PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

TÍTULO

UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN TORNO A UNA PRÁCTICA DE PARACAIDISMO CON VELOCIDAD SUPERSÓNICA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

JIMMY LARRY MENÉNDEZ GIRÓN

ASESORA

CINTYA SHERLEY GONZALES HERNÁNDEZ

Diciembre, 2019

RESUMEN

El modelo educativo actual promueve un plan de enseñanza y aprendizaje basado en la resolución de problemas. Sin embargo, en este paradigma tradicional se presentan situaciones contextuales donde no se promueve la indagación tampoco un aprendizaje basado en preguntas, solo se presentan respuestas a cuestiones que los estudiantes no se formulan, quedando desplazados completamente por el aprendizaje receptivo en el que el profesor es el transmisor de conocimientos, con una enseñanza en la que no se *presenta la razón del estudio de las matemáticas.*

Considerando el marco teórico y metodológico de la Teoría Antropológica de lo didáctico, concretamente su método de análisis clínico didáctico, nos proponemos como objetivo analizar la implementación de una actividad didáctica, que generará un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), que permite concretar en aula el paradigma del cuestionamiento del mundo, que por su naturaleza diversa al paradigma tradicional, se presenta como un método alternativo para fomentar un aprendizaje y una enseñanza basada en la indagación. La *cuestión generatriz* que materializa el objetivo de investigación y con la que se da apertura al recorrido de estudio nace de un análisis de las prácticas de paracaidismo y específicamente de un salto de paracaidismo estratosférico, que parte con la cuestión*: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando se abre el paracaídas?* Con base a esta investigación se observó que en el REI la *cuestión generatriz* evolucionó a través de diferentes *cuestiones derivadas* que implicaron el uso de obras de distintas ramas de conocimiento, entre ellos la noción de derivada a partir de la articulación de la noción de tasa de variación media, la noción velocidad promedio y la noción del movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente variado, configurando de este modo un REI de tipo bidisciplinar, que se apoya en la Física, en la Matemática así como también en el contexto del paracaidismo.

Palabras clave: Recorrido de estudio e investigación, Teoría antropológica de lo didáctico, Derivada, Dialécticas.

ABSTRACT

The current educational model promotes a teaching and learning plan based on problem solving. However, in this traditional paradigm, contextual situations are presented where inquiry is not promoted, nor is question-based learning, only answers to questions that students do not formulate, being completely displaced by receptive learning in which the teacher is the transmitter of knowledge, with a teaching in which the reason for the study of mathematics is not presented.

Considering the theoretical and methodological framework of the Anthropological Theory of the didactic, specifically its method of didactic clinical analysis, we aim to analize the implementation of a didactic activity, which will generate a Study and Research Path (SRP) that allows to implement in the classroom the paradigm of the questioning of the world, which due to its nature different from the traditional paradigm, is presented as an alternative method to promote learning and teaching based on inquiry. The *generating question* that materializes the research objective and with which the study path opens is born from an analysis of skydiving practices and specifically from a stratospheric skydiving jump, which starts with the question: *How could it have been possible to determine from what height is it necessary to launch to reach the speed of sound? How does the speed vary during the descent until the parachute opens?* Based on this research, it was observed that in the SRP the *generating question* evolved through different *derived questions* that allowed the use of works from different branches of knowledge including the notion of derivative to emerge from the articulation of the notion of average variation rate, the notion of average velocity and the notion of uniform rectilinear movement, uniformly varied, thus configuring a SRP of a two-disciplinary type, which is based on Physics, Mathematics and in the context of skydiving.

Keywords: Study and Research Path, Anthropological Theory of the Didactic, Derivative, Dialectic.

DEDICATORIA

A Dios, por toda la fortaleza y paciencia que me ha dado.

A mi abuelita Natividad Vilchez, por sus oraciones desde el cielo.

A mi madre Magaly Girón, por todo su apoyo y aliento constante.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora Mg. Cintya Gonzales por su constante apoyo y paciencia en el desarrollo y culminación de la tesis.

A la Dra. Avenilde Romo por sus valiosos y pertinentes aportes en el proceso del proyecto.

Al Dr. Francisco Ugarte por sus sugerencias y observaciones que permitieron mejorar la investigación.

A la Dra. Cecilia Gaita, por toda la valiosa formación profesional y académica recibida.

A la Dra. Jesús Flores, la directora de la maestría, por su apoyo en mi formación didáctica.

A mi familia por su acompañamiento y comprensión ante mis recurrentes ausencias.

A mis queridos estudiantes del Bachillerato Internacional.

A mi buen y gran amigo Luis Cam por el apoyo que me brindó desde los inicios de estos estudios de posgrado.

A la línea de investigación de Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES

Desde diversas teorías o enfoques de la didáctica de las matemáticas, se han realizado numerosas investigaciones que estudian el problema didáctico en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en todos los niveles de enseñanza. Esta investigación pretende sumarse a esta lista de estudios desde el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), centrándose en el desarrollo del nuevo *paradigma del cuestionamiento del mundo* en contraposición al denominado por Chevallard (2015) *paradigma dominante de la visita de las Obras,* en el que los saberes a enseñar se muestran como obras valiosas y acabadas, que hay que admirar, aunque el sentido de estas para los alumnos sea muy escaso. El paradigma del “cuestionamiento del mundo”, por otro lado, se presenta como una alternativa de enseñanza-aprendizaje mediante cuestiones que puede subsistir en diferentes instituciones de enseñanza, en nuestro caso particular el Programa de Diploma (PD) del Bachillerato Internacional (IB), de tal modo que permita afrontar la problemática de dotar de sentido al estudio de las matemáticas, es decir, tener presente la “razón de ser” de los objetos de estudio.

La problemática que abordamos en general, es la forma de interpretar el proceso de estudio en nuestra cultura escolar. Concordamos con Chevallard, Bosch y Gascón (1997) cuando afirman que en la relación didáctica tradicional el trabajo matemático de los estudiantes no se toma en serio, es decir, no suele considerarse como un “verdadero” trabajo matemático, no se concibe la actividad del estudiante como el objetivo principal del proceso de estudio en términos del cual se establecería diferentes medios didácticos. Además, existe una dependencia del profesor al cual se le exige que actúe como matemático pero que solo satisface necesidades de origen didáctico.

Existe una problemática tanto en el rol de profesor de matemáticas como en el rol del estudiante, como respuesta a esa problemática en este trabajo proponemos y experimentamos un nuevo dispositvo de enseñanza denominado REI, en el cual se pretende cambiar el contrato didáctico de la enseñanza tradicional, y poder así observar cómo a través de este dispositivo los estudiantes formulan y responden sus propias cuestiones, y cómo evoluciona en el proceso de estudio, la responsabilidad y la autonomía de los estudiantes.

La investigación que presentamos se centró inicialmente en el estudio de los fenómenos didácticos ligados a la *derivada* en el IB, la cual fue evolucionando debido a las herramientas brindadas por el marco teórico y metodológico elegido. Revisando los trabajos de referencia realizados en el marco de la TAD, tales como, Garcia (2005) y Lucas (2015) observamos que la problemática es más general, la cual nos condujo a interesarnos en los procesos de modelización y en el estudio de las variaciones los cuales proveen de significado a las obras que emergieron como respuestas a cuestiones en el REI que experimentamos.

Adoptar el paradigma del cuestionamiento del mundo para la enseñanza, implica encontrar cuestiones de partida que sean lo suficientemente fecundas. Para poder generar estas, realizamos un análisis epistemológico que nos permita definir las bases de la construcción de la problemática, con la que posteriormente se invitará a los estudiantes a cuestionarse e investigar para encontrar respuestas de manera autónoma. En nuestro trabajo se analiza cómo un REI da soporte al aprendizaje de las matemáticas en un contexto bidiscilplinar, relacionando la matemática con la física. La elección del contexto extra matemático denominado *Un salto de paracaidismo supersónico*, se experimentó para dar cuenta qué condiciones y restricciones se presentan en el proceso de estudio, el cual analizamos su implementación.

En el primer capítulo se presenta la problemática en estudio y las investigaciones de referencia que sirven de apoyo para el desarrollo de esta investigación.

En el segundo capítulo se presentan el análisis epistemológico y ecológico del objeto matemático. El primero consistente en el estudio de las praxeologías que constituyen la noción de derivada desde su génesis y el segundo consistente en un estudio de las condiciones institucionales que restringen o posibilitan el desarrollo del sistema didáctico a uno propio del paradigma del cuestionamiento e investigación.

En el tercer capítulo se presentan los elementos teóricos de la TAD que nos resultan útiles para el estudio de la actividad matemática en cuestión. Elementos como, por ejemplo: la noción de praxeología, escala de niveles de codeterminación, recorrido de estudio e investigación, momentos de estudio y dialécticas o también conocidas como gestos didácticos.

En el cuarto capítulo, se presenta la metodología que guía el trabajo, además de la propuesta de diseño matemático que desencadenará el Recorrido de estudio.

Finalmente, en el quinto capítulo se da una breve descripción del dispositivo didáctico a implementar, las condiciones de la implementación, el desarrollo del mismo por tres equipos de alumnos del programa de Bachillerato Internacional y por supuesto, el análisis de la experimentación a partir de las dialécticas suscitadas en el trabajo grupal.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este primer capítulo, vamos a presentar la problemática de nuestro trabajo de investigación, partiendo con las principales investigaciones de referencia en torno a la implementación de un dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación, así como investigaciones en torno al objeto matemático la derivada. Seguido de la justificación, y finalizando con la formulación de la pregunta de investigación, junto con los objetivos generales y específicos que aspiramos conseguir.

1.1. Investigaciones de referencia

Recientemente, diversos estudios e investigaciones se han realizado con la finalidad de implementar diseños didácticos que involucran la modelización matemática en la formación de escolares y universitarios. Esta investigación pretende sumarse a esta lista de estudios apoyándose para ello en los siguientes antecedentes, muchos de los cuales se desarrollan en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). tales como la de Barquero (2009), García (2005), Lucas (2015), Parra y Otero (2017) y Rey (2016) que tienen como hilo conductor el uso del nuevo dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI) aplicado a la enseñanza en el nivel secundario. Por otro lado, presentamos investigaciones de carácter epistemológico como la de Contreras, Luque & Ordóñez (2003), Vrancken & Engler (2013) y Pino-Fan (2013).

Antecedentes relacionados al uso del REI

Entre las investigaciones en torno a la implementación del nuevo dispositivo didáctico denominado REI, podemos considerar en primer lugar a la de Barquero (2009) en la que desde la TAD, se centra en el estudio de la ecología de la modelización matemática (extra e intramatemática), es decir, el estudio de las restricciones que dificultan y de las condiciones que se requieren para que la *actividad de modelización* pueda vivir en una determinada institución, en su trabajo hace mención a que esta actividad se considera como una mera “aplicación de conocimientos preestablecidos”, por lo cual es una de las restricciones de la sociedad y de la escuela. Ya que la separación que existe entre las Matemáticas y las Ciencias Experimentales, hace que no se vea a la matemática como una herramienta para buscar respuestas a cuestiones que pueden aparecer en distintos ámbitos de la realidad. En su trabajo se describe los REI como modelo de referencia para el análisis, diseño y experimentación de organizaciones didácticas no “monumentalistas”, es decir, el paradigma de la visita de las obras. La autora desarrolló tres REI durante cuatro cursos académicos, los cuales se basaron en una cuestión generatriz en torno al estudio de la dinámica de poblaciones y desencadenó el estudio con modelos discretos, modelos matriciales y modelos continuos.

En nuestro trabajo estamos interesados en hacer vivir un REI bidisciplinar, en cuyo proceso de estudio sea evidente la relación de la física y la matemática, partiendo de un contexto extramatemático.

Respecto a la “modelización” la autora nos hace ver las diferentes connotaciones de esta noción en la comunidad investigadora. Por ejemplo, los ciclos de modelización de Blum & Leiβ(2007), el cual se muestra en la figura 1, y Blomhoj & Jensen (2003).

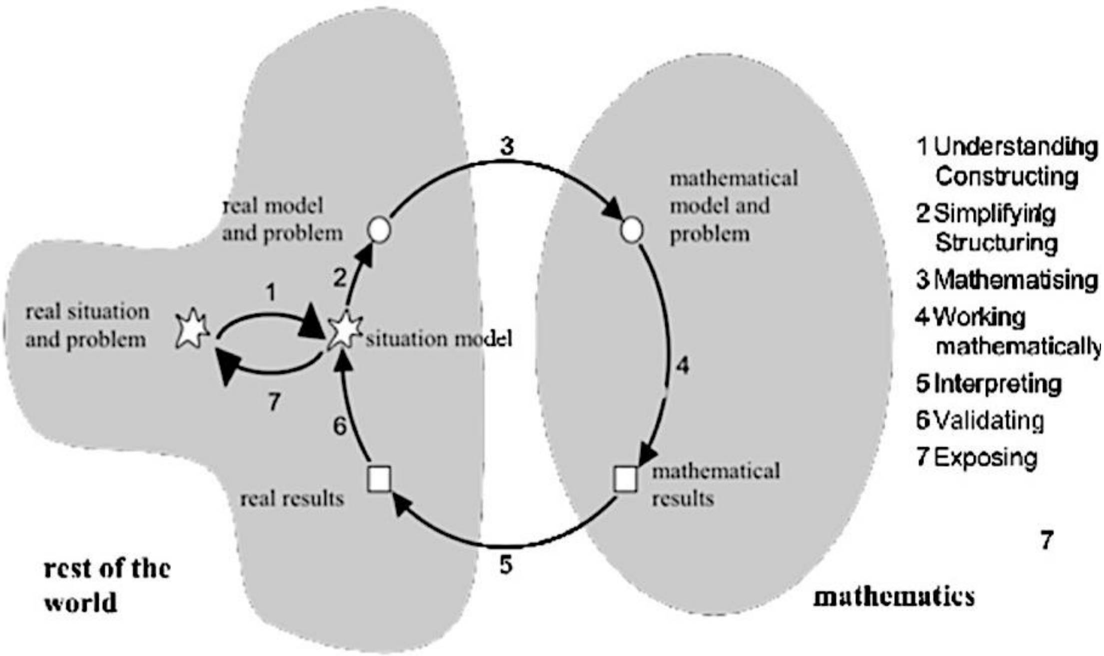


Figura 1: Fases del proceso de modelización Blum & Leiβ(2007)
Fuente: Barquero (2009, p.64)

Estos ciclos han sido muy bien aceptados dentro de la comunidad, además guardan cierta relación con los estadios propuestos por Chevallard (2004, citado en Barquero, 2009).

La autora nos muestra que, para la TAD, la “modelización” no es un proceso cerrado, por lo que habrá idas y venidas, es decir es un proceso continuo y progresivo. Por lo que se plantea una reinterpretación y reformulación para situarlo en un modelo epistemológico, en dos aspectos, uno incluye la *modelización intramatemática* en la noción de modelización y esta se interpreta como instrumento de articulación de la actividad matemática escolar. Aunque el modelo parta de un contexto extramatemático, como por ejemplo el salto de paracaídas, el proceso de la actividad de modelización incluye etapas en las que están presentes la modelización intramatemática.

Además, el proceso de modelización se decribe como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente (puntuales, locales, regionales) las cuales deben partir de cuestiones problemáticas, que constituyen la “razón de ser” de la construcción de las organizaciones matemáticas que se van a (re)construir (Barquero, 2009).

Por otro lado, tenemos la investigación de García (2005) que estudia el problema didáctico de “*la proporcionalidad*”, y que lo reformula en términos de la TAD como un *problema de desarticulación de las matemáticas escolares,* y más específicamente como un *problema de desarticulación de las relaciones funcionales en secundaria*. García plantea la necesidad de integrar la proporcionalidad en una organización matemática regional donde la relación de proporcionalidad se presente como una relación más de entre las posibles relaciones entre magnitudes, y concreta esta articulación mediante la construcción de un *Modelo Epistemológico de Referencia (MER) en torno a la modelización de sistemas de variación entre magnitudes.*

Este MER funciona como puente entre las organizaciones regionales y locales, y es a partir de éste que se da forma a un recorrido de estudio e investigación (REI) en la educación secundaria denominado “Los planes de ahorro”, que tiene las condiciones de “integrar la proporcionalidad en el universo de las relaciones entre magnitudes y de poner en evidencia el *carácter genético* que la *variación* debe tener en el estudio de las funciones en la Educación Secundaria” (García, 2005, p.342). La importancia de esta investigación también reside en que muestra detalladamente el camino metodológico de la TAD para abordar un problema didáctico como es el de la proporcionalidad, en nuestro caso sería el de la derivada.

Otra importante investigación de referencia es la de Lucas (2015), quien en sus estudios busca caracterizar la problemática asociada a la *razón de ser* del Cálculo Diferencial Elemental (CDE) en la enseñanza secundaria y universitaria, es decir, pretende investigar el conjunto de cuestiones y tareas cuyas resoluciones pueden darse solamente mediante el uso de las técnicas que forman parte del CDE, y que por tanto le darían a éste el *sentido* de su estudio en el bachillerato y en la universidad (Lucas, 2015).

La autora halla en la *modelización funcional* (MF) una posible razón de ser del CDE, es así como profundiza en las problemáticas que de una u otra manera restringen su desarrollo, tales como la *rigidez, la incompletitud relativa, y la desarticulación de las organizaciones matemáticas escolares*, para posteriormente construir un MER que hace posible vincular el desarrollo de la MF con el estudio del CDE. Este MER funciona como sistema de referencia en el cual se basa la construcción de diferentes recorridos matemáticos (RM) que posteriormente se concretan en el diseño y experimentación de *recorridos de estudio e investigación* (REI) que llegaron a ser experimentados con alumnos de un primer curso de CDE de una Licenciatura de Medicina Nuclear. La importancia de la investigación está en que detalla las condiciones que deben darse en la institución para poder experimentar un REI, las características de las unidades didácticas que surgen apoyadas en los RM y las características de los REIs aplicados en este contexto.

Por otro lado, Rey (2016) en su investigación denominada “Propuesta didáctica para la formación de profesores: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática”, tiene como principal objetivo implementar dos REIs como parte de una metodología que sirva de transición entre el MER tradicional, caracterizado por una enseñanza apoyada en el paradigma de “Visita de monumentos”, y un MER alternativo caracterizado por una metodología de enseñanza apoyada en el paradigma del Cuestionamiento del mundo. Estos dos REIs denominados “Montaña rusa” y “La camiseta de Luis Suárez” son planteados en un contexto de formación de futuros profesores (REI-FP), y su implementación cuenta con 6 fases, que constituyen una ruta para difundir estos dispositivos y conocerlos a través de diferentes roles:

aprendices matemáticos, docentes-diseñadores y docentes- implementadores (Rey, 2016).

Para poder atender a la transición deseada se deben hacer adaptaciones necesarias para que las actividades a realizar sean cercanas a los alumnos, esto no por la contextualización de los problemas, cosa ya propia de los REIs, sino más bien por la naturaleza cerrada de las preguntas a las que el alumno se encuentra acostumbrado. De ahí la necesidad que el primer REI “Montaña rusa” parta de cuestionamientos semiabiertos, y ya sea el segundo REI “La camiseta de Luis Suárez”, el que cuente con preguntas completamente abiertas, de tal manera que las praxeologías que el alumno despliegue sean tal y como el paradigma del cuestionamiento del mundo busca desarrollar.

Como última investigación, podemos mencionar a Parra y Otero (2017) que proponen y describen, desde el marco teórico de la TAD, un REI para la enseñanza de la derivada en el nivel secundario. El diseño didáctico que generará REI parte de una cuestión generatriz concerniente a la Microeconomía y tiene como objetivo construir y analizar las variaciones de un modelo afín de oferta y demanda, donde las ecuaciones dependen únicamente del precio del bien y de las cantidades de éste (Parra & Otero, 2017, p.65). Se espera que la resolución de la secuencia de preguntas conduzca al uso de las praxeologías relativas a la derivada.

Así mismo presentamos investigaciones desde otro marco teórico que ponen de manifiesto algunos fenómenos didácticos que son considerados en la investigación.

Antecedentes relacionados con la derivada

Contreras, Luque, & Ordóñez (2003) estudian las concepciones y los obstáculos epistemológicos correspondientes a las nociones elementales del Análisis Matemático: la continuidad y la derivada, a través del análisis de textos y de las respuestas dadas a un cuestionario. Sobre la derivada describe cuatro tipos de concepciones: la concepción de la derivada como pendiente de la recta tangente, como razón de cambio, la concepción de la derivada como función y la concepción numérica de la derivada. Entre las conclusiones obtenidas tras los resultados de la investigación, se tiene que el concepto de derivada de una función en un punto es el más desconocido por los alumnos después de la instrucción, a lo mucho adquieren la concepción de pendiente de la recta tangente, aunque sin asociarla a la idea de variación, y esto muchas veces debido a la *algebrización* que ha sufrido el concepto, siendo el alumno capaz de resolver problemas de mediana dificultad pero pocas veces llegan a comprender lo que construyen.

Vrancken & Engler (2013) hacen un análisis histórico epistemológico del objeto derivada en el que resaltan la importancia de las ideas que llevaron a Newton y Leibniz a la invención del cálculo. Entre las ideas desarrolladas destacan el estudio de la variación y el cambio, más específicamente el estudio del *cambio de posición* como parte de un estudio cinemático que supuso un gran progreso para el desarrollo del concepto de la derivada. Este artículo cobra importancia porque termina proponiendo la idea de considerar al estudio de la variación como un eje rector del que emerge la noción de derivada, destacando para ello el papel de la visualización y el manejo de las diferentes maneras de representación de las funciones.

Por otro lado, Pino-Fan (2013) en parte de su tesis doctoral desarrolla un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución de la derivada, el cual resulta de gran importancia porque desglosa los diversos significados que responden a la pregunta ¿qué es la derivada? En este estudio Pino-Fan llega a identificar nueve sistemas de prácticas que constituyen cada una un significado parcial que la noción de derivada ha adoptado a lo largo de su trayectoria epistemológica. Estas prácticas son: situaciones sobre la tangente en la matemática griega, situaciones sobre variación en la edad media, métodos algebraicos para hallar tangentes, concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes, las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos, métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes, el cálculo de fluxiones, el cálculo de diferencias y la derivada como límite.

Este estudio resulta importante porque permite identificar qué significados de derivada son típicamente priorizados en las instituciones y cuáles resultan apropiados para ser considerados en una intervención didáctica con alumnos de educación básica regular.

1.2. Justificación

En este apartado, se mostrarán las razones por las cuales es importante abordar el problema didáctico de la derivada a través de la implementación de un REI en un contexto de enseñanza del Bachillerato Internacional (IB). Para esto, nos valdremos básicamente de las diversas investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, que muestran la importancia de la enseñanza adoptando el paradigma del cuestionamiento del mundo y también de algunos documentos oficiales del Bachillerato Internacional, como son El Programa del Diploma: de los principios a la práctica, los Enfoques de Enseñanza y Aprendizaje del IB, la Guía de Matemáticas de Nivel Medio y los Informes Generales de Asignatura.

En primer lugar, resaltaremos que la implementación de los REI en la educación secundaria se ve respaldada por diversas investigaciones académicas que defienden el uso de este nuevo dispositivo didáctico y a través de él promueven un nuevo paradigma epistemológico.

Desde la didáctica de la matemática y precisamente desde el marco de la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD), Chevallard (citado en Bosch, García, Gascón, & Ruiz Higueras, 2006) caracteriza el problema por el que pasa la enseñanza de las matemáticas escolares, y entre los rasgos que menciona está el hecho que tradicionalmente el trabajo del profesor no llega a considerar los diversos *niveles de codeterminación didáctica* (civilización, sociedad, escuela, pedagogía, disciplina, área, sector, tema, cuestión), sino que se focaliza principalmente en los niveles de Tema-Cuestión, dejando que los niveles superiores queden determinados por los currículos, autoridades educativas y libros de texto. Esta situación conlleva a la pérdida de consciencia de cómo, por qué y para qué los temas y cuestiones matemáticas han sido considerados dentro del plan curricular, constituyéndose en *cuestiones muertas*, carentes de *sentido,* pues ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la escuela. A este fenómeno didáctico se le denominó fenómeno de *monumentalización* de las organizaciones matemáticas, y alude más específicamente a un modelo de enseñanza tradicional en la que los saberes a enseñar por los profesores se muestran como obras valiosas y acabadas, que hay que admirar, aunque el sentido de estas para los alumnos sea muy escaso (Bosch, *et al*, 2006).

Es así como la implementación de los REIs en la educación secundaria cobra importancia porque mediante el uso de estos dispositivos didácticos se puede enfrentar los fenómenos de *monumentalización del saber* y de la *pérdida de sentido* de las matemáticas que se aprecian en diversas instituciones educativas, concretando de esta manera el *Paradigma de la Investigación y Cuestionamiento del Mundo* (Chevallard, 2013).

En este sentido muchas investigaciones han estudiado la implementación de posibles REI en la enseñanza secundaria y universitaria. Parra y Otero (2017) caracterizan y clasifican 22 trabajos que se han realizado en torno a la enseñanza mediante un REI, de los cuales nombramos algunos trabajos relevantes realizados en el nivel secundario:

- Minet (2008) propone un REI para alumnos de segundo grado secundario (15 años) que moviliza praxeologías sobre optimización de funciones, relaciones de dependencia y variación.
- Gaud y Minet (2009); proponen un REI para estudiantes de segundo grado secundario sobre Geometría, y donde específicamente se pueden desplegar las nociones de triángulos semejantes, triángulos isométricos, círculos tangentes, propiedades de las transformaciones y sus demostraciones.
- Fonseca, Pereira y Casas (2010); diseñaron un REI que también refiere a optimización de funciones, aplicado inicialmente a estudiantes de Ingeniería Química y transpuesto después para ser aplicado a alumnos de secundaria.
- Ruiz Munzón (2010) propone un taller de modelización matemática que parte de una cuestión generatriz referida a los beneficios, producción y venta de camisetas, y que despliega el uso de funciones lineales y cuadráticas.
- Parra, Otero y Fanaro (2015) recogen una serie de indicadores didáctico-matemáticos a partir de la experimentación de un REI que trata sobre el equilibrio de mercado de un modelo de oferta y demanda.
- Lucas (2015), estudia la problemática del Cálculo Diferencial en el paso de la Secundaria a la Universidad y construye un MER a partir del cual elabora diversos REIs que experimenta con alumnos de primer ciclo de una Licenciatura de Medicina Nuclear.
- Llano y Otero (2015); diseñaron, implementaron y evaluaron un REI en torno a la multiplicación de funciones a alumnos de cuarto año de secundaria y que permitió el estudio de diversas organizaciones matemáticas sobre diversos tipos de funciones: polinómicas, racionales, radicales, trascendentes, etc.

- Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016) proponen un REI bidisciplinar, pues requieren el estudio tanto de física como de matemática. Se estudió cuestiones referidas al movimiento armónico simple, oscilaciones amortiguadas, funciones seno y coseno.

Por otro lado, dado que esta investigación se desarrollará en un ámbito del Bachillerato Internacional (IB), pasaremos a comentar algunas razones que justifican la implementación de un REI en un ámbito como éste.

Para empezar, es necesario resaltar la importancia que va cobrando el IB, y específicamente el Programa del Diploma (PD), en el sistema educativo peruano. Recientemente 23 Colegios de Alto Rendimiento (COAR) que forman parte de la administración estatal se han unido al PD del IB, sumando con ello un total de 63 colegios en nuestro país que siguen las directrices de este importante currículo internacional, que en solo las Américas cuenta con un total de 1767 colegios (IBO, Organización del Bachillerato Internacional, 2014). Este hecho es de gran relevancia porque muestra la confianza que en el Bachillerato Internacional depositan diferentes sistemas educativos nacionales, de los cuales el peruano no es el primero[1].

El Programa del Diploma: de los principios a la práctica, es uno de los principales documentos curriculares del IB, en el que se dilucida que el aprendizaje fomentado en el PD se distancia del aprendizaje netamente receptivo donde el profesor es un mero transmisor de conocimiento, más por lo contrario resalta la importancia de un aprendizaje basado en preguntas y contextos que resulten significativos para los estudiantes. Específicamente en el curso de Matemáticas, los lineamientos de este documento se concretan a través de la Guía de Matemáticas NM, en el cual se fomenta la enseñanza y el aprendizaje del curso mediante los procesos de **indagación matemática, utilización de modelos matemáticos** y el **uso de tecnología** (IBO, 2012).

Se puede llegar a considerar que mediante estas descripciones genéricas se pueden apreciar unas condiciones apropiadas para que un REI pueda ser implementado en el bachillerato.

[1] Ecuador mediante su Ministerio de Educación ha alcanzado la acreditación de 82 colegios para que puedan realizar el Programa del Diploma IB. Recuperado de: https://educacion.gob.ec/ecuador-celebra-la-acreditacion-de-56-colegios-publicos-al-programa-de-diploma-de-bachillerato-internacional/

Por otro lado, en el año 2014 el curso de Matemáticas NM inauguró una implementación de su currículo, en el cual la enseñanza del Análisis tomó una gran relevancia que se ve concretada en la cantidad de horas destinadas a su desarrollo. Esta área de Análisis tiene como objetivo principal "introducir conceptos y técnicas elementales del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones" (IBO, 2012) y se propone en el currículo según la clásica secuencia de enseñanza: límites, derivadas, integrales y aplicaciones.

El desempeño que muestran los alumnos en el aprendizaje de estas nociones, y en especial nuestro objeto de investigación –la derivada–, se puede encontrar en los Informes Generales de Asignatura, que son documentos oficiales del PD que recogen los comentarios de los evaluadores IB tras las evaluaciones internacionales.

La siguiente *Tabla 1* muestra algunos comentarios que los evaluadores informan a partir de los resultados de las pruebas escritas que rinden los alumnos candidatos a nivel mundial.

Tabla 1: Resumen de los informes generales de la asignatura de Matemáticas NM

Año		**Nociones relativas a la derivada que les resultaron difíciles a los alumnos en los exámenes IB**	**Número total de alumnos evaluados**
2012	Convocatoria de mayo	• Uso de la regla de la cadena • Cinemática como una aplicación del cálculo.	32 919
	Convocatoria de Noviembre	• Uso de la regla de la cadena • Cálculo de la velocidad máxima desde una función de desplazamiento.	3 552
2013	Convocatoria de Mayo	• Condiciones necesarias para que exista un punto de inflexión • Uso de la regla del producto.	36 331
	Convocatoria de Noviembre	• La diferencia entre una «función pendiente (de la recta tangente a la curva)» y la pendiente en un punto dado de la curva • Reglas de derivación: producto, cociente, de la cadena • Cinemática.	4 095
2014	Convocatoria de Mayo	• Representación gráfica de una función derivada	38 926
	Convocatoria de Noviembre	• Interpretación de gráficos de velocidad/tiempo y de Desplazamiento/tiempo.	4 093

2015	Convocatoria de Mayo	• Interpretar la relación entre una función, la gráfica de la derivada de la función y la integral de la derivada.	40 814
	Convocatoria de Noviembre	• Interpretar las características de una función, dado el gráfico de una derivada *f ´*. • Calcular la derivada de una función general usando la regla de la cadena.	4 646
2016	Convocatoria de Mayo	• Los problemas de cinemática • El uso de la regla de la cadena para hallar la derivada de una función que contiene una exponencial	44 045
	Convocatoria de Noviembre	• Interpretación gráfica de las derivadas • Derivación e integración de funciones trigonométricas • Comprensión del concepto de derivada como razón de cambio.	5 124
2017	Convocatoria de Mayo	• Resolver derivadas utilizando la regla del producto • Analizar el movimiento y la posición de una partícula, utilizando para ello la distancia o el desplazamiento en problemas de cinemática • El concepto de "razón de cambio"	46 659

Fuente: (Organización del Bachillerato Internacional, 2014)

Estos informes muestran una recurrente dificultad por parte de los alumnos para demostrar una sólida comprensión de la derivada y sus respectivas aplicaciones en cinemática; dificultades que van desde la falta del dominio algebraico de determinadas reglas de derivación hasta la falta de destreza en la interpretación de las características de una función *f* a partir de la gráfica de una función derivada *f'*. Se muestra de este modo que, en los alumnos del PD del IB el problema didáctico de la derivada es absolutamente patente del mismo modo como muchas de nuestras investigaciones de referencia, han venido estudiando en otros contextos. Es así que por las razones expuestas: el respaldo académico que presenta el REI, las condiciones favorables que muestra el IB y las dificultades que presenta la derivada para alcanzar un aprendizaje verdaderamente significativo, se considera pertinente elaborar una propuesta de enseñanza mediante un REI en torno a una situación de contexto sobre paracaidismo, que llegue a movilizar diferentes objetos matemáticos, entre ellos la derivada, que sirvan como medio de solución a la situación planteada.

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de investigación

Basados en estas reflexiones y en la problemática inicialmente mencionada, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué condiciones posibilitan y qué restricciones dificultan la implementación de un Recorrido de Estudio e Investigación en torno a una práctica de paracaidismo con velocidad supersónica con alumnos que cursan el 2do año de Bachillerato Internacional del Colegio Los Álamos?

Objetivo General:

Analizar las condiciones y restricciones para la implementación de un REI en torno a una práctica de paracaidismo con velocidad supersónica con alumnos que cursan el 2do año de Bachillerato Internacional del Colegio Los Álamos.

Objetivos específicos:

- Identificar las condiciones y restricciones institucionales para la implementación de una actividad didáctica para hacer vivir un REI.
- Identificar las praxeologías contextuales y matemáticas que se presentan como fundamento para el diseño y al hacer vivir un REI.
- Analizar el desarrollo del REI mediante el funcionamiento de las dialécticas del estudio-investigación, individuo-colectivo y media-medio.

CAPÍTULO II: ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO E INSTITUCIONAL

En este capítulo presentamos un estudio histórico epistemológico de la función derivada, con la finalidad de identificar las situaciones problemáticas que contribuyeron en la génesis de esta noción y que por tanto pueden llegar a constituir una posible *razón de ser* de su estudio en el bachillerato. Esto a través de la construcción de una cuestión matemática que para ser respondida despliegue un proceso de estudio que movilice el uso de la derivada sin, por ello, restringir la emergencia y el correspondiente estudio de otros objetos matemáticos y extramatemáticos. Junto a ello, también presentamos un estudio institucional de la derivada para considerar las restricciones ocasionadas por la organización matemática propias del modelo epistemológico dominante.

2.1 Análisis histórico-epistemológico: De los griegos a los fundadores del Cálculo Infinitesimal

Han tenido que transcurrir muchos siglos para que el concepto de derivada llegue a constituirse como un objeto matemático bien definido tal y como lo conocemos ahora en la actualidad. Y es que para ello resultaba indispensable que las diferentes nociones involucradas como tangente, variación continua, infinitesimal y luego límite se desarrollen lo suficiente para que conjuntamente permitan la emergencia de la noción de derivada.

En esta sección nos detendremos en el estudio de la evolución conceptual que ha experimentado la noción de derivada a lo largo de la historia, fruto del trabajo matemático realizado desde los destacados estudiosos griegos hasta los mismos fundadores del Cálculo infinitesimal: Newton y Leibniz.

La primera civilización que experimentó una primera aproximación a los elementos que llegarán a constituir la noción de la derivada, fue la civilización griega, la cual destaca enormemente al dejar un enorme legado de tratados geométricos, y de situaciones problemáticas que dieron pie a un primer acercamiento a nociones como el infinito. En este sentido, destaca el filósofo Zenón, quien, al cuestionar al pitagórico

Demócrito y su teoría atómica de los indivisibles, plantea una serie de paradojas como la de *Aquiles y la tortuga* y de *la flecha que vuela*, que refieren a la idea de infinito y de las cantidades infinitesimales, y con las que Zenón intenta resaltar la naturaleza continua del espacio y el tiempo (Pérez, 2009). Unido a él, también destaca el filósofo Heráclito al tratar problemas relacionados con el movimiento, la continuidad y el infinito, que sirvieron para el estudio cualitativo del movimiento de los cuerpos hecho por Aristóteles (Vrancken & Engler, 2013). Junto con ellos destacan con brillantez los griegos Euclides, Apolonio y Arquímedes que, al buscar resolver problemas relacionados con el trazado de rectas tangentes en sus trabajos de geometría, terminaron introduciendo y desarrollando significativamente la noción de recta tangente. Las inquietudes de estos matemáticos tienen destacada importancia porque abrieron camino a una serie de problemáticas que no llegaron a ser resueltos sino hasta pasado muchos siglos.

Después de los griegos, no es sino hasta la edad media donde nuevamente emergieron nociones cercanas a la derivada, entre ellas la noción de variación continua de cantidades, que fue abordada inicialmente en las universidades de Oxford y París, dos de los principales focos científicos de la época (s. XIII). Aquí, a partir de los estudios cualitativos de Aristóteles, los filósofos escolásticos abrieron camino al estudio cuantitativo de diferentes fenómenos, entre los que destaca principalmente el estudio del movimiento local no uniforme, empezando a mostrar menos interés en el por qué suceden los cambios, y más en el cómo suceden estos. También estudiaron fenómenos sujetos al cambio tales como el calor, la densidad, la luz, la velocidad denominados *cualidades* o *formas*, que a su vez pueden caracterizarse por tener distintos grados de *intensidad o latitud*. Estas *formas* eran cualquier cantidad variable de la naturaleza y la *intensidad de una forma* era el valor numérico que experimentaba esta forma en relación a otra forma invariable como el tiempo, la distancia o cantidad de materia. En Oxford los estudios tuvieron un carácter más cinemático-aritmético, mientras que en París tuvieron un carácter más gráfico-geométrico (Vrancken & Engler, 2013). El resultado de los estudios sobre movimiento hechos por los filósofos del Colegio de Merton en Oxford, fue la conocida *Regla de Merton* de aceleración uniforme, que enuncia lo siguiente:

> *"Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total* ***s*** *es tal como aquella que se tendría durante el mismo*

intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial v_o y su velocidad final v_f (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo). Esto es $s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t$, en donde t es la longitud del intervalo considerado." (Cantoral y Farfán, 2004, citado en Pino Fan, 2013, p. 76)

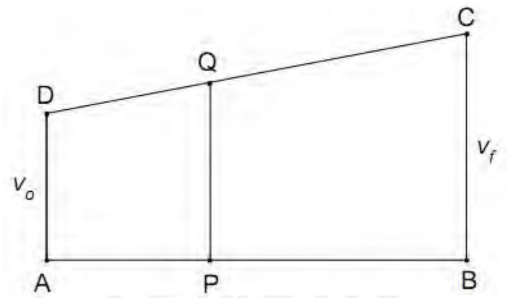


Figura 2: Demostración geométrica de la Regla de Merton hecha por Oresme
Fuente: Pino-Fan (2013, p.76)

Posteriormente con las argumentaciones verbales y los recursos geométricos del matemático Nicolás Oresme (1323-1382) los estudios sobre la intensificación y disminución de formas y cualidades alcanzaron una mayor transparencia y comprensión, allanando el camino para los posteriores estudios cinemáticos hechos por Galileo. Por ejemplo, en la *Figura 2* el segmento AB representa el intervalo de tiempo de duración de un movimiento, los segmentos verticales representan las intensidades de la forma (velocidades instantáneas), siendo específicamente AD la velocidad inicial, BC la velocidad final y PQ la velocidad en el instante de tiempo P. Ya que los extremos superiores de las intensidades de la forma definen una línea recta oblicua, entonces se está representando una variación uniformemente diforme. Termina definiéndose entonces un trapecio cuya área resulta identificándose con la expresión enunciada en la Regla de Merton.

Vrancken & Engler (2013) muestran un grupo de figuras que ilustran geométricamente las distintas configuraciones de movimientos que estudió Oresme: Las uniformemente uniformes (asociadas a un movimiento con velocidad constante), las uniformemente diformes (movimiento uniformemente acelerado) y las diformemente diformes (movimientos con aceleración no constante).

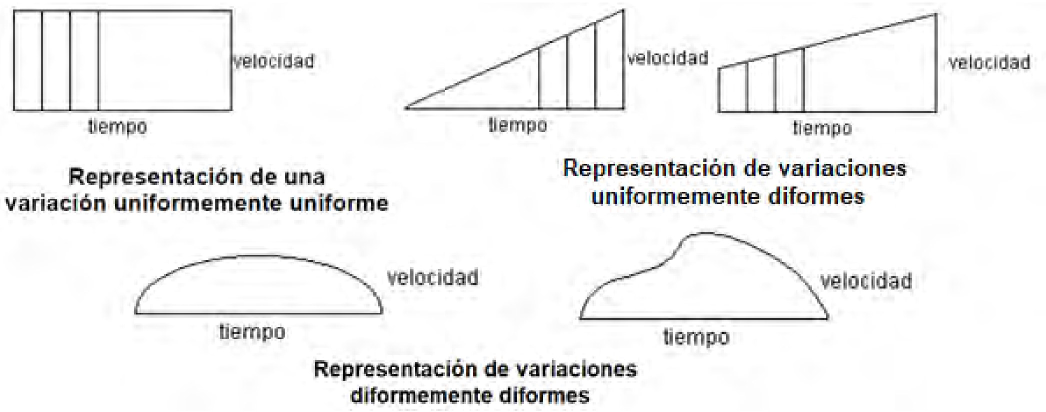


Figura 3: Representación de variaciones de diferente tipo.
Extraído y editado de: Vrancken & Engler (2013, p.59)

De los trabajos de Oresme “sobre el movimiento se puede desatacar la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo” (Pino-Fan, 2013, p. 79).

Oresme resalta en este proceso epistemológico al menos por cinco ideas innovadoras, en palabras de González (1992):

- *La medida de diversas variables físicas a través del uso de segmentos*
- *Algún tipo de relación funcional entre variables*
- *Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales*
- *La constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo.*
- *Una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.*

Posteriormente, los trabajos de Kepler destacan por el empleo de un método para resolver situaciones relacionadas a optimización, y que constituyen un antecedente relevante al tratamiento de la derivada desde este significado de máximos y mínimos. Es en el siglo XVII donde se dieron las aportaciones más relevantes para la génesis de la noción de derivada, empezando con Galileo (1564-1642) que se interesa por abordar el estudio del movimiento y la rapidez, y principalmente el problema de la caída de los cuerpos, en el que Galileo, no buscó hallar por qué caen los cuerpos, sino cómo caen, es decir de qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo y el espacio recorrido (Vrancken & Engler, 2013). Es así que Galileo, partiendo de las ideas de Oresme sobre el movimiento, enuncia en su libro *Dos nuevas Ciencias* el siguiente teorema*:*

> *El tiempo en que cualquier espacio es atravesado por un cuerpo que empieza en reposo y es uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que ese mismo espacio se cruzaría por el mismo cuerpo que se mueve a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta y la velocidad justo antes de que la aceleración empezara* (Carrasco, 2005, como se citó en Vrancken & Engler, 2013, p.60)

Los avances conseguidos en esta época resaltan por la relación establecida entre las nociones de geometría y el estudio de movimiento, así como el desarrollo de las nociones de variación y cambio como abstracciones de fenómenos de la realidad.

Por otro lado, Descartes (1596-1650) destaca contundentemente al desarrollar tres métodos para calcular normales que son equivalentes para calcular tangentes, de los cuales el tercero es el más cercano a la actual noción predominante de derivada: “la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero” (Pino-Fan, 2013, p. 80). A Descartes lo sigue Fermat con su método de los extremos, luego Roberval con su idea intuitiva de movimiento instantáneo, Torricelli con su concepción dinámica de tangente y Barrow con su método de tangentes.

Se tiene en cuenta una mención especial para Barrow, porque fue quien estuvo más cerca de fundar el cálculo; sin embargo, el uso predominante de la geometría sintética en sus trabajos le impidió desarrollar el enfoque algorítmico indispensable para abordar el cálculo infinitesimal. Aunque intuitivamente desarrolló un conjunto de técnicas infinitesimales que encuentran posterior sustento en la idea de límite (Pino-Fan, 2013).

Todas estas aportaciones estrechamente entrelazadas a lo largo de la historia fueron el “caldo de cultivo” para la fundación del *cálculo infinitesimal* efectuado por Newton y Leibniz. Estos dos grandes matemáticos, fueron los que llegaron a elaborar una serie de “procedimientos y simbolismos algebraicos que hicieron posible ofrecer un tratamiento unificado de los diversos métodos infinitesimales desarrollados anteriormente por sus predecesores mediante un método algorítmico simple y general” (Viñuela Villa, 2012).

El método potente con el que Newton aporta en la fundación del Cálculo es el denominado *Método de las fluxiones,* escrito en 1671 y publicado en 1736, en el cual introduce el concepto de *fluente* (x, y, z) refiriéndose con él a las cantidades que cambian aumentadas gradualmente y el concepto de *fluxión* $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ refiriéndose con él a la velocidad con las que estas cantidades cambian (Collette, 1993 como se citó en Pino-Fan, 2013, pág. 94). "Así mismo Newton llamó *momento de la fluente* a la cantidad infinitamente pequeña que varían en una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *o*. Por, tanto la velocidad de $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña *o, es decir,* $\dot{x}o$, representa el momento de una cantidad cualquiera *x"* (Pino-Fan, 2013, p.95). Esto queda ilustrado en el siguiente ejemplo de Wussing y Arnold (1989, como se citó en García, Moreno, Badillo, & Azcárate, 2011, p. 142)

> Se considera la diferenciación de $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, donde hay que pensar en x e y como variables dependientes; la variable independiente es el tiempo.
>
> En Newton se lee:
>
> Dada ahora una ecuación cualquiera $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, se sustituye x por $x + o$ e y por $y + o$; resulta entonces
>
> $$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - ax^2oo + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0$$
>
> Por hipótesis ahora es:
>
> $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, que por consiguiente se anula. Se dividen por ***o*** los términos que subsisten. Quedan
>
> $$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}ox + \dot{x}^3o^2 - 2a\dot{x}x - ax^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0$$
>
> Pero como se había supuesto que ***o*** es infinitamente pequeño y que representa los momentos de las cantidades, los términos que están multiplicados por ***o*** no serán nada en comparación con los restantes.
>
> Por eso los desprecio y queda
>
> $$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

En esta resolución se puede apreciar con mayor claridad la emergencia de la noción de derivada, aquí expresada como *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las *fluentes*; y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del cálculo de fluxiones, son las ahora llamadas diferenciales *dx* y *dy* surgidas en el cálculo diferencial de Leibniz (Pino-Fan, 2013).

Por lo contrario, el enfoque que desarrolló Leibniz se caracteriza por ser más geométrico, permitiéndole junto con su teoría de sumas y diferencias de infinitesimales llegar a resultados similares a los de Newton.

Bos (1984, como se citó en Pino-Fan, 2013, p.96) explica que fueron tres ideas fundamentales las que posibilitaron que Leibniz desarrollara su propia Matemática infinitesimal. La primera idea que potenció la invención del cálculo fue su concepción filosófica que lo movía a construir un lenguaje simbólico universal que permita expresar las argumentaciones y razonamientos, de modo que todas las consecuencias lógicas que se pudieran establecer, procedieran directamente de las mismas operaciones hechas con dicha notación simbólica.

La segunda idea fundamental hace referencia a las sucesiones de diferencias. Estudiando las sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y las respectivas sucesiones de diferencias asociadas $b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3,\ b_3 = a_3 - a_4, \ldots$ Leibniz cayó en la cuenta de la siguiente relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

Lo cual facilita enormemente sumar las sucesiones de diferencias. Es a partir de este descubrimiento que Leibniz obtiene una primera conclusión, "el formar sucesiones de diferencias y sucesiones de sumas son operaciones inversas una de la otra" (Pino-Fan, 2013, p. 96)

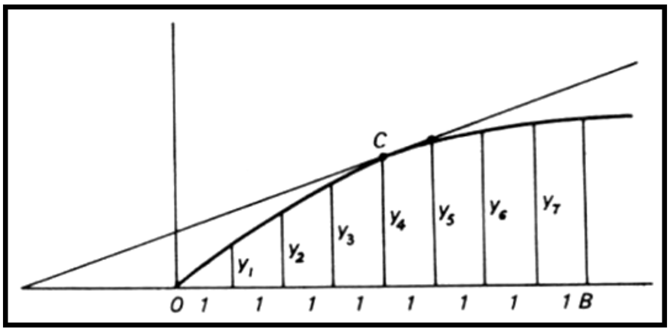


Figura 4: Sucesión de ordenadas equidistantes

Fuente: Pino-Fan (2013, p.97)

La curva en la *Figura 4* muestra una sucesión de ordenadas “*y”* equidistantes entre sí por una distancia de 1 unidad. Lo cual permite, por una parte, que la suma de las ordenadas nos dé una aproximación de la cuadratura de la curva, y por otra, que la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos dé una aproximación de la pendiente de la tangente. Leibniz dedujo que, si esta unidad de distancia fuese cada vez más pequeña, *infinitamente pequeña,* la aproximación sería cada vez más precisa, de tal manera que la cuadratura de la curva resultaría igual que la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de las ordenadas consecutivas.

La tercera idea fundamental es la consideración del triángulo diferencial. Leibniz observó que el infinitamente pequeño triángulo *cc’d* situado en la curva se podría considerar semejante a los triángulos formados por la ordenada, la normal, y la subnormal o la ordenada, la tangente y la subtangente.

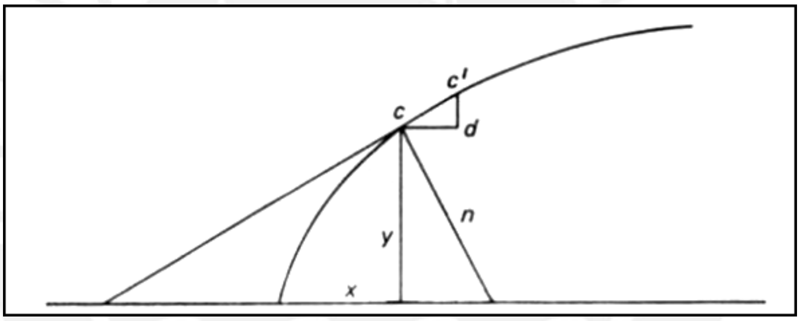


Figura 5: Triángulo diferencial de Leibniz
Fuente: Pino-Fan (2013, p.97)

Es por esta trayectoria de deducciones que Leibniz termina fundando su *Cálculo diferencial*, y proporcionando con él una rica notación simbólica y una serie de fórmulas, que hasta ahora conocemos y sirven “para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, y todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión” (Pino-Fan, 2013, p. 98).

Estos son los principales conceptos que llevaron a configurar la noción aún informal de derivada. Luego la necesidad de una fundamentación rigurosa de esta noción conllevó al desarrollo de la definición de la derivada como límite tal y como típicamente se conoce hoy en día.

Pino-Fan (2013) apoyándose en la noción de *configuración epistémica* llega a identificar 9 sistemas de prácticas que constituyen 9 significados parciales de la noción derivada, las cuales las podemos apreciar en la *Tabla 2*.

Tabla 2: Significados parciales de la derivada (Pino-Fan, 2013)

La tangente en la matemática griega (CE1)	**Sobre la variación en la edad media (CE2)**	**Métodos algebraicos para hallar tangentes (CE3)**
Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE4)	**Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos. (CE5)**	**Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE6)**
El cálculo de fluxiones (CE7)	El cálculo de diferencias (CE8)	La derivada como límite (CE9)

De estas 9 configuraciones epistémicas, las seis primeras se pueden considerar como sistemas de prácticas parciales primarios, de los cuales las CE1, CE3, y CE6 se pueden agrupar por guardar cierta similitud al abordar situaciones problemas sobre tangentes en general, mientras que las configuraciones CE2 y CE4 se pueden agrupar por abordar situaciones alusivas a la variación y velocidades. Un grupo aparte de prácticas es el formado por la CE5 que aborda situaciones alusivas a máximos y mínimos (Pino-Fan 2013). Entonces, vemos que el objeto derivada surge o emerge a partir de seis sistemas de prácticas primarios, los cuales a su vez se pueden agrupar en tres subsistemas genéricos.

“Las configuraciones asociadas a dichos sistemas de prácticas primarios, dan paso a nuevos sistemas de prácticas en los cuales se activan CE7 y CE8, las cuales alcanzan justificaciones formales en CE9. […] La consideración de los diferentes elementos pertenecientes a las configuraciones y sus relaciones, son las que en definitiva conforman el significado epistémico global de la derivada” (Pino-Fan, 2013, p. 131).

Para nuestra investigación resultan de gran relevancia el segundo subgrupo de prácticas primarias, conformado por las situaciones alusivas a la variación y velocidades, ya que permitirían diseñar una actividad que podrá engendrar un REI bidisciplinar donde se articule la física y la matemática.

2.2 Análisis institucional

Resulta importante desde el ámbito téorico de la TAD hacer un estudio de los elementos institucionales materializados en los documentos curriculares y los libros de texto y su relación con el objeto matemático de interés para, de este modo identificar las condiciones y restricciones que estos puedan suponer para el desarrollo de un sistema didáctico con las características del Paradigma de la Investigación y Cuestionamiento del Mundo tomando en cuenta la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación y diseño.

2.2.1 Análisis del currículo del Programa del Diploma IB

El Programa del Diploma: de los principios a la práctica (2015), es uno de los principales documentos curriculares que, desde el *nivel pedagógico de co-determinación didáctica*, describen los principios del programa y ofrece los lineamientos para la enseñanza y el aprendizaje en el contexto del Programa del Diploma (PD) del Bachillerato Internacional (IB):

> *"La enseñanza y el aprendizaje en el IB surgen de una concepción de la educación que celebra las numerosas formas en que las personas trabajan juntas para construir significado y comprender el mundo. Representado como una interacción entre el planteamiento de preguntas (indagación), el trabajo práctico (acción) y el pensamiento (reflexión), este enfoque constructivista fomenta aulas abiertas donde se valoran las opiniones y perspectivas diferentes. La educación del IB capacita a los jóvenes para el aprendizaje durante toda la vida, tanto de forma independiente como en colaboración con otras personas. Esta educación prepara a la comunidad de aprendizaje para abordar desafíos globales complejos mediante una experiencia educativa dinámica encuadrada en la indagación, la acción y la reflexión"* (IBO,2015a).

En estas líneas se presenta un programa que, desde sus fundamentos, se aleja del aprendizaje netamente receptivo donde el profesor es un mero transmisor de conocimiento, más por lo contrario resalta la importancia de un aprendizaje basado en preguntas y contextos que resulten significativos para los estudiantes. El PD es partidario de un aprendizaje y una enseñanza basada en la indagación, pero sin llegar a adoptar un método en particular para lograrlo, por lo que cada institución educativa es libre de elegir el método que encuentre idóneo para ejecutar esta pedagogía teniendo en cuenta lo esencial: que en el aula los alumnos indaguen, busquen la información que les resulte necesario y construyan su propia comprensión tantas veces como sea posible (IBO, 2015a).

Ahora bien, la enseñanza y el aprendizaje a efectuar en las aulas debe ser coherente con estos principios arriba delinieados. Es así que el PD del IB a su vez establece unos enfoques de enseñanza y aprendizaje que las prácticas docentes deben tener muy en cuenta. Los enfoques del aprendizaje del IB sugieren el desarrollo de cinco categorías de habilidades clasificadas de la siguiente manera: habilidades de pensamiento, de comunicación, sociales, de autogestión y de investigación. Por otro lado, los enfoques de enseñanza del IB sugiere tener en cuenta 6 principios pedagógicos importantes: la enseñanza IB está basada en la indagación, en la comprensión contextual, se desarrolla en contextos locales y globales, se centra en el trabajo en equipo y en la colaboración eficaces, es diferenciada y está guiada por la evaluación formativa y sumativa (IBO, 2015b).

Estas condiciones génericamente mencionadas muestran una notoria cercanía entre las características propias de una Pedagogía de Investigación y Cuestionamiento del Mundo y las características pedagógicas propuestas por el Programa del Diploma.

