

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**



**Desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria.**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR EL GRADO DE BACHILLERA EN EDUCACIÓN**

**AUTOR:**

**GRECIA MARICIELO BÁRRAGA PINARES**

**ASESOR:**

**LUCRECIA ELIZABETH CHUMPITAZ CAMPOS**

Noviembre, 2018

## RESUMEN

Esta investigación responde al interés de plantear elementos didácticos que contribuyan al aprendizaje significativo de las matemáticas en la educación primaria. De manera especial, aborda el pensamiento relacional como una actividad inherente y fundamental para el logro del pensamiento algebraico en la educación primaria. En este sentido, plantea a modo de herramientas para el maestro, tres elementos didácticos para elaborar actividades que favorezcan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria. Los elementos y objetivos propuestos de la investigación responden al early-algebra como enfoque didáctico del álgebra en la educación primaria. Asimismo, los elementos que se plantean son fruto del análisis de propuestas de cambio curricular e investigaciones longitudinales realizadas con niños de tercer grado de educación primaria para favorecer el desarrollo del pensamiento relacional. Como resultado de la investigación se concluye que los niveles de desarrollo del pensamiento relacional de los niños, los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional y los espacios de verbalización del pensamiento relacional son criterios relevantes para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en los estudiantes.

**Palabras clave:** pensamiento relacional, pensamiento algebraico, early-algebra, educación primaria.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi asesora, la Prof. Lucrecia Chumpitaz por su tiempo y dedicación que han sido vitales para la realización de esta investigación.

Al Prof. Uldarico Malaspina por enseñarme el bello mundo de las matemáticas. Por sus sugerencias y aportes en esta investigación. Por ser ejemplo de perseverancia, y compromiso.

A mis queridas hermanas Misioneras Identes, por hacer en grande los pequeños detalles de cada día. Por motivarme siempre a dar lo mejor de mí.

A mis padres, por su sacrificio, esfuerzo, amor y entrega; por darme sin límites lo mejor.

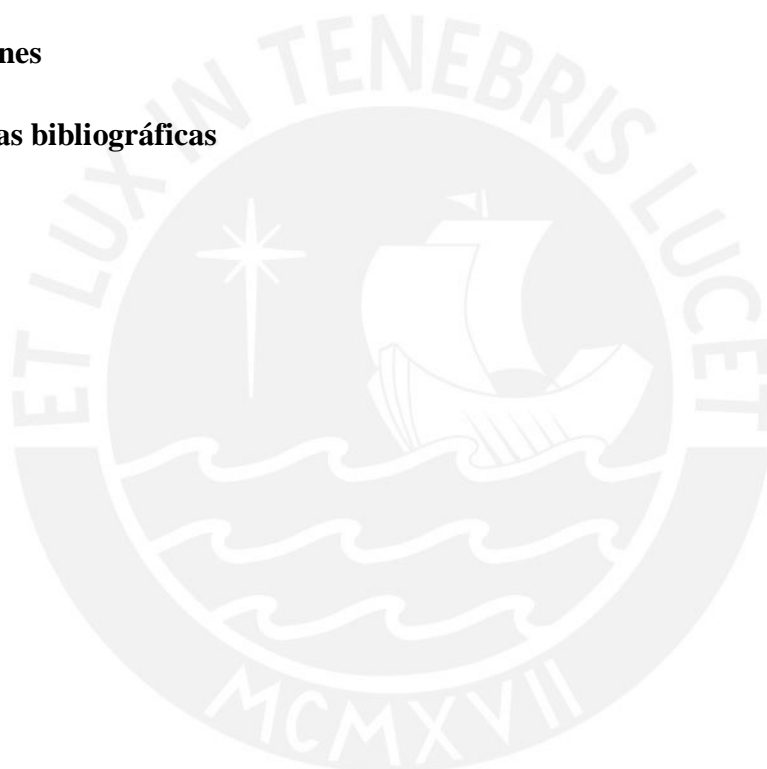
A mis amigos, por permitirme crecer como maestra e investigadora a lado de ellos.

Al Padre Celestial, por darme la vocación de la enseñanza.

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1: PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN ESCOLAR</b>	07
1.1 Enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria	08
1.1.1 Pre-álgebra	10
1.1.2 Early-algebra	11
1.2 Niveles de algebrización	12
1.3 Desarrollo del pensamiento relacional en la educación primaria	15
1.3.1 Definición del pensamiento relacional	16
1.3.2 Características del pensamiento relacional	17
<b>CAPÍTULO 2: Elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria</b>	20
2.1 Desarrollo del pensamiento relacional en equivalencias numéricas	20
2.1.1 Equivalencias numéricas y el signo igual	21
2.1.2 Tipos de igualdades	21
2.1.3 Propiedades de adición y sustracción asociadas a las equivalencias numéricas	23
2.2 Elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional	25
2.2.1 Niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria	26

2.2.2 Tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional	28
2.2.3 Espacios de verbalización del pensamiento relacional	30
2.3 Elementos contextuales del desarrollo del pensamiento relacional en niños de educación primaria	33
2.3.1 Las emociones y el juego en el aprendizaje de las matemáticas en niños de educación primaria	33
<b>Conclusiones</b>	37
<b>Referencias bibliográficas</b>	38



## Introducción

Uno de los temas de investigación recurrentes en el campo de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo del pensamiento algebraico. En los últimos 30 años, debido a las dificultades de transición que tienen los estudiantes de la aritmética (primaria) al álgebra (secundaria), diversas investigaciones tratan de encontrar y plantear propuestas asociadas a la didáctica del álgebra en la educación primaria. En este contexto surgen los enfoques didácticos: pre-álgebra y early-algebra; ambos enfoques, desde diferentes planteamientos, pretenden mejorar la transición entre la aritmética y el álgebra, procurando integrar aspectos del enfoque estructural frente al enfoque operacional dominante.

Esta investigación está alineada al enfoque early-algebra, porque propone el desarrollo del pensamiento algebraico a lo largo de toda la educación primaria, y no solo de los últimos años como es en el caso del enfoque pre-álgebra. De manera especial, este trabajo pretende dar a conocer el desarrollo del *pensamiento relacional* en la educación primaria como una actividad intelectual inherente y fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico, y, por tanto; beneficiosa para la transición de la aritmética al álgebra.

Para lograr este objetivo, la investigación, de carácter documental, está organizada en dos capítulos. En el primer capítulo contextualizamos el desarrollo del álgebra y el pensamiento relacional en la educación primaria. Primero abordamos los enfoques didácticos del álgebra: el pre-álgebra y el early-algebra. Luego, los grados o niveles de pensamiento algebraico, y finalmente, el desarrollo del pensamiento relacional a la luz del enfoque early-algebra.

En el segundo capítulo, proponemos elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de primaria. Para tal fin; primero, describimos el desarrollo del pensamiento relacional en equivalencias numéricas a través de ejercicios que favorecen esta habilidad mental. A partir de este análisis proponemos los niveles de desarrollo del pensamiento relacional de los niños, los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional y los espacios de verbalización como elementos didácticos relevantes para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de primaria.

Finalmente, presentamos las conclusiones más relevantes de esta investigación, las cuales sostienen que el desarrollo del pensamiento relacional es una pieza importante e inherente en el desarrollo del pensamiento algebraico. Asimismo, concluimos con tres elementos didácticos relevantes para la construcción de actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento relacional. Dichos elementos son los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en los niños, los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional y los espacios de verbalización del pensamiento relacional.



## CAPÍTULO 1: Pensamiento algebraico en la educación escolar

El aprendizaje del álgebra supone desarrollar el pensamiento algebraico. Este se define como la capacidad para “[...] representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas.” (Godino y Wilhelmi, 2014, p.202). El desarrollo de esta habilidad de pensamiento, a lo largo de la historia de la enseñanza de las matemáticas, ha sido el quehacer de la educación secundaria; mientras que el pensamiento numérico en la educación primaria, a través de la aritmética.

