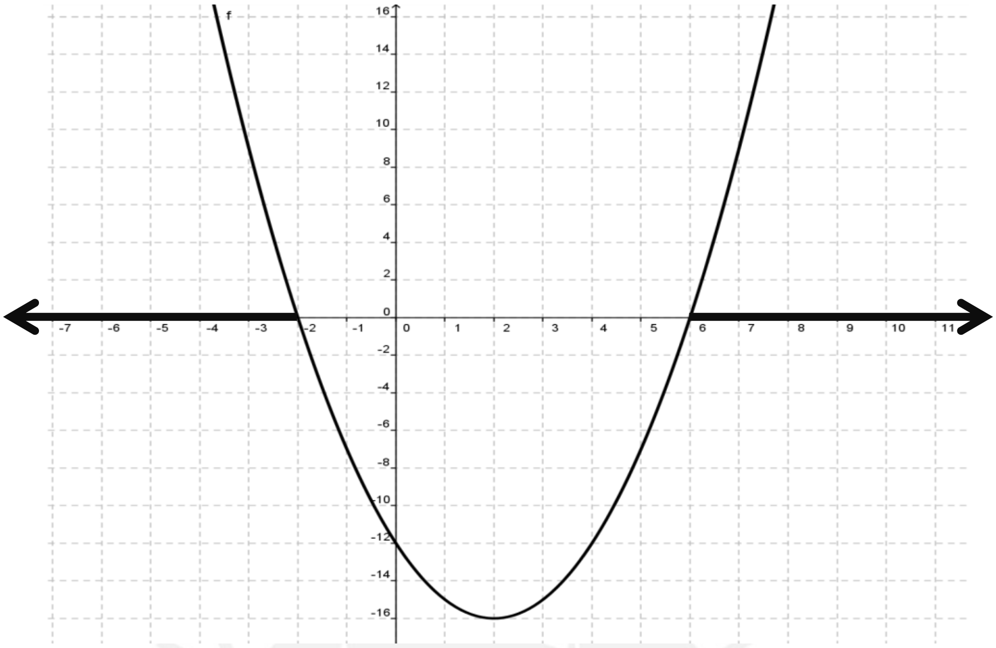


Figura 4. Gráfica de $y = x^2 - 4x - 12$ correspondiente al ejemplo 2

La gráfica se ubica por arriba del eje x (es decir $y \geq 0$) cuando x está en el intervalo $\langle -\infty, -2] \cup [6, +\infty\rangle$, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos algebraicamente.

En los ejemplos 1 y 2 observamos que el conjunto solución de las inecuaciones cuadráticas fueron un intervalo cerrado o la unión de dos intervalos; es necesario recalcar que existen inecuaciones cuyo conjunto solución puede ser el conjunto vacío o el conjunto de todos los números reales. Al respecto presentamos la explicación de la resolución de dos inecuaciones cuadráticas (ejemplo 3 y 4) con estas características realizadas por Leithold (1998, p. 120 - 121):

Ejemplo 3: Resolución algebraica de una desigualdad cuadrática cuyo conjunto solución es Ø.

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$$

Solución: La desigualdad es equivalente a:

$$4x^2 - 4x + 1 < 0$$
$$(2x - 1)^2 < 0$$

Debido a que no existe un valor de x para el cual $(2\mathrm{x}-1)^2$ es negativo, el autor determina que no hay solución. Por lo tanto concluye que el conjunto solución de la inecuación cuadrática es Ø.

Esta solución también lo podemos determinar al trazar la gráfica de

$$y = (2x-1)^2$$

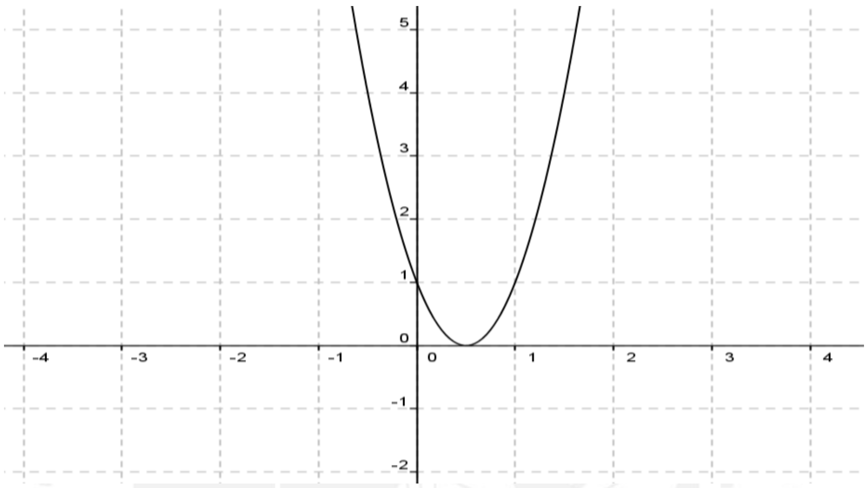


Figura 5. Gráfica de y = (2x - 1)^2 correspondiente al ejemplo 3

Observamos que toda la grafica se localiza por arriba del eje x, por eso no hay solución.

Ejemplo 4: Resolución algebraica de una desigualdad cuadrática absoluta

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$-6\mathrm{x}^2 - 8\mathrm{x} + 1 \leq 3\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 5$$

Solución. La desigualdad es equivalente a:

$$-9\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} - 4 \leq 0$$
$$9\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} - 4 \geq 0$$

$$(3\mathrm{x}+2)^2 \geq 0$$

Debido a que $(3\mathrm{x}+2)^2$ es positivo para todos los valores de x, el conjunto solución es el conjunto R de todos los números reales. Por tanto, la desigualdad es absoluta.

La resolución gráfica de esta inecuación se puede determinar al trazar la gráfica de

$$y = (3\mathrm{x} + 2)^2$$

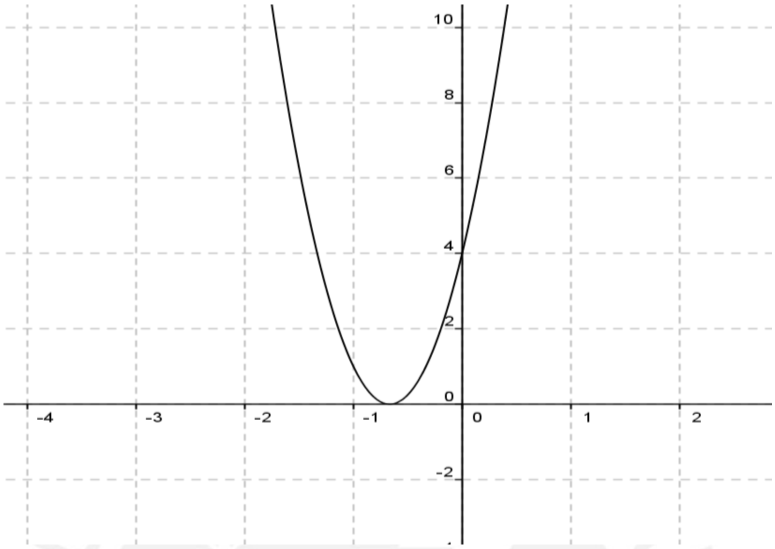


Figura 6. Gráfica de y = $(3x + 2)^2$ correspondiente al ejemplo 4

Toda la parábola esta por arriba del eje x (es decir $y \geq 0$), y su solución es cualquier número real.

b) Aplicación de la inecuación cuadrática en la resolución de un problema contextualizado.

Generalmente para resolver un problema contextualizado con inecuación cuadrática se utiliza los siguientes procedimientos:

- Asignar una variable al término desconocido.
- Establecer las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos para plantear la inecuación cuadrática.
- Resolver la inecuación planteada con los métodos que más se adaptan a nuestro planteamiento y determinar el conjunto solución de acuerdo al contexto del problema.

En el siguiente ejemplo utilizamos los procedimientos indicados para la resolución de un problema contextualizado.

Cercando un terreno rectangular

Juan tiene un terreno de más de mil metros cuadrados y dispone de 160 metros lineales de malla para cercar en él una parcela rectangular ¿Cuánto podría medir el ancho de la parcela rectangular si su área no debe ser mayor que 700 metros cuadrados?

Solución

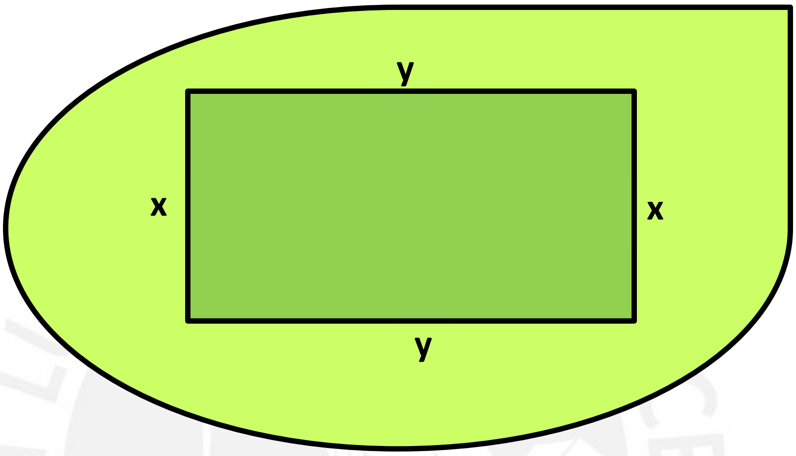


Figura 7. Representación gráfica de un problema con inecuaciones cuadraticas

Perímetro del terreno rectangular: $2x + 2y = 160$

Asignación de las variables:

$Ancho: x$

$Largo: 80 - x$

Planteamiento de la inecuación según las condiciones del problema:

$(ancho).(largo) \leq 700$

$x(80 - x) \leq 700$

Resolviendo la inecuación:

$80x - x^2 \leq 700$

$x^2 - 80x + 700 \geq 0$

$(x - 10)(x - 70) \geq 0$

Números críticos: $10 \ y \ 70$

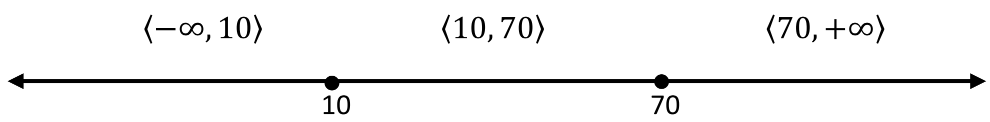


Figura 8. Localización de los números críticos del problema contextualizado

Se calcula los signos de cada factor $(x-10)\ y\ (x-70)$ eligiendo un número de prueba y determinamos el signo de $(x-10)(x-70)$ sobre dichos intervalos.

Tabla 3. Resultados con números de prueba en el problema contextualizado

Intervalo	$\langle -\infty, 10\rangle$	$\langle 10, 70\rangle$	$\langle 70, +\infty\rangle$
Número de prueba	5	20	80
Signo de $(x-10)$	**-**	**+**	**+**
Signo de $(x-70)$	**-**	**-**	**+**
Signo de $(x-10)(x-70)$	**+**	**-**	**+**

A partir del cuadro se observa los intervalos sobre los que $(x+2)(x-6)$ es positivo, es decir $(x-10)(x-70) \geq 0$ si x esta en $\langle -\infty, 10] \cup [70, +\infty\rangle$,. Se concluye que el conjunto solución de la inecuación es el intervalo $\langle -\infty, 10] \cup [70, +\infty\rangle$,

Resolución gráfica: trazamos la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 80x + 700$

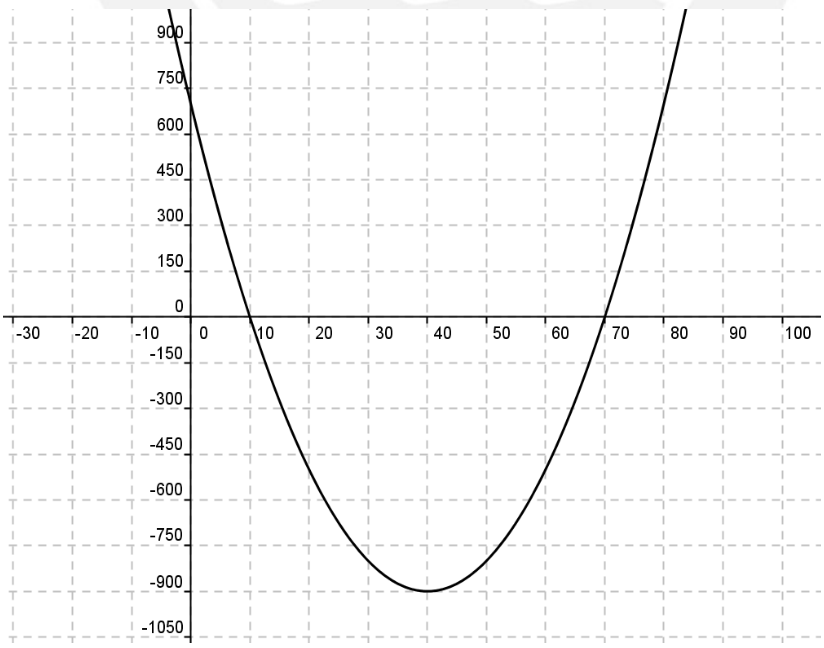


Figura 9. Gráfica de $y = x^2 - 80x + 700$ del problema contextualizado

En la gráfica observamos que la parábola se ubica por arriba del eje x (es decir $y \geq 0$) cuando x está en el intervalo $\langle -\infty, 10] \cup [70, +\infty\rangle$, lo cual coincide con los resultados obtenidos algebraicamente.

Conjunto solución de la inecuación de acuerdo al contexto del problema

Para que Juan cerque la parcela rectangular con la malla que dispone y el área de la parcela no sea mayor que 700 metros cuadrados, la medida del ancho de la parcela rectangular puede ser cualquiera de los valores que se encuentran comprendidos en el intervalo: $\langle \mathbf{0}, \mathbf{10}] \cup [\mathbf{70}, \mathbf{80}\rangle$

3.2 Análisis cognitivo

Con la intensión de lograr un análisis de las características cognitivas de los estudiantes, se aplicó una prueba de conocimientos previos, donde se evalúan conocimientos y habilidades consideradas como prerrequisitos necesarios para iniciar el aprendizaje de inecuaciones cuadráticas, que serán propuestas en las actividades de la secuencia didáctica; tales prerrequisitos son los siguientes:

i) Conocer y aplicar las propiedades de orden de los números reales.
ii) Establecer la correspondencia entre los números reales y la recta real.
iii) Comprender y representar gráficamente la unión e intersección de intervalos.
iv) Comprender el concepto de variable y representar algebraicamente enunciados verbales sobre desigualdades.
v) Resolver ecuaciones cuadráticas.
vi) Graficar funciones cuadráticas con destreza en la manipulación algebraica. Representar una función cuadrática en su forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ o en su forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
vii) Leer e interpretar gráficas de funciones cuadráticas

Para la evaluación de cada uno de los 7 prerrequisitos indicados, se elaboró una pregunta por prerrequisito, las cuales están orientadas a evaluar los conocimientos previos considerados para el aprendizaje de las inecuaciones cuadráticas propuestas en la secuencia didáctica.

3.2.1 Análisis de la evaluación de conocimientos previos

Incluimos los resultados de la evaluación de conocimientos previos, con la intención de lograr mayor objetividad en el análisis de los conocimientos que poseen los estudiantes en relación al objeto de estudio considerado en la investigación.

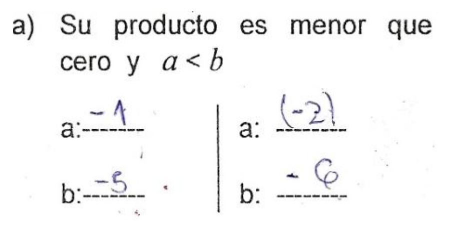
Esta evaluación denominada “recordando los conocimientos previos” (apéndice, p. 143) se aplicó el 12 de octubre del 2011, consta de siete (7) preguntas (Problemas) de respuestas abiertas. La evaluación duró 90 minutos y para efectos de calificación se consideró el sistema vigesimal.

De los 40 alumnos matriculados, 28 rindieron el examen, 2 no asistieron ese día y 10 alumnos figuran como inhabilitados por exceso de faltas. En base a los 28 alumnos que participaron de la evaluación y considerando a 10,5 como puntaje mínimo aprobatorio, el promedio alcanzado fue de 11,08 puntos.

A continuación teniendo en cuenta los resultados (apéndice, p. 137) mostramos los resultados y el análisis de algunas respuestas obtenidos en la evaluación de conocimientos previos.

Problema 1: Se orienta a evaluar el conocimiento previo **i)** conocer y aplicar las propiedades de orden de los números reales.

<table>
<tr><td colspan="2">En cada uno de los siguientes casos, dé dos pares de números reales, a y b que pueden ser números positivos o negativos, tales que cumplan la condición que se da:

a) Su producto es menor que cero y $a < b$
b) Su producto es menor que cero y $a > b$
c) Su producto es mayor o igual que cero y $a < b$
d) Su producto es mayor o igual que cero y $a > b$</td></tr>
<tr><td>A través de este problema se evalúa la capacidad que tienen los estudiantes para comparar e identificar el orden de dos números reales y calcular su producto con las condición de ser positivo o negativo.
En los resultados obtenidos se encontró que, de 28</td><td>
a) Su producto es menor que cero y $a < b$
a: -1   a: (-2)
b: -5   b: -6</td></tr>
</table>

alumnos 14 respondieron correctamente cada uno de los ítems, 9 identificaron los números reales pero su producto no era mayor o igual que cero o menor o igual que cero, 1 alumno no respondió, 4 estudiantes tuvieron dificultades para identificar los dos números reales que cumplan con las condiciones exigidas, tal como se muestra en la respuesta de un alumno en la figura 10; la elección incorrecta de los dos números reales demuestra que todavía no han interiorizado la relación de orden y producto de números reales con las condiciones solicitadas.

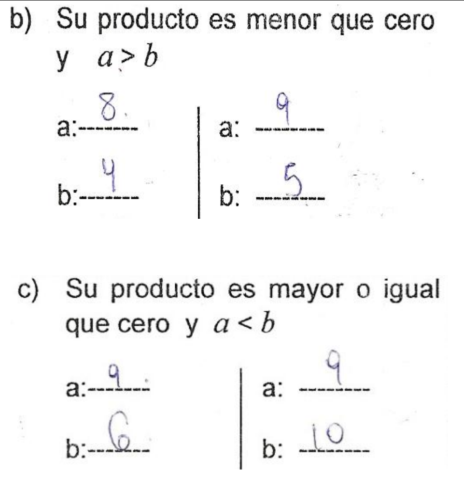


Figura 10. Respuesta de un alumno al problema 1

Problema 2: Diseñado para evaluar el conocimiento previo **ii)** Establecer la correspondencia entre los números reales y la recta real.

En cada caso, represente en la recta real los números que se dan:

a) $2, \quad 3/5, \quad 9/7, \quad 235/110$ **b)** $\sqrt{7}, \quad 3\sqrt{2}, \quad 2$

c) $9/7, \quad 3\sqrt{2}, \quad -\sqrt{11}$ **d)** $-4, \quad -2/3, \quad -5/7$

Con este problema se evaluó la capacidad que tienen los estudiantes para ordenar una cantidad determinada de números reales en una recta real. Los resultados obtenidos indican que de 28 alumnos, 12 respondieron correctamente, 9 tuvieron dificultades solo cuando se ordenaban números irracionales, 2 estudiantes presentaron serias dificultades para ordenar números reales dados y ubicarlos en la recta real realizando una representación equivocada (figura 11). Esto es un error que puede deberse a que los estudiantes fueron ejercitados solamente con números enteros. También se determino que 5 estudiantes no respondieron este ítem.

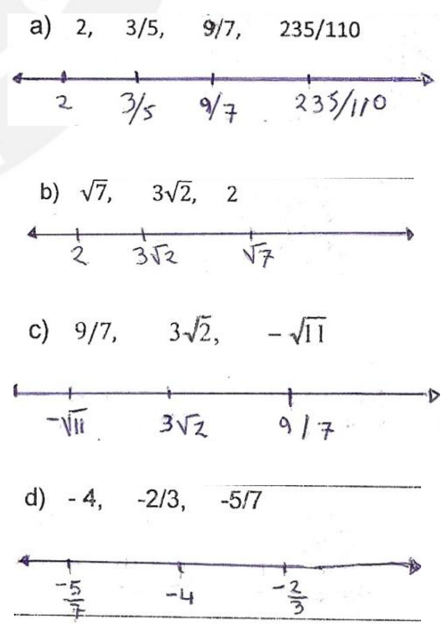
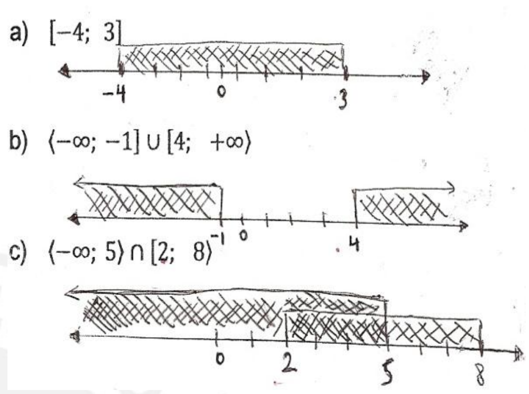


Figura 11. Respuesta de un alumno al problema 2

Problema 3: Elaborado para evaluar el conocimiento previo **iii)** Comprender y representar gráficamente la unión e intersección de intervalos.

<table>
<tr><td colspan="2">Represente gráficamente los siguientes conjuntos, en una recta real:
a) $[-4;\ 3]$ **b)** $\langle -\infty;\ -1] \cup [4;\ \ +\infty\rangle$ **c)** $\langle -\infty;\ 5\rangle \cap [2;\ \ 8\rangle$</td></tr>
<tr><td>Con este problema se evaluó la capacidad que tienen los estudiantes para representar gráficamente en una recta real la unión e intersección de intervalos.
Los resultados obtenidos revelan que, de 28 estudiantes, 20 realizaron la representación gráfica correctamente, sin embargo existieron algunas representaciones gráficas que no identificaban el extremo de los intervalos, restándole importancia a la condición de ser cerrado o abierto, (figura 12), esto ocurre posiblemente porque los estudiantes lo identifican como un conjunto limitado por dos extremos sin saber si estos extremos pertenecen o no al intervalo.</td><td>
Figura 12. Respuesta de un alumno al problema 3</td></tr>
</table>

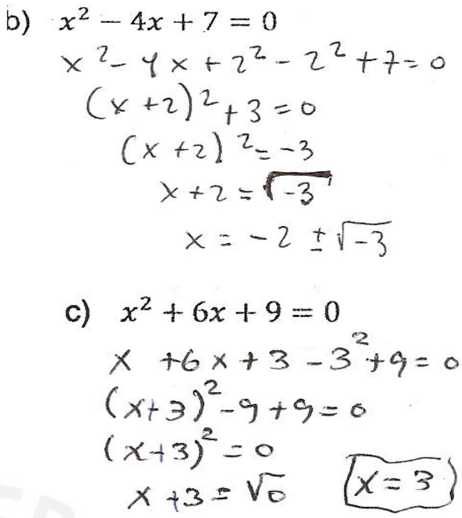
Problema 4: Diseñado para evaluar el conocimiento previo **iv)** Comprender el concepto de variable y representar algebraicamente enunciados verbales sobre desigualdades.

Utilice una variable y una desigualdad adecuada para representar en cada caso el enunciado dado: a) Teresa multiplica un número dos veces por sí mismo y obtiene un resultado no menor que 3 b) El producto de dos números que se diferencian en dos unidades no es mayor que 15 c) El área de un cuadrado es menor que 25 (en metros cuadrados) d) El cuadrado de un número es mayor que el doble de dicho número, disminuido en cuatro

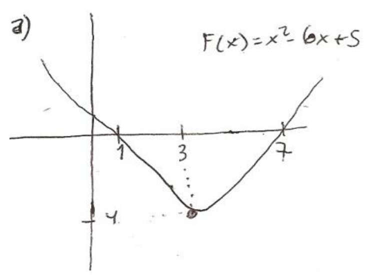
A través de este problema se evaluó la capacidad que tienen los estudiantes para identificar una variable, comprender su significado y utilizarla para representar algebraicamente el enunciado dado. Los resultados obtenidos revelan que, de 28 estudiantes evaluados, solo 8 respondieron correctamente, 6 confundieron el signo de la desigualdad, 4 respondieron incorrectamente y 10 no respondieron; esto explicaría que existen limitaciones para interpretar el significado de variables contextualizadas y su formulación a través de desigualdades. Los errores más comunes fueron la identificación del signo de la desigualdad y la representación algebraica tal como se observa en la figura 13.	a) $2(x) > 3$ b) $x(x+2) \geq 15$ c) $A_{\square} > 25m$ d) $Y^2 > (x-y)$ **Figura 13.** Respuesta de un alumno al problema 4

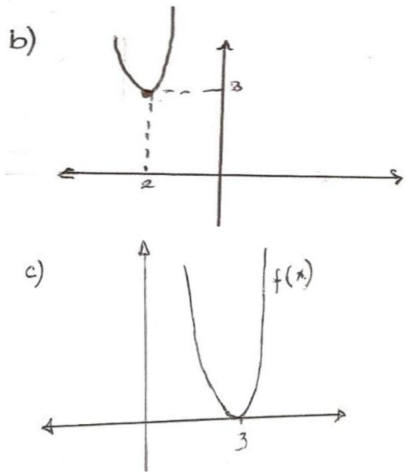
Problema 5: Elaborado para evaluar el conocimiento previo **v)** Resolver ecuaciones cuadráticas.