Análisis del curso de Matemáticas Nivel Medio

El currículo del programa de Bachillerato Internacional propone un plan de estudios de Matemática que cada institución debe adaptar según la realidad educativa nacional, regional e institucional en particular. En lo que respecta a la enseñanza del Análisis en general, y del cálculo diferencial en particular, el Currículo Nacional Peruano no tiene planificado desarrollar estos temas, es así que los lineamientos planteados desde el plan curricular internacional no encuentran dificultad alguna respecto a la adaptación como llega a ocurrir con otros contenidos.

De manera general podemos decir, que en la Guía de Matemáticas NM, los lineamientos del currículo se concretan en el impulso de la enseñanza y aprendizaje del curso mediante los procesos de indagación matemática, utilización de modelos matemáticos y uso de tecnología (IBO, 2012). Según *el nivel de co-determinación disciplinar*, podemos decir que la disciplina identificada con el curso de Matemática

Nivel Medio se estructura de manera resumida según el programa de estudios mostrado en la *Tabla 3*.

Tabla 3: Resumen del programa de estudios de Matemáticas NM (IBO, 2012).

Componente del programa de estudios	**Horas lectivas**
	NM
Todas las unidades son obligatorias. Los alumnos deberán estudiar todos los temas de cada una de las unidades del programa de estudios que se especifican en esta guía. Los alumnos también deben estar familiarizados con los temas que se mencionan en la sección de conocimientos previos.	
Unidad 1: Álgebra	**9**
Unidad 2: Funciones y ecuaciones	**24**
Unidad 3: Funciones circulares y trigonometría	**16**
Unidad 4: Vectores	**16**
Unidad 5: Estadística y probabilidad	**35**
Unidad 6: Análisis	**40**
Exploración matemática La evaluación interna en Matemáticas NM es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas.	**10**
Número total de horas lectivas	**150**

Los subsiguientes niveles de co-determinación en los que nos enfocaremos son: el nivel de *sector* identificado con la unidad de Análisis, y el nivel de *tema* identificado principalmente, pero no exclusivamente, con el *tema* de derivada. La organización matemática local de la que forma parte este tema, se encuentra descrita detalladamente en la *Tabla 4* mediante una extensa secuencia de subtemas que abarcan contenidos tanto de Cálculo diferencial como de Cálculo integral.

Acompañada a esta información, el plan de estudios también muestra determinados contextos extra-matemáticos que sirven de aplicación denominadas “vínculos” (*Figura 6*), con los que el estudio de determinados contenidos de Matemática puede conectarse con otras disciplinas. Sin embargo, en la práctica estos vínculos no llegan a reestructurar la modalidad clásica con la que se estudia la matemática, y concretamente el cálculo diferencial, sino que terminan siendo usados como una conexión o aplicación muchas veces superficial y anecdótica.

Tabla 4: Contenidos de la Unidad 6 extraídos del Programa de Estudios (IBO, 2014).

Unidad 6: Análisis	**40 horas**
6.1	• La idea informal de límite y convergencia • Notación de límite • Definición de derivada, a partir del concepto, como $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ • Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables. • Tangentes, normales y sus ecuaciones. • **No se requiere:** Métodos analíticos para el cálculo de límites
6.2	• Derivada de: $x^n (n \epsilon Q), \operatorname{sen} x, \cos x, \tan x, \mathrm{e}^x, \ln x$. • Derivada de la suma y del producto por un escalar de estas funciones • Regla de la cadena para la composición de funciones • Regla de producto y del cociente • Derivada segunda • Extensión a derivadas de orden mayor
6.3	• Puntos máximos y mínimos locales • Comprobación de máximos y mínimos • Puntos de inflexión con pendiente nula y no nula • Comportamiento de los gráficos de las funciones, incluida la relación entre los gráficos *f, f'* y *f''*. • Optimización • Aplicaciones • **No se requiere:** Puntos de inflexión donde *f''(x)* no está definida.
6.4	• La integral indefinida como primitiva (antiderivada) de una función • Integral indefinida de x^n $(n \epsilon Q), \operatorname{sen} x, \cos x, \frac{1}{x}$ y e^x. • Funciones compuestas de las anteriores con la función lineal $ax + b$ • Integración por comparación o sustitución en la expresión $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{dx}$
6.5	• Integración con una restricción para determinar el término constante • Integrales definidas, tanto de forma analítica como haciendo uso de la tecnología • Cálculo de áreas bajo curvas (entre la curva y el eje x) • Cálculo de áreas entre curvas • Volúmenes de revolución alrededor del eje x
6.6	• Problemas de Cinemática relativos al desplazamiento *s*, la velocidad *v*, y la aceleración *a*. • Distancia total recorrida.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
6.1	Idea informal de límite y convergencia	Ejemplo: 0,3; 0,33; 0,333; ... converge a $\frac{1}{3}$. Se debe hacer uso de la tecnología para explorar el concepto de límite, de forma numérica y gráfica.	**Aplicación:** Economía 1.5 (costo marginal, ingreso marginal, beneficio marginal) **Aplicación:** Química 11.3.4 (interpretación de la pendiente de una curva)
	Notación de límite	Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$ Relacionar con las series geométricas infinitas del	**Objetivo general 8:** debate sobre si fue Newton o Leibnitz quien descubrió ciertos conceptos del cálculo

Figura 6: Aplicaciones sugeridas en el plan de estudios
Fuente: Bachillerato Internacional (2012, p.36)

La extensión de tiempo destinada para el desarrollo de esta unidad, puede fungir como una restricción que dificulte la implementación de nuestro dispositivo didáctico, ya que el Programa Internacional exige cubrir todos los contenidos estipulados en el plan de estudios y específicamente, los correspondientes a la unidad de Análisis. Sin embargo, existe una cierta flexibilidad por parte de la institución al permitir disponer de un limitado tiempo adicional a las 40 horas lectivas para desarrollar la experimentación con un tanto de holgura.

Ahora bien, también identificamos unos objetivos de evaluación del curso de Matemáticas que concretan los lineamientos curriculares del Programa y que muestran puntos de encuentro concretos con la Pedagogía de la Investigación y Cuestionamiento del Mundo, materializada en el desarrollo de un REI. Estos objetivos se presentan como condiciones que posibilitan la implementación de REI en la institución seleccionada. Los objetivos de evaluación estipulados por el IB son los siguientes:

“Objetivos de evaluación:

La resolución de problemas es fundamental en el aprendizaje de matemáticas, e implica la adquisición de destrezas y conceptos matemáticos en una amplia variedad de situaciones, incluidos los problemas que no son de rutina, los problemas abiertos y los problemas de la vida real. Tras haber completado el curso de Matemáticas NM del Programa del Diploma, se espera que los alumnos demuestren lo siguiente:

1. *Conocimiento y comprensión: recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de los hechos, los conceptos y las técnicas matemáticas en una diversidad de contextos conocidos y desconocidos*

2. *Resolución de problemas: recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de las destrezas, los resultados y los modelos matemáticos, tanto en contextos reales como abstractos, para resolver problemas*
3. *Comunicación e interpretación: transformar en matemáticas contextos realistas comunes; hacer comentarios sobre el contexto; dibujar aproximadamente o con precisión diagramas, gráficos o construcciones matemáticas tanto en papel como utilizando medios tecnológicos; registrar métodos, soluciones y conclusiones utilizando notación estandarizada*
4. *Tecnología: utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas*
5. *Razonamiento: elaborar argumentos matemáticos mediante el uso de enunciados precisos, deducciones lógicas e inferencia, y mediante la manipulación de expresiones matemáticas*
6. *Enfoques basados en la indagación: investigar situaciones desconocidas, abstractas y concretas, que conllevan la organización y el análisis de información, la formulación de conjeturas, la extracción de conclusiones y la comprobación de su validez"* (IBO, 2012).

2.2.2 Análisis de los libros didácticos

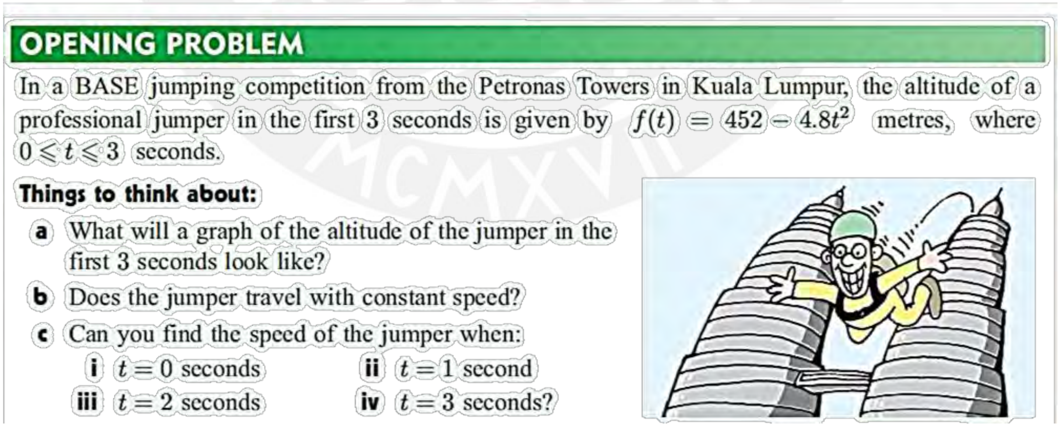
A fin de realizar el análisis institucional de los libros de texto hemos seleccionado un par de libros editados especialmente para el desarrollo del programa de Diploma de Bachillerato Internacional (IB) y que son típicamente usados por las instituciones educativas que imparten este programa, y muy concretamente por la institución que participa de nuestra investigación.

Tabla 5: Libros de texto analizados en la investigación

Libros de texto analizados	**Referencia del libro** **Autor(es), fecha de publicación, título, edición, lugar y editorial**
Libro 1 (LT1)	Buchanan, L., Fensom, J., Kemp, E., La Rondie, P., & Stevens, J. (2015). *Matemáticas Nivel Medio.* (F. Valiño, Trad.) Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.
Libro 2 (LT2)	Haese, R., Haese, S., Haese, M., Mäenpää, M., & Humphires, M. (2012). *Mathematics for the international student. Mathematics SL* (3ra ed.). Adelaide, Australia: Haese Mathematics.

Identificamos que ambos libros abordan el tema de derivadas con diferente tipo de distribución. Para empezar el LT1 desarrolla el tema de cálculo diferencial a lo largo de dos capítulos discontinuos, mientras que el LT2 hace uso de 4 capítulos. En el ejemplar LT1, el capítulo parte nombrando brevemente los conocimientos previos requeridos para iniciar el estudio de la derivada (factorización, expansión binomial, exponentes racionales, límites), luego, el capítulo se desglosa en subtemas que van explicando los diferentes elementos del objeto matemático en cuestión. Estos textos explicativos suelen introducir alguna definición, propiedad o regla a través de una actividad guiada denominada “Investigación”, seguida de 2 a 4 ejemplos resueltos, y posteriormente, de una variedad de ejercicios propuestos.

En el ejemplar LT2, los capítulos suelen empezar con un problema introductorio relativamente cerrado -como el que se ve en la *Figura 7*- que requiere la aplicación de los contenidos específicos a desarrollar, y con ello, de algún modo la necesidad de aprender nuevas técnicas para resolver la nueva situación planteada. Luego de esto, la organización es similar al LT1, con la diferencia que la cantidad de ejercicios propuestos en este ejemplar es notoriamente mayor como ya se evidenciará más adelante.



OPENING PROBLEM

In a BASE jumping competition from the Petronas Towers in Kuala Lumpur, the altitude of a professional jumper in the first 3 seconds is given by $f(t) = 452 - 4.8t^2$ metres, where $0 \leqslant t \leqslant 3$ seconds.

Things to think about:

- **a** What will a graph of the altitude of the jumper in the first 3 seconds look like?
- **b** Does the jumper travel with constant speed?
- **c** Can you find the speed of the jumper when:
  - **i** $t = 0$ seconds
  - **ii** $t = 1$ second
  - **iii** $t = 2$ seconds
  - **iv** $t = 3$ seconds?

Figura 7: Problema introductorio al tema de Cálculo Diferencial del LT2
Fuente: Haese et al. (2012, p.344)

En la *Tabla 6* mostramos la secuencia de contenidos que constituyen las organizaciones matemáticas puntuales y que desarrollan el concepto de derivada en ambos libros de texto.

Tabla 6: Secuencia temática de los libros LT1 y LT2.

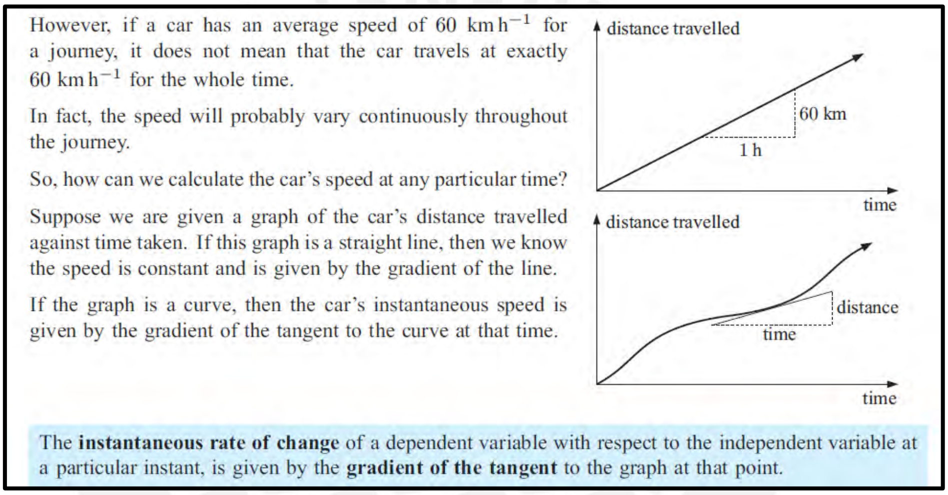
LT1	Título de la sección	LT2	Título de la sección
Cap. 7	**Límites y derivadas**	**Cap. 14**	**Introducción al Cálculo diferencial**
7.1	Límites y convergencia	A	Límites
7.2	La recta tangente y la derivada de x^n	B	Límites en el infinito
7.3	Más reglas de derivación	C	Razones de cambio
7.4	La regla de la cadena y derivadas de orden superior	D	La función derivada
7.5	Razones de cambio y movimientos sobre una recta	E	Principio de derivación con límites
7.6	La derivada y sus gráficos	**Cap. 15**	**Reglas de derivación**
7.7	Más sobre extremos y problemas de optimización	A	Reglas simples de derivación
Cap.14	**Cálculo con funciones trigonométricas**	B	Regla de la cadena
14.1	Derivadas de funciones trigonométricas	C	Regla del producto
14.2	Más prácticas con derivadas	D	Regla del cociente
		E	Derivadas de funciones exponenciales
		F	Derivadas de funciones logarítmicas
		G	Derivadas de funciones trigonométricas
		H	Segunda derivada y otras de orden superior
		Cap. 16	**Propiedades de curvas**
		A	Tangentes y normales
		B	Crecimiento y decrecimiento
		C	Puntos estacionarios
		D	Inflexiones y forma
		Cap. 17	**Aplicaciones del Cálculo Diferencial**
		A	Cinemática (O1)
		B	Razones de cambio
		C	Optimización

Fuente: Buchanan, L., Fensom, J., Kemp, E., La Rondie, P., & Stevens, J. (2015), Haese, Haese, Haese, Mäenpää & Humphires, (2012).

Es posible apreciar que ambos textos parten con el desarrollo de tareas en las que se hace uso de la definición de derivada como límite de las pendientes de una familia de secantes, es decir, como pendiente de la recta tangente. Para ello, preceden a la construcción de la definición, el trabajo de tres tipos de tareas que son de crucial importancia según el modelo epistemológico dominante, las cuales son las tareas sobre secuencias convergentes, límites y de algún modo sobre razones de cambio.

Concretamente en el LT1, a partir de la noción de secuencia convergente se introducen tareas en torno a la idea no formal de límite, y tras trabajar ambas nociones muy brevemente, se da pie a la construcción de la definición de derivada mediante el apoyo gráfico y algebraico. Por otro lado, en el LT2 tras trabajar directamente algunas tareas en torno a la idea informal de límite, se presenta la definición de razón de cambio acompañada de algunos ejemplos - como se ve en la *Figura 8* - en los que se resalta el uso de la noción de rapidez como una razón de cambio que es comúnmente usada, para inmediatamente después servirse de ella para definir la razón de cambio instantánea de una variable dependiente con respecto a otra independiente en un instante particular como la pendiente de la tangente al gráfico en un punto dado.

Introducidos estos elementos, se inicia la construcción de la definición de derivada como pendiente de la tangente a una curva en punto determinado y que se puede obtener a partir del límite de la pendiente de una familia de secantes.


However, if a car has an average speed of 60 km h^{-1} for a journey, it does not mean that the car travels at exactly 60 km h^{-1} for the whole time.

In fact, the speed will probably vary continuously throughout the journey.

So, how can we calculate the car's speed at any particular time?

Suppose we are given a graph of the car's distance travelled against time taken. If this graph is a straight line, then we know the speed is constant and is given by the gradient of the line.

If the graph is a curve, then the car's instantaneous speed is given by the gradient of the tangent to the curve at that time.

The **instantaneous rate of change** of a dependent variable with respect to the independent variable at a particular instant, is given by the **gradient of the tangent** to the graph at that point.

Figura 8: Definición de razón de cambio instantánea
Fuente: Haese et al. (2012, p.350)

Descripción de los tipos de tareas y técnicas halladas en los libros de texto

Una vez introducida la definición fundamental de derivada, el objeto es desarrollado a través de un gran conjunto de tareas. En el LT1 identificamos 305 tareas, repartidas entre 6 actividades de investigación, 70 ejemplos resueltos y 229 ejercicios propuestos, a diferencia del LT2 en el que identificamos 579 tareas, repartidas entre 11 actividades de investigación, 59 ejemplos resueltos y 509 ejercicios propuestos que abordan el tema. A continuación, categorizamos los tipos de tareas que sirven para determinar como se presenta o se propone tanto la enseñanza como el estudio de la derivada. En total se categorizaron 13 tipos de tareas, la mayoría abordadas por ambos libros, las cuales se enumeran a continuación:

Tabla 7: Descripción de los tipos de tareas de derivación

Tarea (T)	**Descripción del tipo de tarea**	**LT1**	**LT2**
T_1	Estimar la pendiente de una tangente como aproximación de las pendientes de una familia de secantes.	1.6%	0.7%
T_2	Calcular la derivada de una función usando la definición de límite.	0.5%	3.2%
T_3	Calcular la función derivada, a partir de reglas $t_{3.1}$: Calcular la derivada, a partir de reglas, de funciones del tipo: $y = x^n \quad y = f[g(x)] \quad y = u(x) \pm v(x) \quad y = u(x).v(x) \quad y = \frac{u(x)}{v(x)}$	34.5%	17%
	$t_{3.2}$: Calcular la derivada de funciones exponenciales de la forma $y=e^x$	2%	6.7%
	$t_{3.3}$: Calcular la derivada de funciones logarítmicas de la forma y=ln *x*	3%	8.3%
	$t_{3.4}$: Calcular la derivada de funciones trigonométricas	5.2%	6.6%
T_4	Calcular la derivada en un punto de una función $t_{4.1}$: Calcular la derivada en un punto de una función, usando la definición de límite. $t_{4.2}$: Calcular la derivada en un punto de una función, a partir de la pendiente de una recta tangente al gráfico de dicha función en ese punto. $t_{4.3}$: Calcular la derivada en un punto de una función, usando reglas.	4.3%	5.2%
T_5	Calcular la segunda derivada y demás derivadas de orden superior.	4.9%	6.7%
T_6	Hallar la ecuación de la recta tangente o normal en un punto dado de la curva	7.5%	13.3%
T_7	Describir las características de los gráficos de funciones tales como los intervalos de monotonía, puntos estacionarios, puntos de inflexión y concavidad.	16%	15%
T_8	Esbozar el gráfico de una función a partir de sus características.	3%	1.7%
T_9	Esbozar el gráfico de la función derivada a partir del gráfico de la función y viceversa.	1.6%	1.6%
T_{10}	Calcular la función velocidad instantánea como límite de la velocidad media e interpretar su significado.	0.7%	0.9%
T_{11}	Calcular la función velocidad y aceleración mediante reglas algebraicas e interpreta sus valores clave para describir un movimiento rectilíneo.	4.6%	2.9%
T_{12}	Describir e interpretar fenómenos de cambio modelados por una función matemática usando derivadas	1.7%	4%
T_{13}	Resolver problemas de optimización de un contexto geométrico usando reglas de derivadas	8.9%	6.2%

A partir de la *Tabla 7* se puede constatar que las tareas de T_1, $t_{4.1}$ y $t_{4.2}$ son prácticamente decorativos en ambos textos, solo sirven de transición para entrar de lleno a las tareas algebraicas, que son las que predominarán en ambos textos con aproximadamente un 50% de las tareas propuestas. Para cada uno de estos tipos de tareas abordados por LT1 y LT2 se tiene principalmente una técnica asociada, y que han sido descritas y organizadas en la tabla 8.

Tabla 8: Descripción de técnicas asociaas a los tipos de tareas de derivación

Técnica (τ)	**Descripción de los pasos de las técnicas**
τ_1	• Hallar la pendiente de cada recta secante propuesta • Estimar el límite de estos cocientes
τ_2	Derivación por definición: Paso 1: Se incrementa $f(x) \rightarrow f(x+h)$ Paso 2: Se establece la diferencia: $f(x+h)-f(x)$. Paso 3: Se divide esta expresión por h: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Paso 4: Se aplica límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Paso 5: Se define: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\tau_{3.1}$	Aplicación de reglas algebraicas respectivamente: • $\frac{dy}{dx}=n.x^{n-1}$ • $\frac{dy}{dx}= f'[g(x)].g'(x)$ • $\frac{dy}{dx}=u'(x)\pm v'(x)$ • $\frac{dy}{dx}=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ • $\frac{dy}{dx}=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$
$\tau_{3.2}$	Dada la función $f(x)=e^x$, entonces la función derivada es $f'(x)=e^x$
$\tau_{3.3}$	Dada la función $f(x)=\ln(x)$, entonces la función derivada es $f'(x)=\frac{1}{x}$
$\tau_{3.4}$	Dadas las funciones $f(x)=Sen(x)\ \wedge\ g(x)=Cos\ (x)$, entonces las derivadas son: • $f'(x)=Cos(x)\ \wedge\ g'(x)=-Sen(x)$ respectivamente.
$\tau_{4.1}$	Paso6: Calcular $f'(a)$ $\tau_{4.1}=\tau_2\cup\{paso6\}$
$\tau_{4.2}$	Obtener la pendiente a partir de dos puntos de la recta tangente Identificar $m=f'(a)$
$\tau_{4.3}$	$\tau_{4.3}=\tau_{3.i}\cup\{paso6\}$
τ_5	• $\tau_{3.i}$ • Repetir el procedimiento hasta el orden de derivación establecido.
τ_6	• Obtener la primera derivada en el punto de tangencia, mediante $\tau_2\ \ o\ \tau_{3.i}$ • Aplicar las fórmulas según sea el caso: $\boldsymbol{T}: f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}\quad\wedge\quad\boldsymbol{N}: \frac{-1}{f'(a)}=\frac{y-f(a)}{x-a}$
τ_7	• Obtener la primera y segunda derivada • Determinar los x para los que $f'(x)=0\ \wedge\ f''(x)=0$ • Dibujar los respectivos diagramas de signos para ambos casos. • Identificar los tipos de puntos críticos, las zonas de crecimiento-decrecimiento y el tipo de concavidad.
τ_8	• Obtener la primera y segunda derivada • Determinar los x para los que $f'(x)=0\ \wedge\ f''(x)=0$ • Dibujar los respectivos diagramas de signos. • Identificar los tipos de puntos críticos, las zonas de crecimiento-decrecimiento y concavidad. • Esbozar el gráfico
τ_9	• Identificar los puntos críticos de la función (interceptos, extremos e inflexiones) • Dibujar el diagrama de signos

	• Esbozar el gráfico de la función.
τ_{10}	• Derivar haciendo uso de la definición. • Asignar unidades de medida • Interpretar el valor obtenido
τ_{11}	• Obtener la primera y segunda derivada de la función desplazamiento mediante reglas. • Asignar las unidades de medida. • Dibujar los diagramas de signos de la velocidad y la aceleración con sus respectivos puntos críticos. • Describir las magnitudes del movimiento a partir de los signos y los ceros de ambas funciones.
τ_{12}	• Derivar la función que modele el fenómeno • Interpretar la función derivada y sus unidades • Identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos extremos.
τ_{13}	• Diseñar una figura geométrica para interpretar los datos. • Construir una fórmula con la variable que va a ser optimizada. Usar una variable conveniente, por ejemplo x. • Restrinja el dominio de la variable si es necesario. • Calcule la primera derivada • Halle los valores de "x" para los que $f'(x) = 0$ • Identificar el máximo o mínimo de la función según corresponda.

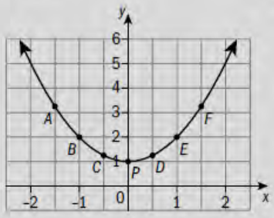
A continuación, mostraremos y analizaremos algunas de las actividades presentadas en ambos libros que introducen la noción de derivada.

Investigación: rectas secantes y tangentes

Aquí está el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$.

1 Copie el gráfico al papel y dibuje las rectas *AP*, *BP*, *CP*, *DP*, *EP* y *FP*. A estas rectas se las llama **rectas secantes** al gráfico de $f(x) = x^2 + 1$.

2 Copie y complete la tabla.



Punto	Coordenadas	Recta	Pendiente
P		—	—
A		*AP*	
B		*BP*	
C		*CP*	
D		*DP*	
E		*EP*	
F		*FP*	

Recuerde que la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3 A medida que los puntos en la curva se acercan más y más al punto *P*, ¿a qué valor pareciera que se aproximan las pendientes de las rectas secantes?

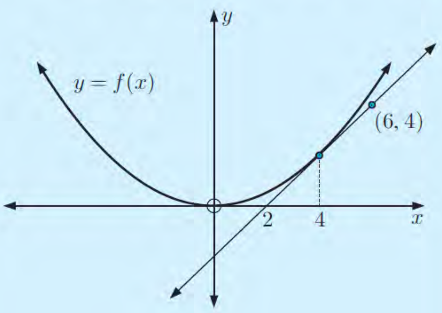
4 Dibuje la recta en el punto *P* que tiene la pendiente que halló en la pregunta 3. Esta recta se llama **recta tangente** al gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ en *P*.

Figura 9: Tarea del tipo T_1 (Estimar la pendiente de una recta tangente como aproximación de las pendientes de una familia de rectas secantes)
Fuente: Buchanan, Fensom, Kemp, La Rondie, & Stevens (2015, p. 200)

En la Figura 9 se muestra una típica tarea del tipo de tarea T1 que permite un primer acercamiento al concepto de derivada a través de la noción de pendiente de la recta tangente en un punto. Tanto el LT1 y el LT2 hacen uso de la misma estrategia para introducirse en este concepto mediante una actividad guiada, sin embargo, en ambos casos el uso de este tipo de tarea es rápidamente abandonado, se puede observar que este tipo de tarea solo está conformado por una única tarea, por lo que es considerada una tarea aislada. Luego se da paso a tareas como la mostrada en la actividad de la *Figura 10*, las cuales inciden en la concepción geométrica de derivada recientemente introducida, y en el que ya no se estima el valor de la derivada, sino que se puede calcular con precisión, mediante técnicas netamente geométricas.

Example 4 | **Self Tutor**

For the given graph, find $f'(4)$ and $f(4)$.



The graph shows the tangent to the curve $y = f(x)$ at the point where $x = 4$.

The tangent passes through $(2, 0)$ and $(6, 4)$, so its gradient is $f'(4) = \frac{4-0}{6-2} = 1$.

The equation of the tangent is $\frac{y-0}{x-2} = 1$

$\therefore \quad y = x - 2$

When $x = 4$, $y = 2$, so the point of contact between the tangent and the curve is $(4, 2)$.

$\therefore \quad f(4) = 2$

Figura 10: Tarea de tipo T_3
Fuente: Haese et al., (2012, p. 354)

En esta actividad se identifican tareas del tipo $t_{4.1}$, $t_{4.2}$ y T_6, las cuales se presentan de manera rutinaria como se puede observar en la *Figura 11*, en la cual se pide $t_{4.2}$: calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función a partir de la derivada en un punto específico. Y por otra, en la *Figura 12* se pide resolver una tarea $t_{4.1}$: calcular la derivada usando únicamente la idea de límite, omitiendo la referencia geométrica.

Use la definición de derivada para hallar la derivada de f y a partir de ahí, halle la pendiente de la recta tangente en el valor de x dado.

1 $f(x) = 2x - 3; x = 2$

2 $f(x) = 3x^2 + 2x; x = -3$

3 $f(x) = x^2 - x + 2; x = 1$

Figura 11: Ejemplo de tarea 1 del tipo T_4
Fuente: Buchanan & otros (2015, p. 202)

4 Use the first principles formula $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ to find:

a $f'(2)$ for $f(x) = x^3$ **b** $f'(3)$ for $f(x) = x^4$.

Figura 12: Ejemplo tarea 1 del tipo T_4
Fuente: Haese et al. (2012, p. 357)

El detenimiento de ambos libros en el tipo de tarea T_4 es un poco más extenso respecto a las tareas T1 y T2. Después de esto, se empieza a demostrar o solo mostrar una serie de reglas algebraicas de derivación a través de las tareas de tipo T_3, cuyas técnicas predominarán a partir de ahora a lo largo de todo el desarrollo del capítulo. En la

Figura 13 se muestra una tarea del tipo T_3, la cual mediante operaciones(reducción y/o simplificación) se desencadena en una tarea que consiste en $t_{3.1}$: determinar la derivada de una función del tipo $f(x)=x^n$, además se muestra la técnica que privilegia el texto.

Halle la derivada de cada función:

a $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$ **b** $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + 8$

c $f(x) = (x-2)(x+4)$ **d** $f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 3}{x}$

Respuestas	
a $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$ $f'(x) = 4(3x^{3-1}) + 2(2x^{2-1}) - 0$ $= 12x^2 + 4x$	*Hallar la derivada de cada término. Observe que la derivada del término constante es 0.*
b $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + 8 = 3x^{\frac{1}{5}} + 8$	*Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*
$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} + 0 = \frac{3}{5} x^{-\frac{4}{5}}$	*Hallar la derivada de cada término. Observe que la derivada del término constante es 0.*
$= \frac{3}{5x^{\frac{4}{5}}}$ o $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$	*Simplificar*
c $f(x) = (x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$ $f'(x) = 2x^{2-1} + 2 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 2x + 2$	*Primero desarrollar, para que la función sea una suma o diferencia de términos de la forma ax^n*

Figura 13: Tarea 1 del tipo T_3 (Calcular la derivada de una función potencia)
Fuente: Buchanan & otros (2015, p. 204)

Otra tarea del tipo T_3 es $t_{3.1}$: determinar la derivada de una función compuesta la cual se muestra en la

Figura 14, cuya técnica es la regla de la cadena.

Example 6 Self Tutor

Find $\frac{dy}{dx}$ if:

a $y = (x^2 - 2x)^4$

b $y = \frac{4}{\sqrt{1-2x}}$

a
$$y = (x^2 - 2x)^4$$
$$\therefore \quad y = u^4 \quad \text{where} \quad u = x^2 - 2x$$
$$\text{Now} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \{\text{chain rule}\}$$
$$= 4u^3(2x-2)$$
$$= 4(x^2-2x)^3(2x-2)$$

The brackets around $2x - 2$ are essential.

b
$$y = \frac{4}{\sqrt{1-2x}}$$
$$\therefore \quad y = 4u^{-\frac{1}{2}} \quad \text{where} \quad u = 1 - 2x$$
$$\text{Now} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \{\text{chain rule}\}$$
$$= 4 \times (-\tfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}) \times (-2)$$
$$= 4u^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 4(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

Figura 14: Tarea 1 del tipo T_3 (Derivar una función compuesta con la regla de la cadena)
Fuente: Haese et al., (2012, p. 366)

Las Figuras 15 y 16 muestran que las tareas desarrolladas inciden principalmente en el trabajo algorítmico de la derivada. Estas tareas se caracterizan por buscar determinar la derivada como un objetivo en sí mismo, es decir, sin hacer uso de ninguna situación problemática, que contribuya a darle sentido desde la génesis del concepto.

Ejercitación 7I

Halle la derivada de cada función de las preguntas 1 a 8.

1 $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

2 $f(x) = (2x^3 + x^2 + x)(x^2 + 1)$

3 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

4 $f(x) = e^x \ln x$

5 $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$

6 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

7 $f(x) = e^x(5x^3 + 4x)$

8 $f(x) = \frac{2-x^2}{x^3+1}$

Figura 15: Tarea de tipo T_3
Fuente: Buchanan & otros, (2015, p. 220)

Ejercitación 7M

1 Halle la segunda derivada de $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$.

2 Si $f(x) = 3x^5 + x^4 + 2x + 1$, halle $f'''(x)$.

3 Si $C(n) = (3 + 2n)e^{-3n}$, halle $\frac{d^2C}{dn^2}$.

4 Si $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}$, halle $\frac{d^3y}{dx^3}$.

5 Si $\frac{d^4y}{dx^4} = \ln(4x^3)$, halle $\frac{d^6y}{dx^6}$.

Figura 16: Tarea del tipo T_5
Fuente: Buchanan & otros (2015, p. 221)

Al finalizar la sección de Análisis se presentan situaciones "contextuales" de aplicaciónen tareas de los tipos T_{11} y T_{12} como las mostradas en la *Figura 17* y la *Figura 18*, donde se abordan tareas que involucran nuevas nociones de derivada, tales como la noción de velocidad aceleración y optimización, en ellas se deja ver un predominio algebraico.

Los modelos funcionales de estas situaciones contextuales se muestran como objetos ya finalizados o modelos de rutinarios, por lo que el trabajo del estudiante se reduce a la sola manipulación de un modelo planteado en el problema con el fin de describir el fenómeno en cuestión como, por ejemplo: la altura de partida, la velocidad de partida, la velocidad máxima alcanzada, la velocidad final, la mínima ganancia, etc. De estas situaciones se puede destacar el avance que significa incidir en la interpretación de los resultados, considerando por ejemplo la interpretación desde contextos de física, economía, biología, etc.

2 Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba. La altura de la pelota en pies, t segundos luego de haber sido lanzada, está dada por $s(t) = -16t^2 + 40t + 4$ para $t \geq 0$ segundos.

a Halle la altura inicial de la pelota.

b Muestre que la altura de la pelota 2 segundos luego de haber sido lanzada es de 20 pies.

c Hay un segundo instante en que la altura de la pelota es de 20 pies.

i Escriba una ecuación que debe satisfacer t cuando la altura de la pelota es de 20 pies.

ii Resuelva la ecuación algebraicamente.

d **i** Halle $\frac{ds}{dt}$.

ii Halle la velocidad inicial de la pelota.

iii Halle en qué instante la velocidad de la pelota es 0.

iv Halle la altura máxima de la pelota.

Figura 17: Tarea de tipo T_{11}
(Describir el movimiento rectilíneo de un móvil mediante las funciones velocidad y aceleración)
Fuente: Buchanan & otros (2015, p. 225)

EXERCISE 17B

1 The estimated future profits of a small business are given by $P(t) = 2t^2 - 12t + 118$ thousand dollars, where t is the time in years from now.

a What is the current annual profit? **b** Find $\frac{dP}{dt}$ and state its units.

c What is the significance of $\frac{dP}{dt}$?

d For what values of t will the profit:

i decrease **ii** increase on the previous year?

e What is the minimum profit and when does it occur?

f Find $\frac{dP}{dt}$ when $t = 4$, 10 and 25. What do these figures represent?

Figura 18: Tarea de tipo T_{12}
(Describir e interpretar fenómenos de cambio modelados por una función matemática usando derivada)
Fuente: Haese et al., (2012, p. 424)

Principales restricciones encontradas en las Organizaciones Matemáticas

En la primera parte del libro, conformada por los tipos de tareas, T_1, T_2, T_3 y T_4, se puede identificar una organización matemática escolar clásica, caracterizada por privilegiar en primer lugar, la concepción de límite como primer medio de introducción a la derivada, y luego, la concepción algebraica para su posterior desarrollo.

Este enfoque principalmente algebraico reduce la enseñanza de la derivada al estudio de un conglomerado de técnicas que termina ocultando el sentido de su estudio en la escuela. Esto, debido a que aproximadamente por cada tipo de tarea considerada en el texto existe por lo general una técnica privilegiada de resolución, y que en conjunto parecen no requerir de un discurso tecnológico que las justifique debido a su imponente efectividad para resolver la tarea en cuestión, lo cual deviene en una fuerte desarticulación de las organizaciones matemáticas.

Por otro lado, también se ha identificado el estudio de determinadas situaciones "contextuales" que intentan dotar de sentido al estudio de la derivada, sin embargo, su carácter típicamente cerrado termina reduciendo estas situaciones a la simple aplicación de las técnicas algorítmicas inicialmente practicadas, siendo muy escasa la ocasión en que se presenten auténticas situaciones abiertas en las que se potencie la noción de la derivada desde significados diversos al clásico, como lo es el de variación, de tal forma que permita por una parte, ampliar el significado exclusivo según el cual la derivada se entiende únicamente como el límite de un cociente incremental, a un significado que llegue a presentar a la derivada como una forma de estudiar la evolución de procesos de cambio, de crecimiento o decrecimiento (Cantoral & Mirón, 2000), y por otra, también permita articular de no un solo modo las diferentes técnicas de derivación.

Estas caracterizaciones nos llevan a estar de acuerdo con determinadas conjeturas y subconjeturas formuladas por Lucas (2015, p.511) para referirse a propiedades específicas de las organizaciones matemáticas escolares en torno al cálculo diferencial y a la *modelización funcional (MF)*. Entre las conjeturas referidas tenemos:

C5 No existen situaciones de MF en las que se requiera la construcción del modelo y la interpretación del trabajo del modelo en términos de variación de una variable respecto de otras.

- En los manuales escolares aparecen muy pocas situaciones que requieran explícitamente la construcción del modelo funcional, siendo especialmente escasas las que requieren la construcción de un modelo funcional a partir de datos discretos.
- En los manuales escolares aparecen muy pocas situaciones de modelización funcional que requieran explícitamente la interpretación del trabajo del modelo en términos de variación de una variable respecto de otras.

C6 La definición de derivada como límite de la tasa de variación media no juega ningún papel relevante, o sea, es meramente "decorativa".

- La definición de derivada como límite de la tasa de variación media no juega ningún papel en el cálculo de la función derivada (más allá del cálculo testimonial de la derivada de las funciones lineal y cuadrática) puesto que para este cálculo se utilizan masivamente técnicas algebraicas.
- La definición de derivada como límite de la tasa de variación media no juega ningún papel en el cálculo de la derivada de una función en un punto puesto que para este cálculo se utiliza la fórmula de la función derivada (calculada mediante técnicas algebraicas) substituyendo el valor de la abscisa del punto en cuestión.

C10: No existe una actividad sistemática en torno a la tasa de variación media de una función, nunca se trabajan las técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas lo que impide constatar que se trata de técnicas poco económicas.

- En los manuales escolares está prácticamente ausente la tarea de expresar la tasa de variación media de una función en un intervalo genérico, ya sea a partir de la representación algebraica de la función, de su representación tabular o de su representación gráfica.
- En los manuales escolares está prácticamente ausente la tarea de recuperar la expresión analítica de una función a partir de la expresión de su tasa de variación media en un intervalo genérico.

El análisis que realiza Lucas (2015) mediante la contrastación empírica de estas conjeturas con una diversidad de libros didácticos de la enseñanza secundaria portuguesa, le permiten identificar la desarticulación y la incompletitud que presentan las organizaciones matemáticas en torno a la derivada. En nuestro caso en particular, analizando los libros didácticos concordamos con que estas conjeturas seleccionadas sí llegan a caracterizar la organización matemática en estudio, mostrando con ello restricciones específicas que dificultan la implementación de un REI que implica el estudio de la derivada en un entorno de modelización funcional.

En el siguiente capítulo se mostrará los elementos teóricos que fundamenta nuestra investigación, estos son de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

CAPÍTULO III: ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los principales elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard en los cuales nos apoyaremos con la finalidad de desarrollar la investigación, lograr alcanzar los objetivos trazados. Entre los elementos teóricos que desarrollaremos tenemos la noción de praxeología, clases de praxeologías, niveles de codeterminación, momentos didácticos, recorrido de estudio e investigación y dialécticas.

Marco teórico: La Teoría Antropológica de lo Didáctico

La TAD proporciona un modelo, desde el programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas, para el análisis de la actividad humana en general y de la actividad didáctico-matemática en particular, y a partir de ello caracterizar las posibilidades y condiciones del funcionamiento de un sistema didáctico.

3.1 La antropología del conocimiento

En esta teoría se toman como nociones primitivas a los objetos *O*, a las personas *X* y las instituciones I. El objeto *O* existe, si existe para al menos un *X* o una I que tienen una relación personal R(*X*,*O*) o institucional $R_I(O)$, podemos hablar entonces también de conocimiento. Un objeto *O* no existe mas que si es objeto de conocimiento. Para definir institución dejamos los siguientes ejemplos dados por Chevallard (2011), una escuela, una clase, hay tambien una institución de “trabajos dirigidos”, la institución “curso”, la institución “familia”, la vida cotidiana es una institución, la situación amorosa, etc. (p.164).

Dos nociones más son esenciales de definir, contrato didáctico y medio *M*, estos son términos introducidos en la TSD, los cuales son adoptados por la TAD, especificamente contrato institucional relativo a I. Por otro lado, nosotros hablamos de otra noción primitiva, *sujeto*, cuando la persona está sujeta a una I.

Además, se tiene la noción de posición *p=x* en I, esto permite introducir la noción de instituciones didácticas, una relación institucional de *O* por los sujetos de I en posición p, es denotada por R_I (p, *O*), estas instituciones didácticas se denominan *Sistemas Didácticos* SD. Chevallard trata las nociones de personal y posición indistintamente como instancia $\hat{\imath}$, para definir relación instancial $R(\hat{\imath}, O)$. Cuando Chevallard define $R(\hat{\imath}, O) \neq \emptyset$, se dice que $\hat{\imath}$ para existe o conoce a O y $R(\hat{\imath}, O) = \emptyset$, cuando $\hat{\imath}$ no tiene conocimiento de O.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) afirman que un grupo de estudiantes que busca en una obra matemática respuestas a ciertas cuestiones puede pedir ayuda a un director de estudio *Y*: se constituye así un sistema didáctico. En el proceso didáctico, no debe pretenderse controlar de una manera absoluta, la relación didáctica debe ser de carácter abierto, ya que podría provocar un empobrecimiento del aprendizaje matemático, esto es, que se suele otorgar poca consideración al trabajo matemático del alumno. La dependencia del profesor provoca una "irresponsabilidad matemática" por parte del estudiante. Por ello es necesario considerar el proceso de estudio como objetivo principal del proceso didáctico, para poder traspasar la responsabilidad matemática al alumno, este nuevo reparto de responsabilidades asigna al profesor el papel de "director de estudio", y hace ver al profesor como "matemático" y disminuye el riesgo de "enfermedad didáctica".

La relación $R(\hat{\imath}, O)$ hace emerger la noción de praxeología, la cual pasaremos a definir.

3.2 Noción de praxeología

La praxeología es un modelo que permite estudiar toda actividad humana que produzca conocimiento, y en este contexto, la actividad matemática.

La praxeología surge al igual que toda obra humana como respuesta a unas cuestiones problemáticas de partida que se dan en una determinada institución y que se concretan en determinadas tareas problemáticas (Serrano, 2013). En ella se pueden distinguir dos aspectos principales:

- La "praxis" (el hacer), que constituye el componente práctico que acompaña la actividad humana al afrontar un conjunto de tareas o cuestiones problemáticas que se concretan en tipos de tareas (T) y un conjunto de técnicas (τ) o maneras de hacer asociadas intrínsecamente al conjunto T.
- El "logos" (el saber), que es el componente en el que se sitúa, en un primer nivel, el discurso racional que explica y justifica la técnica, y que denominamos *tecnología* (θ); y luego en un nivel superior de justificación se encuentra el discurso llamado *teoría* (Θ), donde son las tecnologías las que reciben explicación. (Serrano, 2013).

De esta manera la actividad humana puede ser descompuesta en estas unidades mínimas de análisis: tipos de tareas (T), técnicas (τ), tecnología (θ) y teoría (Θ). Sin embargo, Chevallard diversifica tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes para un análisis más profundo de los procesos didácticos institucionales (García, 2005).

Estas 4Ts que conforman una praxeología $\wp = [T, \tau, \theta, \Theta]$, la actividad humana sugiere que cualquier persona o posición institucional *p*, usa una multitud de praxeologías. Estas praxeologías componen el ***equipamiento praxeológico*** de una una instancia î (persona x o de una posición p) , denotado por $\Gamma(\hat{\imath}) \overset{\text{def}}{=} \{(\wp, \mathrm{R}\,(\hat{\imath}, \wp))/\wp \in \Omega(\hat{\imath})\}$, donde $\Omega(\hat{\imath}) \overset{\text{def}}{=} \{(\wp, \mathrm{R}\,(\hat{\imath}, \wp)) \neq \emptyset\}$ es el universo praxeológico. Chevallard (julio, 2019).

Si juntamos un grupo de praxeologías obtenemos diferentes estructuras que definimos a continuación.

Clases de praxeologías: estructuras de complejidad creciente

En torno a un tipo de tareas, T, se encuentra una tripleta conformada por una técnica, por lo menos, con su respectiva tecnología y teoría. En cuanto estos elementos se vayan diversificando en cantidad, la complejidad de la praxeología será cada vez mayor. Así tenemos las siguientes clases de praxeologías:

- Praxeologías puntuales: El carácter puntual significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas respaldado por una sola técnica, y su correspondiente tecnología y teoría. El conjunto total de componentes queda indicado por la siguiente simbología: [T, τ, θ, Θ] (Chevallard, 1999).
- Praxeologías locales: las cuales consisten en un conjunto integrado de praxeologías puntuales que encuentran explicación, justificación y relación entre sí en una misma tecnología (θ) y su correspondiente teoría, representándose de la siguiente manera: $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$.
- Praxeologías regionales: Se obtienen tras la coordinación, articulación e integración de diversas praxeologías locales en torno una misma teoría Θ. Mostrándose simbólicamente de la siguiente manera: $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$
- Praxeologías globales: Llamado así al complejo praxeológico obtenido por la agregación de varias teorías Θ_k: $[T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k]$

Según Barquero (2009) la postura de TAD es,

> describir procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente (puntuales, locales, regionales) que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y para las que requieren respuestas. Estas cuestiones constituyen las “razon de ser” de la construcción de las organizaciones matemáticas que va a ser necesario (re)construir (p.68).

3.3 Niveles de co-determinación

Chevallard (2002b, 2004) citado en Bosch & Gascón (2006) propone que en el proceso didáctico de una organización matemática propuesto dentro de una institución escolar no se ve determinado únicamente por las condiciones o restricciones directamente identifcables en el aula, como pueden ser los conocimientos previos de los alumnos, el conocimiento del docente, el medio didáctico disponible entre otros. Si bien tener en cuenta estos factores son de gran importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje, existen otras condiciones o restricciones de distinto nivel que afectan determinantemente el proceso de estudio.

Para el estudio de estas condiciones de existencia y evolución de estas praxeologías matemáticas que van más allá de lo que ocurre en el aula, Chevallard propone una escala de niveles de codeterminación como se puede apreciar en el esquema siguiente.

$$\boldsymbol{Sociedad} \rightarrow \boldsymbol{Escuela} \rightarrow \boldsymbol{Pedagog\acute{\imath}a} \rightarrow \boldsymbol{Disciplina} \rightarrow \boldsymbol{\acute{A}rea} \rightarrow \boldsymbol{Sector} \rightarrow \boldsymbol{Tema} \rightarrow \boldsymbol{Cuesti\acute{o}n}$$

En el nivel sociedad podemos encontrar por ejemplo las condiciones planteadas por las políticas establecidas en el Currículo Nacional o en los documentos curriculares del Bachillerato Internacional. En el nivel escolar podemos encontrar las políticas de gestión de la institución, en el nivel pedagógico podemos encontrar los problemas metodológicos en torno al proceso de enseñanza-aprendizaje. En el nivel disciplinar ya sale a relucir el contenido praxeológico que se quiere enseñar.

Chevallard postula que en cada uno de estos niveles surgen determinadas restricciones tanto para las organizaciones matemáticas como las didácticas, ya que dependiendo del tipo de estructuración que una determinada organización matemática adopte en un nivel, restringirá el modo en que se efectúe la organización didáctica a ella asociada.

Bosch & Gascón (2006) tras cuestionarse sobre la principal función de esta jerarquía de niveles de codeterminación, responden de la siguiente manera:

> *La respuesta es siempre la misma: para liberarse de las concepciones espontáneas del conocimiento matemático que, al analizar su objeto de estudio, los investigadores podrían asumir sin cuestionarlas previamente. Las praxeologías "puntuales", "locales", "regionales" y "globales" se corresponden con los niveles inferiores: los de la cuestión, el tema, el sector y el ámbito. Quizá debido a su familiaridad con el "problema del profesor" ("dado un contenido matemático para ser enseñado, ¿cuál es la mejor forma de hacerlo?"), a menudo los didactas asumen como incuestionable la delimitación de contenidos que ofrecen las instancias educativas o académicas. Hay que situarse en un nivel de generalidad superior para preguntarse, por ejemplo, y dada una organización curricular concreta, por qué están divididos los contenidos en estos bloques temáticos y no en otros, o cuáles son los criterios para determinar esta división y qué tipo de restricciones causa sobre la actividad concreta que pueden realizar profesores y estudiantes.* (Bosch& Gascón, 2006, p.61).

Por otro lado, respecto al paradigma de la visita de las obras Chevallard presenta un contraparadigma que denomina del cuestionamiento de mundo, con el cual aparece un nuevo dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación.

3.4 Recorrido de Estudio e Investigación

El paradigma del cuestionamiento del mundo requiere una actitud procognitiva "saber hacia delante" (desear aprender) y que lleva a considerar que el conocimiento está por descubrirse y conquistarse por primera vez o de nuevo. La problemática según Chevallard (2013) es ¿cómo se puede construir y validar una respuesta R a una cuestión Q? Para responder se requiere, en primer lugar, que el "indagador" o un equipo X busque las respuestas existentes a la cuestión Q (lo cual es prohibido en el paradigma tradicional), de la misma forma que en la investigación científica. A partir de esta cuestión se van a formular otras *preguntas derivadas* Q_k.

Estas otras preguntas se intentarán responder buscando respuestas ya disponibles en el entorno, llamados los ***media***. Estas respuestas se tendrán que validar, adaptar, deconstruir y reconstruir en un ***medio*** apropiado para que puedan aportar a la cuestión que nos hemos planteado. Entendiendo por media cualquier "fuente de información", es decir, cualquier sistema que emite mensaje como libros, artículos, páginas web, expertos, profesores, estudiantes, etc. En la medida en que estas respuestas y obras pueden haber sido elaboradas en otras instituciones, incluso en otros momentos históricos o en base a otras necesidades, la adopción de estas, o de algunos elementos de las mismas, podría requerir análisis y posible "deconstrucción" por contraste con el medio disponible, lo que se conoce como la dialéctica medio-media (Barquero, 2009)

Se denota las respuestas por $R_i^\lozenge$, la cual le corresponde a alguna institución *I*, valga decir que $R_i^\lozenge$, no necesariamente es válida, le corresponde a X evaluar si $R_i^\lozenge$es relevante (en lo tradicional el profesor es el único que da las respuestas) , para llegar a $R^\heartsuit$, el indagador debe usar "herramientas" que pueden ser matemáticas o no. Es a partir del estudio combinado de $R_i^\lozenge$ y de las obras *O* (son herramientas para estudiar $R_i^\lozenge$ y construir $R^\heartsuit$)

Finalmente, la organización de estas respuestas $R_i^\lozenge$ dará lugar a la respuesta principal, llamada *respuesta corazón* $R^\heartsuit$*,* tentativa y provisional.

La indagación de *X* sobre Q abre camino al llamado ***recorrido de estudio e investigación***. Una condición necesaria es que *X* se comporte procognitvamente.

Empleando las notaciones introducidas por el autor, el REI se representa con el esquema de la figura 20.

$$[S(X;Y;Q_0) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit$$
$$M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \cdots, R_{m,}^\lozenge O_{m+1,} \cdots, O_n\ , Q_{n+1,} \cdots, Q_p\ \}$$

Figura 19. Esquema herbatiano
Fuente: Chevallard (2002, citado en García et al, 2019)

En el caso del medio ***M,*** la Teoría de Situaciones Didácticas señala que un SD no puede existir en el vacío, esta supone la producción y organización de un “medio didáctico”, medio de estudio material e inmaterial, que será el fragmento del universo con el cual los actores del SD, establecerán un acuerdo para producir una respuesta a las cuestiones dadas. En cambio, en la TAD ese medio no se supone dado al inicio, con *X*, *Y* y *Q*, por ello en lugar de escribir S(*X*, *Y*, *Q*, *M*) ➥ *R* , se escribe de la forma (S(*X, Y*, *Q*) ➡ *M*) ➥ *R*, la producción y organización de un medio didáctico, es en general una producción de una organización didáctica.

Se debe resaltar que es importante el diseño matemático a priori de la actividad didáctica, que garantice la fecundidad de las cuestiones generatrices iniciales, sin olvidar que en el proceso de estudio pueden aparecer nuevas cuestiones “cruciales” que se estudian que no han sido predeterminadas (Chevallard, 2013).

Por otro lado, un REI es de carácter abierto y dinámico, una indagación puede llevar por distintos recorridos de estudio e investigación, así como las obras estudiadas, que puede llevar a plantear cuestiones, donde algunas obras y disciplinas aparecen de forma insistente, porque son más solicitadas y otras pueden aparecer de forma esporádica o incluso no surgirán nunca.

Además, debe quedar claro que, en el proceso de estudio, el conocimiento de la obra O que adquieren los indagadores es funcionalmente coherente, debido a que está asociada a la pregunta Q, de manera que se puede ver la *razón de ser* de O que garatiza su utilización. (Chevallard, 2013).

Funciones didácticas

El esquema herbatiano desarrollado está conformado por ciertos elementos, tales como, la cuestión generatriz, las respuestas y las obras que constituyen un medio, además de elaborar, validar e institucionalizar una $R^{\heartsuit}$, sin embargo, estas no son los únicos, según Chevallard (2011), hace evidente la existencia de tres funciones, que ya forma parte del paradigma tradicional solo que presentan un cambio importante, estos son: la *cronogénesis*, la *mesogénesis* y la *topogénesis*.

Cronogénesis, es la génesis del tiempo didáctico, es decir, del tiempo de la construcción praxeológica. El proceso de estudio en un REI cambia produciendo una dilatación y extensión del mismo.

Mesogénesis, es la génesis del medio didáctico, es decir, en un proceso de estudio con las condiciones de un REI, la mesógenesis refiere al proceso de "fabricación" del medio didáctico M con el fin de producir una respuesta. Esto presupone que para el inicio del proceso de estudio el medio no se encuentra predeterminado, sino que se va construyendo a lo largo del desarrollo del REI.

La topogénesis es la génesis de los equipamientos praxeológicos (y de las relaciones institucionales asociadas). El *topos* tanto del estudiante como del profesor (que cambiará de rol para denominarse director del estudio) están asociados a las posiciones de ellos, que se relaciona con las entidades praxeológicas construidas o se construyen en el proceso de un REI.