Dicha organización curricular, aritmética en primaria y álgebra en secundaria, implica hablar de procesos de transición de ambas áreas. Realidad que para muchos estudiantes termina siendo un reto, pasar de un pensamiento centrado por varios años en realizar cálculos empleando números concretos a orientarse a un pensamiento cimentado en las relaciones. (Fernández, 2015). Así lo afirman Ramírez y Rodríguez (2011):

La enseñanza tradicional tiende a separar la Aritmética del Álgebra. El aprendizaje de la Aritmética se basa en la fluidez de cálculo sin preocuparse de que los alumnos capten las propiedades y relaciones de los números y de las operaciones. Se da por hecho que las adquieren de forma inductiva con la práctica masiva de operaciones aritméticas. (p.42).

En este sentido, Castro y Molina (2007) afirman que uno de los temas de preocupación para la educación matemática es atender y mejorar el proceso de transición de la aritmética al álgebra, de la primaria a la educación secundaria. Ante este panorama surgen enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria: El pre-álgebra y el Early-algebra o también llamado álgebra temprana.

Considerando lo expuesto, este capítulo tiene como objetivo presentar el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria, de forma específica describir una habilidad mental básica para su logro, denominada *pensamiento relacional*. Para tal fin, primero describimos los enfoques de enseñanza del álgebra en la educación primaria. Luego, presentamos los niveles de algebrización, y finalmente,



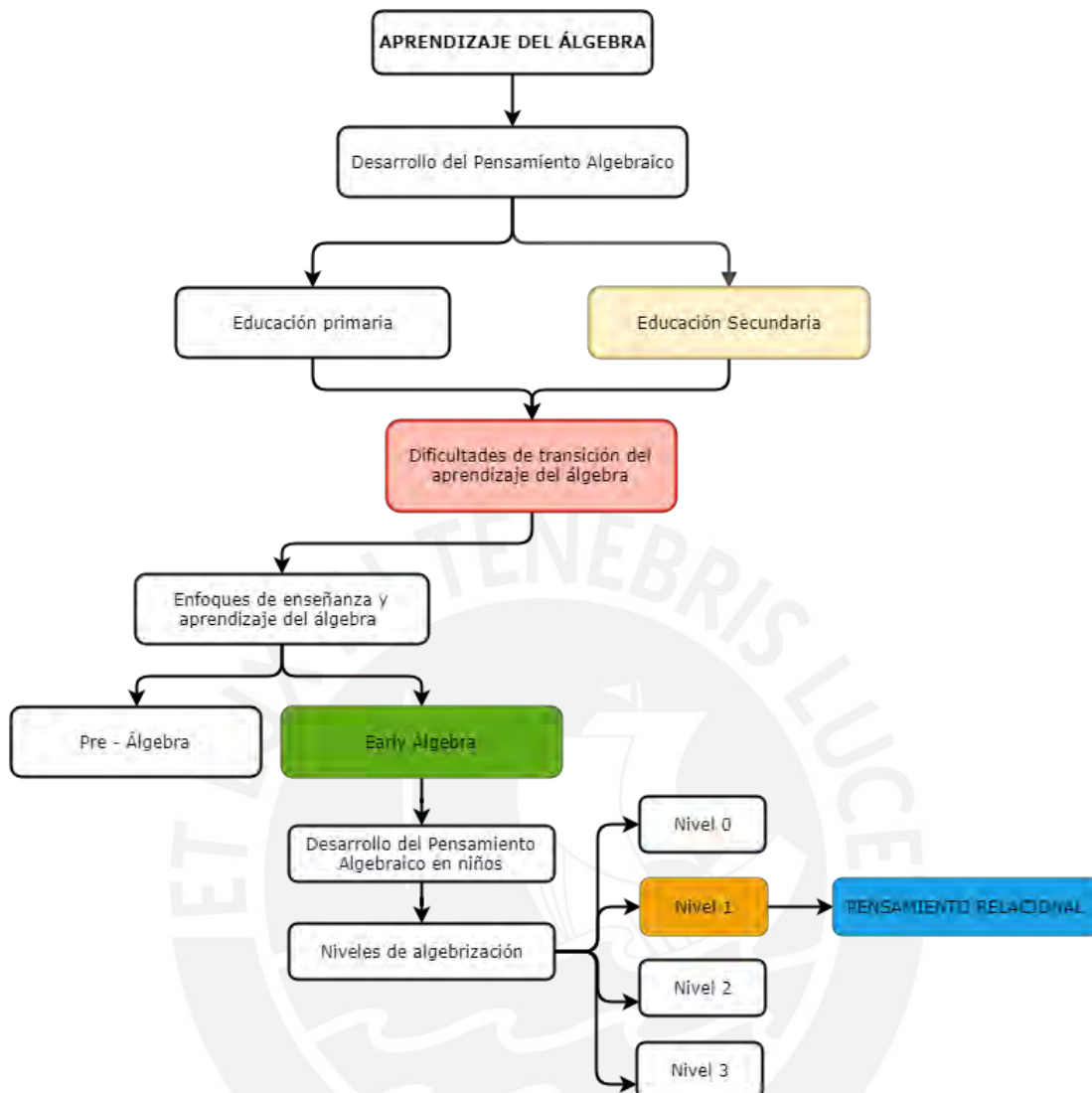
abordamos el pensamiento relacional como una habilidad básica y fundamental en el Nivel 1 de algebrización.

### 1.1 Enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria

Como se ha expuesto, los enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria surgen ante la necesidad de facilitar su transición a la educación secundaria. La diferencia principal entre ambos enfoques, el pre - álgebra y el early- álgebra, se debe a la postura que asumen en cuanto al grado de aprendizaje que poseen los niños para desarrollar el pensamiento algebraico. Para facilitar la comprensión de estos enfoques es pertinente recapitular brevemente los conceptos de aritmética y álgebra que se asumen en esta investigación.

Según Gómez (citado por Molina, 2006) “La aritmética es definida como el estudio de los sistemas numéricos junto con sus relaciones mutuas y sus reglas” (p. 31). En el ámbito escolar, Fernández (2015) señala que frecuentemente se asocia a esta rama de las matemáticas con “[...] procedimientos sin enfatizar las operaciones y sus propiedades.” (p.15). Por otro lado, se entiende al álgebra como “[...] una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos.” (Molina, 2006, p.31).

Considerando ambos conceptos describimos las características principales de los enfoques de enseñanza del álgebra en la educación primaria: el Pre-álgebra y el Early-álgebra. Para facilitar la comprensión se presenta el siguiente gráfico.



Elaboración propia.

Como se observa en el gráfico el aprendizaje del álgebra implica el desarrollo del pensamiento algebraico. A lo largo de la historia de la didáctica de las matemáticas el álgebra ha sido quehacer de la educación secundaria; sin embargo, esta forma de organización ha traído consigo dificultades de transición del aprendizaje del álgebra; en este contexto, surgen los enfoques de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Esta investigación se alinea al enfoque Early-algebra, en el cual podemos observar los cuatro niveles de algebrización propuesto por Aké (2017), a partir de los cuales se identifica el grado de algebrización con el que se desarrolla una actividad matemática. Asimismo, en estos niveles surge el término de interés de nuestra investigación: el Pensamiento Relacional; el cual se desarrolla a partir del Nivel 1 de algebrización.

### 1.1.1 Pre-álgebra

Entre los años 80 y 90 investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en niños, señalan que las limitaciones cognitivas frecuentes que cometen los estudiantes de primaria, se manifiestan en dificultades y errores, tales como:

[...] limitada interpretación del signo igual en Aritmética, las concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema, la no aceptación de la falta de clausura o la operatividad con las incógnitas [...]. (Socas, 2011, p.13)

Ante este panorama, en la década de los ochenta investigadores como Davis (1985) y Vergnaud (1988) empiezan a recomendar la posibilidad de iniciar la enseñanza del álgebra desde los dos últimos años de la educación primaria. Dicha enseñanza se denomina pre-álgebra y se fundamenta en el desarrollo de ejercicios de tipo resolución de ecuaciones, aproximaciones, identificación de patrones, etc; y el empleo de recursos tecnológicos para desarrollar contenidos algebraicos en primaria.