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas en el conjunto de los números reales: a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 - 4x + 7 = 0$ c) $x^2 + 6x + 9 = 0$	
Con este problema se evaluó la capacidad que tienen los estudiantes para resolver inecuaciones cuadráticas utilizando cualquiera de los métodos conocidos. En los resultados se obtuvo que 12 alumnos respondieran	a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$ $(x+3)^2 - 4 = 0$ $x + 3 = \sqrt{4}$ $x_1 = 1$ $x + 3 = 4$ $x_2 = 7$ $x = 4 \pm 3$

correctamente, 8 tuvieron dificultades para resolver la ecuación con término cuadrático no factorizable en R, 6 utilizaron equivocadamente el método de completar cuadrados y 2 no pudieron resolverlo. Los errores más comunes fueron los procedimientos al completar cuadrados tal como se observa en la respuesta de un alumno en la figura 14. Tres estudiantes escribieron en la respuesta de la ecuación b "la ecuación no tiene raíces reales" identificándose que las raíces son números complejos.	 **Figura 14.** Respuesta de un alumno al problema 5

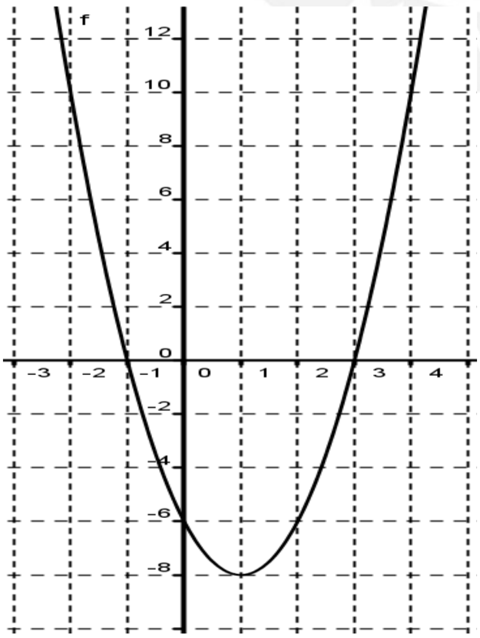
Problema 6: Elaborado para evaluar el conocimiento previo **vi)** Graficar funciones cuadráticas con destreza en la manipulación algebraica. Representar una función cuadrática en su forma canónica $f(x)=a(x-h)^2+k$ o en su forma polinómica $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

Exprese cada una de las siguientes funciones cuadráticas en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k;\ donde\ a,\ h,\ k$ representan números reales fijos y luego grafíquelas en el plano cartesiano: **a)** $g(x)=x^2-6x+5$ **b)** $h(x)=x^2-4x+7$ **c)** $m(x)=x^2+6x+9$	
Con este problema se evaluó la capacidad que tienen los estudiantes para graficar funciones cuadráticas, así mismo la utilización de procedimientos algebraicos para identificar el vértice y la intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas. En esta pregunta se solicitó trazar la gráfica de las mismas expresiones cuadráticas dadas en el problema 5, esto con la intensión de	

utilizar los procedimientos realizados en este punto para determinar el diseño de la gráfica. Los resultados revelaron grandes dificultades en el desarrollo de este problema, dado que 17 estudiantes dejaron la respuesta en blanco, 6 trazaron la gráfica incorrectamente, 4 trazaron la gráfica del ítem **a)** y **b)** y solo el 1 de los estudiantes logró graficarlo correctamente. En las gráficas trazadas se notó la influencia de los errores cometidos al completar cuadrados, determinando el vértice de la parábola y la intersección con el eje de abscisas incorrectamente, tal como se observa en la figura 15.	 **Figura 15.** Respuesta de un alumno al problema 6

Problema 7: Diseñado para evaluar el conocimiento previo vii) Leer e interpretar gráficas de funciones cuadráticas

A continuación se muestra el gráfico de una función cuadrática **f**. Observando el gráfico determine:



a) Las raíces de la ecuación cuadrática **f**$(x) = 0$

b) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \leq 0$

c) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \geq 0$

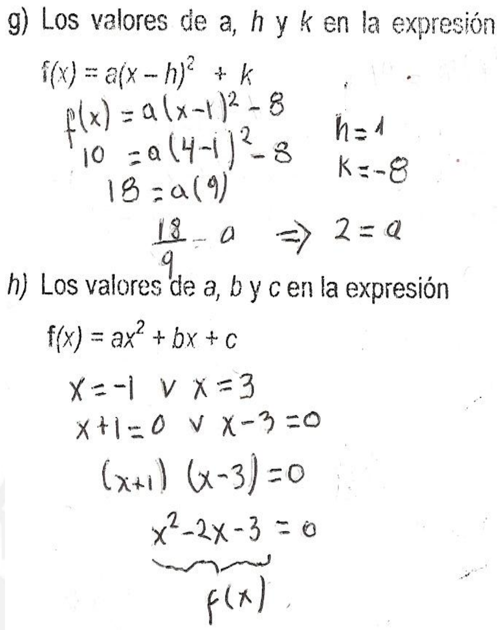
d) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \leq 10$

e) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \geq 10$

f) Las coordenadas del vértice de la parábola

g) Los valores de a, *h* y *k* en la expresión $\boldsymbol{f}(x) = a(x - h)^2 + k$

h) Los valores de *a*, *b* y *c* en la expresión $\boldsymbol{f}(x) = ax^2 + bx + c$

Con este problema evaluamos la capacidad que tienen los estudiantes para interpretar el comportamiento de la gráfica de una función cuadrática. En los resultados se obtuvo que, de 28 estudiantes 14 lograron interpretar correctamente, 8 tuvieron dificultades para completar las respuestas de los ítems g y h, 4 interpretaron incorrectamente y solo 2 estudiantes no lograron realizarlo. Los ítem a, b, c, d y f fueron los menos complicados porque sus respuestas fueron determinados por simple observación. En los ítems g y h se identificaron grandes dificultades para determinar los valores de *h, k a, b* y *c* debido a los procedimientos algebraicos que se tenían que utilizar para determinar la regla de correspondencia de la función cuadrática tal como se observa en la figura 16.	 **Figura 16.** Respuesta de un alumno al problema 7

A partir de los resultados obtenidos y del análisis presentado concluimos que los estudiantes evaluados:

1. Tienen dificultades para considerar los diversos casos en los que el producto de dos números es positivo o negativo.
2. Se evidencia limitaciones para ordenar números reales en la recta real.
3. Algunos estudiantes no tienen claridad sobre la inclusión o no inclusión de los extremos de un intervalo según sea cerrado o abierto.
4. Se observan dificultades para interpretar el significado de variables contextualizadas y la formulación algebraica de enunciados verbales a través de desigualdades.
5. Se observan limitaciones para resolver ecuaciones cuadráticas, especialmente en aquellas con trinomio cuadrático no factorizable en R.
6. Tienen grandes dificultades para esbozar la gráfica de funciones cuadráticas.

7. Se observan limitaciones para interpretar y utilizar procedimientos algebraicos en la determinación de las características de la gráfica de una función cuadrática.

Estas conclusiones fueron consideradas para la elaboración del diseño de la secuencia didáctica, sirviendo para predecir algunas dificultades en la resolución de las inecuaciones cuadráticas planteadas en la propuesta didáctica.

3.3 Análisis Didáctico

Se analizarán las características de cómo se desarrolla el proceso de enseñanza de las inecuaciones cuadráticas en la institución, los recursos didácticos y las estrategias de enseñanza que se utilizan y cómo explican el tema algunos libros de texto diseñados para la enseñanza.

3.3.1 La enseñanza de las inecuaciones cuadráticas y su aplicación en la resolución de problemas en la Universidad Señor de Sipán

Las Inecuaciones Cuadráticas en una variable forman parte de los contenidos del curso denominado Lógico Matemática que se dicta en la USS desde su primer año de funcionamiento en abril del 2000.

Lógico Matemática es una asignatura de formación general que llevan los estudiantes de todas las carreras profesionales en el primer ciclo; se desarrolla en 8 horas semanales: distribuidas en 4 horas de teoría, 2 horas de práctica, las cuales se desarrollan en una sola jornada de 6 horas consecutivas, las 2 horas restantes son dedicada a nivelación y reforzamiento de temas aparentemente complicados o de mayor dificultad.

El ciclo tiene una duración de 16 semanas y acredita al estudiante un valor de 5 créditos, al aprobar el curso. Su principal objetivo es desarrollar las competencias básicas en el área de lógico matemática, para lo cual en su silabo (anexo 1) se detalla lo siguiente:

> "Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando estrategias meta cognitivas en la lógica formal y operaciones matemáticas, a partir de situaciones problemáticas de la vida real y de la formación profesional".

Su objeto son la argumentación y resolución de problemas matemáticos a partir de la utilización de la matemática y la lógica en operaciones que requieren contextos reales.

En este curso los temas que se trabajan servirán para un adecuado manejo de contenidos posteriores, para enriquecer la cultura general y para la aplicación en situaciones de la vida diaria y profesional. Sus contenidos están organizados en tres unidades:

- Lógica Proposicional y operaciones con Conjuntos
- Sistema de números reales, Relaciones, Funciones y Matrices
- Nociones básicas de Geometría analítica y Estadística.

Estos contenidos están desarrollados en un material impreso denominado módulo de Lógico Matemática y se entrega al estudiante al iniciar el ciclo académico. Este material contiene la teoría, ejercicios y problemas tanto para trabajar en clase como para resolver en casa y es considerado como el primer material de consulta por parte de los estudiantes para el desarrollo del curso. Es necesario recalcar, que a pesar de la variedad de texto de matemática este módulo cumple las funciones de medio divulgativo de los contenidos del área y fue elaborado por una recopilación parcial de contenidos presentados en textos de uso universitario; estos textos serán analizados posteriormente para tener referencias sobre su presentación didáctica.

La forma de enseñanza en las aulas universitarias es parcialmente expositiva donde el profesor inicia la clase con una presentación del tema, desarrollo de ejemplo y propone ejercicios para ser resueltos en grupos de trabajo, mientras tanto el profesor está pendiente para resolver dificultades y orientar el proceso en caso sea necesario.

Dentro de las consideraciones importantes de este curso es la utilidad del conocimiento en la resolución de problemas relacionados a la vida real o en el contexto profesional; sin embargo las actividades desarrolladas en clase no están orientadas a alcanzar los objetivos del curso, porque predomina el manejo algorítmico descuidando la aplicación en la resolución de problemas contextualizados.

Específicamente en el tema de inecuaciones cuadráticas que está incluido dentro de los contenidos de sistema de números reales; el proceso de enseñanza tiene los mismos procedimientos, al igual que el desarrollo de otros contenidos: se inicia la clase con la presentación de la definición, luego se indican los procesos de resolución utilizando técnicas operativas sin comprensión, que el estudiante olvida demasiado rápido y en ningún momento se presentan aplicaciones de este objeto matemático en la resolución de problemas

En general un problema principal en la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas es la persistencia del protagonismo del profesor al usar la exposición con demasiada frecuencia y hablando en términos de Brousseau, no hay una devolución de responsabilidades de aprendizaje al estudiante, no hay fases de acción, formulación ni de validación; todo el proceso es de Institucionalización ocasionando limitaciones en el aprendizaje de este objeto matemático.

3.3.2 Las inecuaciones cuadráticas en los libros texto

Siguiendo los lineamientos de la Ingeniería Didáctica en lo referente al análisis didáctico, se analizan varios libros de texto para evaluar cómo presentan a las Inecuaciones Cuadráticas (apéndice, p. 138). Nuestro propósito es tener referencias sobre la presentación didáctica de este objeto matemático; para ello hemos seleccionado algunos libros que gozan de cierto prestigio en la educación universitaria y que fueron utilizados como referencias para la elaboración del módulo de lógico matemática en la USS. Entre estos libros tenemos:

Texto	Autor	Editorial	Año
Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica	Leithold Louis	Oxford University Press	1998
Precálculo: Matemáticas para el cálculo	Stewart James	International Thomson	2001
Álgebra y trigonometría con geometría analítica	Swokowski Earl W.	Cengage Learning	2009

Para efectos del análisis didáctico se evalúa cómo los autores del libro hacen la introducción del tema, cómo lo tratan (enfoque) y qué tipo de ejercicios o problemas utilizan para explicar los procesos de resolución de este objeto matemático.

1. **Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica (Leithold Louis, 1998)**

En el tema denominado "Desigualdades Polinomiales", hace una presentación ordenada de los objetivos a lograr. Específicamente en el caso de las desigualdades cuadráticas presenta como principal objetivo resolver algebraicamente y gráficamente desigualdades cuadráticas. En el desarrollo del tema se inicia con una definición formal, luego presenta ejemplos ilustrativos donde explica los procedimientos algebraicos para determinar la solución de la desigualdad cuadrática; posterior a esto, utiliza el método gráfico donde realiza una interpretación de la gráfica y determina el conjunto solución haciendo una comparación con lo obtenido en el método algebraico. Particularmente esta comparación permite comprender los procesos de resolución y el cálculo del conjunto solución de una inecuación cuadrática. En la variedad de los ejemplos que explica el proceso de resolución de una inecuación cuadrática, selecciona a aquellas donde el conjunto solución es un intervalo, la unión de dos intervalos, el conjunto vacío o todos los números reales. No presenta ejemplo donde el conjunto solución de una inecuación es un número real

Finalmente termina su explicación con la resolución de un problema contextualizado donde utiliza a las inecuaciones cuadráticas como modelos matemáticos (figura 17), para su resolución, utiliza los mismos procedimientos descritos en los ejemplos anteriores y termina con la contextualización del conjunto solución. No propone situaciones problemáticas para que a partir del enunciado del problema se pueda traducir en un término cuadrático, al cual lo presenta directamente, limitando la comprensión de la utilidad del conocimiento matemático en la resolución de problemas.

▸ **EJEMPLO 7** ***Resolución de un problema que tiene una desigualdad cuadrática como modelo matemático***

Un decorador diseña y vende adornos de pared y puede comerciar, cada uno de los adornos producidos, a un precio de $75. Si x adornos son manufacturados diariamente, entonces el costo total diario de producción es $x^2 + 25x + 96$ dólares. ¿Cuántos adornos deberán producirse diariamente para que el decorador garantice una utilidad?

Figura 17. Problema con desigualdad cuadrática

Fuente: Leithold Louis, 1998, p. 123

2. Pre cálculo: matemáticas para el cálculo (Stewart James, 2001).

Presenta inicialmente a las desigualdades lineales detallando sus características, formas de resolverlas y mostrando las "reglas para desigualdades"; luego como una extensión presenta a las desigualdades no lineales donde explica la resolución de las desigualdades cuadráticas utilizando dos métodos: resolución de forma algebraica y resolución gráfica, en ambos casos previamente explicó los procedimientos de resolución de las ecuaciones cuadráticas. En la forma algebraica explica un ejemplo y concluye dando "Recomendaciones para la resolución de desigualdades no lineales" donde detalla paso a paso los procedimientos a seguir, sin embargo estos procedimientos tienen una explicación técnica sin una argumentación formal limitando la comprensión de los proceso de resolución. En la figura 18 podemos distinguir que en la resolución gráfica resalta la habilidad del trazado rápido de la gráfica de ecuaciones cuadráticas utilizando calculadora y a partir del trazo puede interpretar y deducir el conjunto solución de la inecuación cuadrática. Particularmente este procedimiento detalla una mejor comprensión al determinar el conjunto solución en comparación con los métodos algebraicos, pero solamente se limita en esta presentación a resolver desigualdades cuadráticas factorizables en los números reales; finalmente como una aplicación de este objeto matemático propone problemas contextualizados donde se utilice la inecuación cuadrática como modelo matemático.

Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

obtenemos la gráfica de $y = x^2 - 3x - 10$ y buscamos las coordenadas en x de los puntos con coordenadas en y mayores que 0; en éstas la gráfica se encuentra por encima del eje x. Por lo tanto, de la figura 8(b) vemos que la solución de la desigualdad es $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$. De forma análoga, la solución de

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

son las coordenadas en x de aquellos puntos cuya coordenada en y es menor que 0, esto es, los puntos en los que la gráfica se encuentra por debajo del eje x. Por lo tanto, la solución es el intervalo $(-2, 5)$.

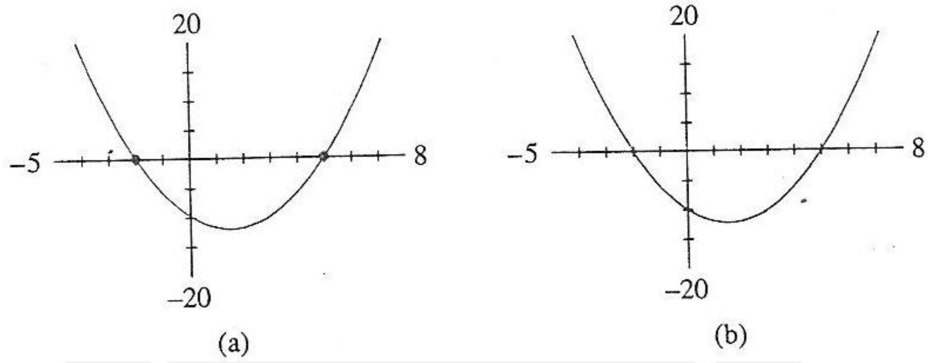


Figura 18. Resolución gráfica de una inecuación cuadrática

Fuente: Stewart James, 2001, p. 99 - 100

3. **Álgebra y trigonometría con geometría analítica (Swokowski Earl W. 2009):**

En este libro el capítulo que trata a las inecuaciones cuadráticas se denomina Ecuaciones y Desigualdades; presenta inicialmente a las desigualdades lineales y posteriormente a las desigualdades cuadráticas con el titulo “más sobre desigualdades”. En esta parte explica los procesos de resolución de dos ejemplos de desigualdades cuadráticas, describiendo muy bien los pasos que se siguen. En esta descripción se observa claramente una explicación técnica, que solamente garantizarían un dominio memorístico de tales procesos. Así mismo advierte que es un error extender el teorema del factor cero a las desigualdades. Expresa que:

$$xy < 0 \; no \; es \; equivalente \; a \; x < 0 \;\; ó \;\; y < 0$$

Esta advertencia lo considera para evitar errores de confusión con los procesos de resolución de ecuaciones cuadráticas. Finalmente como una aplicación propone problemas contextualizados, donde utiliza a las inecuaciones cuadráticas como modelo matemático, presentando directamente al trinomio cuadrático que forma a la inecuación (figura 19) No propone situaciones problemáticas para que a partir del enunciado del problema se pueda traducir en un término cuadrático, tal como presentaremos en esta propuesta de esta investigación.

43 **Récord de salto vertical** El *Libro Guiness de Records Mundiales* informa que los perros pastores alemanes pueden dar saltos verticales de más de 10 pies cuando escalan paredes. Si la distancia s (en pies) desde el suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del suelo?

44 **Altura de un objeto lanzado** Si un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 ft/s, entonces su distancia s sobre el suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t estará el objeto a más de 1536 pies sobre el suelo?

Figura 19. Problemas propuestas con inecuaciones cuadráticas

Fuente: Swokowski Earl, 2009, p. 128

A manera de síntesis:

Los tres textos analizados inician su presentación con la resolución algebraica de la inecuación cuadrática, se detallan los pasos a seguir, utilizan la factorización para determinar los puntos críticos y utilizan los números de prueba para determinar el signo en los intervalos formados. Las explicaciones que se dan tienen una orientación técnica, no se fundamentan de manera formal los procedimientos algebraicos. Solo dos textos (Leithold y Stewart) explican el método gráfico para determinar el conjunto solución de una inecuación cuadrática; en este caso se asumen que el estudiante tiene la capacidad de interpreta el comportamiento de la gráfica de una función cuadrática y a partir de esta interpretación determinaría el conjunto solución de la inecuación cuadrática. Con respecto a la aplicación de las inecuaciones cuadráticas en la resolución de problemas contextualizados los tres autores utilizan a este objeto matemático como un modelo y no como una traducción de una situación problemática en un trinomio cuadrático que forma a la inecuación. Estas consideraciones nos dan a entender el discurso que utilizan los libros en el tratamiento didáctico de las inecuaciones cuadráticas y como es de esperar se ve reflejado en el discurso utilizado en las aulas universitarias en la enseñanza de este objeto matemático.

3.4 Descripción de los estudiantes que participaron en la investigación.

Precisamos nuevamente que el presente estudio se lleva a cabo con estudiantes del I Ciclo de la escuela Profesional de Artes & Diseño Grafico Empresarial, de la Universidad Señor de Sipán (USS) que se encuentran cursando la asignatura de Lógico Matemática.

Para el diseño de las Situaciones Didácticas se recogieron datos de los alumnos que participaron en la investigación, de tal manera que se pueda contar con las características importantes del grupo que pudiera influir en su actividad académica.

Los datos que presentamos a continuación son el resultado de una encuesta aplicada a 27 de 40 alumnos matriculados en el curso (apéndice, p. 139)

EDAD		
de 15 a 17	9	33%
De 18 a 20	11	41%
De 21 a 23	5	19%
Más de 23	2	7%

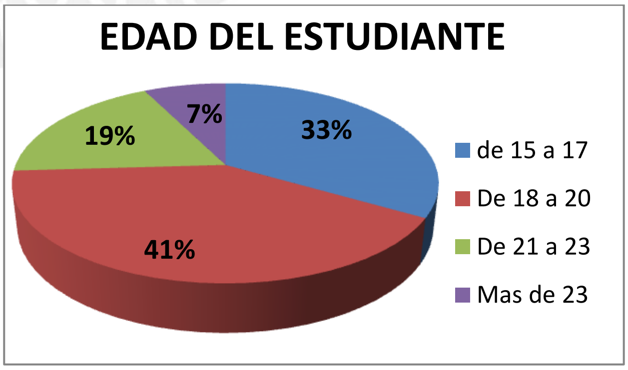


Figura 20. Resultados de la edad de los estudiantes

SEXO		
Masculino	21	78%
Femenino	6	22%

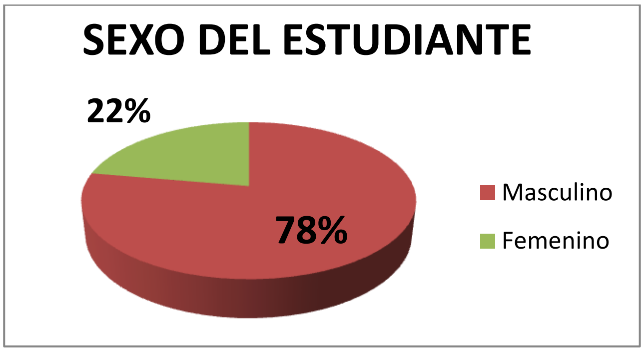


Figura 21. Datos sobre sexo de los estudiantes

LUGAR DE PROCEDENCIA		
Chiclayo	15	56%
Lambayeque	2	7%
Ferreñafe	2	7%
Otros	8	30%

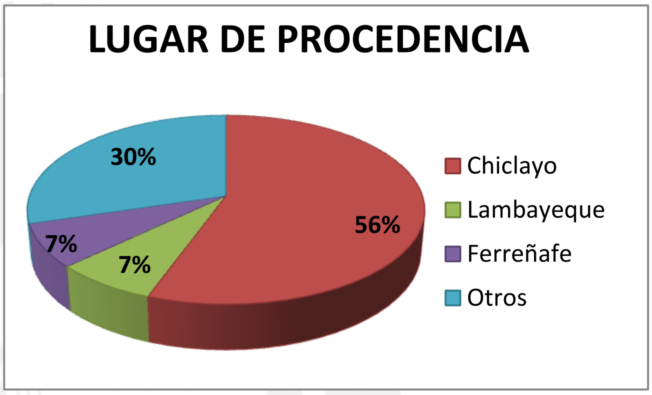


Figura 22. Datos del lugar de procedencia

COLEGIO DE PROCEDENCIA		
Estatal	14	52%
Particular	9	33%
Religioso	3	11%
Militar	1	4%

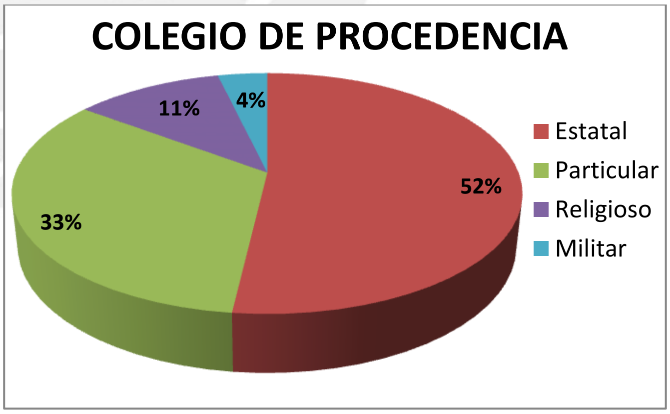


Figura 23. Colegio de procedencia

TIEMPO DE PREPARACION PARA INGRESAR A LA UNIVERSIDAD		
Sin preparación	11	41%
De 1 a 3 meses	16	59%
De 4 a 6 meses	0	0%
De 6 meses a mas	0	0%