3.5 El proceso de estudio de una praxeología matemática

Chevallard (1999, p. 21-24) y Serrano (2013, p. 22-25) explican los diferentes momentos que presenta una organización didáctica, pero no como un orden cronológico de fases que debe experimentar el proceso de estudio sino más bien como dimensiones que deben darse una o varias veces en la actividad matemática. Ahora bien, la sucesión planteada de estos momentos no es rígida, pues estos se pueden dar en un orden diverso y con diferentes intensidades, e incluso estos podrían darse simultáneamente. Lo que hay que destacar es que cada uno de estos momentos desempeña una función específica y su ocurrencia es importante para que se llegue a un buen término del proceso de estudio. Los seis momentos didácticos son:

Primer momento: Es el momento del **primer encuentro** de los estudiantes con la organización que está en juego, y más específicamente con la cuestión problemática Q a la que debe intentar dar respuesta y que encarna al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de la organización. Este momento puede llevarse a cabo una y otra vez.

Segundo momento: Es el **momento exploratorio** de una o más técnicas que permitan la solución de la cuestión problemática inicial. Aquí es necesario que Q se identifique con un tipo de tarea T_i para la cual la técnica τ es capaz de darle solución.

Tercer momento: Es el momento del **trabajo de la técnica**, en el cual se complementa, en cierto sentido el momento exploratorio, a través de la *rutinización* de la técnica hasta provocar un desarrollo progresivo de la misma. Este trabajo permite la ampliación progresiva de la técnica, de tal manera que su aplicación no se limite a un tipo restringido de problemas, sino que se pueda adaptar nuevos problemas.

Cuarto momento: Es el momento **tecnológico-teórico,** en el cual se busca construir un marco tecnológico-teórico [θ /Θ] relativo a las técnicas τ_i que han aparecido durante el proceso de estudio. En este momento aparecen nuevas cuestiones matemáticas sobre las técnicas involucradas, cuestiones sobre su justificación, interpretación, alcance y sobre relaciones presentes entre ellas. Al conjunto de todas estas cuestiones se le denomina *cuestionamiento tecnológico,* al cual se le da respuesta mediante una praxeología local que se encuentra caracterizada por una *tecnología* θ.

Quinto momento: Es el momento de **la institucionalización**, en el cual se tiene como fin precisar lo que es exactamente la organización matemática elaborada, especificando los elementos que serán considerados definitivamente en la OM, dotándolos así de un carácter oficial y diferenciándolos claramente de aquellos otros elementos que, habiendo concurrido en la elaboración, no serán integrados en la praxeología construida (Serrano, 2013, p. 25).

Sexto momento: Es el momento de **la evaluación**, en el cual se observa y examina la calidad de los componentes de la OM construida, en contraposición a la concepción de evaluación clásica en la que se evalúa el dominio de determinadas técnicas por el alumnado. Aquí se interroga sobre *los tipos de tareas* (¿están bien identificados?, ¿existen especímenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?; *las técnicas* (¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas?....); y *el discurso tecnológico* (¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas?....) (Serrano, 2013, p. 25).

A partir de que los estudiantes adquieren mayor autonomía en el proceso de estudio e investigación, es decir, están más implicados en la producción de técnicas y justicar las técnicas que emergen, ellos se convierten en los protagonistas de los momentos que van a hacer vivir el REI.

3.6 Las dialécticas de estudio

El proceso de estudio puede ser descrito y analizado a partir de las denominadas *dialécticas,* las cuales son un conjunto de gestos de estudio que muestran la tensión entre pares de elementos del estudio que suelen ser opuestos. En un primer momento Chevallard (2007) propuso un grupo de seis, pero actualmente Chevallard (2013b) ha declarado nueve. A continuación, traducimos seis de ellas declaradas en Chevallard (julio, 2019)

La dialéctica **de preguntas y respuestas** (o de estudio e investigación),en este caso debemos tener presente que en el proceso de estudio no es necesario esclarecer las $R^{\lozenge}$ no ni las otras obras O que emergen.

> …un estudio supuestamente "en profundidad" rara vez es necesario en el camino a $R^{\blacktriangledown}$, pero un estudio relevante sí lo es. Con esta observación, que es esencial para una comprensión epistemológicamente sólida de la llamada dialéctica de preguntas y respuestas (tenemos que estudiar respuestas $R^{\lozenge}$ y obras *O*, y responder - hasta cierto punto - las preguntas correspondientes. (Chevallard, julio, 2019).

La dialéctica **de conjeturas y pruebas** (o de medias y de medios),

> A pesar de su plausibilidad, la mayoría de las declaraciones "recibidas" por X (incluidas las que provienen de Y) deben considerarse como ***conjeturas,*** es decir, como declaraciones basadas en evidencia incompleta. Buscar evidencia es, por lo tanto, el corazón de la investigación. La prueba de la declaración σ debería buscarse cuestionando a los media, con respecto a σ, se comportan como un medio "adidáctico". Tal medio adidáctico, o simplemente medio, si no se teme ambigüedad, es un sistema que se considera desprovisto de cualquier intención de probar o refutar σ, como una parte del mundo inanimado. La dialéctica de media y medios permite la búsqueda de la verdad, incluso en los casos en que no haya una prueba decisiva. (Chevallard, julio, 2019).

La dialéctica del **individuo y colectivo** (o de la autonomía y de la sinonimia), la cual consiste en que el estudiante ya no se responsabiliza solo de sus respuestas $R_x^{\blacktriangledown}$ y estas no son más que $R^{\lozenge}$ que formaran parte del medio M, en este caso, todo el grupo es responsable de construir $R^{\heartsuit}$.

> por lo tanto, su necesidad principal es establecer en la clase una ley común, determinada y aplicada colectivamente, ante la cual serán responsables. Tal sinnomía (del griego syn "juntos") debe contrarrestar la autonomía que sigue siendo indispensable para cada estudiante en su esfuerzo personal para investigar la pregunta Q y llevar su parte al avance de la investigación. (Chevallard, julio, 2019).

La dialéctica **del paracaidista y de las trufa**, consiste en la forma de búsqueda de información en el proceso de estudio.

> Al buscar información en el curso de una investigación, uno tiene que barrer vastas áreas, actuando así como un paracaidista (militar), sabiendo que la información buscada se encontrará (en la forma en que un sabueso de trufa o cerdo) solo en algunos lugares esporádicos e inesperados. (Chevallard, julio, 2019).

La dialéctica de **dentro y fuera del tema**, esto surge debido a la expansión de los campos de conocimiento a investigar y la falta de control de estos campos por parte del profesor tal como en el paradigma tradicional.

> …tiene que ver con la incertidumbre asociada con la exploración a realizar: ¿el documento que se está revisando es relevante para la investigación en curso o es probable que nos extravíe? …El formato de estudio de la investigación promovido por el paradigma de cuestionar el mundo requiere, por lo tanto, "investigadores" menos agresivos y más atrevidos que el trabajo tradicional estrictamente guiado. (Chevallard, julio, 2019).

La dialéctica de ***las cajas negras y las cajas claras***, esto deriva del incumplimiento del contrato tradicional de la búsqueda de un tipo de consulta dado, en el proceso de estudio las $R^{\lozenge}$ y otras *O* obras que esta búsqueda saca a la luz, hay áreas grises,

> …una praxeología que permite a uno, cuando se enfrenta a algunos elementos praxeológicos, gestionar el camino entre la ignorancia total (caja negra) y el conocimiento supuestamente completo (caja clara) de ese elemento. Para emitirlo en un estilo de fórmula: esta dialéctica ayuda a determinar el tono de gris adecuado para trabajar. (Chevallard, julio, 2019).

En nuestro trabajo, nos limitaremos al análisis mediante tres dialécticas: del estudio-investigación, individuo-colectivo y media-medio, esto no significa que estás dialécticas se puedan separar, sino que de ellas privilegiaremos nuestra mirada en las mencionadas.

En el siguiente capítulo se presenta el marco metodológico que guía nuestra investigación.

CAPÍTULO IV METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DISEÑO

En este capítulo se presenta la metodología para dar soporte a los procedimientos metodológicos adoptados para esta investigación. La metodología de investigación, que es de corte cualitativo se desarrolla a través del análisis clínico que es propia de la TAD, además de los procedimientos que se tuvo como base para el diseño matemático de la actividad didáctica.

4.1 Metodología y procedimientos

En nuestra investigación pretendemos diseñar, implementar, experimentar y evaluar un REI, para ello la metodología de investigación que utilizaremos será la metodología cualitativa, basando esta elección en las características que Garnica en Araújo & Borba (2004) atribuye a este enfoque:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (p. 86).

Por su parte, el método de esta investigación naturalmente está condicionado en parte, por el marco teórico en el que este estudio se desarrolla, la Teoría Antropológica de lo Didáctico, lo que significa que debe haber una coherencia entre el método de investigación y la manera específica en que la TAD interpreta las matemáticas y aborda los procesos de estudio de las mismas (Serrano, 2013) denominado *análisis clínico de la didáctica* (Chevallard, 2009). En este sentido el método usado en esta investigación es la Ingeniería de Recorrido de Estudio e Investigación, el cual se apoya mucho en los elementos que proporciona la Ingeniería Didáctica.

Serrano (2013) brinda orientaciones muy puntuales de cuáles deben ser los procedimientos que se deben realizar en investigaciones de esta naturaleza:

- *Diseño matemático*: etapa en la que se dará la construcción de las cuestiones generatrices y derivadas que terminarán configurando el REI.
- *Diseño didáctico*: el profesor-investigador elabora un diseño a priori consistente en los posibles caminos que podría elegir el alumnado al intentar resolver la cuestión generatriz y sus cuestiones derivadas.
- *Experimentación y observación clínica*: puesta en marcha del REI en el salón de clase con una modalidad de trabajo cooperativo entre los alumnos y el profesor-investigador, contando con el apoyo de un observador.
- *Selección de información*: valiéndose para ello de los apuntes del observador, los apuntes de los alumnos, las grabaciones de las clases, cuestionario final a los alumnos, entrevista con los alumnos.
- *Análisis y evaluación*: Tras seleccionar la información recogida, esta será analizada y evaluada poniendo especial énfasis en las dialécticas que en el proceso de estudio se han suscitado y en los momentos de estudio.
- *Desarrollo*: Se espera poder concretar un diseño a posteriori con las modificaciones sugeridas tras el análisis.

En García et al. (2019, p.82), se encuentra de manera sintetizada el análisis clínico articulado con las fases de la Ingeniería Didáctica como se muestra en la figura 22, la cual ha sido introducida por Artigue, se deja en claro que hay una diferencia entre ingeniería didáctica para la investigación e ingeniería didáctica para el desarrollo de recursos y la formación del profesorado.

Figura 20: Ingeniería didáctica como metodología de investigación y diseño
Fuente: García et al. (2019, p.82)

4.2 Diseño matemático

En la Figura 23 se muestra las relaciones entre las praxeología de un contexto extra-escolar, en el cual se determina las praxeologías propias del contexto, que luego se busca una relación con las praxeologías matemáticas para poder así construir el diseño matemático a priori para garantizar la fecundidad de las cuestiones generatrices iniciales, Barquero (2009, p.94), aunque no se descarta que aparezcan cuestiones que no habían sido previstas.

El dispositivo que se pretende generar es un REI bidisciplinar, en el que intervienen los saberes propios de la Física y de la Matemática.

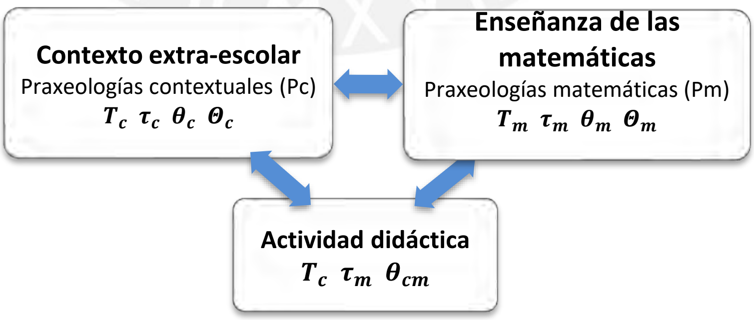


Figura 21: Elementos para el diseño de la actividad didáctica
Diagrama adapatado de Covián Chávez & Romo-Vázquez (2017)

En Siero González & Romo Vázquez (2017) encontramos una metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática que en nuestro trabajo hemos adaptado para que sea de utilidad para sistematizar la construcción del diseño matemático a priori del REI. Conjugando estas experiencias, la metodología presenta las siguientes fases:

1. Elección del contexto extramatemático de la actividad.

2. Análisis praxeológico e identificación del modelo matemático.

3. Análisis del modelo matemático identificado y su relación con la enseñanza de la matemática.

4. Diseño de la actividad didáctica: definiendo la cuestión generatriz.

A continuación se presenta los procedimientos para la construcción del diseño en el cual se ha tomado en consideración el análisis clínico y la metodología para el diseño que hemos adaptado para la construcción del diseño de la actividad para que experimentar un REI.

4.2.1 Elección del contexto extra-matemático: Un salto de paracaidismo

Paracaidismo es una actividad humana cuya práctica se remonta a los inicios del milenio pasado (s. XII) con los chinos, aunque recién la práctica más cercana al modo como se practica hoy tiene más o menos un siglo de antigüedad. Es en el ámbito militar, propio de la segunda guerra mundial, donde esta práctica comienza a perfeccionarse, y culminada la guerra es que el paracaidismo comienza a ganar mayor popularidad, estableciéndose cada vez más, una mayor cantidad de competencias y aficiones (Australian Parachute Federation LTD, 2017).

Para que una actividad tan riesgosa como lo es lanzarse de una nave desde alturas que pueden superar los 1500 metros tenga un mínimo de seguridad y pueda lograr un aterrizaje exitoso, se deben tener en cuenta una serie de tareas y técnicas que permitan controlar las variables que influyen en la caída.

En este proyecto se ha elegido estudiar un caso concreto y extraordinario de estas prácticas de paracaidismo: El récord Guinness del paracaidista Felix Baumgartner al superar la velocidad del sonido tras saltar en caída libre desde el borde de la estratósfera. Aunque Felix no es el único que ha logrado saltar desde la estratósfera, hasta la fecha sí es el único que ha experimentado una caída con una velocidad mayor a la del sonido. Si bien esta no es una actividad humana ordinaria, resulta sumamente asombroso lo que el hombre con su inteligencia y audacia puede conseguir, moviendo el interés a investigar cómo ha sido posible tal hazaña.

Para que este récord haya sido posible con éxito se requiere un dedicado estudio desde la Física, de tal manera que sea posible controlar, en primer lugar, mediante cálculos teóricos y luego prácticos, la diversidad de variables que intervienen en el fenómeno y las posibles ocurrencias durante la experimentación, y así minimizar riesgos durante la misma.

4.2.2 Análisis praxeológico del contexto extra-matemático

¿Cuáles son las tareas que todo aprendiz paracaidista debe tener muy en cuenta y no perder la vida en el intento? ¿Cuál es la secuencia de tareas a realizar? ¿Esta secuencia puede variar?

Las prácticas ordinarias de paracaidismo se caracterizan por llevar a cabo una secuencia de instrucciones que facilitan a los principiantes iniciarse en esta actividad. A continuación, se muestran la secuencia de tareas que sugiere un curso de paracaidismo online de la empresa Skydive Jurien Bay situada en Perth, Australia (Skydive Jurien Bay, 2018).

4.2.2.1 Praxeologías puntuales de contexto: Tipos de tareas y técnicas

T1: Tomar la posición de salida del avión para un buen inicio de descenso

τ_1:

- Para iniciar el descenso, lo primero que hay que hacer es colocarse cerca de la puerta de la aeronave, mirar el horizonte, voltear a chequear el sitio de partida, colocar la cabeza hacia arriba (no mirar hacia abajo), luego soltarse sin impulsarse, de lo contrario el viento lo volteará.

  Iniciado el descenso tome la postura de “arco”, es decir con la cabeza hacia atrás, caderas hacia adelante, rodillas ligeramente separados una distancia como el ancho de los hombros y ligeramente dobladas y el vientre hacia abajo.

Figura 22: Inicio de un salto de paracaidismo
Fuente: Skydive Jurien Bay (2016)

T2: Realizar dos tirones de práctica

τ_2:

- Teniendo la postura de arco, se da paso a realizar un par de movimientos de práctica del despliegue del paracaídas. Para lo cual es necesario, mantener la cabeza hacia atrás y colocar el brazo izquierdo al frente de la cara, simultáneamente agarrar el asa de despliegue con la mano derecha y repetir el procedimiento.

Figura 23: Ensayo de tirones del paracaídas
Fuente: Skydive Jurien Bay (2016)

T3: Mantener estabilidad en la caída libre

τ_3:

- Para guardar estabilidad durante la caída siempre será necesario mantener la forma de “arco”, con el vientre hacia la tierra. Brazos y piernas separados por igual distancia.

Figura 24: Posición de arco
Fuente: Skydive Jurien Bay (2016)

T4: ¿Cómo realizar maniobras durante la caída libre?

τ_4:

- Los giros son controlados por la parte superior del cuerpo. Para realizar giros durante la caída es necesario inclinar los codos en la dirección que se desea girar. Inclinar el codo izquierdo genera un giro hacia la izquierda, por lo contrario, inclinar el codo derecho, genera un giro hacia la derecha (Expertvillage, 2008).
- Los movimientos para conducirse hacia delante son controlados por las piernas. El movimiento hacia adelante se genera extendiendo las piernas completamente y echando los brazos hacia atrás. Esto aumenta la superficie de contacto en la parte inferior del cuerpo, disminuyendo la del extremo superior, haciendo que el cuerpo se incline hacia adelante y se desplace hacia adelante.
- Por lo contrario, para desplazarse hacia atrás se debe tirar los brazos hacia adelante y flexionar las piernas, echándolas hacia adelante, causando el efecto contrario al caso anterior.

T5: ¿Qué se debe hacer para desplegar correctamente el paracaídas?

τ_5:

- En primer lugar, es necesario mantener la postura de “arco”, luego con la mano derecha, se debe alcanzar la parte posterior de la cintura, ya que aquí es donde se ubicará el asa de despliegue del paracaídas. La mano derecha debe tener la palma mirando hacia atrás, simultáneamente la mano izquierda debe estar en frente de la cabeza, ya que esto permite que el cuerpo se mantenga simétrico y con ello evitar girar y caer con la cabeza hacia adelante, más abajo que el cuerpo, lo cual dificulta poder tirar del asa de despliegue.

- Después de tirar del asa vuelva a la posición de arco, mientras que el paracaídas se va abriendo por la espalda.
- Tras el tirón se debe hacer un conteo de 5 segundos, haciendo uso de los números 1000, 2000, 3000, 4000 y 5000. No llegará a 4000 y su paracaídas ya se habrá desplegado completamente. Si no es así, será porque el dispositivo piloto ha quedado un tanto atrapado, para ello gire su dorso hacia atrás, lo cual permitirá fluir aire hacia la burbuja del paracaídas, cuando llegue a 5000, el paracaídas ya se estará abriendo.

4.2.2.2 Cuestionamientos de las técnicas: la tecnología y la identificación de modelos matemáticos

Tras exponer la rutina de tareas que debe ejecutar un paracaidista, surgen una serie de interrogantes que apuntan a dilucidar las razones por las que es necesario realizar esa secuencia de tareas y por qué las posturas mencionadas son causa de un desplazamiento con mayor o menor velocidad, en una u otra dirección.

a. **Estudio tecnológico-teórico del movimiento sin resistencia de aire: Caída libre**

¿Cómo es el movimiento de caída que experimenta un cuerpo cuando no hay resistencia de aire?

La problemática planteada pone como centro temático el estudio de un movimiento en una dimensión con aceleración constante. En diversos libros especializados en Física Universitaria se aborda el tema de caída libre en el principio de su secuencia de contenidos. Libros como Tipler & Mosca (2003), Young & Freedman (2009) y Serway & Faugh (2001) son referentes para la enseñanza de este tema en el nivel de bachillerato y universitario.

a.1. Elementos y modelos de un MRUV:

Desplazamiento: Es la variación de la posición de un móvil desde una posición inicial x_i a una posición final x_f:

$$\Delta x = x_f - x_i.$$

Velocidad media: se define como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo durante el cual éste se produce, $\Delta t = t_f - t_i$.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Velocidad instantánea: es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero, y se expresa:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Aceleración media: se define como el cociente del cambio de velocidad entre el intervalo de tiempo durante el cual se produce este cambio (Serway & Faugh, 2001).

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Aceleración instantánea: se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero. Es decir:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Aceleración constante: si una partícula tiene aceleración constante *a*, su aceleración media en cualquier intervalo de tiempo es también *a*. Es decir:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

a.2. Estudio cinemático del movimiento de descenso: Análisis de los modelos funcionales

El movimiento es un fenómeno ordinario que experimentan todos los individuos, y su estudio científico se remonta a varios siglos atrás. Específicamente el movimiento propio de una caída libre, fue estudiado destacadamente por Galileo y posteriormente por Newton, y las reglas encontradas en este fenómeno giran en torno la idea fundamental de que todo movimiento de caída libre se ejerce por efecto exclusivo de la gravedad, es decir, en ausencia de la resistencia del aire, sin importar si la masa y volumen del objeto en descenso es mayor o menor. Para que esto sea posible, es necesario que el descenso se realice en un ambiente vacío de aire, pues de lo contrario éste sería una variable adicional a considerar en el fenómeno que genera efectos que estamos acostumbrados a ver, en los que los objetos más livianos caen más lentamente que los pesados.

(27) (28)

Figura 25: Moneda y pluma que descienden juntas con aceleración constante en una cámara de vacío.
Fuente: Wilson & J. (2003).

Figura 26: Destellos a tiempos iguales que registran la posición de una pelota en caída libre.
Fuente: Young & Freedman (2009).

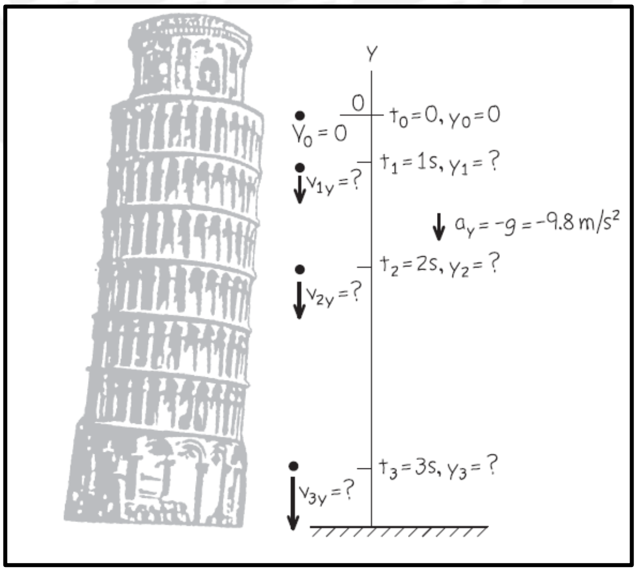


Figura 27: Diagrama de movimiento de un móvil donde se representan las alturas y velocidades experimentadas por un móvil durante los tres primeros segundos.
Fuente: Young & Freedman (2009).

En una situación de descenso por caída libre con velocidad v_o en el tiempo t=0 y v al cabo de cierto tiempo *t*, la aceleración constante correspondiente es como se muestra:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{t - 0} = \frac{v - v_o}{t}$$

Es decir: $\boldsymbol{v = v_o + at}$

Sin embargo, específicamente en el descenso de un móvil se tiene que $\boldsymbol{a = -g}$ para cualquier tiempo *t* del descenso, donde g es la gravedad.

Entonces: $\boldsymbol{v(t) = v_o - gt}$ *y* $\boldsymbol{v(t) = -gt}$, *cuando* $v_o = 0$

Para estos casos donde la aceleración es constante se puede obtener una expresión para la posición del móvil en función del tiempo a partir de dos expresiones equivalentes de la velocidad media para el intervalo de tiempo de *t=0* a cualquier *t* posterior:

$$v_m = \frac{x(t) - x_0}{t - 0} = \frac{\boldsymbol{x(t) - x_0}}{\boldsymbol{t}} \quad \text{y} \quad v_m = \frac{v(t) + v_0}{2} = \frac{\boldsymbol{(v_0 - gt) + v_0}}{\boldsymbol{2}}$$

$$\frac{x(t) - x_0}{t} = \frac{2v_0 - gt}{2}$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Considerando la posición como la altura:

$$\boldsymbol{h(t) = h_o + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2} \quad \textbf{\textit{y}} \quad \boldsymbol{h(t) = h_o - \frac{1}{2} g t^2} \quad \textbf{\textit{, cuando}} \ \boldsymbol{v_0 = 0}$$

Hemos identificado tres principales modelos funcionales que describen el movimiento en el vacío bajo la acción de la gravedad únicamente:

$$\boldsymbol{h(t) = h_o + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boldsymbol{v(t) = v_o - gt}$$

$$\boldsymbol{a(t) = -g}$$

b. Estudio tecnológico-teórico del movimiento con resistencia de aire

¿Por qué es importante la postura de “arco” en los diferentes tipos de tareas a efecutar durante el descenso?

Es importante adoptar desde el principio esta postura, ya que al iniciar la caída, **la gravedad** comienza de inmediato a atraer el cuerpo hacia al suelo, por lo que éste empieza a acelerar. Sin embargo, simultáneamente el cuerpo experimenta el efecto de otra fuerza, **la resistencia del aire**, de dirección contraria al descenso, y que va en aumento a medida que la velocidad de caída crece, llegando en cierto momento a contrarrestar el efecto de la fuerza gravitacional, logrando el equilibrio de traslación, es decir alcanzando una velocidad constante conocida en paracaidismo como **velocidad terminal**. Colocarse en la postura de "arco" permite maximizar la actuación de la fuerza de la resistencia sobre el cuerpo, ya que el área de contacto transversal es la mayor posible, aproximadamente 0.5 m^2 (Meade & Struthers, 1999, pág. 418).

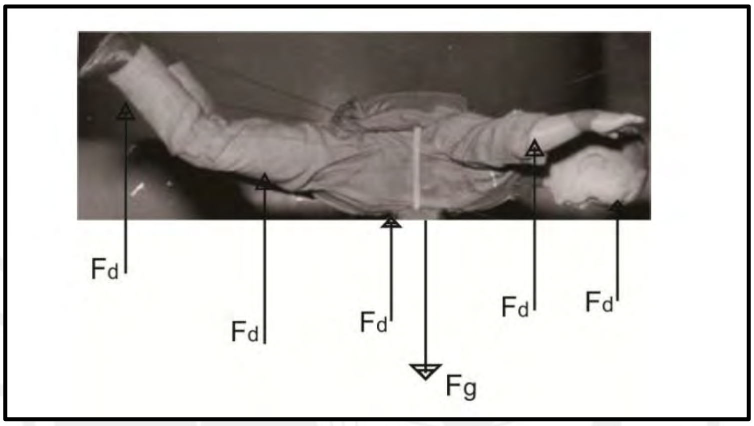


Figura 28: Efectos de la fuerza de resistencia del aire sobre el cuerpo en caída libre
Fuente: Asmianto, Hariyanto, & Herisman (2018).

En la fuerza de resistencia del aire, se encuentra la respuesta del porqué de muchas de las tareas y técnicas propias del paracaidismo, ya que de las dos fuerzas actuantes esta es la única que el paracaidista puede controlar, en cierta medida, para la ejecución de un descenso sano y salvo. Es decir, es debido a esta resistencia del aire que el hombre puede realizar este tipo de prácticas, pero antes de ser experimentadas estas han sido estudiadas progresivamente.

A partir del Análisis Matemático se ha encontrado que este fenómeno puede ser modelado por más de un modelo matemático, unos más precisos que otros. En esta memoria se traerán a colación dos modelos que explican el papel de la fuerza de resistencia en este fenómeno.

b.1. Primer modelo matemático de un descenso de paracaidismo:

En Meade (1997) se explica una primera propuesta de modelización del descenso de paracaidismo que resumidamente expondremos en esta memoria.

Por los conocimientos de física logrados sobre el movimiento, concretamente por la segunda ley de Newton, se puede establecer que en el descenso de un paracaidista la actuación de las fuerzas gravitatoria y de resistencia cumplen:

$$\boldsymbol{F_g + F_d = m.a}$$

Donde:

F_g: es la fuerza gravitatoria

F_d: es la fuerza de arrastre.

m: es la masa del paracaidista

a: es la aceleración $\left(\frac{dv}{dt}\right)$

En este primer modelo, la fuerza gravitacional se define por $F_g = -mg$, con $g \approx 9.81\,\frac{m}{s^2}$ y la fuerza de arrastre se asume directamente proporcional a la velocidad de caída, $F_d = -kv$, donde el coeficiente de arrastre, k, tiene un primer valor, k_1, cuando el descenso es sin paracaídas, y un segundo valor, k_2, cuando el descenso es con el paracaídas completamente desplegado (Meade & Struthers, 1999). A partir de ello, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{m.g - kv = m.\frac{dv}{dt}, \quad v(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{k = \begin{cases} k_1\,, & 0 \leq t < t_d \\ k_2\,, & t \geq t_d \end{cases}}$$

$\boldsymbol{t_d}$**:** Es el instante de despliegue del paracaídas.

A partir de esta ecuación diferencial ordinaria se puede obtener el modelo correspondiente a la función velocidad para el primer trayecto:

$$\boldsymbol{v(t) = x'(t) = \frac{mg}{k_1}\left(e^{-\left(\frac{k_1}{m}\right)t} - 1\right)}$$

Mediante la derivación de esta función se puede obtener la función de la aceleración para el primer trayecto:

$$\boldsymbol{a(t) = v'(t) = g.e^{-\left(\frac{k_1}{m}\right)t}}$$

A su vez, mediante la integración y considerando $x(0) = x_0$, se puede obtener la función posición para el primer trayecto:

$$\boldsymbol{x(t) = x_0 - \frac{mg}{k_1}t - \frac{m^2 g}{{k_1}^2}\left(e^{-\left(\frac{k_1}{m}\right)t} - 1\right)}$$

Estas tres funciones representan estas tres magnitudes del descenso en su primera fase, cuando $0 \leq \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_d}$.

Para cuando $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_d}$, asumimos la continuidad de la función velocidad cuando $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_d}$, obteniendo con ello una única función velocidad que modele todo el trayecto del descenso, como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{v(t)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k_1}}\left(\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{k_1}}{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t})} - \boldsymbol{1}\right) & , \quad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_d} \\ \dfrac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k_1}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{k_2}}{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_d})}\left(\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{k_1}}{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t_d})} - \boldsymbol{1}\right) + \dfrac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k_2}}\left(\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{k_2}}{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_d})} - \boldsymbol{1}\right), & \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_d} \end{cases}$$

A continuación, se muestran los gráficos de las magnitudes correspondientes al salto de caída libre de un paracaidista de $m = 75kg$, desde una altura de $x_0 = 1200m$, con un primer coeficiente de arrastre de $k1 = 14kg/s$ y luego con un segundo coeficiente de $k2 = 160kg/s$ con una apertura de paracaídas a 20s de haber saltado.

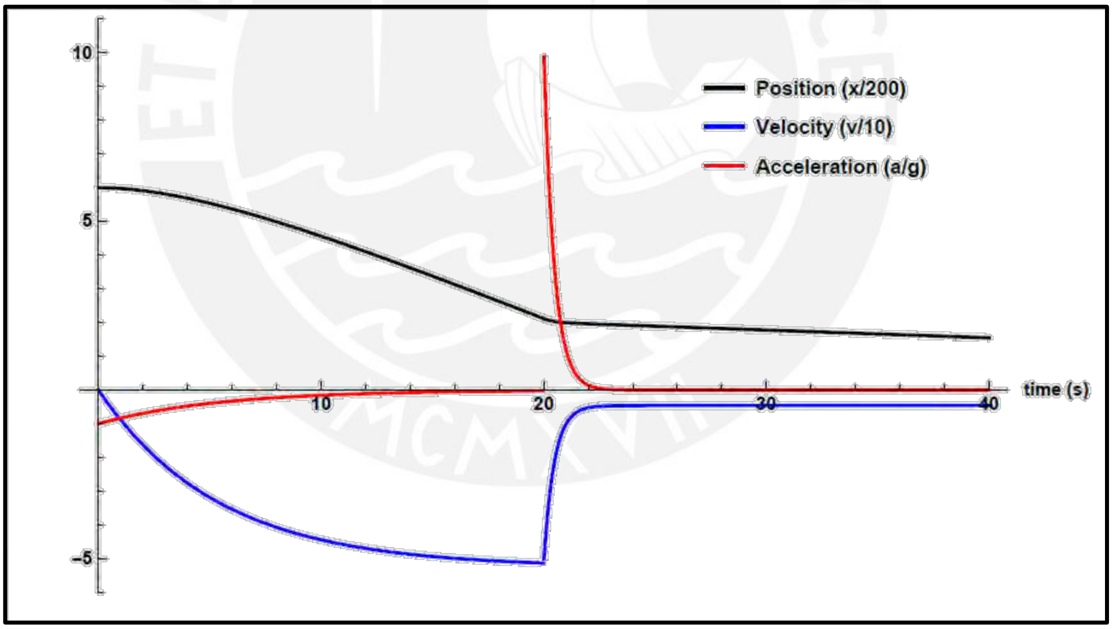


Figura 29: Gráfico de soluciones para la posición, velocidad y aceleración para el modelo básico.
Fuente: Meade (1998)

Haciendo una interpolación cúbica se puede representar con un poco más de precisión la transición entre el primer valor estable del coeficiente de arrastre y el siguiente, rescatando la continuidad entre una fase y otra.

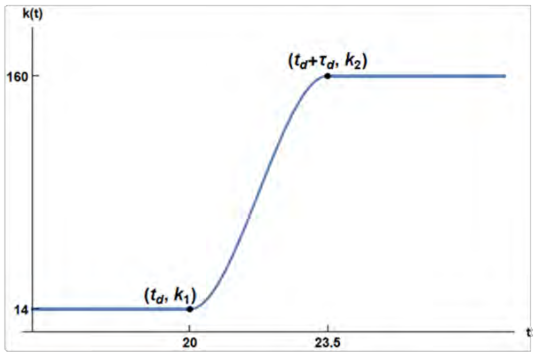


Figure 7: Cubic interpolation.

Figura 30: Interpolación cúbica para el valor de k en la transición de apertura del paracaídas
Fuente: Meade (1998)

Los gráficos de las magnitudes tras la interpolación de k se muestran a continuación:

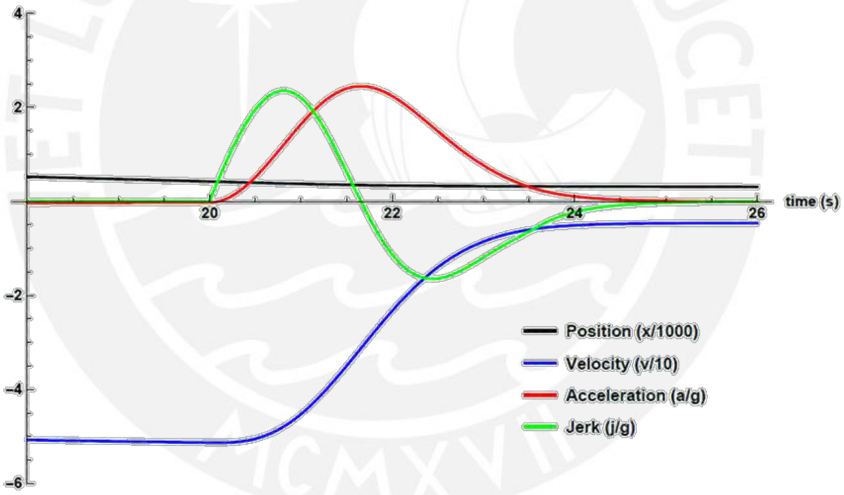


Figure 8: Graph of solutions for position, velocity, acceleration, and jerk when k_d is cubic.

Figura 31: Gráficos de los modelos de posición, velocidad, aceleración y jerk cuando k es cúbico.
Fuente: Meade (1998)

b.2. Segundo modelo matemático de un descenso de paracaidismo:

Meade y Struthers (1999) explican una segunda propuesta de modelización de este fenómeno considerando los aportes que se encuentran en los principios de la dinámica de fluidos. Mencionan que mediante las ecuaciones de Navier-Stokes se puede describir el movimiento de un cuerpo a través de un fluido viscoso, y la rapidez que éste experimenta se describe haciendo uso del número adimensional denominado Reynolds (Re). Las ecuaciones de Navier-Stokes contienen fuerzas inerciales y viscosas, y el grado de participación de estas en el movimiento es descrito por el número de Reynolds Re. Concretamente en nuestro caso, cuando Re> 10^3 las fuerzas inerciales dominan y la fuerza de arrastre (resistencia) es aproximadamente cuadrática en la velocidad, teniendo con ello la siguiente fórmula:

$$F_d = \frac{1}{2} C_d . A\rho v^2$$

Donde:

C_d: es el coeficiente de arrastre
A: es el área de la sección transversal
ρ: es la densidad del fluido
v: es la velocidad

El coeficiente de arrastre depende de la postura del cuerpo del paracaidista en el descenso, esta puede variar según lo mostrado en la siguiente figura:

Shape	Reynolds number	C_d
Hemispherical shell	$Re > 10^3$	1.33
Disc	$Re > 10^3$	1.10
Flat strip	$Re > 10^3$	1.95
Cylinder	$10^3 < Re < 2 \times 10^5$	1.95
Cylinder	$Re > 5 \times 10^5$	≈ 0.35
Sphere	$10^3 < Re < 2 \times 10^5$	0.45
Sphere	$Re > 3 \times 10^5$	≈ 0.20

Figura 32: Coeficientes de arrastre de formas comunes
Fuente: Meade & Struthers (1999)

En este estudio se tiene en cuenta una serie de detalles que en el primer caso habían sido simplificados, tales como el hecho de que la fuerza de arrastre es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, además que esta es producida tanto por el cuerpo del paracaidista como el equipo de paracaídas, sin dejar de mencionar el hecho de haber considerado más intervalos de tiempo en los que los parámetros de resistencia cambian según la postura corporal del paracaidista y la apertura progresiva del paracaídas.

El modelo mejorado para la velocidad del paracaidista es:

$$\boldsymbol{m.\frac{dv}{dt} = -m.g + kv^2, \qquad v(0) = 0}$$

Donde *k* equivale a:

$k = \frac{1}{2}\rho\left(C_d^b A^b + C_d^e A^e\right),$

Siendo C_d^b el coeficiente de arrastre del cuerpo, A^b el área transversal del cuerpo, C_d^e el coeficiente de arrastre del equipo, y A^e área transversal del equipo

Y desdoblando esta relación en los diferentes intervalos de tiempo tendríamos:

$$k = \frac{1}{2}\rho \begin{cases} 1.95b_0, & t \le t_0 \\ 1.95b_0 + 0.35b_1 l\dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0}, & t_0 < t \le t_1 \\ 0.35b_1 h + 1.33A_{1,2}^e(t), & t_1 < t \le t_2 \\ 0.35b_1 h + 1.33A_{2,3}^e(t), & t_2 < t \le t_3 \\ 0.35b_1 h + 1.33a_1, & t \ge t_3 \end{cases}$$

Cuyos parámetros estimados son como se muestra en la tabla siguiente:

Table 2. Parameter estimates for a typical skydiver and equipment

a_1	b_0	b_1	h	l	m	t_0	t_1	t_2	t_3
43.8 m^2	0.5 m^2	0.1 m^2	1.78 m	8.96 m	97.2 kg	10 s	10.5 s	11.5 s	13.2 s

Donde:

$a_1 =$ es el área del paracaídas desplegado

$b_{0,1}$: es el área transversal del cuerpo

h: Altura del cuerpo

m: masa del cuerpo

t_0: instante de despliegue del paracaídas

$t_{0,1,2,3}$: instantes en que se experimenta cambios de parámetros.

Los gráficos correspondientes a los modelos del desplazamiento, velocidad y aceleración del movimiento se ven a continuación:

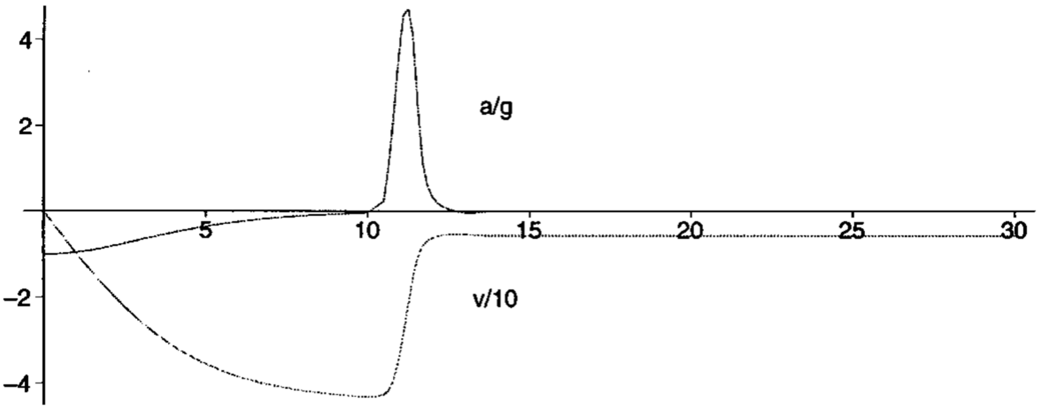
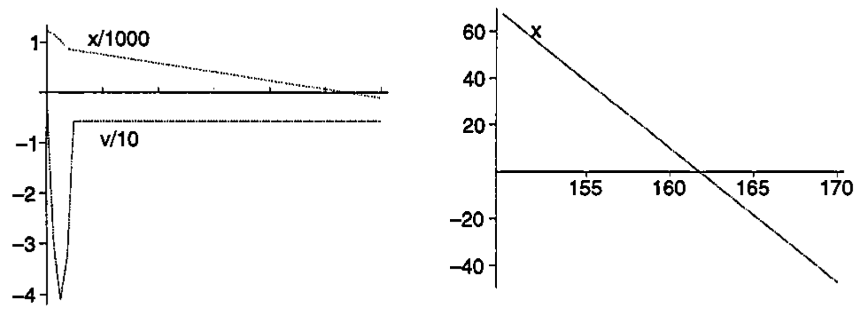


Fig. 2. Velocity and acceleration for the first 30 seconds of the jump.

Figura 33: Velocidad y aceleración para los 30 primeros segundos de un salto de caída libre.
Fuente: Meade & Struthers (1999)



(a) $0 \le t \le 180$ seconds (b) $150 \le t \le 170$ seconds

Fig. 4. Plots used to estimate time of impact: (a) position and velocity during first three minutes of jump and (b) position near time of landing ($150 \le t \le 170$).

Figura 34: Gráfico usado para estimar el tiempo de impacto: (a) Posición y velocidad durante los primeros tres minutos del salto y (b) Posición cerca del tiempo de aterrizaje
Fuente: Meade & Struthers (1999)

4.2.3 Formulación de la cuestión generatriz

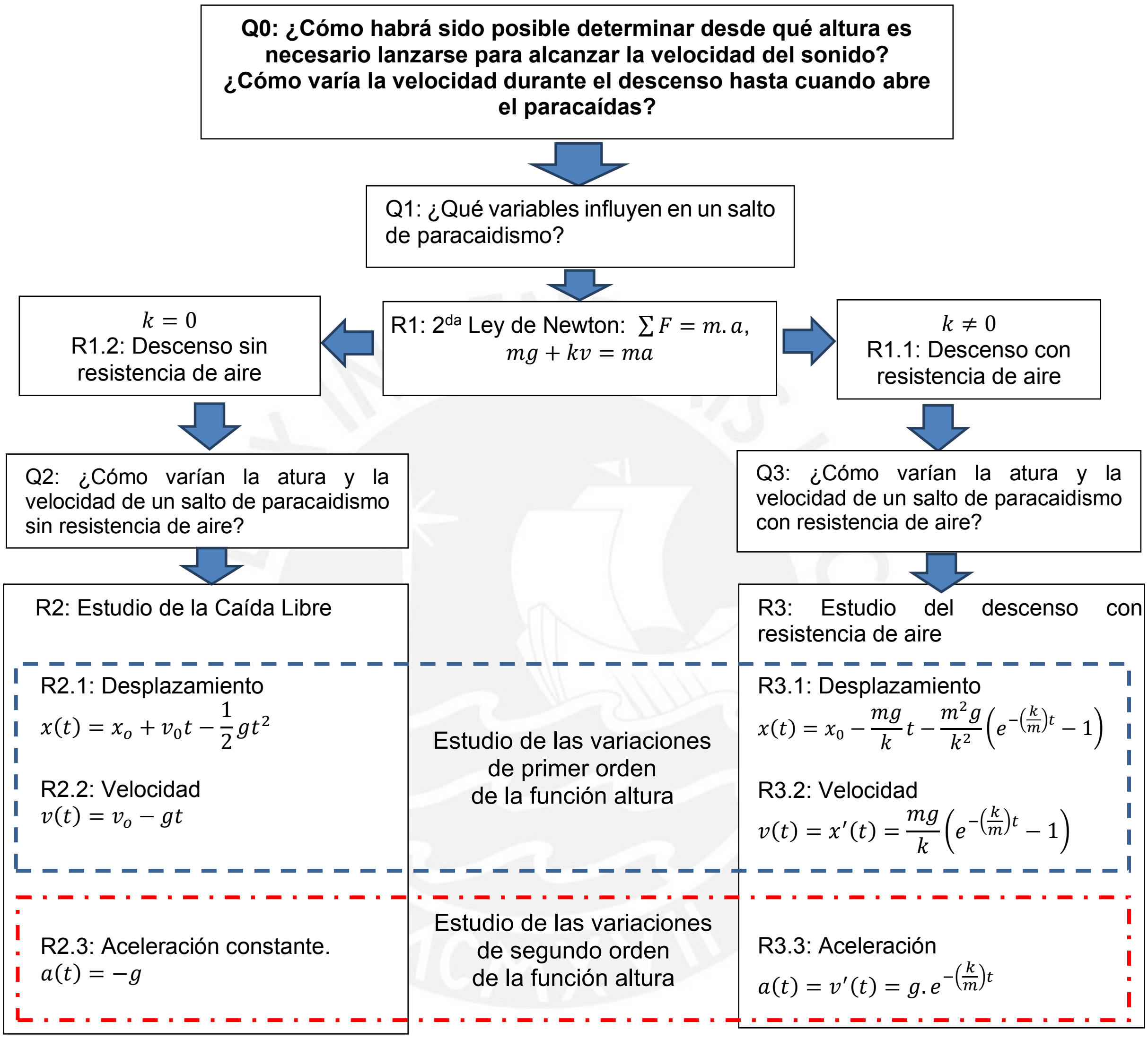
Tras los análisis desarrollados en las fases anteriores, se puede llegar a la conclusión de que el descenso de Felix Baumgartner consta de dos partes: La primera, se caracteriza por ser un descenso sin resistencia de aire, formalmente denominado caída libre; y la segunda, se caracteriza por ser un descenso con resistencia de aire. Esto nos posibilita formular una cuestión generatriz que movilice a los estudiantes a investigar la naturaleza de un salto de paracaidismo rico en diferentes sistemas de variación, cuya modelización matemática es importante conocer para que las predicciones puedan ser acertadas en la menor cantidad de experimentaciones, además que es medio seguro para validar las características de este récord mundial. La cuestión generatriz Q_0 es:

> **¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?**

La cuestión de partida permite que el estudiante recorra los contextos propios del paracaidismo, de la física y la matemática, y favorece especialmente que éste emplee el uso de la noción de función derivada para caracterizar el movimiento.

Esquema del diseño matemático

El análisis desarrollado permite dilucidar que el diseño matemático del REI se podría estructurar como se muestra en el esquema:



CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL REI

En el presente capítulo se presenta el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que se ha propuesto para estudiar una cuestión sobre un salto de paracaidismo supersónico que involucra el uso de la noción de función derivada. La cuestión ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas? suscita el estudio cinemático de los movimientos propios de una caída libre (sin resistencia de aire) y de una caída con resistencia de aire. Dadas las caracterísitcas del medio propuestas para el proceso de estudio, el REI puede desarrollarse en varios caminos, entre los cuales, resulta muy probable la intervención del objeto matemático derivada o tasa de variación instantánea como obra de estudio útil para la descripción del movimiento en cada una de sus fases.

Este capítulo está compuesto de tres secciones: en la primera sección se presenta la propuesta del diseño, en la segunda la descripción del recorrido efectivamente experimentado y en la tercera, el análisis del proceso de estudio centrado en tres dialécticas.

5.1 Descripción de un posible de indagación

El REI sobre un salto de paracaidismo con velocidad supersónica se propondrá como un trabajo colaborativo de exploración matemática, en el que el rol del profesor es el de un asesor de investigación. Se han propuesto tres etapas para desarrollar el REI que se detallan a continuación:

Primera fase: Exploración de la situación de contexto

En primer lugar, se mostrará en una presentación de power point al pleno de alumnos la noticia sobre el “Guinnes world record” Felix Baumgartner, para luego dar paso al planteamiento de la cuestión generatriz Q_0.

“El austriaco Felix Baumgartner consiguió realizar este domingo un salto sin precedentes desde el borde del espacio, a una altura de los 39 kilómetros (39.045 metros), durante el cual también logró alcanzar una velocidad máxima de 1.342 kilómetros por hora y romper con la barrera del sonido.” (BBC, 2012)

En el año 2012 el famoso paracaidista Felix Baumgartner se convirtió en el primer hombre supersónico sin ningún dispositivo propulsor, sino solamente mediante un salto de caída libre desde el borde del espacio.

Q0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido?¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?

En esta primera fase, los alumnos organizados en grupos de 4 o 5 integrantes, tienen que explorar la situación de contexto, averiguar en primer lugar que esta situación consiste en una práctica de paracaidismo y, en segundo lugar, averiguar qué variables intervienen en un fenómeno como tal. Esto facilitado en cierta medida mediante las siguientes preguntas realizadas al principio de manera oral: ¿Cómo es posible alcanzar la velocidad del sonido y sobrevivir? ¿Qué variables influyen en el descenso de un paracaidista, y de qué modo lo hacen?

Se espera que los alumnos en esta fase sean capaces de encontrar los *medios* apropiados en internet, como por ejemplo filmaciones del salto en estudio, reportes científicos de la experimentación de Red Bull, sitios web informativos y explicativos, estudios de paracaidismo, etc, para con ellos introducirse en la situación contextual y luego llegar a identificar a la fuerza de resistencia del aire como la principal variable que condiciona, por su ausencia o presencia, la velocidad y aceleración experimentada por el paracaidista. Por las características del fenómeno y por la inspección hecha en diversas fuentes se considera bastante posible que los alumnos lleguen a identificar dos grandes etapas en el movimiento del descenso, uno uniformemente variado, propio de la caída libre debido a la ausencia de aire en la estratósfera, y otro diformemente variado, propio de la caída con resistencia de aire. Tras la formulación de la respuesta rombo de esta fase por parte de cada grupo, se invitará a divulgar los resultados de sus primeros estudios para una puesta en común dirigida por el profesor y que concluiría con la formulación conjunta de la siguiente cuestión derivada a estudiar. En esta parte, el profesor promoverá que el proceso desemboque en el estudio de caída libre, para dar pie al despliegue de la actividad matemática por parte de los alumnos.

Segunda fase: Estudio de la caída sin resistencia de aire: la caída libre.

En esta segunda fase se espera que se de inicio al estudio de las magnitudes del movimiento de caída libre a través del cuestionamiento Q2: ¿Cómo varía la altura y la velocidad de un salto de paracaidismo sin resistencia de aire? para cuyo desarrollo los alumnos contarán como *media* disponible: el acceso a internet, tres libros virtuales de física y el libro texto del curso de Matemáticas.

Dado que para la puesta en práctica de este diseño, los alumnos ya han estudiado el movimiento rectilíneo uniformemente variado y la caída libre en su curso de Física, se espera que en esta situación empiecen a acudir a las praxeologías propias de la caída libre, concretamente a los modelos de altura, $h(t) = h_o - v_o t - \frac{1}{2}gt^2$, y de velocidad final, $v(t) = v_o - gt$, y que con ellos lleguen a identificar que la velocidad de caída solo puede ser variada por la aceleración de la gravedad.

Tercera fase: Estudio de la caída con resistencia de aire.

Para el estudio de esta fase se ha previsto como elemento clave del medio de estudio, el proporcionar una actividad con tres subpreguntas acompañadas de un modelo numérico y otro algebraico de las alturas experimentadas a lo largo del tiempo de caída (ver anexo 5), para a partir de ellos dar pie a un estudio cualitativo y también cuantitativo del descenso con resitencia de aire. Se espera que los alumnos lleguen a construir un modelo de velocidad que describa la variación de la altura con respecto al tiempo en todo el tiempo de caída experimentada.

Tabla 9: Descripción de un posible REI para el estudio del salto supersónico de Félix Baumgartner

Q0: *“El austriaco Felix Baumgartner consiguió realizar este domingo un salto sin precedentes desde el borde del espacio, a una altura de los 39 kilómetros (39.045 metros), durante el cual también logró alcanzar una velocidad máxima de 1.342 kilómetros por hora y romper con la barrera del sonido.” (BBC, 2012)*

<table>
<tr><td colspan="2">En el año 2012 el famoso paracaidista Felix Baumgartner se convirtió en el primer hombre supersónico sin ningún dispositivo propulsor, sino solamente mediante un salto de caída libre desde el borde del espacio.

Q0:
¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?</td></tr>
<tr><td>Q1: ¿Cómo es posible alcanzar la velocidad del sonido y sobrevivir?
Q1.1: ¿Qué variables influyen en el descenso de un paracaidista, y de qué modo lo hacen?</td><td>R1: Delimitación del sistema de estudio: Identificación de las variables que intervienen en el descenso y primeras hipótesis del sistema.</td></tr>
<tr><td>Q2: ¿Cómo varía la atura y la velocidad de un salto de paracaidismo sin resistencia de aire?

Q2.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido al inicio del descenso? ¿Qué significan estas variaciones?

Q2.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso?

Q2.2.1: ¿Qué modelo funcional puede llegar a caracterizar a las velocidades medias, sabiendo que la velocidad inicial es cero?
Q2.2.2: ¿Cómo varían estas velocidades?</td><td>R2: Estudio cualitativo y cuantitativo del movimiento de caída libre mediante los modelos de altura, velocidad y aceleración.
R2.1.1: Uso de regresiones lineales para modelar algebraicamente y gráficamente las alturas a partir de la tabla de datos brutos.
R2.1.2: Construcción del modelo numérico y gráfico variacional de las alturas con respecto al tiempo: las velocidades medias.
R2.2: Uso de regresiones lineales para modelar algebraicamente las velocidades medias o aproximadamente instantáneas.
R2.2.1: Construcción de un nuevo modelo numérico variacional con intervalos de tiempo más estrechos: las velocidades aproximadamente instantáneas.
R.2.2.2: Construcción del modelo numérico y gráfico variacional de segundo orden (aceleraciones medias).</td></tr>
</table>

Q3: ¿Cómo varía la altura y la velocidad que experimenta el paracaidista a lo largo del tiempo durante su descenso con resistencia de aire?	**R3:** Estudio cualitativo y cuantitativo del descenso con resistencia de aire mediante los modelos de altura, velocidad y aceleración.
Q3.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo? ¿Qué significan estas variaciones?	**R3.1.1:** Uso de regresiones para modelar algebraicamente y gráficamente las alturas a partir de la tabla de datos brutos. **R3.1.2:** Construcción del modelo numérico y gráfico variacional de las alturas con respecto al tiempo: las velocidades medias.
Q3.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas y qué tanto varían?	**R3.2:** Uso de regresiones para modelar algebraicamente las velocidades y aceleraciones medias. **R3.2.1:** Construcción de un nuevo modelo numérico variacional con intervalos de tiempo cada vez más estrechos y uso de las regresiones **R.3.2.2:** Construcción del modelo numérico y gráfico variacional de segundo orden (aceleraciones medias).
Q3.3: ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?	**R.3.3:** Identificación de la máxima y mínima aceleración media.