El enfoque pre-álgebra responde a dos características principales: el trabajo con simbolismo algebraico, y la identificación del desarrollo formal como nivel de desarrollo cognitivo necesario para el aprendizaje del álgebra (Socas, 2011). Por tanto, este enfoque afirma que los estudiantes de educación primaria no se encuentran en el estadio requerido para el trabajo algebraico. Sin embargo, investigaciones realizadas por Carpenter, Madison, Loef y Koehler (2005), Molina (2006), Molina (2009), Fernández (2016), Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), entre otras, demuestran que los niños pueden desarrollar habilidades mentales que favorecen la comprensión progresiva del álgebra, como: el pensamiento relacional, la construcción e identificación de patrones, el trabajo con propiedades numéricas y correspondencia, entre otros. Por lo expuesto, esta investigación se alinea a un enfoque que se oriente por el desarrollo de dichas habilidades mentales en los niños como es el caso del early-algebra.

### 1.1.2 Early-algebra

El early-algebra es una propuesta que a diferencia del pre-álgebra se orienta por “[...] un cambio curricular que implique la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura, sino como una orientación que fomente el modo algebraico de pensar y de actuar [...]” (Molina, 2007, p.65). Es así que nos encontramos ante un enfoque que plantea desarrollar, de forma simultánea, el pensamiento numérico y el algebraico desde los primeros años de la educación primaria.

Entre sus características principales, este enfoque fomenta la capacidad de “[...] representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas”. (Godino et, al, 2014, p. 202). Para tal fin, Godino et, al. (2014) señala tres constructos a ser abordados: el desarrollo de un pensamiento relacional, transformar expresiones numéricas, y desarrollar conocimientos de objetos, operaciones y propiedades matemáticas.

El desarrollo del pensamiento relacional implica la habilidad de establecer relaciones numéricas a partir de la comprensión relacional del signo igual. La transformación de expresiones matemáticas se refiere a que los niños exploren otros caminos además del cálculo, para resolver una tarea matemática. El desarrollo de conocimientos de objetos, operaciones y propiedades matemáticas es entorno a números y variables como objetos matemáticos; aplicación de propiedades numéricas como la distributiva y conmutativa en el desarrollo de operaciones, y la aplicación de las propiedades transitivas y de igualdad para el caso de propiedades matemáticas.

Los resultados favorables de investigaciones longitudinales de aplicación del early-algebra, han propiciado que se adopte este enfoque como lineamiento educativo. Tal es el caso del Consejo de Maestros de Matemáticas de Estados Unidos (NTCM, 2000), quienes manifiestan lo siguiente:

[...]viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los profesores pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia

como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior. (Castro y Molina, 2007, p. 70)

Asimismo, como se mencionó en los párrafos previos ponen en evidencia que los niños “[...] poseen ciertas capacidades para comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos en el desarrollo de ciertas actividades algebraicas.” (Socas, 2011, p. 15). Es decir, a diferencia del enfoque pre-álgebra; el early-algebra asume que los niños sí presentan capacidades que les permite aprender nociones algebraicas fundamentales. (Socas, 2014). En este sentido, retomando el planteamiento de Godino (2014) sobre el pensamiento relacional como constructo del pensamiento algebraico, se puede afirmar que este último implica el desarrollo del pensamiento relacional.

A modo de conclusión, en este apartado hemos desarrollado las dificultades de transición de la aritmética al álgebra, han dado lugar a enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria con el objetivo de facilitar dicha transición. Por un lado, el pre-álgebra plantea el trabajo de tareas asociadas al álgebra en los dos últimos años de la educación primaria. Asimismo, sostienen que el estadio cognitivo necesario para desarrollar el pensamiento algebraico es el formal; razón por la cual, según este enfoque, los niños no pueden desarrollar dicha habilidad mental.

Por otro lado, el early-algebra aborda el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la educación primaria. Este enfoque sostiene que los niños poseen habilidades que les permiten acceder a las estructuras básicas del pensamiento algebraico como el pensamiento relacional, la construcción e identificación de patrones, el trabajo con propiedades numéricas y correspondencia, entre otros. Además, se enfoca en plantear tareas matemáticas que faciliten su desarrollo, y de esta forma a largo plazo, favorece la transición de la aritmética al álgebra y su aprendizaje en la educación secundaria.

## 1.2 Niveles de algebrización

Como se ha descrito en el apartado previo, los niños poseen habilidades para desarrollar estructuras básicas del pensamiento algebraico. En este sentido, los niveles

de algebrización nos permiten identificar el grado de pensamiento algebraico que un niño aplica cuando resuelve una tarea matemática.

Al respecto, Aké (2017) señala que “el razonamiento algebraico conlleva prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización que están definidos en función de objetos de índole algebraicos” (p.3). Los objetos algebraicos hacen referencia a conceptos y a las propiedades que se aplican al desarrollar determinadas tareas matemáticas; y a los procedimientos y argumentos que se emplean para resolverlos.

En esta investigación consideramos el modelo de niveles de algebrización propuesto por Aké (2017). Este modelo se basa en investigaciones sobre la inclusión del álgebra en la educación primaria, y la propuesta del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), donde se categoriza la práctica algebraica en 4 niveles. Cada nivel responde a tres herramientas de análisis: aspecto estructural, aspecto funcional y lenguaje. A continuación, se presenta un cuadro comparativo de cada nivel según la herramienta de análisis.

Tabla N° 1: Niveles de Algebrización

<i>Nivel de práctica algebraica</i>				
<i>Herramienta de Análisis</i>	<b>Nivel 0</b>	<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>	<b>Nivel 3</b>
<b>Características generales</b>	Ausencia de razonamiento algebraico.	de Acercamiento incipiente a formas de razonamiento proto-algebraico.	Primer acercamiento de intermedio a las formas de razonamiento proto-algebraico.	Formas consolidadas de razonamiento algebraico.

<b>Aspecto estructural</b>	No se reconocen propiedades y se utiliza al signo igual como un operador.	Se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones. Reconoce el significado relacional del signo igual. Surge el concepto de equivalencia numérica.	Se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones. Se utiliza el significado relacional del signo igual. Surge el concepto de equivalencia numérica.	Introducción de elementos simbólicos o alfanuméricos.
<b>Aspecto funcional</b>	Se expresa una regla recursiva.	Se expresa una regla recursiva.	Se expresa una regla general.	Se emplea el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones.
<b>Lenguaje</b>	Puede ser de índole numérica, icónica, verbal. Los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.	Puede ser de índole numérica, icónica, verbal. Los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.	Suele ser de índole numérica, icónica, verbal. Se comienza a familiarizarse a los niños con el uso de símbolos. Los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita.	

Tomado y adaptado de Aké (2017)

Del cuadro comparativo podemos extraer que en cuanto al *aspecto estructural* la diferencia entre el Nivel 0 y 1 radica en el surgimiento del concepto de equivalencia. Ello supone considerar al signo igual desde su significado relacional, e identificar las propiedades de las operaciones numéricas. En cuanto al *aspecto funcional*, se observa que el mayor cambio que se da es en el nivel 3, ya que en los niveles previos este aspecto expresa la regla recursiva.

Finalmente, el *lenguaje* en los niveles 0 y 1 se manifiesta la índole numérica, icónica y verbal; y los procedimientos que se siguen no indican el uso de una incógnita. Esto empieza a cambiar a partir del nivel 2, donde se inicia a familiarizar a los estudiantes en el uso de símbolos para que posteriormente, en el nivel 3, se introduzcan dichos elementos de forma simbólica o alfanumérica.

Es en este contexto que surge el término de principal interés de esta investigación: el *pensamiento relacional*. Esta habilidad mental, en líneas generales, implica analizar y establecer relaciones entre objetos matemáticos a partir de la comprensión del signo igual desde su significado relacional. Dicha característica, como se ha descrito, surge en el Nivel 1 del pensamiento algebraico, junto con la noción de equivalencia numérica, y responde al aspecto estructural del pensamiento algebraico.

### 1.3 Desarrollo del pensamiento relacional en la educación primaria

Como hemos expuesto, el interés por facilitar los procesos de transición de la aritmética al álgebra ha llevado a plantear enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria. El desarrollo del pensamiento relacional responde al enfoque *early-algebra*, y en las últimas décadas ha cobrado importancia en la didáctica de las matemáticas.

En este apartado definimos el pensamiento relacional y presentamos sus características principales en el marco del desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria.