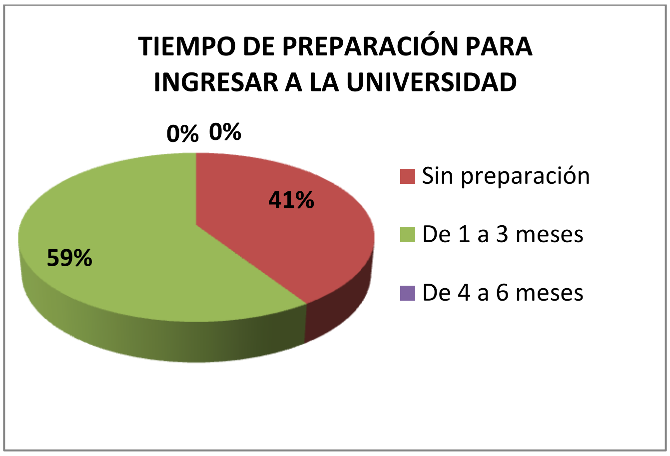


Figura 24. Tiempo de preparación para ingresar a la universidad

MODALIDAD DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD		
Cepresipán	16	59%
Admisión	11	41%
Exonerados	0	0%
Traslado Externo	0	0%

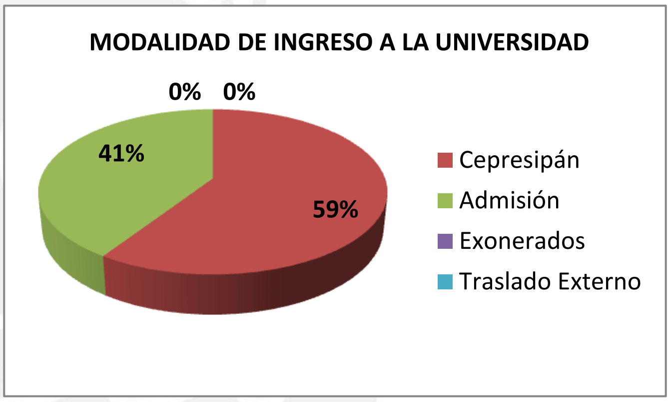


Figura 25. Datos de la modalidad de ingreso a la universidad

HORAS SEMANALES DE ESTUDIO		
No tengo tiempo	4	15%
De 1 a 2 horas	15	55%
De 3 a 4 horas	8	30%
Más de 5 horas	0	0%

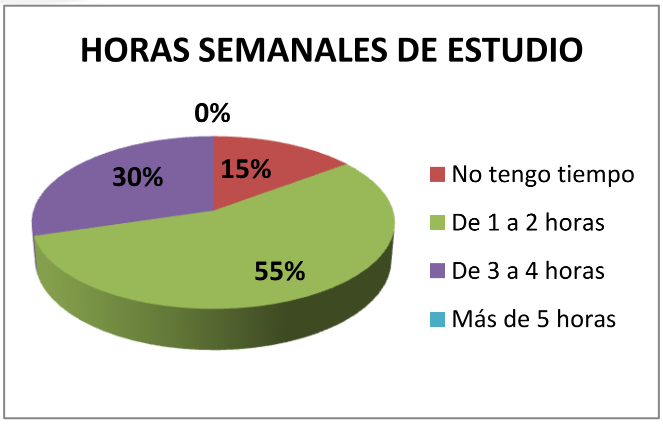


Figura 26. Resultados de horas semanales de estudio

TEMA DE INECUACIONES CUADRATICAS		
No me enseñaron	2	8%
Me enseñaron y no lo aprendí	16	59%
Me enseñaron y lo aprendí	9	33%

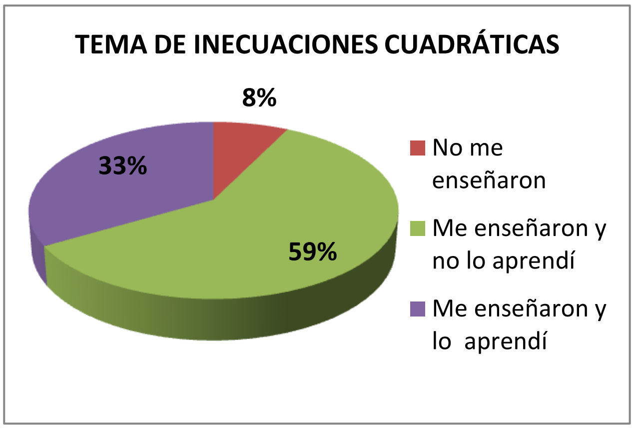


Figura 27. Resultados sobre la enseñanza de inecuaciones cuadráticas

En los resultados podemos evidenciar que de 27 estudiantes 11 se encuentran entre 18 a 20 años y 9 aún no han cumplido los 18 años, en su gran mayoría predomina la población masculina (21) que proceden del mismo Chiclayo (15) y de sus alrededores (12). En su mayoría los estudiantes finalizaron su educación secundaria en colegios estatales (14) y el resto en colegios particulares, religiosos o militares. 16 Estudiantes se prepararon de 1 a 3 meses y 11 ingresaron sin preparación, además se observa que la dedicación al curso es muy limitada (15 estudian de 1 a 2 horas ,4 no tienen tiempo y 8 de 3 a 4 horas), incluyéndose además que 16 de los estudiantes revelan que sí se les enseñó el tema de Inecuaciones Cuadráticas pero que no lo aprendieron.

A partir de este análisis concluimos que los resultados son irrelevantes y que no podrán influir en las actividades académicas propuestas, por lo que no serán considerados.

CAPITULO 4: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

4.1 Descripción del medio

Para la aplicación de la secuencia didáctica se tendrá en cuenta las siguientes consideraciones.

- La organización de los estudiantes será libremente en 8 grupos de tres integrantes y 1 grupo de dos, porque hasta ese momento se cuenta con la presencia de 26 estudiantes, dos alumno se retiraron de la institución. Será necesario adecuar la formación de grupos de acuerdo a la asistencia de los estudiantes.
- Las aulas de la institución cuentan con la infraestructura adecuada: carpetas individuales movibles y equipo de multimedia.
- La entrega de material conteniendo las situaciones didácticas será al inicio de cada actividad, donde se detallará las acciones a realizar tanto individual como grupales.
- Los contenidos considerados como prerrequisitos para el desarrollo de las actividades, fueron explicados en la misma asignatura anticipadamente en clases anteriores, tal como lo detalla el sílabo del curso (anexo 1)
- El tratamiento del tema fue realizado de acuerdo a las características del grupo, considerándose para las actividades de aprendizaje, situaciones concretas que permitan una adecuada comprensión conceptual y un pertinente manejo procedimental.

4.2 Variables micro didácticas de la investigación

Para estudiar las condiciones que permitan construir el conocimientos matemáticos considerado y que el control, manipulación o variación de esas condiciones permita reproducir y optimizar los procesos de adquisición de este conocimiento, se ha tomado en cuenta algunas variables, la cuales fueron deducidas a partir del análisis de los conocimientos previos donde se terminó algunas dificultades en la interpretación del signo de la desigualdad y en la manipulación del trinomio cuadrático, esto sirvió para elegir las siguientes variables, teniendo en cuenta que estas no son las únicas que existen.

a) Signo de la desigualdad:

- Inecuación cuadrática con desigualdades , $\geq$, $\leq$.

b) Tipo de trinomio cuadrático:

Inecuación cuadrática con trinomio cuadrático: $ax^2 + bx + c, con\ a = 1 \wedge b, c \in Z$

- **Factorizable en R,** donde su conjunto solución puede ser un intervalo, unión de intervalos o conjunto unitario.

- **No factorizable en R**, donde su conjunto solución puede ser todos los números reales o el conjunto vacío.

4.3 Diseño de la secuencia didáctica

4.3.1 Panorama general

La secuencia didáctica fue diseñada teniendo en cuenta, que su objetivos eran lograr en los estudiantes la comprensión de los proceso de resolución de una inecuación cuadrática y su aplicación en problemas contextualizados; para tal efecto se proponen actividades para que el alumno entre en contacto con el conocimiento que queremos que adquiera, enfrentándose a un problema o a situaciones nuevas, interactuar con ellas, crear estrategias de trabajo sin un entrenamiento específico para cada una de las situaciones y adquirir el conocimiento considerado.

La Secuencia Didáctica está compuesta por cuatro actividades y existen momentos de trabajo individual y de trabajo grupal. Las tres primeras se inician con problemas contextualizados y en la cuarta actividad se induce a la comprensión de procesos algebraicos en la resolución de una inecuación cuadrática. En las actividades propuestas se inducen a pasar por situaciones de acción, formulación, validación.

4.3.2 Identificación de variables en las actividades de aprendizaje

Se muestran en la tabla 4 las variables consideradas para cada una de las actividades de aprendizaje de la secuencia didáctica.

Tabla 4. Variables micro didácticas en cada actividad de aprendizaje

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	VARIABLES MICRO DIDACTICAS
Actividad 1: Construyendo un jardín. Problema con una inecuación cuadrática:	✓ Tipo de desigualdad: $\leq$ ✓ Trinomio cuadrático: factorizable en R
Actividad 2: Formulación de procedimientos para resolver gráficamente una inecuación cuadrática	✓ Tipo de desigualdad: $\geq$ ✓ Trinomio cuadrático: factorizable en R
Actividad 3: solución gráfica de inecuación cuadrática con trinomio cuadrático no factorizable en R	✓ Tipo de desigualdad: $\geq$ ✓ Trinomio cuadrático: no factorizable en R
Actividad 4: Solución algebraica de una inecuación cuadrática	✓ Tipo de desigualdad: $\leq$ y $\geq$ ✓ Trinomio cuadrático: - Factorizable en R - no factorizable en R

4.3.3 Programación de actividades

La organización de las actividades se presenta en la tabla 5 en el cual se detallan las secuencias de actividades, la forma de trabajo y el tiempo de duración que servirá para orientar la puesta en escena de la secuencia didáctica.

Tabla 5. Organización de actividades

Sesión	Actividad	Forma de trabajo	Duración
Previa a la sesión 1	Conocimientos previos	Individual	90 minutos
Sesión 1	Indicaciones Actividad 1	Realizada por el profesor Parte I: Individual Parte II: Grupal Parte III: Grupal	10 minutos 30 minutos 20 minutos 50 minutos
Sesión 2	Recapitulación 1 Actividad 2	Realizada por el profesor Trabajo Grupal	20 minutos 90 minutos
Sesión 3	Recapitulación 2 Actividad 3	Realizada por el profesor Parte I: Individual Parte II: Grupal Parte III: Grupal	20 minutos 30 minutos 20 minutos 50 minutos
Sesión 4	Recapitulación 3 Actividad 4	Realizada por el profesor Trabajo Individual Trabajo Grupal	20 minutos 30 minutos 60 minutos
Posterior a la sesión 4	Recapitulación 4	Realizada por el profesor	30 minutos

4.3.4 Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados

En el siguiente cuadro detallamos el tipo de interacciones con el medio que se desea fomentar con cada pregunta de las actividades propuestas y los comportamientos que se esperan de los estudiantes, los posibles errores o dificultades de los alumnos y el rol del docente, entre otros, cuando entren en contacto con el problema relacionado al objeto de estudio.

ACTIVIDAD 1

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	**Tipo de Interacción**	**Comportamientos esperados**
a	Acción	Se espera que representen gráficamente la situación problemática: área de un terreno cuadrado y área del terreno cuadrado recortado 2 m. a cada lado. Identifica una variable x y explica que ésta representa a la longitud del terreno. Es posible que tengan dificultad para identificar a la variable x
b	Acción	Se espera que empleen la variable x para representarla algebraicamente: $Área\ del\ terreno = xx$ $Área\ del\ jardin = (x-2)(x-2)$
c	Acción	Se espera que expresen algebraicamente, utilizando una inecuación, el área del jardín con las condiciones solicitadas: $(x-2)(x-2) \leq 9$
d	Acción	Se espera que determinen dos valores de x que representen a la longitud del terreno y que cumplan con la condición de ser recortados 2 m. en cada lado, a fin de poder obtener el jardín con las condiciones dadas. Es posible que cometan errores al proponer valores de x no correspondientes, por lo que es necesario orientarlos a través de preguntas que condicionen sus respuestas.

e	Acción	Se espera que determinen dos valores que no puede tomar la variable x definida en la inecuación planteada, a fin de que no cumpla la condición: $(x-2)(x-2) \leq 9$
f	Acción	Se espera que realicen una transposición de términos en la expresión: $(x-2)(x-2) \leq 9$ de manera que se tenga $f(x) \leq 0$, identificando que **f** es una función cuadrática.
g	Acción	Se espera que grafiquen correctamente a la función cuadrática y en la misma gráfica identifiquen el conjunto de valores que toma x, para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$. Es posible que algunos alumnos tengan dificultades para identificar los valores de x donde: $f(x) \leq 0$
h	Acción	Se espera que determinen todos los valores de x que representan a la longitud de un lado del terreno y que cumplen con la condición de ser recortados 2 m., a fin de poder obtener el jardín con las condiciones dadas por: $(x-2)(x-2) \leq 9$. Es posible que tengan dificultades para determinar todos los valores x y representarlos en un intervalo.

Trabajo Grupal Parte II

Ítem	**Tipo de Interacción**	**Comportamientos esperados**
f, g, h	Validación	Se espera que determinen la regla de correspondencia de la función cuadrática y que el trazo de sus gráficas sean parecidas, así mismo identifique todos los valores de x que representan a la longitud del terreno cuadrado representándolo a través del intervalo: $x \in \langle 2\,, 5]$. Esperamos que las discrepancias o la defensa de sus afirmaciones permitan llegar a la respuesta correcta.

Parte III

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	Se espera que representen a través de un gráfico a un terreno cuadrado de 6 m. de longitud y al terreno ampliado con franjas adicionales. A si mismo que utilicen a la variable x para representar a la longitud del ancho de las franjas adicionales que ha comprado para que su terreno siga siendo cuadrado. Es necesario orientarlos para que puedan definir la variable x porque es posible que tengan dificultades para identificarlo.
b	Formulación	Se espera que representen algebraicamente el área de terreno ampliado utilizando la variable x que representa al ancho de las franjas que se adicionan al comprar a los vecinos de modo que se siga manteniendo su forma cuadrangular : $(6+x)(6+x) \;\; o \;\; (x+6)(x+6)$
c	Formulación	Se espera que expresen algebraicamente la relación obtenida representando el área del terreno ampliado y que no exceda a 64m^2 obteniéndose así una inecuación: $(x+6)^2 \leq 64$. Es posible que algunos estudiantes tengan dificultades para la representación.
d	Acción	Se espera que determinen dos valores que tomará la variable x para representar el área del terreno ampliado y que no exceda a 64 m$^{2.}$. Es necesario orientarlos porque es posible que utilicen procedimientos de ensayo y error para calcular los valores solicitados.
e	Acción	Se espera que determinen dos valores que no puede tomar la variable x para representar el área del terreno ampliado y que no exceda a 64m^2. Detallan sus procedimientos. Es necesario orientar a los estudiantes a corregir sus errores y mejoras sus propuestas

f	Formulación	Se espera que realicen una transposición de términos en la expresión: $(x+6)^2 \leq 64$ de manera que se tenga $f(x) \leq 0$, identificando que **f** es una función cuadrática.
g	Formulación	Se espera que Grafiquen correctamente a la función cuadrática y en la misma grafica identifiquen el conjunto de valores que toma x, para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$. Es necesario que se oriente en el trazo de la gráfica de la función porque es posible que tengan dificultades en determinar el vértice de la parábola.
h	Validación	Se espera que determinen todos los valores que puede tomar la variable x que represente el ancho de la franja ampliada en el terreno cuadrangular y que cumplan con la condición dada por $(x+6)^2 \leq 64$, es decir, determina que $x \in \langle 0\ ,\ 2]$. El profesor debe orientar para que el estudiante determine el intervalo indicado porque es posible que utilice valores enteros y prueben por ensayo y error cuales son los que cumplen con la condición dada. La discusión argumentada permitirá deducir la respuesta correcta.

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	Es posible que representen a través de un gráfico el área del terreno cuadrado y el área del terreno cuadrado recortado 3 m. en un lado y 7 m. en el extremo perpendicular al lado anterior. Identifican una variable x y explican que esta representa a la longitud del terreno cuadrado. Se espera que todos justifiquen que la variable x representa a la longitud del terreno.

b	Formulación	Es posible que todos representen algebraicamente el área nueva del jardín rectangular recortado. $A(x) = (x-3)(x-7)$
c	Acción	Se espera que determinen el área del jardín rectangular si los lados del terreno miden 15m.
d	Formulación	Se espera que en el recuadro propuesto determinen los valores de la variable x que corresponden y los que no corresponden a la longitud del terreno cuadrado, para que cumplan con la condición de ser recortado 3 m. en un lado y 7 m. en un extremo perpendicular al lado anterior, a fin de que se pueda construir el jardín rectangular haciendo esos recortes.
e	formulación	Se espera que grafiquen en un sistema de coordenadas la función $A(x) = (x-3)(x-7)$, indicando el vértice de la parábola y los puntos de intersección de esta con el eje x. Es posible que tengan dificultades para trazar la gráfica con las características indicadas, por lo que es necesario orientar el proceso.
f	Formulación	Se espera que los alumnos determinen, a partir de la observación en la gráfica trazada, todos los valores que toma la variable x donde la gráfica no esté debajo del eje horizontal, es decir determinan, $x \in \langle -\infty ,3] \cup [7 ,+\infty\rangle$ que representa a los valores que toma x para los cuales la función sea mayor o igual a cero. Es posible que muestren dificultad para identificar esta extensión de x por lo que será necesario orientarlos.
g	Validación	A partir de la observación en el intervalo $x \in \langle -\infty ,3] \cup [7 ,+\infty\rangle$ se espera que determinen que el intervalo $x \in [7 ,+\infty\rangle$ representa a la dimensiones del lado del terreno cuadrado, para que el área del jardín sea mayor o igual a cero. Es probable que algunos alumnos tengan dificultad para relacionar lo valores de x con el contexto propuesto. La discusión argumentada determinará la respuesta correcta.

ACTIVIDAD 3

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Acción	Se espera que algunos alumnos representen algebraicamente la nueva área del jardín indicando en primer lugar el área del jardín formado en la actividad anterior más los 5 m^2 de ampliación. $j(x) = (x-3)(x-7)+5$. Es posible que tengan dificultad para determinar la representación algebraica.
b	Acción	Se espera que todos los alumnos determinen el área del jardín ampliado cuando el lado del terreno cuadrado mide 9 m.
c	Acción	Se espera que todos los alumnos determinen el área del jardín ampliado cuando el lado del terreno cuadrado mide 7,1 m.

Parte II: Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a, b, c	Formulación	Se espera que los alumnos representen algebraicamente el área del nuevo jardín ampliado y comuniquen a sus compañeros que representa la variable.

Parte III: Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	Se espera que grafiquen correctamente en un sistema de coordenadas la función cuadrática. $j(x) = (x-3)(x-7)+5$ El profesor debe orientar el trazado de la gráfica porque es posible que tengan dificultades para identificar el vértice de la parábola.

b	Formulación	A partir de la observación de la gráfica representada, es posible que determinen cuales son todos los valores que toma la variable x, para los cuales la gráfica no esté debajo del eje horizontal; es decir, los valores de x para los cuales la función sea mayor o igual a cero.
c	Formulación	Se espera que determinen cuáles son todos los valores de x que representa al lado del terreno cuadrado, a fin de ser posibles el recorte inicial y luego la ampliación. Es posible que los alumnos tengan dificultades para determinar el intervalo $x \in \langle 7 , +\infty \rangle$ que representa a todos los valores de x.

ACTIVIDAD 4

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	**Tipo de Interacción**	**Comportamientos esperados**
a	Acción	A partir de los procedimientos explicados en la gráfica de la situación se espera que determinen el valor que toma a y b al representar $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en la forma $f(x) = (x-a)^2 - b$
b	Acción	Se espera que determinen los valores de *c* y *d* al transformar la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en la forma $f(x) = (x-c)(x+d)$
c	Acción	Se espera que grafiquen correctamente la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en un sistema de coordenadas. Es posible que algunos alumnos tengan dificultades para graficar la función dada en un sistema de coordenadas, por lo que es necesario orientarles a través de preguntas guiadas cuando tenga dificultad para determinar el vértice y la intersección con el eje x.

d	Acción	Esperamos que indique en la gráfica de la función trazada, los tramos en los que $f(x) > 0,\ f(x) < 0$ y los puntos en los que $f(x) = 0$. Es posible que algunos tengan dificultades para analizar el comportamiento de la gráfica e identificar los tramos donde ésta cumple con las condiciones solicitadas.

Trabajo Grupal: Parte II

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a, b	Validación	Es posible que algunos alumnos tengan diferencias al determinar los valores de a, b, c y d al representar la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en la forma $f(x) = (x-a)^2 - b$ y $f(x) = (x-c)(x+d)$, pero pueden llegar todos a la solución correcta discutiendo con argumentos los procedimientos realizados.
c, d	Validación	Se espera que tracen correctamente la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y en ella señalen los tramos en los que $f(x) > 0,\ f(x) < 0$ y los puntos en lo que la función sea igual a cero. Es posible que algunos tengan dificultades para analizar el comportamiento de la gráfica, identificar sus características y determinar los tramos donde la gráfica cumple con las condiciones dadas, pero pueden corregir sus errores al discutir sus procedimientos y resultados.
e	Acción	Se espera que ubique en una recta numérica los puntos en los que la función sea igual a cero.
f	Formulación	Se espera que ubiquen, en la recta numérica trazada, el conjunto de los números reales por las cuales la función sea menor que cero. Así mismo ubiquen el conjunto de los números reales por las cuales la función sea mayor que cero.

g	Formulación	Se espera que determinen el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ al observar los resultados obtenidos en los ítems e y f
h	Formulación	Se espera que determinen el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ al observar los resultados obtenidos en los ítems e y f
i	Validación	Se espera que representen gráficamente la función dada y a partir de la observación en ella determinen el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$. Es posible que algunos estudiantes tengan dificultades para trazar la gráfica, identificar su vértice y determinar el conjunto solución de la inecuación por ser un trinomio cuadrado perfecto, pero con las discusiones argumentadas sobre sus procedimientos realizados pueden llegar a la respuesta correcta.
j	Validación	Se espera que representen gráficamente la función dada y determinen el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 13 \leq 0$. Es posible que tengan dificultades para determinar las raíces del término cuadrático por ser números complejo y determinar que la gráfica no intersecta al eje x, pero todos pueden llegar a la respuesta correcta con una discusión argumentada sobre sus resultados obtenidos.

4.3.5 Actividades diseñadas

Cada una de las actividades que componen a la secuencia didáctica fue diseñada teniendo en cuenta el marco teórico, el análisis preliminar y las consideraciones previas del análisis a priori. Las dificultades reveladas en la prueba de conocimientos previos se tomaron en cuenta para el diseño de cada una de las actividades, donde se consideró situaciones problemáticas y estrategias para identificar el significado de una variable, representaciones gráficas de situaciones problemáticas, procedimientos algebraicos para determinar la gráfica de una función cuadrática e interpretar su comportamiento en un plano cartesiano. La secuencia didáctica se presenta dosificada en 4 actividades, donde se espera que los alumnos puedan encontrar sentido a los procesos de resolución de la inecuación cuadrática y su aplicación en problemas contextualizados.

Actividad 1:

Construyendo un jardín

Situación

Juan posee un terreno cuadrado y luego de recortarlo 2 m. a cada lado, obtiene un jardín cuadrado cuya área no excede los 9 m^2.

Parte I: Trabajo individual

a) Emplea una variable x, e ilustra gráficamente la situación. Explica qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (*a*), representa el área del terreno y el área del jardín.

Área del terreno: ---------------------------

Área del jardín: -----------------------------

c) Expresa algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del jardín no exceda los 9 m^2.

d) Encuentra dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

e) Determina dos posibles valores que no puede tomar la variable definida en (*a*), según el contexto del problema

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$

h) Encuentra todos los posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Entregar la hoja del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para las partes *f*, *g* y *h*.

Parte III: trabajo Grupal

Situación

María tiene un terreno cuadrado de 6 metros por lado y quiere comprar franjas de terreno a sus vecinos, de modo que su terreno siga siendo cuadrado, pero de un área que no exceda los 64 m^2.

a) Emplear una variable x, e ilustrar gráficamente la situación. Explicar qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que fue definida en (*a*), representar el área del terreno ampliado.

Área del terreno ampliado: ---------------------------

c) Expresar algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del terreno ampliado no exceda los 64 m^2.

d) Encontrar dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado ampliado. ¿Cuáles son los dos correspondientes valores de la variable x?

e) Determinar dos posibles valores que no puede tomar la variable x definida en (*a*), según el contexto del problema.