5.2 Desarrollo del REI e identificación de dialécticas

Para la descripción del proceso de estudio utilizaremos la siguiente leyenda:

Intervinientes:	Medios y medias
P: profesor #M: Estudiante del grupo # cuya letra inicial de su nombre es M. G#: Grupo número 1, 2 o 4 GG: Gran grupo o pleno de alumnos	Q_{ix}: Cuestión problemática *i* propuesta por un estudiante (x). Q_{iy}: Cuestión problemática *i* propuesta por el profesor (y). Q_{ij}: Cuestión problemática *j* derivada de Q_i

5.2.1 Primera etapa: Exploración de la problemática

Tabla 10: Presentación del proyecto de investigación

Sesión 0:	**Presentación de la metodología del proyecto de investigación**
Duración:	**60 minutos (martes 28/05/19)**
Desarrollo de la sesión	Como parte de la introducción de los alumnos al nuevo proceso de estudio, se explicaron determinadas características de la nueva modalidad de trabajo a realizar en las siguientes clases de matemáticas en torno a un proyecto de investigación colaborativo realizado principalmente por los alumnos con guía del profesor, y desarrollado mediante la formulación y resolución de preguntas que cada equipo de trabajo debe responder y luego comunicar y defender (Parra & Otero, 2017, p.28), de tal forma que cada vez haya una mayor aproximación a la respuesta general de la situación problemática en cuestión. Para aproximar a los alumnos a la metodología de trabajo, se aprovechó una noticia reciente sobre la primera fotografía real de un agujero negro, a través de la proyección de un video titulado *"Los algoritmos tras la primera imagen de un agujero negro" (https://www.youtube.com/watch?v=pTXCs3A6NEM)*, con el cual se resaltó la importancia del trabajo colaborativo en un equipo científico en una investigación, la multidisciplinariedad en el estudio de una situación real, la importancia de cuestionarse y de planificar los procedimientos a seguir y de registrar los avances conseguidos a lo largo del proceso para la elaboración de informes o reporte de avances de la investigación en cuestión. Tras ello, se presentó cuatro consignas que sirven para guiar el modo de proceder al investigar: • Cuestionar: intentar ver más allá de lo evidente • Matematizar: explicar cuantitativamente, matemáticamente • Organizar: organizar la información • Profundizar: aportar o resaltar algún conocimiento útil. Los recursos para realizar la investigación además del profesor de matemáticas son: • El equipo de 4 o 5 integrantes • Al menos 2 computadoras con conexión a internet por cada equipo. • Geogebra cuando se crea conveniente en el equipo. • Libros digitales de física Seguidamente se explicó el modo cómo iba a realizarse la evaluación respectiva:

	• Entrega de los avances parciales de las respuestas en un portafolio virtual a través de una carpeta compartida en Google Drive. • Exposiciones de los avances en las discusiones plenarias. • Elaboración y exposición final del informe de investigación. • Cumplimiento de los descriptores del buen desempeño en la investigación colaborativa.

Tabla 11: Planteamiento de la cuestión generatriz y primeras cuestiones derivadas

Sesión 1:	**Presentación de la cuestión generatriz**
Duración:	**90 minutos (miércoles 29/05/19)**
Medios y media	**Diapositivas para presentación de metodología y evaluación. Uso de internet**
Desarrollo de la sesión **Primera parte**	• Se conforman 6 grupos de 4 y 5 integrantes. El profesor elige los dos primeros integrantes de cada grupo y los restantes son elegidos por estos dos primeros miembros. La participación de cada uno de los alumnos es registrada según un código conformado por el número de orden del grupo y la inicial de su nombre: (1M, 1R, 1F,1S, 1G, 2E, 2J, 2M, 2C, 2R, …,4J, 4E, 4D, 4B, 4G). Luego, se elige un alumno encargado de hacer las grabaciones diarias de su equipo y de subirlas a la carpeta virtual en Drive. • Se presenta la cuestión generatriz a partir de una noticia publicada en varios medios de comunicación en el 2012:  *Figura 35:* PPT con la cuestión generatriz presentada • La pregunta generatriz es: **Q_0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?** • A partir de este planteamiento se les pregunta a los alumnos: *¿Qué convendría cuestionarse para empezar a introducirse en esta situación?* Y estos, mediante una lluvia de ideas, que se fue registrando en la pizarra, fueron mencionando una serie de preguntas derivadas que servirían como una primera aproximación a la situación problemática.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

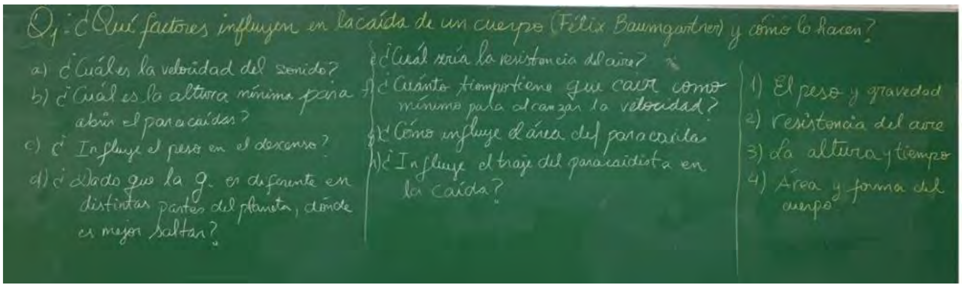


Figura 36: Lluvia de ideas sobre preguntas derivadas

- El profesor cuestionó si se puede plantear una pregunta que englobe cada una de las preguntas propuestas, ante lo que el alumno 2E aportó enunciando la primera cuestión derivada:
Q1$_x$: ¿Qué factores influyen en la caída de un cuerpo (Félix Baumgartner) y cómo lo hacen?, la cual terminó encabezando la primera fase de trabajo como se aprecia en la figura anterior.
- Con esto se dio inicio al momento del *primer encuentro* a través de fuentes principalmente virtuales. Tras un largo tiempo de estudio, el profesor lidera una pequeña puesta en común con todo el pleno (GG), y con los aportes de los diferentes grupos se identificaron cuatro factores principales, dando pie a la formulación con el pleno de las siguientes preguntas derivadas (fig.33):
  - Q1.1$_x$: ¿Cómo influye el peso y la gravedad en la caída de un cuerpo?
  - Q1.2$_x$: ¿Cómo influye la resistencia del aire?
  - Q1.3$_x$: ¿Cómo influye la altura y el tiempo?
  - Q1.4$_x$: ¿Cómo influye el área y forma?

- Se invita a especificar el estudio en cada una de las cuestiones.
- Fin de la clase.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Dialécticas encontradas

</td>
<td>

La primera dialéctica encontrada es la **dialéctica de preguntas y respuestas,** la cual emergió en esta primera sesión a través de la formulación de una serie de cuestiones específicas, que con la ayuda del profesor son agrupadas en una sola cuestión derivada Q1.

La formulación de esta pregunta permite dar inicio a la investigación de la situación al concretar con claridad las primeras inquietudes a resolver. En esta parte el estudio aún no se particulariza en cada equipo. Todos están estudiando la misma cuestión principal Q1. Sin embargo, el estudio ya empieza a favorecer el surgimiento de la dialéctica de ***individuo-colectivo*** mediante las consultas intragrupales.

Por otro lado, la dialéctica de ***media-medio*** comienza a manifestarse en el momento en que los alumnos empiezan a hacer uso del internet como un gran sistema de información (**media**), en el que deben seleccionar qué sitios web resultan apropiados para usarlos como **medio** de estudio. Durante esta primera sesión el uso de internet como media destaca bastante en comparación a la típica situación donde el profesor es la principal fuente de información. Por ejemplo, el siguiente diálogo dado en el grupo 2, dilucida esa búsqueda de información y el encuentro de una fuente aparentemente útil para el estudio.

Diálogo 1: Búsqueda de información del Grupo 2.

2M: Tienes que averiguar cosas como…
2C: Acá hay biografía, acá está el peso.
2E: ¿Cuánto pesa?
2C: Aaa…73 kilos
2E: Anótalo, ¿73 exacto?
2C: Sí
2M: ¿73? 73, Ya, ya lo anoté. ¿Qué más dice? ¿No hay…no dice nada como que velocidad del viento ese día, cosas así?
2C: No, o sea dice su perfil
2M: ¡Ah! ¿Solo perfil?

</td>
</tr>
</table>

	2C: Y ponen 1.73m 2M: ¿Anoto eso? 2E: Mmm la altura…por si acaso 2M: Metro setenta y tres…Busca factores naturales... velocidad del sonido, velocidad del viento, altura a la que saltó…algunos detalles chiquitos que pone… 2C: Eso sí lo tengo. Saltó de 39 mil metros, 39 mil 68 metros. 2M: 39 mil 68 metros 2C: Llegó a 1342.8km/h

Tabla 12: Factores que influyen en el descenso de un salto de caída libre

Sesión 2:	**Estudio de Q1: ¿Qué factores influyen en un descenso de un salto de caída libre y de qué modo?**
Duración:	**90 minutos (jueves 30 y viernes 31)**
Medios y medias	**Actividad n°1, Internet**
Desarrollo de la sesión	• Se disponen los grupos de trabajo en el aula, y se les recuerda el objetivo inmediato a alcanzar: responder a Q1. Además, se refuerza la sugerencia de abordar las preguntas derivadas teniendo en cuenta las 4 consignas. • Se continúa la investigación grupal haciendo uso principalmente de fuentes de internet, de las cuales se observa que en su mayoría son fuentes escritas, ninguna audiovisual. • Los alumnos empiezan a estudiar sitios web con información cada vez más compleja, lo que genera que los alumnos vayan perdiendo la responsabilidad matemática. Es así que se hizo una pequeña puesta en común en la que los alumnos ayudaron a otros grupos compartiendo fuentes que resultaban pertinentes. G1 y G2 compartieron respectivamente las siguientes fuentes: o https://physics.info/falling/ o https://www.physicsclassroom.com/class/newtlaws/Lesson-3/Free-Fall-and-Air-Resistance • En la segunda parte de la sesión se entrega la Actividad n°1 con la que se invita a visitar cuatro fuentes que ayuden a canalizar la información encontrada en la última sesión, dos propuestas por el profesor y dos compartidas por los alumnos la clase anterior. o https://physics.info/falling/ o https://www.physicsclassroom.com/class/newtlaws/Lesson-3/Free-Fall-and-Air-Resistance o https://www.youtube.com/watch?v=ur40O6nQHsw o https://www.youtube.com/watch?v=qEWCRKxhEZo&t=143s • Se renueva la tarea de redactar las respuestas parciales a sus preguntas derivadas teniendo en cuenta las 4 consignas: cuestionar, matematizar, organizar y profundizar. • Todos los alumnos incorporan la *Actividad n°1,* y empiezan a estudiar los videos proporcionados. • Los alumnos empiezan a redactar sus respuestas en el informe parcial, mientras que el profesor va paseándose de grupo en grupo para dar mayores especificaciones sobre el uso del portafolio, y también para dialogar sobre las respuestas que se van formulando para así transmitir un poco de seguridad a sus producciones.
Dialécticas encontradas	En esta sesión, la **dialéctica de preguntas y respuestas** se manifestó en el estudio de la *caída libre* y la *caída con resistencia de aire*, las cuales se presentan como dos

elementos cruciales de la respuesta $R_1^{\Diamond}$. En un diálogo con el profesor se puede dilucidar la presencia de esta dialéctica en el grupo 1:

Diálogo 2: Conversación entre el G1 y el profesor en torno a $\boldsymbol{R_1^{\Diamond}}$

P: Si han empezado con la resistencia del aire, vendría bien ya explicitar el modo en el que influye. ¿De qué modo influye la resistencia del aire?
1M: Cuando un objeto cae, la velocidad inicial no es muy grande. Siempre hay resistencia del aire porque la resistencia del aire es el arrastre hacia arriba, [ya] que el cuerpo [que] está cayendo está tratando de abrirse paso en medio de las moléculas de aire, entonces esas moléculas de aire al final van a terminar como que empujando el cuerpo hacia arriba, pero obviamente el peso del cuerpo es mucho mayor que el aire, entonces empieza a caer, pero ese arrastre va aumentando dependiendo de la velocidad que va ganando el cuerpo, entonces a mayor velocidad mayor resistencia de arrastre del aire.
P: ¿Entonces a lo largo del tiempo del descenso qué va pasando?
1M: Cada vez la aceleración va disminuyendo
1S: Va desacelerando
P: Va desacelerando
1F: No hasta parar
1M: La velocidad que ganó en el primer segundo no es con la misma aceleración con la que ganó en el último segundo
P: Eh, entonces eso al final ¿qué genera?
1M: Que el cuerpo termine dejando de acelerar en algún punto
P: En algún punto
1M: Va alcanzar una velocidad máxima en algún punto
1F: Claro, que ya no pueda aumentar esa velocidad, porque ya llega al tope de velocidad
1S: Pero, es cuando está quieto, porque si haces así [mostrando diferentes posturas]
1F: Claro eso depende también de la posición
P: ¡Ah! si cambia de posición entonces ahí se activa otra variable
1M: Es la superficie de la fuerza
P: Todos lo que tú me dices funciona si es que mantengo una misma posición. Entonces, eso viene bien escribirlo.

La dialéctica del individuo-colectivo también se dejó notar con cierta claridad en el grupo 1 y 2, durante la elaboración de la respuesta $\boldsymbol{R_1^{\Diamond}}$. Por ejemplo, el diálogo 3 muestra la colaboración de los integrantes para aclarar las inquietudes de sus compañeros de trabajo, elaborando ejemplos explicativos para un mejor entendimiento. Por otro lado, entre el diálogo 3 y 4, es destacable el número de alumnos (1M, 1F, 1S y 1R) que se involucran en el estudio de $\boldsymbol{R_1^{\Diamond}}$ a través de sus intervenciones a manera de preguntas, explicaciones o acotaciones, lo cual también evidencia el grado de trabajo colaborativo desplegado.

Diálogo 3: Conversación intragrupal del G1

1F: Marcelo, [de] la posición también depende
1R: ¡Ah es como en Fornite!
1M: Siii es como en Fornite,
1R: Porque si estás así [haciendo gestos], y de la nada te pones así [haciendo gestos] y bajas así.
1M: ¿Por qué? Porque eso se llama resistencia de aire, hay menos partículas debajo de un lapicero que estás así, que cuando tú tiras una computadora al piso
1R: Ah claro, ya ya sí. Ir así no te choca tanto
1F: Entonces, pero eso matemáticamente se puede…calcular.
1M: Sí, sí se puede calcular. Pero dentro de la resistencia del aire, incluye la superficie del esto y de la masa con el que se proyecta, en cambio un cañón de una tonelada contra papelito que no pesa nada debería caer más… cómo lo hago, ya. Ponte dos camiones, ambos pesan 10kg, uno es rectangular y

<table>
<tr><td></td><td>otro es así, esto de acá es más rápido [haciendo un gesto] porque la superficie es menor.
1R: uhumm

Por su parte el G2, evidencia esta dialéctica a través del diálogo 4 donde se recoge el momento en que los alumnos revisan la redacción avanzada y toman decisiones para repartir encargos de ejecución inmediata.

Diálogo 4: Conversación intragrupal de G2
2E: ¿Qué nos falta? …la altura, pero la altura está incluida dentro de la densidad, así que ya está.
2J: Ahora falta el peso, o sea la masa
2E: Ya lo puse aquí. La gravedad afecta la masa m provocando …
2J: ¿Y qué es el peso?
2E: Aquí está, la gravedad afecta la masa m provocando la fuerza conocida como peso.
2J: O sea, pero… espérate…
2E: Ahí no lo pongas
2J: No, ya está bien
2E: Ya está, esto es.
2J: Mientras Charlie lo pasa hay que buscar las fórmulas
2E: Mira que tanto sentido tiene lo que ha escrito Miguel y si algo no tiene sentido me avisas para corregirlo.
2J: [Dirigiéndose a 2M] Copia hasta acá. Solo copia estos dos párrafos.</td></tr>
</table>

Tabla 13: Puesta en común de R1 y formulación de Q2

<table>
<tr><td>Sesión 3:</td><td>Puesta en común de R1 y formulación de Q2</td></tr>
<tr><td>Duración:</td><td>90 min (lunes 03/06)</td></tr>
<tr><td>Medios</td><td>Diapositivas, pizarra y ficha de trabajo,</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de la sesión</td><td>• Se disponen a exponer las respuestas parciales que cada equipo ha conseguido formular para resolver la primera cuestión derivada: Un integrante de cada grupo sale a exponer y defender las respuestas formuladas mediante un ppt o uso de la pizarra.

• Se da la indicación que los grupos no incidan mucho en las ideas ya expuestas por sus antecesores, sino en aquellas que serían un aporte a lo que hasta ese momento se ha expuesto.

Figura 37: Propuesta de respuesta R1 del Grupo 1</td></tr>
</table>

Figura 38: Propuesta de respuesta R1 del Grupo 2

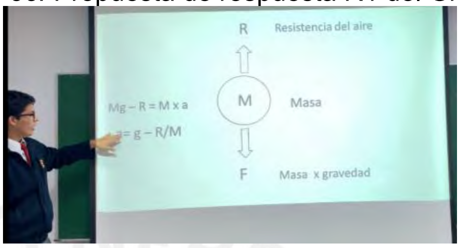


Figura 39: Propuesta de respuesta R1 del Grupo 4

- Durante la exposición no se presenta mayor cuestionamiento de las respuestas expuestas por los compañeros.
- Acabada la exposición de cada grupo, el profesor dirige una dicusión de las ideas principales expuestas en el pleno. Hay un acuerdo común en que el principal factor que influye en el fenómeno es el de resistencia de aire, el cual varía según otros varios factores, pero fundamentalmente por la densidad del aire.
- A partir de ello, se construyó conjuntamente entre el profesor y el pleno (GG) un esquema que resume las principales conclusiones que configuran a $\boldsymbol{R_1^{\Diamond}}$, para lo cual se hizo uso de una silueta de mapa conceptual (*ficha de trabajo n°2*).

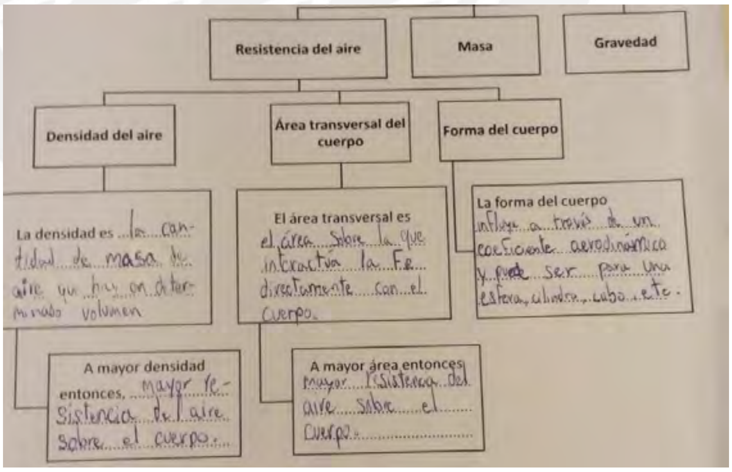


Figura 40: Esquema de la respuesta R1 tras la puesta en común

- Con la información recogida la respuesta R1 elaborada y reportada en los informes, es la siguiente:

  Q1: ¿Qué factores influyen en un descenso de un salto de caída libre y de qué modo?
  R1: Los principales factores que influyen en un descenso son la resistencia del aire, la masa y la gravedad. La resistencia del aire a su vez depende en primer lugar de la densidad del aire, que es la cantidad de masa aire contenido por unidad de volumen, por lo que es menor conforme haya una mayor altura. En segundo lugar, la resistencia depende de la superficie del

objeto que cae, es decir, si el objeto realiza algún tipo de movimiento en la caída, éste afectará la resistencia pues habría más partículas que golpeen el cuerpo en la caída. En tercer lugar, la forma del objeto, el cual se representa a través de un coeficiente aerodinámico que permite cuantificar como el objeto “rompe el aire”. Estos factores mencionados conforman conjuntamente un coeficiente rozamiento representado por **k**:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{AC}.$$

Donde **ρ es** la densidad, **A** es la superficie y **C** es coeficiente aerodinámico de la forma. Este coeficiente de rozamiento **k** interviene en la fórmula de fuerzas de rozamiento del aire:

Fr = -Kv²; donde **v** es velocidad

Todos los factores que influyen en la caída se relacionan entre sí a través de la fórmula de fuerzas, fundamentada en la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{mg - Kv^2 = ma}$$

Donde: **m** es masa, **g** es gravedad y **a** es aceleración.

- A partir de esas ideas se cuestiona qué toca investigar para poder concretar más el estudio. Tras una lluvia de ideas con diferentes propuestas, la segunda pregunta derivada quedó formulada de la siguiente manera:

  $Q2_x$: ¿Desde qué altura, la densidad del aire influye significativamente en la caída de Felix Baumgartner? ¿Cuáles serían las fases de la caída de Felix Baumgartner?

Figura 41: Momento en que es sugerida la idea que encarna a $Q2_x$

Figura 42: Preguntas derivadas propuestas por el GG

- Dicho esto, el profesor dejó como tarea:
  - Buscar fuentes que puedan dar respuesta a esta cuestión.

	o Revisar las respuestas que cada uno ha asignado a Q1 considerando las ideas expuestas por cada grupo. • Fin de la clase.
Dialécticas encontradas	A partir de las respuestas reportadas por cada uno de los grupos en las exposiciones se realiza una síntesis grupal dirgida por el profesor. Diferentes integrantes de cada grupo fueron aportando e interrelacionando las respuestas reportadas para ir así reformulando la respuesta definitiva a Q1, manifestando indicios de una dialéctica **individuo-colectivo.** A su vez, a partir de este análisis-síntesis por aporte de un alumno ante el pleno, emergió la sugerencia del siguiente paso a seguir, que con la ayuda del profesor y el resto de alumnos terminó configurando la segunda cuestión derivada, activándose de este nuevamente la **dialéctica de preguntas y respuestas.**

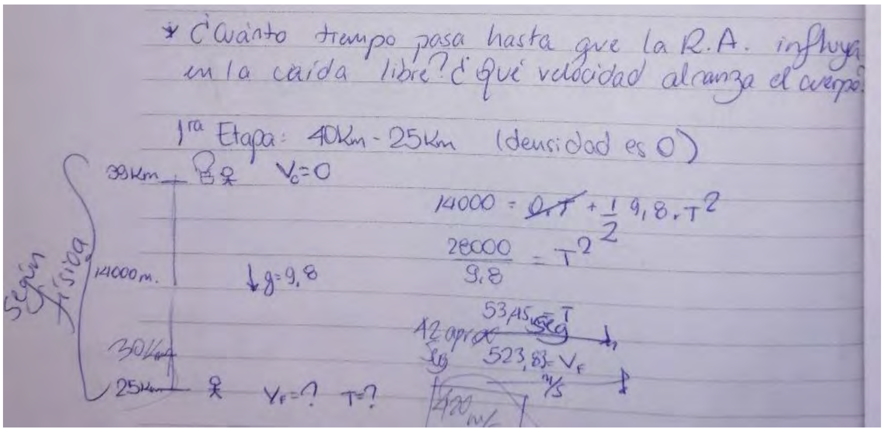
Tabla 14: Estudio de $Q2_x$ y formulación de R2 y Q3

Sesión 4:	**Estudio de $Q2_x$: ¿Desde qué altura, la densidad del aire influye significativamente en la caída de Felix Baumgartner? ¿Cuáles serían las fases de la caída de Felix Baumgartner?**
Duración:	**80 min (martes 04/06)**
Medios y medias	**Ficha de trabajo n°2, Internet, GeoGebra y pizarra**
Desarrollo de la sesión	• Los grupos continúan con la investigación para dar respuesta a la Q2. Si bien es cierto no se espera conseguir datos que permitan distinguir las fases de caída con precisión, sí se espera que los alumnos descubran que el movimiento de descenso contiene en sí más de dos fases, y que en la primera de ellas la densidad es aproximadamente nula. • Se presentaron dificultades en la investigación por más de un grupo para identificar una fuente en internet que pueda ser medio útil, ya que muchas veces los valores de densidad según la altura vienen mostrados a través de tablas con datos de alturas menores a las experimentadas en el problema, o los gráficos de densidad que se muestran suelen ser esquemáticos y por tanto imprecisos. Solo los grupos 2 y 4 llegaron a resolver aproximadamente la cuestión al final de la clase, por lo que fueron los únicos que participaron de la puesta en común, ayudando de esta manera a dilucidar la respuesta a Q2.  *Figura 43:* Puesta en común de R2 • El profesor invita a los grupos 2 y 4 a que expliquen al GG sus posibles respuestas a Q2.

	• Discusión entre los grupos para aceptar las respuestas propuestas y presentación de las conclusiones: **$Q2_x$: ¿Desde qué altura, la densidad del aire influye significativamente en la caída de Felix Baumgartner? ¿Cuáles serían las fases de la caída de Felix Baumgartner?** **R2:** La densidad al nivel del suelo es de 0.12g/l, en el límite superior de la tropósfera es de 0.04g/l y a 25 km de altura es de 0.012g/l. Por lo tanto, si Felix se lanzó a 40km de altura, la densidad del aire no influirá de manera significativa, por lo que podemos dividir su caída en 3 partes: del kilómetro 40 al 25, del 25 al 10 y del 10 al 2.5; pues es a 2557km de altura que abre su paracaídas. • Lo importante que se resalta en esta parte del proceso de estudio es que en la primera etapa al no haber densidad se pueden aplicar fórmulas de caída libre de física. • En esta parte, el profesor cuestiona al GG con la siguiente cuestión derivada: **Q3: ¿Cómo y cuánto varía la atura de un salto de paracaidismo sin resistencia de aire? ¿Y la velocidad?**
Dialécticas encontradas	La dialéctica de **medio-media** se manifestó en la pugna de cada integrante para identificar entre las distintas formas de presentar información sobre la densidad del aire, de entre tantas propuestas de tablas de distinto tipo y fórmulas. El G2 y G4 consiguieron un estudio más exitoso. Así que se les pidió que hagan una breve divulgación de los avances de sus respuestas para Q2, activándose la dialéctica del **individuo-colectivo** que permitió luego la formulación conjunta de una hipótesis como parte de la respuesta R2, ya que la información encontrada resultaba bastante imprecisa y variada. Con la formulación hecha ante el pleno con la dirección del profesor, se dio paso a la dialéctica del **estudio-investigación** con la participación del pleno en la formulación de de Q3: ¿Cómo varía la atura de un salto de paracaidismo sin resistencia de aire? El profesor intervino en la formulación, añadiendo el carácter cuantitativo.

5.2.2 Segunda etapa: Estudio de la caída sin resistencia de aire – la caída libre

Tabla 15: Estudio de las fórmulas de caída libre

Sesión 5:	**Estudio de la cuestión Q3: La caída libre**
Duración:	**90 min (lunes 10/06)**
Medios y medias	3 libros virtuales de física, 1 libro de matemática, Internet, GeoGebra y pizarra.
Desarrollo de la sesión	• Se disponen los grupos de trabajo en el aula, y se les recuerda el objetivo inmediato a alcanzar: responder a Q3. • El profesor escribe la cuestión derivada Q3 en la pizarra y los invita a estudiarla. Ante el gran grupo (GG) se pregunta qué subcuestiones pueden ayudar a concretar más aún a Q3. Los integrantes de diferentes grupos sugirieron: o 1M propone la $Q3.1_x$: ¿Cuáles son las fórmulas de caída libre en Física? o 2J propone la $Q3.2_x$: ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la R.A. empieza a influir en la caída? o 2J propone la $Q3.3_x$: ¿Qué velocidad alcanza el cuerpo en este tiempo? o 4J propone la $Q3.4_x$: ¿Cómo varía la velocidad del sonido según su altura**?** • Los alumnos a través del acceso a internet se adentran en la disciplina de la Física para estudiar la obra de “Caída libre” que según las hipótesis planteadas en R2 tendría cabida en los primeros instantes del descenso. Este estudio parte con la identificación de las fórmulas de caída libre y luego continúa con los tratamientos de estas fórmulas para responder a $Q3.2_x$ y $Q3.3_x$. **Grupo 1:** • En esta sesión el grupo cuenta con 1M, 1F, 1G y 1R. Los alumnos 1F y 1M deciden cómo repartirse las cuestiones a investigar: Los alumnos 1F y 1R estuvieron encargados de investigar información pertinente para $Q3.1_x$ y $Q3.2_x$ en internet. Los alumnos 1M y 1G optaron por operar con las fórmulas de caída libre para responder a $Q3.3_x$ haciendo uso de los dados de la hipótesis de R2, es decir, considerando que la altura recorrida de caída libre fue de 14 km. Al ver que los resultados de velocidad salieron muy altos, todos los integrantes se empezaron a concentrar en estos cálculos. • Los alumnos no saben qué hacer y le preguntan al profesor, el profesor les comenta que puede ayudar el volver a mirar la cuestión Q3 y considerar más de una velocidad para pensar en la variación. Sin embargo, los alumnos no tomaron en cuenta la sugerencia y siguieron estancados.  *Figura 44:* Cálculos para responder $Q3.2_x$

Grupo 2:

- En la sesión el grupo cuenta solo con 3 integrantes. Los alumnos 2E y 2J empiezan identificando las funciones de caída libre en Internet. Tras ello, deciden usar la fórmula de velocidad final de caída libre para verificar qué velocidad se consigue al final de la primera fase de caída propuesta en R2. Al ver que el cálculo de la velocidad final excede demasiado la velocidad del sonido, empiezan a cuestionarse el límite para la primera fase propuesto en R2, por lo que deciden acudir a alumnos del grupo 4 para verificar los resultados de las operaciones de velocidad, y también deciden visitar sitios web que reporten información sobre la experimentación de Felix Baumgartner.

- El alumno 2J empieza a perder la responsabilidad matemática y llama al profesor para preguntar qué se debe hacer.

Grupo 4:

- Del mismo modo los alumnos de G4 empiezan con el estudio de las fórmulas de caída libre e identifican el mismo problema que G2: el exceso del valor d ela velocidad según lo planteado por R2. Al preguntar al profesor, éste los invita a proponer hipótesis de explicación:

    - 4J propone: No podemos tomar en cuenta la caída libre en física hasta el kilómtero 25, de repente hasta el kilómetro 30.
    - 4C propone: Hay densidad del aire o la aceleración de la gravedad es menor.

- Dicho esto, los alumnos deciden en primer lugar, estudiar la variación de la aceleración de la gravedad según la altura y luego los valores de densidad según la altura. Tras un tiempo de investigación en internet los alumnos descartan la primera hipótesis y se quedan con el estudio de la influencia de la densidad.

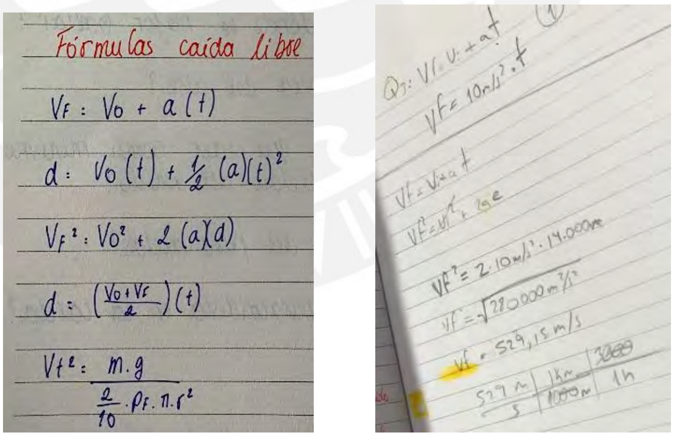


Figura 45: Fórmulas de caída libre

- Fin de la clase

- Los grupos, a pesar de haber identificado las fórmulas como la de velocidad final, no pudieron identificar el significado funcional y variacional del movimiento a través de esta primera incursión en las fórmulas. Solo acudían a ellas para obtener con ellas datos puntuales y aislados, como lo es la velocidad final.

- Se descartó colectivamente la hipótesis que la caída libre se experimentó a lo largo de los primeros 14km y se descubrió que esta distancia recorrida debe ser menor, ya que con ellos la velocidad final de esta primera fase, sale muchísimo mayor que la velocidad del sonido como se ve en la *Figura 45*.

<table>
<tr><td></td><td>

- La cuestión derivada $Q3.4_x$ no fue estudiada por ningún equipo, salvo 4D del grupo 4 que tras unos intentos abandonó la investigación.

</td></tr>
</table>

Tabla 16: Estudio de la velocidad en caída libre

<table>
<tr><td>Sesión 6:</td><td>Estudio de la Caída libre</td></tr>
<tr><td>Duración:</td><td>180 min (14/06 y 17/06)</td></tr>
<tr><td>Medios y medias</td><td>Actividad n°2, Internet, GeoGebra y pizarra, libros.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de la sesión</td><td>

- Al inicio de esta fase los alumnos presentaron dificultades para distinguir el modo de cómo responder a la pregunta, por lo que se vio conveniente entregar una Actividad que encamine la tarea a realizar.
- El profesor replantea la cuestión Q3 con dos preguntas derivadas Q3.1 y Q3.2.
- La actividad n°2 presenta las alturas experimentadas por Félix Baumgartner por cada segundo a lo largo de los primeros 15 segundos de caída libre, para a partir de ellas poder analizar las variaciones de altura con respecto al tiempo.

t (segundos)	h (metros)
0	38969.4
1	38964.5
2	38949.8
3	38925.3
4	38890.9
5	38846.8
6	38792.8
7	38729.1
8	38655.5
9	38572.1
10	38478.9
11	38375.9
12	38263.1
13	38140.5
14	38008.0
15	37865.8

Q3.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones?

____

____

____

____

Q3.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas?

____

____

____

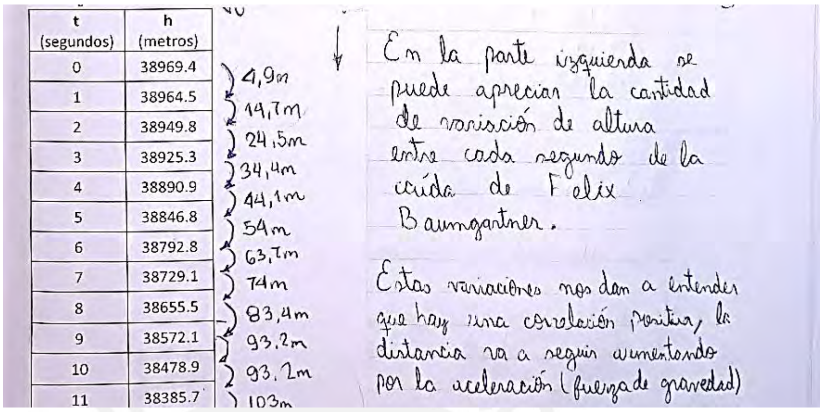
____

- Los alumnos empezaron a trabajar la tabla de valores de diferentes modos, desplegándose principalmente dos tipos de objetos matemáticos: El primero de ellos fue el de secuencias numéricas, el segundo de ellos fue el de regresiones lineales mediante el uso del software Geogebra.
- Los alumnos inicialmente muestran duda de qué hacer con los datos, ya que algunos de ellos creían que la tabla tal y como estaba mostrada constituía la respuesta a la pregunta Q3.1. Sin embargo, los grupos 1 y 4 pudieron empezar con el estudio.

</td></tr>
</table>

Grupo 1:

- El equipo encontró en las diferencias sucesivas entre dos datos de altura consecutivos, la respuesta a la pregunta Q3.1. Estos números colocados al margen derecho de la tabla tienen consigo la unidad de medida en metros, por lo que se confirma que únicamente se ha efectuado la resta entre las alturas.



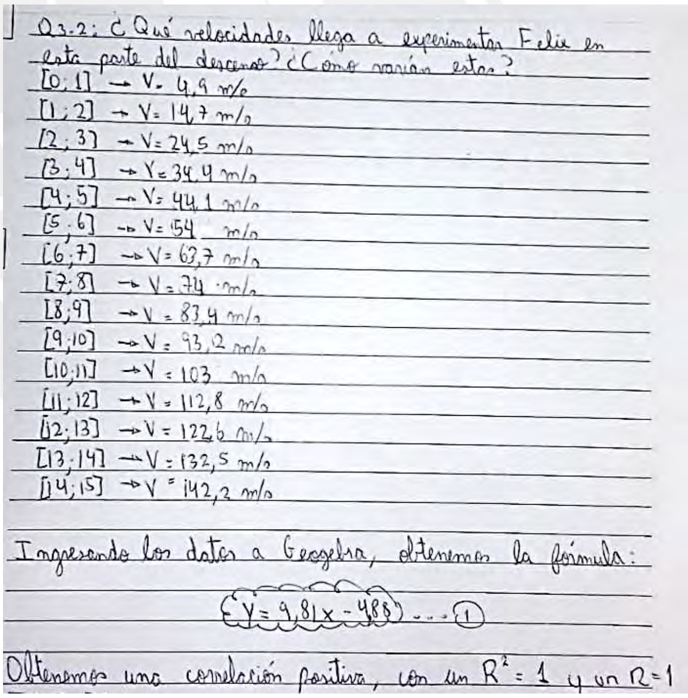
t (segundos)	h (metros)	
0	38969.4	4,9m
1	38964.5	14,7m
2	38949.8	24,5m
3	38925.3	34,4m
4	38890.9	44,1m
5	38846.8	54m
6	38792.8	63,7m
7	38729.1	74m
8	38655.5	83,4m
9	38572.1	93,2m
10	38478.9	93,2m
11	38385.7	103m

En la parte izquierda se puede apreciar la cantidad de variación de altura entre cada segundo de la caída de Felix Baumgartner.

Estas variaciones nos dan a entender que hay una correlación positiva, la distancia va a seguir aumentando por la aceleración (fuerza de gravedad)

Figura 46: R3.1 reportada por el Grupo 1

- Este grupo usó la notación de intervalos para representar los tramos de tiempo en los que ha calculado la velocidad promedio experimentada por el paracaidista. Esto se ve en la siguiente figura.



Q3.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas?

[0;1] → V= 4,9 m/s
[1;2] → V= 14,7 m/s
[2;3] → V= 24,5 m/s
[3;4] → V= 34,4 m/s
[4;5] → V= 44,1 m/s
[5;6] → V= 54 m/s
[6;7] → V= 63,7 m/s
[7;8] → V= 74 m/s
[8;9] → V= 83,4 m/s
[9;10] → V= 93,2 m/s
[10;11] → V= 103 m/s
[11;12] → V= 112,8 m/s
[12;13] → V= 122,6 m/s
[13;14] → V= 132,5 m/s
[14;15] → V= 142,2 m/s

Ingresando los datos a Geogebra, obtenemos la fórmula:

{V = 9,81x - 4,88} ... (1)

Obtenemos una correlación positiva, con un $R^2 = 1$ y un $R = 1$

Figura 47: R3.2 reportada por el Grupo 1

- Los alumnos 1M y 1R deciden aplicar regresiones lineales para constatar que la aceleración es 9.81. En la correlación insertaron el valor del extremo derecho del intervalo y las velocidades promedio experimentadas por cada segundo, obteniendo la función lineal mostrada en la anterior figura. A continuación, se muestra el diálogo suscitado en el momento en que se descubre la fórmula de la velocidad a partir de los datos.

Diálogo 5: Descubrimiento de la aceleración en la función lineal de la velocidad

1R: 9.81x – 4.88.

1M: ¿Cuánto sale? No, pero ¿es lineal?
1R: Yo la puse lineal
1M: O sea, la velocidad es lineal. Ya, ¿9,81?
1R: Sí
1M: ¡Excelente! Ahí lo tienes Renzo, ¿cuál es la aceleración?
1R: La aceleración es 9.8
1M: ¿La aceleración es 9,8?
1R: Sí
1M: Maravilloso, maravilloso. Renzo, Sergio y Facundo acaban de hallar y comprobar, primero que la fórmula de la velocidad por cada segundo y segundo, y acaban de comprobar que la aceleración es 9.8 metros por segundo al cuadrado, maravilloso, caballeros. Aplausos
1M: Ahora el señor Torres y yo continuaremos con la fórmula de la distancia recorrida hasta el segundo x.
1M: Anótalo que no se nos vaya, que no se nos vaya.

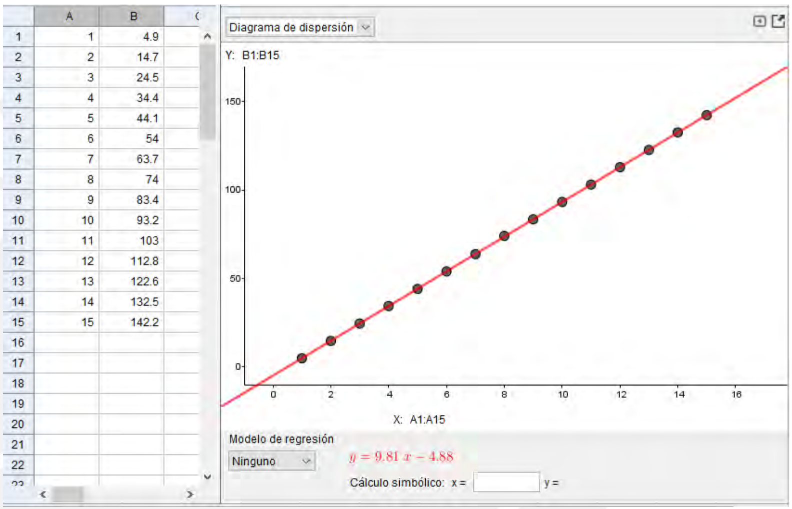


Figura 48: R3 reportada por Grupo 1

Figura 49: Estudio de la regresión lineal obtenida con las variaciones de 1er orden

- A partir de este suceso, se dio pie al siguiente diálogo con el profesor, en el que se busca comprender la relación entre la fórmula de velocidad obtenida por regresiones y la fórmula de velocidad propia de la caída libre. Las explicaciones hechas por el alumno 1M muestran el acercamiento a la distinción entre la noción de *velocidad instantánea* y la noción de *velocidad promedio*.

Diálogo 6: Conversación entre alumnos de G1 y el profesor

1M: O sea, nosotros cuando ponemos 5 acá, obtenemos [la velocidad experimentada en] el intervalo de 4 a 5. Nosotros en la calculadora, [si] en la fórmula [de velocidad de caída libre (v=9.81t)] aplicamos 5, sale [la velocidad] en el segundo 5, que es 49.05, entonces no nos concuerda con [la respuesta de] nuestra fórmula [obtenida por la regresión] por así decirlo, pero esto es en el instante 5, pero si nosotros hallamos en el instante 4, que

	en este caso bajo la misma fórmula de [velocidad de] caída libre, es 39.24, y estos dos lo sumamos y lo promediamos, pues entonces va a salir exactamente 44.1m, que es lo que está ahí [en la tabla de la *Figura 48*] 1S: O sea… 1M: El instante 4…entonces nosotros decimos, [señalando la tabla de la *Figura 48*] 5 simboliza el intervalo de 4 a 5, y nos sale que la velocidad es 44.1 m/s, pero si uno aplica 5 en la fórmula de caída libre nos sale 44.5, sale más porque es exactamente [en] el instante 5. P: Esto sale con 5 y este sale con 4, 1M: Y el promedio es 44.1 P: ¿Y si tabulas con el del medio? 1M: [calculando] …Sale exacto 1S: terminamos el informe P: Escuchen…en primer lugar, creo que… esta fórmula se acerca al objetivo que se desea…Eh…entonces la conclusión que sacas de esto ¿cuál es? ¿Cómo deberías cambiar los tiempos para que funcione? ¿Qué escribirías? La pregunta ahorita en cuestión que estamos resolviendo ¿cuál es? 1M: La velocidad…la velocidad por segundo P: ¿Cuál es la pregunta? 1M: ¿cuál es la velocidad por cada segundo? P: Esa es la pregunta principal, pero ahorita tú has descubierto una fórmula de la velocidad, pero resulta que no encaja con esta otra fórmula de velocidad. 1M: Encaja si x fuese menos…si cada x es menos 0.5 P: Entonces tienen que explicar por qué tendría que ser así. Yo digo la pregunta: ¿Cómo ehh…se relacionan las velocidades que aquí te salen de la variación con las velocidades que salen de la caída libre?... ¿Cómo se relacionan las velocidades promedio, cierto porque tú dijiste que son velocidades promedio, de 0 a 1 que salen de mi tabla de datos, con la fórmula de caída libre? 1M: Pues es sencillo de responder, si nosotros decimos 5 nos referimos al intervalo de 4 a 5, si decimos de 1, de 0 a 1, intervalo 8, es de 7 a 8. P: Qué es esto de acá 1M: Esto es el promedio del tiempo 4 con el 5, ¿sí me entendió? P: sí 1M: O sea si decimos 5 nos referimos al intervalo de tiempo 5, que es del 4 al 5, que sale 44.1 que es el promedio de la velocidad en el tiempo exacto 5 y en el tiempo exacto 4. P: Escriban eso • No todos los integrantes del grupo comprenden la diferencia entre ambas fórmulas, por lo que se dan explicaciones entre sí. El alumno 1M sirve de medio para los demás compañeros, liderando las explicaciones hacia los otros compañeros de grupo. El **Diálogo 7** muestra la concepción de velocidad que se está construyendo. **Diálogo 7: Explicaciones brindadas entre los alumnos** 1M: Ya entonces…ya escuchen voy a explicarlo de nuevo por última vez para anotarlo en el folder y terminar. Renzo, Facundo y tú han hallado una fórmula, la fórmula de la velocidad por cada intervalo de tiempo, escuchen… En el intervalo 1, o sea, del segundo 0 al segundo 1, la velocidad es de 4.9 metros por segundo. [Señalando la tabla de la *Figura 48*] En el intervalo por ejemplo 5, o sea del segundo 4 al segundo 5, la velocidad es 44.1. La fórmula está ahí. Pero ahora también tenemos la fórmula de caída libre de física, que es velocidad final es igual a la velocidad inicial más la gravedad por el tiempo. La gravedad como estaba acá es 9.81, el tiempo son los segundos, la velocidad inicial es cero, y la velocidad final es lo que vamos a hallar. Entonces tu podrías decir, en el intervalo 5, la velocidad es 44.1, si tu aplicas 5, acá en la formula se refiere exactamente al segundo 5, no en el intervalo de 4 a 5, sino al segundo 5

1R: Y si ponemos 4.5?

1M: [Mostrando el cálculo de la *Figura 50*] Si aplicamos 5 sale 49.05 que no concuerda con la fórmula que acabamos de hallar, pero porque se refiere al segundo 5, entonces al referirse al seg 5 y acá al intervalo de 4 a 5, pues entonces ninguna se contradice. Pero, eso lo comprobamos ahorita porque podríamos decir… este es el intervalo de 4 a 5 o sea ¿cuál es el medio?

1R: 4.5

1M: 4.5. Entonces este 4.5 lo aplicamos en la fórmula, es decir la velocidad final es igual a la velocidad inicial que es cero, más la gravedad que es 9.81 por el tiempo que es 4.5, nos va a dar exactamente 44.1 que es lo que esta acá

1R: Ah ya

1M: ¿Se entendió?

1R: Sí

1M: Entonces, acá hablamos de intervalos, acá hablamos de segundos, pero si queremos hacer lo mismo, entonces, si acá dice por ejemplo …7, se refiere del 6 al 7. Entonces acá no ingresas 7 acá ingresas…

1G: 6.5

1F: ¡Bieeen!

1M: 6.5 como dice Germán. Y vas a hallar lo mismo

1G: Me siento poderoso

1M: Y lo que acabamos de comprobar es la gravedad con esta fórmula, porque… ¿estás grabando esto no? Esto es importante. Ya

1F: sí

1M: Lo que acabamos de hallar es también…

1R: ¿O sea ya no ingresamos el segundo?

1M: La gravedad exacta de Félix, es decir la aceleración, la aceleración es 9.81 metros por segundo cuadrado. Maravilloso. Anota apura apura apura, pon los datos, termina de poner los datos

1R: Marcelo, pero este intervalo lo meto o ya no

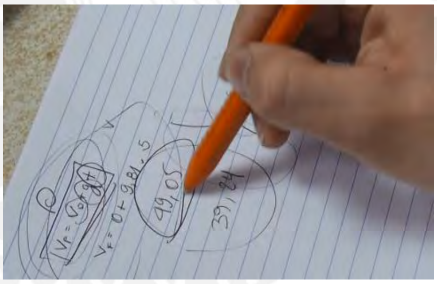
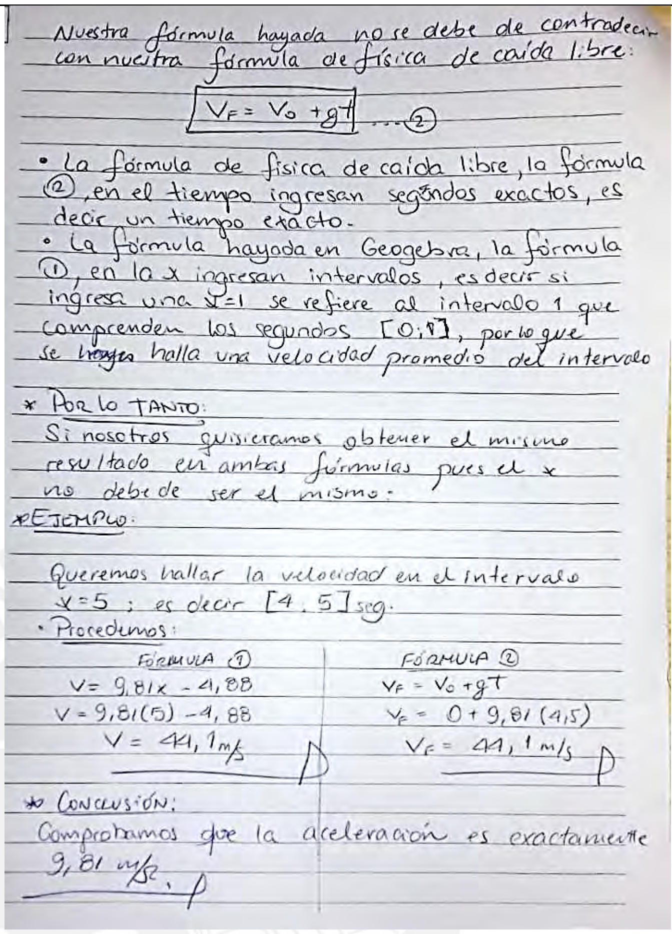


Figura 50: Cálculos con fórmula de velocidad instantánea

- Las respuestas reportadas en el informe parcial muestran esta comparación entre el uso ambos modelos funcionales.



Nuestra fórmula hayada no se debe de contradecir con nuestra fórmula de física de caída libre:

$$\boxed{V_F = V_0 + gT} \ldots (2)$$

• La fórmula de física de caída libre, la fórmula (2), en el tiempo ingresan segundos exactos, es decir un tiempo exacto.

• La fórmula hayada en Geogebra, la fórmula (1), en la x ingresan intervalos, es decir si ingresa una x=1 se refiere al intervalo 1 que comprenden los segundos [0;1], por lo que se ~~hayan~~ halla una velocidad promedio del intervalo

* Por lo TANTO:
Si nosotros quisieramos obtener el mismo resultado en ambas fórmulas pues el x no debe de ser el mismo.

*EJEMPLO:
Queremos hallar la velocidad en el intervalo x=5 ; es decir [4 , 5] seg.

• Procedemos:

FÓRMULA (1)	FÓRMULA (2)
$V = 9{,}81x - 4{,}88$	$V_F = V_0 + gT$
$V = 9{,}81(5) - 4{,}88$	$V_F = 0 + 9{,}81(4{,}5)$
$V = 44{,}1\,m/s$	$V_F = 44{,}1\,m/s$

* CONCLUSIÓN:
Comprobamos que la aceleración es exactamente $9{,}81\,m/s^2$.

Figura 51: Comparación de ambas fórmulas de velocidad

Grupo 2:

- En la primera parte de la sesión el grupo 2 no estuvo presente, salvo el alumno 2J que se unió al estudio del grupo 4.
- En la segunda sesión, el grupo cuenta con los alumnos 2E, 2J, 2R y 2C. Los alumnos 2J, 2R y 2C al principio se encuentran indispuestos, y solo el alumno 2E se aboca al estudio de la cuestión Q3.1 mediante el uso de Excel. Más tarde se une 2J al estudio, mientras que los alumnos 2C y 2R han asumido el papel de "operarios", por lo que en esta parte del estudio consideran no tienen nada que hacer. No han asumido la responsabilidad matemática de abordar el estudio.
- Tras un largo tiempo de estancamiento, 2J solicita una consulta, y ante la demora de ser atendido por parte del profesor, busca orientaciones en otros grupos. Al ser atendidos, se observa que el grupo ha hecho un estudio tabular de los datos incorporando las variaciones interpretadas como distancia entre segundos. El profesor llega a cuestionar dicha denominación y a partir de ello, los alumnos 2E y 2J terminan concluyendo que son velocidades. Ante esa determinación, el profesor los invita a comparar esos valores con las velocidades de caída libre.
- En este estudio comparativo surge la cuestión Q3.1.1$_X$: ¿Por qué el valor de velocidad v(1) =4,9m/s obtenido por la tabla es diferente del obtenido por la fórmula de velocidad de caída libre v(1) =9.81m/s? Para cuyo estudio recurren nuevamente al estudio de la información reportada sobre la experimentación en internet.
- En el informe parcial se reportó la siguiente tabla de datos.

TIEMPO	ALTURA	DISTANCIA ENTRE SEGUNDOS	ACELERACIÓN	VELOCIDAD	
0	38969.4	Ya-Y(a-1)	A=G	v=9.8t	v=v0+at
1	38964.5	4.9		9.8	v=9.8t
2	38949.8	14.7	9.8	19.6	
3	38925.3	24.5	9.8	29.4	
4	38890.9	34.4	9.9	39.2	
5	38846.8	44.1	9.7	49	
6	38792.8	54	9.9	58.8	
7	38729.1	63.7	9.7	68.6	
8	38655.5	73.6	9.9	78.4	
9	38572.1	83.4	9.8	88.2	
10	38478.9	93.2	9.8	98	
11	38375.9	103	9.8	107.8	
12	38263.1	112.8	9.8	117.6	
13	38140.5	122.6	9.8	127.4	
14	38008	132.5	9.9	137.2	
15	37865.6	142.4	9.9	147	

Figura 52: Tabla elaborada por Grupo 2 y expuesta ante el pleno

Grupo 4:

- El alumno 4J propone la estrategia de hacer uso de regresiones para obtener la fórmula de las alturas, pero su compañero 4C no admite el procedimiento hecho como un método válido para resolver el problema. A partir de ello, se generaron dos subgrupos de trabajo y estudio: el estudio físico realizado por el subgrupo $G4_F$ conformado por 4C y 4D; y el estudio matemático hecho por el subgrupo $G4_M$ conformado por 4J, 4G y 4B. Esto es registrado en el **Diálogo 8**.