### 1.3.1 Definición del pensamiento relacional

Semánticamente el término pensamiento relacional, también llamado pensamiento centrado en relaciones (Castro y Molina, 2007) está asociado a las palabras: *pensar/ pensamiento y relacional*. Pensar, del latín *pensare*, es la acción de “Reflexionar, examinar con cuidado una cosa para formar un dictamen.” (RAE, 1970). Desde el ámbito de la psicología cognitiva, se dice que es el resultado de la activación de un esquema mental fruto de la interacción con un objeto nuevo. Dicha interacción modifica el esquema inicial, para así incluir una nueva forma de interactuar con el nuevo objeto. (Melgar, 2000). En esta línea, Castro (2008) señala que es:

[...] toda actividad y creación de la mente, todo aquello creado a través del intelecto. Es un proceso psicológico muy ligado al lenguaje. El acto de pensar es interno al sujeto y queda bajo su voluntad exteriorizarlo o no, es decir realizar alguna actuación que ponga de manifiesto tal pensamiento. (p. 23).

Del planteamiento de Castro (2008) se extrae que para que este proceso cognitivo se evidencie, requiere de intencionalidad y una actuación concreta.

En cuanto a la palabra relacional, es un adjetivo que significa “Perteneiente o relativo a la relación (correspondencia de algo con otra cosa).” (RAE, 2018). En investigaciones realizadas en el campo de las matemáticas se ha definido a este término como “Conexión, correspondencia o situación que se da de una cosa con otra o de una cosa consigo misma, en definitiva, entre un par ordenado, ya sea en la realidad o en la mente.” (Molina, 2006, p.61). En este trabajo se toma en cuenta esta última definición.

De lo expuesto se concluye que Pensamiento Relacional es aquella actividad intelectual, en la que se analizan objetos, en este caso matemáticos, con el objetivo de determinar las relaciones que existen entre ellos, y emplearlas para lograr un determinado objetivo o meta. (Molina, 2006).

Por último, es necesario aclarar que esta investigación de carácter bibliográfica no categoriza tipos de pensamiento como procesos aislados entre sí. Sino que, por motivos de su estudio y facilidad de análisis aborda un proceso cognitivo asociado a la capacidad de construcción de ideas, en este caso matemáticas, a partir de las relaciones que se identifican o establecen.

### 1.3.2 Características del pensamiento relacional

Investigaciones asociadas al desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela elemental, identifican que el pensamiento relacional está asociado a la comprensión de las equivalencias numéricas. En este sentido, se dice que un niño piensa relacionamente cuando puede resolver una igualdad numérica a partir de comparaciones que hace entre las expresiones o números que se presentan de lado derecho e izquierdo del signo igual. (Molina, Castro y Ambrose, 2006).

Por ejemplo, si se le plantea la siguiente expresión:  $9 + ? = 8 + 7$ , el uso del pensamiento relacional se evidencia cuando el proceso para llegar al resultado tiene la siguiente forma.

Tabla N° 2: Respuesta de  $9 + ? = 8 + 7$  empleando Pensamiento Relacional

Problema	Respuesta
$9 + ? = 8 + 7$	Como 9 es una unidad mayor a 8, el número que falta (?) tendrá que ser una unidad menor a 7. Es decir la respuesta es 6.

Tomado y adaptado de Fernández (2016)

De esto se extrae que el pensamiento relacional se caracteriza por la comprensión íntegra de expresiones de igualdad. Todo lo que está del lado derecho de la igualdad equivale a todo lo que está del lado izquierdo de la igualdad. Asimismo, otra característica es el empleo de propiedades para resolver las expresiones matemáticas. Así lo afirma Fernández (2015) “El pensamiento relacional implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad, y utilizar las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas para relacionar o transformar las expresiones aritméticas.” (p. 14).

Por otro lado, Epsón, Levi y Kieran citados por Fernández (2015) señalan que los errores que presentan los alumnos en el desarrollo del pensamiento algebraico, debido a la falta de desarrollo del pensamiento relacional suelen ser:

- Rechazo a la falta de clausura; esto quiere decir que los niños no aceptan expresiones matemáticas cerradas. Por ejemplo: Se tiene la expresión  $12x + 3$  como resultado de una operación o como expresión en sí. Los estudiantes suelen simplificarlas de esta forma  $12x + 3 = 15x$ . Evidenciando a su vez errores en la simplificación.
- Dificultad para determinar situaciones de simplificación. Como se observa en el ejemplo previo, los estudiantes tienden a obtener una sola expresión como resultado, evitando que los signos operacionales se mantengan. Un ejemplo para ilustrar esta dificultad es simplificar expresiones como  $a + 2a + 5a \times 2$ , a la forma  $8a \times 2$ .
- Dificultad para aplicar propiedades, estas pueden ser en el caso de propiedades distributivas, asociativas y conmutativas. Por ejemplo: en el caso de la propiedad distributiva concluyen que  $2(3x + 2y) = 6x + 2y$ . Frente a la respuesta correcta que tendría la siguiente forma  $2(3x + 2y) = 6x + 4y$ . Los errores en la propiedad asociativa y conmutativo determinan que  $3x - (6y - 2x) = x - 6y$ . Frente a la respuesta correcta que tendría la siguiente forma  $3x - (6y - 2x) = 5x - 6y$

En este sentido, el pensamiento relacional favorece el aprendizaje de las propiedades numéricas ya que permite que los estudiantes tengan un panorama completo de las situaciones de igualdad, pues este tipo de pensamiento se orienta a desarrollar la noción de equivalencia a partir de la comprensión relacional del signo igual.

A manera de cierre retomamos los puntos presentados en este apartado: la definición del término pensamiento relacional, desde sus acepciones semánticas y sus características asociadas al trabajo algebraico, las cuales son la comprensión total de las expresiones matemáticas y el uso de propiedades para resolverlas. Finalmente, abordamos las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra debido a la falta de desarrollo del pensamiento relacional.

En conclusión, en este capítulo hemos descrito el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación escolar. En primer lugar, explicamos cómo las dificultades

de transición dieron lugar a los enfoques didácticos del álgebra en la educación primaria: el pre-álgebra y el early-algebra.

En segundo lugar, hemos abordado los niveles de algebrización que se emplean para la realización de una tarea matemática a partir del modelo de niveles de algebrización propuesto por Aké (2017). Finalmente, se ha desarrollado el pensamiento relacional como término de principal interés en esta investigación y su presencia en los niveles de algebrización. En este sentido, hemos definido nuestra postura de investigación, la cual se contextualiza en el enfoque early-algebra, y asume al pensamiento relacional como un constructo del pensamiento algebraico.



## **CAPÍTULO 2: Elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria.**

Considerando que “[...]las tareas matemáticas en la escuela primaria están orientadas generalmente hacia la aritmética y el cálculo.” (Aké, 2017, p.2), prevaleciendo un enfoque operacional del aprendizaje de las matemáticas. Resulta relevante identificar que elementos favorecen el desarrollo del pensamiento relacional, ya que este responde a un enfoque que integra aspectos estructurales y cognitivos con el fin de favorecer el aprendizaje de las matemáticas, y de forma específica el pensamiento algebraico.

En este sentido, este capítulo tiene como objetivo describir tres elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria. Estas actividades se ubican el Nivel 1 de Algebrización; es decir en los inicios del desarrollo proto-algebraico.

Para tal fin, en primer lugar, se exponen las equivalencias como situaciones numéricas idóneas para el desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de primaria. En segundo lugar, se describen elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional. Finalmente, se abordan dos elementos contextuales que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

### 2.1 Desarrollo del pensamiento relacional en equivalencias numéricas

Diversas investigaciones realizadas en torno al pensamiento relacional como Ramírez y Rodríguez (2011); Levi, Franke y Koehler (2005); Castro y Molina (2009); Fernández (2016); Molina (2006), entre otros; optan por el trabajo con equivalencias numéricas para desarrollar el pensamiento relacional.

La razón se debe, como se ha descrito anteriormente, a que el pensamiento relacional incluye y favorece la noción del signo igual como equivalencia numérica. Al respecto Fernández (2015) explica que “El pensamiento relacional implica tener una visión relacional del signo igual (lo que implica comprenderlo como un signo que indica un equilibrio entre la parte derecha e izquierda) y centrarse en las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales” (p.16).