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encuentra todos los posibles valores del ancho de las franjas con las que se puede ampliar el terreno, según la condición dada.

Actividad 2:

Formulación de procedimientos para resolver gráficamente una inecuación cuadrática

Situación

Juan cambia de opinión y ahora en el terreno cuadrado quiere construir un jardín rectangular. Para eso recortará en el terreno una franja de 3m de ancho en un extremo y otra franja perpendicular a la anterior de 7m de ancho en el otro extremo.

Trabajo grupal

a) Define una variable x, e **ilustra gráficamente** la situación, indicando qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa algebraicamente el área del jardín.

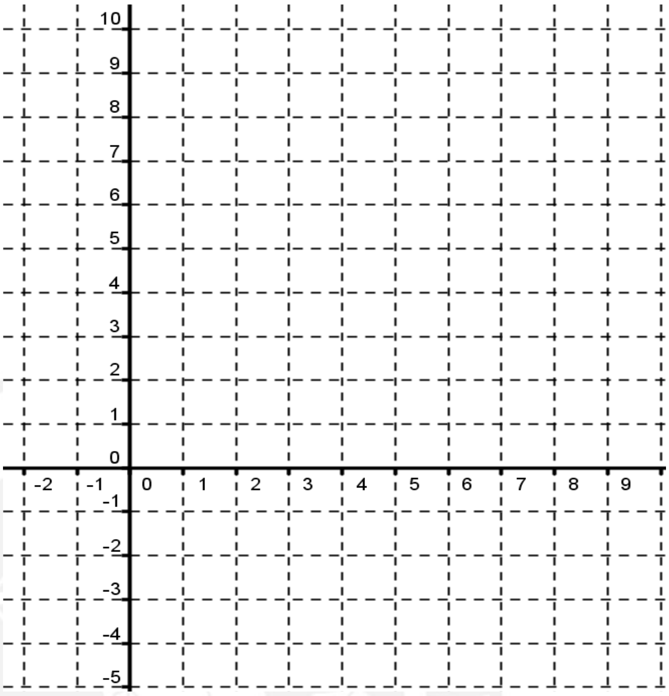
Área del jardín: $A(x)$ = ----------------------------

c) ¿Cuánto mide el área del jardín si cada lado del terreno cuadrado mide 15m?

d) Teniendo en cuenta la función $A(x)$¿cuáles de los siguientes valores de x puede corresponder a la longitud de cada lado del terreno cuadrado, para que se pueda construir el jardín con los recortes que desea hacer Juan?

Valores de x	Sí puede medir cada lado del terreno	No puede medir cada lado del terreno
10m.		
8,5m.		
7,2m.		
7m.		
6, 8m		
5m.		
3m.		

e) Grafica en un sistema de coordenadas la función $A(x)$ obtenida en (*b*), para $x \in R$



f) Observando la gráfica de la parte (*e*), determina cuáles son todos los valores de x, para los cuales la gráfica no está debajo del eje horizontal; es decir, determina los valores de x para los cuales $A(x) \geq 0$.

g) Según lo obtenido en (*f*) y el contexto en la situación descrita ¿cuáles son las posibles dimensiones de cada lado (x) del terreno cuadrado, si el área del jardín debe ser mayor o igual que cero?

Actividad 3:

Solución gráfica de inecuación cuadrática con trinomio cuadrático no factorizable en R

Situación

Juan, después de recortar su terreno cuadrado y construir el jardín rectangular tal como se indicó en la actividad anterior, se da cuenta que este tiene una área muy pequeña y decide ampliarlo con $5m^2$ más.

Recuerda que para construir el jardín, al terreno cuadrado cuyos lados miden x metros, se le recortó una franja 3m de ancho y otra franja perpendicular de 7m de ancho.

Parte I: Trabajo individual

a) Representa algebraicamente el área del jardín ampliado

   Área del jardín ampliado: $j(x) =$ ----------------------------

b) ¿Cuánto mide el área del jardín ampliado si cada lado del terreno cuadrado mide 9m?

c) ¿Cuánto mide el área del jardín ampliado si cada lado del terreno cuadrado mide 7,1m?

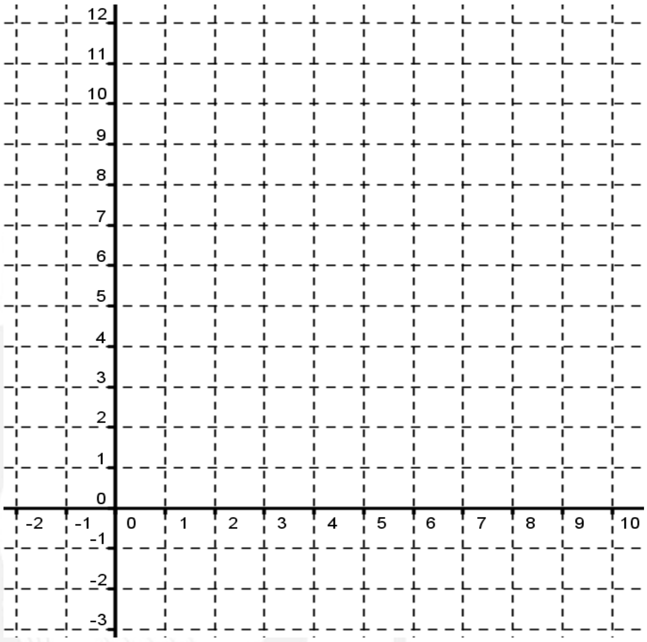
Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Entregar los resultados del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para las partes a, b y c

Parte III: Trabajo grupal

a) Grafica en un sistema de coordenadas la función $j(x)$ obtenida en la parte (*a*) del trabajo individual, para todo $x \in R$



b) Observando la gráfica de la parte (*a*), determina cuáles son todos los valores de x, para los cuales la gráfica no está debajo del eje horizontal; es decir, determina los valores de x para los cuales $j(x) \geq 0$.

c) Según el contexto del problema ¿Cuáles son las posibles dimensiones de cada lado (x) del terreno cuadrado, para que sean posibles el recorte inicial y luego la ampliación?

Actividad 4:

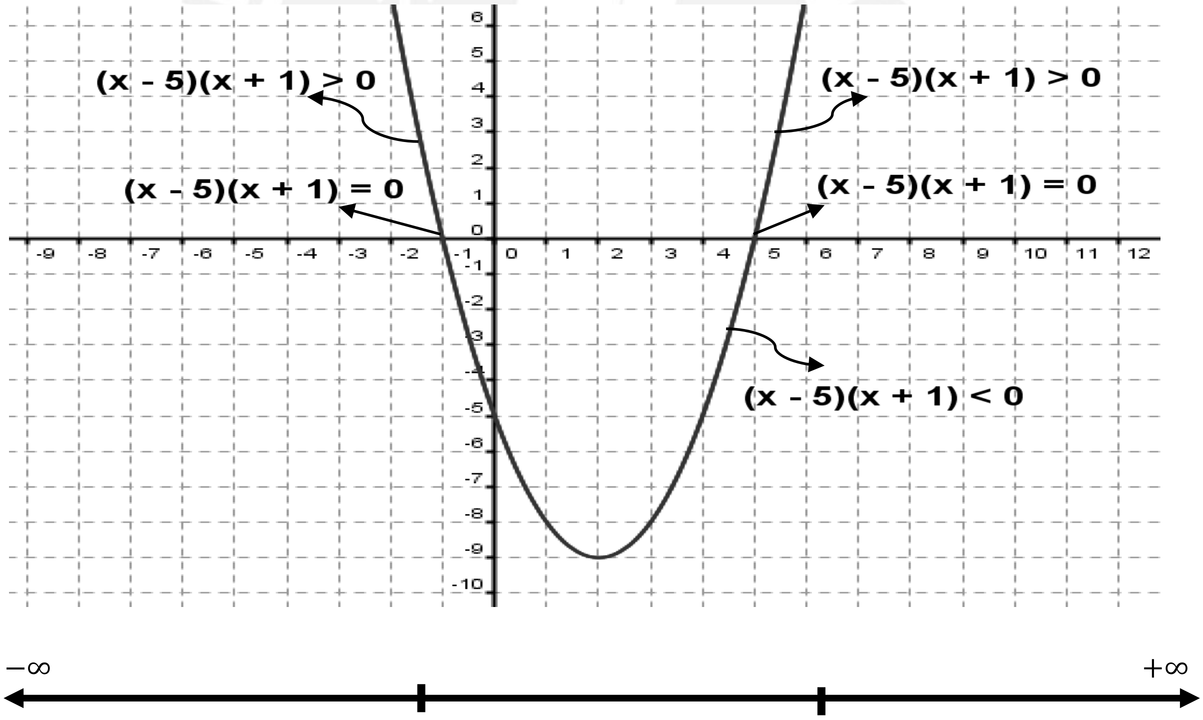
Solución algebraica de una inecuación cuadrática

Situación

Para encontrar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ examinamos el gráfico de $f(x) = x^2 - 4x - 5$, el cual fue trazado siguiendo los siguientes procedimientos.

a) Completando cuadrados: $f(x) = (x-2)^2 - 9$

b) Factorizando: $f(x) = (x-5)(x+1)$



$(x-5)(x+1) > 0$ $\quad$ $\mathbf{-1}$ $\quad$ $(x-5)(x+1) < 0$ $\quad$ $\mathbf{5}$ $\quad$ $(x-5)(x+1) > 0$

$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;\ 5]$ Así el C. S. de $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ $\quad es \quad [-1:\ \ 5]$

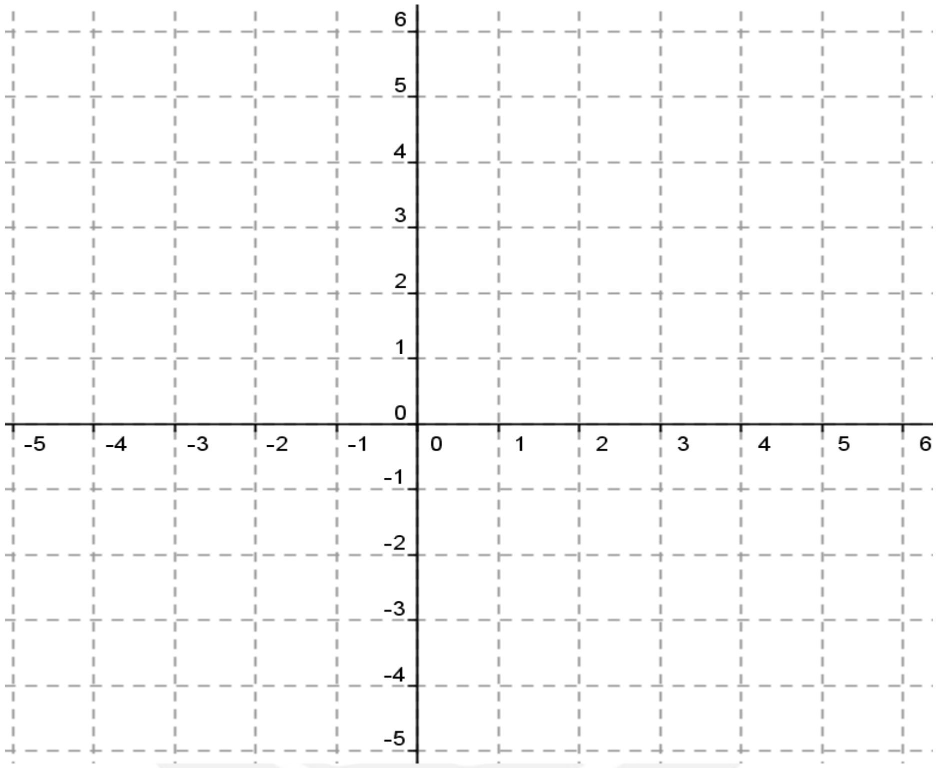
Observando la situación presentada, completar la información relacionada con la inecuación $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, donde $\mathbf{f}(x) = x^2 - 2x - 3$

Trabajo individual

a) $Hallar\ a\ y\ b\ \ de\ \ \mathbf{f}(x) = (x-a)^2 - b$

b) $Hallar\ c\ y\ d\ \ en\ \ \mathbf{f}(x) = (x-c)(x+d)$

c) Graficar **f**



d) Señalar en la gráfica de **f**, como en el ejemplo, los tramos en los que $\boldsymbol{f}(x) > 0$, $\boldsymbol{f}(x) < 0$ y los puntos en lo que $\boldsymbol{f}(x) = 0$

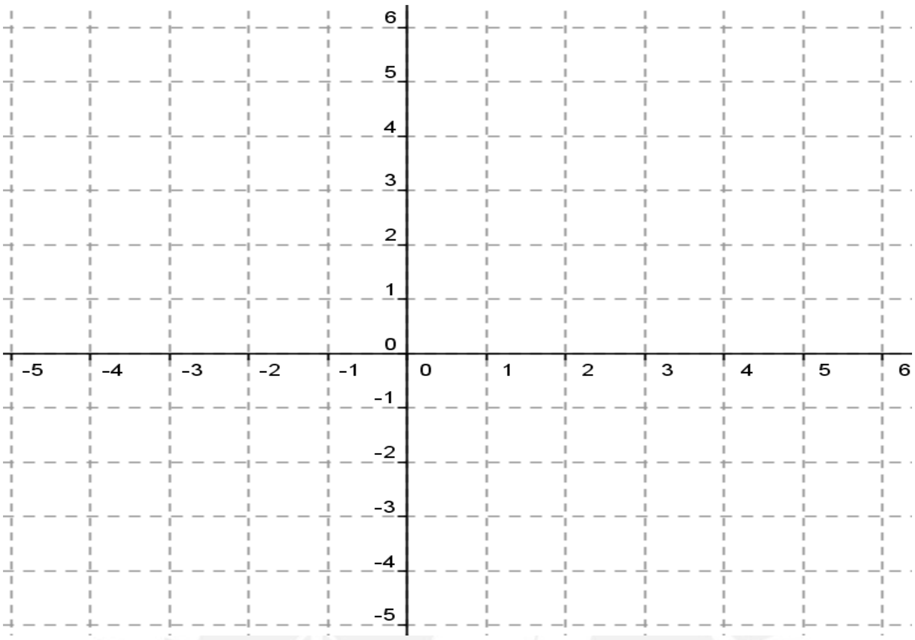
Trabajo grupal:

Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual, las diferencias que existan deben ser discutidas, hasta llegar a una conclusión grupal y continuar con la actividad

a) $Hallar\ a\ y\ b\ \ de\ \ \mathbf{f}(x) = (x-a)^2 - b$

b) $Hallar\ c\ y\ d\ \ en\ \ \mathbf{f}(x) = (x-c)(x+d)$

c) Graficar **f**



Señalar en la grafica de **f**, como en el ejemplo, los tramos en los que $\boldsymbol{f}(x) > 0$, $\boldsymbol{f}(x) < 0$ y los puntos en los que $\boldsymbol{f}(x) = 0$

d) En la recta numérica trazada, ubicar los puntos en los que $\boldsymbol{f}(x) = 0$ (puntos de referencia)

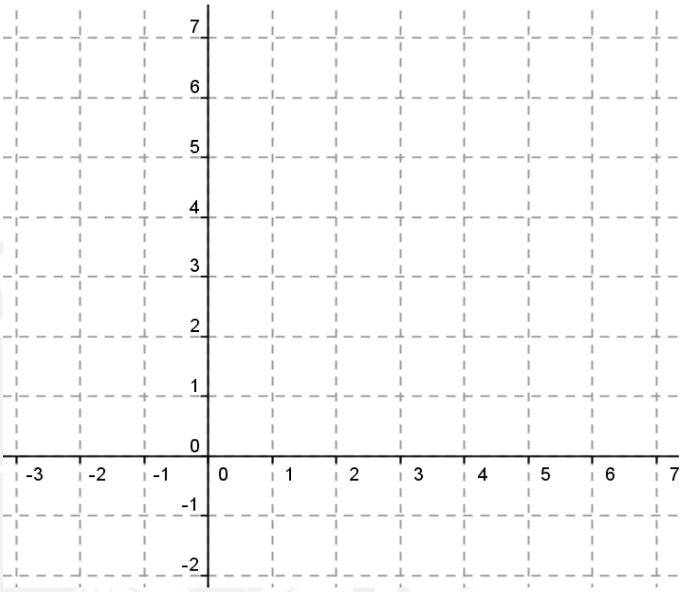
e) En la recta numérica trazada ubicar:

- ✓ El conjunto de números reales para los cuales $\boldsymbol{f}(x) \leq 0$
- ✓ El conjunto de números reales para los cuales $\boldsymbol{f}(x) \geq 0$

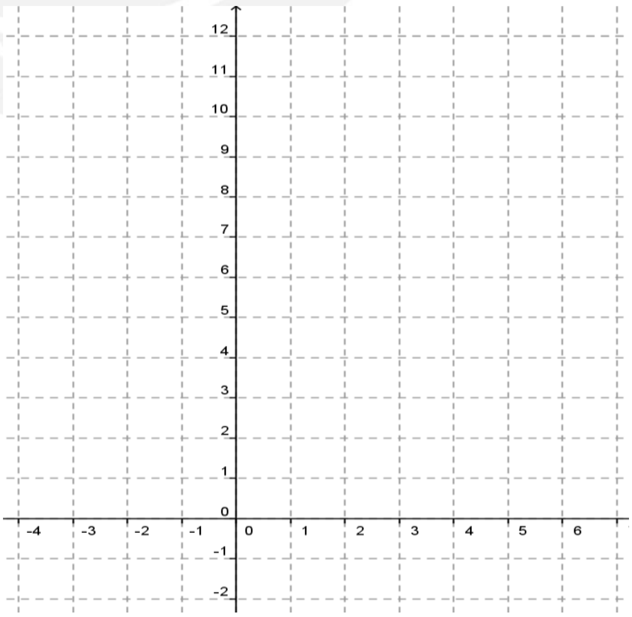
f) Identificar el conjunto solucion de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

g) Identificar el conjunto solucion de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

h) Realizar los mismos procedimientos para determinar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$



i) Realizar los mismos procedimientos para determinar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 13 \leq 0$



CAPITULO 5: FASE EXPERIMENTAL

En esta fase se considera la puesta en escena o aplicación de la secuencia didáctica diseñada y la recopilación de la información respecto al desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas.

5.1 Puesta en escena de las situaciones didácticas

La fase experimental se llevó acabo en cuatro sesiones, cada una de ellas se desarrollaron en fechas y horas que corresponden al horario establecido por la institución para el dictado del curso. En la siguiente tabla presentamos la fecha y horas de experimentación de cada una de las actividades:

Tabla 6. Cronograma de aplicación de actividades

ACTIVIDADES	FECHA	HORA	DURACION
Actividad 1	Jueves, 13 de octubre del 2011	7:40 a.m. – 9:20 a. m.	100 minutos
Actividad 2	Miércoles, 19 de octubre del 2011	8:20 a.m. – 9:50 a. m.	90 minutos
Actividad 3	Jueves, 20 de octubre del 2011	7:40 a.m. – 9:20 a. m.	100 minutos
Actividad 4	Miércoles, 26 de octubre del 2011	8:20 a.m. – 9:50 a. m.	90 minutos

Cada una de las actividades propuestas fue dirigida por el investigador, quien cumplió el rol de profesor-investigador y para el recojo de información relevante de la interacción de los estudiantes con las situaciones propuestas, se contó con la presencia de un observador, la cual estuvo dirigida por el coordinador del área de Lógico Matemática. El reconocimiento de la presencia del observador por parte de los estudiantes no influyó en su comportamiento, debido a que todos reconocieron su participación en muchas actividades anteriores; notándose un normal desenvolvimiento en el trabajo con las actividades propuestas; para esta función se contó con una ficha de observación (apéndice, p. 140) que se utilizó en cada una de las actividades planteadas.

La experimentación duró más de una sesión, por lo que se realizó un análisis a posteriori local, con la intención de hacer las correcciones pertinentes de una sesión a otra y orientar las recapitulaciones después de cada actividad. En términos generales, las actividades se desarrollaron tal como se había previsto, pero de acuerdo con el avance las dificultades identificadas se fueron corrigiendo y realizando los ajustes necesarios.

5.2 Logros y dificultades encontradas en el desarrollo de las actividades

En base a la información recogida a través de los instrumentos utilizados tales como la ficha de observación (apéndice, p. 140) y los datos obtenidos de las soluciones de los estudiantes, se presenta el proceso de aplicación de la ingeniería didáctica para cada una de las actividades diseñadas, donde se presentan los resultados obtenidos en cada actividad y el análisis respectivo a los logros y dificultades encontradas.

5.2.1 Análisis de resultados de la actividad 1

Teniendo en cuenta los resultados de la actividad 1 (apéndice, p. 141), la ficha de observación (apéndice, p. 140) y los datos obtenidos de las soluciones de los estudiantes, se analizan los logros y dificultades encontradas en cada una de las preguntas tanto de la parte individual como grupal propuestas en esta actividad.

Actividad 1

Construyendo un jardín

La clase se inicio con la presencia de 26 estudiantes, a los cuales se les dio las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo y sobre las respuestas que el profesor daría a las consultas que ellos hagan, se les indicó que estas serian respondidas con otra pregunta que oriente hacia la respuesta o a través de una reflexión. Las actividades se desarrollaron normalmente durante 100 minutos trabajándose la parte individual y la parte grupal; para la cual se formaron 9 grupos distribuidos en 8 grupos de 3 integrantes y 1 grupo de dos integrantes.

Los estudiantes iniciaron la actividad leyendo la situación problemática y luego desarrollaron la secuencia de preguntas correspondientes a la parte individual; ésta duro 30 minutos:

Situación

Juan posee un terreno cuadrado y luego de recortarlo 2 m. a cada lado, obtiene un jardín cuadrado cuya área no excede los 9 m^2.

Parte I: Trabajo individual

a) Emplea una variable x, e ilustra gráficamente la situación. Explica qué representa la variable.

Observación:

En esta situación inicial todos los estudiantes estaban pendientes a recibir algunos indicios para resolver el problema, notándose que no estaban acostumbrados a enfrentarlo directamente, si no, a través de algunas indicaciones que asegurara su correcto resultado. Ante esta situación se recalco que tienen que detallar lo que entienden de la situación problemática. Posterior a estas indicaciones se logró que 15 estudiantes respondieran correctamente, detallando la representación gráfica y explicando qué representa la variable x (figura 28).

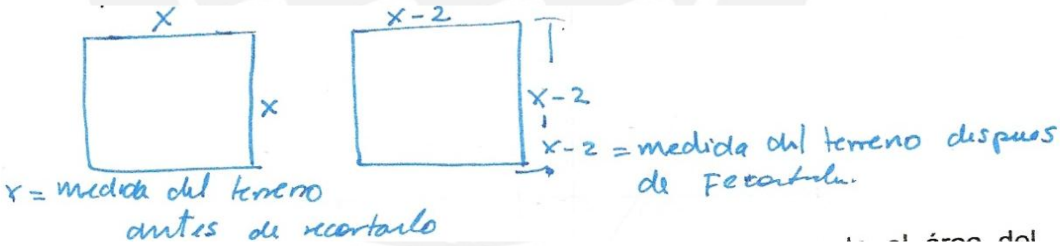


Figura 28. Representación gráfica de un alumno al problema de actividad 1

11 de los estudiantes tuvieron dificultades para representar la variable x.

Devolución: ante la dificultad presentada el profesor-investigador les preguntó ¿Cuánto mide el terreno?

Los estudiantes desconocían la medida y esto les sirvió para representarlo por una variable x, lográndose determinar que la variable representaba a la medida del terreno.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa el área del terreno y el área del jardín.

c) Expresa algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del jardín no exceda los 9 m^2.

Observación: Después de representar algebraicamente el área del cuadrado y el área del jardín, solo 2 estudiantes no pudieron representar correctamente el área del jardín con la condición solicitada. Confundieron la relación de la desigualdad. $\leq$ con $\geq$ Estos dos ítems fueron los que resolvieron directamente sin esperar indicaciones por parte del profesor lográndose que 24 estudiantes respondieran correctamente.

d) Encuentra dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

e) Determina dos posibles valores que no puede tomar la variable definida en (a), según el contexto del problema.

Observación: Estas dos preguntas hicieron reflexionar a todos los estudiantes porque demoraron en seleccionar los valores para que x cumpla con las condiciones del problema. Después de realizar los cálculos correspondientes 11 estudiantes determinaron los dos posibles valores solicitados, 12 estudiantes determinaron un solo valor y 3 alumnos cometieron errores en los cálculos.

f) Escribe la expresión obtenida en (*c*) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$

h) Encuentra todos los posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

Observación:

Tuvieron dificultades inicialmente para entender el ítem f, pero posteriormente determinaron la expresión indicada. En los resultados se obtuvo que 24 alumnos identificaran la función cuadrática, solo 3 realizaron la gráfica correctamente y fue lo que les tomó más tiempo.

Por falta de tiempo, 18 alumnos no respondieron el ítem h y 8 lo graficaron incorrectamente, este ítem fue considerado para ser tratado de forma grupal.