Diálogo 8: Separación de los estudios

4J: [Hablándole a 4C] Escúchame. Si ingreso estos datos en una tabla de valores, ¿puedo hallar su relación o no?
4C: Sí, estadísiticamente sí, pero no te va a salir
4J: Eso sería cuánto varía la altura con respecto a cada segundo
4C: Si lo quieres hacer matemáticamente sí. Fïsicamente está mal, pero ya! Igual esto es matemática, no es física, así que ya
4J: [Hablándoles a 4G y 4B] Entonces miren ah, podemos hacer lo que está diciendo chamo, que era hallar la velocidad…aplicando fórmulas físicas
4C: Podemos hacerlo bien, o podemos hacerlo por matemática
4D: Hay que hacerlo bien
4J: Como estamos en una clase de matemáticas, vamos a aplicar el método matemático y 4C, que también está en el grupo y también está trabajando, va aplicar el método físico.
4D: [Hablándole a 4C] Yo te ayudo. O sea, yo te borro lo que no sirve
4C: Dame mis …dame miis anotaciones
4J: [Hablándoles a 4G y 4B] Insertaremos los datos en Geogebra
4C: Pero, puedes usar la calculadora científica
4G: Yo ya lo estoy haciendo
4J: Oe, es loco porque puede ser una regresión lineal ¿no?
4C: No imposible, esa regresión es una cuadrática, tiene que ser.
4J: ¿Alguien tiene su calculadora?
4C: Toma
4J: Ya, ya, me la va a dar chamo. Gracias trabajo en equipo. Toma 4G inserta los datos

- Los alumnos 4J, 4B y 4G empiezan a incorporar la actividad n°2 al medio y comienzan a analizar los datos mediante regresiones lineales para obtener una función que los modele, haciendo uso de la calculadora gráfica y posteriormente del software GeoGebra. Este procedimiento lo llevan a cabo con la idea de que la función cuadrática constituye la respuesta a Q3.1. Tras obtener el modelo, solicita la ayuda del profesor para conseguir una validación, recibiendo el cuestionamiento de que el modelo representa las alturas experimentadas, pero no cómo varían estas.

- Ambos subgrupos discuten sobre la noción de variación y concluyen que la fórmula cuadrática determina en sí misma la variación. Tienen la conjetura inicial que, así como el coeficiente principal de la función lineal determina la variación, en la cuadrática también podría ser el coeficiente principal. 4J y 4C tras discutir esta inquietud llegaron a desechar esta conjetura y concluyeron que esto nunca lo han estudiado, por lo que solicitan la ayuda del profesor. Éste los invita a consultar en internet.

- En la segunda parte de la sesión, se observó que el equipo se empezó a concentrar en la pregunta Q3.2 para lo cual había construido una tabla de valores con sus respectivas variaciones al costado identificadas como velocidades. El profesor al observar el procedimiento, cuestiona si se puede obtener una fórmula que modele todas esas variaciones. El alumno 4J hace uso de técnicas de sucesiones aritméticas, obteniendo la fórmula mostrada en la siguiente figura. Tras un tiempo, al volver a pedir una validación, el profesor planteó el cuestionamiento sobre la exactitud en la asociación de tiempos, llevándose a cabo el **Diálogo 9**.

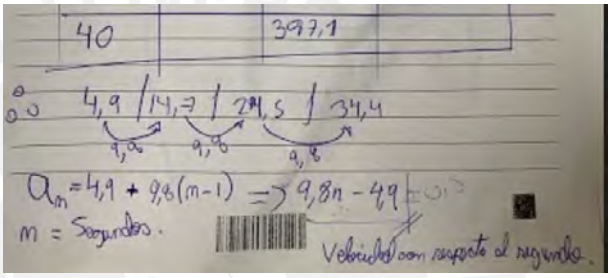


Figura 53: Fórmula para la velocidad obtenida por el Grupo 4

Diálogo 9: Discusión sobre la asociación de las velocidades con los tiempos

P: ¿La velocidad 4,9 se experimenta en el segundo 1 o a lo largo del primer segundo?
4C: A lo largo del primer segundo va subiendo hasta llegar a 4.9
4D: Cuando ya es 1.00, ahí la velocidad es 4.9
P: 4.9, si es velocidad, ¿cómo lo obtendrías? 4.9 es los metros que recorrió en un tiempo, ¿cuánto tiempo? 1 segundo
4C: No, pero esa es la fórmula para velocidad con movimiento rectilíneo uniforme, estamos con un movimiento rectilíneo acelerado.
P: ¿Entonces cómo dices que este [número] es velocidad?
4C: Porque es velocidad final en un movimiento acelerado
P: Joaquín, tú a 4.9 le llamas velocidad con m/s. ¿Por qué?
4C: Porque eso es
P: ¿Cómo obtienes ese valor?
4C: Porque la velocidad…velocidad es igual a diferencial de distancia sobre diferencial de tiempo, porque lo que estamos haciendo… ¡Ah! esto tiene un razonamiento, porque es que, ehh … como es un movimiento acelerado, va a tener una distancia para cada punto, este… cada segundo se toma como un rectilíneo uniforme
P: Cada pedacito…
4C: Cada pedacito se toma como un rectilíneo uniforme.
P: Cada pedacito como un rectilíneo uniforme, o sea, resta de espacio entre resta de tiempo, resta de espacio entre resta de tiempo, ¿cierto?
4C: Sí
P: Y sale esto. Ahora, cuando sale 4.9 tú has dividido entre una resta de tiempo de entre 0 y 1. Entonces, cuando tú tabulas aquí, este “t” no es un intervalo de tiempo, sino un instante de tiempo, instante 3, instante 4. En cambio, este 1, este trayecto no es un instante, es un tramo de tiempo.
4D: Hay infinitos instantes
P: Infinitos instantes, tantos que no los puedo diferenciar. Entonces, ¿él le corresponde a todo este tramo o solo al 1?
4B: La velocidad final en ese tramo es 4.9

	P: Del 1al 2, al final es 14.7? 4D: Del 1 al 2, de 4.9 llegó a 14.7 • Fin de la clase.
Dialécticas encontradas	**La dialéctica de estudio-investigación** se manifestó en la diversificación del estudio en el grupo 4, mediante la separación del estudio, haciendo uso de los elementos de dos disciplinas: la Matemática y la Física, más específicamente de la obra de Regresiones (O4) y la obra de Cinemática (O1) del Paracaidismo. Por otro lado, la dialéctica también emergió en el G1 en momentos como el estudio de la cuestión Q3, mediante las fórmulas de caída libre y en segundo lugar mediante la aplicación de regresiones lineales, y partir de esto surgió muy naturalmente el cuestionamiento **Q3.2.1: ¿Cómo se relacionan las velocidades obtenidas a partir de la tabla y las velocidades obtenidas por la fórmula de caída libre?** **La dialéctica del individuo-colectivo** se manifestó en la diversidad de toma de decisiones hechas por el grupo 1 y 4 para aplicar sus respectivos métodos, en la repartición de los roles, en el reconocimiento colectivo de los aportes individuales. Por último, en los recurrentes intercambios de explicaciones realizadas principalmente por los alumnos 1M, 1R y 1F, 4C, 4J, 4G y 4D. La **media** principal de uso, ha sido el uso de internet, los conocimientos previos de Estadísitca, Secuencias y Cinemática (O1). A partir de estos elementos, se llegó a construir un **medio de estudio** particular para cada equipo. Pero que en conjunto puede ser descrito por los siguientes elementos: M= {trabajo grupal de 2 a 3 estudiantes, Actividad n°2, calculadora gráfica, GeoGebra, Excel, Cinemática (O1), Progresiones aritméticas (O2), Regresiones (O4)}.

Tabla 17: Primera puesta en común de R3

Sesión 7:	**Estudio de Q3: ¿Cómo varía la atura de un salto de skydiving sin resistencia de aire?**
Duración:	**80 min (martes 18/06)**
Medios	Actividad n°2, Internet, GeoGebra y pizarra.
	• Cada grupo ha realizado hasta el momento un avance parcial de la cuestión Q3, y para esta parte del proceso. Sin embargo, algunos grupos presentaban cierta inseguridad ante los procedimientos realizados, necesitando más de uno la validación de las formulaciones hechas hasta el momento. Es así que se organizó una pequeña puesta en común para que los alumnos presenten sus avances y las dudas que están en proceso de estudio. • Las exposiciones se dieron en el siguiente orden: G2, G1 y G4. El profesor ayuda con preguntas que ayuden a clarificar las praxeologías matemáticas que han sido usadas. **Exposición del Grupo 2:** • Este grupo mostró el estudio un tanto heurístico de la tabla de altura proporcionada, pero que se aproxima al uso de la Obra de Tasa de variación media (O3). • El estudio variacional estuvo conformado en primer lugar, por las variaciones de primer orden de las alturas, identificándolas como velocidades en su discurso, pero no exactamente en la notación, en segundo lugar, las variaciones de segundo orden identificándolas con la aceleración de la gravedad, y en tercer lugar con las velocidades obtenidas por la fórmula de caída libre.

Desarrollo de la sesión	• El grupo compartió con el pleno la duda que estaban estudiando hasta el momento: *¿Por qué el valor de la velocidad para t=1 eran diferentes para la velocidad experimentada (calculada a partir de los datos) y la velocidad teórica ($v=v_0+at$)?* **Diálogo 10: Exposición del Grupo 2** 2E: Básicamente, según la ficha que nos dio el profesor Jimmy con las alturas con respecto al tiempo, las copiamos y las pusimos ahí [señalando la tabla de la *Figura 52*], o sea tiempo y altura. Después, la distancia… pusimos las distancias entre segundos que es simplemente restar cuánto es esto menos esto, que da 4.9, esto menos esto da 14.7 y así con todos los demás datos. Después la aceleración sería la velocidad final menos velocidad inicial sobre el tiempo, entonces la velocidad final menos la velocidad sobre el tiempo, el tiempo en este caso es 2 menos 1, 1, que da 9.8, que vendría a ser la acción de la gravedad. Luego, entendemos la velocidad teórica como la velocidad inicial más la aceleración por el tiempo. Entonces, sabiendo que la velocidad inicial de todo es cero, nos queda solamente la aceleración por el tiempo, o sea 9.8 por el tiempo [señalando la fórmula en la tabla de la *Figura 52*]. Entonces, eso lo hemos denominado velocidad teórica, entonces entendiendo que en el primer segundo es 9.8 por 1 te da 9.8, 9.8 por 2, 19.6 y así sucesivamente. Entonces…teóricamente... la velocidad que es 4.9 [señalando el valor de la tabla] debería ser 9.8 según lo que entendemos nosotros, lo que entendemos en mi grupo al menos, y como ven no cuadra, entonces esa es la principal duda y que no nos permite avanzar, si alguno tiene alguna sugerencia para poder avanzar… P: ¿Con lo que tienes cómo responderías la pregunta? 2E: Aamm P: La pregunta es ¿Cómo varía la altura y la velocidad a lo largo de la caída libre? ¿Con estas aproximaciones que tienes, qué podrías responder? 2E: Aamm, simplemente la velocidad entre los segundos como se ve ahí. **Grupo 1:** • Se observó que en el estudio de este grupo se hizo uso de la Obra de Estadística (O4), específicamente de los conocimientos de análisis de datos y regresiones lineales, siendo el primer grupo en mostrar el uso de intervalos de tiempo para la asignación de la velocidad, y el primero en aplicar regresiones lineales para obtener un modelo algebraico de velocidad. • En la puesta en común, los alumnos destacaron las condiciones que tuvieron que tener en cuenta para la aplicación de regresiones, entre ellas la más destacada es el significado asignado a la variable independiente “x”: cada valor entero de “x” representa, para el grupo, la posición del intervalo de tiempo, es decir, el valor 1 refiere al intervalo [0,1], el valor 2 refiere al intervalo [1,2], etc. Tal es así que la fórmula obtenida es denominada: *velocidad promedio por cada intervalo de tiempo* . • La explicación que buscaba responder la Q3.2.1 fue un tanto difusa aún, pero se dejó entrever la noción de velocidad promedio y la noción de marca de clase como dos elementos clave para entablar el vínculo entre ambas fórmulas.

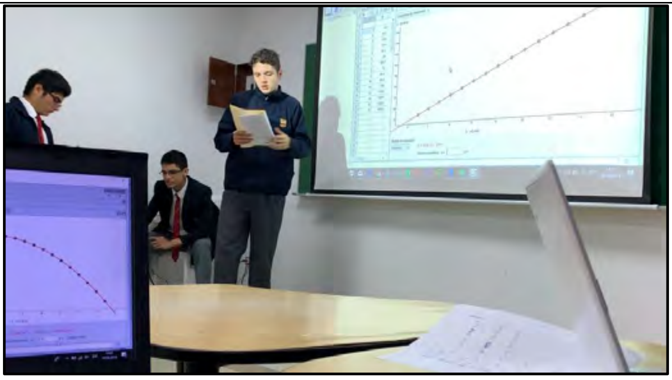


Figura 54: Regresión lineal para la velocidad propuesta por el Grupo 1

Diálogo 11: Exposición del Grupo 1

1F: Para comenzar vamos a responder la pregunta Q3.1 ¿Cuánto varía la altura de Félix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones? Bueno, para comenzar hemos trabajado con la tabla que nos han entregado… es la tabla de segundos y la tabla de metros. La respuesta a esta pregunta es: Se pueden aplicar las fórmulas de física de caída libre puesto que no hay resistencia al aire. En esta ocasión, bueno… el grupo ha ingresado …En esta ocasión en el grupo hemos ingresado estos valores con las respectivas, con las respectivas alturas en metros. La tabla… (arreglando la proyección)

P: Continúe

1F: Hemos puesto las medidas de segundos con metros, y hemos hecho la siguiente operación, restando cada segundo respectivo con su metro, nos dan los siguientes valores, que son los que están en esta tabla ¿Esto qué significa? Por cada segundo que pasa eh…ha bajado perdón...ha aumentado la velocidad. Esto lo podemos ver acá en la gráfica. Bueno, mi compañero Renzo Saucedo explicará el significado de esta gráfica.

1R: Lo primero que hicimos fue…Bueno el grupo de mi compañero Enrique Sánchez usó los segundos como…1, 2…y eso lo ingresó en su hoja de cálculo. Nosotros lo que hicimos fue separarlo por intervalos, del 0 al 1, del 1 al 2, del 2 al 3, hasta llegar hasta al 14 al 15. Hemos conseguido las velocidades que es por la diferencia de alturas y como lo hemos separado por intervalos se entiende que es metros por segundo. Como pueden ver hemos conseguido las velocidades de todos los intervalos, el primero es 4.9m/s, o sea en términos sencillos, del segundo 0 desde que comenzó hasta terminar el primer segundo la velocidad es 4.9 m/s. También…

P: Del segundo 8 al segundo 9 ¿qué velocidad hay?

1R: Del 8 al 9 la velocidad es 83.4m/s.

P: En el segundo 8.5 ¿qué velocidad hay?

1R: La misma, esto porque...por la marca de clase, que es básicamente un concepto estadístico que nos dice que podemos conseguir un valor, si es que, cuando se trata de intervalos, si es que escogemos el valor medio de este intervalo. Por ejemplo, entre 8 a 9 insertaríamos, ingresaríamos el dato en la fórmula de MRUV que está aquí creo…está aquí: velocidad final es velocidad inicial más gravedad por tiempo. Usando la marca de clase en el intervalo del 4 al 5, nos saldría 4.5, porque usamos el término medio del intervalo y como pueden ver la velocidad final saldría 44.1 m/s.

Ahora, explicando la fórmula de Geogebra…explicando la fórmula de Geogebra, nosotros ingresamos los datos del 1 al 15, sin embargo, hay que precisar que los segundos q hemos puesto aquí, el 1 representa el intervalo del 0 al 1, el 2 del segundo 1 al 2 y así consecutivamente. También ingresamos las distancias y analizamos los datos, los pusimos en una gráfica lineal y nos…

P: Una regresión lineal

1R: Una regresión lineal y obtuvimos la fórmula y=9.81x-4.88, y…

	P:	¿Algo más?
	1R:	Sí, como pueden ver en la fórmula que hemos hallado en Geogebra. Esto es los datos del eje x como están en… x como está en términos de 1, 2, 3, 4 en ningún momento hemos, lo hemos ingresado como intervalo, en este caso ingresaríamos los mismos datos 1, 2 enteros en ningún momento le ponemos marca de clase como lo hicimos en la fórmula de MRUV, de velocidad final. Como podemos ver con esta fórmula que hemos hallado en Geogebra nos da el mismo resultado, sin embargo, en el x ingresamos distintos valores. Y, por último, vale mencionar que hemos hallado el valor de la gravedad en la caída de Baumgartner y …
	P:	Que se presenta ahí ¿de qué modo?
	1R:	Está en…aquí está, es el producto de 9.81 por…
	4J:	Pero ¿qué es?
	1R:	Es 9.81

Grupo 4

- El Grupo 4, mostró elementos que evidencian el apoyo en las obras de Cinemática (O1) y Progresiones aritméticas (O2).

- El grupo reforzó los aportes anteriores proponiendo respuestas explicativas sobre el fenómeno de Caída Libre, el movimiento rectilíneo uniformemente variado y el porqué de su aplicación en esta parte del estudio. Si bien también mostraron un estudio tabular sobre las variaciones, las respuestas defendidas destacaron más por su carácter más cualitativo que cuantitativo.

- De entre las explicaciones mostradas se destaca en primer lugar, la propuesta de una hipótesis que buscó explicar la discrepancia encontrada entre las velocidades reales y las velocidades teóricas. En segundo lugar, la explicación referida a la noción de velocidad promedio aplicada en el estudio tabular, específicamente la explicación de la fórmula $V_p = \frac{\Delta D}{\Delta T}$.

- A continuación, se muestran los avances logrados por el grupo 4 hasta esta parte del REI.

Q3.1 ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones?
Q3.2 ¿Qué velocidades llega a experimentar Félix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas?

Para responder la Q3 el primer punto que se debe tener en cuenta es que el caso ante el que nos encontramos es uno de movimiento acelerado. El movimiento acelerado tiene la característica de ir cambiando la velocidad del cuerpo en movimiento, por lo que a diferentes tiempos variará no solo la distancia sino que también la velocidad a la que se desplaza el cuerpo. Es por esto que, para resolver la primera parte de esta pregunta es necesario descomponer la caída de Felix Baumgartner en cada uno de los segundos que dura esta, y calcular la velocidad específica de cada tiempo. Para ello se utilizarán los siguientes datos, que además responden la *Q3.1*:

t (segundos)	**h** (metros)
0	38969.4
1	38964.5
2	38949.8
3	38925.3
4	38890.9
5	38846.8
6	38792.8
7	38729.1
8	38655.5
9	38572.1
10	38478.9
11	38375.9
12	38263.1
13	38140.5
14	38008
15	37865.8

Como se puede notar, las alturas que recorrió Félix en cada tramo son diferentes, lo cual significa que estamos ante un caso de movimiento acelerado (*Q3.1*)

Por lo tanto, las velocidades que alcanzó Félix durante su caída serían las siguientes

t (segundos)	**v** (m/s)
1	4.9
2	14.7
3	24.5
4	34.4
5	44.1
6	54
7	63.7
8	73.6
9	83.4
10	93.2
11	103
12	112.8
13	122.6
14	132.5
15	142.2

Ahora, analizando la velocidad se puede aproximar una aceleración, pues esta es la diferencia de velocidades entre el tiempo. Al realizar esta diferencia para cada par de velocidades se obtiene, en promedio, una aceleración de 9.8 m/s^2. Este dato nos permite confirmar la veracidad de los resultados puesto que se confirma que la aceleración promedio es la de la gravedad, y como ya se había determinado anteriormente, en este tramo de la caída se toma como caída libre, por lo que a la velocidad solo le afectaría la aceleración gravitacional.
Ahora, se podría pensar que existe una discrepancia con el primer dato de velocidad; puesto que se ha concluido que Félix tiene una aceleración promedio de 9.8m/s^2, lo que llevaría a pensar que la primera velocidad debería ser 9.8m/s y no 4,9m/s. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que en el segundo 0, el cuerpo estaba siendo afectado no solo por la aceleración de la gravedad (descendente) sino también por la aceleración que tenía como resultado de haber estado en contacto con el globo (cuerpo ascendente). Esto genera en Félix una aceleración resultante menor a la de la gravedad, que genera una velocidad en el segundo 1 de 4.9m/s.

Figura 55: R3.1 reportada por grupo 4

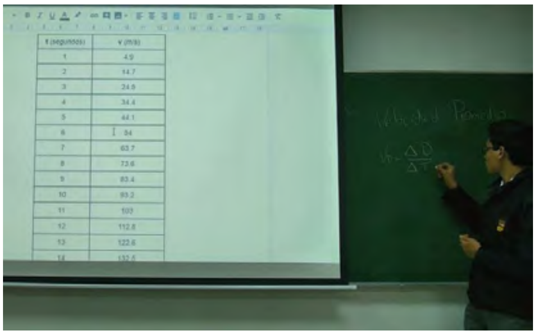


Figura 56: Tabla elaborada por Grupo 4

Diálogo 12: Exposición del Grupo 4

4C: Para responder a la primera pregunta, que es cómo varían las alturas en función del tiempo, solamente es necesario mirar la tabla que nos dio el profesor de los 15 primeros segundos, que es esta. Entonces, podemos ver cómo a medida que va pasando el tiempo va disminuyendo la altura obviamente por la atracción que genera la gravedad sobre F.B. Ahora, lo que podemos darnos cuenta evaluando estas alturas, es que en cada segundo la distancia que va a recorrer… la resta entre las alturas va a ser diferente, que es lo que nos planteó Kike antes. Entonces, ¿qué es lo que se significa que las alturas vayan variando, o que las distancias entre las altu…que las diferencias entre las alturas vayan variando?

Eso nos quiere dar entender que van a haber velocidades diferentes durante todo el recorrido, lo cual quiere decir que la velocidad que va a llevar F.B. en este tramo de su recorrido no es una…no es una aceleración cero sino que es un movimiento acelerado, además es importante antes de pasar al siguiente punto que es de la velocidades, fue una duda que se planteó era si realmente esta era una caída libre o si le afectaban otros factores, entonces para confirmar este dato, lo que hizo mi grupo fue cambiar el método matemático estadístico que nosotros estamos siguiendo acá, por el método físico, entonces lo que hicimos fue reemplazar en las fórmulas de la física los datos del problema y nos dio un resultado similar, así que pudimos confirmar que físicamente es una caída libre. Pero eso ya sería un problema físico pero lo que vamos a hacer será con el método matemático.

Como conclusiones del primer punto, lo que tenemos es que como las alturas que ha recorrido F.B. en cada tramo son diferentes estamos en todo caso ante un movimiento acelerado, y esto va a determinar la respuesta de la siguiente pregunta que es de la velocidad.

La siguiente tabla, lo que nos demuestra es la velocidad por cada tramo, y ¿cómo se obtiene esta velocidad? En primer lugar, tenemos que entender, tenemos que notar que es una velocidad …promedio. Solamente con los datos que se nos han dado en esta tabla no podemos hallar la velocidad real, así que físicamente no podemos saber si las velocidades que obtiene F.B. en estos tramos son exactamente estas, lo que pasa es que como ya vemos…como ya hemos visto antes … en las tablas anteriores, sabemos a qué altura va a ir cada uno, podemos encontrar una velocidad promedio durante el primer segundo, es decir, desde que estaba desde que apenas salta hasta que pasa un segundo recorre en promedio la velocidad que nos pone el primer punto, entonces, la fórmula para esta velocidad promedio va a ser el diferencial de la distancia sobre el diferencial del tiempo, y esto es precisamente lo que se hace en esta segunda tabla, se restan las distancias y luego se divide entre el diferencial de tiempo que siempre va a ser uno, porque es una sucesión, es decir, del segundo cero al segundo 1 hay un segundo, entonces siempre la división va a ser por cada segundo de recorrido, entonces a cada tramo del recorrido va a tener esta velocidad promedio, ahora eee, llegado a este punto tenemos prácticamente los mismos datos que nos había presentado Kike. Las velocidades creo concuerdan, aunque no las recuerdo completamente, ahora la pregunta que

	tenía ellos, era por qué la velocidad en el segundo 1 no sería la velocidad de la gravedad, eee la velocidad tras un segundo es la aceleración de la gravedad, es decir, 9.8. Y aquí debemos entender un punto, aquí tenemos que entender, para poder entender bien este problema, un poco de la física, es que F.B. cuando saltó de su globo no se encontraba estático, sino que el globo tenía una aceleración vertical positiva, es decir, iba hacia arriba, entonces qué pasa con esto Cuando F.B. está por saltar de su globo él tiene una fuerza que digamos… inicial que empuja hacia arriba, y esta fuerza se va contrarrestar con la fuerza de la gravedad que obviamente lo va a empujar hacia abajo, y esto qué hace? Durante la sumatoria de fuerzas, fuerza es igual a masa por aceleración, esta sumatoria de fuerzas que al dividirse entre la masa nos va a dar la aceleración promedio, la sumatoria no a va a ser la misma que tendría si solamente lo afectase la gravedad, por lo tanto, la aceleración en el primer tramo, es decir, del segundo cero al segundo 1 no va a ser 9.8, sino que el promedio va a ser este 4.9. Entonces esto es lo que nos demuestra es porqué la primera velocidad no es puramente la aceleración de la gravedad, porque había otro factor que estaba influyendo, pero a partir de este punto que es que se desliga completamente de su globo, es que la velocidad ya es solamente afectada por la aceleración de la gravedad, por eso es que a cada punto se va a ver que la distancia… la diferencia de velocidades es aproximadamente 9.8, entonces…esto es constante aproximadamente, alguna va a ser 9.9, 9.7 por ejemplo, ya que esto varía depende de cómo se movió durante su recorrido F.B. Entonces ¿qué demuestra esto? Esto es lo que nos va a demostrar es que eee… esto lo que nos confirma que se encuentra en una caída libre y que las velocidades varían solamente en función de la aceleración de la gravedad. • No hubo muchas refutaciones de parte de los estudiantes, por lo que el profesor ayudó a dirigir la validación de las respuestas parciales mediante preguntas que ayuden a contrastar cada una de las formulaciones presentadas, y así lleguen a identificar los errores, imprecisiones o acepten como válida alguna respuesta. • Las formulaciones discutidas para ser validadas fueron las siguientes: o Las velocidades obtenidas por variaciones no son velocidades exactas experimentadas, sino que son velocidades promedio. o Para obtener la velocidad promedio se debe aplicar la técnica de tasa de variación media, aunque los alumnos no la reconozcan con este nombre, sino solo con el nombre de fórmula de velocidad, según la cual se debe dividir el diferencial de espacio con el diferencial de tiempo, es decir: $V_p = \frac{\Delta D}{\Delta T}$. o Al hallar la velocidad promedio con esta técnica estamos asumiendo que la caída experimenta un MRU en cada intervalo. o Para obtener la función de velocidad se deben aplicar regresiones lineales. o El valor de velocidad promedio 4.9m/s no le pertenece realmente al tiempo t=1s, sino a todo el intervalo [0;1]. Lo mismo para cada una de las velocidades promedio. o El valor 4.9m/s le pertenece aproximadamente al promedio de los extremos del intervalo. o La velocidad de caída en esta parte varía de 9.8 en 9.8. Esta variación se llama aceleración, en este caso concreto es gravedad.
Dialécticas encontradas	La dialéctica **del individuo-colectivo** toma relevancia en la preparación para las respectivas presentaciones por cada equipo. La toma de decisiones se despliega en el grupo 1 cuando discuten qué parte de las formulaciones hechas expone cada uno, mientras que en el grupo 4 la toma decisiones se despliega cuando se discute qué

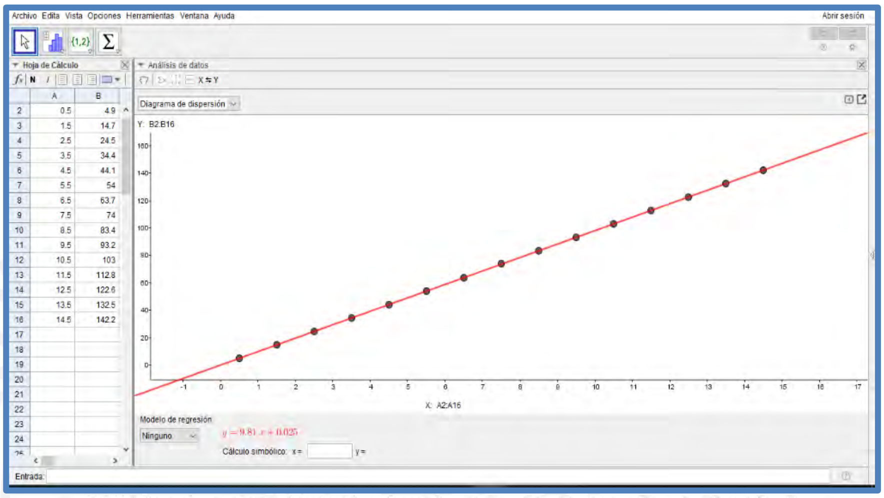
	formulaciones se expondrán al pleno y de qué modo. Se observa que en el grupo 4 hay dos puntos de vista de estudiar la cuestión Q3 y para la exposición se logra un consenso entre ambas partes. La puesta en común busca proponer los avances logrados como elementos a incorporar en el medio de estudio de cada uno de los equipos. En este sentido se llega activar la dialéctica del **media-medio** en las incorporaciones de las explicaciones que hacen los expositores de sus predecesores.

Tabla 18: Ampliación de los avances de R3

Sesión 8:	**Estudio de Q3: ¿Cómo varía la atura de un salto de paracidismo sin resistencia de aire?**
Duración:	**180 min (miércoles 19/06 y viernes 21/06)**
Medios y medias	Libro texto de Matemáticas NM, Actividad n°2, Internet, GeoGebra y pizarra.
	• Tras las exposiciones hechas por los grupos, los estudiantes tienen planteado el objetivo de explicar la relación entre los modelos tabulares o algebraicos de velocidad obtenidos a partir de la data de altura y el modelo "teórico" de velocidad obtenidos por las fórmulas de caída libre. • Tras un tiempo de estudio autónomo de cada grupo, el profesor pudo observar una situación de estancamiento generalizado, por lo que decide intervenir en la configuración de la *media*, proponiendo el estudio de la Obra Razón de Cambio (O3) apoyándose en el libro texto del curso de Matemáticas NM. Específicamente en el estudio de la actividad denominada: *Investigación 2: Velocidad Instantánea* (anexo 5). • En la primera parte de la sesión, los equipos se abocaron al estudio de la obra y de la actividad en específico, aunque no todos los grupos terminaron incorporando la actividad al medio de estudio, quedando en algunos de ellos como una resolución aislada, como es el caso del grupo 1 y 4. **Grupo 1:** • En la primera parte de la sesión el grupo no cuenta con su equipo completo. Los integrantes 4F, 4R y 4S empiezan el estudio de la Obra Razón de Cambio (O3), mediante la resolución de la actividad referida a la velocidad instantánea, pero no terminan de identificar esta noción como *medio de estudio*. No se muestra un desarrollo significativo del estudio. • En la segunda parte de la sesión estando el equipo completo, deciden por no continuar con el estudio de la razón de cambio y optan por la profundización de la fórmula de velocidad promedio asociada al término central del intervalo de tiempo para formalizar la respuesta a la cuestión $Q3.2.1_y$: ¿Cómo se relaciona esta fórmula de velocidad con la fórmula de caída libre? • El grupo entendía que la velocidad obtenida por la data, equivalía al promedio de velocidades "teóricas" obtenidas al aplicar la fórmula v=9.8t en los tiempos extremos de cada intervalo. En esta idea encontraron el fundamento que les daba seguridad de haber encontrado la técnica adecuada para hallar una fórmula más exacta, y que consistía en aplicar una regresión lineal entre los términos medios de los intervalos de tiempo y las velocidades promedio.

- En el reporte del informe parcial, muestra las siguientes formulaciones para R3.2

Pero para no hacer referencia a intervalos y velocidades promedio podemos realizar otra fórmula en donde las "x" sean segundos exactos y las "y" velocidades. Para ello ingresamos a GeoGebra en hoja de cálculo una tabla con las mismas "y" mostradas en la imagen anterior pero ahora en la "x" ingresaremos un segundo exacto, el cual será 0.5 unidades menos que los "x" mostrados en la imagen de arriba, es decir si el intervalo es [4;5], pues ahora en la x ingresaremos 4.5, es decir el promedio de segundos del intervalo:



Obteniendo así la siguiente fórmula, que nos determina la velocidad exacta por cada segundo exacto, además volvemos a comprobar que la aceleración es 9.81m/s^2 y es constante:

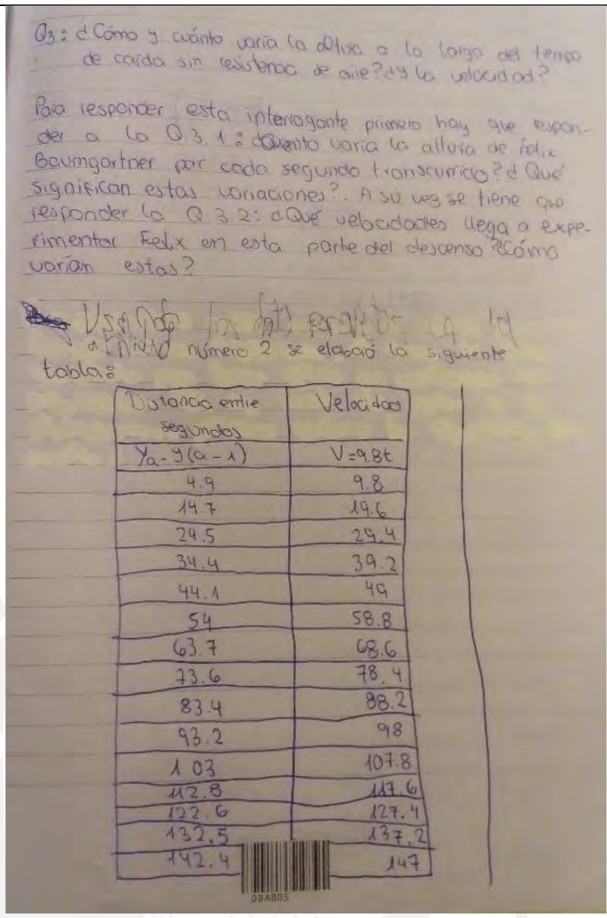
$$\boxed{y = 9.81\ x + 0.025}$$

Figura 57: Extracto de la respuesta R3.2

Grupo 2:

- Para la profundización del estudio de la cuestón ¿Cómo se relacionan las velocidades obtenidas a partir de la tabla y las velocidades obtenidas por la fórmula de caída libre? El profesor propone el estudio de la razón de cambio en el libro de Matemática NM como parte de la media y les replantea el cuestionamiento sobre la relación entre la velocidad teórica y la velocidad real, en otros términos: ¿Cómo obtener velocidades más precisas con los datos de altura propuestos?
- Para responder, los alumnos por una parte optaron por obtener el modelo tabular y algebraico mediante la asociación de la velocidad promedio y el valor central del intervalo de tiempo, como se concluyó en la primera plenaria, y por otra parte empezaron a estudiar la Obra de razón de cambio apoyándose en *medios de estudio* como el libro texto del curso y un video explicativo de Khan Academy.

- Es así que decidieron dividir el trabajo en dos subgrupos: Los alumnos 2M y 2C se dedicaron a trabajar los datos para obtener la regresión lineal y anotarla en el informe parcial, mientras que 2E con 2J se dedicaron a estudiar la noción de razón de cambio apoyados inicialmente en la teoría propuesta por el libro de Matemáticas NM y luego en el video de Khan Academy.



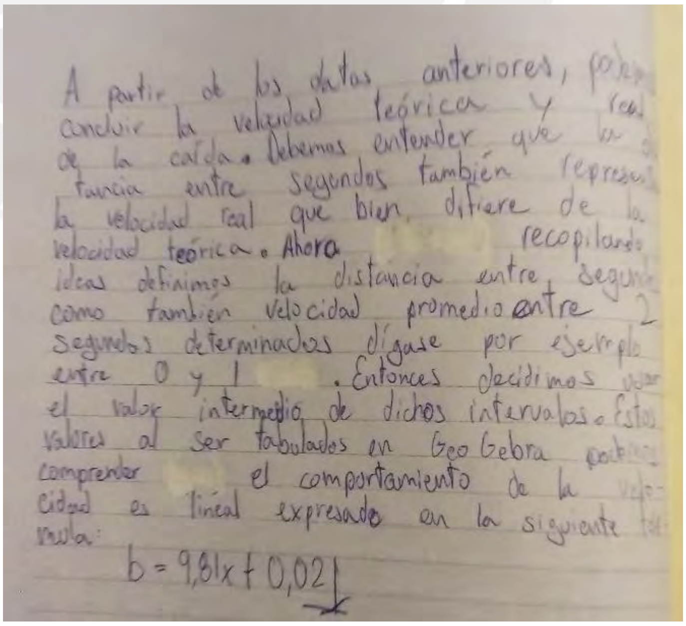
Q3: ¿Cómo y cuánto varía la altura a lo largo del tiempo de caída sin resistencia de aire? ¿y la velocidad?

Para responder esta interrogante primero hay que responder a la Q.3.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones?. A su vez se tiene que responder la Q.3.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas?

Usando los datos de la actividad número 2 se elaboró la siguiente tabla:

Distancia entre segundos	Velocidad
$Y_a - y(a-1)$	$V = 9.8t$
4.9	9.8
14.7	19.6
24.5	29.4
34.4	39.2
44.1	49
54	58.8
63.7	68.6
73.6	78.4
83.4	88.2
93.2	98
103	107.8
112.8	117.6
122.6	127.4
132.5	137.2
142.4	147

Figura 58: R3 reportada por Grupo 2



A partir de los datos anteriores, podemos concluir la velocidad teórica y real de la caída. Debemos entender que la distancia entre segundos también representa la velocidad real que bien difiere de la velocidad teórica. Ahora recopilando ideas definimos la distancia entre segundos como también velocidad promedio entre 2 segundos determinados díganse por ejemplo entre 0 y 1. Entonces decidimos usar el valor intermedio de dichos intervalos. Estos valores al ser tabulados en GeoGebra podemos comprender el comportamiento de la velocidad es lineal expresado en la siguiente fórmula:

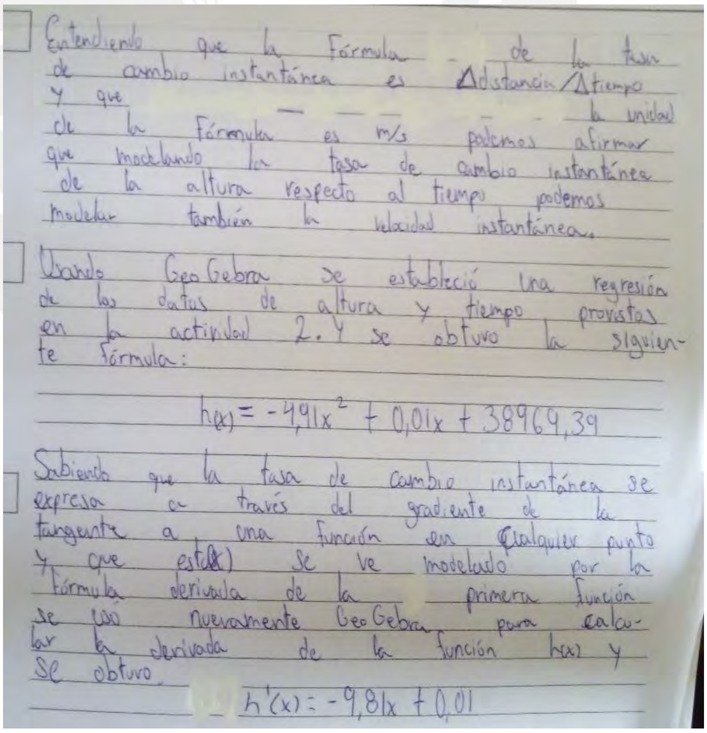
$b = 9{,}81x + 0{,}02$

Figura 59: R3 reportada por Grupo 2

Figura 60: Estudio del medio Khan Academy por parte del Grupo 2 (https://es.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/functions-average-rate-of-change/v/introduction-to-average-rate-of-change)

- El estudio de esta obra con los medios antes mencionados conduce a los alumnos 2E, 2J y 2M a incorporar el estudio de la derivada, con la finalidad de obtener la tasa de variación instantánea, la cual la identifican con la velocidad instantánea. Para operar la derivada los alumnos hacen uso del software GeoGebra, sin llegar a realizar un cálculo explícito para obtener la función velocidad.

- En la *Figura 61* se muestra la respuesta parcial reportada por los alumnos respecto a la incorporación de esta nueva obra. El resultado obtenido para la derivada.



Entendiendo que la fórmula de la tasa de cambio instantánea es Δdistancia/Δtiempo y que la unidad de la fórmula es m/s podemos afirmar que modelando la tasa de cambio instantánea de la altura respecto al tiempo podemos modelar también la velocidad instantánea.

Usando GeoGebra se estableció una regresión de los datos de altura y tiempo provistos en la actividad 2. Y se obtuvo la siguiente fórmula:

$$h(x) = -4{,}91x^2 + 0{,}01x + 38969{,}39$$

Sabiendo que la tasa de cambio instantánea se expresa a través del gradiente de la tangente a una función en cualquier punto y que esta se ve modelado por la fórmula derivada de la primera función se uso nuevamente GeoGebra para calcular la derivada de la función h(x) y se obtuvo

$$h'(x) = -9{,}81x + 0{,}01$$

Figura 61: R3 reportada por Grupo 2

Grupo 4:

- El grupo 4 decidió no incorporar el estudio de la actividad del libro. Sino que estaban abocados a una discusión en el que implícitamente estaba involucrada la noción de intervalos de tiempo e instantes de tiempo, aunque ellos mismos no lo reconocían así. Los alumnos difícilmente acudían a una Obra explícitamente

	para encontrar en ellas respuestas ya acabadas, sino que preferían conjeturar entre ellos. • En un diálogo con el profesor el subgrupo $G4_F$, conformado por 4C y 4D mostraron la idea férrea de que 4.9m/s es la velocidad experimentada en el instante 1, y esto debido a la solidez encontrada en una hipótesis por ellos planteada, la cual dice: • **Hipótesis:** Ahora, se podría pensar que existe una discrepancia con el primer dato de velocidad; puesto que se ha concluido que Félix tiene una aceleración promedio de 9.8m/s2, lo que llevaría a pensar que la primera velocidad debería ser 9.8m/s y no 4,9m/s. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que en el segundo 0, el cuerpo estaba siendo afectado no solo por la aceleración de la gravedad (descendente) sino también por la aceleración que tenía como resultado de haber estado en contacto con el globo (cuerpo ascendente). Esto genera en Félix una aceleración resultante menor a la de la gravedad, que genera una velocidad en el segundo 1 de 4.9m/s. • Ante esta situación el profesor hizo un cuestionamiento que los ayude a volver analizar la situación desde otro enfoque. Para ello, se razonó con ellos en que las velocidades calculadas en los tiempos de 1 a 1 son a fin de cuentas velocidades promedio, es decir, velocidades aproximadas, entonces **Q3.1.2: ¿Cómo hacer para ganar precisión en las velocidades obtenidas?** Esto se concretó en el **Diálogo 13**. **Diálogo 13: Diálogo sobre el estrechamiento del intervalo** P: Ustedes tienen la fórmula de las alturas. ¿Correcto? 4J: Exacto ya la tengo P: Han sacado las alturas en cada segundo 4J: Sí P: Si el 4.9 le pertenece a 1 por la hipótesis que dice César, entonces si yo hago las variaciones no de un segundo en un segundo, sino de medio segundo en medio segundo ¿qué debería pasar? 4G: Quedan más precisos los datos P: Ganas en precisión. Entonces, ¿Por qué no hacer no de 1 en 1 sino de 1/2 en 1/2? 4C: Y de dónde saco el dato de ½ en ½ 4J: De la fórmula [de altura] 4C: Pero esa es una fórmula estadística que salió de estos datos… • Aunque 4C y 4D mostraron cierta resistencia a obtener datos interpolados de una fórmula aproximada, los demás compañeros decidieron continuar con el cálculo. El resto de tiempo de la clase el subgrupo $G4_M$ se dedicó a trabajar los datos manualmente y en GeoGebra. • Tras acabar sus procedimientos, los alumnos del subgrupo $G4_M$ solicitaron la presencia del profesor para mostrarle los resultados con el fin de conseguir una validación, la cual fue correspondida a través de la pregunta: ¿Y si queremos una mayor precisión? Los alumnos se dieron cuenta que el proceso puede ser infinito y optaron por obtener velocidades cada cuarto de segundo como se ve en la siguiente figura.

iempo en segundos	altura en metros	
0	38969,41	
0,25	38964,1	1,24
0,50	38968,18	3,68
0,75	38966,65	6,12
1,00	38964,5	8,6
1,25	38961,75	11
1,50	38958,37	13,52
1,75	38954,39	15,92
2,00	38949,8	18,36
2,25	38944,58	20,88
2,50	38938,75	23,32
2,75	38932,32	25,72
3,00	38925,27	28,2
3,25	38917,60	30,68
3,50	38909,33	33,08
3,75	38900,44	35,56
4,00	38890,93	38,04

Figura 62: Datos de altura y velocidades cada 0.25 segundos

- De este modo se desarrolló la técnica de estrechamiento del intervalo de tiempo para obtener velocidades más específicas. Los alumnos 4J, 4G y 4B obtuvieron velocidades más precisas a partir del cálculo de la tasa de variación media para intervalos de 0.5, 0.25, 0.1 y 0.01 de ancho.

- Por otro lado, el subgrupo $G4_F$ optó por construir una tabla de datos de modo inverso. A partir de las fórmulas de caída libre obtuvo las velocidades experimentadas por cada segundo, las distancias recorridas por cada segundo y la altura experimentada cada segundo.

t (seg)	**v** (m/s)	**v** (km/h)	**d** (m)	**h** (m)
0	0	0	0	38696,4
1	9,80665	35,30394	4,903325	38964,49668
2	19,6133	70,60788	19,6133	38949,7867
3	29,41995	105,91182	44,129925	38925,27008
4	39,2266	141,21576	78,4532	38890,9468
5	49,03325	176,5197	122,583125	38846,81688
6	58,8399	211,82364	176,5197	38792,8803
7	68,64655	247,12758	240,262925	38729,13708
8	78,4532	282,43152	313,8128	38655,5872
9	88,25985	317,73546	397,169325	38572,23067
10	98,0665	353,0394	490,3325	38479,0675
11	107,87315	388,34334	593,302325	38376,09768
12	117,6798	423,64728	706,0788	38263,3212
13	127,48645	458,95122	828,661925	38140,73808
14	137,2931	494,25516	961,0517	38008,3483
15	147,09975	529,5591	1103,248125	37866,15188
16	156,9064	564,86304	1255,2512	37714,1488
17	166,71305	600,16698	1417,060925	37552,33908
18	176,5197	635,47092	1588,6773	37380,7227

Figura 63: Datos de velocidades y alturas obtenidos con fórmulas de caída libre

- Terminó la sesión.

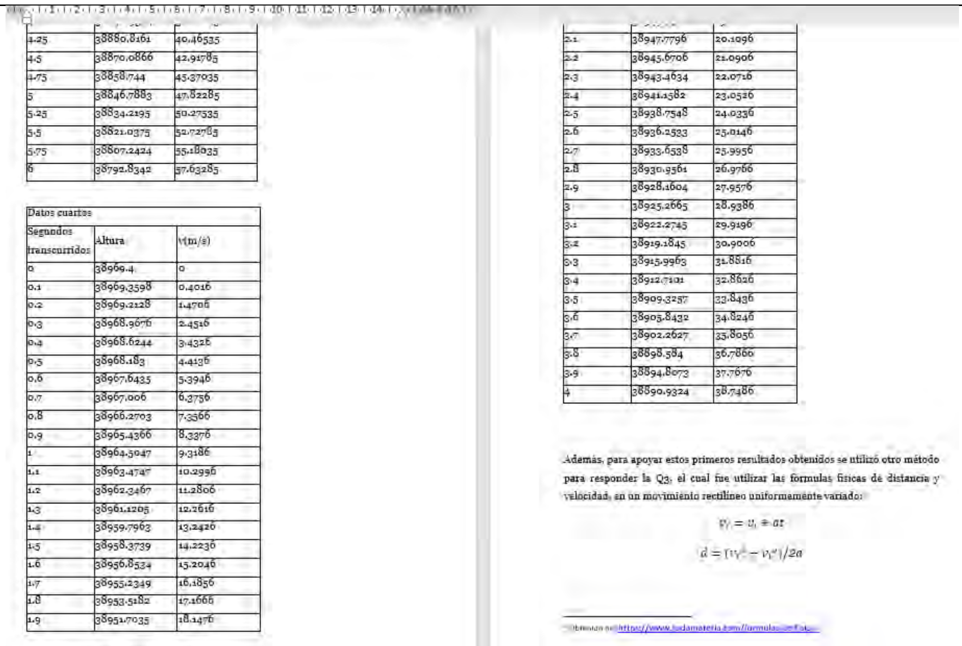
Dialécticas encontradas

La dialéctica de estudio-investigación emergió nuevamente en esta fase del trabajo en diferentes momentos. Entre los momentos cruciales tenemos a la ocasión en que el G1 decide formalizar la respuesta a la cuestión $Q3.2.1_y$, el momento en que G2 decidió estudiar la Obra razón de cambio como consecuencia de la sugerencia del profesor de usar el libro y más concretamente, de trabajar la actividad de investigación del libro. El estudio del capítulo de razón de cambio del libro los llevó a buscar información explicativa en internet. Además, tenemos el momento en el que G4 generó la cuestión derivada Q3.1.2. tras discutir con el profesor los resultados hasta el momento obtenidos, es decir, los cálculos de las velocidades promedio en intervalos de 1 segundo de ancho mediante la tasa de variación media,

	para ellos identifcada como fórmula de velocidad promedio. Para responder a esta cuestión, los alumnos con una limitada ayuda del profesor (diálogo 12) refinaron el cálculo de la tasa de variación media para la velocidad. La dialéctica **media-medio** surgió en el intento de convertir en medio de estudio la actividad de razón de cambio propuesta por el profesor como ayuda para el estudio, pero no tuvieron éxito. Por lo que el medio para estudiar Q3 quedó conformado principalmente por el uso de regresiones lineales como técnica útil y el uso de geogebra como herramienta. En el G2 la dialéctica se manifestó en la incorporación de Khan Academy como medio de estudio. Por su parte en G4, el profesor se convirtió en medio, tras una serie de diálogo y cuestionamientos que permitieron el surgimiento de nuevas cuestiones y por tanto nuevos estudios. Por otro lado, en todos los tres equipos, principalmente en G1 y G4 se pone de manifiesto con mayor notoriedad el trabajo colaborativo intragrupal, ya sea por la repartición de encargos para la preparación del informe parcial, del ppt de exposición y de la misma exposición. Además del reconocimiento público hecho por los expositores de las partes aportadas por sus compañeros al estudio. Indicadores como estos muestran la activación de la dialéctica del **individuo-colectivo** en esta sesión.

Tabla 19: Puesta en común de R3

Sesión 9:	**Puesta en común de las respuestas parciales construidas R3**
Duración:	**80 min (lunes 24/06)**
Medios y medias:	Apuntes, laptop, cañón multimedia.
Desarrollo de la sesión	• Se organizaron todos los grupos para una puesta en común que finalice la respuesta R3. El docente da indicaciones recordando que deben atender a las presentaciones de los expositores para poder validar las respuestas o de lo contrario para refutarlas, ya sea porque se presenten como imprecisas o incorrectas. Además, se incide en que solo se deben difundir los estudios en torno a Q3 únicamente para evitar la prolongación innecesaria comentando respuestas anteriores. • Para incentivar el cuestionamiento durante la difusión, el profesor hace intervenciones que muchas veces inician con una solicitud de explicaciones de partes que se sospecha no han sido suficientemente claras para la comprensión del pleno. Y una vez terminada la exposición, las intervenciones suelen ser cuestionamientos sobre praxeologías declaradas en la presentación, pero que necesitan mayor fundamentación para ser aceptadas por el pleno. • **El Grupo 4** propone para la construcción de R3, dos métodos denominados por ellos, como el método matemático: la aplicación de la tasa de variación media con el respectivo estrechamiento de intervalo, y el método físico: aplicación de las fórmulas de caída libre. Ambos apuntan a conseguir las velocidades experimentadas a lo largo de la caída sin resistencia de aire con mayor precisión.



4.25	38880.8161	40.46535
4.5	38870.0866	42.91785
4.75	38858.744	45.37035
5	38846.7883	47.82285
5.25	38834.2195	50.27535
5.5	38821.0375	52.72785
5.75	38807.2424	55.18035
6	38792.8342	57.63285

Datos cuartos		
Segundos transcurridos	Altura	v(m/s)
0	38969.4	0
0.1	38969.3598	0.4016
0.2	38969.2128	1.4706
0.3	38968.9676	2.4516
0.4	38968.6244	3.4326
0.5	38968.183	4.4136
0.6	38967.6435	5.3946
0.7	38967.006	6.3756
0.8	38966.2703	7.3566
0.9	38965.4366	8.3376
1	38964.5047	9.3186
1.1	38963.4747	10.2996
1.2	38962.3467	11.2806
1.3	38961.1205	12.2616
1.4	38959.7963	13.2426
1.5	38958.3739	14.2236
1.6	38956.8534	15.2046
1.7	38955.2349	16.1856
1.8	38953.5182	17.1666
1.9	38951.7035	18.1476

2.1	38947.7796	20.1096
2.2	38945.6706	21.0906
2.3	38943.4634	22.0716
2.4	38941.1582	23.0526
2.5	38938.7548	24.0336
2.6	38936.2533	25.0146
2.7	38933.6538	25.9956
2.8	38930.9561	26.9766
2.9	38928.1604	27.9576
3	38925.2665	28.9386
3.1	38922.2745	29.9196
3.2	38919.1845	30.9006
3.3	38915.9963	31.8816
3.4	38912.7101	32.8626
3.5	38909.3257	33.8436
3.6	38905.8432	34.8246
3.7	38902.2627	35.8056
3.8	38898.584	36.7866
3.9	38894.8073	37.7676
4	38890.9324	38.7486

Además, para apoyar estos primeros resultados obtenidos se utilizó otro método para responder la Q3, el cual fue utilizar las formulas físicas de distancia y velocidad, en un movimiento rectilíneo uniformemente variado:

$$v_f = v_i + at$$

$$d = (v_f^2 - v_i^2)/2a$$

Figura 64: Datos de altura y velocidades cada 0.25 y 0.1 segundos

Figura 65: Exposición de los dos métodos usados por G4 para construir R3

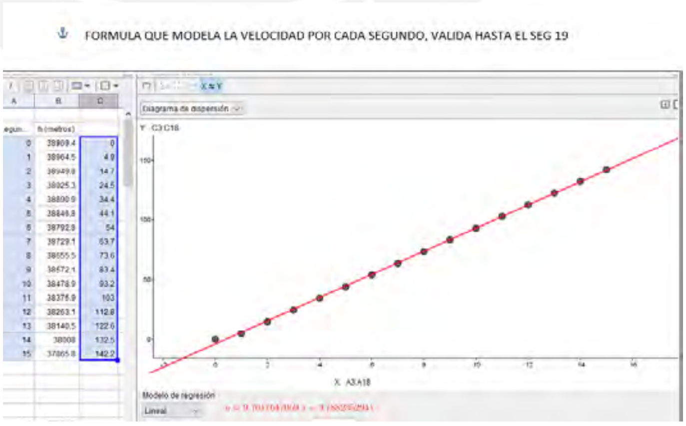


Figura 66: Gráfico reportado como parte de R3.2

Diálogo 14: Cuestionamiento de la difusión de R3 del Grupo 4

P: Esa tabla muestra velocidades promedio en intervalos de décimas de segundo, entonces …esas velocidades que están ahí, tendrían que ser…llegar a ser las velocidades que tú tienes abajo en la otra tabla. Quiero que me expliquen qué lógica explica que ambos lleguen a lo mismo…
Ustedes han partido de una tabla donde se muestran las alturas en cada segundo y cuando han estudiado las variaciones, la mayoría ha hecho lo que

	sigue de esa tabla, que es la resta. Todos tienen eso, a muchos les he visto esto, y son velocidades promedio entendido por todos. Joaquín hace una operación con esas tablas y salen otras velocidades… en concreto salen esas velocidades promedio. Y César muestra otra tabla también con velocidades, pero ya no le llamas promedio… 4C: No…Son velocidades instantáneas P: Instantáneas… ¿Cómo eso de ahí [señalando velocidades promedio] no contradice lo que tú estás diciendo [refiriéndose a las velocidades de caída libre]? 4C: A ver, lo que pasa es que al obtener una velocidad promedio para un intervalo, sucede que […]como se puede ver, como habíamos visto en la original, vemos en función de la distancia que había recorrido cuál sería la velocidad uniforme que debería tener, entonces por ejemplo si en una primera instancia recorrió aproximadamente 4.9 metros, significa que la velocidad promedio sería la velocidad uniforme que debería tener para recorrer esa breve distancia, es decir, 4.9 m/s, es por eso que se le llama una velocidad promedio, porque en la realidad está acelerando, pero lo valores …van iniciar tan bajos y van a terminar [tan altos] al extremo opuesto [del intervalo], que el promedio de estos valores va a ser el valor que está al centro, pero ¿qué sucede? Sucede que cuando empezamos a cortar cada vez más los intervalos en los que se están midiendo, es decir, que pasen de ser, de 1 a 0.5 de 0.5 a 0.25, luego a 0.1, a 0.01 y así sucesivamente, las velocidades promedio también se van hacer más específicas, en lugar de ser de todo un intervalo [de ancho] 1, van a ser cuánto recorrió en los primeros 0.1 segundos. ¿Y qué pasa? Esto nos va a modelar una fórmula diferente a la original, que si antes era una fórmula [por la] que obteníamos unas velocidades promedio, en [la que en] el segundo 1 [salía un valor de] de 4.9, [ahora] en esta [nueva fórmula] es de 9.3, y es que la fórmula que nos ha modelado, nos ha permitido obtener, que los segundos sean tan específicos, nos permite que finalmente la progresión se vaya haciendo también más específica, y así es que … si bien hemos seguido hallando velocidades promedio, terminamos hallando una velocidad instantánea igual que mi método… lo que pasa que mi método [tiene] la diferencia que va directamente a obtener la velocidad instantánea y no va viendo los intervalos. P: No se han cuestionado ustedes que …encuentran una fuente con la explicación de física, encuentran unas fórmulas que aplican y las explicitas en esa tabla. Esas fórmulas ¿qué sentido tienen o cómo han surgido? Es un detalle, porque más de uno sabe las fórmulas de física, y naturalmente como están en el libro de física están validadas, pero por otro lado naturalmente esas fórmulas tienen una manera en que han sido establecidas y entendería yo con lo que me dices, que no hay contradicción entre lo que uno hace y el otro, porque de algún modo han sido generadas esas fórmulas, de repente de ese modo…lo dejo ahí, para que el siguiente equipo continúe lo que han hecho bastante bien sus compañeros. • **El Grupo 2** fue el siguiente en exponer. Su exposición se fundamentó principalmente en la explicación de la tabla mostrada en la figura siguiente.