En este apartado se describe a las equivalencias como situaciones numéricas que favorecen la construcción de un contexto matemático para el desarrollo del pensamiento relacional. Asimismo, se describen términos asociados a este como el signo igual, tipos de igualdades y las propiedades de adición y sustracción empleadas en dichas situaciones.

### 2.1.1 Equivalencias numéricas y el signo igual

El término equivalencia numérica es un significado del signo igual. “Este significado es denominado, en ocasiones, significado relacional del signo igual.” (Molina, 2006, p.150). En cuanto al signo igual, Ramírez y Rodríguez (2011) sostienen la importancia de establecer un significado completo de este término, de tal forma que permita la comprensión bidireccional. Dicho de otra manera, “que se pueda leer tanto de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.” (p.44). De esta manera se favorece la comprensión relacional del signo igual.

La importancia de la comprensión del signo igual, se debe a que este influye en el aprendizaje de la aritmética y el álgebra. Así pues, Ramírez y Rodríguez (2011) señalan que una de las causas por las que los estudiantes llegan a una mala comprensión del signo igual es el contexto de las operaciones. Se entiende por contexto el tipo de situaciones numéricas, ejercicios numéricos o el tipo de igualdades que se plantean a los estudiantes.

### 2.1.2 Tipos de igualdades

Estudios realizados por McNeil y Alibali (2005) “[...] comprobaron que el contexto en el que se presentaban operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual.” (Ramírez y Rodríguez, 2011, p.44). Dichos contextos, resultan ser más efectivos, señalan los estudios de McNeil y Alibali (citados por Ramírez y Rodríguez, 2011), cuando son de tipo no estandarizado.

Esto quiere decir que cuando se presenta igualdades en las que los signos operacionales están tanto en el lado derecho como en el izquierdo o del lado derecho del signo igual, favorece la comprensión relacional del signo igual mucho más que cuando los signos operacionales solo están del lado izquierdo. Como se observa, las igualdades pueden favorecer la interpretación relacional según la ubicación de los

signos (+, -, ×, ÷, etc.) A continuación, se describen los tipos de igualdades y su aplicación en el desarrollo del pensamiento relacional.

Tabla N° 3: Clasificación de igualdades según la existencia de variables y los operadores matemáticos.

Criterio		Existencia de operadores matemáticos	
		Acción	No acción
Existencia de variables	Abiertas	$8 + 4 = ?$	$? + 4 = 7 + 5$
	Cerradas	$12 = 4 + 3 + 5$	$3 = 3$ $3 + 5 = 7 + 1$

Tomado y adaptado de Molina, Castro y Ambrose (2006)

Como se observa en la tabla las igualdades se pueden clasificar en igualdades abiertas o cerradas. A su vez, estas pueden ser de acción o de no acción. En caso del criterio de existencia de variables, “Las igualdades abiertas son aquellas que presentan algún término desconocido (incógnita), a averiguar” (Molina, Castro y Ambrose, 2006, p. 36).

Ejemplo:  $8 + 4 = ?$  o  $? + 4 = 7 + 5$

“Las igualdades cerradas, por el contrario, aparecen completas, sin ningún término desconocido.” (Molina, Castro y Ambrose, 2006, p. 36).

Ejemplo:  $4 + 3 + 5 = 12$  o  $3 = 3$

Según el criterio de existencia de operadores matemáticos, las igualdades de acción contienen signos operacionales únicamente en uno de los lados del signo igual:

Ejemplo:  $8 + 4 = ?$  o  $12 = 4 + 3 + 5$ .

En el caso del ejemplo  $12 = 4 + 3 + 5$ , este responde a una escritura no convencional de las igualdades. Ya que es usual observar que los signos operacionales se concentran en el lado izquierdo de la igualdad.

Por otro lado, las igualdades de no acción son aquellas que tienen símbolo operacional en ambos lados o en ninguno de ellos. Las expresiones pueden incluir la existencia de una incógnita o no.

Ejemplo:  $? + 4 = 7 + 5$  o  $3 = 3$

En el caso de las igualdades cerradas y abiertas estas promueven la verbalización y discusión de las expresiones planteadas, y de esta forma se favorece el desarrollo del pensamiento relacional. Ello es importante ya que, al hablar de *pensamiento relacional*, es necesario generar mecanismos para poner de manifiesto, de forma observable, el proceso que realizan los estudiantes,

Asimismo, situaciones en las que los estudiantes tienen que calificar como verdadera o falsa las igualdades son eficaces para el trabajo. Dado que favorece la comprensión del signo igual y le permite verbalizar los procesos internos que está realizando para determinar el valor de verdad o no de las igualdades. (Molina, Castro y Ambrose, 2006).

Por lo expuesto consideramos que las situaciones de equivalencias numéricas favorecen el desarrollo del pensamiento relacional, como se ha descrito los tipos de igualdades tienen una incidencia significativa en el aprendizaje relacional del signo igual. En este sentido los tipos de igualdades que favorecen, en mayor medida, será abordado en los próximos apartados como uno de los elementos para el planteamiento de actividades que favorecen el pensamiento relacional.

### 2.1.3 Propiedades de adición y sustracción asociadas a las equivalencias numéricas

Molina, Castro y Ambrose (2006) señalan que las propiedades que se presentan en las relaciones implícitas en las igualdades son: Propiedad conmutativa de la suma, compensación en la suma y resta; asociativa en el caso de la suma, la magnitud de los números o expresiones, y en algunos casos la complementariedad de la suma y de la resta. Cada propiedad responde a una forma generalizada. Véase la tabla 4.



Tabla N° 4: Propiedades en la adición y sustracción, asociadas al trabajo con el Pensamiento Relacional.

<b>Propiedad</b>	<b>Actividades para el desarrollo del Pensamiento Relacional</b>
<p>Commutativa de la suma</p> $a + b = b + a$	<p>¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad?</p> $56 + 73 = 73 + 56$
	<p>Calcula el sumando que falta:</p> $13 + 51 = \_ + 13$
<p>Propiedad de compensación en la suma</p> $a + b = (a + c) + (b + c)$	<p>¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad?</p> $35 + 24 = 31 + 20$
	<p>Calcular el sumando que falta:</p> $923 + 461 = \_ + 463$
	<p>Calcular el valor de x:</p> $23 + 6 = 20 + \_$
<p>Propiedad de compensación en la resta</p> $(a - b = (a + c) - (b + c))$	<p>¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad?</p> $82 - 11 = 72 - 1$
	<p>Calcula el valor de x:</p> $31 - 6 = \_ - 7$
<p>Propiedad asociativa</p> $a + (b + c) = (a + b) + c$	<p>¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad?</p> $8 + 7 = 5 + 3 + 7$
	<p>Calcula el valor x:</p> $10 + 3 + 2 = 6 + \square + 3 + 2$

Propiedad de complementariedad en la suma y resta  $a + b - b = a$	¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad?  $11 + 6 - 6 = 12$
	Calcular el valor de x:  $43 = \square + 21 - 21$

Tomado y adaptado de Molina, Castro y Asombre (2013) y Fernández (2015).

En la tabla se puede apreciar cómo en las igualdades abiertas, cerradas, o de acción está presente de forma implícita las propiedades de la adición y la sustracción. Ello favorece la interiorización de las mismas y la comprensión del signo igual.

En conjunto este apartado ha presentado las equivalencias como situaciones numéricas que favorecen el desarrollo del pensamiento relacional: Para tal fin, se ha descrito el significado de equivalencia numérica y el signo igual. Asimismo, se ha expuesto los tipos de igualdades según los criterios de existencia de variables (abiertas o cerradas) y la existencia de operadores matemáticos (acción y no acción). Considerando lo expuesto, en el próximo apartado presentamos tres elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promueven el desarrollo del pensamiento relacional en niños, estos elementos se sostienen en el trabajo con equivalencias numéricas.

## 2.2 Elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional

Tener claridad de la meta a la que se desea llegar en cuanto al desarrollo de una habilidad en los niños es fundamental. En este sentido, los elementos didácticos que se proponen, responden al objetivo de favorecer el desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria, lo cual a largo plazo favorecerá el aprendizaje del álgebra.

Los elementos que se describen se sitúan en el tercer grado de educación primaria debido a que la literatura da cuenta de que es en esta etapa escolar en la que se presentan mayores dificultades en cuanto a la comprensión del signo igual. Asimismo, a esta edad los niños ya tienen adquiridos aprendizajes básicos como saber

sumar, restar, multiplicar y dividir, los cuales facilitan el desarrollo del pensamiento relacional.

En este sentido, los elementos que se plantean responden a la propuesta de análisis de Aké (2017), los aportes de Fernández (2015) con el análisis del rol del maestro en el desarrollo del pensamiento relacional, los aportes de investigaciones longitudinales realizados con niños de 8 y 9 años de edad (tercer grado de educación primaria) para favorecer el pensamiento relacional. Dichas investigaciones son: Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional de Molina, Castro y Ambrose (2006), Desarrollo de Pensamiento Relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria de Molina (2006), y Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica de Castro y Molina (2007), y estudios sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en niños.

A partir de estos estudios se presentan tres elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional, estos son: los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria, los tipos de igualdades que favorecen el desarrollo del pensamiento relacional, y los espacios de verbalización del pensamiento relacional.

### 2.2.1 Niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria

Stephens y Ribeiro (2012) señalan que, al plantear situaciones de igualdades numéricas, los niños suelen aplicar, un pensamiento computacional. Este consiste, en primera instancia, en reconocer el campo al que pertenece ese problema; para luego resolverlo a través de procedimientos computacionales. Sin embargo, una solución distinta de resolver el mismo problema es estableciendo una relación uno a uno entre los números del lado derecho e izquierdo del signo igual. Esta forma de resolución responde al pensamiento relacional.

Las investigaciones realizadas por Molina (2006), Castro y Molina (2007) y Stephens, y Ribeiro (2012), evidencian que los niños poseen rasgos del pensamiento relacional; sin embargo, requieren de trabajo para alcanzar un nivel más completo de desarrollo. En este sentido, el primer elemento que se plantea para la elaboración de

actividades que promuevan el pensamiento relacional es el reconocimiento de los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en los niños. Estos niveles, permiten identificar la zona de desarrollo próximo entre el nivel actual del estudiante y el nivel potencial al que puede llegar.

A continuación, presentamos los niveles de desarrollo del pensamiento relacional, los cuales han sido elaborados considerando los aprendizajes esperados de tercer grado de educación básica regular según el Currículo Nacional (2016), y los estudios de Fernández (2015).

Tabla N° 5: Niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria

<i> criterio</i>	<i> Desempeño</i>			
	<i> Nivel inicio</i>	<i> Nivel en proceso</i>	<i> Nivel esperado</i>	<i> Nivel sobresaliente</i>
<b>Comprensión del signo igual como una equivalencia.</b>	Desarrolla ejercicios de igualdades Ejemplo: $14+6= \_ +3$ empleando el signo igual como un operador.	Desarrolla ejercicios de igualdades Ejemplo: $14+6= \_ +3$ comprendiendo que todo lo que está del lado izquierdo del signo igual debe de ser igual a todo lo que está al lado derecho del signo igual, pero tiene dificultades para identificar qué propiedades aritméticas emplear para resolverlas. Respuesta B: Paso 1: $14+6=20$ Paso 2: $20-3=17$	Desarrolla ejercicios de igualdades Ejemplo: $14+6= \_ +3$ comprendiendo que todo lo que está del lado izquierdo del signo igual debe de ser igual a todo lo que está al lado derecho del lado igual, y emplea propiedades aritméticas para resolverlas. Respuesta C: Paso 1: $14+6=20$ Paso 2: $20-3=17$ Paso 3: $14+6=17+3$	Desarrolla ejercicios de igualdades Ejemplo: $14+6= \_ +3$ identificando relaciones entre las partes de lado derecho e izquierdo de la igualdad, y emplea propiedades aritméticas para resolverlas. Respuesta D: $14+6= (14+3) +(6-3)$ $14+6= 17 + 3$

Elaboración propia.

Como se observa en el cuadro, el criterio para los niveles de desarrollo del pensamiento relacional es la comprensión relacional del signo igual. En un nivel de inicio, el estudiante comprende el signo igual como un operador. Por tanto, aún no considera las igualdades como un todo; ello ocasiona que considere que lo que está del lado derecho en la igualdad es el resultado de las operaciones del lado izquierdo de la igualdad. Un nivel en proceso, es cuando el estudiante está empezando a comprender las igualdades como un todo, de esta forma se empieza a desarrollar la noción de equivalencia en los niños; ya que surge la idea de que todo lo que está del lado derecho equivale a todo lo que está del lado izquierdo de la igualdad. Esta idea aún está en construcción y está sujeta a errores o confusiones. Finalmente, en nivel esperado el estudiante comprende las equivalencias, relación de igualdad de ambos lados del signo igual, y llega a la respuesta del ejercicio o problema.

Como se observa en la tabla, se ha considerado un nivel sobresaliente, este nivel responde a un grado más alto de establecimiento de relaciones entre las igualdades, ya que como se observa en el ejemplo del Nivel sobresaliente, los estudiantes son capaces de establecer relación uno a uno con los números de cada lado del signo igual, esto les permite identificar diversas formas para resolver el ejercicio o problema, como se observa en la *respuesta D* de dicho nivel.

Considerando lo expuesto, identificamos a los niveles de desarrollo del pensamiento relacional como un elemento clave para el planteamiento de actividades que promueven el pensamiento relacional ya que estos nos permiten identificar la zona de desarrollo próximo de los estudiantes en relación al nivel esperado. Asimismo, destacamos que es necesario considerar un nivel sobresaliente, porque se da la posibilidad al estudiante de ir más allá de lo esperado. En este sentido, se aporta un rango de flexibilidad en cuanto a la forma de resolver un ejercicio o problema.

### 2.2.2 Tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional

Como se ha indicado anteriormente, los elementos que se plantean responden al nivel 1 de algebrización, porque se pretende que los estudiantes inicien con la comprensión del significado de equivalencia del signo igual. En este sentido, se recapitula lo expuesto en el capítulo uno: *una de las causas por las que los estudiantes llegan a una mala comprensión del signo igual es debido al tipo de igualdad que se*

*presenta a los estudiantes.* Por ello, el segundo elemento que se propone para la elaboración de actividades que promuevan el pensamiento relacional es el trabajo con igualdades que favorezcan el pensamiento relacional.

Molina, Castro y Ambrose (2006) plantean la importancia de ofrecer a los estudiantes igualdades diversas, ya que estas fomentan la construcción del significado relacional del signo igual. En sintonía a lo expuesto, se presentan las igualdades que resultaron ser las más eficaces según investigaciones analizadas y mencionadas en el anterior apartado.

En primer lugar, y como buen punto de partida están las *igualdades abiertas*. Este tipo de igualdades nos permiten evaluar la comprensión del significado del signo igual que poseen los niños, y sobre el cual se debe de trabajar. (Molina, Castro y Ambrose, 2006)

En segundo lugar, el trabajo con las igualdades cerradas verdaderas y falsas, debido a que estas propician oportunidades para que los estudiantes puedan "verbalizar y desarrollar su comprensión del signo igual." (Molina, Castro y Ambrose, 2006, p.43). Así también lo reafirma Molina (2007) quien señala que "La discusión de las sentencias verdaderas y falsas y la construcción de igualdades se mostraron potentes para negociar con los escolares sobre elementos relacionados con la comprensión del signo igual" (p.83). Esto, además de favorecer la comprensión del signo igual, propicia que los estudiantes pueden observar las igualdades en su totalidad, lo cual ayuda al desarrollo del pensamiento relacional y rompe la tendencia al pensamiento computacional.

En tercer lugar, es importante que, para el caso de igualdades de acción, las cuales contienen los signos operacionales en uno de los lados del signo, se fomente la ubicación de las operaciones en el lado derecho de la igualdad, ya que los estudios de Molina, Castro y Ambrose (2006), y Molina (2007) demuestran que un obstáculo frecuente en los estudiantes es la fijación de los signos operacionales en el lado derecho de la igualdad.

Finalmente se tienen a las construcciones de igualdades, las cuales "[...] permiten desarrollar su comprensión del signo igual al hacer un uso activo de este símbolo" (Molina, 2007, p.90). En este sentido, para favorecer la identificación de

patrones, se sugiere plantear ejemplos que ayuden a este tipo de planteamientos tales como los propuestos por Aké (2017).

Tabla N° 6: Construcción de patrones a través de igualdades

<p>Tarea 1. Determina los posibles dos sumandos que proporcionen como resultado 30. Mira los ejemplos siguientes:</p> $19 + 11 = 30$ $18 + 12 = 30$ <p>Se pueden obtener los siguientes posibles casos y motivar a la comparación de los resultados:</p> $17 + 13 = 30$ $16 + 14 = 30$ $15 + 15 = 30$ $14 + 16 = 30$
--

Tomado de Aké (2017, p. 6).

En la tarea propuesta se plantea la opción de brindar a los niños un conjunto de igualdades que generen en ellos la tendencia a identificar patrones. De esta forma favorecemos en ellos el enfoque de comprensión más que el computacional. Finalmente, este criterio debe ser acompañado por la enseñanza explícita del significado relacional del signo igual, debido a que este “no es un conocimiento intuitivo para los alumnos ni es adquirido directamente mediante la explicación de la persona que ejerce la autoridad en el aula” (Molina, Castro y Ambrose, 2006, p.43).

En este apartado hemos abordado el segundo elemento para el planteamiento de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento relacional. De los cuales, hemos destacado las igualdades abiertas, las cerradas, de acción, y la construcción de las mismas. La elección de estos tipos se debe a que según los estudios han sido los más significativos en cuanto al trabajo del pensamiento relacional. Por ello, es que consideramos el tipo de igualdades como un elemento relevante para el desarrollo del pensamiento relacional.

### 2.2.3 Espacios de verbalización del pensamiento relacional

El tercer elemento responde a la naturaleza del objetivo a desarrollar en los niños: el pensamiento relacional, el cual es una habilidad mental, la cual es individual e interior. En este sentido, resulta de gran importancia generar espacios para verbalizar dicho aprendizaje. Así lo afirma Molina, Castro y Ambrose (2006) cuando destacan

"La necesidad de que los alumnos se escuchen unos a otros para que el intercambio de estrategias y opiniones sea realmente fructífero" (p.44).

En este sentido, se entiende por espacios de verbalización del pensamiento relacional, a aquellos momentos en los que los estudiantes junto con sus pares pueden manifestar los pasos que han seguido para la resolución de un problema matemático ya sea a su compañero, a la maestra a través de breves entrevista o al resto de la clase. Asimismo, estos espacios, mediados por la maestra, permiten debatir la veracidad de igualdades cerradas.

Es así que se propone los espacios de verbalización del pensamiento relacional como tercer criterio para el planteamiento de actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento relacional. Al respecto Manrique (2004) señala que cuando se le pide a un alumno que explique lo que hizo para resolver una tarea "[...] el estudiante va asimilando e interiorizando formas de control, estrategias que puede usar." (p.52).

Incluso en futuras situaciones, continúa Manrique (2004) "[...] se espera que el alumno manifieste estas actividades de regulación (corrección, cuestionamiento, búsqueda de información, anticipación, etcétera), a medida que se le pide que explique, prediga, verbalice o indique aspectos de la tarea a otra persona (que puede ser un compañero de clase), lo que permite que ocurra el proceso de exteriorización, explícito y más consciente de su forma de aprender." (p. 52)

Considerando lo expuesto, los espacios de verbalización del pensamiento relacional favorecen por un lado al alumno, porque le hace consciente de su propio aprendizaje. Asimismo, le permite escuchar los diversos caminos, construcciones de patrones, relaciones que identificaron o establecieron sus pares para resolver una tarea matemática, y por tanto aprender de ellos. Por otro lado, favorecen al docente, ya que es un espacio óptimo para recoger información sobre los procesos internos que atraviesan los estudiantes, los cuales, en diversas situaciones, resulta complejo acceder a ellos.

A modo de síntesis, en este apartado se ha descrito los elementos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional en niños de tercer grado de educación primaria. Para ello, en el primer apartado, se han expuesto las equivalencias como situaciones numéricas que favorecen el desarrollo del



pensamiento relacional, detallando el significado de las equivalencias y el signo igual, los tipos de igualdades y las propiedades involucradas de adición y sustracción involucradas en este proceso.

A partir de los conceptos descritos, en el segundo apartado del capítulo se han propuestos los tres elementos básicos para el planteamiento de actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento relacional. En primer lugar, los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños. Estos nos brindan información para el planteamiento de actividades en relación a la zona de desarrollo próximo que posee el niño en relación al pensamiento relacional. En segundo lugar, describimos los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional. Si bien estos deben ser variados, la literatura identifica qué igualdades resultan más efectivas en el trabajo con los niños, tal es el caso de las igualdades cerradas.

Finalmente, hemos propuesto los espacios de verbalización del pensamiento relacional como tercer criterio a ser considerado. Este criterio plantea la importancia de generar espacios que permitan a los estudiantes expresar cómo resolvieron una tarea matemática y escuchar los procesos que siguieron sus compañeros. Asimismo, este criterio permite al maestro acceder a información sobre los procesos mentales que va construyendo el estudiante. El planteamiento de estos elementos apunta a desarrollar el pensamiento relacional a partir el reconocimiento del nivel de desarrollo de los estudiantes, de las situaciones de equivalencias más idóneas, y de considerar el diálogo, espacios de verbalización, como elemento imprescindible para conocer y promover el pensamiento relacional.

### 2.3 Elementos contextuales del desarrollo del pensamiento relacional en niños de educación primaria.

En este último apartado queremos abordar dos elementos contextuales que determinan no solo el desarrollo del pensamiento relacional en niños de 3er grado de educación primaria; sino que también toda la gama de experiencias de aprendizaje de los niños. Estos dos elementos son las emociones y el juego.

Como ya se ha expuesto el enfoque de esta investigación es de carácter estructural del aprendizaje de las matemáticas, con el fin proponer una alternativa distinta al enfoque operacional predominante. Es usual que el enfoque operacional este acompañado por experiencias didácticas basadas en la enseñanza tradicional, el cual se caracteriza por “[...] un ambiente rígido del miedo al error, que ha provocado – y todavía provoca- que muchos alumnos sientan ansiedad respecto a las clases de matemáticas.” (Ribosa y Durán, 2017, p. 206). Ambiente que no favorece el aprendizaje de ninguna competencia o habilidad mental.

Ante este panorama surge el juego como oportunidad para hacer frente al conjunto de prejuicios y etiquetas que recibe el área de matemáticas. Según García (2001) el juego es un “[...] medio que pone a su disposición un espacio protegido, un lugar para hacer, deshacer y probar sin ningún riesgo.” (p.16). Es decir, en el contexto de esta investigación el juego junto con las emociones que conllevan, vienen a ser elementos relevantes para el logro de metas de aprendizaje, en este caso para el desarrollo del pensamiento relacional.

Por ello, en el siguiente apartado abordamos de manera general estos elementos que denominamos contextuales debido a que constituyen el ambiente de trabajo del pensamiento relacional.

#### 2.3.1 Las emociones y el juego en el aprendizaje de las matemáticas en niños de educación primaria

Los afectos, las emociones, que pueden sentir los estudiantes en relación a las matemáticas son factores determinantes para su comprensión. Esto se debe a que:

la relación que se establece entre los afectos y el aprendizaje es cíclica: de una parte, la experiencia que tiene el estudiante al aprender

matemáticas le provoca distintas reacciones emocionales e influye en la formación de creencias; por otra, las creencias que sostiene el sujeto tienen una consecuencia directa en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender. (Aristizábal, Colorado y Gutierrez, 2005, p.17)

De esta forma evidenciamos que las experiencias de aprendizaje de las matemáticas tendrán una consecuencia directa en las creencias de los estudiantes, las cuales determinarán las futuras experiencias de aprendizaje. En este sentido, proponemos el juego como una oportunidad para generar experiencias significativas y que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.

El juego en el campo de la educación matemática ha sido sujeto de estudio, diversas investigaciones “[...] identificaron que a través del juego, los niños desarrollan conceptos clave que incluyen la correspondencia uno a uno, la aritmética y el conteo, estimar, razonar espacialmente, medir, entender formas, clasificaciones lógicas, comparación, ordenamiento y comprensión de partes y totalidades.”<sup>1</sup> (Takeuchi, Towers y Plosz, 2016, p.170). Con ello, se identifica el carácter didáctico del juego; al respecto Aristizábal, Colorado y Gutierrez (2016) sostienen que en los estudios realizados con niños, el juego sirvió como una estrategia para abordar las dificultades que se presentaban en las clases de matemáticas.

Esta propuesta es respaldada por García (2001) quién sostiene que “Los juegos crean motivación en el estudiante, clarifican conceptos y procesos difíciles, ayudan en el aprendizaje social y a integrar diferentes procesos de capacidad” (p.16)

En cuanto al desarrollo del pensamiento relacional, el juego sirve como medio para plantear las situaciones de equivalencias numéricas más idóneas. Para lograrlo, el maestro se puede valer de diversos recursos como tarjetas, fichas, pizarras móviles, entre otros, para plantear las equivalencias. Estos materiales, otorgan a los ejercicios un carácter lúdico; que puede estar acompañado por consignas de tiempo, turnos de participación para la construcción de igualdades, etc. Asimismo, favorece los espacios de verbalización ya que:

---

<sup>1</sup> “Previous research identified that through play children develop key concepts including one-to-one correspondence, arithmetic and counting, estimating, spatial reasoning, measuring, understanding shapes, logical classification, comparing, ordering, and understanding parts and wholes.”

[...] el juego como método y recurso de enseñanza comporta beneficios de relación al grupo. Determinados juegos ayudan a los estudiantes a entender otros puntos de vista y actitudes y son especialmente útiles para estudiantes tímidos, ya que facilita la pérdida de su inhibición y los hace comportarse de una manera comunicativa, activa y los lleva a actuar libremente”. (García, 2001, p.19)

Por ello, es que se destaca el juego, como un elemento contextual relevante para el desarrollo del pensamiento relacional, ya que sus beneficios para la relación de grupo, permitirán que los espacios de verbalización sean cada vez más enriquecedores, significativos; en los cuales los estudiantes se sientan cómodos de presentar y sustentar los pasos que siguieron para resolver los ejercicios o problemas.

A manera de cierre en este capítulo hemos propuesto tres elementos didácticos y dos elementos contextuales para el planteamiento de actividades que promueven el desarrollo del pensamiento relacional. Para ello, hemos descrito las equivalencias como situaciones numéricas que favorecen este tipo de pensamiento. Luego, hemos planteando los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños, los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional y los espacios de verbalización, como elementos didácticos. Y hemos considerado al juego y las emociones como elementos contextuales que determinan el proceso de aprendizaje del pensamiento relacional. Este conjunto de propuestas se ha basado a partir del análisis de diversas investigaciones longitudinales, y se contextualizan en el enfoque early-algebra, el cual responde a la orientación de esta investigación.

En conclusión, a lo largo de esta investigación hemos abordado el desarrollo del pensamiento relación en niños. En primer lugar, hemos descrito cómo surge este enfoque, su desarrollo en relación al pensamiento algebraico, y las características principales del desarrollo del pensamiento relacional. En segundo lugar, hemos analizado el tipo de situaciones numéricas con las que se trabaja este tipo de pensamiento: las equivalencias numéricas. Asimismo, hemos presentado tres elementos didácticos para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional. Dichos elementos son: los niveles de desarrollo del pensamiento relacional en niños, los tipos de igualdades que favorecen el pensamiento relacional y los espacios de verbalización. Y hemos propuesto el juego y las emociones

como elementos contextuales que determinan los procesos de aprendizaje de las matemáticas de forma general, y, por ende, de manera específica el pensamiento relacional.

Con esta investigación se ha pretendido aportar y atender al desarrollo del aprendizaje de las matemáticas bajo el enfoque early-algebra; con el fin de promover un enfoque estructural frente al enfoque operacional dominante. Todo ello, a través del planteamiento de actividades que consideren las potencialidades de los niños, y sus características tanto cognitivas como afectivas.



## CONCLUSIONES

En esta tesina se describió el desarrollo del pensamiento relacional como una actividad intelectual inherente al pensamiento algebraico, y se propuso elementos relevantes para la elaboración de actividades que favorezcan su desarrollo en aula.

El pensamiento relacional se encuentra en las bases del desarrollo del pensamiento algebraico, porque responde a la construcción del significado relacional del signo igual; el cual se debe desarrollar en los primeros niveles del proceso de algebrización.

Los niveles de desarrollo del pensamiento relacional de los niños son un elemento didáctico a considerar para el planteamiento de actividades que promuevan dicho pensamiento. Estos niveles nos permiten identificar la zona de desarrollo próximo en relación a la habilidad mental esperada.

Las equivalencias, de forma especial las igualdades cerradas, son un elemento didáctico a ser considerado para el planteamiento de actividades que promuevan el pensamiento relacional. Este tipo de situaciones numéricas favorecen el desarrollo del pensamiento relacional, debido a que implican la comprensión del signo igual desde su significado relacional.

Los espacios de verbalización en el proceso de aprendizaje son un elemento didáctico valioso a ser incluido en el planteamiento de actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento relacional. Ya que estos permiten a los estudiantes expresar y sustentar a través del lenguaje oral su proceso de aprendizaje. Así mismo, permite al maestro recoger información de los procesos mentales que se van construyendo en los estudiantes.

Finalmente, el juego y las emociones son elementos contextuales que intervienen en los procesos de aprendizaje de los niños, de manera especial tiene una relevancia en el desarrollo de las matemáticas, y por tanto del pensamiento relacional. La atención a estos elementos permite generar espacios de confianza y seguridad para el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké, L. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria. En: J.M. Contreras, et al. (eds.). *Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Actas*. Granada: Universidad de Granada, 2017. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10481/45415>
- Aristizábal, J., Colorado, H., y Gutierrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico. *Itinerario Educativo*, 30(67), 123-137.
- Carpenter, T., Levi, L., Franke, L., y Zeringue, K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 53-59. Recuperado de <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655897>
- Castro, E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. *Conferencia en XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas.*, 23-32.
- Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, 19(2), 67-94. Recuperado a partir de <http://funes.uniandes.edu.co/1572/>
- Fernández, C. (2015). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14-22.
- García, F. (2001). El juego como instrumento de aprendizaje escolar. *Educando desde el ajedrez*, 15-20. Barcelona: Editorial Paidotribo.
- Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 2(1), 15-32.
- Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

- Manrique, L. (2004). *La participación de los estudiantes en la evaluación del aprendizaje*. Educación, 13(25), 43-60.
- Melgar, A. (2000). El pensamiento: Una definición interconductual. *Revista de Investigación en Psicología*, 3(1), 23-38.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Universidad de Granada.
- Molina, M. (2009). Una Propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *PNA*, 3, 135-156.
- Molina, M., Castro, E., y Ambrose, R. (2006). Trabajo Con Igualdades Numéricas Para Promover Pensamiento Relacional 1. *PNA*, 1(1), 33-46.
- RAE. (1970). pensar | Diccionario de la lengua española - Edición de 1970.
- RAE. (2018). Diccionario de la lengua española - Edición del Tricentenario. Recuperado 9 de julio de 2018, a partir de <http://dle.rae.es/?id=VoZ3d2f>
- Ramírez García, M., y Rodríguez Marcos, P. (2011). Interpretaciones del Signo Igual. Un estudio de libros de texto. *Unión*, 26, 41-55.
- Ribosa, J., y Durán, D. (2017). Cooperación, juego y matemáticas: análisis de la aplicación del Triduo Cooperativo con alumnado de primaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 11(3), 205-231.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.
- Stephens, M., y Ribeiro, A. (2012). Working towards algebra: the importance of relational thinking. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(3), 373-402. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362012000300006&script=sci\\_arttext&tlng=en](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362012000300006&script=sci_arttext&tlng=en)
- Takeuchi, M., Towers, J., y Plosz, J. (2016). Early Years Students' Relationships with . *Alberta Journal of Educational Research*, 62(2), 168-183. Retrieved from <http://ajer.journalhosting.ucalgary.ca/index.php/ajer/article/view/1736>