Devolución:

Frente a esta dificultad los alumnos mencionaban “no recuerdo como se grafica la función cuadrática, solo sé que es una parábola”. Se les sugirió que recordaran cómo hicieron las graficas en el tema de ecuaciones cuadráticas y se les dio unos indicios a través de preguntas ¿Cómo determinan el vértice? ¿Cómo determinan la intersección de la parábola con el eje de abscisas? Estos indicios no fueron suficientes por lo que se determinó dar mayor énfasis en la parte grupal.

Parte II: trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Entregar la hoja del trabajo individual con las soluciones que el grupo consideró más adecuadas, para las partes f, g y h.

Se sugirió formar grupos de tres integrantes para desarrollar la parte grupal donde se debía discutir los logros de la parte individual poniendo un especial énfasis en los ítems considerados como de mayor dificultad, esta parte duró 20 minutos.

Observación:

El trabajo grupal sirvió para resolver todos los ítems, porque compartían comentarios sobre las preguntas, no todos participaron inicialmente pero luego se estimuló a presentar sus respuestas y existió el interés por finalizar las preguntas. En la pregunta g, 7 grupos graficaron correctamente la parábola con la determinación de su vértice y la intersección con el eje de abscisas, solo 2 grupos tuvieron errores al determinar el vértice. En la pregunta h existieron dificultades para determinar los valores de la longitud del terreno.

Devolución:

Frente a la dificultad del ítem h los estudiantes preguntaron ¿Cómo determino los valores del terreno? El profesor-investigador sugirió que observaran el gráfico de la pregunta g y a partir del intervalo identificado como su respuesta, dedujeran todos los valores de la longitud del terreno.

Esta sugerencia sirvió para que identificaran algunos valores, que fueron específicamente números enteros y que estos se comprobaron a través de ensayo y error al remplazarlos en la expresión $(x-2)(x-2) \leq 9$, luego hubo discusión donde se observó bastante interacción entre los integrantes del grupo hasta corregir sus respuestas. Solo 1 grupo lo hizo mal y 1 no lo resolvió.

Parte III: trabajo grupal

María tiene un terreno cuadrado de 6 metros por lado y quiere comprar franjas de terreno a sus vecinos, de modo que su terreno siga siendo cuadrado, pero de un área que no exceda los 64 m^2.

a) Emplear una variable x, e ilustrar gráficamente la situación. Explicar qué representa la variable.
b) Utilizando la variable que definida en (a), representar el área del terreno ampliado.
   Área del terreno ampliado: ----------------------------
c) Expresar algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del terreno ampliado no exceda los 64 m^2.

Para el desarrollo de esta parte los grupos ya estaban definidos y se continuó con la misma dinámica, todos eran heterogéneos académicamente y estuvieron dispuestos para enfrentar el trabajo activamente por un espacio que duró 50 minutos. Esta parte se inició leyendo la situación presentada y a partir de allí desarrollaron las preguntas propuestas.

Observación: Los grupos graficaron un cuadrado donde indicaban su medida de 6 m. por lado y luego otro cuadrado con dos franjas ampliadas a los costados. Solo un grupo cometió errores al ilustrar gráficamente el terreno cuadrado porque en su ampliación no identificaron el ancho de las franjas con una variable x, 8 grupos resolvieron correctamente las preguntas b y c sin mayores dificultades. Algunos grupos mostraron desesperación por el tiempo y no revisaban sus respuestas para rectificar errores. En el trabajo grupal se observó a los estudiantes coordinar sus respuestas y comunicar sus resultados.

d) Encontrar dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado ampliado. ¿Cuáles son los dos correspondientes valores de la variable x?

e) Determinar dos posibles valores que no puede tomar la variable x definida en (a), según el contexto del problema.

Observación: Estas dos preguntas no les fue tan fácil de resolver, demoraron en seleccionar los valores para x que cumpla con las condiciones del problema. Después de realizar los cálculos correspondientes 8 grupos determinaron los dos valores solicitados que cumplían con las condiciones del problema y solo 1 grupo encontró un solo valor para la pregunta e.

f) Escribir la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0,$ siendo f una función cuadrática.

g) Graficar la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encontrar todos los posibles valores del ancho de las franjas con las que se puede ampliar el terreno, según la condición dada.

Observación:

Todos los 9 grupos identificaron correctamente la función cuadrática $f(x) = (6 + x)^2 - 64$; 4 grupos realizaron la gráfica de esta función en un plano cartesiano correctamente, 4 cometieron errores al ubicar el vértice en el plano cartesiano, lo que influyó en la determinación de la intersección de la gráfica con el eje de abscisas; 1 grupo no logró responderlo.

Con respecto a la pregunta h, se observaron mayores dificultades para identificar los valores del ancho de la franja.

Devolución:

Frente a la dificultad de la pregunta h los estudiantes mencionaron “Profesor esta pregunta es similar a la pregunta del terreno y el jardín, en este caso ¿Cómo determino los valores de x que representa al ancho de las franja compradas?”

Se les sugirió que observaran el gráfico correspondiente a la pregunta g y a partir del intervalo identificado como respuesta de esta pregunta, deduzcan todos los valores de x que representa el ancho de las franjas.

Esta sugerencia sirvió para que determinaran algunos valores, que fueron específicamente números enteros, luego hubo discusión donde se observó bastante interacción entre los integrantes del grupo para corregir sus respuestas. Finalmente 5 grupos determinaron una cantidad limitada de valores para el ancho de la franja, no identificaron todos los valores correspondientes, 4 grupos no respondieron esta pregunta.

Comentario de la primera actividad.

Como se pudo observar; esta actividad se desarrolló en tres partes. En el trabajo individual parte I se notó mucha dependencia por parte de los estudiantes para resolver la actividad; esperaban que el profesor dé los indicios para resolver la situación problemática; a pesar del interés prestado para entender el problema se notaron algunas dificultades para trabajar con esta nueva propuesta, desconocida por ellos hasta el momento, pero posteriormente a través de preguntas y reflexiones se pudo devolver la responsabilidad al estudiantes de su propio aprendizaje; muchos estudiantes no lograron culminar esta primera parte por finalizar el tiempo previsto. Con respecto al trabajo grupal, parte II, todos los estudiantes lograron integrarse en grupos formados por tres personas, compartían sus tareas, no todos aportaban, se notó cierta inseguridad para formular sus respuestas grupales, pero lograron terminar toda la actividad. En el trabajo grupal parte III, la experiencia en las actividades anteriores sirvió para estructurar rápidamente la dinámica de trabajo en cada grupo y lograron responder las preguntas de toda la actividad, muchos grupos no revisaron sus respuestas para rectificar errores.

5.2.2 Análisis de resultados de la actividad 2

Esta actividad solo comprende una parte grupal, sus resultados (apéndice, p. 142), la ficha de observación (apéndice, p. 140) y los datos obtenidos de las soluciones de los estudiantes, sirvieron para analizar los logros y dificultades encontradas en cada una de las preguntas de esta actividad.

Actividad 2

Formulación de procedimientos para resolver gráficamente una inecuación cuadrática

Esta secuencia se aplicó a de 25 alumnos, debido a que uno de ellos falto en el día de la aplicación, la sesión se inicio con una recapitulación de lo visto hasta el momento, donde se les presentó sus logros, errores y algunas dificultades encontradas en la actividad anterior, se enfatizó especialmente en las dificultades para graficar la función cuadrática; posterior a esto se les dio las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo grupal y se les indicó que sus consultas serian respondidas con otra pregunta que oriente hacia la respuesta o a través de una reflexión.

En esta oportunidad las actividades se desarrollaron normalmente durante 90 minutos y para el trabajo grupal se formaron 9 grupos, los cuales estuvieron formados por 8 grupos de 3 integrantes y un solo grupo formado por un solo integrante debido a la falta de uno de sus compañeros.

Los estudiantes iniciaron la actividad leyendo la situación problemática:

Situación

Juan cambia de opinión y ahora en el terreno cuadrado quiere construir un jardín rectangular. Para eso recortará en el terreno una franja de 3m de ancho en un extremo y otra franja perpendicular a la anterior de 7m de ancho en el otro extremo.

Trabajo grupal

a) Define una variable x, e **ilustra gráficamente** la situación, indicando qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa algebraicamente el área del jardín.

Área del jardín: $A(x) =$ ----------------------------

Observación: En esta parte inicial 5 grupos diseñaron un gráfico que representaba al terreno cuadrado, trazaron los recortes para formar el jardín con las características solicitadas e identificaron la variable x que representaba a la longitud del terreno. Solo 3 grupos no identificaron la variable x, pero si trazaron la representación grafica del terreno incluyendo los recortes; solo un grupo no pudo ilustrar la situación problemática. Un grupo fue muy minucioso en representar gráficamente la situación problemática, describió las características de los cortes y representó gráficamente el jardín (figura 29).

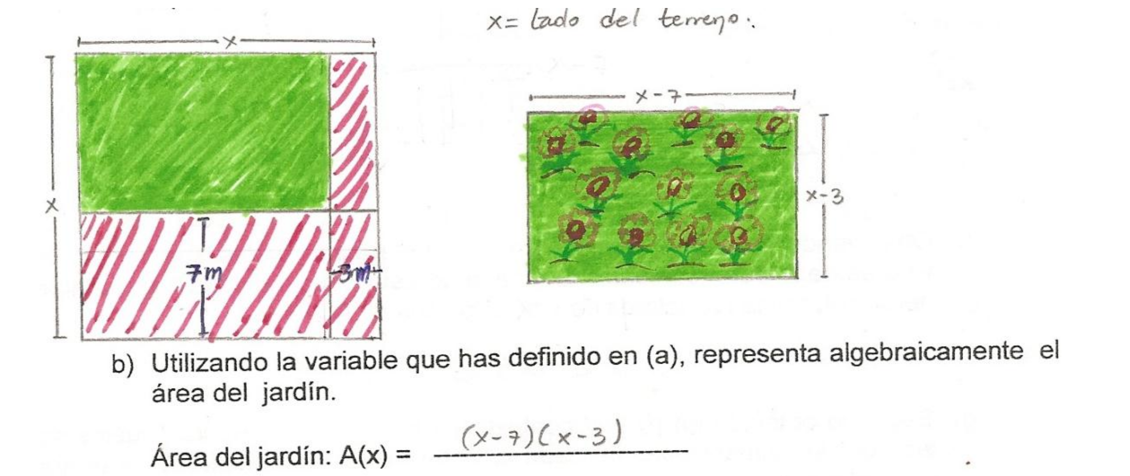


Figura 29. Representación gráfica de un grupo al problema de actividad 2

A partir de la representación gráfica que realizó cada uno de los grupos, 8 de ellos realizaron correctamente la representaron algebraicamente del área del jardín, uno tuvo dificultades para realizar la representación algebraica, debido a que no represento gráficamente la situación problemática.

c) ¿Cuánto mide el área del jardín si cada lado del terreno cuadrado mide 15m?

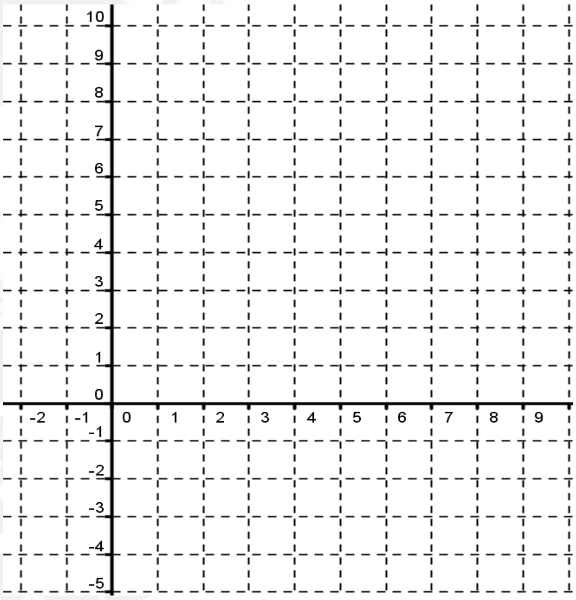
d) Teniendo en cuenta la función $A(x)$ ¿cuáles de los siguientes valores de x puede corresponder a la longitud de cada lado del terreno cuadrado, para que se pueda construir el jardín con los recortes que desea hacer Juan?

Valores de x	Sí puede medir cada lado del terreno	No puede medir cada lado del terreno
10m.		
8,5m.		
7,2m.		
7m.		
6, 8m		
5m.		
3m.		

Observación:

En estas preguntas solo dos grupos cometieron errores en el ítem c y fue precisamente porque uno de ellos, no representaron correctamente el área del jardín y otro utilizó el área del terreno en vez de utilizar el área del jardín para realizar este cálculo.

e) Grafica en un sistema de coordenadas la función $A(x)$ obtenida en (b), para $x \in R$



f) Observando la gráfica de la parte (e), determina cuáles son todos los valores de x, para los cuales la gráfica no está debajo del eje horizontal; es decir, determina los valores de x para los cuales $A(x) \geq 0$.

Observación:

En la pregunta e) se les presentó un diagrama cartesiano para evitar la demora en el trazado de la función cuadrática, tal como sucedió en la actividad 1.

En esta parte 8 grupos graficaron correctamente la función $A(x)$ y solo un de ellos tuvo dificultad, debido a que no pudo determinar el vértice de la función cuadrática.

A partir de la observación directa de su gráfica de la función, 6 grupos respondieron correctamente el ítem f, 2 grupos cometieron errores de simbolización en el intervalo correspondiente a la respuesta y 1 grupo no pudo determinar porque no realizó la gráfica.

g) Según lo obtenido en (f) y el contexto en la situación descrita ¿cuáles son las posibles dimensiones de cada lado (x) del terreno cuadrado, si el área del jardín debe ser mayor o igual que cero?

Observación:

En la resolución de este ítem se observo muchas dificultades para determinar los valores de x según el contexto de l problema; solo 2 grupos respondieron correctamente, 5 grupos determinaron los valores por ensayo y error probando con valores que asignaban a x, luego lo remplazaban en la expresión $A(x) = (x-7)(x-3)$ y finalmente determinaban el intervalo correspondiente tal como se muestra en la figura 30

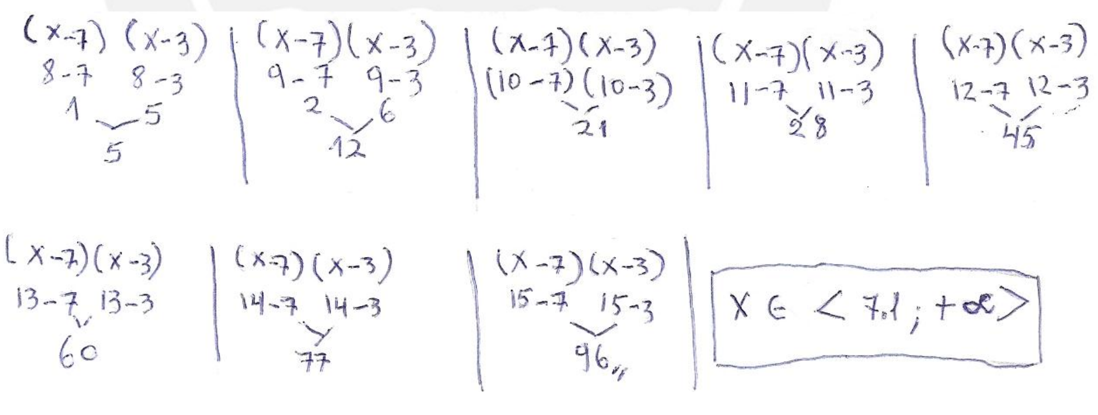


Figura 30. Respuesta de un grupo al problema de actividad 2

Cabe mencionar que todavía hay dificultades para entender la no inclusión de un extremo de un intervalo abierto. En la figura, el mensaje es no incluir el 7, pero la notación es errónea. En esta situación al considerar que el número real posterior a 7 es el 7,1 revelaría que no se tiene una visión continua de la recta real.

Devolución: Dada la dificultad en el ítem g, los estudiantes realizaron la siguiente pregunta ¿Cómo determino los valores de x? se les pidió que revisaran la pregunta d, e y f para observar qué valores de x pueden cumplir con la condición del problema. Esta indicación sirvió para que identificaran algunos números reales que cumplían con la condición del problema y sirvió para aclarar sus dudas e identificar cuales fueron las dificultades para interpretar los datos y determinar el conjunto solución.

Comentario de la segunda actividad.

Esta segunda actividad se desarrolló en forma grupal, todos los estudiantes conocían la dinámica de trabajo y mostraron disposición y persistencia para resolver los problemas planteados. Se notó cierta desesperación por el tiempo previsto y aparecieron algunas dificultades para identificar la variable x, para graficar la función cuadrática y para determinar el conjunto solución de la inecuación relacionada con el contexto del problema.

5.2.3 Análisis de resultados de la actividad 3

Esta actividad comprende una parte individual y dos partes grupales; los resultados obtenidos en cada una de las preguntas tanto en la parte individual como grupal mostrados (apéndice, p. 143) los datos obtenidos de las soluciones de los estudiantes y los datos de la ficha de observación (apéndice, p. 140) sirvieron para analizar los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

Actividad 3

Solución gráfica de inecuación cuadrática con trinomio cuadrático no factorizable en R

Esta secuencia se aplicó a 24 estudiantes, en esta oportunidad faltaron 2 de ellos, pero la actividad se desarrolló normalmente durante 100 minutos trabajándose la parte individual y la parte grupal, la cual estuvo formada por 8 grupos de 3 integrantes cada uno. La actividad se inició con una recapitulación de la clase anterior, se les presentó sus logros, errores, algunas dificultades encontradas y se estableció los procedimientos para graficar e interpretar el comportamiento de una función cuadrática, resaltando especialmente los valores que toma x cuando la gráfica esta por encima o por debajo del eje horizontal; posterior a esto se les dio nuevamente las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo individual y grupal y que sus consultas serían respondidas al igual que en las actividades anteriores. Los estudiantes iniciaron la actividad leyendo la situación problemática y luego desarrollaron la secuencia de preguntas correspondientes a la parte individual; esta duró 30 minutos:

Situación

Juan después de recortar su terreno cuadrado y construir el jardín rectangular tal como se indicó en la actividad anterior, se da cuenta que éste tiene un área muy pequeña y decide ampliarlo con $5m^2$ más.

Recuerda que para construir el jardín, al terreno cuadrado cuyos lados miden x metros, se le recortó una franja 3m de ancho y otra franja perpendicular de 7m de ancho.

Parte I: Trabajo individual

a) Representa algebraicamente el área del jardín ampliado

   Área del jardín ampliado: $j(x) =$ ---------------------------

Observación: Al iniciar esta actividad los estudiantes tuvieron dificultades para entender la situación porque no recordaban lo desarrollado en la clase anterior; frente a este impase fue necesario recordarles la situación del jardín formado por el recorte de franjas y que ahora era necesario ampliarlo. Posterior a esta explicación tuvieron dificultades para representar algebraicamente la nueva situación con la consideración del jardín ampliado.

Devolución:

Ante la dificultad de los estudiantes el profesor-investigador orientó a través de la siguiente pregunta ¿Cuál es el área de un rectángulo? Represéntalo algebraicamente y aumenta 5 m^2.

Los estudiantes lograron comprender la situación problemática, corregir algunos errores de representación algebraica y finalmente se logró que 22 estudiantes respondieran correctamente y solo 2 no obtuvieron la expresión correcta.

b) ¿Cuánto mide el área del jardín ampliado si cada lado del terreno cuadrado mide 9m?

c) ¿Cuánto mide el área del jardín ampliado si cada lado del terreno cuadrado mide 7,1m?

Observación:

En esta situación los estudiantes utilizaron correctamente los dos valores dados, sustituyéndolo en la expresión que representaba al área del jardín ampliado. 22 estudiantes respondieron correctamente la pregunta b y solo dos se equivocaron por que utilizaron una expresión algebraica que no representaba al área del jardín ampliado. En la pregunta c, 9 estudiantes resolvieron correctamente, 2 no incluyeron la ampliación y 13 cometieron errores operativos al restar una cantidad decimal con un número entero o al multiplicar estas cantidades. Esta última dificultad revelaría que todavía no se ha interiorizado la operación de sustracción entre un número entero y un decimal.

Parte II: Trabajo grupal

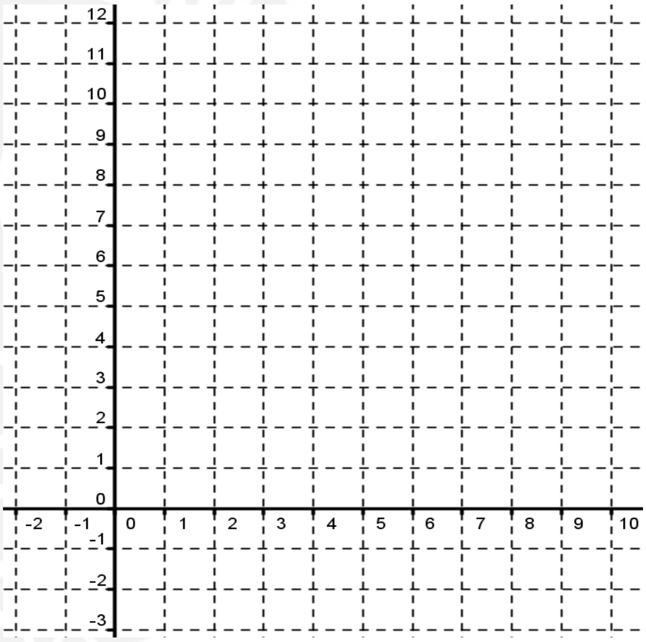
Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Entregar los resultados del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para las partes a, b y c

Observación:
Esta parte grupal sirvió para corregir todos los errores cometidos en la parte individual, se observó una interacción entre los estudiantes, lo que permitió validar sus respuestas en comparación con sus demás compañeros. 7 grupos resolvieron correctamente y un solo grupo cometió un error al calcular el área del jardín cuando el terreno cuadrado mide 7,1 m.

Parte III: Trabajo grupal

a) Grafica en un sistema de coordenadas la función $j(x)$ obtenida en la parte (*a*) del trabajo individual, para todo $x \in R$



Observación:
Todos los grupos graficaron correctamente la función que representa al jardín ampliado: $j(x) = (x-3)(x-7)+5$.
Luego de realizar transformaciones algebraicas determinaron su vértice y finalmente, para calcular la intersección de la gráfica con el eje de abscisas utilizaron la formula cuadrática porque el termino cuadrático no era factorizable. Posteriormente a esto tuvieron dificultades para interpretar sus resultados porque obtuvieron como respuestas a dos números complejos; esto sirvió para entender que la gráfica no interseca al eje de abscisas.

Devolución:

Los comentarios más comunes fueron: no se puede factorizar, ¿Cómo lo factorizo?, ¿Dónde ubico los valores de x si la gráfica no corta al eje x? El profesor-investigados repreguntó ¿Por qué insisten en factorizar? ¿y si completan cuadrados en la expresión cuadrática o utilizan la formula general para encontrar las raíces del termino cuadrático?

Estas consultas sirvieron para cambiar de estrategia en la determinación de los dos valores de x, para lo cual utilizaron la formula general y otros completaron cuadrado. Al determinar como resultado a dos números complejos y no poderlo ubicar en el eje x concluyeron que la gráfica no corta al eje x.

b) Observando la gráfica de la parte (a), determina cuáles son todos los valores de x, para los cuales la gráfica no está debajo del eje horizontal; es decir, determina los valores de x para los cuales $j(x) \geq 0$

c) Según el contexto del problema ¿Cuáles son las posibles dimensiones de cada lado (x) del terreno cuadrado, para que sean posibles el recorte inicial y luego la ampliación?

Observación:

En las respuestas de estas dos preguntas se encontró que un solo grupo logró dar las respuestas correctas y el resto dio respuestas parciales o respuestas incorrectas. En la parte b) los errores más comunes al observar la gráfica fueron la simbolización incorrecta del intervalo solución, indicando como respuestas a:

- $\{\ldots -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ldots ..\}$
- $[0\,; \ +\infty\rangle$
- $\{1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5; \ 6\}$
- $\{5; \ 6; \ 7; \ 8, \ 9; \ 10\}$

Con respecto a la pregunta c) se observó un profundo análisis por parte de los estudiantes para determinar la solución de acuerdo al contexto del problema, pero finalmente 1 grupo dio la respuesta correcta, 5 grupos dieron una cantidad determinada de números que cumplían la condición del terreno y 2 grupos dieron respuestas incorrectas. Entre las respuestas más comunes presentadas fueron (figura 31):

$(7{,}1-7)(7{,}1-3)+5=5{,}41$

$(8-7)(8-3)+5 \Rightarrow 10$
$(9-7)(9-3)+5 \Rightarrow 17$
$(10-7)(10-3)+5 \Rightarrow 26$
$(11-7)(11-3)+5 \Rightarrow 37$
$(12-7)(12-3)+5 \Rightarrow 50$
$(13-7)(13-3)+5 \Rightarrow 65$
$(14-7)(14-3)+5 \Rightarrow 82$
$(15-7)(15-3)+5 \Rightarrow 103$

$x \in [7{,}1; +\infty\rangle$

Figura 31. Respuesta de un grupo al problema de actividad 3

Devolución: Frente a las dificultades comunes para identificar el intervalo solución lo estudiantes preguntaron ¿Cuáles son los valores de x para los cuales la gráfica está por encima del eje horizontal? ¿Qué valores toma x para el contexto del problema? Se trató de orientar la respuesta sugiriéndoles que observen la gráfica de la parte b) y luego identifiquen la ubicación de la gráfica con respecto al eje horizontal, y se les preguntó ¿Qué parte de la gráfica está por encima del eje horizontal y que parte está por debajo del eje? Con respeto a los valores de x para el contexto del problema se sugirió que revisaran el valor de x de la pregunta c) de la parte individual.