TIEMPO	ALTURA	VELOCIDAD PROMEDIO (M/S)	VELOCIDAD PROMEDIO (KM/H)	ACELERACIÓN	VELOCIDAD INSTANTÁNEA (M/S)	VELOCIDAD INSTANTÁNEA (KM/H)
0	38969.4	(Ya-Y(a-1))/t		A=G	v=9.8t+0.01	
1	38964.5	4.9	17.64		9.81	35.316
2	38949.8	14.7	52.92	9.8	19.63	70.668
3	38925.3	24.5	88.2	9.8	29.45	106.02
4	38890.9	34.4	123.84	9.9	39.27	141.372
5	38846.8	44.1	158.76	9.7	49.09	176.724
6	38792.8	54	194.4	9.9	58.91	212.076
7	38729.1	63.7	229.32	9.7	68.73	247.428
8	38655.5	73.6	264.96	9.9	78.55	282.78
9	38572.1	83.4	300.24	9.8	88.37	318.132
10	38478.9	93.2	335.52	9.8	98.19	353.484
11	38375.9	103	370.8	9.8	108.01	388.836
12	38263.1	112.8	406.08	9.8	117.83	424.188
13	38140.5	122.6	441.36	9.8	127.65	459.54
14	38008	132.5	477	9.9	137.47	494.892
15	37865.6	142.4	512.64	9.9	147.29	530.244
16	37713.4	152.2	547.92	9.8	157.11	565.596
17	37551.4	162	583.2	9.8	166.93	600.948
18	37379.6	171.8	618.48	9.8	176.75	636.3
19	37198	181.6	653.76	9.8	186.57	671.652
20	37006.6	191.4	689.04	9.8	196.39	707.004
21	36805.4	201.2	724.32	9.8	206.21	742.356
22	36594.4	211	759.6	9.8	216.03	777.708
23	36373.6	220.8	794.88	9.8	225.85	813.06
24	36143	230.6	830.16	9.8	235.67	848.412

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Figura 67: Tabla de datos de R3 reportada por Grupo 2

- Este grupo acogió la técnica del grupo 1 difundida en la clase anterior, con la que se asocia la velocidad promedio por segundo con el término medio del intervalo, para obtener el modelo algebraico -ver *Figura 66*-. Sin embargo, en esta fase el grupo 2 se destaca principalmente por aportar una nueva técnica para obtener las velocidades experimentadas por Félix: el uso de la derivada. Ahora bien, el grupo en su exposición -registrada en el **Diálogo 15**- y en la redacción de su respuesta -registrada en la *Figura 61*- mostró un entendimiento aproximado de la derivada como tasa de cambio instantánea de la caída, sin embargo, la aplicación de este objeto matemático solo pudo ser hecho mediante el uso de GeoGebra, quedando pendiente la explicación del modo como este operador interviene en el tratamiento de la fórmula cuadrática de la altura.

Diálogo 15: Exposición del grupo 2

2J: A partir de la tabla, la pusimos en GeoGebra y salió una fórmula en relación al tiempo y a la altura, que está en el Excel y que nos da la velocidad promedio en metros por segundo según el tiempo y la altura y luego lo convertimos a km por hora. Sin embargo, el problema con esta tabla, con esta fórmula es que asume que estamos en todo momento en caída libre, y lo que ocurre es que cuando llegamos al supuesto…a los 25 000metros que es el supuesto momento en que recién empieza a haber resistencia del aire, la velocidad en km/h es ya 1747, cuando se supone que la velocidad máxima que alcanza es 1377.6. En ese sentido todavía no hallamos…sabemos que …sabemos que tiene que haber resistencia de aire antes de los 25000, sin embargo, no sabemos exactamente en qué momento, se supone que debería ser cuando está más o menos en 1324 o sea en el segundo 38 o 37, pero no sabemos cuál es exactamente. Luego, entonces la respuesta a la 3.1 que es cuánto varía la altura de Félix en este lapso transcurrido, asumiendo que estamos en caída libre esta es la forma en la que termina variando la altura de Felix [señalando la tercera columna de la tabla en la *Figura 67*] y, en segundo lugar, estas variaciones [señalando la quinta columna de la tabla en la *Figura 67*] significan que la aceleración es 9.8, es decir que estamos dentro de una caída libre, significa por tanto que no hay resistencia de aire.

2E: La velocidad promedio simplemente, como ya comentaron bien César y Gustavo, se obtiene simplemente con la diferencial de distancia entre la diferencial del tiempo. Entonces, lo que hemos obtenido aquí, es como ya hemos definido todos, el intervalo de la velocidad que se obtiene entre estos dos [señalando el instante t=1 y t=2]. Entonces, lo que hemos hecho nosotros…estee, [es hallar] esta fórmula cuadrática [en la que] se relaciona

	la distancia y el tiempo de caída, entonces viendo esa fórmula lo que hemos hecho es aplicarle lo que es la función derivada, sabiendo que la función derivada mide la tasa de cambio instantánea, que es lo que también propuso el equipo de César. Entonces, la función derivada es la expresión de ahí [señalando la fórmula de GeoGebra]. Ahora si bien esta fórmula va a salir [con] un valor negativo, si le ponemos un valor absoluto que lo va a volver positivo, vamos a obtener la velocidad instantánea, porque es la tasa de cambio instantánea y lo ponemos ahí y nos da esos valores que también se aproximan a los que tiene el grupo de César. Luego lo convertimos a la velocidad instantánea [quiere decir velocidad en km/h] y así es como hemos ido extrapolando los datos hasta un punto indefinido según lo que nos da los datos de red Bull de la velocidad máxima y el tiempo en que alcanza la velocidad del sonido. Ahora bien, como bien comentó Estrada nuestro grupo aún no define hasta qué punto la resistencia de aire no es significativa para poder seguir hablando de caída libre, entonces simplemente este el problema de nuestro grupo y tenemos que tratar de definir cuándo realmente cambia. 4C: ¿Puedo hacer una pregunta yo? P: Sí 4C: Este… ¿Si tenemos los datos de red Bull que nos dicen cuál fue la velocidad máxima, y que nos mostraron hace un rato, no podemos tomar en qué momento la velocidad instantánea es la que concuerda con esa y a partir de ese momento ya sería cuando afecta la densidad del aire? 2J: No, porque puede seguir acelerando, aunque haya resistencia de aire P: A ver a ver no entendí la respuesta. 2E: Lo que pasa es que cuando hay resistencia del aire va a empezar a desacelerar, porque la resistencia del aire es contraria a la gravedad. P: ¿Qué es desacelerar? 2E: Este… cada vez que la velocidad va aumentando en menor proporción P: Eso es acelerar 2E: Significa que va ir cambiando de 9.8 más 9.8 más 9.8 entre cada segundo, ahora bien, que esté desacelerando significa que ya no va a crecer de 9.8, sino que va ir creciendo en 9.7, 9.6 y así sucesivamente P: Yo creo que eso es acelerar, pero acelerar menos que antes. 1M: Está desacelerando 2J: Puede seguir acelerando, pero menos que antes 2E: Entonces vamos a decir reducir la aceleración P: Exacto. ¿Qué es desacelerar? 1M: Disminuir la velocidad P: Pero la velocidad sigue aumentando según lo que dices tú. 2E: Reduce la aceleración P: Reduce la aceleración. 4C: Esa es la respuesta **Diálogo 16: Defensa del uso de la función derivada** P: Yo cuestiono dos cosas: en primer lugar, el detalle de que refieres a términos como diferencial de alturas entre diferencial de tiempo, y no sé si todos aquí sepan qué eso, y por otro lado hablas de la derivada como aplicación de esto, pero también ¿cómo es que interviene la derivada ahí? ¿cómo interviene ahí? 2E: Tenemos que la tasa de cambio entre la distancia y el tiempo tiene un valor que va ir disminuyendo, que va ir cambiando. Ahora bien, entonces ¿qué fórmula mide esta tasa de cambio? Eso lo hace la función derivada, en ese sentido nuestro grupo ha decidido que la función derivada aplica en este contexto… P: ¿Qué mide la función derivada? 2E: La tasa de cambio instantánea P: ¿Cómo obtener una función derivada? 2E: [responde señalando la fórmula de la *Figura 67*]

P: ¿Tú has aplicado eso a la altura?

P: Bien, eh…claramente pones ahí detalles que son similares. Vamos a hacer algo. Eso que tienes como velocidad instantánea en la penúltima columna dice 9.8t+0.01, ¿de dónde sale esa fórmula?

2E: De la fórmula cuadrática que se ve aquí, usamos la fórmula derivada y sale

P: ¿Puedes aplicarla?

2E: Ese es el problema

P: ¿Cómo has sacado ahí la función derivada? ¿Cómo obtener la función derivada?

2E: [Calculando la derivada de la función y=-4.91x2 +0.01x+38969.39 con GeoGebra]

P: Tienes la fórmula de altura y luego aplicas derivada con la computadora.

2E: Se aplica la fórmula de ahí [señalando la fórmula de límite en la tabla]

P: Pero el procedimiento que hace la computadora ¿cuál es?

2E: Ese de ahí [Señalando la fórmula de límite de la tabla]

P: Hay que practicarlo

- **El Grupo 1** se diferenció por presentar una técnica, para obtener las velocidades experimentadas, en la que se hace uso en primer lugar de los intervalos de tiempo, identificando con ello que las velocidades promedio por cada segundo representan a las velocidades experimentadas a lo largo de cada segundo, desde el instante con el que empieza hasta el instante con el que termina. Aunque no usa exactamente esta terminología, llega a aclarar un poco esta idea a los demás grupos que presentaban cierto obstáculo en comprender este fenómeno. Además, como parte de su técnica para modelar la función velocidad, hicieron una regresión lineal que asocia cada valor central de los intervalos de tiempo con su correspondiente velocidad promedio, obteniendo una función más precisa, que la validaron con ayuda de la participación de otros compañeros, haciendo uso de la función de caída libre **v=9.81t.** Sin embargo, aún les faltaba seguridad para consolidar el uso de esta técnica. En la *Figura 68* se muestra parte de la respuesta R3 reportada en el informe parcial y la correspondiente función de velocidad aproximada obtenida.

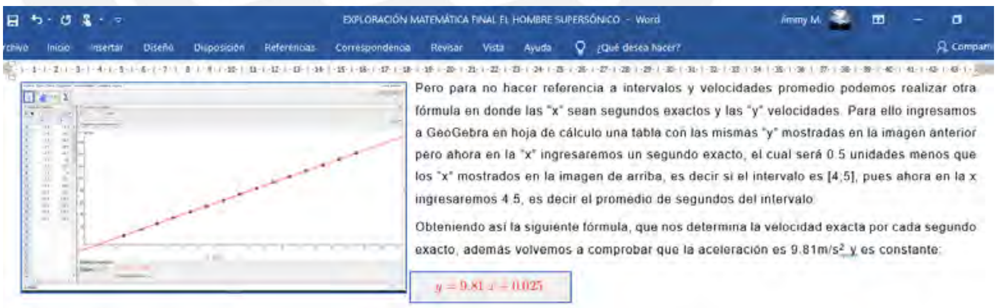


Figura 68: R3 reportada por Grupo 1

Diálogo 17: Defensa del uso del término central del intervalo de tiempo.

P: ¿Cómo sustentar el hecho de que 4,9 le corresponde exactamente al punto central del intervalo?

1M: Como dijo Enrique, como dijo César… sale de la diferencial de tiempo y la diferencial de altura, es decir, si tenemos una distancia recorrida de 10 metros, en el primer metro la velocidad era 1, en el último metro la velocidad era 3. La velocidad promedio en ese recorrido es cuando está en el quinto metro de recorrido, y la velocidad sería 2. Porque es el promedio de la velocidad inicial con la final, la diferencial de velocidades en el punto medio.

P: Yo planteó la siguiente cuestión. Imagínense lo siguiente, entiendo el hecho de que 4.9 y todos esos números son velocidades promedio, correcto? que se experimentan en cada tramo de segundo y Marcelo ahí hace corresponder esa velocidad al tiempo también promedio de cada segundo, de 0 a 1, el promedio es 0.5. de 1 a 2 el promedio es 1.5, entonces asocia a

	cada tiempo o segundo promedio con la velocidad promedio, correcto? Entonces, la pregunta para todos es ¿cómo estar seguro de que eso se puede hacer siempre, de asociar el valor medio de segundo con el valor medio de velocidad, eso lo puedo hacer siempre? 4J: Se podría intentar tabular con la fórmula de la aceleración de física o sea 9.8 por tiempo que es 0.5. P: 9.8 por 0.5 sale 4.9, y 9.8 por 9.5 ¿cuánto sale? 4C: 93.1 P: Y por 13.5 4C: 132.3 P: Está muy cerca de lo que está ahí. Prueba con 9.81 en lugar de 9.8; 9.81 por 13.5 1M: 132.43 P: Claramente son muy cercanos los puntos centrales, cada punto medio con su correspondiente velocidad. No es que sea completamente preciso, en el movimiento, o sea en la realidad la matemática no es que modele las cosas con exactitud. • Tras la explicación de los grupos 1, 2 y 4 al GG sus posibles respuestas a Q3 y sus cuestiones derivadas, se puede finalizar esta etapa explicitando las técnicas reportadas por los grupos. **Q3: ¿Cómo y cuánto varía la atura de un salto de paracaidismo sin resistencia de aire? ¿Y la velocidad?** • Q3.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones? • Q3.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas? Las diversas respuestas $\boldsymbol{R_3^\lozenge}$ expuestas por los alumnos se caracterizan por desplegar el uso de técnicas, algunas similares entre sí, pero que responden aproximadamente a la situación y se muestran clasificadas a continuación: $\boldsymbol{\tau 1}$: Dado que nos encontramos en una caída libre las velocidades experimentadas por Félix se pueden obtener mediante la fórmula: $\boldsymbol{v_f = at}$ Donde la aceleración es igual a 9.80665 m/s^2. $\boldsymbol{\tau 2}$: Dado que tenemos las alturas experimentadas por cada segundo de la caída de los primero 15 segundos, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento • Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores • Calcular la tasa de variación media por cada segundo: $\bar{v} = \frac{h_{t+1}-h_t}{1}$ • Asignar cada valor de $\bar{v}$ al extremo derecho de cada intervalo de tiempo. • Aplicar regresión lineal para obtener la función de velocidad promedio $\boldsymbol{\tau 3}$: Dado que tenemos las alturas experimentadas por cada segundo de la caída de los primero 15 segundos, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento • Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores • Calcular la tasa de variación media por cada segundo: $\bar{v} = \frac{h_{t+1}-h_t}{1}$ • Asignar cada valor de $\bar{v}$ al término medio de cada intervalo de tiempo. • Aplicar regresión lineal para obtener la función de velocidad promedio $\boldsymbol{\tau 4}$: Dado que tenemos las alturas experimentadas por cada segundo de la caída de los primero 15 segundos, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento

	• Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores • Calcular la regresión polinomial que modela la altura en función del tiempo • Calcular las alturas cada Δt segundos ($\Delta t = 0.5\ s, 0.25\ s, 0.1\ s, 0.01\ s$) • Calcular la tasa de variación media por cada Δt segundos: $\bar{v} = \frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t}$ • Asignar cada valor de $\bar{v}$ al extremo derecho de cada intervalo de tiempo. $\boldsymbol{\tau 5}$: Dado que tenemos las alturas experimentadas por cada segundo de la caída de los primero 15 segundos, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento • Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores • Calcular la regresión lineal que modela la altura en función del tiempo • Graficar la función en el programa GeoGebra • Calcular la derivada de la función altura con GeoGebra • Obtención de y= h'(t) que modela la velocidad por cada instante
Dialécticas encontradas	La dialéctica del **estudio-investigación** en el G2 se evidenció en el esfuerzo por deconstruir la noción de derivada después de haber sido identificada como el objeto matemático idóneo para estudiar la velocidad. Y aunque no llegaron al estudio tecnológico de la derivada, sí llegaron a hacer uso de éste mediante la aplicación de la tecnología: GeoGebra. El Grupo 4 declaró que en el proceso de estudio realizado eligieron dos recorridos diferentes para responder a Q3.2: el recorrido fundamentado en las fórmulas de la caída libre: $\mathbf{v_f = at}$ y $\mathbf{h = 0.5gt^2}$, y el recorrido fundamentado en la tasa de variación media. En la exposición dada por los alumnos 4J y 4C se evidenció que hubo una complementariedad entre ambos caminos, que permitió que juntos contribuyeran a formular la respuesta a Q3.2 de manera más sólida y clara, desplegándose de este modo la dialéctica **individuo-colectivo**.

5.2.3 Tercera etapa: Estudio de la caída con resistencia de aire

Tabla 20: Estudio de la cuestión Q4

Sesión 10:	**Estudio de la caída con resistencia de aire**
Duración:	**180 min (martes 25/06 y miércoles 26/06)**
Medios y media	**Actividad n°3, GeoGebra, Excel, Internet**

Desarrollo de la sesión:

- Se inicia el estudio de la cuestión Q4 propuesta por el profesor con algunas cuestiones derivadas.

  Q4: ¿Cómo varía la altura y la velocidad que experimenta el paracaidista a lo largo del tiempo de caída con resistencia de aire?

- Para ello, se hace entrega a los alumnos de la Actividad n°3 con las alturas experimentadas por Félix Baumgartner desde los 12 primeros segundos de caída, expresadas en dos etapas, una a través de una tabla de valores y la otra a través de una regla de correspondencia:

Primera parte

Tiempo t en seg	Altura h en metros
12	38263.1
14	38008.0
16	37713.7
18	37381.3
20	37013.3
22	36609.4
24	36169.5
26	35693.8
28	35182.9
30	34637.9
32	34060.1
34	33451.2
36	32813.7
38	32149.6
40	31462.3
42	30754.9
44	30031.1
46	29295.1
48	28551.3
50	27804.5
52	27060.1
54	26323.6
56	25601.0
58	24898.8
60	24223.6
62	23582.8
64	22982.9

$$\boldsymbol{h(t) = 57972.34899.e^{-0.03563t} - 79.4t + 22136.74136,\ para\ \ t \geq 64}$$

Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo? ¿Qué significan estas variaciones?

Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas y qué tanto varían?

Q4.3: ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?

Otras cuestiones a estudiar:

____

____

____

Primera parte

- La actividad n°3 se presenta como una extensión de la actividad n°2 que permite estudiar otra fase del movimiento de caída a través de la Q4 y de los datos propuestos. Para ello los alumnos deben evaluar cuáles de las técnicas que hasta el momento manejan son las apropiadas para construir los distintos componentes de R4.

- Los grupos G4 y G1 inicialmente presentaron dificultades para abordar el problema, debido a que las alturas propuestas son cada 2 segundos y tardan un tiempo en tomar decisiones que lleven a resolver esa dificultad. Por lo pronto todos han procedido a obtener las diferencias de alturas experimentadas cada dos segundos.

Grupo 1

- En la primera parte de la sesión el grupo empezó con la investigación de la cuestión **Q4.1** a través del estudio tabular de los datos, es decir el tipeo de cada una de las alturas proporcionadas y el cálculo de las regresiones lineales para obtener el modelo de altura. Se observó una confrontación entre dos modelos posibles obtenidos: un modelo cuártico y otro logístico, ambos con un R^2=1, aunque, terminó predominando el modelo cuártico.
- Luego de ello intentaron aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau 3}$**:**
    - o Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores
    - o Calcular la tasa de variación media por cada segundo: $\bar{v} = \frac{h_{t+2}-h_t}{2}$
    - o Asignar cada valor de $\bar{v}$ al término medio de cada intervalo de tiempo.
    - o Aplicar regresión lineal para obtener la función de velocidad promedio

- Sin embargo, presentaron dificultades en la aplicación del segundo paso, exactamente en efectuar la división con el diferencial de tiempo. Los alumnos interpretaban a la diferencia entre alturas consecutivas como velocidad cada dos segundos, aseverando expresiones como: *"294 metros por dos segundos"*. En tal sentido, el modelo obtenido para la velocidad promedio poseía respuestas duplicadas en comparación a las que realmente fueron experimentadas.

- En la segunda parte de la sesión, tras discutir entre ellos cayeron en la cuenta del error de la tasa de variación, sin embargo, también se dieron cuenta de la imprecisión de las velocidades, pues se resistían a admitir que en dos segundos consecutivos se consideren velocidades iguales.

- Se consultó con el profesor la inquietud y en ese diálogo se les recordó que en los resultados de Q3 se mostró por parte de G4 una técnica para ganar precisión en las velocidades. Tras ello, el alumno 1M redescubrió la técnica $\boldsymbol{\tau 4}$ al proponer la estrategia de hallar las alturas "faltantes" correspondientes a los segundos impares a través de la función de altura ya modelada y la potenció al añadir el cálculo del modelo algebraico para las tasas de variación media por cada segundo (velocidades promedio).

    $\boldsymbol{\tau 4}$: Dado que tenemos las alturas experimentadas por cada segundo de la caída, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento:
    - o Identificar los datos de tiempo y altura en la tabla de valores
    - o Calcular la regresión polinomial que modela la altura en función del tiempo
    - o Calcular las alturas cada Δt=1 segundo
    - o Calcular la tasa de variación media por cada $\Delta t = 1$ s: $\bar{v} = \frac{h_{t+1}-h_t}{1}$
    - o Asignar cada valor de $\bar{v}$ al extremo derecho de cada intervalo de tiempo.
    - o Aplicar regresión lineal para obtener la función de velocidad promedio
- Se repartió el encargo de calcular los valores correspondientes a los segundos impares uno a uno mediante la aplicación de análisis de datos de GeoGebra, y luego de obtener manualmente con calculadora las diferencias de alturas. Este método de trabajo determinó que no se plantearan la posibilidad de estrechar

Primera parte

más los intervalos de tiempo, sino que rápidamente encontraron satisfacción en los resultados de velocidades a partir de un intervalo con Δt=1 s. Luego continuaron con los pasos de $\boldsymbol{\tau 4}$.

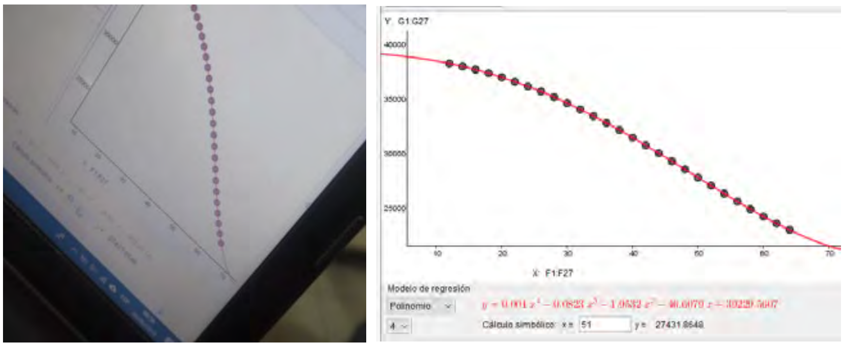


Figura 69: Cálculo en un modelo cuártico de altura, el valor de h(51)

- Los alumnos obtuvieron como respuesta de velocidad un modelo cúbico.

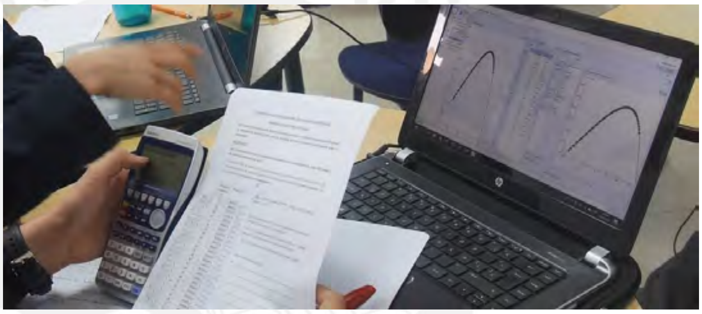


Figura 70: Instante que muestra la comprobación de los datos del modelo cúbico de la velocidad

Grupo 2:

- En toda esta sesión el grupo no cuenta con el integrante 2M. Los alumnos 2E, 2J y 2R deciden empezar la investigación de **Q4.1** a través der un estudio tabular de los datos proporcionados para los tiempos $12 \leq t \leq 64$, para lo cual empezaron por tipear todos los datos en una hoja de cálculo de Excel en continuación a los datos correspondientes a la primera fase.

- Encontrados en esta situación los estudiantes no saben cómo solucionar el problema de no tener los datos de altura para los segundos impares. En un breve diálogo entre 2J Y 2E se deja entrever que reconocen la necesidad de "*intrapolar*" para obtener los datos faltantes, pero no recuerdan cómo hacerlo. Lo cual los lleva a hacer búsquedas "a tientas" en internet. A pesar de las condiciones, no solictaron ninguna orientación.

- En la segunda parte de la sesión, se observa la decisión de suspender el estudio tabular empezado el día anterior y prosiguieron a dividir el trabajo intragrupal de la siguiente manera: 2J y 2C se dedicaron a redactar digitalmente el informe parcial con las respuestas parciales hasta el momento obtenidas, mientras que 2E ayudado de 2R se dedicaron a estudiar los reportes publicados en internet sobre el fenómeno, lo que los conlleva al estudio de la fórmula de la ecuación diferencial del paracaidismo. La fuente estudiada fue:
    - https://naukas.com/2012/10/21/el-salto-baumgartner-paso-a-paso/

Grupo 4:

- En esta fase el grupo se reorganizó en tres subgrupos: el subgrupo $G4_O$, conformado por los alumnos 4D y 4G, se encargaron de tipear y revisar el informe parcial, el subgrupo $G4_M$, conformado por los alumnos 4J y 4B, se encargaron de estudiar la **Q4.1** con el -por ellos denominado- método matemático, es decir, mediante el uso de regresiones lineales; y el subgrupo $G4_F$, conformado únicamente por el alumno 4C, se dedicó a estudiar la **Q4** con el método físico, específicamente se dedicó a investigar, por un intervalo de tiempo, si había alguna fórmula física que modele un movimiento rectilíneo que no sea uniformemente acelerado.

- El $G4_M$ empezó con el estudio de la cuestión derivada *Q4.1.1: ¿Cómo verificar que los datos de esta nueva tabla son correctos?* planteada por el alumno 4J. Él mismo propuso el plan de verificación, el cual consistió en tabular los tiempos correspondientes a la segunda fase en el modelo cuadrático de la altura de la primera etapa, y a partir de esa técnica comparar con las alturas propuestas en la actividad. Sin embargo, en un principio no llegaban a comprender porqué los resultados no coinciden con los datos proporcionados para la segunda fase.

- Se presentaron intercambios de ideas entre ambos subgrupos, registrados en el Diálogo 17, en el que emergen las siguientes cuestiones derivadas:
  Q4.1.2: ¿Por qué los nuevos datos de altura no concuerdan con la fórmula de altura que hallamos para los primeros 15 segundos?
  Q4.1.3: ¿En qué momento empieza a afectar la resistencia del aire?
- Las respuestas se centran principalmente en la influencia de la resistencia del aire en la caída y en la idea de aplicar la técnica antes mencionada para identificar el instante de tiempo en que el descenso deja de ser caída libre, el cual fue t=18 segundos.

- Los alumnos 4G y 4J hacen uso de geogebra para obtener una regresión para los datos desde t=18, obteniendo una **función sinusoidal**. Sin embargo, el modelo fue cuestionado por 4C ya que encontraba resistencia en aceptar un modelo mediante métodos estádisitcos que no atiendan la influencia de las variables físicas intervinientes, lo cual no era compatible con los modelos físicos que explican y modelan fenómenos de este tipo.

- Tras ello, se optó por continuar con un análisis tabular, calculando en primer lugar, la tasa de variación media para obtener las velocidades experimentadas cada dos segundos y, en segundo lugar, calculando las variaciones de velocidades cada dos segundos sin darse cuenta que debían también dividir entre 2, para obtener la aceleración. Es así, que tuvieron que afrontar el cuestionamiento de porqué los primeros valores de "aceleración" en este intervalo resultaban bastante grandes, aproximadamente el doble de la gravedad de 9.8 como ocurría en la fase 1 y porqué ahora estos valores empiezan a tomar valores negativos tras el instante t=50 s.

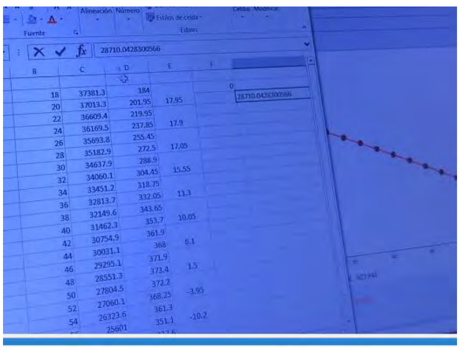


Figura 71: Estudio tabular con dificultades para obtener la aceleración.

- Tras dialogar con el profesor y transmitir sus dudas a manera de cuestionamientos, el profesor los condujo caer en la cuenta del hecho de que no habían terminado de calcular la tasa de variación, pues no había dividido entre 2. La decisión que finalmente tomaron no fue dividir las variaciones entre dos, sino obtener los valores correspondientes a los tiempos impares para evitar ese problema. Se decide proceder con la aplicación de la técnica 4.

- Por otro lado, el estudio del subgrupo $G4_F$, identificado por 4C, abordó **Q4** retomando el estudio de la ecuación diferencial fundamentada en la segunda ley de Newton reportada en R1. Para ello, el estudiante se valió de un artículo de física, sitios web y la videograbación de la caída de Félix para intentar obtener datos para los componentes de la fórmula mostrada en la próxima figura:

$$a_g - C\frac{d.s.v^2}{2m} = a$$

- Los medios de los que se valió para el estudio fueron:
    - Los hechos y cifras oficiales del salto supersónico de Felix Baumgartner desde el borde del espacio. Red Bull Stratos. 5 de febrero de 2013. Referente de: https://www.redbull.com/ar-es/red-bull-stratos-revela-sus-datos-finales
    - Manus, Mc. Naturalmente, Ciencias. Un salto desde la estratósfera para hablar de la atmosfera. 10 de octubre de 2012. Referente de: https://naturalmenteciencias.wordpress.com/2012/10/14/un-salto-desde-la-estratosfera-para-hablar-de-la-atmosfera/
    - NASA. Obtenido de: https://www-spof.gsfc.nasa.gov/stargaze/Mnewt2nd.htm
    - Filmación de la caída: https://www.youtube.com/watch?v=dYw4meRWGd4
    - Artículo sobre el experimento: https://www.researchgate.net/publication/258272476_Quantitative_model_of_record_stratospheric_freefall
    - https://issuu.com/redbullstratos/docs/red_bull_stratos_summit_report_final_050213

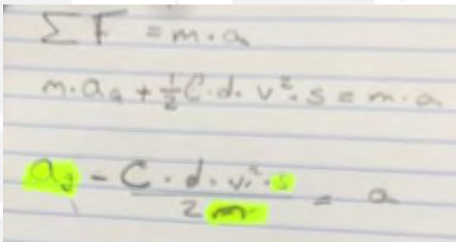


Figura 72: Ecuación diferencial estudiada por 4C del $G4_F$

Diálogo 18: Reporte de avances y discusión sobre el inicio del estudio de R4

4J: 4C ¿qué estás investigando tú para que sepa [el profesor]?

4C: Estoy investigando el movimiento rectilíneo variado, que en este momento ya no es uniforme, porque también varía la aceleración.

4J Podemos ver tu máquina un segundo para que vea el profesor lo que estás haciendo.

4C: [mostrando la laptop a la cámara filmadora]

4J: 4D está leyendo el informe que hemos hecho. [Él] está haciendo las correcciones ortográficas que pueda tener el informe.

4B: 4D, voltea la máquina […]

4J: Mientras que […] 4G, 4B y quien les habla, 4J, tenemos que resolver esto [señalando tabla de Q4], pero para resolver esto vamos a sacar unas subpreguntas como, por ejemplo, las que hizo 4C […] Y nosotros vamos a verificar si estas nuevas alturas [de la tabla] son las correctas supuestamente.

4B: ¿Acabas de asumir que los datos que nos acaba de dar el profesor Jimmy pueden ser erróneos o me parece?

4J: ¿Por qué no? [...] Entonces supuestamente estas alturas son las correctas por cada segundo. Lo que vamos hacer 4B, 4G y yo es verificar si estas alturas concuerdan con las alturas obtenidas a través de la fórmula que obtuvimos a través de los primeros 15 segundos que nos dio en la primera hoja. ¿Cómo lo verificaremos?

4B: Tranquilo

	4J: Vamos a entrar al informe que están en el drive entonces, al principio sacamos en los primeros segundo…esos son los primeros datos [señalando el informe de Q3] 4B: Esto ya lo hicimos en la exposición… 4J: Ya […] 4B: No hay necesidad de explicarle […] En el segundo 30 es 34637.9 4J Entramos en la máquina y tiene que ser igual, a través de insertar en "x" un 30. ¿Cuánto sale? 4B: Cuánto era…Bueno hasta acá el video de hoy… 4J: En el segundo 30… 4B: 34554.9 4J: Por lo tanto ¿habrá que contar los primeros 30 segundos como caída libre? Probemos con el segundo 22 a ver cuánto es la altura. 4B: ¡Ah verdad! Claro, ya te entendí, ya te entendí. En el segundo 22, en la hoja que nos entregó es 36609.4 y acá 36 595... 4J: En el seg 22, 36609 y ¿ahí? 4B: 36 595. Vamos a ver… 4J: 595 y 609 se diferencian aproximadamente por …14 unidades 4B: En el segundo 20 ya está super cerca, super super cerca. Con una diferencia de… ¿cuánto? 4J: De 4… 4B: De 4 metros. 4J: Igual no es muy cerca que digamos. Bueno, segundo 16… 4B: Estamos hablando de escalas de 39000 y 40000 así que sí es cerca. […] En el segundo 16 concuerda […] 4J: Vamos a llamar al profesor Jimmy 4B: ¡Profesor Jimmy! 4C: ¿Por qué siempre preguntan antes de consultar al grupo? ¿Para qué estoy yo? P: Sí, cuando haya duda…la duda tiene primero que consultarse entre ustedes y luego conmigo […] 4C: A mí nunca me preguntas 4G: […] Ya pregunta a 4C nomás […] 4J: César, te quería preguntar. Nosotros hallamos las velocidades [de los primeros 15 segundos]. Con el método matemático hallamos velocidades a partir de las alturas: diferencial de altura entre diferencial de tiempo, ¿siono? 4C: Ya. Esa fórmula es de física 4J: Supón que las sacamos…mis velocidades concordaban con las tuyas. Supuestamente las tuyas están bien, ¿quedamos en eso? 4C: Ya 4J: Esas alturas las hallamos a partir de una fórmula que salió de los primeros 15 segundos, entonces ¿por qué con estos datos [de la tabla de Q4] no concuerdan las alturas a pesar de que mis velocidades eran las mismas que las tuyas? 4C: Porque ya hay resistencia del aire 4J: ¿Cuál? 4C: Cuando hay resistencia del aire ya no es un movimiento uniformemente acelerado, o sea que ya no puedes usar tu método. 4J: Entonces ¿por qué tus velocidades salían igual que las mías? 4B: Porque él sí está tomando en cuenta… 4C: ¡No! porque ahí no había resistencia del aire 4J: ¡Ah! tú tampoco contabas la resistencia del aire… 4C: No 4B: Entonces…que nos vamos a [tener que] dar cuenta en qué momento… 4C: En qué momento ya hay resistencia de aire 4J: Quiere decir que estábamos investigando los primeros 15 segundos días de caída sin resistencia del aire, y que estaba mal lo que estábamos haciendo... 4C: Nooo 4B: [Hablándole a 4C] Escúchame, si es que en el segundo 20 no concuerdan los datos entonces en el segundo ya no era caída libre

	4C: [Afirmando con un gesto]
	4B: [Hablándole a 4J] ¡Ya pues! [entonces] eso es lo que estamos descubriendo
	4J: Es que Chamo, ¡son los primeros 20 segundos!
	4B: Yaaa, eso estamos descubriendo
	4J: Supón que los primeros 15 segundos son caída libre…
	4C: ¡No sabemos cuánto tiempo es caída libre!
	4J: Pon 15, pon 15
	4B: No mira, ponemos 16 …
	4J: No, pon 15 por favor, pon 15
	4B: No tenemos el dato con 15
	4J: Te ruego que pongas…No, ya, ya, pon 16.
	4C: Mira, lo que tienes como referencia son los datos que te dio Jimmy. Cuando [estos] empiecen a variar mucho es porque ya hay resistencia de aire.
	4B: [Hablándole a 4J] Eso es lo que te estoy diciendo. Pero, como acá el señor 4J no hace caso…
	4J: La fórmula que hallé a partir de las primeras alturas en los 15 segundos ¿no sirve?
	4B: ¡No! sí sirve, pero al contrario sirve para darnos cuenta cuando ya no hay resistencia de aire
	
	Después de unos segundos…
	
	4J: Tengo una idea, ya sé, sí sí sí, pon en GeoGebra estos datos
	4G: Aaala
	4J: Jimmy nos la puede pasar por Excel. Para ver si es una regresión, porque supuestamente no es una regresión […]
	4B: No, me refiero a que en teoría la resistencia del aire es constante, o varía. Pues si varía no me sirve de nada ponerlo acá
	4J: Varía
	4B: Ya pues, solamente funcionó hacer de esto de acá [señalando la regresión de Q3] cuando teníamos…cuando solo afectaba la gravedad que era constante, si hay resistencia de aire ya no va a ser constante no va a salir igual, los datos van a salir muy dispersos.
	4J: Eso es lo que quiero comprobar. Lo podemos poner en el informe como un…[intento]
	4B: Ala, pero que latón, voy a tener que copiar todo
	4J: […]Puedes poner todos estos o desde el 16 y…mira si tú pones todos estos datos en GeoGebra y los analizas con una regresión y te sale…y pones que sea un polinomio cuadrático, una lineal o una exponencial, si en ninguna te sale un r q se acerque a 1 o a -1, quiere decir que no hay ninguna regresión, entonces no hay ninguna un factor que…
	4B: Que los varíe
	4J: Entonces, vamos achicando la tabla hasta llegar a tal punto en que ya nos salga una regresión.
	
	Segunda parte de la sesión
	
	• El subgrupo $G4_M$ empezó con la idea de obtener los valores de altura para los segundos impares mediante interpolación. El primer modelo propuesto fue una **función sinusoidal**, que copiaron del geogebra a una hoja de cálculo de Excel para construir una tabla con los datos de las alturas por cada segundo. Tras arrastrar y obtener todos los datos por cada segundo, el alumno 4G discute con 4J la diferencia entre los resultados obtenidos por interpolación y los resultados propuestos en la Actividad 3, por lo que deciden verificar siguiendo el siguiente procedimiento:
	    o En primer lugar, se comprueba si se ha tipeado correctamente la fórmula en Excel.
	    o Se consulta al compañero 4C sobre el problema y éste sugiere que se compruebe tabulando en la misma aplicación de análisis de datos de Geogebra.

- Se comienza a sospechar que puede haber otros modelos de regresión: ¿Una función seno en qué se asemeja en una función de grado 4?
- Se verifica si los datos de altura fueron digitados correctamente.

- Ninguno de estos procedimientos les permite a 4G y 4J identificar la razón de la diferencia entre los resultados, por lo que deciden consultar al profesor dos cuestiones surgidas: *¿Porqué si el modelo sinusoidal tiene un r^2=1 genera respuestas que no coinciden con los datos de la tabla? ¿Por qué una función cúbica o cuártica también tiene un r^2=1?*El profesor realiza una devolución con la pregunta ¿cuál es el criterio de selección de una fórmula u otra?
- La discusión concluye con dos ideas: el aumentar el número de decimales de aproximación del software para distinguir el r^2 con mayor precisión y también de comparar los modelos mediante la tabulación en cada uno de ellos, para elegir el que se aproxime más. Tras discutir entre 4D, 4G y 4J, se opta por el **modelo cuártico** al identificar que con este modelo se obtienen resultados más ajustados a la tabla de las alturas proporcionados. A partir de esto, se observa con claridad la aplicación de la primera parte de la técnica $\boldsymbol{\tau 4},$ con $\Delta t = 1$ s.

- El subgrupo $\boldsymbol{G4_F},$ el alumno 4C presentó dificultades para continuar con el estudio físico por la imposibilidad de encontrar valores para reemplazar en la ecuación diferencial de la *Figura 72*. Sin embargo, la investigación de 4C contribuyó destacadamente con explicaciones de carácter tecnológico, y con el descubrimiento de una fuente útil aquí denominada: Datos reportados de la experimentación (O6) obtenidos de:
  - https://issuu.com/redbullstratos/docs/red_bull_stratos_summit_report_final_050213

- De esta fuente obtiene el siguiente gráfico de velocidades que usa como medio de estudio para validar los cálculos obtenidos por $\boldsymbol{G4_M}$: Tiempo en que finaliza la caída libre, cuándo ocurre la velocidad máxima, cuándo alcanza la velocidad del sonido, etc.

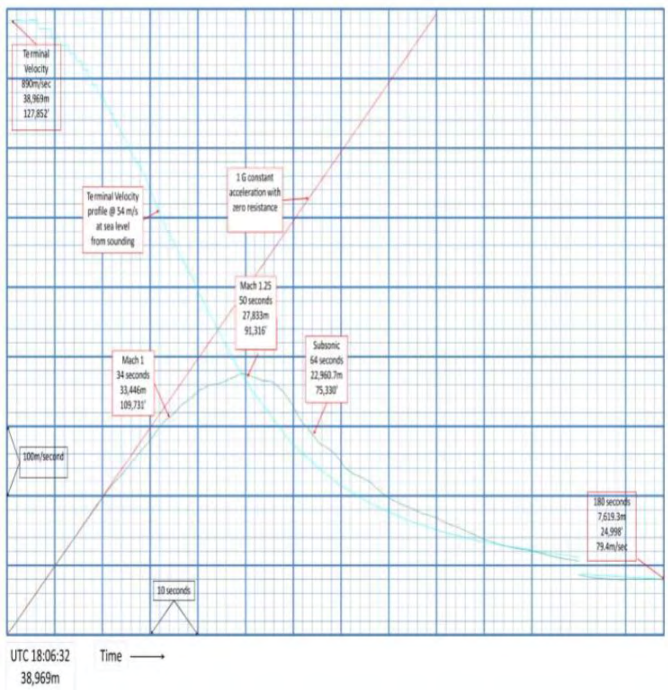


Figura 73: Gráfico de velocidades reportadas por Red Bull Stratos

- A partir de estos hechos, el alumno 4C se une al estudio matemático contribuyendo en la precisión de los cálculos mediante la $\boldsymbol{\tau 4},$ con $\Delta t = 0.1$ s. Esto con la finalidad de corroborar que los datos de velocidad obtenidos en función del tiempo se asemejen a los declarados por red Bull en la figura anterior.

Se insertaron los datos en geogebra, teniendo una polinomial de grado 4, con un r2 igual a uno. Insertamos los segundos impares, y asi obtuvimos las nuevas alturas en cada segundo ya con resistencia del aire mínima. Notese que en el segundo 50 empieza a disminuir su velocidad, ya habiendo pasado la velocidad del sonido en un segundo 30 aproximadamente. Esto nos dice que en el segundo 50 llega a su velocidad máxima, para que después inicie a disminuir por la mayor densidad del aire.

t en segundo	altura en m	velocidad promedio en m/s	diferencia de velocidades
18	37381.2		
19	37201.69	179.51008	
20	37013.25	188.44076	8.93068
21	36815.83	197.42538	
22	36609.39	206.43994	9.01456
23	36393.93	215.46044	
24	36169.46	224.46288	9.00244
25	35936.04	233.42326	
26	35693.72	242.31758	8.89432
27	35442.6	251.12184	
28	35182.79	259.81204	8.6902
29	34914.42	268.36418	
30	34637.67	276.75426	8.39008
31	34352.71	284.95828	
32	34059.76	292.95224	7.99396
33	33759.05	300.71214	
34	33450.83	308.21398	7.50184
35	33135.4	315.43376	
36	32813.05	322.34748	6.91372
37	32484.12	328.93114	
38	32148.96	335.16074	6.2296
39	31807.95	341.01228	
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Figura 74: Tabla de alturas con sus respectivas velocidades y aceleraciones

- Fin de la clase.

Dialécticas encontradas	En esta sesión se pudo detectar una variedad de indicadores que evidencian el funcionamiento de las tres dialécticas que se vienen identificando. Para la dialéctica del **estudio-investigación** podemos mencionar el estudio un tanto heurístico de las técnicas t3 y t4 en el movimiento con resitencia por parte del G1, el estudio de los datos propios de la experimentación por parte del G2, y el estudio tabular de los datos proporcionados junto con el estudio cinemático del salto de paracaidismo por parte del G4. Este último destaca por la generación de nuevas cuestiones, evidenciadas en diálogos intragrupales y con el profesor. El funcionamiento de la dialéctica del **individuo-colectivo** se manifiesta en esta sesión de un modo bastante diverso. Por una parte, se observa que en los grupos G1 y G2, el estudio es liderado principalmente por uno o dos alumnos, que dirigen las estrategias a seguir, dejandole a los demás alumnos usualmente tareas no matemáticas: tipear los datos en Excel o la calculadora, hacer búsquedas en internet, hacer operaciones en la calculadora, tipear el informe parcial, es decir, asumen un papel principalmente de operarios. En el G4, se muestra esta situación de un modo más moderado, pues aquí sí se dan más intercambios entre los estudiantes, y en los diálogos no hay una aceptación automática de las propuestas hechas por los integrantes, sino que se dan verdaderas discusiones. Con respecto al funcionamiento de la dialéctica del **media-medio,** podemos decir que en todos los grupos la actividad n°3 se constituyó como el medio principal de estudio. En el G1 destaca la consolidación de las regresiones lineales como medio de estudio, mientras que en el G2 y en el G4 se incorporaron otros medios virtuales e incluso un artículo universitario del experimento que ayudan a estudiar la caída desde la física.

Tabla 21: Estudio de la cuestión Q4

Sesión 11:	**Primera puesta en común de avances de R4**

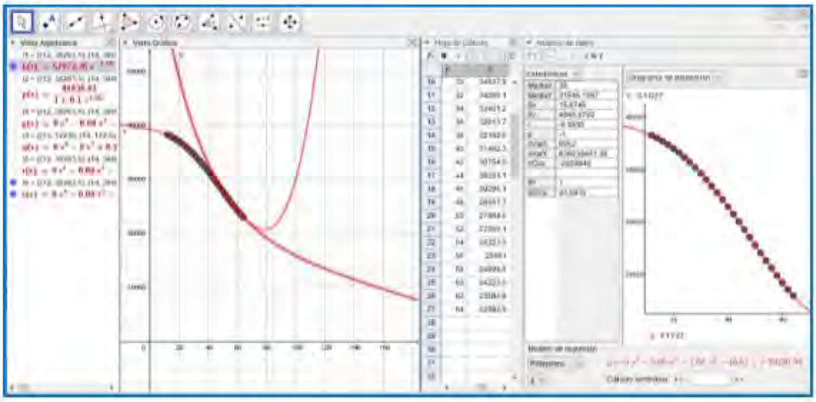
Duración:	**Lunes 01/07**
Medios y medias:	**Actividad n°3, GeoGebra, Excel, Internet**

Grupo 1

- En esta sesión el grupo 1 se dedicó a preparar el informe parcial y la presentación para la puesta en común del día siguiente, redactando las respuestas parciales hasta el momento formuladas a las cuestiones Q4.1 y Q4.2. Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo?

Q.4.1: ¿Cuánto varía la altura de Félix Baumgartner con respecto al tiempo? ¿Qué significan estas variaciones?

Para poder determinar las alturas a partir de t = 12, hemos ingresado los datos en GeoGebra, los de la tabla mostrada arriba, para poder generar una fórmula que module, con un R^2 = 1 para una mayor precisión, las alturas en los "x" tiempos entre los segundos 12 y 64.



La siguiente fórmula nos determina las alturas exactas entre los segundos 12 y 64:

$y = 0\,x^4 - 0{,}08\,x^3 - 1.95\,x^2 - 46.61\,x + 39229.56$

Cálculo simbólico: x = y =

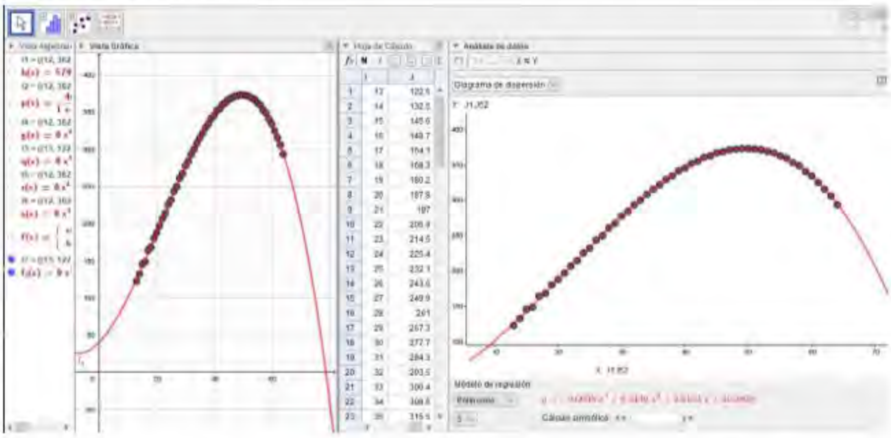
Y a partir del segundo 64, en adelante, la altura se modela con la siguiente fórmula:

$H(t) = 57972.34899 * e^{-0.03563t} - 79.4t + 212222136.74136$

Figura 75: Respuesta R.4.1a. Funciones que modelan la altura desde t=12

- En la siguiente captura de pantalla se muestra la formulación de R.4.1a. como parte de la respuesta a Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas y qué tanto varían?

Ahora ingresaremos a GeoGebra los datos obtenidos. Como x ingresan intervalos, es decir, si el x = 1 entonces se refiere al intervalo [0 ; 1], puesto a que no podemos hablar en este caso de segundos medios, como en la Q3, puesto a que hay resistencia del aire y la aceleración no es constante.



Con esta fórmula podemos determinar las velocidades por cada intervalo de segundo del recorrido a partir de los datos hallados, con un $R^2 = 0.9998$:

$$y = -0.0038\,x^3 + 0.2439\,x^2 + 4.0153\,x + 40.2838$$

Cálculo simbólico: x = y =

Figura 76: Modelo cúbico para la velocidad promedio entre t=12 y t=64

- En el informe parcial -mostrado en la *Figura 76*- explica porqué el grupo desistió de aplicar la técnica $\tau 3$: *"ya no se puede hablar de segundos medios puesto que hay resistencia de aire y la aceleración no es constante"*. Es así que optó por aplicar la técnica $\tau 4$ nuevamente.

Grupo 2

- Se observó que el grupo 2 realizó intercambios con el grupo 1, lo cual les permitió salir de la situación de truncamiento y aplicar los pasos propios de la técnica 4 ($\tau 4$), obteniendo un modelo polinomial de grado 7 para la altura entre los tiempos de 12 y 64 segundos.

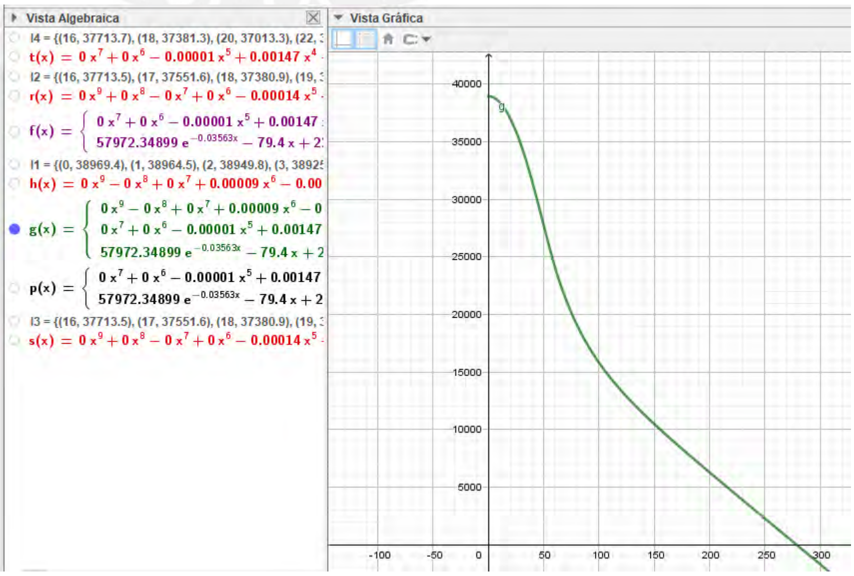


Figura 77: Modelo completo de altura, compuesto por dos funciones polinomiales y una exponencial

TIEMPO	ALTURA	VELOCIDAD PROMEDIO (M/S)	VELOCIDAD PROMEDIO (KM/H)	ACELERACIÓN	VELOCIDAD INSTANTÁNEA (M/S)	VELOCIDAD INSTANTÁNEA (KM/H)
0	38969.4	(Ya-Y(a-1))/t		A=G	v=9.8t	
1	38964.5	4.9	17.64		9.81	35.316
2	38949.8	14.7	52.92	9.8	19.63	70.668
3	38925.3	24.5	88.2	9.8	29.45	106.02
4	38890.9	34.4	123.84	9.9	39.27	141.372
5	38846.8	44.1	158.76	9.7	49.09	176.724
6	38792.8	54	194.4	9.9	58.91	212.076
7	38729.1	63.7	229.32	9.7	68.73	247.428
8	38655.5	73.6	264.96	9.9	78.55	282.78
9	38572.1	83.4	300.24	9.8	88.37	318.132
10	38478.9	93.2	335.52	9.8	98.19	353.484
11	38375.9	103	370.8	9.8	108.01	388.836
12	38263.1	112.8	406.08	9.8	117.83	424.188
13	38140.5	122.6	441.36	9.8	127.65	459.54
14	38008	132.5	477	9.9	137.47	494.892
15	37865.6	142.4	512.64	9.9	147.29	530.244
16	37713.7	151.9	546.84			0
17	37526.3	187.4	674.64			0
18	37381.3	145	522			0
19	37204.5	176.8	636.48			0
20	37013.3	191.2	688.32			0
21	36835.5	177.8	640.08			0

Figura 78: Tabla de Excel que muestra los valores de altura obtenidos por interpolación de un modelo de grado 7.

- Los alumnos encuentran en el modelo algebraico y en el modelo tabular con sus respectivas variaciones por cada segundo, la respuesta a **Q4.1**.
- A partir de esta tabla los estudiantes obtuvieron las velocidades por cada segundo para posteriormente aplicarle regresiones lineales y obtener un modelo polinomial de grado 9 como se ve en la siguiente figura.
- El grupo decidió aplicar el modelo polinomial de grado 9 para la velocidad en las tres partes del dominio proporcionado.

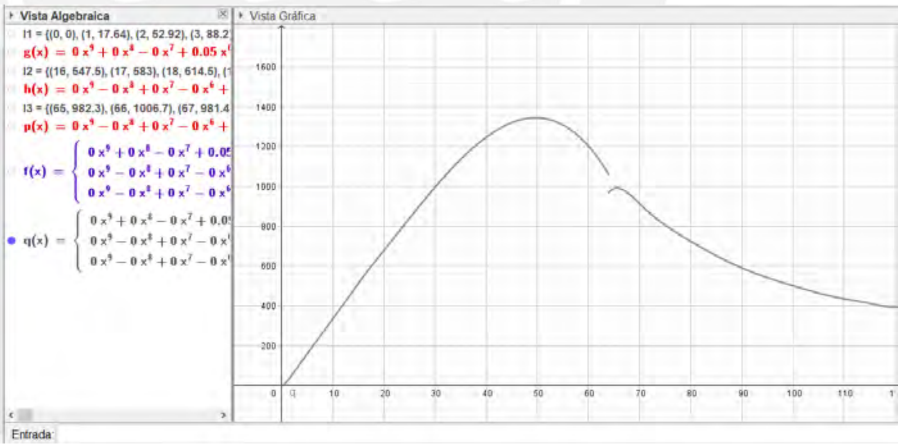


Figura 79: Función definida por partes de la velocidad promedio como parte de la respuesta a Q4.2

- No se reportaron respuestas para **Q4.3** en esta sesión.

Grupo 4

- El subgrupo $G4_M$, en esta sesión, continuó con el trabajo de la técnica $\tau 4$, sin embargo presenta un estancamiento, ya que para responder Q4.1 los alumnos 4J y 4G continúan teniendo la idea arraigada de que la fórmula de altura responde a la pregunta sobre la variación de la altura, por lo que 4J decide consultar a su compañero 4C.
- Los alumnos 4J y 4C discuten sobre lo que conviene hacer, y concluyen que vienen bien hacer conseguir una fórmula que relacione la velocidad por cada

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
segundo con los extremos derecho de cada intervalo de tiempo, añadiendo de este modo un paso más al procedimiento de la técnica $\tau 4$.

Diálogo 19: Discusión sobre la obtención del modelo de velocidad
4J: Chamo… tenemos los tiempos y tenemos la velocidad, ahora, la pregunta es ¿cuánto varía la velocidad a lo largo del tiempo? ¿Cómo lo hacemos?
4C: Es la fórmula
4J: Sí, ya por eso, de ahí saqué las velocidades
4C: Es la qué dice cómo va variando la velocidad. La primera [pregunta] es la fórmula de la velocidad en el tiempo, ¡es la fórmula!
4J: No…es así como lo hicimos la primera vez, que variaba en 9.8 y sacamos la progresión aritmética. ¿Te acuerdas? Ya, hallé la diferencia de velocidades y no cuadra mucho, sale, 8.93, 8.98.
4C: Es una fórmula para eso. Lo que pasa es que es física, entonces no es exacto. Búscale una fórmula a esto [señalando a los datos de velocidades].
4J: ¿Una fórmula a esto? …Ah ya sé! Si pongo los datos en geogebra y aplico regresión…Oye verdad, ya gracias…Gonzalo ya sé qué hacer.

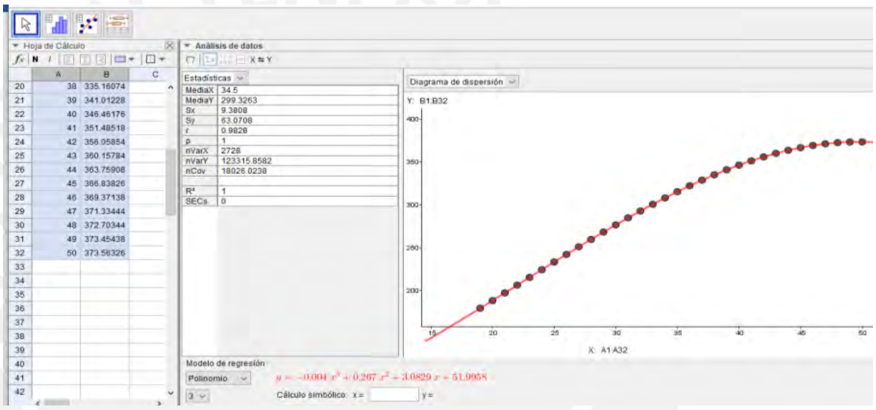


Figura 80: Función velocidad promedio para $18 \leq t \leq 64$, a partir de $\Delta t = 1\ s$, como parte de R4 del Grupo 4
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dialécticas encontradas</td>
<td>
Se observa el funcionamiento de la dialéctica de estudio-investigación cuando los alumnos empiezan a formular sus respuestas para Q4, para lo cual usa obras como Regresiones lineales (O4) y Cinemática (O1).

La dialéctica de individuo-colectivo se manifestó en los intercambios realizados por los alumnos del G4 de los cuales surgió un perfeccionamiento de la técnica $\tau 4$ que consistió en añadirle un paso más consitente en la aplicación de la regresión lineal a los datos de velocidad obtenidos para un grupo de intervalos más refinado.

El principal medio incorporado fue el uso de la ventana de análisis de datos de Geogebra y la hoja de datos de Excel.
</td>
</tr>
</table>

Tabla 22: Presentación de los avances de R4

Sesión 12:	Primera puesta en común de avances de R4
Duración:	**90 min (martes 02/07)**
Desarrollo de la sesión	• Cada grupo presenta las respuestas parciales conseguidas para Q4 **Grupo 1:** • Las respuestas reportadas por este grupo fueron las siguientes: o R.4.1a: Función por partes conformada por un modelo cuártico de altura obtenido mediante regresiones lineales para $12 \leq t \leq 64$ s, y el modelo exponencial propuesto para $t \geq 64$ s. o R.4.2a: Obtención de un modelo cúbico para la velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 1$ s en el intervalo $12 \leq t \leq 64$. **Grupo 2:** • Las respuestas reportadas por este grupo fueron las siguientes: o R.4.1a: Función por partes conformada por tres modelos polinomiales: uno de grado 9 para $0 \leq t \leq 15$ s, otro de grado 7 para $15 \leq t \leq 64$ s, y el modelo exponencial propuesto para $t \geq 64$ s. o R.4.1b: Obtención de una tabla de valores de velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 1$ en el intervalo $12 \leq t \leq 64$ o R.4.2a: Obtención de tres modelos polinomiales de grado 9, para la velocidad promedio en función del tiempo mediante regresiones lineales para los intervalos $0 \leq t \leq 12$, $12 \leq t \leq 64$ y $t \geq 64$ s. **Grupo 4:** • Las respuestas reportadas por este grupo fueron las siguientes: o R.4.1.1: Reemplazo de valores de $t \geq 15$ en la función de altura de los primeros 15 segundos. o R.4.1.2: El movimiento deja de ser caída libre porque empieza a influir la resistencia del aire. o R.4.1.3: Los primeros 18 segundos son de caída libre, después del segundo 18 se usan otras fórmulas. o R.4.1a: Función por partes conformada por un modelo cuártico de altura obtenido mediante regresiones lineales para $18 \leq t \leq 64$ s o R.4.1b: Tabla de los valores de las alturas, velocidades promedio, y aceleraciones promedio, asociados con el extremo derecho de cada intervalo con $\Delta t = 1$. o R.4.2: Aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 1$ s en el intervalo $12 \leq t \leq 64$. Luego se obtiene un modelo cúbico mediante regresiones lineales. • El grupo recibió cuestionamientos de parte del pleno sobre el modelo tabular y las variaciones, exactamente: *¿Por qué los valores de aceleración varían desordenadamente?* o Cuando el paracaidista entra en la resistencia, hay varios factores que afectan la caída, como la postura y la variación de la cantidad de área de transversal. Esta disminución drástica de aceleración tiene que haber ocurrido en la influencia de estas variables. • Los alumnos mostraron no haber estudiado el movimiento más allá del tiempo t=64 s.

Tabla 23: Síntesis del proceso de estudio. Construcción de la Respuesta corazón

<table>
<tr><td>Sesión 13:</td><td>Últimos estudios de Q4 y construcción de la respuesta corazón</td></tr>
<tr><td>Duración:</td><td>miércoles 03/07 y jueves 04/07</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de la sesión</td><td>

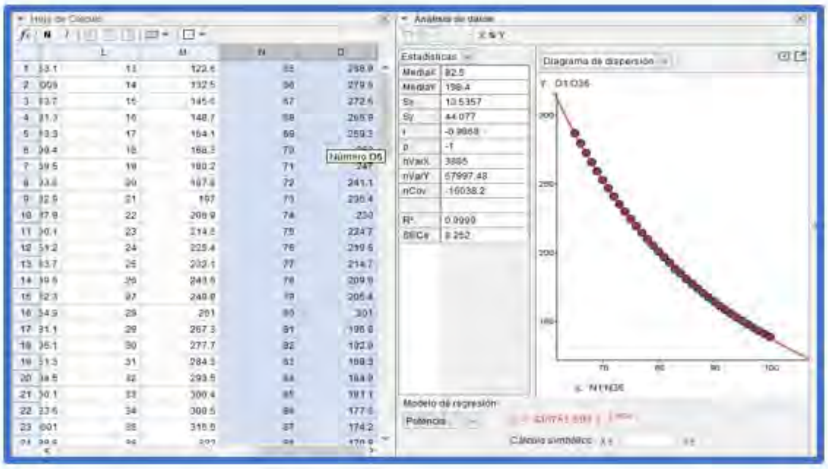
- Los grupos 1 y 4 empiezan con el estudio de las cuestiones referidas al movimiento a partir del tiempo t=64.
- Luego de ello, los grupos se dedican a sintetizar las respuestas parciales obtenidas para responder a la cuestión generatriz.
- El trabajo consistía en redactar el informe final y preparar la presentación de power point para la exposición final.

Grupo 1:

- El equipo opta por estudiar la variación de la velocidad concretada en la cuestión **Q4.3.**
- Se observa un estudio tabular de los valores de aceleración por parte de los alumnos 1M y 1R, los cuales identifican que los valores de aceleración obtenidos muestran bastante dispersión en su gráfico, a diferencia de lo que ocurría con la velocidad. A propósito de esto, solicitan asistencia del profesor, tras lo cual optan por formular la respuesta R4.3 mediante el uso de una tabla de valores con la tasa de variación de segundo orden por cada segundo, identificados como aceleraciones, y asociados con el extremo derecho de cada intervalo.

- Luego, continúa con el trabajo de la técnica 4 para la obtención de velocidades promedio para los tiempos mayores a t=64. Después de ello, obtiene un modelo potencial.

Para determinar una fórmula de velocidad a partir del segundo 64 en adelante primero tuvimos que hallar las velocidades promedio por cada intervalo de segundo posterior al segundo 64, para lo cual se empleó la fórmula de la regla de correspondencia para poder hallar las alturas en esos segundos y luego hemos procedido a hallar las velocidades promedio en la hoja de cálculo en GeoGebra, hallando la fórmula de las velocidades:



Entonces tenemos en GeoGebra tres fórmulas de velocidades, una del segundo 0 al 12, la segunda fórmula del segundo 12 al 64 y otra del segundo 64 en delante hasta el momento en que abre el paracaídas:

Figura 81: Reporte de la respuesta R.4.2b

</td></tr>
</table>

Grupo 2:

- El grupo se dedica al estudio de la cuestión Q4.3 mediante un estudio tabular de las aceleraciones obtenidas tras operar la tasa de variación media a las velocidades promedio. Luego, asocia cada valor de aceleración con el extremo derecho de cada intervalo, obteniendo dos modelos, uno para el intervalo de tiempo $12 \leq t \leq 64$ y otro para el intervalo de tiempo $t \geq 64$.

- Los alumnos 2E y 2M obtienen tres modelos para la aceleración para dominios diferentes que presentan una acentuada discontinuidad, lo que los lleva a investigar en una fuente anteriormente visitada correspondiente a O5, la cual contiene un gráfico que llegó a funcionar como *medio* de comprobación y de validación.
- Tras esto los alumnos empiezan a elaborar el informe final y su presentación de power point.

Gráfico 13: Modelo de la aceleración respecto al tiempo de la caída hasta que abre el paracaídas

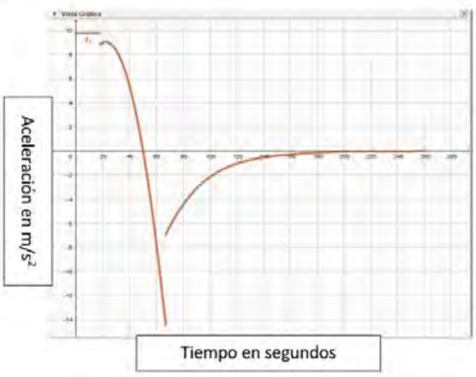


Figura 82: Reporte de la respuesta R.4.2b

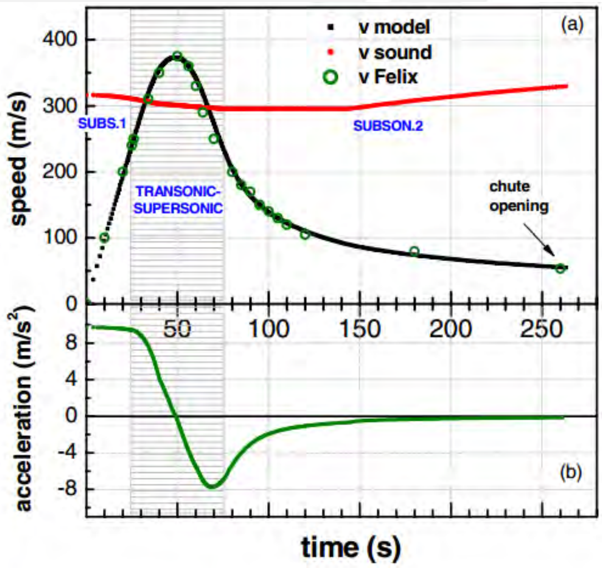


Figura 83: Gráfico de la rapidez y la aceleración
Fuente: https://francis.naukas.com/2013/05/09/la-velocidad-y-aceleracion-de-felix-baumgartner-durante-su-salto/

Grupo 4:

- En la primera parte de la sesión, el grupo se aboca al estudio de la cuestión derivada Q4.2.1: ¿Cómo obtener un modelo de velocidad promedio para los tiempos mayores de 64?
- El alumno 4C decide la aplicación de la fórmula $v_{prom} = \frac{\Delta \mathrm{D}}{\Delta \mathrm{t}}$ a la fórmula exponencial de altura, considerando un $\Delta \mathrm{t} = 1$, obteniendo un modelo exponencial negativo, por lo que decidió aplicarle valor absoluto sin mayor cuestionamiento.

- Los alumnos se afrontan con el problema que el modelo cúbico de la velocidad promedio y el modelo exponencial no coinciden para el instante t=64segundos, a pesar de que el modelo cúbico crezca en precisión mediante el uso de intervalos de $\Delta t = 0.1$ s., generándose una nueva cuestión derivada de manera implícita Q4.2.2: *¿Por qué los dos modelos no dan la misma velocidad para el mismo t=64 s?* El alumno 4J decide solicitar ayuda del profesor, suscitándose el siguiente diálogo.

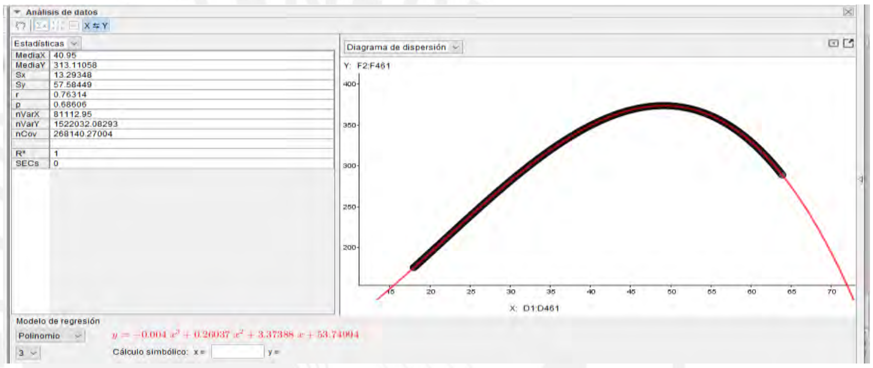


Figura 84: Función velocidad promedio para $18 \leq t \leq 64$, a partir de $\Delta t = 0.1$ s

Diálogo 20

Los alumnos muestran este gráfico y exponen su cuestionamiento, narrando todo el procedimiento seguido para intentar responder a **Q4.2.1** y **Q4.2.2**. El profesor respondió cuestionando si habían tipeado todos los decimales de la la función cúbica. Tras descartar esta idea, el profesor pregunta por las hipótesis que se han planteado.

4D: Yo le dije que baje [la curva] 7 y ya, pero si la bajamos 7 la velocidad final no sale igual como salía antes y si subimos la otra, la velocidad final también cambia… entonces para mí que es la curva.

4C: Lo que pasa es que la primera y la última fórmula son fórmulas específicas [quiere decir instantáneas] por cada instante. Esta se obtuvo [señalando la función exponencial] de modular…de modelar ehhh osea la fórmula que modelaba la altura en función del tiempo, osea una fórmula que sirve para cualquier segundo, porque parte necesariamente de eso, toma el tiempo como variable, como esta [señalando función exponencial] parte de esa fórmula que es específica [refiriéndose al tercer modelo de altura], esta también es específica y esta [señalando el primer modelo de caída libre] igual porque simplemente… solo es aceleración por tiempo y sirve para cualquier segundo de este recorrido, lo que pasa con esta [señalando el modelo cúbico] es que en cualquier caso es una aproximación estadística.

P: Pero la de acá [señalando modelo exponencial] entiendo yo también es una aproximación, [restas] mi posición en el tiempo 5 y mi posición en el tiempo 4 y sacas el promedio dividiendo entre 1.

4C: Pero también podría ser en el tiempo 0.1, porque parte de la misma fórmula.

P: ¿Pero saldría igual? Compruébalo.

4J: Ayer lo hicimos.

P: Puedo ver

4C: Ya lo borré

4J: Yo lo tengo creo… (no lo encuentra)

P: Tienen que constatar, porque este cálculo está no de 1 en 1 sino de 0.1 en 0.1

4C: Es que de 0.1 en 0.1 sale lo mismo. Suito hizo otro proceso diferente Necesitaría ver la operación. Porque lo que él ha hecho de restar de 1 en 1 con numeritos y dividir entre 1, tú lo has hecho de restar de 1 en 1 pero con la fórmula, pero también dividiendo entre 1, pero entonces sale una fórmula que calcula velocidades promedio en intervalos de ancho 1, y él tiene promedios de velocidades de intervalos de ancho 0.1, técnicamente él tiene más precisión que la fórmula que tú tienes

4C: Pero es que si usted tabula la original con 0.1 van a salir los mismos puntos que tabulando de 1 en 1.

P: En la original

4C: Claro, la fórmula de altura a partir del segundo 64, usted puede tabular en vez de con 1 en 1 sino de 0.1 en 0.1 y dividiendo todo eso entre 0.1 te va a dar igual

P: No no no, porque cuando haces la fórmula, tú pones “t” y en el otro pones “t+1” o t-1 como lo hiciste ayer, pero ya no sería t+1 sino t+0.1 y eso hace que todo cambie. Si hacen el cálculo tal vez podremos ver

4J: Entonces ¿qué sugiere?

P: Muéstrenme el cálculo

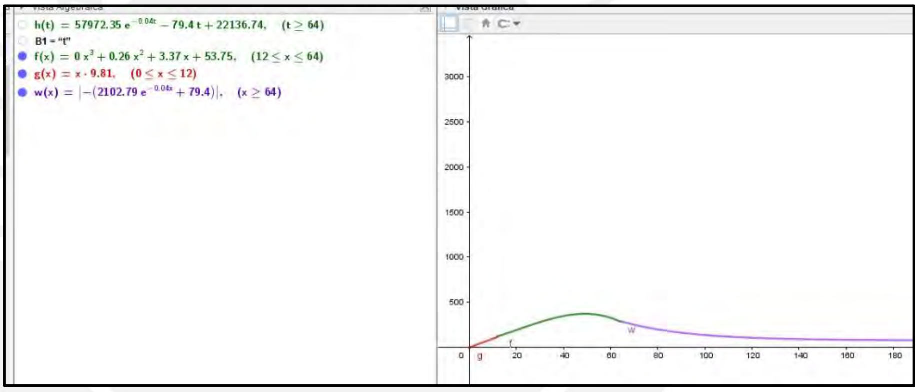


Figura 85: Función por partes de la velocidad promedio discontinua para t=64 s

- En el diálogo se observa que el alumno 4C tiene la idea fija que obtener una velocidad promedio a partir del modelo algebraico, planteado en la Actividad 3, con $\Delta t = 1$ es equivalente a hacerlo con $\Delta t = 0.01$, esto debido a que asume que esta función de altura es exacta, pues no fue obtenida mediante regresiones, y considera que esta exactitud es heredada a la fórmula de velocidad al margen que se trabaje con distintos intervalos de tiempo.
- Tras ver que el cálculo con $\Delta t = 0.1$ efectivamente genera una función velocidad diferente con la que se llega a disminuir la separación con la otra curva, los alumnos, principalmente 4C, recuperan la responsabilidad matemática y deciden obtener el modelo de velocidad promedio con $\Delta t = 0.01$, sin embargo, ven que la aproximación no es suficiente, por lo que después de un tiempo de razonamiento, 4C decide extender el dominio hasta cuando el modelo cúbico y el exponencial se intercepten.

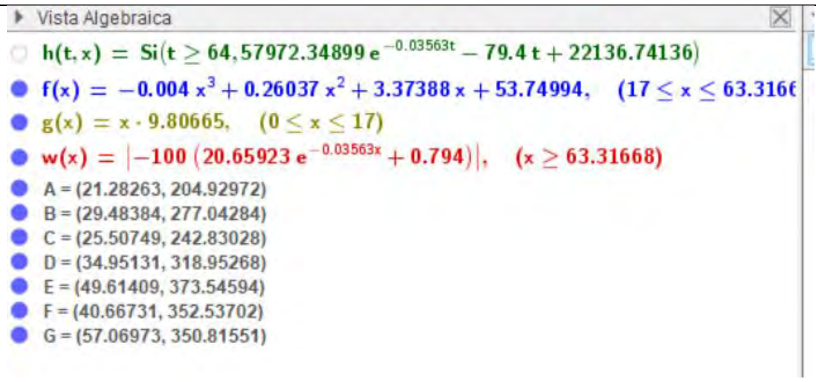


Figura 86: Modelos finales de velocidad que forman parte de R.4.2.3 y R.4.2.4

Ahora, el último intervalo de tiempo considerado fue el que inicia aproximadamente en el segundo 64 y se extiende en adelante hasta que Felix Baumgartner abre su paracaídas. Durante este periodo se tiene una fórmula que modela la altura en función del tiempo, siendo esta la siguiente:

$$h(t) = 57972.34899e^{-0.03563t} - 79.4t + 22136.74136$$

Por lo tanto, en base a esta fórmula para la altura se planteó el obtener una fórmula para hallar las velocidades cada 0.01 segundos, para obtener la mayor precisión posible.

Para hallar las velocidades se reemplazó la altura en la fórmula de velocidad promedio como se ve a continuación:

$$v(t) = (h(t) - h(t - 0.01))/t - (t - 0.01)$$

Obteniendo de manera simplificada la siguiente fórmula:

$$v(t) = -(20.65923e^{(-0.03563x)} + 0.794)$$

Donde la unidad es m/cs, por lo que para tenerla en obtenerla en segundos se multiplica por 100, obteniendo como fórmula final de la velocidad para este tercer tramo la siguiente:

$$v(t) = -\mathbf{100}(20.65923e^{(-0.03563t)} + 0.794)$$

Figura 87: Función velocidad promedio para $t \geq 64$, a partir de $\Delta t = 0.01\ s$ reportada como parte de R4 del Grupo 4

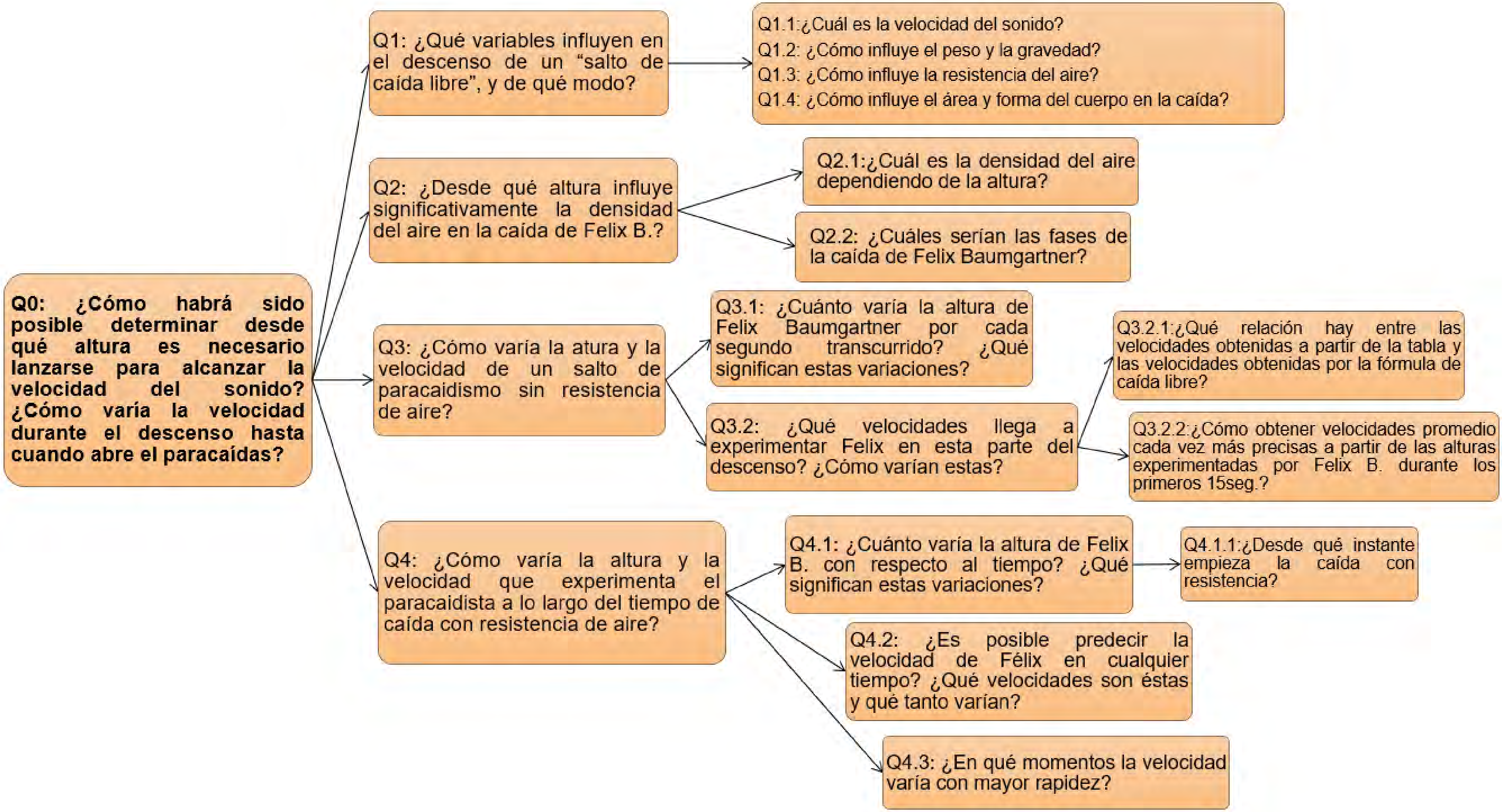
- En esta respuesta se dilucida una nueva técnica $\boldsymbol{\tau_6}$: Dada la expresión algebraica de la función altura, se pueden hallar las velocidades a través del siguiente procedimiento:
  - Identificar la función h(t) y la fórmula $\bar{v}_{prom} = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{h_t - h_{t-\Delta t}}{\Delta t}$
  - Asignar un valor para $\Delta t = 1s$ ó $0.1s$ ó $0.01s$ ...
  - Reemplazar la expresión h(t) en la fórmula de velocidad promedio
  $$\bar{v}_{prom} = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{h_{(t)} - h_{(t-\Delta t)}}{\Delta t}$$
  - Aplicar valor absoluto a la función resultante: $|\bar{v}| = \left|\frac{h_t - h_{t-\Delta t}}{\Delta t}\right|$
- Los alumnos deciden responder a Q4.3 mediante el uso de tabla de valores con las aceleraciones cada dos segundos.

	• Al fin de la clase, los alumnos empiezan a redactar el informe final.
Dialécticas encontradas	• Durante el estudio de la cuestión Q4.2.1, la dialéctica del **estudio-investigación** conlleva a la discusión intragrupal de G4 sobre la continuidad de la función de velocidad definida por partes, generándose la nueva cuestión Q4.2.2 y posteriormente la formulación de R4.2b que cuenta con la aportación de una nueva técnica al proceso de estudio. Por otro lado, G1 y G2 se carcaterizan por abocarse al estudio de Q4.3 mediante el análisis tabular. • El funcionamiento de la dialéctica **individuo-colectivo** emergió en el G4 a través de un trabajo colectivo, en el que los alumnos han asumido la responsabilidad matemática del estudio, la cual se manifiesta en la discusión y propuesta de conjeturas que intentan resolver Q4.2.2. • La incorporación de una nueva fuente de datos propiso de la experimentación destacó como medio de estudio y validación de las praxeologías desarrollados, al conseguir resultados de velocidad similares a los reportados por Red Bull. Este medio fue incorporado por parte de G2 y G4, maniféstandose con ellos algunos gestos propios de la **dialéctica media-medio.**

Tabla 24: Presentación de las conclusiones del proceso de estudio

Sesión 14:	Presentación de la Respuesta Corazón
Duración:	**martes 09/07 y miércoles 10/07**
	Los estudiantes hicieron la presentación final de sus estudios En dos clases consecutivas los alumnos exponen la articulación de sus respuestas parciales y la conclusión como respuesta corazón.

Árbol de cuestiones derivadas comunes a los tres grupos de estudio



5.3 Análisis del desarrollo del REI

En esta sección se presenta el análisis de un recorrido de estudio e investigación bidisciplinar realizado por estudiantes del Programa IB. En una primera parte se describen las condiciones de la puesta en práctica del REI y las consideraciones para elegir los tres equipos a analizar. En una segunda parte se presentan las principales descripciones y análisis de los recorridos efectivamente experimentados en torno a las dialécticas en ellos manifestadas.

Condiciones de la implementación

El recorrido de estudio e investigación en torno a una práctica de paracaidismo con velocidad supersónica fue experimentado durante el segundo bimestre del año académico 2019 con 27 alumnos de 5to año de secundaria de la EBR que cursan a su vez el 2do año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional. El REI se ha llevado a cabo dentro del curso de Matemáticas Nivel Medio como un trabajo colaborativo de investigación que introduce a la unidad de cálculo diferencial e integral. Este curso es impartido en 4 sesiones semanales de 80 a 90 minutos cada una de ellas, durante cuatro semanas.

Para el desarrollo del trabajo de investigación, el docente organizó la distribución de los alumnos en seis grupos de 4 o 5 estudiantes, previendo que por cada uno de ellos haya dos miembros reconocidos como “buenos estudiantes” de Matemáticas, y dejando que el resto de integrantes sean elegidos por estos dos primeros miembros. Además, se dispuso de un aula amplia, con red de internet disponible, al menos dos computadoras por grupo más la computadora del profesor, cañón multimedia y 4 cámaras de video para registrar el desarrollo realizado por cada equipo.

Antes de participar en la experimentación, los alumnos ya se encontraban familiarizados con el software GeoGebra, con la calculadora gráfica Casio fx9860, con objetos matemáticos tales como funciones algebraicas, funciones trascendentes, progresiones aritméticas y regresiones lineales, con objetos propios de la Física como el movimiento rectilíneo uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente variado y la caída libre. Por otro lado, sí les resultaba completamente nueva toda noción de cálculo diferencial e integral.

Para realizar el análisis se eligieron sólo tres equipos de los seis, denominados G1, G2 y G4. De los cuales, el equipo 4 fue el que más se aproximó al desarrollo de una pedagogía de la investigación y el cuestionamiento. Debido a la cantidad de información generada a lo largo de las cinco semanas de experimentación, se decidió trabajar únicamente el análisis con las dialécticas de *estudio-investigación*, *media-medio* e *individuo-colectivo*. Las tablas de cuestiones y respuestas desarrolladas se obtuvieron tras la revisión de los informes parciales reportados y de las videograbaciones de cada una de las sesiones desarrolladas por cada grupo.

Análisis según las etapas del proceso de estudio

La situación inicial parte con la presentación de una noticia real acerca de una práctica de paracaidismo supersónica que logró romper un record Guinness en el 2012, la cual dio ocasión a plantear a los alumnos la siguiente cuestión generatriz, Q_0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas? El proceso de estudio experimentado estuvo estructurado en tres etapas que en su conjunto constituyen el diseño a priori del REI. La primera etapa se centra principalmente en la exploración de la problemática y de las praxeologías puntuales de contexto, la segunda etapa, en la exploración de las praxeologías físico-matemáticas emergentes del estudio cinemático de una caída sin resistencia de aire y la tercera etapa se centra en la aplicación de las técnicas construidas en el estudio de una caída con resistencia de aire. El análisis está estructurado, básicamente por la secuencia de cada una de estas tres etapas identificadas en la experimentación.

5.3.1 Análisis de la primera etapa: Exploración de la problemática

Este carácter insólito de la situación contextual facilitó que en el momento del *primer encuentro* se despertara el interés por la cuestión generatriz y el involucramiento de los alumnos en la investigación, valiéndose para ello del uso de internet como principal media. Tras el planteamiento de Q_0, la formulación de preguntas derivadas fue en un principio gestionada por el profesor ante el pleno de alumnos mediante una lluvia de ideas registrada en la pizarra. Esta primera generación de preguntas fue bastante diversa y espontánea, teniendo desde preguntas sencillas de respuesta inmediata hasta preguntas más complejas que exigen una respuesta más elaborada, pero que en conjunto permitieron el despliegue inicial de la *dialéctica del estudio-investigación, del medio-media* y *del individuo-colectivo*.

Tabla 25: Cuestiones de la primera etapa

Cuestiones
Q1: ¿Qué factores influyen en un descenso de un salto de caída libre y de qué modo? Q1.1: ¿Cómo influye el peso y la gravedad en la caída de un cuerpo? Q1.2: ¿Cómo influye la resistencia del aire? Q1.3: ¿Cómo influye la altura y el tiempo? Q1.4: ¿Cómo influye el área y forma?
Q2: ¿Desde qué altura, la densidad del aire influye significativamente en la caída de Felix Baumgartner? Q2.1: ¿Cuáles serían las fases de la caída de Felix Baumgartner?

La dialéctica del *estudio-investigación* se manifestó en un principio en una gestión inicial del profesor abocada a ayudar al pleno de alumnos a estructurar estas primeras cuestiones derivadas, obteniendo fruto de ello una primera pregunta derivada Q1, desglosada posteriormente en cuatro subpreguntas: Q1.1, Q1.2, Q1.3 y Q1.4. Todas estas caracterizadas por una búsqueda y estudio de información principalmente descriptiva, pero que después de un tiempo, fue cambiando debido a la matemática avanzada que iba emergiendo fruto de la profundización, generando dificultades en los alumnos para deconstruir la información encontrada. Esto motivó una primera intervención por parte del profesor para ayudar a seleccionar fuentes virtuales útiles y comprensibles que se sitúen en la *zona de estudio próximo* de los alumnos y que por tanto sean medio eficaz de investigación para el estudio de Q1. Esto se concretó en la entrega de la *Actividad n°1* y cuyo estudio facilitó la reactivación de la dialéctica *estudio-investigación* y la posterior formulación conjunta de Q2. En el estudio de esta nueva cuestión los alumnos se dieron cuenta de la dificultad de encontrar datos que permitan precisar el valor de la densidad del aire a lo largo del descenso del paracaidista, por lo que la formulación de R2 respondía aproximadamente a Q2, sin embargo, la importancia de esta resalta porque condujo a la identificación de la resistencia del aire como el principal factor influyente en el fenómeno de estudio. Esto dio pie a que los alumnos propusieran la hipótesis que el movimiento de caída experimentaba aproximadamente tres fases: descenso sin resistencia de aire, descenso con mediana resistencia de aire y descenso con acentuada resistencia de aire. Los hallazgos y conclusiones propios de las respuestas R1 y R2 de cada grupo fueron sintetizados y compartidos en dos puestas en común durante esta etapa. La última puesta en común de esta primera fase, se llevó a cabo al finalizar la cuarta sesión, momento en el que se propuso juntamente con el pleno, la cuestión Q3.

Los alumnos inician el proceso de estudio cuando entran en contacto con los diferentes elementos que forman parte del *medio de partida:* M= {trabajo grupal de 5 estudiantes, noticia de la BBC, la declaración de la situación de partida, Q1}. Luego, cada grupo va constituyendo su propio medio de estudio incorporando otros elementos obtenidos principalmente de la *media* conformada principalmente por recursos web (webs científicas institucionales, blogs, videos de YouTube) y las instrucciones auxiliares del profesor. Se pudo observar que inicialmente esta dialéctica del *medio-media* originó que los escolares en un principio optaran por recursos web principalmente de lectura, con un saber más o menos transpuesto para su nivel, pero que con el avance del estudio se fue complicando su accesibilidad por la emergencia de una matemática cada vez más avanzada. Posteriormente se incorporó al medio recursos web de tipo más explicativo y audiovisual, de tal forma que se facilite la comprensión de la información investigada. En el trabajo de los alumnos con estos medios, se ha observado la emergencia de la dialéctica entre la búsqueda de fuentes que expliquen la naturaleza del fenómeno en cuestión: la resistencia del aire en el movimiento, y la búsqueda constante de datos reales en torno a la experimentación específica en estudio. En esta última, cobró gran relevancia, los datos encontrados en la página oficial de *Red Bull Stratos*, sponsor oficial de la experimentación.

En el ejercicio del nuevo contrato didáctico, el docente desde un principio encontraba dificultades para detectar cuando era conveniente realizar una intervención o una devolución al grupo. Para ello, se llegó a establecer dos grandes criterios que sirvieron de ayuda hasta cierto punto, el primero es que esta intervención se realice solo cuando el grupo como tal haga una consulta o cuando el docente vea que las cuestiones que se están generando impedirán construir conocimiento. Para ello el profesor en más de una ocasión tenía que repetir que las dudas personales primero se plantean y discuten entre los integrantes del grupo, y solo si se trata de una duda colectiva puede ser planteada al profesor. Sin embargo, en algunas ocasiones resultaba difícil sostener esta recomendación tanto para los alumnos como para el profesor, debido a que recurrentemente los alumnos esperan que el profesor valide la factibilidad de las fuentes encontradas o las decisiones grupales tomadas.

Por otro lado, se observó que los alumnos mostraban cierta resistencia a registrar en el portafolio los avances parciales conseguidos en cada una de las sesiones efectuadas. De ahí que los primeros resultados de las búsquedas iniciales difícilmente fueron reportados en el informe parcial. Hubiese venido bien, que la evaluación obtenida de esos avances parciales sea más inmediata para que los alumnos se vean estimulados a no pasar por alto ningún procedimiento.

5.3.2 Análisis de la segunda etapa: Estudio de la caída sin resistencia de aire

En esta segunda etapa es de crucial importancia la pertinencia de las cuestiones derivadas para desarrollar el proceso de modelización matemática, es por ello que ante la emergente tendencia de los alumnos de cuestionarse nuevamente en términos de "cómo", el director de estudio optó por ejercer una modificación de tipo topogenético al intervenir en la elaboración de Q3 para garantizar el carácter cuantitativo de la cuestión y con ello la movilización de las habilidades matemáticas de los alumnos. La cuestión Q3 fue ¿Cómo y cuánto varía la altura a lo largo del tiempo de caída sin resistencia de aire? ¿Y la velocidad?

La dialéctica del *estudio-investigación* que surge a partir de esta pregunta, da inicio a un *momento exploratorio*, en el cual todos los grupos empiezan acudiendo a las fórmulas de Caída Libre (O_1) como medio de estudio accesible en los siguientes tipos de media: recursos de sitios web y los capítulos de cinemática de tres libros de física. En estos primeros tratamientos se observó la generalizada tendencia de los grupos a focalizarse en el cálculo de valores puntuales de velocidad y altura, reconocidos como la velocidad final y altura final de la fase con caída libre, sin atender los valores experimentados por esta magnitud a lo largo del proceso.

Ante una imprevista interferencia en la continuidad del proceso de estudio por una actividad institucional y al evaluar el tiempo que estaba suponiendo el análisis hasta ahora cualitativo de la cuestión, en la sétima sesión, para contrarrestar la afección en la cronogénesis por causas externas al proceso, el profesor intervino en la mesogénesis proponiendo a la *Actividad n°2* como un medio más, en la que se explicitan la Q3, las dos subcuestiones Q3.1 y Q3.2 y las alturas experimentadas por el paracaidista durante los primeros 15 segundos de caída libre a fin de facilitar el estudio de la variación de altura y velocidad respecto al análisis puntual del inicio y fin del movimiento con caída libre. La mayoría de alumnos repotenciaron la *dialéctica del* *medio-media* al incorporar esta actividad como *medio* de estudio, generando la evolución del mismo:

M= {trabajo grupal de cinco estudiantes, Actividad n°2, calculadora gráfica, GeoGebra, Excel, Cinemática (O_1), Progresiones aritméticas (O_2), Regresiones (O4)}.

La *dialéctica del estudio y la investigación* permitió que el estudio se diversifique en el estudio de las fórmulas de caída libre, el estudio de las variaciones de primer orden y segundo orden de las alturas mediante tablas y el estudio de los datos mediante el uso de regresiones en GeoGebra y en Excel.

GRUPO 1:

El estudio del Grupo 1 enriqueció el desarrollo del REI con respuestas provisionales que a su vez generaron el planteamiento de cuestiones derivadas que abrieron camino a la construcción de una técnica que dé solución a Q3. Unas de ellas propuestas por el director de estudio (señaladas por una "y" como subíndice) y otras generadas por los mismos alumnos (señaladas por una "x" como subíndice).

Tabla 26: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 1 en la segunda etapa

Cuestiones	**Respuestas**
$Q3.1_y$: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido?	R.3.1a: Fórmulas de caída libre (O_1) R3.1b: Tabla de alturas con sus respectivas variaciones por cada segundo.
$Q3.2_y$: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso?	R.3.2a: Fórmula de caída libre: $v(t)=9.81t$ (O_1) R.3.2b: Regresión de velocidades promedio por cada intervalo en función del extremo derecho de los intervalos: $v(t)=9.81t - 4.88$
$Q3.2.1_y$: ¿Cómo se relaciona esta fórmula de velocidad con la fórmula de caída libre?	R.3.2.1a: En la primera fórmula "t" significa un segundo exacto, en la segunda fórmula "t" representa un intervalo de un segundo de ancho. R.3.2.1b: Las velocidades promedio obtenidas por el extremo derecho del intervalo se obtienen también con la fórmula de caída libre si se usa la marca de clase del intervalo de tiempo.

Q3.2.2$_x$: ¿Cómo hacer para no hacer referencia a intervalos de segundo en el tiempo?	R.3.2.2: Relacionamos cada velocidad promedio con la marca de clase del intervalo, osea el promedio de los extremos de cada intervalo.
Q3.2.3y: ¿Siempre es válido hacer esta asociación?	R.3.2.3: Es válido siempre que la aceleración de la gravedad sea constante.
	R.3.2.c: Regresión de los valores de las velocidades promedio por cada segundo, asociados a la marca de clase de cada intervalo.
Q3.2.4$_y$: ¿Cómo varían estas?	R.3.2.4: La variación es generada por aceleración de la gravedad, 9.81m/s^2.

Con la incorporación de la Actividad n°2, el estudio se centró en el cálculo de velocidades promedio, mediante la aplicación "ciega" de la tasa de variación media, es decir, sin llegar a reconocerla como objeto matemático. Posteriormente el estudio de Q3.2 condujo al análisis de estas velocidades con regresiones lineales a fin de constatar que su variación con respecto al tiempo equivale a la aceleración de la gravedad y con ello evidenciar que los datos de altura describen un fenómeno de caída libre. Como puede observarse el descubrimiento de este modelo desencadenó una serie de cuestionamientos respecto a la relación entre esta fórmula de velocidad por regresiones y la fórmula de velocidad de caída libre. Esta *dialéctica de estudio-investigación* llevó a confrontar en primer lugar, la noción variacional de función con la noción de velocidad como fórmula de física, mediante la cual se suelen obtener valores específicos, aislados y puntuales de velocidad como lo es la velocidad inicial y final, y en segundo lugar a confrontar la noción de velocidad promedio y velocidad instantánea. Este estudio desembocó en la construcción de las técnicas $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ y $\boldsymbol{\tau}_3$, que posteriormente en la última puesta en común de esta fase se terminan comparando bajo un criterio de precisión inherente a cada modelo generado.

Con respecto a la dialéctica del *individuo-colectivo* se presentaron diversas situaciones. Por una parte, durante el estudio de caída libre no tardó en manifestarse un fenómeno heredado del contrato didáctico tradicional. Los alumnos al tener falta de costumbre a resolver cuestiones o dudas mediante investigación en clase y al sentir cierta limitación para conseguir explicaciones por parte del profesor, comenzaron a suplir la orientación del profesor por la orientación del "buen estudiante" del grupo, poseedor de autoridad académica, consiguiendo de él validaciones y algunas explicaciones de las obras estudiadas, las cuales de ordinario no son refutadas, convirtiéndose de este modo en una *media* privilegiado respecto a los demás compañeros de grupo y sobre el que recaen la responsabilidad de las decisiones respecto al rumbo a tomar. Es este estudiante, el que controla la mesogénesis al decidir en gran medida de qué manera utilizar un medio disponible u otro, llegando a convertir en medio los siguientes elementos*:* M= {trabajo grupal de 5 integrantes, tabla de datos de altura, la calculadora para obtener las diferencias, laptop, la hoja de cálculo y el análisis de datos de GeoGebra, Obra de Cinemática (O1), Obra de Regresiones (O4)}. Tanto el uso de la calculadora como el uso del GeoGebra, constituyen los principales elementos del medio, pues mediante estos los alumnos pudieron visualizar tabular y gráficamente, el comportamiento de las alturas en el tiempo

GRUPO 2:

En la sétima y octava sesión, los estudiantes continuaron con el estudio de Q3.1, acudiendo además de a la Obra de Caída Libre (O_1), también a la Obra de Tasa de Variación media (O3) y a la Obra de Tasa de variación instantánea (O5). La siguiente tabla muestra el recorrido experimentado en el estudio de Q3 a través de estas obras.

Tabla 27: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 2 en la segunda etapa

Cuestiones	Respuestas
$Q3.1_y$: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones?	R.3.1a: Tabla de datos con los valores de la tasa de variación media por cada segundo, asociados a los valores de los extremos derecho de cada intervalo.
$Q3.1.1_x$: ¿Por qué el valor de velocidad v(1) =4,9m/s obtenido por la tabla es diferente del obtenido por la fórmula de velocidad de caída libre v(1) =9.81m/s?	R3.1.1: Porque las velocidades promedio, como es el caso de 4.9m/s, deben estar asociadas al valor medio de cada intervalo.
$Q3.1.2_y$: ¿Cómo obtener velocidades más precisas?	R3.1.2: Con la velocidad instantánea que se obtiene modelando la tasa de cambio instantánea de la altura respecto al tiempo.
$Q3.1.3_x$: ¿Cómo se saca la tasa de cambio instantánea de la altura respecto al tiempo?	R3.1.3: Calculando la derivada de la función altura obtenida por regresiones en GeoGebra.
$Q3.2_y$: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso?	R.3.2a: Tabla de datos con valores de la tasa de variación media por cada segundo, asociados al valor medio de cada intervalo.

	R.3.2b: Valor absoluto de la función derivada de la fórmula de altura en función del tiempo obtenida por regresiones en GeoGebra.
Q3.2.1$_y$: ¿Cómo varían estas?	R3.2.1: Tabla de datos con las variaciones de segundo orden interpretados como la aceleración por cada segundo, 9.81m/s^2.

Como puede observarse en la tabla 24, los alumnos desplegaron el *estudio-investigación* de la Q3.1 a través del análisis tabular de los datos de altura, el cual suscitó la formulación de la cuestión Q3.1.1 que lleva confrontar, al igual que en el Grupo 1, los valores de R.3.1a con los valores obtenidos por la fórmula de velocidad de caída libre. En una primera puesta en común, el grupo decidió plantear su cuestionamiento aún no resuelto al pleno, recibiendo como respuesta, dos hipótesis de solución que llevaron a la formulación de R3.1.1. En esta primera puesta en común, tras la difusión de los demás grupos, se observó que los estudiantes integraron la idea surgida en la plenaria sobre la noción de velocidad promedio, definida como el cociente del diferencial de distancia y el diferencial de tiempo de dos posiciones consecutivas, y a partir de esta idea y del planteamiento de la cuestión derivada Q3.1.2, es que los alumnos entran en la dialéctica del *estudio-investigación* con la Obra Tasa de variación instantánea (O5) a través del libro texto de Matemática y un video de Khan Academy. Es en este estudio donde el grupo empieza a aproximarse a la *función derivada* como la técnica apropiada para obtener las velocidades “precisas” experimentadas a lo largo del tiempo de caída. Sin embargo, solo llegaron a obtener el cálculo de la función derivada mediante el uso de tecnología, concretamente el uso de GeoGebra, ya que no encontraron accesible la deconstrucción de la definición de derivada denotada como límite. Durante la puesta en común, al ser cuestionados sobre el funcionamiento de la técnica para que el resto de grupos la acoja como *medio*, no llegaron a explicitar en qué consiste la operación *derivar*, por lo que esta técnica no encontró acogida y no llegó a consolidarse completamente ni en el grupo ni en el pleno.

En esta etapa el grupo ha contado solo con la presencia de 4 integrantes, y con estos el desarrollo de la dialéctica del *individuo-colectivo,* inicialmente se pone de manifiesto en la redistribución de responsabilidades: redacción digital del informe parcial, tipeo de los datos en hoja de cálculo de Excel, estudio de los datos en Excel e investigación de la cuestión en sitios web. En el trabajo intragrupal se observa que el desarrollo del estudio se lleva a cabo principalmente por dos estudiantes, mientras que los otros dos son meramente receptivos y se encargan de realizar los trabajos que se les asigne. Como se mencionó anteriormente, esta dialéctica se tornó fundamental en el trabajo intergrupal de los alumnos al principio de esta etapa, al acoger las contribuciones de los otros equipos que ayudaban a direccionar el estudio por ellos emprendido.

GRUPO 4:

Este equipo es el único que diversificó su estudio a través del despliegue de dos recorridos intragrupales, lo cual promovió la generación de un mayor número de cuestiones derivadas planteadas conjuntamente con el profesor y un estudio más rico de posibles respuestas.

Tabla 28: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 4 en la segunda etapa

Cuestiones	Respuestas
Q3.1$_y$: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido?	R.3.1a: Fórmulas de altura y velocidad de caída libre. R.3.1b: Modelo cuadrático de la altura obtenido por regresiones lineales. R.3.1c: Tabla de alturas con sus respectivas variaciones por segundo interpretadas como velocidades promedio. R.3.1d: Progresión aritmética: a_n=9.8n-4.9 (n en segundos)
Q3.1.1$_y$: ¿Qué significan estas variaciones?	R3.1.1: Cada intervalo de tiempo se considera un MRU, entonces estas variaciones significan velocidades promedio obtenidas por la división entre diferencial de distancia entre diferencial de tiempo: v= $\Delta D/\Delta t$.
Q3.1.2$_y$: ¿Cómo obtener velocidades más precisas?	R.3.1.2: Calculando velocidades promedio en tramos más pequeños, como de 0.5.
Q3.1.2.1$_x$: ¿Cómo obtener velocidades promedio en intervalos de 0,5?	R.3.1.2.1: Con la regresión de la altura en función del tiempo se calcula la altura cada medio segundo y luego la velocidad promedio con $\Delta D/\Delta t$.
Q3.1.2.2$_x$: ¿Se puede ganar mayor precisión aún?	R.3.1.2.2: Calculando alturas y velocidades promedio en tramos aún más estrechos.

Q3.1.3$_y$: ¿Por qué son parecidas las velocidades obtenidas por las tablas y las velocidades obtenidas por la fórmula de caída libre?	R.3.1.3: Las velocidades obtenidas por la fórmula de caída libre son velocidades instantáneas, y las velocidades promedio calculadas con segundos cada vez más específicos hace que estas sean cada vez más aproximadas a las velocidades instantáneas.
Q3.2$_y$: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso?	R.3.2a: Fórmula de velocidad de caída libre: v(t)=9.81t R.3.2b: Tablas de alturas cada cuarto y décima de segundo con sus respectivas velocidades promedio, asociadas con el extremo derecho de cada tramo de tiempo.
Q3.2.1$_y$: ¿Cómo varían estas?	R.3.2.1: Las velocidades varían en función de la aceleración de la gravedad.