Estas orientaciones permitió que los estudiantes utilizaran algunos números enteros y a través de ensayo y error comprobaron los valores que cumplían con la condición de la medida del lado del terreno.

Comentario de la tercera actividad

Esta actividad se desarrolló en tres partes. En el trabajo individual, parte I, se notó inicialmente algunas dificultades para recordar la situación anterior, pero luego los comportamientos previstos fueron identificados al mostrar interés por resolver la situación problemática. En el trabajo grupal, parte II, se observó discusión y consenso para determinar un resultado por grupo; el interés y la unión grupal sirvieron para defender sus respuestas y corregir sus errores. En el trabajo grupal, parte III, se observó una discusión profunda respecto a la contextualización del conjunto solución de la inecuación cuadrática con respecto al problema. En esta parte los alumnos realizaron una reflexión profunda al resolver la inecuación cuadrática y vincularlo el conjunto solución con la solución gráfica y el contexto real.

5.2.4 Análisis de resultados de la actividad 4

Considerando los resultados obtenidos en cada una de las preguntas tanto de la parte individual como grupal (apéndice, p. 144), los datos obtenidos de las soluciones de los estudiantes y los datos de la ficha de observación (apéndice, p. 140) presentamos el análisis de los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

Actividad 4

Solución algebraica de una inecuación cuadrática

En esta oportunidad de 26 estudiantes que participaron en la primera actividad, solo contamos con la presencia de 23 de ellos, 3 estudiantes se retiraron de la institución. La sesión se inicio con una recapitulación de la clase anterior y se les presentó sus logros, errores, algunas dificultades encontradas y se estableció los procedimientos para graficar e interpretar el comportamiento de una función cuadrática cuando su término cuadrático no es factorizable en R; posteriormente se les dio las indicaciones respectivas sobre la forma de trabajo individual y grupal y que sus consultas serian respondidas al igual que en las actividades anteriores. En esta oportunidad la actividad se desarrolló normalmente durante 90 minutos trabajándose la parte individual y la parte grupal, la cual estuvo formada por 7 grupos de 3 integrantes y un grupo formado por solamente 2 integrantes.

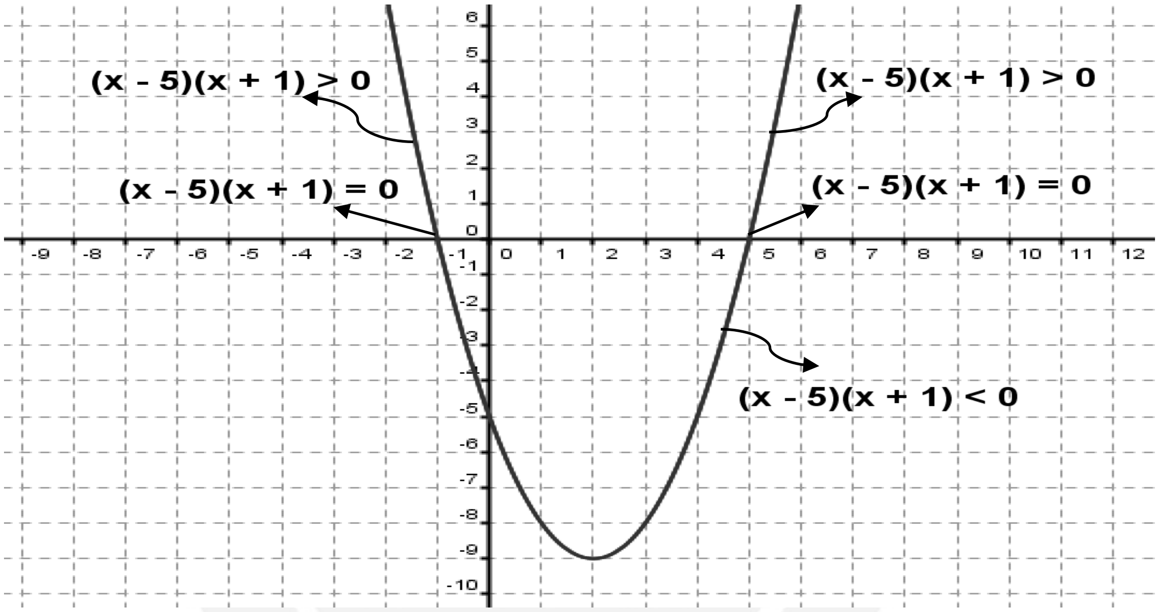
Los estudiantes iniciaron la actividad leyendo e interpretando la situación problemática y luego desarrollaron la secuencia de problemas correspondientes a la parte individual; ésta duró 30 minutos:

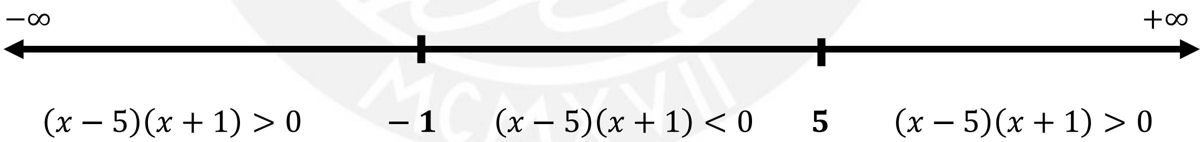
Situación

Para encontrar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ examinamos el gráfico de $f(x) = x^2 - 4x - 5$, el cual fue trazado siguiendo los siguientes procedimientos.

a) Completando cuadrados: $f(x) = (x-2)^2 - 9$

b) Factorizando: $f(x) = (x-5)(x+1)$





$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;\ 5]$ Así el C. S. de $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ es $[-1:\ \ 5]$

Observando la situación presentada, completar la información relacionada con la inecuación $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, donde $\mathbf{f}(x) = x^2 - 2x - 3$

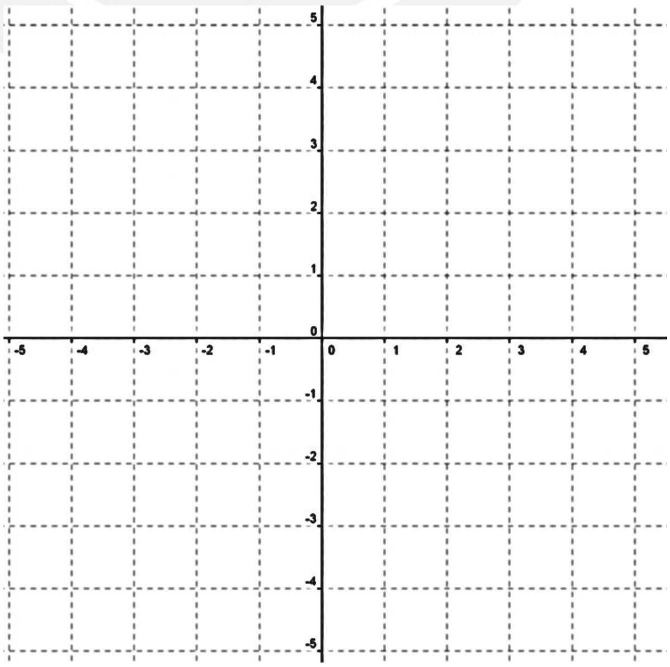
Trabajo individual

a) $Hallar\ a\ y\ b\ \ de\ \mathbf{f}(x) = (x-a)^2 - b$

b) $Hallar\ c\ y\ d\ \ en\ \mathbf{f}(x) = (x-c)(x+d)$

Observación: En esta actividad se generaron algunas dudas para entender el problema, por lo que el docente explicó detalladamente los procedimientos realizados en la parte a y b de la situación; se explico la importancia que tienen estos procesos para graficar la función y el comportamiento de la gráfica; la intersección con los ejes y la determinación del conjunto solución de la inecuación dada, a partir de la interpretación de la gráfica. Con estas explicaciones los estudiantes entraron en una fase de acción para resolver el problema indicado. **Devolución:** Las consultas más comunes fueron ¿Cómo lo factorizo?, ¿Cómo completo cuadrados? Se les sugirió que utilicen los procedimientos trabajados en actividades anteriores. Estas consultas sirvieron para resaltar la importancia de realizar estos procedimientos y su utilidad en la gráfica de la función. Los resultados obtenidos fueron, 15 estudiantes lograron determinar correctamente los valores de a, b, c y d dados en la función cuadrática. El resto mostró dificultades para factorizar y completar cuadrados en la expresión cuadrática

c) Graficar **f**



d) Señalar en la gráfica de **f**, como en el ejemplo, los tramos en los que $\boldsymbol{f}(x) > 0,\ \boldsymbol{f}(x) < 0$ y los puntos en lo que $\boldsymbol{f}(x) = 0$

Observación:

15 estudiantes lograron graficar correctamente la función y los errores mas comunes fueron la ubicación del vértice de la parábola. En la pregunta d, 13 estudiantes no lograron realizarlo y solo 8 señalaron los tramos correctos. Las dificultades para interpretar la gráfica de la función persistían a pesar de haber graficado adecuadamente la función cuadrática.

Devolución:

Por la dificultad para identificar los tramos en la gráfica los estudiantes preguntaron ¿Cómo identifico estos tramos? Se les sugirió que observaran la gráfica e identificaran las partes que están por encima y las que están por debajo del eje horizontal y que examinen el valor de $f(x)$ en el eje horizontal. Esto permitió que interpretaran el comportamiento de la gráfica y determinaran la respuesta al problema,

Trabajo grupal:

Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual, las diferencias que existan deben ser discutidas, hasta llegar a una conclusión grupal y continuar con la actividad

a) $Hallar\ a\ y\ b\ \ de\ \mathbf{f}(x) = (x-a)^2 - b$

b) $Hallar\ c\ y\ d\ \ en\ \mathbf{f}(x) = (x-c)(x+d)$

c) Graficar **f**

d) Señalar en la gráfica de **f**, como en el ejemplo, los tramos en los que $\boldsymbol{f}(x) > 0,\ \boldsymbol{f}(x) < 0$ y los puntos en lo que $\boldsymbol{f}(x) = 0$

Observación:

Los 8 grupos lograron desarrollar correctamente los ítems a, b, c y d.
La interacción entre los estudiantes permitió corregir sus errores cometidos en la parte individual, salvaron dudas, y comunicaron sus respuestas.

En la gráfica de la función cuadrática, identificaron el vértice de la parábola y señalaron los tramos correspondientes a $\boldsymbol{f}(x) > 0$, $\boldsymbol{f}(x) < 0$ y los puntos en los que $\boldsymbol{f}(x) = 0$.

e) En la recta númerica trazada ubica los puntos en los que $\boldsymbol{f}(x) = 0$ (puntos de referencia).

f) En la recta númerica trazada ubica:

- ✓ El conjunto de números reales para los cuales $\boldsymbol{f}(x) \leq 0$
- ✓ El conjunto de números reales para los cuales $\boldsymbol{f}(x) \geq 0$

Observación: El haber desarrollado correctamente los ítems c y d permitió que todos los grupos respondieran sin dificultad la pregunta e y f. Se observó coherencia en los procesos y que la fase de acción en la parte individual sirvió para formular y validar sus respuestas.

g) Identifica el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

h) Identifica el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Observación: Inicialmente tuvieron dificultades para identificar el conjunto solución de la inecuación dada, pero la interacción entre sus compañeros sirvió para que 6 grupos determinaran correctamente el conjunto solución de la inecuación dada en la pregunta g. Un grupo cometió errores y el otro grupo no respondió esta pregunta. En la pregunta h, 5 grupos respondieron correctamente, 2 grupos cometieron

errores y uno no resolvió.

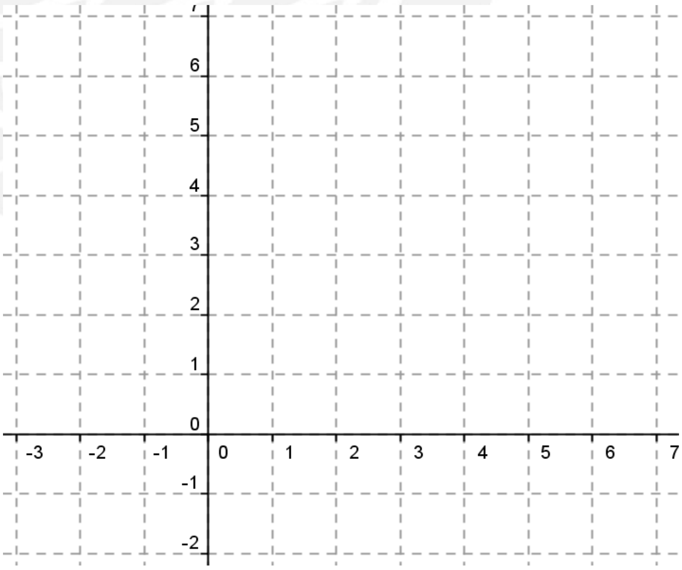
En las respuestas correctas graficaron el intervalo en una recta y luego lo representaron en forma simbólica.

Los errores más comunes fueron la representación del intervalo solución como un conjunto finito compuesto por dos o más números enteros tales como: $\{-1, 3\}$ ó $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$

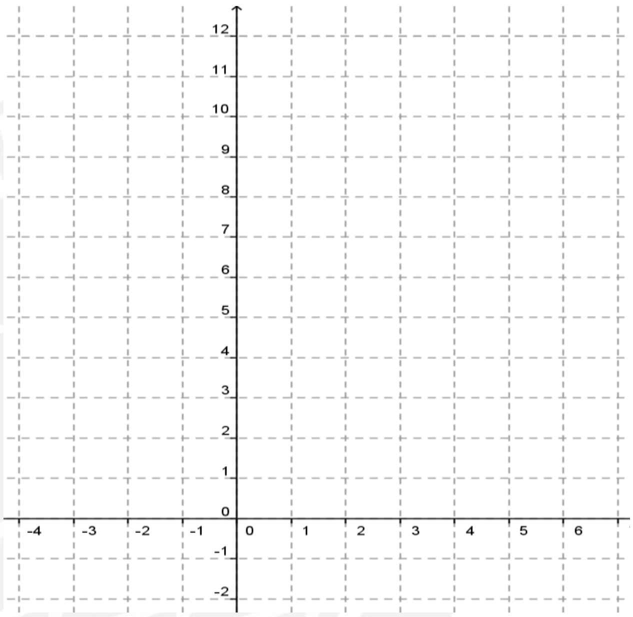
Devolución:

A los grupos que cometieron errores se les sugirió que examinaran si la inecuación es verdadera para valores de x como 0,5; 1,8 y - 0,5. Hechas las verificaciones se les hizo notar que por la forma como habían representado el conjunto solución, estos valores no están considerados y deberían estar. Se les pidió que representen el conjunto solución de la mejor manera. Los alumnos advirtieron su error de notación y escribieron el intervalo $[-1\ ;\ \ 3]$

i) Realiza los mismos procedimientos para determinar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$



j) Realiza los mismos procedimientos para determinar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 13 \leq 0$



Observación:

En la pregunta **i,** 7 grupos desarrollaron los procedimientos correctos para determinar el conjunto solución de la inecuación dada: graficaron la función, identificaron el vértice y luego determinaron que el conjunto solución de la inecuación era el conjunto $\{3\}$. Un grupo desarrolló los procedimientos correctos pero determinó como conjunto solución al intervalo $[3\ ;0]$ error de simbolización pero esto nos da la idea que todavía no aceptaban como conjunto solución de una inecuación a un solo número.

Con respecto a la pregunta **j,** 5 grupos realizaron procedimientos correctos y determinaron como conjunto solución al conjuto vacio tal como la respuesta dada por un grupo en la figura 32

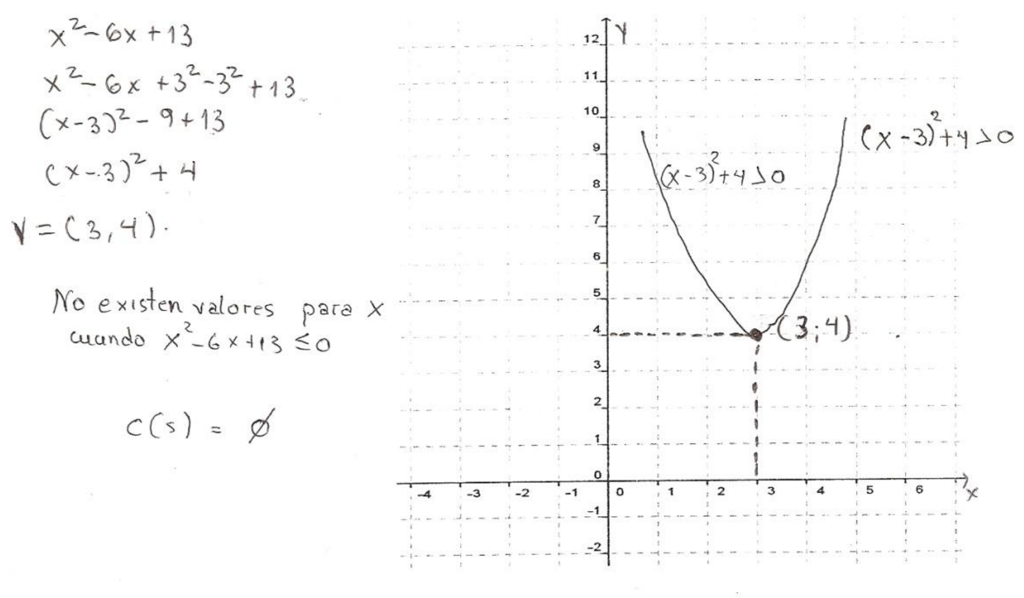


Figura 32. Respuesta a inecuación con termino cuadrático no factorizable en R

Un grupo no pudo deducir el conjunto solución por el comportamiento de la gráfica y un grupo no resolvió esta pregunta.

Resolver los ítems **i**, **j** demandaron mayor tiempo, pero encontraron coherencia para resolverlos utilizando los procedimientos aprendidos en la preguntas anteriores. Esto nos da a entender que las fases de acción realizado en la parte individual y la fase de formulación en las preguntas anteriores permitió validar sus respuestas de estos últimos ítems.

Comentario de la cuarta actividad.

Esta última actividad se desarrolló en dos partes. En el trabajo individual se notó cierta tensión al tener que usar procedimientos algebraicos para resolver la situación problemática; a pesar de las dificultades, se logró una mejor comprensión de la solución de una inecuación cuadrática. Con respecto al trabajo grupal se notó mayor seguridad para encontrar el conjunto solución de las inecuaciones cuadráticas. Los grupos encontraron coherencia para poder resolver la parte grupal utilizando los procedimientos aprendidos en la parte individual.

Finalizada esta última actividad inmediatamente después se pasó a la recapitulación de lo realizado anteriormente; se logró resumir sus logros, dificultades, sus aportes y se trató de organizar lo producido en las actividades para poder formalizar los procedimientos y determinar el conjuntos solución de una inecuación cuadrática, es decir, se consideraron sus acciones, sus formulaciones, las defensas que hacían a sus aportes y se trató de integrar todos los conocimientos adquiridos favoreciéndose de esta manera la fase de institucionalización.

CAPITULO 6: ANÁLISIS A POSTERIORI

Esta fase se apoya en el conjunto de datos recogidos de la experimentación, en la producción de los estudiantes y en los comportamientos esperados.

La confrontación del análisis a priori y a posteriori de la situación didáctica se hará comparando los comportamientos esperados con los comportamientos observados en la realización efectiva de la clase.

6.1 Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación.

En esta sección comparamos los comportamientos esperados que se detallaron para cada una de la preguntas de cada actividad con las conductas reales de los estudiantes observadas en la experimentación.

ACTIVIDAD 1

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
a	Como lo habíamos previsto, los estudiantes lograron diseñar a través de una representación gráfica la situación problemática, representaron el terreno cuadrado y luego el terreno cuadrado recortado 2 m. a cada lado. Para identificar la medida de los lados utilizaron a la variable x que inicialmente tuvieron dificultades para determinarlo porque desconocían cuanto era la medida del terreno. Posterior esto a través de la devolución logramos que los estudiantes den significado a esta variable.
b	Tal como se esperaba, la representación gráfica diseñada en el ítem anterior, sirvió para que los estudiantes emplearan la medida de los lados del terreno simbolizada por la variable x para representar algebraicamente el $Área\ del\ terreno = x.x$ y el $Área\ del\ jardín = (x-2)(x-2)$. Se observó que los estudiantes estuvieron pendiente del significado de la variable x, y siempre repetían: "x representa a la longitud de cada lado del terreno".

c	Como se había previsto, la contextualización de los procedimientos en cada uno de los ítem anteriores sirvió para que expresaron algebraicamente el área del jardín con las condiciones solicitadas: $(x-2)(x-2) \leq 9$. No tuvieron dificultad para identificar la inecuación que representa a esta relación; se mostraron interesados por resolver cada pregunta de la situación porque la secuencia tenía relación con las preguntas anteriores.
d y **e**	Cuando se les pidió que determinen dos valores de x para cada una de las situaciones, los estudiantes se mostraron incapaces de hacerlo, pero después de una profunda reflexión empezaron a probar con números que representaban la medida del terreno y a través de cálculos por ensayo y error, al remplazarlos en la expresión $(x-2)(x-2) \leq 9$ identificaban los números correspondientes. Un grupo contestó "para nosotros es mas fácil utilizar un número cualquiera y remplazarlo en la formula"; en sus cálculos utilizaron $x = 6$, luego lo remplazaron $(6-2)(6-2) \leq 9$ y contestaron este número no cumple.
f	Como se había previsto en los comportamientos esperados, los estudiantes realizaron sin dificultad la transposición de términos y obtuvieron una expresión equivalente: $(x-2)^2 - 9 \leq 0$ donde identificaron que la expresión en la parte izquierda de la inecuación representaba a una función cuadrática.
g	Cuando se les pidió que graficaran la función cuadrática, todos los estudiantes asumieron realizar la gráfica, pero la dificultad fue revelada por la desesperación que mostraban al no recordar los conocimientos previos de como se grafica una función cuadrática. De 28 estudiantes solo 3 lograron graficar correctamente e identificar el conjunto de valores que toma x, para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$, pero ocuparon mayor tiempo de lo programado.
h	Ningún alumno logró determinar correctamente los valores de x; para identificarlo, era necesario graficar la función cuadrática propuesta en la pregunta g y revisar los resultados de la pregunta d.

	El no graficar la función cuadrática en casi el total de alumnos y el poco tiempo que disponían para resolverlo por haber finalizado el tiempo previsto, fueron las causas de estos resultados. Estos hechos confirmaron de la gran dificultad para graficar funciones cuadráticas e interpretar el comportamiento de su gráfica. La dificultad fue generalizada a pesar de la devolución que realizaba el profesor, tal situación fue considerada para ser tratada en forma grupal.

Trabajo Grupal

Parte II

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
f, g, h	Como se había previsto, todos los estudiantes lograron determinar la regla de correspondencia de la función cuadrática y trazar su gráfica, así mismo 4 grupos identificaron todos los valores de x que representan a la longitud del terreno cuadrado. Concluimos que las discrepancias y la defensa de sus afirmaciones permitieron llegar a la respuesta correcta. En el proceso de resolución grupal de estas tres preguntas en comparación con la resolución individual, pudimos observar que el ítem h, que es justamente sobre la determinación de los valores de x pero contextualizados con la longitud del terreno; cuando es resuelto individualmente, ninguno de los estudiantes lo hace correctamente; sin embargo, al hacerlo grupalmente, y estar, entonces en una fase de formulación, la interacción entre los alumnos hace que 4 grupos resuelvan correctamente la dificultad que se les presentó. Cabe destacar la importancia de esta fase de formulación, pues al no haber sido resuelta correctamente en la fase de acción, la solución correcta en el grupo no es consecuencia de la influencia de una sola persona, si no de la discusión de todo el grupo.