Este grupo (G4) empezó esta etapa del REI, como todos los grupos, con el estudio de las fórmulas de la caída libre y el estudio de los datos reales sobre la experimentación. Tras la incorporación de la Actividad n°2 al medio, la dialéctica de *estudio-investigación* se manifestó en la aparición de un nuevo recorrido de estudio, teniendo con ello: un estudio desde la Física realizado por dos alumnos ($G4_F$) y que no era sino continuación de lo ya antes empezado, y otro estudio desde la Matemática ($G4_M$) realizado por tres alumnos, que se identifica con el estudio de Regresiones y progresiones de primer orden y segundo orden. Junto con esta diversificación del estudio, la dialéctica del *individuo-colectivo* se manifestó inicialmente en una redistribución del trabajo y de las responsabilidades en ambos subgrupos, sin embargo, luego se empezaron a mostrar dificultades principalmente en el $G4_F$, ya que no se observaban auténticos intercambios entre ambos integrantes, sino que principalmente el "buen estudiante" dirigía el estudio, mientras que su compañero, "un estudiante promedio", tomó el papel de "operario". Por otro lado, en el otro subgrupo $G4_M$ sí se pudo observar elementos que gesticulan una dialéctica del *individuo-colectivo,* ya que se mostró una menor heterogeneidad entre los integrantes y un mayor involucramiento en el estudio de la cuestión. Sin embargo, este subgrupo a diferencia de sus compañeros, solicitaron una mayor cantidad de validaciones u orientaciones referidas a la noción de variación y al uso del GeoGebra. Estos alumnos del $G4_M$ rápidamente pudieron identificar, mediante la aplicación de regresiones, la función cuadrática que modela la altura del paracaidista a lo largo del tiempo, pero tras ello no sabían cómo dicha expresión puede responder a la pregunta Q3.1, lo cual los conllevó a hacer un estudio de la función cuadrática sin mucho éxito. Algunos diálogos registran la idea de un par de alumnos de considerar la función posición o altura como la expresión que responde a la pregunta sobre la variación de la altura por cada segundo, sin embargo, no hubo un sólido convencimiento colectivo de ello. Una devolución del profesor los ayudó a reconducirse por el estudio de las variaciones de primer orden y segundo orden mediante tablas, obteniendo un modelo para la velocidad promedio usando progresiones aritméticas. Por su parte, el estudio completamente autónomo del subgrupo $G4_F$ desembocó en la construcción de una tabla de velocidades por segundo obtenida con la aplicación de la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ que difería de los resultados obtenidos por $G4_M$.

Las primeras impresiones del subgrupo $G4_F$ lo llevaban a tener la férrea idea de que los procedimientos de ambos métodos no tenían nada en común, de que el método matemático, al usar regresiones, se mostraba necesariamente impreciso y por tanto desventajoso a diferencia del "método físico que realmente busca explicar el fenómeno". Estas concepciones dificultaban la conciliación de las ideas durante la primera parte de esta etapa. Sin embargo, la convocatoria a la primera exposición de avances los motivó a esforzarse en hacer converger ambos estudios, lo cual desembocó en la formulación de R3.1.1 y en la formulación de una hipótesis que intentaba explicar la diferencia de resultados, que posteriormente fue descartada. El planteamiento por parte del profesor de la Q3.1.2 generó un auténtico debate entre todos los integrantes del grupo. El subgrupo $G4_M$ decidió experimentar lo posteriormente establecido por R3.1.2, sin la aprobación de $G4_F$. Este recorrido abrió camino a los cuestionamientos Q3.1.2.1, Q3.1.2.2 y Q3.1.3 y en la formulación de sus respuestas comenzó a emerger la conciliación de ambas posturas, llegando a construir una síntesis conjunta en la respuesta R3.1.3 que se aproxima al objeto matemático derivada, y posteriormente se consolida momentáneamente en R.3.2a y R.3.2b. De este modo, con los pasos recorridos de manera empírica por $G4_M$ se puede configurar la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ como un modo más de resolver la cuestión Q3.

En este par de recorridos se observó, con respecto a la dialéctica *media-medio,* que al convertirse en objetivo el conseguir velocidades más precisas, el equipo empezó a utilizar como *media* la asignatura de Estadística. Los conocimientos de Regresiones e interpolación estudiados en esta asignatura, apoyados también en el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra se convierten en *medios* para obtener más datos de altura y velocidad promedio. A su vez, se hizo uso de dos tipos de sitios web, uno que era fuente de información sobre caída libre que sirvió como medio de estudio de las fórmulas de velocidad, y otro sobre los datos reales de la experimentación que sirvieron para comprender las condiciones de la caída y a la vez fungieron de medio de corroboración de los resultados obtenidos.

La cronogénesis de esta etapa en general se vio bastante afectada por la interferencia de una serie de actividades extracurriculares de la institución que dificultaron en gran medida la continuidad diaria del REI, generando que esta etapa se desarrollara a lo largo de dos semanas, con un total de cinco sesiones que se vieron en dos ocasiones interrumpidas por hasta 3 o 4 días de separación entre una sesión y otra. El efecto de esta interferencia se manifestó principalmente en el desgaste de tiempo que suponía reanudar el trabajo de los alumnos, en el resurgimiento de la frecuente solicitud de validaciones, en la necesidad de repetir orientaciones en torno a la metodología de trabajo, como el tomar notas en el informe y el registrar las capturas de pantalla de la computadora de procedimientos importantes, y en tercer lugar, en el agotamiento motivacional de algunos grupos por la extensión del trabajo, la lentitud de los avances y las dificultades en la redistribución de responsabilidades por la ausencia de algunos integrantes debido a estas actividades.

5.3.3 Análisis de la tercera etapa: Estudio de la caída con resistencia de aire

En esta última etapa destaca la consolidación de las técnicas anteriormente construidas para el estudio del movimiento de caída sin resistencia de aire. Es así que al finalizar la plenaria de la etapa anterior, el profesor plantea el cuestionamiento Q4 y entrega la Actividad n°3 en la que se explicita la Q4: ¿Cómo varía la altura y la velocidad que experimenta el paracaidista a lo largo del tiempo de caída con resistencia de aire?, conjuntamente con las cuestiones Q4.1, Q4.2, Q4.3 y los datos de alturas en un modelo tabular cada dos segundos para $12 \leq t \leq 64$ segundos y un modelo algebraico exponencial para $t \geq 64$ s. La presentación de los datos tabulares cada dos segundos fue determinante para la selección de la técnica más apropiada que permita el estudio del movimiento con resistencia de aire.

El desarrollo de esta etapa se efectuó a lo largo de cinco sesiones diarias, con una interrupción de dos días útiles entre la segunda y la tercera sesión.

GRUPO 1:

Este equipo, tomando en cuenta lo propuesto por sus demás compañeros en la puesta en común de la fase anterior, decidió aplicar la técnica 4 para resolver la cuestión. A continuación, la cadena de preguntas y respuestas desarrolladas durante esta fase.

Tabla 29: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 1 en la tercera etapa

Cuestiones	Respuestas
Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo?	R.4.1a: Función por partes conformada por un modelo cuártico de altura obtenido mediante regresiones lineales para $12 \leq t \leq 64$ s, y el modelo exponencial propuesto para $t \geq 64$ s. R.4.1b: Tabla con los valores de la tasa de variación media asociados con el extremo derecho de cada intervalo con Δt =2.
Q4.1.1$_y$: ¿Cómo crecer en precisión en el cálculo de las velocidades?	R.4.1.1: Tabla con los valores de la tasa de variación media asociados con el extremo derecho de cada intervalo con $\Delta t = 1$.
Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas?	R.4.2a: Obtención de un modelo cúbico para la velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 1$ s en el intervalo $12 \leq t \leq 64$. R.4.2b: Obtención de un modelo potencial para la velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$ y luego regresiones lineales, con $\Delta t = 1$ en el intervalo $t \geq 64$ s
Q4.3: ¿Qué tanto varían las velocidades? ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?	R4.3: Tabla de valores con la tasa de variación de segundo orden por cada segundo, identificados como aceleraciones, asociados con el extremo derecho de cada intervalo.

El desarrollo de esta parte del estudio no fue inmediato. El grupo optó inicialmente por el ensamblaje de los tres modelos algebraicos para la altura, valiéndose para ello de sus conocimientos de regresiones lineales, funciones definidas por partes y el uso de Geogebra. Conjuntamente con ello para la obtención de las velocidades promedio realizaron la aplicación de la técnica 2, pero ante el cuestionamiento planteado sobre la precisión a través de la Q4.1.1, hubo un redireccionamiento del *estudio-investigación*, desembocando en la aplicación de la técnica 4, sin llegar a un estrechamiento considerable del intervalo, para formular la respuesta R.4.2b. En lo referente a la dialéctica del *individuo-colectivo* se destaca el liderazgo de uno de los integrantes para ayudar a distribuir las responsabilidades e involucrar a sus compañeros en el trabajo y en la exposición del mismo. Aunque, los intercambios muchas se encuentran limitados a dos y a veces hasta tres integrantes del grupo, quedando el resto como "operarios" del grupo, que por una parte aportan al trabajo colaborativo, pero por otra parte no se ve involucrado directamente en el direccionamiento del estudio. Al principio de esta etapa, nuevamente hubo una solicitud de validaciones referidas a la identificación de la técnica más apropiada. El medio construido por este grupo fue M= {Obra sobre funciones, Obra sobre Regresiones (O4), uso de GeoGebra}

GRUPO 2:

El recorrido de cuestiones experimentado en este grupo fue como se muestra a continuación:

Tabla 30: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 2 en la tercera etapa

Cuestiones	Respuestas
Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo?	R.4.1a: Función por partes conformada por un modelo cuártico de altura obtenido mediante regresiones lineales para $12 \leq t \leq 64$ s, y el modelo propuesto para $t \geq 64$ s.
Q4.1.1x: ¿Cómo obtener los valores para cada segundo con la fórmula en la hoja de datos?	R.4.1.1: Aplicar la función a la celda del tiempo (s(B1)) y luego arrastrar.
	R.4.1b: Obtención de una tabla de valores de velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 1$ en el intervalo $12 \leq t \leq 64$.

Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo?	R.4.2a: Obtención de un modelo cuártico para la velocidad promedio en función del tiempo mediante regresiones lineales para el intervalo $12 \leq t \leq 64$. R.4.2b: Obtención de una tabla de valores de velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 2$, en el intervalo $64 \leq t \leq 260$ s. Luego, obtención de un modelo polinómico de grado 5 mediante regresiones lineales.
Q4.2.1: ¿Qué tanto varían?	R.4.2.1a: La velocidad varía por la aceleración. Estas variaciones se pueden hallar mediante la operación $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. R.4.2.1b: Obtención de dos modelos polinómicos, uno de grado 3 y otro de grado 5 mediante la aplicación de la técnica $\tau 6$ en los intervalos $16 \leq t \leq 67$ y $67 \leq t \leq 260$. Luego se define la función aceleración definida por partes, conformada por tres funciones: una constante y estas dos polinómicas.
Q4.3: ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?	R4.3: La velocidad varía con mayor rapidez cuando la aceleración es mayor, esto es cuando es 9.8m/s^2 en los 12 primeros segundos.

Este equipo como parte del desarrollo de la dialéctica de *estudio-investigación* durante esta etapa, acude a la aplicación de la técnica de $\tau 4$ como medio eficaz de la formulación de Q4, y que involucra el estudio implícito de la Obra Regresiones (O4) y la Obra de Tasa de variación media (O3). Ambos apoyados por el uso del Excel, que tras la resolución de Q4.1.1, permite mediante un método un tanto heurístico estudiar el empalme de los datos de altura entre la etapa sin resistencia y la etapa con resistencia. Este grupo tras abandonar su técnica de derivación descubierta en la etapa 2, no mostró mayor acercamiento al cálculo diferencial, por lo que terminan predominando el análisis de datos. Al igual que en el grupo anterior, en este grupo la dialéctica de *individuo-colectivo* se ha visto limitada a los intercambios de ideas por dos integrantes principalmente, los otros dos estudiantes no son más que operarios en la computadora, la calculadora gráfica, redactores del informe digital. Este por su parte, es el único grupo que realizó una modelación algebraica de la aceleración, mientras que los demás grupos solo llegaron a un análisis tabular para responder a Q4.3.

El desarrollo de la dialéctica *media-medio* destacó por la construcción de un medio conformado por: M= {trabajo grupal de 5 integrantes, Actividad n°3, Tasa de variación media (O3), Regresiones lineales (O4), Funciones definidas por partes, $\tau 4$, Excel, Graficador de Geogebra}, cuyos elementos fueron obtenidos de *medias* como la internet, las exposiciones de los demás grupos, la Obra de tasa de variación, Obra de Regresiones y Obra de Funciones.

GRUPO 4:

A continuación, la arborescencia desplegada por el grupo 4 en su estudio físico-matemático.

Tabla 31: Relación de cuestiones derivadas del Grupo 4 en la tercera etapa

Cuestiones	Respuestas
Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo?	
Q4.1.1$_x$: ¿Cómo verificar que los datos de esta nueva tabla son correctos?	R.4.1.1: Reemplazo de valores de $t \geq 15$ en la función de altura de los primeros 15 segundos.
Q4.1.2$_x$: ¿Por qué los nuevos datos de altura no concuerdan con la fórmula de altura que hallamos para los primeros 15 segundos?	R.4.1.2: Porque empieza a influir la resistencia del aire.
Q4.1.3$_x$: ¿En qué momento empieza a afectar la resistencia del aire?	R.4.1.3: Desde el segundo t=18 los datos comienzan a diferenciarse, entonces la aceleración ya no es 9.8m/s^2.
Q4.1.4$_x$: ¿Qué modelo algebraico puede modelar la altura en función del tiempo?	R.4.1.4: Modelo sinusoidal con r^2=1
Q4.1.5$_x$: ¿Porqué si el modelo sinusoidal tiene un r^2=1 genera respuestas que no coinciden con los datos de la tabla? ¿Por qué una función cúbica o cuártica también tiene un r^2=1?	R.4.1.5$_y$: Después de considerar el modelo o modelos con r^2 más cercano a 1, se empieza a descartar aquellos modelos que se alejen más notoriamente de los resultados porporcionados.
	R.4.1a: Función por partes conformada por un modelo cuártico de altura obtenido mediante regresiones lineales para $18 \leq t \leq 64$ s, y por el modelo propuesto para $t \geq 64$ s. R.4.1b: Tabla de los valores de las alturas, velocidades promedio, y aceleraciones promedio, asociados con el extremo derecho de cada intervalo con $\Delta t = 1$.
Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas y qué tanto varían?	R.4.2a: Modelo algebraico cúbico obtenido mediante la aplicación de la técnica $\tau 4$, con $\Delta t = 0.1$ s en el intervalo $12 \leq t \leq 64$ y la posterior aplicación de regresiones lineales.

Q4.2.1y: ¿Cómo obtener un modelo de velocidad promedio para los tiempos mayores de 64?	R.4.2.1: Obtención algebraica de un modelo de velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 6$, con $\Delta t = 1$ en el intervalo $t \geq 64$ s.
Q4.2.2x: ¿Por qué los dos modelos no dan la misma velocidad para el mismo t=64seg?	R4.2.2: Porque el modelo cúbico ha sido obtenido con $\Delta t = 0.1$ y el modelo exponencial fue obtenido con $\Delta t = 1$
Q4.2.3y: ¿Y se quiere ganar mayor precisión?	R.4.2.3: Obtención de un modelo algebraico de un modelo exponencial para la velocidad promedio mediante la aplicación de la técnica $\tau 6$, con $\Delta t = 0.01$ en el intervalo $t \geq 64$ s.
Q4.2.4x: ¿Por qué los dos modelos siguen sin intersecarse en t=64 s?	R.4.2.4: Como los valores son aproximados, la intersección no es exactamente en t=64, sino en t=63.3 s.
	R.4.2b: Modelo algebracio obtenido mediante la apicación de la técnica $\tau 6$, con $\Delta t = 0.01$ s para el intervalo $t \geq 63.3$ s.
Q4.3: ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?	R4.3: Tabla de valores con tasa de variación media de la velocidad promedio con respecto al tiempo cada dos segundos, identificados como aceleraciones, asociados con el extremo derecho de cada intervalo.

El grupo, igualmente que la etapa anterior, aborda la cuestión Q4 mediante dos estudios intragrupales: el estudio desde la Física efectuado por $G4_F$ y el estudio desde la matemática efectuado por $G4_M$. El planteamiento de los cuestionamientos Q4.1.1 y Q4.1.2 por parte de los integrantes de $G4_M$, desplegó la dialéctica *estudio-investigación* y la dialéctica del *individuo-colectivo.* El intercambio de ideas suscitado entre integrantes de $G4_M$ y $G4_F$, evocó los conocimientos sobre resistencia de aire construidos anteriormente en R1 y que igual contribuyeron en la formulación conjunta de R4.1.1 y R4.1.2. Ya posteriormente a esto, $G4_M$ continuó con el estudio de la cuestión derivada Q4.1.3, mientras que $G4_F$ continuó con el estudio de la ecuación diferencial mostrada en R1, pero al no explicitar los cuestionamientos que dirigían sus búsquedas no se tiene registro del recorrido de este subgrupo. Las búsquedas en internet (*media*) de estos últimos facilitaron el encuentro de entre otras fuentes, un reporte científico de *Red Bull* que dotaba de datos de la velocidad experimentada mediante un modelo gráfico que sirvió como nuevo *medio de estudio* para corroborar la respuesta R.4.1.3 obtenida por $G4_M$ y posteriores respuestas. Ante la imposibilidad de encontrar los valores que experimentaron los parámetros del modelo físico diferencial estudiado, los integrantes optaron por unirse al estudio de $G4_M$, contribuyendo en la formulación de R.4.1a, R.4.1b y R4.2. Tras la validación de las respuestas obtenidas hasta ese momento en la primera plenaria de esta etapa, se replanteó la cuestión Q4.2 para los tiempos mayores a 64 segundos y la cuestión Q4.3 que aún no habían sido atendidas.

La validación recibida por parte del profesor en la exposición consolidó el trabajo colectivo de los integrantes del G4 en un solo estudio, que terminó desembocando, tras una serie de cuestiones y respuestas derivadas, en la formulación de la respuesta R4.2.3, que se caracteriza por el cálculo algebraico de la velocidad promedio a partir del modelo exponencial propuesto para la altura, y que se aproxima nuevamente al objeto matemático *función derivada,* pero que los alumnos no terminan de concebirlo de ese modo sino solo como la técnica óptima para obtener velocidades más precisas, como ocurrió con el G2 en la etapa anterior, aunque ahora sí se muestra un cálculo explícito del procedimiento. La etapa concluyó con la elaboración de una tabla de valores con la tasa de variación media de la altura y la velocidad promedio que buscaba responder a Q4.3.

El desarrollo de la dialéctica *media-medio* destacó por la construcción de un medio bastante rico, cuya diversidad de componentes supuso el tiempo de cinco sesiones el poder llegar a coordinarlos para que permitan la emergencia de R3. Este medio de estudio estuvo conformado de la siguiente manera: M= {trabajo grupal de 5 integrantes, Actividad n°3, conocimientos sobre Tasa de variación media, conocimientos sobre Regresiones lineales, conocimientos sobre Funciones definidas por partes, R.3.2b, $\tau 4$, reporte científico de Red Bull, sitios web sobre la experimentación, Ecuación diferencial del paracaidismo, Excel, Graficador de Geogebra}, cuyos elementos fueron obtenidos de *medias* como la internet, las exposiciones de los demás grupos, la Obra de tasa de variación, Obra de Regresiones (O4), Obra de Funciones, Física del paracaidismo.

Tras la plenaria de esta etapa, se realizó la síntesis de todas las respuestas parciales construidas para estructurar la respuesta corazón, que se caracterizó por enfocarse en estudiar la variación de altura y la velocidad con respecto al tiempo a lo largo de toda la caída hasta que se abre el paracaídas. El cuestionamiento sobre el cálculo de la altura necesaria no se llegó a abordar en el desarrollo de este REI. Sin embargo, la situación problemática al girar en torno a la velocidad supersónica, el estudio de la velocidad cumplió su papel al generar un proceso de investigación rico en cuestiones derivadas relacionadas al *Cálculo diferencial.*

CONSIDERACIONES FINALES

El trabajo de investigación se llevó a cabo con alumnos del segundo año del Programa del Diploma (PD) del Bachillerato Internacional (IB) en el colegio Los Álamos. El modelo pedagógico de este programa está basado principalmente en conceptos, contenidos y habilidades, y promueve un plan de enseñanza y aprendizaje basado en la ***indagación, la acción y la reflexión***. Sin embargo, en los cursos el *paradigma tradicional* termina imponiéndose, de tal manera que la indagación de situaciones contextuales significativas y el aprendizaje basado en preguntas no figuran de manera importante, quedando desplazados completamente por el aprendizaje receptivo en el que el profesor continúa siendo la fuente principal del saber.

En esta investigación se ha propuesto un Recorrido de Estudio e Investigación, que es un dispositivo didáctico que permite concretar en aula el paradigma del *cuestionamiento del mundo* que, por su naturaleza diferente al paradigma tradicional, se presenta como un método apropiado para fomentar un aprendizaje y una enseñanza basada en la indagación tal y como lo propone el PD. En este proceso de estudio, el rol del estudiante deja de ser receptivo y pasivo, y junto a un equipo de trabajo con el que comparte responsabilidades toma una actitud más proactiva que lo lleva a estudiar, investigar, construir y validar respuestas parciales que contribuyan a la construcción de una respuesta total de la cuestión de partida. En un escenario como éste, el rol del profesor también es distinto al ordinario, ya que se convierte en un medio más para conseguir información necesaria y a su vez funge de director del proceso de estudio, ayudando a dar forma a las cuestiones derivadas emergentes, orientar la estructuración de las respuestas parciales, y a dotar de seguridad y confianza a los alumnos por las respuestas construidas por ellos mismos.

El marco teórico y metodológico de la TAD, concretamente su método de ***análisis clínico didáctico***, ha permitido alcanzar el objetivo general planteado en esta investigación: Analizar las condiciones posibilitan y qué restricciones dificultan la implementación un REI denominado ***Un recorrido de estudio e investigación en torno a una práctica de paracaidismo con velocidad supersónica***, con alumnos que cursan el 2do año de Bachillerato Internacional del Colegio Los Álamos.

Con respecto a nuestros objetivos específicos podemos señalar que el diseño de una actividad didáctica que hiciera emerger un REI partió con un análisis histórico-epistemológico que permitió identificar cerca de nueve diversas situaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas que contribuyeron a la construcción del concepto de la derivada a lo largo de la historia, de las cuales las situaciones alusivas a velocidades y a la variación sirvieron de ayuda para elegir la situación de contexto a partir del cual se pueda construir una cuestión generatriz que involucre el desarrollo de la noción de derivada como uno de los objetos matemáticos posibles para su resolución.

En segundo lugar, se procedió a realizar un análisis institucional que empezó por un estudio de los documentos curriculares del IB que permitió identificar por una parte, algunas restricciones institucionales como la extensión temporal permitida para la implementación de un REI y la exigencia del desarrollo de una extensa secuencia de contenidos, y por otra, también permitió identificar las características curriculares que posibiltaron la implementación, tales como la compatibilidad de este nuevo dispositivo con los objetivos del curso referidos a la indagación, al estudio de cuestiones reales significativas y a la comunicación e interpretación de la realidad mediante construcciones matemáticas. Luego se continuó con el análisis de los libros didácticos, el cual permitió describir las organizaciones matemáticas propuestas en el plan de estudios IB, así como también identificar los tipos de tareas y técnicas propuestas en los libros didácticos y la manera en cómo estos están estructurados. Respecto a esto se encontró que las técnicas recogidas en los textos no se muestran del todo articuladas, sino que por el contrario se presentan como un conglomerado de reglas algebraicas de derivación, que parecen carecer de un discurso tecnológico común que las caracterice, esto básicamente debido a que por cada tipo de tareas se muestra una única técnica privilegiada de resolución que termina tomando un carácter también tecnológico, lo cual dificulta su integración en organizaciones matemáticas de mayor complejidad.

Posteriormente, se dio paso al análisis praxeológico del contexto de paracaidismo, identificándose cinco principales tipos de tarea contextuales y sus respectivas *técnicas*, que encuentran su justificación *tecnológica* en las fórmulas de paracaidismo, las cuales a su vez se fundamentan principalmente en la segunda ley de Newton como discurso *teórico*.

Con estos elementos del diseño matemático se pudo establecer la cuestión generatriz que da apertura al REI: ***¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?***, y que fue evolucionando en diferentes subpreguntas que implicaron el uso de obras de distintas ramas de conocimiento a partir de la articulación de las nociones de tasa de variación media, velocidad promedio, movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente variado, configurando de este modo un REI de tipo bidisciplinar, que aproxima a los estudiantes al desarrollo de conocimientos de Física y Matemática que van más allá de los que ordinariamente plantea el currículo.

Respecto al último objetivo, si bien es cierto que el hábito de lidiar con un contrato didáctico tradicional, en el que la experiencia con preguntas abiertas es prácticamente nula, no va a verse revertido inmediatamente a partir del trabajo de un primer REI en aula, se puede destacar que la implementación de este dispositivo ha posibilitado que los alumnos desarrollen algunos de los gestos didácticos propios del paradigma del cuestionamiento del mundo, manifestados a través de una serie de dialécticas, de las cuales se eligieron las de *preguntas-respuestas*, *media-medio* e *individuo-colectivo* para describir y analizar la evolución del proceso de estudio.

La primera dialéctica permitió ilustrar los recorridos desplegados por los diferentes grupos. A través de las filmaciones y de los informes parciales entregados se pudieron identificar las cuestiones derivadas con sus respectivas respuestas parciales construidas durante el estudio, las cuales fueron organizadas en tablas de cuestiones y respuestas en las que se puede identificar la construcción de 6 técnicas que permitieron responder, con diferente grado de precisión, a las diferentes cuestiones derivadas en torno al cálculo de velocidad. Aunque algunas de las técnicas se presentan como medio de solución para un mismo tipo de tarea, solo dos grupos llegaron a identificar la potencialidad o ventaja de una técnica respecto a otra, de los cuales el grupo 4 fue el que llegó a construir un equipamiento praxeológico más potente al ser el único grupo que llegó a incorporar una técnica algebraica para el cálculo de velocidades en sus respuestas.

Esta arborescencia de cuestiones y respuestas permitió articular, en primer lugar, diversos objetos matemáticos y físicos que de ordinario se estudian en contextos independientes o disconexos creando límites ficticios entre las disciplinas en los alumnos. En segundo lugar, el REI en su conjunto permitió dilucidar la razón de ser de la noción de derivada como la técnica idónea para obtener velocidades *“precisas”* -instantáneas- en un movimiento rectilíneo como lo es la caída tras un de salto de paracadismo.

Por otro lado, la dialéctica de individuo-colectivo permitió identificar la evolución de la topogénesis del estudiante. En todo momento el profesor procuró resaltar la importancia del trabajo colectivo y la autonomía grupal en la toma de decisiones durante el estudio. En la práctica, se identificaron varios periodos en los que los alumnos mostraron cierta facilidad para distribuir y asumir responsabilidades en la búsqueda de respuestas, haciendo que la frecuencia de los intercambios intragrupales sea más notoria y significativa. Así como también, se identificaron situaciones en las que un grado muy fuerte de heterogeneidad de entre los miembros de grupo con respecto a su habilidad con las “matemáticas” influye notoriamente en la naturaleza de los intercambios entre miembros, ya que el alumno hábil en el mejor de los casos termina supliendo el rol tradicional del profesor, impidiendo que el resto de compañeros asuman una mayor responsabilidad matemática en la indagación.

La dialéctica media-medio permitió identificar las *medias* consultadas que fueron distintas del profesor. La principal *media* usada en la mayoría de los grupos fue el Internet. En todo el proceso de estudio los alumnos han tenido acceso a esta *media* a través del uso de dos computadoras por grupo, sin embargo, la intervención del profesor, como *media*, nunca dejó de estar presente debido a la solicitud de los grupos ante situaciones de estancamiento. Si bien, al principio la intervención del profesor era solicitada de manera recurrente, ya sea por la búsqueda de una “pista” o como medio de validación de respuesta parciales o hipótesis, más tarde la frecuencia de esta fue disminuyendo, dando mayor cabida a una dialéctica media-medio más auténtica. El Grupo 4, fue el que destacó por asumir la responsabilidad matemática del estudio con más estabilidad.

Por otro lado, los conocimientos de Cinemática articulados con los conocimientos de Regresiones Lineales se convirtieron en un *medio* bastante relevante en el estudio. El uso de la tecnología y específicamente el uso del software GeoGebra fue indispensable para el despliegue de estas praxeologías matemáticas y para la construcción de las técnicas mencionadas.

La interrupción de la secuencia de la experimentación en dos ocasiones afectó fuertemente la cronogénesis del REI, por el tiempo perdido y por el tiempo que supone reanudar el trabajo matemático y desplegar nuevamente la sinonimia y las consecuentes reglas de trabajo grupal establecidas por el mismo grupo. El tiempo que duró la implementación fue de cuatro semanas, la cual favoreció la experimentación y observación de las dialécticas que emergieron y además de nuevos comportamientos de los estudiantes frente a las actividades de estudio, cabe resaltar que el REI se finaliza por restricciones institucionales, esto respecto al cumplimiento de temas propuestos en el paradigma tradicional.

Con respecto a los alcances en investigaciones futuras, consideramos que el diseño de este REI bidisciplinar promueve la construcción de las nociones del cálculo diferencial e integral, así mismo este puede ser implementado a otros niveles como en primeros años de la universidad para dar sentido al estudio de la derivada. Por otro lado, creemos importante que no solo los estudiantes vivan este recorrido, sino también tanto los docentes en formación inicial como formación continua para reflexionar sobre la necesidad de promover la investigación y encontrar sentido a las nociones y técnicas que se enseñan para resolver tareas relacionadas a la variación. Se considera que cada implementación de este dispositivo puede tener diferentes REIs, es importante continuar con el estudio del marco teórico del paradigma del cuestionamiento del mundo, para adaptarlo y mejorarlo.

REFERENCIAS

Alcántara, A. (2015). *Estudio de comparabilidad de las matemáticas del Bachillerato Internacional: comparación del currículo y la evaluación.* Bethesda (Maryland, EE.UU.): organización del Bachillerato Internacional.

Asmianto, A., Hariyanto, H., & Herisman, I. (2018). Construction of mathematical models the parachute jumper with change position acrobatic. *Journal of Physics, 974*. doi:doi :10.1088/1742-6596/974/1/012044

Australian Parachute Federation LTD. (2017). *Australian Parachute Federation*. Recuperado el 29 de Junio de 2019, de Australian Parachute Federation: https://www.apf.com.au

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas, Bellaterra.

Borba, Marcelo C.; Araújo, Jussara. (2004). A pesquisa qualitativa em educação matemática. Rio Claro - SP.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty–Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Study Bulletin, 58*, 51-65.

Bosch, M., & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". (A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, & C. Ladage, Edits.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 55-91.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Buchanan, L., Fensom, J., Kemp, E., La Rondie, P., & Stevens, J. (2015). *Matemáticas Nivel Medio.* (F. Valiño, Trad.) Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Cantoral, R., & Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Jospeh Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(3), 265-292.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docente en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 221-266.

Chevallard, Y. (2009). La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En Margolinas, & e. a. (org.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques.* (Vol. 1, págs. 81-108). Grenoble: La Penseé Sauvage.

Chevallard, Y. (2011). La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En Margolinas et al. (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81-108). Grenoble: La Penseé Sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma emergente. J*ournal of research in Mathwmatics Edication*, *2*(2), 161-182. doi: 10.447/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (Julio, 2019). Questioning and Studying: The Human Art of Learning (session4). En N. Ruiz-Munzon (Presidencia). *IRP Advances in the Antropologic theory of the didactic and their consequences in curricula and in teacher education*. Conferencia llevada a cabo en el Advance Course 3. The Curriculum Problem and the Paradigm of Questioning the World, in Mathematics and beyond, Barcelona, España.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gacón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelon. Recuperado de http://curriculares.files.wordpress.com/2011/09el_eslabon_perdido.pdf

Contreras, Á., Luque, L., & Ordóñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en bachillerato y universidad. *Revista Educación*(331), 399-419.

Covián, O., & Romo-Vázquez, A. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación Educativa*, 17-48.

Expertvillage. (2008). Skydiving Basics & Techniques : How to Fly Your Body when Skydiving. [Archivo de video] Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ltnHRmGk1tY. [Consulta: 20 de abril 2019]

Fonseca, C., & Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la enseñanza secundaria. *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (págs. 205-224). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis doctoral, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Jaén.

García, F., & Sierra, T. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, (págs. 299-307). Alicante: SEIEM.

García, F., Barquero, B., Florensa, I.&Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de investigación en Educación Matemática*. *15,* 75-94.

García, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía*, 137-171.

Haese, R., Haese, S., Haese, M., Mäenpää, M., & Humphires, M. (2012). *Mathematics for the international student. Mathematics SL* (Third ed.). Adelaide, Australia: Haese Mathematics.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta ed.). México D.F.: McGraw Hill Companies.

IBO. (2012). *Guía de Matemáticas Nivel Medio.* Recuperado el 29 de Abril de 2018, de Organización del Bachillerato Internacional: http://xmltwo.ibo.org/publications/DP/Group5/d_5_matsl_gui_1203_1/html/67.

207.142.65/exist/rest/app/gui.xql@doc=d_5_matsl_gui_1203_1_s&part=1&chapter=1.html

IBO. (2014). *Organización del Bachillerato Internacional*. Recuperado el 25 de Abril de 2018, de Organización del Bachillerato Internacional: https://www.ibo.org/es/programmes/find-an-ib-school/?SearchFields.Region=iba&SearchFields.Country=&SearchFields.Keywords=&SearchFields.Language=&SearchFields.BoardingFacilities=&SearchFields.SchoolGender=&SearchFields.ProgrammeDP=true

IBO. (2015b). *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica.* Recuperado el 26 de Mayo de 2018, de Organización del Bachillerato Internacional: https://ibpublishing.ibo.org/server2/rest/app/tsm.xql?doc=d_0_dpyyy_mon_1504_1_s&part=1&chapter=1

IBO. (2015a). *Los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje*. Obtenido de Organización del Bachillerato Internacional.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Tesis doctoral, Universidad de Vigo, Departamento de Matemática Aplicada I, Vigo.

Meade, D. (June de 1998). Ode models for the parachute problem. *Journal SIAM Review, 40*, 327-332. doi:10.1137/S0036144596316248

Meade, D., & Struthers, A. (2 de Julio de 1999). Differential Equations in the New Millenium: the Parachute Problem. *International Journal of Engineering Education, 15*(6), 417-424.

Organización del Bachillerato Internacional. (2014). *Diploma Programme Statistical Bulletin.* Recuperado el 29 de Abril de 2018, de https://www.ibo.org/about-the-ib/facts-and-figures/statistical-bulletins/diploma-programme-statistical-bulletin/

Otero, M., Fanaro, M. d., Corica, A., Llanos, V., Sureda, P., & Parra, V. (2013). *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula.* Buenos Aires: Dunken.

Parra, v. & Otero, M. (2017). *Estudiar límite y derivada en la escuela secundaria: Una propuesta desde la TAD* (Primera ed.). Tandil, Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional del Centro de Buenos Aires.

Pérez, M. (2009). *Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes.* Madrid: Visión Libros.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática, Granada.

Rey, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática.* Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México: CICATA-IPN.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* Tesis doctoral, Universitat Ramon LLull, Estadísitica Aplicada, Barcelona. Recuperado el 03 de Junio de 2018, de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_LidiaSerrano_2013.pdf?sequence=1

Serway, R. & Faugh, J. (2001). *Física.* México: Pearson Educación.

Siero González, L. R., & Romo Vázquez, A. (2017). Didactic Sequences Teaching Mathematics for ENgineers With Focus On Diferrential Equations. *IGI Global*, 129-150.

Skydive Jurien Bay. (07 de Febrero de 2016). *Skydive Jurien Bay*. Recuperado el 20 de abril de 2019, de Skydive Jurien Bay: https://www.youtube.com/watch?v=QyViaTCx_C8

Skydive Jurien Bay. (9 de Mayo de 2018). *Skydive Jurien Bay*. Obtenido de Skydive Jurien Bay: https://www.youtube.com/watch?v=O8jEYUFOjHE&t=1966s

Viñuela, P. (2012). Consideraciones sobre el cálculo infinitesimal leibniziano y el cálculo de fluxiones newtoniano. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*, 231-241.

Vrancken, S., & Engler, A. (Marzo de 2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico epistemológico. *Unión*(33), 53-70.

Wilson, J. D., & J., B. A. (2003). *Física.* México: Pearson Educación.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Física Universitaria* (Decimosegunda ed., Vol. I). México: Pearson Educación.

ANEXOS

ANEXO 1: ACTIVIDAD N°1

ESTUDIO DE UN SALTO DE CAÍDA LIBRE CON VELOCIDAD SUPERSÓNICA

"El austriaco Felix Baumgartner consiguió realizar este domingo un salto sin precedentes desde el borde del espacio, a una altura de los 39 kilómetros (39.045 metros), durante el cual también logró alcanzar una velocidad máxima de 1.342 kilómetros por hora y romper con la barrera del sonido." (BBC, 2012)

En el año 2012 el famoso paracaidista Felix Baumgartner se convirtió en el primer hombre supersónico sin ningún dispositivo propulsor, sino solamente mediante un salto de caída libre desde el borde del espacio.

PRINCIPALES CUESTIONES A ESTUDIAR

Q_0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?

Ejemplo de cuestiones intermedias que estudiaremos:

Q_1: ¿Qué variables influyen en el descenso de un "salto de caída libre", y de qué modo?

https://www.youtube.com/watch?v=ur40O6nQHsw

https://www.youtube.com/watch?v=qEWCRKxhEZo&t=143s

https://physics.info/falling/

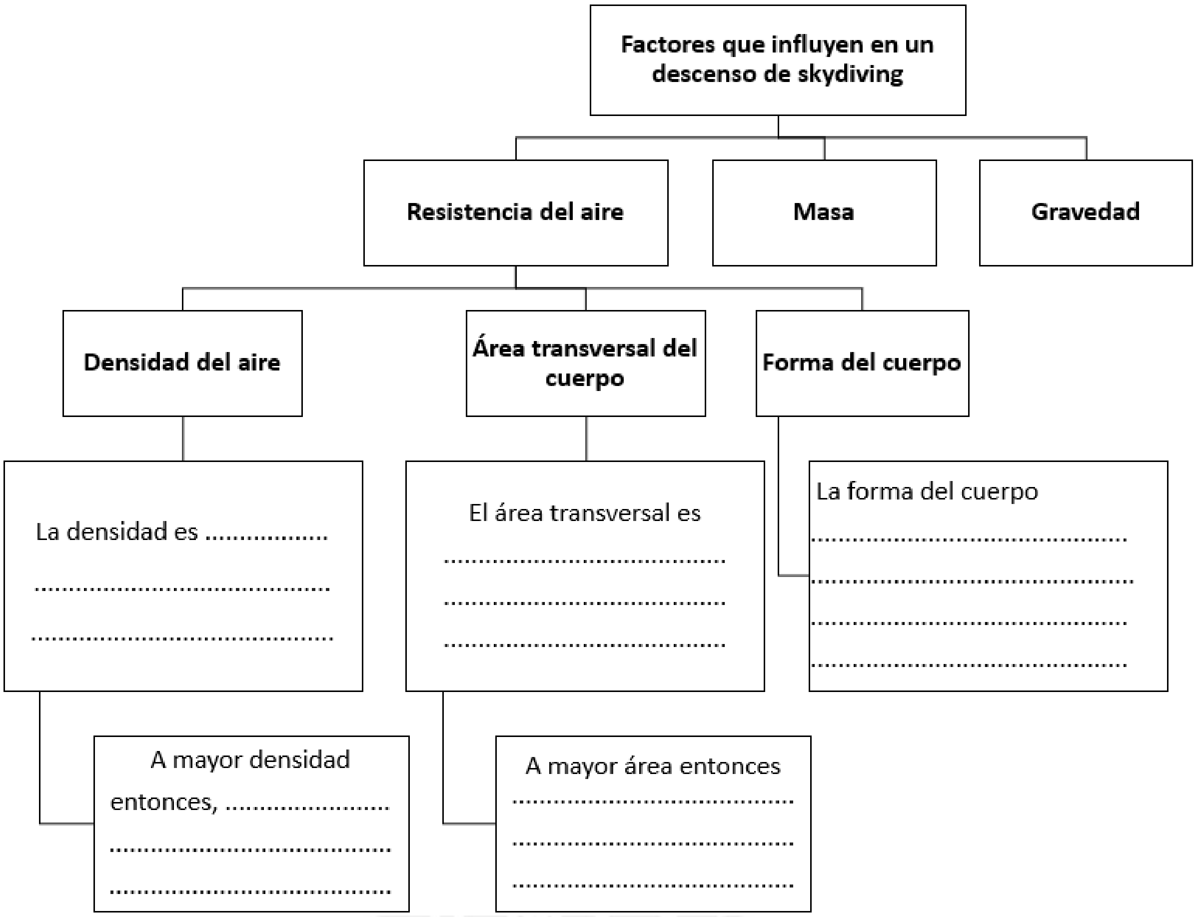
https://www.physicsclassroom.com/class/newtlaws/Lesson-3/Free-Fall-and-Air-Resistance

Otras cuestiones que pueden ser tratadas (a rellenar por cada grupo)

ANEXO 2: FICHA DE TRABAJO

ESQUEMA DE CONCLUSIONES DE LA PRIMERA CUESTIÓN

Q_1: ¿Qué variables influyen en el descenso de un “salto de caída libre”, y de qué modo?
Los principales factores que influyen son:



Otras ideas a tener en cuenta son:

____

____

____

____

ANEXO 3: ACTIVIDAD N°2

ESTUDIO DE UN SALTO DE CAÍDA LIBRE CON VELOCIDAD SUPERSÓNICA

Q0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?

ESTUDIO DE UNA CAÍDA SIN RESISTENCIA DE AIRE

Q3: ¿Cómo y cuánto varía la altura a lo largo del tiempo de caída sin resistencia de aire? ¿Y la velocidad?

A continuación, se muestran en una tabla de valores las alturas experimentadas por Felix Baumgartner durante los **primeros** 15 seg. de caída sin resistencia de aire.

Q3.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner por cada segundo transcurrido? ¿Qué significan estas variaciones?

____

____

____

____

____

Q3.2: ¿Qué velocidades llega a experimentar Felix en esta parte del descenso? ¿Cómo varían estas?

____

____

____

____

____

t (segundos)	**h** (metros)
0	38969.4
1	38964.5
2	38949.8
3	38925.3
4	38890.9
5	38846.8
6	38792.8
7	38729.1
8	38655.5
9	38572.1
10	38478.9
11	38375.9
12	38263.1
13	38140.5
14	38008.0
15	37865.8

Cuestiones que pueden ser tratadas (a rellenar por cada grupo)

____

____

____

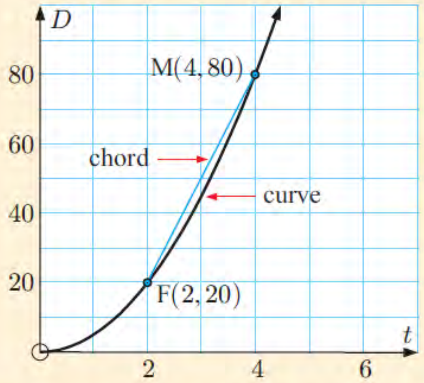
____

ANEXO 5: ACTIVIDAD N°3

INVESTIGATION 2 INSTANTANEOUS SPEED

A ball bearing is dropped from the top of a tall building. The distance it has fallen after t seconds is recorded, and the following graph of distance against time obtained.

We choose a fixed point F on the curve when $t = 2$ seconds. We then choose another point M on the curve, and draw in the line segment or **chord** [FM] between the two points. To start with, we let M be the point when $t = 4$ seconds.



The *average* speed in the time interval $2 \leqslant t \leqslant 4$ is

$$= \frac{\text{distance travelled}}{\text{time taken}}$$

$$= \frac{(80-20)\text{ m}}{(4-2)\text{ s}}$$

$$= \frac{60}{2}\text{ m s}^{-1}$$

$$= 30\text{ m s}^{-1}$$

However, this does not tell us the *instantaneous* speed at any particular time.

In this investigation we will try to measure the speed of the ball at the instant when $t = 2$ seconds.

What to do:

1 Click on the icon to start the demonstration.
F is the point where $t = 2$ seconds, and M is another point on the curve.
To start with, M is at $t = 4$ seconds.
The number in the box marked *gradient* is the gradient of the chord [FM]. This is the *average speed* of the ball bearing in the interval from F to M. For M at $t = 4$ seconds, you should see the average speed is 30 m s^{-1}.

2 Click on M and drag it slowly towards F. Copy and complete the table alongside with the gradient of the chord [FM] for M being the point on the curve at the given varying times t.

t	gradient of [FM]
3	
2.5	
2.1	
2.01	

3 Observe what happens as M reaches F. Explain why this is so.

4 For $t = 2$ seconds, what do you suspect will be the instantaneous speed of the ball bearing?

5 Move M to the origin, and then slide it towards F from the left. Copy and complete the table with the gradient of the chord [FM] for various times t.

t	gradient of [FM]
0	
1.5	
1.9	
1.99	

6 Do your results agree with those in **4**?

ANEXO 5: ACTIVIDAD N°3

ESTUDIO DE UN SALTO DE CAÍDA LIBRE CON VELOCIDAD SUPERSÓNICA

Q0: ¿Cómo habrá sido posible determinar desde qué altura es necesario lanzarse para alcanzar la velocidad del sonido? ¿Cómo varía la velocidad durante el descenso hasta cuando abre el paracaídas?

<u>ESTUDIO DE UNA CAÍDA COIN RESISTENCIA DE AIRE</u>

Q4: ¿Cómo varía la altura y la velocidad que experimenta el paracaidista a lo largo del tiempo de caída con resistencia de aire?

Para abordar Q4, se saben las alturas experimentadas por Felix Baumgartner después de los 12 primeros segundos de caída expresados en dos etapas, una a través de una tabla de valores y la otra a través de una regla de correspondencia:

Tiempo en seg. (t)	Altura (m)
12	38263.1
14	38008.0
16	37713.7
18	37381.3
20	37013.3
22	36609.4
24	36169.5
26	35693.8
28	35182.9
30	34637.9
32	34060.1
34	33451.2
36	32813.7
38	32149.6
40	31462.3
42	30754.9
44	30031.1
46	29295.1
48	28551.3
50	27804.5
52	27060.1
54	26323.6
56	25601.0
58	24898.8
60	24223.6
62	23582.8
64	22982.9

$$\boldsymbol{h(t) = 57972.34899.e^{-0.03563t} - 79.4t + 22136.74136,\ para\ \ t \geq 64}$$

Q4.1: ¿Cuánto varía la altura de Felix Baumgartner con respecto al tiempo? ¿Qué significan estas variaciones?

Q4.2: ¿Es posible predecir la velocidad de Félix en cualquier tiempo? ¿Qué velocidades son éstas y qué tanto varían?

Q4.3: ¿En qué momentos la velocidad varía con mayor rapidez?

Otras cuestiones a estudiar:

____

____

____

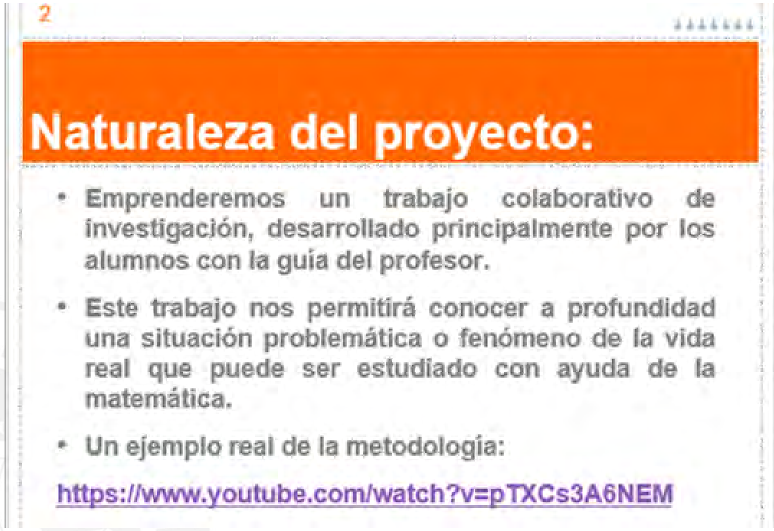
ANEXO 5: CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE TRABAJO COLABORATIVO

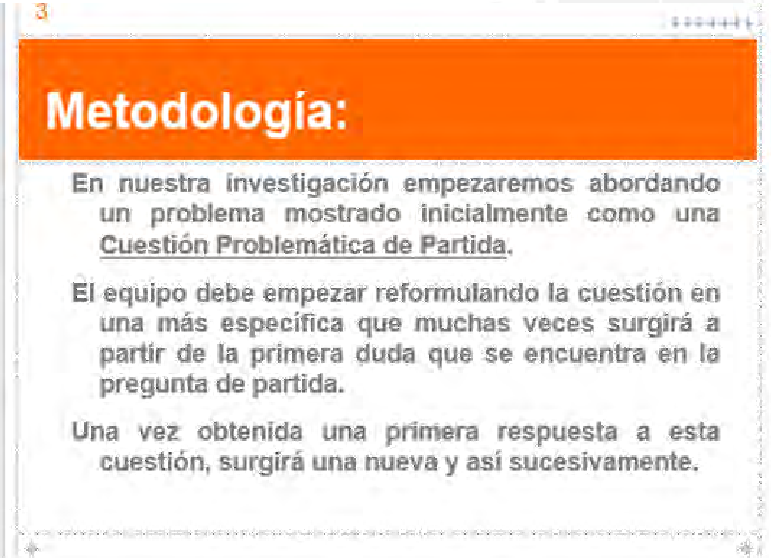
	A) Participación Grupal	B) Responsabilidad Compartida	C) Calidad de la interacción	D) Roles dentro del Grupo	E) Presentación parcial del informe.
1	Sólo una de las personas del equipo ha tomado parte activa y ha ayudado a los demás del equipo.	La responsabilidad recae en una sola persona.	Muy poca interacción: conversación muy breve, algunos estudiantes están distraídos o desinteresados.	No hay ningún esfuerzo de asignar roles a los miembros del grupo.	Al borrador le falta información requerida y es difícil de leer.
2	Al menos la mitad de los estudiantes presentan ideas propias y ayudan a los demás del equipo.	La responsabilidad es compartida por la mitad de los integrantes del grupo.	Alguna habilidad para interactuar, se escucha con atención, alguna evidencia de discusión o planteamiento de alternativas.	Hay roles asignados a los estudiantes, pero no se adhieren consistentemente a ellos.	El borrador incluye la mayoría de la información requerida y es legible.
3	Casi todos los estudiantes han participado activamente haciendo propuestas de trabajo y ayudando a los demás.	La mayor parte de los miembros del grupo comparten la responsabilidad en la tarea.	Los estudiantes muestran estar versados en la interacción, se conducen animadas discusiones centradas en la tarea.	Cada estudiante tiene un rol asignado, pero no está claramente definido o no es consistente.	El borrador incluye toda la información requerida y es legible.
4	Todos los estudiantes participan activamente haciendo propuestas de trabajo y ayudando a los demás.	Todos comparten por igual la responsabilidad sobre la tarea	Habilidades de liderazgo y saber escuchar, conciencia de los puntos de vista y opiniones de los demás.	Cada estudiante tiene un rol definido, desempeño efectivo de roles.	Un borrador detallado es presentado ordenadamente e incluye toda la información requerida.

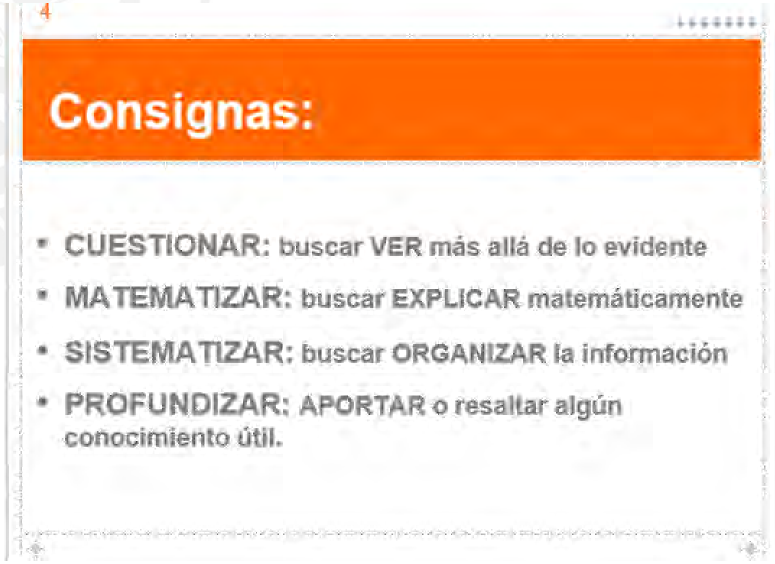
ANEXO 6: CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL PORTAFOLIO

	A) Preguntas Investigativas	B) Organizadores Gráficos y Presentación de Información	C) Calidad y cantidad de fuentes	D) Responsabilidad Compartida	E) Contenido
1	Los investigadores identifican, con bastante ayuda de un adulto, 4 ideas/preguntas razonables a seguir cuando hacen la investigación.	El organizador gráfico o esquema no ha sido usado. Los datos no son demostrados o no son precisos.	Los investigadores, con bastante ayuda de un adulto, identifican por lo menos 2 fuentes confiables de información para cada una de sus ideas o preguntas.	La responsabilidad recae en una sola persona.	Los alumnos no parecen entender muy bien el tema. Solo uno puede responder preguntas sobre el tema.
2	Los investigadores identifican, por lo menos 6 ideas/preguntas razonables a seguir cuando hacen la investigación.	El organizador gráfico o esquema incluye algunos temas y subtemas. Las tablas y/o gráficas presentan los datos claramente.	Los investigadores, identifican por lo menos 3 fuentes confiables de información para cada una de sus ideas o preguntas.	La responsabilidad es compartida por la mitad de los integrantes del grupo.	Demuestran un buen entendimiento de partes del tema. La mitad del grupo puede responder preguntas sobre el tema.
3	Los investigadores identifican por lo menos 8 ideas/preguntas razonables a seguir cuando hacen la investigación.	El organizador gráfico o esquema está completo y muestra relaciones claras y lógicas entre la mayoría de los temas y subtemas. Las tablas y/o gráficas presentan los datos claramente y están etiquetadas y tituladas.	Los investigadores identifican por lo menos 4 fuentes confiables de información para cada una de sus ideas o preguntas.	La mayor parte de los miembros del grupo comparten la responsabilidad en la tarea.	Demuestra un buen entendimiento del tema. La mayoría puede responder preguntas sobre el tema.
4	Los investigadores identifican por lo menos 10 ideas/preguntas razonables a seguir cuando hacen la investigación.	El organizador gráfico o esquema está completo y muestra relaciones claras y lógicas entre todos los temas y subtemas. Las tablas y/o gráficas presentan los datos, sus procedimientos, y están etiquetadas y tituladas.	Los investigadores identifican por lo menos 5 fuentes confiables e interesantes de información para cada una de sus ideas o preguntas.	Todos comparten por igual la responsabilidad sobre la tarea	Demuestra un completo entendimiento del tema. Todos pueden responder preguntas sobre el tema.

ANEXO 7: DIAPOSITIVAS DE LA PRESENTACIÓN DE LA CUESTIÓN GENERATRIZ







5

Medios para la investigación:

- El equipo de 5 integrantes y el profesor
- Uso de internet:
  - 2 laptops con wifi
- Un texto de Física
- Un paper de Física
- Un diccionario

6

Elaboración de Informe

El informe grupal debe contener los siguientes elementos:

1. Registro de las cuestiones estudiadas
2. Herramientas o estrategias construidas
3. Respuestas proporcionadas a las cuestiones
4. Cuestiones nuevas o que hayan quedado pendientes.

8

GRANDES HAZAÑAS DEL SKYDIVING: UN HOMBRE SUPERSÓNICO.

"El austriaco Felix Baumgartner consiguió realizar este domingo un salto sin precedentes desde el borde del espacio, a una altura de los 39 kilómetros (39.045 metros), durante el cual también logró alcanzar una velocidad máxima de 1.342 kilómetros por hora y romper con la barrera del sonido."

(BBC, 2012)

- En el año 2012 el famoso paracaidista Felix Baumgartner se convirtió en el primer hombre supersónico sin ningún dispositivo propulsor, sino solamente mediante un salto de caída libre desde el borde del espacio.

ANEXO 8: DATOS DE LA VELOCIDAD EXPERIMENTADA POR FELIX BAUMGARTNER