Parte III

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
a	Como se había previsto en los comportamientos esperados, todos los grupos representaron la situación solicitada en este ítem; utilizaron un gráfico para representar a un terreno cuadrado de 6 m. de longitud y en otro gráfico representaron al mismo terreno ampliado con franjas adicionales. Así mismo 4 grupos tuvieron dificultades para explicar que la variable x representaba a la longitud del ancho de las franjas adicionales que se había comprado. La experiencia en la fase de acción sirvió para que todos los integrantes del grupo propusieran sus respuestas, que luego de una discusión interna lograron presentar su propuesta general.
b, c	Como lo habíamos previsto los grupos representaron algebraicamente el área de terreno ampliado por:$(6+x)(6+x)$ y siempre mencionaban entre sus compañeros que la variable x representa al ancho de las franjas compradas adicionalmente. Luego rápidamente representaron a través de la inecuación $(x+6)^2 \leq 64$ .la condición de que el área del terreno ampliado no exceda de 64 m^2. Un solo grupo tuvo dificultades para representar esta relación al confundir el símbolo de la desigualdad. Es notorio que la dificultad para representar relaciones contextualizadas a través de simbología matemática se mantiene, en este caso en mínimas cantidades.
d, e	Los comportamientos y procedimientos previstos para determinar los valores de x se hicieron evidentes, los grupos utilizaron pruebas de ensayo y error para comprobar si los valores escogidos cumplían con la relación del problema, fue necesario utilizar la devolución a través de preguntas para que puedan determinar sus respuestas, pero finalmente un solo grupo no pudo determinar correctamente los valores de x para la condición del problema.
f	Como se había previsto todos los grupos realizaron la transposición de términos en la expresión: $(x+6)^2 \leq 64$ sin ninguna dificultad, obteniéndose una expresión equivalente donde fácilmente identificaron a la función cuadrática.

g	Se esperó que todos los grupos graficaran correctamente, pero solamente 4 grupos lo lograron, los otros 4 grupos trazaron la gráfica pero de manera incorrecta, manteniéndose los errores para determinar el vértice de la parábola o la intersección de esta con el eje horizontal. Estos errores comunes se mantienen a pesar de haber sido trabajado en la parte II de esta actividad, rebelando que esta problemática debería ser tratada anticipadamente a la aplicación.
h	Tal como se había previsto los estudiantes mostraron dificultades para determinar los valores de la variable x según el contexto del problema. Se puedo observar que cada uno de los integrantes trabajó individualmente por ensayo y error, luego compartían sus resultados hasta lograr un resultado aprobado por todo el grupo. Algunos grupos comparaban sus respuestas con otros equipos, por lo que fue necesario realizar la fase de validación, donde se pudo identificar que todos los grupos utilizaban valores enteros tales como $x = 2,\ 4,\ 6, 9$ para representar a la longitud de las franjas del terreno, luego sustituyeron estos valores en $(6 + x)(6 + x) \leq 64$ para identificar que números hacían verdadera la relación. Estos procedimientos sirvieron para que el profesor encaminara a usar otros valores que no sean números enteros tales como $x = 0{,}2\ ;\ 0{,}5\ ;\ 1{,}5$. Estos datos orientaron a determinar en los grupos un intervalo aproximado a la respuesta correcta.

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
a, b	Tal como se había previsto, los estudiantes lograron representar a través de un gráfico el área del terreno cuadrado y el área del terreno cuadrado recortado 3 m. en un lado y 7 m. en el extremo perpendicular al lado anterior. La dificultad para explicar el significado de la variable x fue observada en 3 grupos que solamente lo presentaron pero no detallaron el significado de dicha variable. La representación gráfica sirvió para que los grupos representen algebraicamente el área del jardín rectangular: $A(x) = (x-3)(x-7)$
c	Tal como se había previsto, todos los grupos determinaron el área del jardín cuando cada lado del terreno cuadrado mide 15m. El resultado lo obtuvieron al sustituir este valor en la expresión $A(x) = (x-3)(x-7)$. Solo dos grupos erraron en el cálculo porque no representaron correctamente el área del jardín.
d	Como se había previsto todos los grupos determinaron los valores correspondientes de x para construir el jardín. La fase de acción realizada en el ítem **c** sirvió para que fácilmente puedan determinar en el cuadro dado los valores de x que sí corresponden y los que no corresponden.
e	La gráfica correspondiente a la función $A(x) = (x-3)(x-7)$ fue realizada correctamente por 8 grupos, las dificultades previstas no fueron observadas como en las gráficas anteriores, en esta oportunidad los estudiantes tuvieron mayor tiempo para coordinar sus procedimientos y comunicar sus logros. Solo un grupo tuvo dificultades para determinar el vértice de la parábola.
f	Como se había previsto, la mayoría de grupos lograron determinar, a partir de la observación en la gráfica trazada, los valores que toma la variable x, cuando la gráfica no está debajo del eje horizontal. Esta observación sirvió para que analizaran el comportamiento de la gráfica y después de compartir

	sus observaciones determinaron el intervalo $x \in \langle -\infty ;3] \cup [7 ;+\infty\rangle$ para los cuales, la función sea mayor o igual a cero.
g	La mayoría de estudiantes tuvo dificultades para determinar los valores de x relacionados con el contexto del problema. Evaluaron la pregunta d, e, f y utilizaron números enteros que les sirvió para determinar una cantidad limitada de valores por ensayo y error. Solo dos grupos después de compartir sus resultados y a partir de la interpretación de sus cálculos con números enteros lograron inferir el intervalo correcto: $x \in [7 ;+\infty\rangle$

ACTIVIDAD 3

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
a	Se esperaba que solamente algunos alumnos representen de forma algebraica la nueva área del jardín: $j(x) = (x-3)(x-7)+5$. Pero la experiencia en las actividades anteriores sirvió para que 22 estudiantes hagan la representación correcta. Dos grupos representaron el área del jardín de la siguiente manera $j(x) = (x-3)(x-7)+5m^2$. Especificando que $5m^2$ es la ampliación del jardín.
b, c	Se esperaba que todos los alumnos determinen el área del jardín ampliado cuando el lado del terreno cuadrado mide 9 m. y 7,1 m. pero los errores cometidos en el ítem **a** influenciaron para que dos estudiantes no logren la respuesta correcta cuando el terreno mida 9 m. Una dificultad que no habíamos previsto fue revelada por los errores que cometían los estudiantes al restar o multiplicar 7,1 por un número entero.

Parte II: Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
a, b, c	Como se había previsto, todos los estudiantes lograron representar algebraicamente el área del nuevo jardín ampliado. Se observó que la interacción entre los estudiantes permitió corregir errores al calcular el área del jardín cuando el terreno cuadrado media 7.1m de longitud. Subsanaron los errores que cometían cuando sumaban y multiplicaban un número decimal con un número entero.

Parte III: Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
a	Se esperaba que los estudiantes tuvieran algunas dificultades para graficar la función cuadrática pero la interacción entre los integrantes de cada grupo permitió que todos grafiquen la función cuadrática correctamente en un sistema de coordenadas: $j(x) = (x-3)(x-7)+5$.
b	En este ítem no ocurrió tal como se esperaba, las dificultades fueron reveladas cuando los estudiantes a partir de la observación no sabían interpretar el comportamiento de la gráfica; la fase de devolución por parte del profesor sirvió para corregir esta dificultad, pero luego la simbolización incorrecta del intervalo correspondiente determinó que dieran una respuesta incorrecta, donde expresaban al intervalo como un conjunto de números enteros tal como aparecía en la escala del sistema de coordenadas.
c	Al igual que la pregunta anterior las dificultades se hicieron notorias a pesar que se observó una profunda reflexión por parte de los integrantes para relacionar los valores de x con el contexto del problema. Sabemos que un problema contextualizado da significado a las nociones matemáticas implicadas, pero en este caso las dificultades reveladas serían una muestra

	de que no existen experiencias de trabajo con problemas contextualizados, donde el estudiante pueda construir su aprendizaje al interactuar con un medio.

ACTIVIDAD 4

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
a, b	Al iniciar la actividad se tuvieron algunas dificultades para entender la situación, el docente explicó detalladamente y trató de institucionalizar los procedimientos presentados. La mayoría de estudiantes a partir de una fase de acción al utilizando procedimientos algebraicos tales como la factorización y el completar cuadrados en el trinomio dado, lograron determinar los valores de a, b, c y d; los errores que presentaron 8 estudiantes fueron por la dificultad que tuvieron para factorizar o completar cuadrados en la expresión cuadrática.
c, d	Como se había previsto en los comportamientos esperados, algunos mostraron dificultad para graficar la función cuadrática y los errores que persisten son la identificación y la ubicación de las coordenadas del vértice de la parábola. En la expresión $f(x) = (x-1)^2 - 4$ identificaron como vértice a $(1,4)$ siendo el correcto $(1,-4)$. Con respecto al ítem d los estudiantes confundieron la identificación de los tramos $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$ en la gráfica con los valores que toma x para los cuales $f(x) > 0$, ó $f(x) < 0$

Trabajo Grupal

Parte II

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
a, b	Habíamos previsto que no todos los grupos lograrían determinar los valores de a, b, c y d al representar la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en la forma $f(x) = (x-a)^2 - b$ y $f(x) = (x-c)(x+d)$, pero los resultados muestran que todos los grupos lo determinaron de manera correcta. Esto rebelaría que las interacciones entre los integrantes de los grupos en la fase de formulación al discutir sus procedimientos de factorización y de completar cuadrados lograron corregir errores de la fase de acción en la parte individual que incluso permitió defender sus resultados en la fase de validación cuando lo compartían y defendían sus resultados con otros grupos.
c, d	Como se había previsto, todos los estudiantes lograron graficar correctamente la función cuadrática y en esta misma grafica lograron señalar los tramos en los que $f(x) > 0,\ f(x) < 0$ y los puntos en lo que la función sea igual a cero. No se observaron dificultades, por lo que es necesario resaltar las interacciones entre los estudiantes en la fase de formulación al discutir sus resultados para ubicar el vértice, la intersección de la grafica con el eje x y la identificación de los tramos en la gráfica, permitió corregir errores identificados en la parte individual. La comparación y la sustentación de sus resultados en la fase de validación permitieron consolidar sus procedimientos.
e, f	El haber desarrollado correctamente los ítems c y d logró que todos los grupos respondieran correctamente los ítems e y f tal como lo habíamos previsto en los comportamientos esperados. Cabe indicar que para resolver el ítem f hubo una interacción entre los integrantes del grupo para decidir la respuesta correcta y ubicar en la recta trazada el conjunto de números reales para los cuales $f(x) \geq 0 \;\; y \;\; f(x) \leq 0$
g, h	Tal como se había previsto, la gran mayoría de estudiantes después de una interacción entre sus integrantes para comunicar sus respuestas y corregir

	sus errores, lograron identificar el conjunto solución de las inecuaciones $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ y $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ al observar las respuestas de los ítems e y f. La representación del conjunto solución la hicieron en forma gráfica y simbólica.
i	Tal como se esperaba, la mayoría de estudiantes logró graficar correctamente la función cuadrática, para esto dos grupos a partir de la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ completaron cuadrados en el trinomio cuadrático y obtuvieron la función $f(x) = (x-3)^2 + 0$ de donde identificaron el vértice $(3, 0)$ de la parábola. A partir de la observación en el gráfico se identificó la respuesta correspondiente a la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$. Las discusiones argumentadas ocurridas en la interacción entre los alumnos permitieron que se corrigieran algunos errores y luego determinar $x = 3$ como la respuesta correcta.
j	Como fue de esperarse, 5 grupos lograron graficar la función cuadrática y a partir de la observación se identificó la respuesta correspondiente a la inecuación $x^2 - 6x + 13 \leq 0$. Los primeros procedimientos fueron completar cuadrados en el trinomio cuadrático, para trazar la gráfica de la función obteniéndose $f(x) = (x-3)^2 + 4$ de donde dedujeron el vértice $(3, 4)$. En el procedimiento de la factorización determinaron “no se pude factorizar” por lo que para determinar las raíces utilizaron la formula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obteniéndose números complejos, esto les sirvió para determinar que la gráfica no intersecta al eje x. Luego después de discusiones argumentadas al observar el comportamiento de la gráfica determinaron “la inecuación no tiene respuesta” concluyéndose que su conjunto solución es el conjunto vacío. Es importante resaltar que las fases de acción, formulación y validación, que involucran una seria de procedimientos realizadas en las actividades anteriores, en la determinación del conjunto solución de una inecuación cuadrática; a partir de la interpretación de la gráfica, sirvió para entender el concepto de inecuación cuadrática y comprender los procedimientos de resolución con aplicaciones a problemas contextualizados.

Reflexiones sobre las variables micro didácticas

Con respecto a la variable:

a) **Signo de la desigualdad:** Inecuación cuadrática con signo $\geq$ o $\leq$.

Ante cambios de la variable didáctica, “signo de la desigualdad”, se observó que los estudiantes cambiaron adecuadamente de estrategias en los procedimientos para determinar el conjunto solución de la inecuación cuadrática; los primeros procedimientos estuvieron ligados a la traducción de la situación problemática utilizando una desigualdad; esta contextualización logró distinguir los significados de “menor o igual” y de “mayor o igual”. Cabe mencionar la importancia de haber trabajado con los estudiantes el refuerzo de los conocimientos previos considerando estas variables didácticas, ya que se aclaró el uso de expresiones como “a lo más”, “que no exceda”, “por lo menos”, “no es mayor que” y “no es menor que”. La manipulación de estos significados en situaciones problemáticas permitió determinar el conjunto solución de la inecuación cuadrática contextualizada a las condiciones del problema.

La manipulación de estas variables también se pudo observar en la gráfica de la función cuadrática asociada al termino cuadrático de la inecuación, específicamente cuando se analizó el comportamiento de la grafica e identificó el conjunto de valores de x para los cuales la gráfica esta por encima del eje x o por debajo del eje x.

En términos generales el control de estas variables permito crear reacciones favorables por parte de los alumnos para determinar las respuestas correctas a los problemas propuestos.

b) **Tipo de trinomio cuadrático**: $ax^2 + bx + c, con\ a = 1\ \wedge\ b, c \in Z$

- Factorizable en R
- No factorizable en R

En cuanto a la variable micro didáctica “tipo de trinomio cuadrático” atendiendo a la característica de factorizable o no factorizable considerado en la inecuación, se pudo observar los cambios de estrategias de los alumnos para determinar el conjuntos solución de la inecuación cuadrática. Iniciaron sus procedimientos con la factorización del trinomio cuadrático y al ser posible esta factorización, identificaron fácilmente el comportamiento de la gráfica de la función cuadrática y por consiguiente el conjunto solución de la inecuación; pero ante la consideración de esta variable didáctica en el caso de "trinomio no factorizable en R" (trinomio con raíces complejas) se pudo observar un desconcierto y una sensación de ruptura del contrato didáctico pues lo consideraban muy complicado; sin embargo la devolución ante sus interrogantes permitió aclarar la situación algebraica y gráficamente, resumiéndose en la no intersección de la grafica de la función cuadrática con el eje x; así de un total de 8 grupos 5 graficaron correctamente, un grupo cometió errores algebraicos, otro tuvo una buena aproximación a la gráfica adecuada y solo un grupo no logró hacerlo.

Observaciones:

Semejanzas entre lo esperado y lo observado:

- Dificultad para interpretar el significado de una variable según el contexto de un problema relacionado con inecuaciones cuadráticas.
- Dificultad para determinar los valores de la variable x según el contexto del problema, siendo evidente la falta de experiencias para resolver problemas contextualizados referentes a inecuaciones cuadráticas.
- Dificultades para determinar el conjunto solución de una inecuación cuadrática a partir de una interpretación de la gráfica de una función cuadrática.
- Dificultad para utilizar sus conocimientos previos en la resolución de un problema sobre inecuaciones cuadráticas.
- Dificultad para comprender procedimientos algebraicos y su utilización en problemas contextualizados relacionados con inecuaciones cuadráticas.

Estas dificultades previstas y observadas fueron disminuyendo a medida que se desarrollaban las actividades programadas.

Diferencias entre lo esperado y lo observado:

- Empleo de un mayor tiempo del previsto para resolver los problemas contextualizados sobre inecuaciones cuadráticas.

- Más errores que los previstos, en el manejo de los conocimientos previos. Si bien es cierto que algunos errores fueron inesperados, éstos no se presentaron en la mayoría de estudiantes. Cabe destacar los errores en la técnica de completar cuadrados y en el uso de la notación habitual para representar intervalos. Se pensó que con las fases de acción y formulación se podían superar, pero no fue así; sin embargo se superaron en la fase de validación e institucionalización.
- Se encontró menos claridad que la prevista para la interpretación del significado de una variable ante problemas relacionados con inecuaciones cuadráticas y limitaciones para utilizar otros conceptos y algoritmos matemáticos en la resolución de problemas contextualizados. Esto fue superado con las devoluciones y en las fases de formulación y validación.

6.2 Resultados finales de la aplicación de la secuencia didáctica.

Considerando el análisis a priori, los comportamientos observados durante la experimentación, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos; se puede precisar que la secuencia diseñada inicialmente, aportaría a la construcción del concepto de inecuación cuadrática y a la comprensión de los procesos de resolución en problemas que requieren el uso de este objeto matemático. Por lo manifestado, en términos generales, la secuencia didáctica propuesta ha sido respondida satisfactoriamente por los estudiantes y no tenemos elementos suficientes para un rediseño, salvo el tiempo previsto para la primera actividad, que en virtud de la experiencia, tendría que ser mayor para que los estudiantes la realicen con más tranquilidad y puedan resolver con más detalles los problemas propuestos.

Por razones de tiempo y por la extensión de la investigación no se realizó otra experimentación de la secuencia didáctica elaborada, que habría dado mayores elementos para hacer los ajustes o el rediseño del caso en la estructura, en las situaciones problemáticas o en la graduación de la secuencia de preguntas.

CAPITULO 7: CONCLUSIONES RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Este capítulo contiene las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados, se proponen algunas recomendaciones y finalmente algunas perspectivas para abordar otras investigaciones relacionadas al tema en estudio, que abre este trabajo.

7.1 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas en este trabajo de investigación, en relación a los objetivos específicos planteados al inicio de la investigación son:

7.1.1 En relación al primer objetivo específico:

“Diseñar una secuencia didáctica con actividades y problemas de dificultad graduada, que contribuya a la construcción del concepto de inecuación cuadrática y a comprender sus procesos de resolución”.

Para lograr este objetivo se realizó un análisis preliminar del objeto de estudio el cual está desarrollado en el capítulo 3. El análisis preliminar dado por la ingeniería didáctica se efectuó en sus tres aspectos: en su dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica. Estos análisis sirvieron para tener una claridad teórica del objeto de estudio y entender sus procesos de enseñanza, así mismo, prever las dificultades y errores comunes en los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas. A partir de este estudio obtuvimos las siguientes conclusiones que nos sirvieron para diseñar nuestra secuencia didáctica:

1. A partir de la revisión de los textos usados en la enseñanza de matemática de la educación superior y que influyen en el discurso utilizado en las aulas universitarias, se notó que en general inician su presentación con la resolución algebraica de la inecuación cuadrática, detallan los pasos a seguir; algunos hacen una explicación gráfica para resolver inecuaciones cuadráticas pero no utilizan problemas contextualizados que se traduzcan en Inecuaciones Cuadráticas; lo que según investigaciones previas citadas en los antecedentes muestran que estos procedimientos lograrían una adaptación

mecánica de los proceso de resolución de las inecuaciones cuadráticas que no son fáciles de comprender, interpretar y controlar y que ocultarían un autentica comprensión de este objeto matemático. Estas consideraciones fueron tomada en cuenta en este trabajo.

2. Para abordar el tema de Inecuaciones Cuadráticas se necesita que los estudiantes tengan el dominio de ciertos conocimientos previos y a partir del análisis de la prueba de conocimientos previos incluidos en la investigación, se determinó lo siguiente:
   - Tienen dificultades para considerar los diversos casos en los que el producto de dos números es positivo o negativo (ver análisis de evaluación de conocimientos previos ítem 1)
   - Se evidencia limitaciones para ordenar números reales en la recta real.
   - Algunos estudiantes no tienen claridad sobre la inclusión o no inclusión de los extremos de un intervalo, según sea cerrado o abierto.
   - Se observan dificultades para interpretar el significado de variables contextualizadas y la formulación algebraica de enunciados verbales a través de desigualdades.
   - Se observan limitaciones para resolver ecuaciones cuadráticas, especialmente en aquellas con trinomio cuadrático no factorizable en R.
   - Tienen grandes dificultades para esbozar la gráfica de funciones cuadráticas.
   - Se observan limitaciones para interpretar y utilizar procedimientos algebraicos, específicamente cuando se tiene que factorizar trinomios cuadráticos no factorizable en R, ocasionado dificultades para la determinación de las características de la gráfica de una función cuadrática, especialmente para determinar la intersección con el eje x.
3. Los análisis en sus tres componentes sirvieron para estructurar la secuencia didáctica, incluyendo en la resolución de Inecuaciones Cuadráticas procesos algebraicos, procesos gráficos y aplicación a problemas contextualizados.

7.1.2 En relación al segundo objetivo específico

“Aplicar las secuencias didácticas y analizar los resultados comparando los efectos esperados y los observados en el marco de la teoría de situaciones didácticas”.

La aplicación de la secuencia didáctica se abordó en el capítulo 5, donde se detallan los comportamientos observados que promovió cada actividad, de lo cual se concluye:

1. Hubo más semejanzas que diferencias entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, como se detalla en las páginas 125. Es destacable la reacción favorable de los estudiantes ante los problemas contextualizados sobre inecuaciones cuadráticas y el interés mostrado por ellos para encontrar una “estrategia óptima” para resolver tales inecuaciones.
2. Se pudo observar que los procedimientos de ensayo y error para determinar y comprobar los valores correspondientes a la solución del problema contextualizado y la discusión que se dio sobre estos procedimientos dados en los procesos de resolución grupal, influyeron fuertemente para superar las dificultades en la resolución individual. Es de destacar las dificultades individuales para relacionar la gráfica de una función cuadrática con el conjunto solución de la inecuación cuadrática asociada y la interpretación de todo esto en el contexto del problema (ítems g y h del trabajo individual de la actividad 1). Destacamos la importancia de estas acciones, pues al no haber sido resuelto correctamente de manera individual el problema en la fase de acción, la solución correcta en el grupo no es consecuencia de la influencia de una sola persona, si no de la discusión de todo el grupo.
3. Afrontar problemas contextualizados relacionados con inecuaciones cuadráticas, encontrar un apoyo gráfico-geométrico en su interpretación y relacionar las inecuaciones cuadráticas con las gráficas de las funciones cuadráticas, contribuyeron a una mejor comprensión de los procesos de resolución de estas inecuaciones.
4. En base a los resultados de la experimentación, se ha evaluado positivamente la implementación de esta propuesta para la resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas; su aplicación contribuyó a lograr la comprensión

de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas en el marco de problemas que requieren el uso de este objeto matemático y permitió atenuar las dificultades identificadas por algunos investigadores, tal como se detallan en el planteamiento del problema.

7.1.3 En relación al tercer objetivo específico

“Rediseñar las secuencias didácticas ejecutadas inicialmente considerando los resultados de la experimentación y los efectos esperados y observados para garantizar la construcción del concepto de inecuación cuadrática y la comprensión de los procesos de resolución en problemas que requieran el uso de este objeto matemático”.

Para determinar argumentos necesarios y efectuar el rediseño de las secuencias didácticas ejecutadas inicialmente, se consideró el análisis a priori, los comportamientos observados y la comparación entre estos; a partir de tales consideraciones y del análisis de resultados de la aplicación se concluye:

1. La secuencia didáctica propuesta ha sido respondida satisfactoriamente por los estudiantes y a partir de esta única experimentación no tenemos elementos suficientes para un rediseño en su estructura, en las situaciones problemática o en la graduación de la secuencia de preguntas; salvo en el tiempo previsto para la primera actividad, que en virtud de la experiencia, tendría que ser mayor en la parte individual para que los estudiantes la realicen con más tranquilidad y puedan responder con más detalles los problemas propuestos.
2. Es muy importante la creación de problemas adecuados para motivar el estudio de un objeto matemático. En el caso particular de las inecuaciones cuadráticas, parte importante de esta investigación ha sido crear los problemas contextualizados y proponerlos considerando actividades individuales y grupales, con dificultades graduadas que pongan a prueba diversas estrategias de resolución. Estos criterios tendrían que tenerse en cuenta para futuros rediseños o aplicaciones a estudiantes con otras características.

7.2 Recomendaciones

En base a las conclusiones de la investigación se formulan las siguientes recomendaciones:

1. Resaltar en la enseñanza de las Inecuaciones Cuadráticas actividades donde se combinen problemas contextualizados, representaciones algebraicas y representaciones gráficas; los cuales servirán para comprender los procesos de resolución y determinar el conjunto solución, por lo que se sugiere no introducir las técnicas de resolución demasiado pronto.
2. Es necesario cambiar nuestra forma de enseñar matemática, involucrando actividades que permitan la construcción y apropiación del conocimiento matemático a través de fases de acción, formulación y validación; y evitar una didáctica basada únicamente en la fase de institucionalización, donde se realizan actividades de transmisión, memorización y repetición de los conocimientos por parte de los estudiantes. En el caso particular de las inecuaciones cuadráticas, en los textos existen pocos problemas contextualizados que puedan usarse en la perspectiva constructiva. Es un reto para los docentes crear los problemas adecuados.

7.3 Perspectivas para futuras investigaciones

El logro de los objetivos de la investigación y el desarrollo de todo el trabajo para alcanzarlos, sirvieron para identificar algunos puntos de referencias para futuras investigaciones que enriquecerían nuestro trabajo y que podrían continuarse manteniendo este marco teórico. Entre estos puntos tenemos los siguientes:

1. Repetir la experimentación de la secuencia didáctica con estudiantes de otras características académicas, para observar si los comportamientos y dificultades registradas en el presente trabajo se repiten o cambian. Esta nueva experimentación nos daría mayores elementos para hacer los ajustes o el rediseño de la secuencia didáctica.
2. Continuar la investigación modificando algunas variables didacticas, tal como la variación del signo $\geq y \leq$ por los signos $> y <$ y del trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c \; con \; a = 1 \; \wedge b, c \in Z$ utilizado en la presente investigación, por el trinomio $ax^2 + bx + c; \; con \; a \neq 1$ para realizar una nueva investigación.

REFERENCIAS

Artigue, M. & Douady, R. & Moreno, L. & Gómez, P. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana. S.A. de CV, Bogotá.

Bagni, G.T. (2008). Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica. En Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra*, VI, (SFIDA 21 - 25) (pp. 53–64). Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Torino, Italia.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *6* (3), 199-219.

Barbosa, K. (2006). *Inecuaciones: Un Análisis en las Construcciones Mentales de los Universitarios*. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. CICATA-IPN, México.

Blanco, L., Garrote, M. & Hidalgo, J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma 46, 37*-44

Boero, P. y Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. En proceedings of PME 28. (Volumen I, p. 139 – 143). Bergen, Noriega

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional, México.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las teorías de las situaciones didácticas* .Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 2

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 2

De la Fuente, M. y Valdez, C. (2001) Una alternativa gráfica para la resolución de las desigualdades. Memoria de la XII semana regional de investigación y docencia en matemática. Recuperado el 25 de marzo del 2012 de http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/de%20las%20Fuentes%20Lara.pdf

Diez, M. (1995). Sobre la simbolización en el álgebra aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en educación secundaria. Tesis de Doctorado. Universidad Complutense de Madrid, España.

Eugenia, M., Polola, L., Fernández, G., Bortolotto, M. y Ecalle, M. (2002) Estrategias para aprender a aprender en Matemática. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (volumen 15, p. 975 - 980). Mexico: Clame.

Guajardo, E. (2010). Dominio de Funciones con Raíz cuadrada. Recuperado el 24 de marzo del 2012 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Guajardo.pdf

Leithold, L (1998) *Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica, con ejercicios para calculadora y graficadora.* México: Oxford University Press.

Malaspina, U. & Bazán, J. (2007). Enseñanza de la matemática en la secundaria. Un análisis preliminar de las percepciones de ingresantes a la PUCP. *Educación. 16* (13), 7 - 27

Panizza, M. (2003.) Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. En Panizza, M. (Comp.) *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y Propuestas* (p. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Sadowsky, P. (2005). *La teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Tiano, S. (2004) “New errors” and “old errors”: The case of quadratic inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International, Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol I pp* 137–166

APÉNDICES

Recordando los conocimientos previos para Inecuaciones Cuadráticas

Nombres:…………………………………………… ……………...**Fecha:** 12/10/2011.

1. En cada uno de los siguientes casos, dé dos pares de números reales, a y b que pueden ser números positivos o negativos, tales que cumplan la condición que se da:

a) Su producto es menor que cero y $a < b$ a:-------	a: -------- b:-------	b: --------	b) Su producto es menor que cero y $a > b$ a:-------	a: -------- b:-------	b: --------
c) Su producto es mayor o igual que cero y $a < b$ a:-------	a: -------- b:-------	b: --------	d) Su producto es mayor o igual que cero y $a > b$ a:-------	a: -------- b:-------	b: --------

2. En cada caso, represente en la recta real los números que se dan.

a) 2, 3/5, 9/7, 235/110	b) $\sqrt{7}$, $3\sqrt{2}$, 2
c) 9/7, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{11}$	d) - 4, -2/3, -5/7

3. Represente gráficamente los siguientes conjuntos, en una recta real:

b) $[-4;\ 3]$

c) $\langle -\infty;\ -1] \cup [4;\ +\infty\rangle$

d) $\langle -\infty;\ 5\rangle \cap [2;\ 8\rangle$

4. Utilice una variable y una desigualdad adecuada para representar en cada caso el enunciado dado:

e) Teresa multiplica un número dos veces por sí mismo y obtiene un resultado no menor que 3

f) El producto de dos números que se diferencian en dos unidades no es mayor que 15

g) El área de un cuadrado es menor que 25 (en metros cuadrados)

h) El cuadrado de un número es mayor que el doble de dicho número, disminuido en cuatro

5. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas en el conjunto de los números reales:

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $x^2 - 4x + 7 = 0$

d) $x^2 + 6x + 9 = 0$

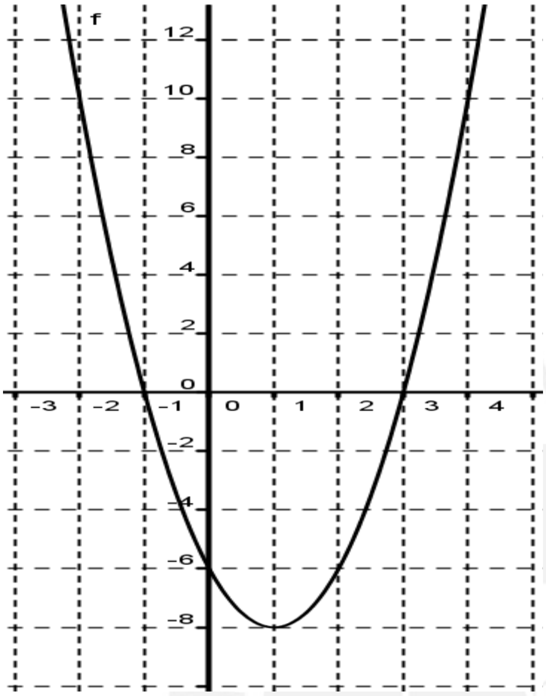
6. Exprese cada una de las siguientes funciones cuadráticas en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k;\ donde\ a,\ h,\ k$ representan números reales fijos y luego grafíquelas en el plano cartesiano:

b) $g(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $h(x) = x^2 - 4x + 7$

d) $m(x) = x^2 + 6x + 9$

7. A continuación se muestra el gráfico de una función cuadrática **f**. Observando el gráfico determine:



i) Las raíces de la ecuación cuadrática
f$(x) = 0$

j) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \leq 0$

k) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \geq 0$

l) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \leq 10$

m) Los valores de x para los cuales **f**$(x) \geq 10$

n) Las coordenadas del vértice de la parábola

o) Los valores de *a*, *h* y *k* en la expresión **f**$(x) = a(x - h)^2 + k$

p) Los valores de *a, b* y *c* en la expresión
f$(x) = ax^2 + bx + c$

Resultados de la evaluación de conocimientos previos

Tabla 7. Respuestas de la evaluación de conocimientos previos

Pregunta	A	B	C	D
1	14	9	4	1
2	12	9	2	5
3	20	6	2	0
4	8	6	4	10
5	12	8	6	2
6	1	4	6	17
7	14	8	4	2

Alumnos participantes: 28
A: Respuestas correctas
B: Respuestas en proceso
C: Respuestas incorrectas
D: Respuestas en blanco

Análisis de textos

Objetivo: analizar cómo es abordado el tema de inecuaciones cuadráticas en los libros textos que se utilizan en el nivel superior

Texto	Introducción al tema de inecuación cuadrática	Tratamiento de las inecuaciones cuadráticas	Tipos de problemas o ejercicios

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

Nombres:…………………………………………………...**Fecha:** 12/10/2011

Estimado estudiante marcar con un aspa (x), para indicar cuál es la situación que te corresponde.

1. Mi edad es:

De 15 a 17	
De 18 a 20	
De 21 a 23	
Más de 23	

2. Sexo:

Masculino	
Femenino	

3. Lugar de procedencia:

Chiclayo	
Lambayeque	
Ferreñafe	
otros	

4. Terminé la secundaria en un colegio:

Estatal	
Particular	
Religioso	
Militar	

5. Tiempo de preparación para ingresar a la universidad:

Sin preparación	
De 1 a 3 meses	
De 4 a 6 meses	
De 6 meses a mas	

6. Modalidad de ingreso a la universidad

Cepresipan	
Admisión	
Exonerados	
Traslado externo	

7. Horas semanales que estudio el curso fuera de clase

no tengo tiempo	
De 1 a 2 horas	
De 3 a 4 horas	
De 5 a 6 horas	
Más de 6 horas	

8. El tema de Inecuaciones Cuadráticas

No me enseñaron	
Me enseñaron y no lo aprendí	
Me enseñaron y lo aprendí	

Ficha de Observación

Actividad: ………

	Preguntas formuladas por el estudiante	Ítem que se resuelve en menor tiempo	Ítem que se resuelve en mayor tiempo	Clima, actitud, disposición, otros.	Apreciación global
Trabajo individual					
Trabajo Grupal: Parte I					
Trabajo Grupal: Parte II					

Resultados de la actividad 1

Tabla 8. Respuestas a la aplicación de la actividad 1

PARTE I INDIVIDUAL	A	B	C	D
a	15	11		
b	22	2	2	
c	24		2	
d	12	14		
e	10	11	4	1
f	24		1	1
g	3	6	6	11
h			8	18
PARTE II GRUPAL	A	B	C	D
f	9			
g	7	2		
h	4	3	1	1
PARTE III GRUPAL	A	B	C	D
a	4	4	1	
b	8		1	
c	8	1		
d	6	2	1	
e	8	1		
f	9			
g	4		4	1
h		5		4

Alumnos evaluados: 26
Grupos: 8 grupos de 3 integrantes y 1 grupo de 2
A: Respuestas correctas
B: Respuestas en proceso
C: Respuestas incorrectas
D: Respuestas en blanco

Resultados de la actividad 2

Tabla 9. Respuestas a la aplicación de la actividad 2

PARTE GRUPAL	A	B	C	D
a	5	3	1	
b	8		1	
c	7		2	
d	9			
e	8	1		
f	6	2		1
g	2	5	1	1

Alumnos participantes: 25
Grupos: 8 grupos de 3 integrantes y 1 grupos de 1
A: Respuestas correctas
B: Respuestas en proceso
C: Respuestas incorrectas
D: Respuestas en blanco

Resultados de la actividad 3

Tabla 10. Respuestas a la aplicación de la actividad 3

PARTE I INDIVIDUAL	A	B	C	D
a	22	2		
b	22		2	
c	9	2	13	
PARTE II GRUPAL	**A**	**B**	**C**	**D**
a	7	1		
b	7		1	
c	7		1	
PARTE III GRUPAL	**A**	**B**	**C**	**D**
a	8			
b	1	2	5	
c	1	5	2	

Alumnos participantes: 24
Grupos: 8 grupos de 3 integrantes
A: Respuestas correctas
B: Respuestas en proceso
C: Respuestas incorrectas
D: Respuestas en blanco

Resultados de la actividad 4

Tabla 11. Respuestas a la aplicación de la actividad 4

PARTE I INDIVIDUAL	A	B	C	D
a	15	2	2	4
b	15		2	6
c	15		2	6
d	8	2		13
PARTE II GRUPAL	**A**	**B**	**C**	**D**
a	7			1
b	8			
c	8			
d	7	1		
e	8			
f	8			
g	6		1	1
h	5		2	1
i	7	1		
j	5	1	1	1

Alumnos participantes: 23
Grupos: 7 grupos de 3 integrantes y 1 grupos de 2
A: Respuestas correctas
B: Respuestas en proceso
C: Respuestas incorrectas
D: Respuestas en blanco

ANEXOS

ANEXO 1

UNIVERSIDAD SEÑOR DE SIPÁN

PIMENTEL – CHICLAYO

SÍLABO

LÓGICO MATEMÁTICA

I. INFORMACIÓN

1.1. Facultad : Humanidades.
1.2. Escuela Profesional : Artes & Diseño Gráfico Empresarial.
1.3. Programa Académico: Formación General.
1.4. Área : Lógico Matemática
1.5. Semestre de Estudios : 2011 - II.
1.6. Ciclo de Estudios : I.
1.7. Prerrequisito : Ninguno.
1.8. Créditos : 05.
1.9. Duración : 17 semanas.
1.10. Horas semanales : 08.
1.11. Docente : Núñez Sánchez Nixo.

II. FUNDAMENTACIÓN

El Área de Lógico Matemática pertenece a la línea de formación general de las distintas carreras profesionales, y corresponde a la dimensión humana de desarrollo del estudiante. Su objeto son la argumentación y resolución de problemas matemáticos a partir de la utilización de la matemática y la lógica en operaciones que requieren contextos reales. ***Lógico Matemática*** se sustenta en los enfoques cognitivos, matemáticos y lógicos que permiten desarrollar el pensamiento lógico-matemático.

III. COMPETENCIAS

COMPETENCIA GENERAL

Desarrollar una persona: (a) *integral*, con solidez en el funcionamiento unitario de sus estructuras cognitivas, axiológicas, volitivas y práxicas; crítico, creativo, Meta cognitivo, comprehensivo y lógico en su cognición; cooperativo, colaborativo e identitario en sus valoraciones; autónomo y prospectivo en su volición; práxico en su acción; (b) *multidimensional*, ejecutor de esa integralidad cognitiva, axiológica,

volitiva y activa en sus relaciones y acciones con los mundos humano, natural, social y cultural, es decir, con capacidad para aprender a *ser* en la humanidad, *estar* en la naturaleza, *convivir* en la sociedad y *saber* en la cultura.	
COMPETENCIAS DIMENSIONALES Pensamiento crítico – Pensamiento creativo – Proactividad – Metacognición	
COMPETENCIA DE ÁREA Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando estrategias metacognitivas en la lógica formal y operaciones matemáticas, a partir de situaciones problemáticas de la vida real y de la formación profesional.	**ACTITUD DE ÁREA** Aprecia la matemática como representación y comunicación; persevera en la búsqueda de soluciones a problemas del entorno.

IV. PROGRAMACIÓN ACADÉMICA

UNIDAD I: LÓGICA PROPOSICIONAL Y OPERACIONES CON CONJUNTO

CAPACIDAD DE UNIDAD:

Analiza y resuelve problemas matemáticos de su entorno aplicando reglas, principios e inferencias relacionados a la Lógica Proposicional y Operaciones con Conjuntos

HABILIDAD DE ACTIVIDAD:

Identifica proposiciones lógicas y demuestra la validez de una inferencia empleando leyes de equivalencia o tablas de verdad.
Infiere procedimientos matemáticos en ejercicios y problemas sobre conjuntos.

ACTITUDES:

RESPONSABILIDAD: Manifiesta compromiso e identificación en su trabajo académico.
PUNTUALIDAD: Revela respeto a los demás y a si mismo asistiendo puntualmente a las clases.
PARTICIPACIÓN: Muestra disposición a enfrentarse a situaciones problemáticas novedosas. Participa activamente en el desarrollo de las clases.

CONTENIDOS DE ACTIVIDAD:

Semana 01: 29 de agosto 02 de septiembre

- Presentación del sílabo, prueba de entrada.
- Definiciones básicas de la lógica proposicional.
- Proposiciones simples y compuestas. Conectivos lógicos. Valoración de proposiciones.
- Esquemas moleculares.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:

Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

Semana 02: 05 al 09 de septiembre

- Equivalencias e Implicaciones notables.
- Validez y no validez de una inferencia

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

Semana 03: 12 al 16 de septiembre

- Cuantificadores Universal y existencial.
- Circuitos lógicos: en serie y paralelo.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

Semana 04: 19 al 23 de septiembre

- Conjuntos: Operaciones y problemas con conjuntos (Unión, Intersección, diferencia, Complemento).

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

PRODUCTO DE I UNIDAD (ACTIVIDADES)
Trabajo de campo, ensayo sobre lógica formal referente a su especialidad.

UNIDAD II: SISTEMA DE NÚMEROS REALES, RELACIONES, FUNCIONES Y MATRICES

CAPACIDAD DE UNIDAD:

Resuelve y aplica operaciones matemáticas de sistemas numéricos, relaciones, funciones y matrices, utilizando el lenguaje y herramientas matemáticas.

HABILIDAD DE ACTIVIDAD:

Infiere procedimientos matemáticos en la resolución de ejercicios y problemas sobre números reales, relaciones y funciones, ecuaciones e inecuaciones y matrices.

ACTITUDES:

RESPONSABILIDAD: Manifiesta compromiso e identificación en su trabajo académico.
PUNTUALIDAD: Revela respeto a los demás y a si mismo asistiendo puntualmente a las clases.
PARTICIPACIÓN: Muestra disposición a enfrentarse a situaciones problemáticas novedosas. Participa activamente en el desarrollo de las clases.

CONTENIDOS DE ACTIVIDAD:

Semana 05: 26 de septiembre al 30 de septiembre

- Sistema de números reales: propiedades de la adición y multiplicación, relación de orden. Operaciones con números reales.
- Intervalos .Clases .Operaciones.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

Semana 06: 03 al 07 de octubre

- Ecuaciones polinomiales.
- Sistema de ecuaciones lineales con 2 y 3 variables. Métodos de resolución.
- Ecuaciones cuadráticas .Método de resolución: por factorización, completando cuadrados y fórmula general.
- Ecuaciones con valor absoluto.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución – generalización

Semana 07: 10 al 14 de octubre

- Ecuaciones bicuadradas. Método de resolución: Fórmula general y método del aspa.
- Ecuaciones de orden superior.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema - discusión - solución - generalización

Semana 08: 17 al 21 de octubre

- Inecuaciones polinomiales: definición. Desigualdades. Clases.
- Inecuaciones de primer grado en R.
- Inecuaciones cuadráticas .Métodos de resolución: factorización y puntos críticos.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

Semana 09: 24 al 28 de octubre

Primera evaluación parcial

Semana 10: 31 de octubre al 04 de noviembre

- Producto cartesiano de dos conjuntos: representación gráfica mediante tablas, diagrama de flechas, plano cartesiano, diagrama de árbol.
- Relaciones, Dominio y rango. Propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva, equivalencia, antisimétrica, de orden e inversa .Gráficas en el plano cartesiano.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

Semana 11: 07 al 11 de noviembre

- Funciones: dominio, rango. Notación. Representación gráfica mediante: flechas, tablas, pares ordenados, gráficas, ecuación.
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.
- Funciones reales: Lineal, valor absoluto, cuadrática, raíz cuadrada.

- Operaciones con funciones: adición, sustracción, multiplicación y división.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:

Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

Semana 12: 14 al 18 de noviembre

- Matrices: definición. Notación Orden. Clases: nula identidad, iguales.
- Operaciones con matrices: adición sustracción multiplicación.
- Determinantes e inversa de una matriz.
- Ejercicios y problemas con matrices

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

PRODUCTO DE II UNIDAD (ACTIVIDADES)
Trabajo de campo, Resuelve y aplica Números reales, relaciones y funciones, ecuaciones y matrices al estudio de casos o proyectos de su especialidad.

UNIDAD III: NOCIONES BASICAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA Y ESTADISTICA

CAPACIDAD DE UNIDAD:

Analiza e interpreta situaciones problemáticas referentes a la geometría analítica y nociones de estadística que permita la toma de decisiones.

HABILIDAD DE ACTIVIDAD:

Identifica y representa gráficamente figuras, cuerpos planos y datos estadísticos extraídos de diferentes fuentes de información.

ACTITUDES:

RESPONSABILIDAD: Manifiesta compromiso e identificación en su trabajo académico.
PUNTUALIDAD: Revela respeto a los demás y a si mismo asistiendo puntualmente a las clases.
PARTICIPACIÓN: Muestra disposición a enfrentarse a situaciones problemáticas novedosas. Participa activamente en el desarrollo de las clases.

CONTENIDOS DE ACTIVIDAD:

Semana 13: 21 al 25 de noviembre

- Introducción a la geometría analítica plana.
- Ecuación de la recta, ecuación de la circunferencia, ecuación de la parábola

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

Semana 14: 28 de noviembre al 02 de diciembre

- Nociones básicas de estadística:
- Elaboración e interpretación de tablas y gráficos estadísticos: gráfico de barras, histogramas, polígonos de frecuencia.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema- discusión -solución-generalización

Semana 15: 05 al 09 de diciembre

- Medidas de tendencia central: media, mediana y moda.
- Medidas de dispersión: varianza y desviación estándar.

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE:
Conferencia participativa. Problema – discusión - solución - generalización

Semana 16: 12 al 16 de diciembre

SEGUNDA EVALUACIÓN PARCIAL

Semana 17: 19 al 23 de diciembre

Evaluación de aplazados y rezagados.

V. METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA

El Área de Lógico Matemática se desarrolla en base a un enfoque *metodológico* ***activo-participativo*-reflexivo**, se cede relieve a la actividad de aprendizaje y al rol protagónico del estudiante, es concebida como un acto de comunicación y de encuentro interpersonal entre dos sujetos socioculturales: el docente y el estudiante.

Según el enfoque activo-participativo-reflexivo los métodos son *problémicos*, *heurísticos* y *cooperativos*. Se empleará una metodología activa, que despierte y mantenga el interés de los estudiantes en el desarrollo de estrategias de razonamiento para aplicarlas a situaciones problemáticas reales o posibles y comunicarlas adecuadamente.

VI. Medios y materiales

Los *recursos* básicos que apoyarán la ejecución metodológica serán *visuales* y *audiovisuales*. Entre los *recursos visuales* se cuenta con un módulo básico del Área de Lógico Matemática, asimismo las fuentes especificadas en las referencias bibliográficas y electrónicas. El Módulo cumple la función de medio divulgativo de los contenidos del área. En él se desarrolla didácticamente los contenidos centrales de lógico Matemática, en sus proposiciones centrales, aplicaciones y sistematizaciones. Los contenidos del Módulo registran los contenidos del sílabo. Entre los *recursos audiovisuales* se ordenan un conjunto de vídeos que permitan la ilustración y profundización temática.

VI. Evaluación

La evaluación en ***Lógico Matemática*** es cuantitativa y cualitativa .Lo cuantitativo es psicométrico, mide el grado de logro de los aprendizajes, poniendo énfasis en los resultados obtenidos. Lo cualitativo es psicosocial, se orienta a comprender los significados que el proceso de aprendizaje tiene para los sujetos participantes.

Dimensiones A evaluar	Estrategia de evaluación	Peso	Denominación
Conocimientos, habilidades y	Examen oral	1	EO

destrezas	Práctica calificada	1	PC
	Parcial 1	1	P
	Parcial 2	1	P
Tareas o Trabajo de investigación	Trabajo	1	T
Actitudes	Responsabilidad, Puntualidad y Participación	1	AC

- Evaluaciones programadas por la USS.

Son requisitos para ser evaluado y calificado:

- Asistencia obligatoria a sesiones teóricas y prácticas (90%).
- Participación activa y efectiva en las clases.
- Presentación y sustentación de trabajos individuales y grupales.

FÓRMULA PARA CALCULAR EL PROMEDIO.

Promedio de la Primera Mitad del Ciclo = P1
Promedio de la Segunda Mitad del Ciclo = P2
Promedio Final = PF

$$P1 = \frac{EO + PC + P + T + AC}{5} \qquad P2 = \frac{EO + PC + P + T + AC}{5} \qquad PF = \frac{P1 + P2}{2}$$

Promoción

La promoción en el área se da con la obtención de calificativo final aprobatorio. El calificativo mínimo de aprobación es 10,50. El estudiante con calificativo menor a 10,50 en el promedio final, tiene derecho a un examen de aplazados.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliaga Valdez, Carlos. *Matemáticas para Administración y Economía.*
Ayra Jadish C. *Matemáticas Aplicadas, a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales.*
Ayres, Frank. (1990). *Matrices y Determinantes*. Editorial McGraw – Hill. México.
Carmona y Pardo, Mario. *Matemáticas para Arquitectura.*
Espinoza Ramos, E. (2002). *Matemática Básica*. Editorial Servicios Gráficos JJ. Perú.
Espinoza Ramos. (2006). *Matemática Básica I.* Editorial J. J. Perú.
Ferrater Mora, José. *Lógica Matemática*.
Figueroa G. R. (2006). *Matemática Básica.* Ediciones San Marcos. Perú.
Garfunkel, Salomón. *Las Matemáticas en la vida cotidiana.*
Lehmann, Charles. (1999). *Geometría Analítica.* Editorial Harla. México.
Leithold. *Matemáticas previas al Cálculo: Funciones, Gráficas.*
Márquez de Candu M. (2001). *Probabilidades y Estadística*. Editorial Mc. Braw Hill. México.
Mode, E. (1999). *Elementos de Probabilidades y Estadística.* Editorial Reverte. México.
Moisés, Lázaro. (2007). *Matemática Básica Tomos I y II*. Editorial Moshera. Perú.
Morris, Kline. *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades.*

Moya, R. *Estadística Descriptiva*. Edit. Gemar _ San Marcos. Perú.
Stewart, James. *Primer curso de Lógico Matemática*.
Sullivan, M. (1999). *Pre Cálculo*. Editorial Prentice Hall. México.
Venero Baldeon, Armando. *Matemática Básica.*

VIII. DIRECCIONES DE PAGINAS WEB

http://www.rincondelcurioso.com/juegos/ingenio
https://www2.emate.ucr.ac.cr/~aema/Biografias.htm
http://www.satd.uma.es/matap/personal/garvin/05Alg02/node1.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_conjuntos 20Conjuntos/OpeCon.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Axioma
http://descartes.cnice.mecd.es/4b_eso/Inecuaciones/inecindex.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_cartesiano
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica