PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL MEDIANTE LA CREACIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

FELIX DE LA CRUZ SERRANO

ASESORA:

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

NOVIEMBRE, 2019

RESUMEN

Este trabajo de investigación estudia la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural mediante la creación de problemas en estudiantes del primer grado de secundaria de la I.E.P "Wonderful Stars" en Lima pertenecientes al tercio superior y es que, a pesar de las mejoras en los últimos años de la compresión matemática; los resultados de las evaluaciones censales de estudiantes y de la prueba PISA nos sitúan muy lejos del nivel esperado. El Programa Curricular para la Educación Secundaria del MINEDU evidencia la importancia de la creación de problemas en el aprendizaje; sin embargo, el nivel de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor se ven afectados por las múltiples acepciones relacionadas a estos conceptos López (2015). Por otra parte, los textos escolares de matemáticas más usados no promueven estrategias para su logro.

El objetivo general de nuestro estudio está dirigido a analizar si la creación de problemas contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria; para ello se implementó la estrategia de creación de problemas OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) adaptada de la estrategia EPP (Episodio en clase, Problema Pre, Problema Pos) propuesta por Malaspina (2017) y siguiendo las fases contempladas en la Metodología Cualitativa de Latorre (1996).

Para este fin se diseñó una secuencia de cuatro sesiones que se inició con una evaluación exploratoria y continuó con actividades de situaciones problemáticas para ser resueltas creando problemas auxiliares y retrospectivos por variación del problema original y en cada una ellas se buscó identificar, describir y caracterizar las acepciones o modos de uso, sistemas de representación, procedimientos y dificultades presentadas en su implementación que permita tener la evidencia si se producen cambios favorables en el nivel de comprensión. Todo este proceso fue acompañado de una Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural adaptado de la propuesta por Bodí (2006).

En conclusión, los resultados obtenidos dan evidencia de cambios favorables en el nivel de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural a través de la creación de problemas.

Palabras clave: Creación de problemas; divisibilidad; múltiplos; divisores.

ABSTRACT

This research work studies the understanding of the concepts of multiples and divisors of a natural number by creating problems in students of the first grade of secondary IEP "Wonderful Stars" in Lima belonging to the upper third and is that, despite the improvements in the last years of mathematical compression; the results of the census evaluations of students and the PISA test place us very far from the expected level. The Curriculum for Secondary Education of MINEDU demonstrates the importance of the creation of problems in learning; However, the level of understanding of the concepts of multiple and divisor are affected by the multiple meanings related to these concepts López (2015). On the other hand, the most used textbooks of mathematics do not promote strategies for their achievement.

The general objective of our study is to analyze if the creation of problems contributes to the understanding of the concepts of multiples and divisors of a natural number in students of the first grade of secondary school; for this, the OAR problem creation strategy (Original problem, Auxiliary problem, Retrospective problem) adapted from the strategy EPP (Episode in class, Pre problem, Pos problem) proposed by Malaspina (2017) and following the phases contemplated in the Qualitative Methodology of Latorre (1996).

For this purpose a sequence of four sessions was designed, which began with an exploratory evaluation and continued with activities of problematic situations to be solved creating auxiliary and retrospective problems by variation of the original problem and in each of them it was sought to identify, describe and characterize the meanings or modes of use, representation systems, procedures and difficulties presented in its implementation that allow having evidence if favorable changes occur in the level of understanding. All this process was accompanied by a Guide to characterize the levels of understanding of the concepts of multiple and divisor of a natural number adapted from the one proposed by Bodí (2006).

In conclusion, the results obtained give evidence of favorable changes in the level of understanding of the concepts of multiples and divisors of a natural number through the creation of problems.

Keywords: Problem posing; divisibility; multiples; divisors

DEDICATORIA

A Domingo De la Cruz González

Clara Serrano González,

mis adorados padres, que Dios los tenga en su gloria.

A mi Esposa Marianela, por todo su apoyo.

A mi querido hijo, Zeze.

A mis hermanos: Adela, Pedro, Chana,

Vito, Raúl, Julio, Anita, Luis.

A los niños, participantes de este estudio.

AGRADECIMIENTOS

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por las enseñanzas recibidas y aporte para nuestra formación profesional.

A mi asesora de tesis, la Mg. Carolina Reaño, por su orientación y constante preocupación en el desarrollo de este trabajo de investigación. Le agradezco su paciencia y sus consejos que me motivaron a mantenerme comprometido con el desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Uldarico Malaspina, por brindarme con generosidad su tiempo y confianza, ayudándome a mejorar y encaminar este trabajo. Sus consejos y observaciones han sido importantes no solo como guía sino también como un aliciente para seguir esforzándome por alcanzar la culminación de esta investigación.

A la Dra. Jesús Flores, directora de la maestría, a quien tuve el gusto de tener como profesora, y cuyas enseñanzas fueron más allá de la adquisición de conocimientos, pues significaron un cambio positivo en mí y me impulsaron a enfrentar nuevos retos.

A los maestros y maestras de la Maestría Didáctica de la enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por sus sabias enseñanzas.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentamos los estudios de referencia que dan sustento científico a nuestra investigación; las relacionadas al concepto de divisibilidad y las relacionadas a la línea de creación de problemas. Así mismo, presentamos los argumentos que justifican la pertinencia del estudio en base al análisis curricular, resultados de pruebas de evaluación de desempeño, la estructura matemática, los obstáculos evidenciados en las investigaciones revisadas y la importancia del uso del enfoque de creación de problemas. Finalmente se incluye la pregunta y los objetivos de la investigación.

1.1. Investigaciones de referencia

1.1.1. Investigaciones relacionadas al concepto de divisibilidad

Bodí (2006) realizó un estudio cualitativo en el marco de la teoría APOS, con el propósito de estudiar y profundizar sobre cómo los alumnos de educación secundaria comprenden la noción de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Para ello diseñó un cuestionario y una serie de entrevistas semiestructuradas para la recopilación de la información, tomando en consideración los elementos matemáticos relacionados al concepto de divisibilidad (múltiplos y divisores, números primos y compuestos, criterios de divisibilidad, mínimo común múltiplo y máximo común divisor); así como las relaciones lógicas entre estos elementos matemáticos y los modos de representación.

Los instrumentos diseñados fueron aplicados a 371 estudiantes españoles de 12 a 17 años, de los cuales 120 pertenecían a 1º de ESO, 137 a 4º de ESO y 114 a 1º de bachillerato. Sobre la base de los resultados obtenidos y en concordancia con los conceptos propios de la teoría APOS “modos de conocer” (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y “niveles de desarrollo de esquema” (Intra, Inter y Trans), Bodí (2006) elaboró un estándar de valoración y caracterización de los niveles de comprensión del concepto de divisibilidad.

A continuación, citamos la caracterización de los diferentes niveles (Intra, Inter y Trans) del desarrollo de esquema de divisibilidad establecida por (Bodí, 2006, p. 258-260).:

A. Nivel Intra.

El nivel Intra del esquema de divisibilidad se caracteriza porque los alumnos suelen:

(a) desconocer o usar los elementos matemáticos múltiplo y divisor de manera inconexa o errónea sin establecer relaciones entre las diferentes acepciones,

(b) establecer relaciones condicionales entre las operaciones de multiplicar y dividir,

(c) usar las relaciones entre elementos matemáticos solo cuando los números están expresados en la representación decimal,

(d) usar parcialmente, o desconocer, los criterios de divisibilidad, y

(e) desconocer los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números o usar de forma mecánica los algoritmos de cálculo de estos elementos.

B. Nivel Inter.

El nivel de desarrollo Inter del esquema de Divisibilidad queda caracterizado por:

(a) usar correctamente los elementos múltiplo y divisor de un número natural y establecer relaciones entre las diferentes acepciones,

(b) vincular los elementos ser divisible, múltiplo y divisor a la representación factorial del número, siendo capaces de establecer que un número es múltiplo de sus factores primos, pero no de todos sus factores compuestos. Esta característica está vinculada a la dificultad en reconocer la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural,

(c) utilizar los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5), y en algunos casos, poder coordinar dos criterios, y

(d) Usar adecuadamente alguno de los algoritmos de obtención de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y aplicarlos en contextos de situaciones reales.

C. Nivel Trans.

Los estudiantes del nivel trans del desarrollo del esquema de divisibilidad pueden:

(a) emplear con coherencia los elementos matemáticos de divisibilidad, estableciendo relaciones entre ellos, independientemente del modo de representación, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números,

(b) aplicar distintos criterios de divisibilidad y coordinarlos para obtener nuevas informaciones, y

(c) usar los diferentes algoritmos de obtención de los elementos matemáticos máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, aplicándolos en contextos reales y empezando a establecer alguna relación entre ellos.

Los resultados realizados por Bodí (2006) evidenciaron que la mayoría de alumnos se encontraban en una forma de conocer "Acción" de la noción de divisibilidad, pues asociaban las ideas de "múltiplo" y "divisor" a las operaciones de multiplicar y dividir respectivamente. De igual manera, el significado del elemento matemático "ser divisible" fue vinculado directamente a la división entera y exacta, ya que para determinar si un número es divisible por otro, procedían a dividir y evaluar si el resto era cero, siendo indispensable para ello que dichos números sean representados en un sistema numérico posicional de base diez. Así mismo se evidenció que la mayoría de estudiantes desconocían algunos de los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 o por 5).

Por otra parte, la mayoría de estudiantes mostraron un nivel de desarrollo de esquema "Intra", pues relacionaban los elementos "múltiplo", "divisor" y "ser divisible" al modo de representación posicional de base diez y a las operaciones de multiplicar y/o dividir.

Este estudio realizado por Bodí (2006) fue muy importante para la presente investigación porque a partir de la propuesta de caracterización de los niveles de desarrollo de esquemas de divisibilidad, realizamos una adaptación de ella para elaborar guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural.

Otro estudio importante es el realizado por Roig, Llinares, y Penalva (2010) quienes realizaron una investigación sobre tópicos de divisibilidad y estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales con 71 estudiantes del último curso de educación secundaria obligatoria (15-16 años), los cuales dado al grado de estudio en que se encontraban, ya tenían cierto nivel de conocimientos sobre los conceptos de múltiplo, divisor, números primos, números compuestos, criterios de divisibilidad, relaciones entre "ser múltiplo" y "ser divisor", descomposición de un número natural en factores primos y cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números.

Roig et al. (2010) con el propósito de caracterizar el proceso de construcción del concepto de múltiplo común de los números naturales, usaron como marco teórico, la reflexión sobre la relación actividad-efecto propuesta por Tzur y Simon en el año 2004, donde se distinguen dos fases en el proceso de construcción del conocimiento: la *fase de participación* y la *fase de anticipación*.

En la fase de participación según Tzur (citado en Roig et al., 2010, p. 263). "el estudiante no tiene todavía la comprensión del elemento (matemático) que es pertinente usar para resolver la situación planteada. En esta fase el estudiante puede realizar diferentes actividades cognitivas y comparar el efecto producido con lo que pretende conseguir, razonando por qué ciertos efectos siguen a su actividad".

Por otro lado, en relación a la fase de anticipación, Tzur (citado en Roig et al., 2010, p. 263) expresa que "el estudiante puede evocar y utilizar el concepto adecuadamente para resolver una situación problemática".

Para el desarrollo de este estudio, Roig et al. (2010) plantearon a los participantes un problema contextualizado denominado “La pista de baile” (Figura 1.1).

«Un fabricante de baldosas ha donado a la Comisión de Fiestas cierta cantidad de baldosas de 30 cm de largo y 33 cm de ancho. La Comisión decide hacer una pista de baile cuadrada en el recinto ferial, pero necesita que les digas:
–Cuál es el lado del menor cuadrado que se puede construir con este tipo de baldosas, sin necesidad de cortarlas, y
–Qué otros tamaños podría tener la pista cuadrada para embaldosarla usando sólo baldosas enteras de este tamaño. ¿Por qué?
Resuélvelo y explica qué has hecho para responder a la Comisión».

Figura 1.1 Problema "La pista de baile"
Fuente: (Roig, A., Llinares, S. y Penalva, M. 2010, p. 264)

Así mismo, posterior a la resolución del problema planteado, se aplicaron 71 entrevistas semiestructuradas dirigidas a identificar los procesos de construcción que se generaron durante la resolución del problema. Esta entrevista contemplaba las fases de participación y anticipación. (Figura 1.2)

– Explica cómo has resuelto el problema.
– ¿En qué te has fijado para tomar una decisión?
– ¿Cómo sabes cuál es la menor pista que se puede construir?
– ¿Cómo se pueden encontrar otras dimensiones de pistas cuadradas construidas con esas baldosas?
– Si el fabricante está dispuesto a donar una cantidad de baldosas superior a 2.000 pero inferior a 5.000, ¿cuál debe ser la longitud máxima de la pista de baile?

Figura 1.2 Guion de la entrevista semiestructurada
Fuente: (Roig, A., Llinares, S. y Penalva, M. 2010, p. 265

Se encontró que solo 28 estudiantes respondieron en forma correcta, de los cuales 15 movilizaron sus conocimientos previos de mínimo común múltiplo y lo usaron para resolver el problema evidenciando estar en una fase de anticipación. Los 13 estudiantes restantes tuvieron que emplear diversos criterios y procedimientos para llegar a la noción de múltiplo común al no haber identificado previamente el elemento mínimo común múltiplo por lo que se encontraban en fase de participación.

A partir de las 13 respuestas evidenciadas en la fase de participación, el estudio logró identificar comportamientos cualitativamente distintos sobre el proceso constructivo que se dio durante el proceso de resolución del problema. Este comportamiento mostrado por estos estudiantes permitió identificar como a partir de casos particulares de solución se iba construyendo el concepto de múltiplo común.

Como se evidencia, este estudio basado en el marco teórico de la reflexión sobre la relación actividad–efecto y la aplicación de la entrevista semi estructurada para descubrir la secuencia metodológica empleada por los estudiantes, permitió observar e inferir como los estudiantes crearon nuevos conocimientos partiendo de una situación dada y como a través del análisis, búsqueda de situaciones análogas y de la creación de situaciones relativamente más fáciles; descubren el concepto matemático pertinente para resolver el problema original planteado.

Precisamente estos mecanismos; el de la reflexión sobre la relación actividad-efecto y el proceso de construcción para la resolución de problemas, refuerzan la implementación de la estrategia OAR implementada en el presente estudio.

El tercer estudio citado es el realizado por Romaña (2014) quien analizó el discurso metafórico de un profesor durante su práctica docente sobre el tema de divisibilidad y las posibles implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. Para lograr tal propósito, el investigador recurrió a herramientas teóricas de la cognición matemática y la metáfora conceptual de Lakoff y Núñez, identificando las metáforas discursivas, caracterizándolas y tipificando el significado pretendido por el profesor en la enseñanza con el entendido por el alumno.

Romaña (2014) para el desarrollo del proceso de investigación empleó el modelo de investigación cualitativo interpretativo basado en el método etnográfico, y como mecanismos de recopilación de información y de análisis de las metáforas, recurrió a la observación de los registros fílmicos en el aula de clases, a los análisis de las entrevistas y a las encuestas que aplicó a los estudiantes, así como la contrastación de las metáforas utilizadas por el profesor con los significados asociados a dichas metáforas por parte de los alumnos.

Esta investigación contó con la participación de 38 estudiantes del séptimo grado pertenecientes a la Institución Educativa Santa Teresita, ubicada en el Valle del Cauca, Colombia, cuyas edades oscilaban entre los 12 y 14 años. Cabe indicar que los estudiantes integrantes del aula de clase pertenecen a diversas subculturas y algunos de estos alumnos viven en zonas rurales. Así mismo el profesor, viene de una cultura distinta al medio de la investigación.

Citaremos un ejemplo cuando el docente en su discurso utilizó la metáfora conceptual "*divisores propios*". Al indagar sobre lo que quiso decir el docente sobre esta metáfora, se identificó que el profesor pretendió hacer referencia a los divisores de un número menores que él; sin embargo, los estudiantes entendieron lo siguiente:

> E9. (Estudiante número 9 del portafolio de evidencias). Lo que entendí es que un divisor propio es el que tú piensas y pones para tú mismo tener tus resultados.
>
> P10. Yo entendí que un divisor propio es cuando dividimos un número propio y da como resultado otro número propio.
>
> P14. Entendí que son aquellos números propios que se pueden dividir.
>
> P27. Le entendí que es cuando uno coge un número propio y lo divide con otro número propio y eso va a dar como resultado otro número propio.
>
> P15. Yo entendí que un divisor propio es cuando se utiliza el divisor que termina en cifra par.
>
> P30. No la entendí.
>
> P31. Entendí que es cuando un divisor no se puede dividir

Romaña (2014) concluye que los profesores al no ser conscientes de los términos o frases que utilizan durante su práctica docente, obstaculizan en sus estudiantes el aprendizaje de los conceptos relacionados a la noción de divisibilidad. Así mismo señala que el mal uso de las metáforas conceptuales puede convertirse en un causal directo del bajo rendimiento académico de los estudiantes. Así mismo hace hincapié que la mayoría de las metáforas utilizadas por los docentes inducen a errores, dificultando el aprendizaje de los estudiantes, poniendo en evidencia una falta de eficacia en la comunicación de los significados pretendidos por el profesor.

Este estudio en particular fue muy importante para la presente investigación porque a partir de los preceptos formulados por Romaña (2014) se prestó especial interés para que los alumnos comprendan los mensajes formulados por el docente investigador en cada una de las sesiones del desarrollo experimental de la presente investigación.

El cuarto estudio citado es el realizado por López (2015) quien realizó un estudio sobre los significados de la divisibilidad de los maestros en formación. El estudio realizado en los años 2011-2012 contemplaba un piloto con 104 maestros y sirvió para establecer un diagnóstico sobre los significados de las relaciones de ser múltiplo y ser divisor. Este estudio estuvo orientado a mostrar la divisibilidad como una relación de orden y no como una expresión para referirse a un tipo de operación aritmética.

Con esta investigación se trató de constatar si un trabajo sistemático en el aula, en que se haga énfasis en la divisibilidad como relación, permite a los maestros en formación el desarrollo de conocimientos más sólidos en el tema de divisibilidad y reducir las dificultades que se detectan en la práctica. Por otra parte, el estudio busco describir y caracterizar los significados de este grupo de maestros sobre divisibilidad.

Posterior al piloto se realizó el estudio de investigación que se enmarca dentro del paradigma de la investigación basada en diseño. Los sujetos de estudio fueron 40 maestros en formación alumnos de la asignatura bases matemáticas para la educación primaria de la facultad de educación de la universidad de Granada.

Es importante señalar que este estudio evidencio que ningún maestro pudo señalar explícitamente que ser múltiplo o ser divisor se refiera a una relación entre números que exige una condición necesaria y suficiente. La mayoría asoció ser múltiplo a la multiplicación y ser divisor a la operación aritmética de división.

Otro aspecto importante y que se evidenció, fue la transformación del número escrito como producto de factores primos a la forma de escritura posicional de base 10, la cual está basada en la necesidad que tienen de hacer una operación aritmética conocida. Esto los llevó a no considerar la representación del número como producto de factores primos.

Así mismo en esta investigación se encontraron diferentes acepciones o modos de uso relacionadas a los conceptos de múltiplo y divisor como: Múltiplo como resultado de un producto (MP), Múltiplo como dividendo (MD), Múltiplo como relación (MR), Múltiplo como factor de un producto (MF), Divisor como consecuencia de una división entera (D-cd), Divisor como rol de divisor de una división entera (D-rol), Divisor como relación (D-R).

En conclusión, las investigaciones descritas en este apartado desde diferentes enfoques y haciendo uso de diversas metodologías, contribuyen con el presente estudio en sus partes más importantes: desde la descripción y caracterización del proceso de construcción de los conceptos matemáticos pertinentes para desarrollar las situaciones planteadas y señaladas por Roig, Llinares y Penalva (2010) que dan sustento a la creación y resolución de problemas auxiliares como un recurso para la resolución de los problemas originales planteados en las sesiones del desarrollo experimental de esta investigación. Por otra parte, el análisis de ambos tipos de problemas permite crear y resolver el problema retrospectivo orientado a consolidar la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Esto da validez a la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) que proponemos en este estudio como una estrategia para la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural y que describiremos en el apartado 3.1.3. Así mismo el estudio del discurso metafórico de un profesor durante su práctica docente y su implicancia en el proceso de aprendizaje vertidos en Romaña (2014); nos ha permitido reparar en la necesidad e importancia de diseñar el discurso adecuado para transmitir los conceptos y nociones básicas de la estrategia OAR, el uso adecuado de los enunciados verbales de las respectivas situaciones problemas planteadas y que estos sean entendidos por los alumnos. Finalmente, el estudio de Bodí (2006) y López (2015) han contribuido de sobre manera para identificar y caracterizar los niveles de comprensión que evidenciaron los estudiantes antes y después de aplicar la estrategia OAR en el desarrollo de la presente investigación.

A continuación, en el siguiente apartado haremos una revisión de antecedentes de investigación relacionados a la línea de creación de problemas.

1.1.2. Investigaciones relacionadas a la línea de creación de problemas

Cazares, Castro y Rico (1998) realizaron un estudio cualitativo, descriptivo, evolutivo y transversal para encontrar evidencias que permitan caracterizar el desarrollo cognitivo y evolutivo en la competencia aritmética que presentan los alumnos cuando desarrollan tareas de creación de problemas y con ello aportar información relevante que permita su inclusión en los diseños curriculares en el nivel primario.

El estudio se aplicó en 14 estudiantes mexicanos entre 6 y 13 años pertenecientes al nivel pre escolar y primario (se consideró todos los grados y ambos sexos) a los cuales se aplicó un cuestionario en el que se les propuso inventar un enunciado de problema a partir de situaciones de compra venta que se les mostraba en imágenes y solicitándoles buscar procedimientos para su resolución. Los resultados fueron evaluados tomando en consideración cinco categorías de análisis: la coherencia global del enunciado del problema, la estructura semántica del problema; la utilización de los datos numéricos que aparecen en la imagen, la coherencia de las operaciones con la estructura del problema, y la justificación del procedimiento de resolución.

Como principales conclusiones, Cazares et al. (1998) mencionan que:

> Es posible afirmar que a medida que avanza la edad de los niños y su escolarización tendrán una mayor competencia aritmética para inventar y resolver problemas. La caracterización de los distintos niveles de desarrollo en dicha competencia permitirá decidir en qué momento de su escolaridad es apropiado, pedagógicamente hablando, plantear, formular y resolver un determinado tipo de problemas y si éstos serán abordados con éxito por los escolares. Es decir, adecuar la enseñanza al conocimiento aritmético de los alumnos constituye un gran avance y garantizaría un mejor desempeño en esta clase de actividades. En este sentido el profesor de Educación Primaria dispondrá de una mayor información sobre la competencia aritmética en la invención y resolución de problemas en general y sobre algunos de los procesos que tienen lugar durante el desarrollo de estas actividades que, por otro lado, representan una gran riqueza de posibilidades para continuar explorando no sólo en el nivel teórico sino también en el campo de la innovación curricular. (p. 35)

Otro estudio citado, es el desarrollado por Song, Yim, Shin y Lee (2007) que tiene por finalidad analizar como los estudiantes sobresalientes en matemáticas, cambian las estructuras o los datos iniciales para plantear nuevos problemas. Los investigadores usaron como marco teórico la creación de problemas propuesta por Brown y Walter en el año 1990, basada en la estrategia “¿Qué pasaría sí?”, que consiste en plantearse esta pregunta al cambiar los elementos del problema.

Este estudio se realizó en estudiantes coreanos de educación primaria catalogados como sobresalientes y cuyas edades fluctuaban entre 11 y 12 años.

En cuanto al procedimiento metodológico, Song et al. (2007), emplearon el juego de NIM (Figura 1.3) el cual dispone de veinte cubos de color amarillo y uno negro y donde participan dos estudiantes que pueden retirar de uno a tres cubos alternadamente, el estudiante que toma el ultimo cubo negro es el ganador.

[Activity 1-1] Seeking strategies for winning the cube-taking game

(Understand the game) Let's make pairs and let's try to find ways to win the game 1.

Game 1: Twenty units of yellow-coloured tubes are connected with one unit of black tube. Two students on the rock-scissors-paper method determine order. Then, students take turns to take from one to three cubes. The student who takes the last cube is the winner.

Figura 1.3 Problema original basado en el juego de NIM

Para este estudio se plantearon dos actividades, La primera donde se propone establecer una estrategia ganadora para dicho juego, posteriormente se les solicita modificar el juego principal cambiando o agregando nuevas condiciones en las reglas del juego, como respuesta a esta segunda actividad se recoge una nueva versión del juego propuesta por el estudiante. (Figura 1.4).

Los hallazgos de Song et al. (2007) muestran que la mayoría de los estudiantes más destacados obtuvieron una comprensión precisa de la estructura y de los datos del problema planteado, y luego de ir modificando de manera coherente un componente tras otro llegaron a producir sus propias versiones del juego; sin embargo, la tendencia en los estudiantes no tan destacados fue a modificar uno o dos componentes de forma intuitiva sin intentar mirar toda la estructura.

[Activity 2-2] Creating new rules of the game or posing new problems by modelling on the demonstrated example of changing problems:

1. (Presented example) Present an example of a new game modified by one student.

(1) Place a black-coloured cube at the center with 7 yellow cubes connected on its left side, and 13 red cubes on its right side. (2) Two students will take turn to take at least one and up to three cube of he same colours. They take cubes from either right or left side; (3) The student who takes the black cube will be the loser.

2. (Look at the demonstrated case, make their versions of modified game) Students will get a clue from the demonstrated case of making new games and game problems. Then they will be suggested to make their versions of modified games.

Figura 1.4 Problema modificado basado en el juego de NIM

En base a estos hallazgos los investigadores siguieren que para plantear problemas se debe comenzar con un problema básico y alentar a plantear nuevos problemas generalizando y abstrayendo la estructura matemática, relación y patrones inmersos en la situación planteada; así mismo consideran que los estudiantes deben ser motivados a resolver sus propios problemas dado que en algunos casos se plantearon problemas que no podían encontrar su solución.

Otro estudio considerado es el realizado por Ayllón (2012), el cual plantea analizar las capacidades y conocimientos numéricos que movilizan los estudiantes de educación primaria cuando crean y resuelven problemas, Así mismo buscó identificar las creencias sobre el significado e importancia de la creación de problemas y describir los criterios que usan los alumnos para señalar si un problema es difícil o no.

El estudio fue de tipo cualitativo y cuantitativo realizado en los años 2001 y 2010, con estudiantes españoles de todos los niveles de educación primaria, pertenecientes a tres colegios concertados de la ciudad de Granada. Este estudio se construye sobre los resultados obtenidos en un colegio y que a su vez son insumos para un segundo y tercero respectivamente.

En la primera etapa tuvo como base los estudios realizados por Cazares et al. (1998) donde a partir de situaciones de compra venta que se les mostraba en imágenes, se les solicitaba crear problemas y buscar procedimientos para su resolución.

Con la información obtenida se diseñó un formato de entrevista de tres secciones: la primera parte recogía información sobre la comprensión del significado de un problema, su importancia, sus elementos; en la segunda sección se pedía crear y resolver un problema a partir tarjetas anteriores; y la tercera parte se dedicaba a indagar sobre las características de los problemas difíciles, presentándoles varios problemas ya preparados y ordenados según dificultad y que fueron elaborados por ellos mismos en sesiones anteriores.

Finalmente Ayllón (2012) señala que los resultados del estudio reflejan que los estudiantes de educación primaria demuestran capacidad para inventar problemas coherentes tanto de estructura aditiva como multiplicativa, asociados a lo aprendido en clases; así mismo demuestran capacidades para resolver sus propias producciones, aunque se evidencia ciertas dificultades para la redacción de sus invenciones y resolver problemas creados por sus compañeros, además se observa que las características que más dificultan el proceso de resolución de un problema son el tamaño de los números, la cantidad de operaciones que se necesitan para resolverlos y sobre todo si en el enunciado aparece un elemento aún no han estudiado.

En síntesis; de las investigaciones revisadas en este apartado, rescatamos que a través del enfoque de la creación de problemas se pretende que los alumnos mejoren su capacidad creativa y analítica, que sirva de evidencia para describir, analizar y caracterizar el desarrollo cognitivo y evolutivo de la competencia aritmética. Además de servir como insumo para la planificación, ejecución y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los espacios educativos de acorde al nivel o grado en que se encuentre, tal como se señala en (Ayllón, 2012; Cazares, Castro y Rico, 1998).

Particularmente en nuestro caso y tomando en consideración las ventajas que ofrece la creación de problemas descritas en este estudio, nos centramos en estudiantes del primer grado de educación secundaria, con el propósito de contribuir en la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisor de un número natural y de esta manera contribuir con el desarrollo de la competencia aritmética.

Así mismo en (Song, Yim, Shin y Lee, 2007), se sugiere que para plantear problemas se debe comenzar con un problema básico y alentar a plantear nuevos problemas, generalizando y abstrayendo relaciones y patrones inmersos en la estructura matemática de la situación planteada. Sugiere además poner énfasis en la creación de problemas por variación, modificando algunos de los elementos del problema planteado. Precisamente este planteamiento ha sido recogido en el marco teórico de referencia de nuestra investigación.

1.2. Justificación

Para explicar la relevancia de estudiar la comprensión de los conceptos múltiplos y divisores de un número natural, mediante la creación de problemas en estudiantes de primer grado de educación secundaria; nos enfocamos en cinco ámbitos, en primer lugar, desde el análisis curricular, identificando la relevancia de los conceptos matemáticos en estudio; en segundo lugar desde los resultados de las pruebas de evaluación de desempeñó que nos ubican en situación muy desfavorable; en tercer lugar desde la estructura matemática; en cuarto lugar desde los obstáculos encontrados en las investigaciones y en quinto lugar desde el enfoque de creación de problemas y los resultados positivos que se obtienen a través de mismo..

1.2.1. Desde el análisis curricular.

El Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) (Ministerio de Educación del Perú [Minedu], 2016a) es la base para la elaboración de los programas y herramientas curriculares de Educación Básica Regular, Educación Básica Alternativa y Educación Básica Especial, orienta los aprendizajes que se deben garantizar como Estado y sociedad y debe ser usado como fundamento de la práctica pedagógica en las diversas instituciones y programas educativos, sean públicas o privadas. Asimismo, promueve la innovación y experimentación de nuevas metodologías y prácticas de enseñanza en las instituciones y programas educativos que garanticen la calidad en los resultados de aprendizaje.

El CNEB está estructurado en base a cuatro definiciones curriculares que orientan la práctica educativa: las competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeño.

Precisamente los conceptos matemáticos de múltiplos y divisores de un número natural que son materia de nuestro estudio se encuentran en la competencia

"Resuelve problemas de cantidad" establecida en el Currículo Nacional para la Educación Básica (Minedu, 2016a) a partir del ciclo V, donde se establece que:

> El estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de cantidad, número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además, dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones. Implica también discernir si la solución buscada requiere darse como una estimación o cálculo exacto, y para ello selecciona estrategias, procedimientos, unidades de medida y diversos recursos […]. (p. 143)

Cuando el estudiante resuelve problemas de cantidad y logra el nivel esperado del ciclo V, realiza desempeños como los que se muestra. (Figura 1.5)

DESEMPEÑOS DE SEXTO GRADO

- Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de:
  - El valor posicional de un dígito en números de hasta seis cifras y decimales hasta el centésimo, así como las unidades del sistema de numeración decimal.
  - Los múltiplos y divisores de un número natural; las características de los números primos y compuestos; así como las propiedades de las operaciones y su relación inversa
  - La fracción como operador y como cociente; las equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales; las operaciones de adición, sustracción y multiplicación con fracciones y decimales.

Figura 1.5 Múltiplos y divisores de un número natural dentro de los desempeños de sexto grado

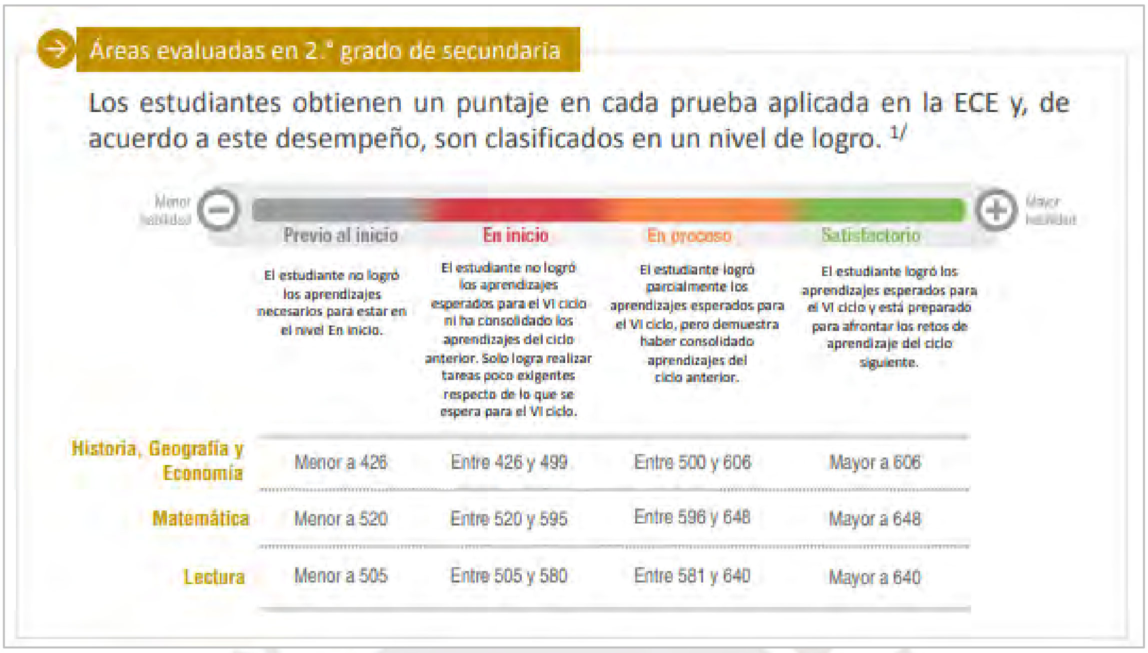
Fuente: Adaptado del Programa curricular de Educación Primaria (Minedu, 2016)

Así mismo, en el Programa Curricular para la Educación Secundaria, (Minedu, 2016b) evidencia la importancia del enfoque de la creación de problemas en el aprendizaje de los estudiantes el cual es materia de nuestro estudio y en el que se considera que:

- Al plantear y resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución. Esta situación les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso, el estudiante construye y reconstruye sus conocimientos al relacionar, y reorganizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad.
- Los problemas que resuelven los estudiantes pueden ser planteados por ellos mismos o por el docente para promover, así, la creatividad y la interpretación de nuevas y diversas situaciones. (p. 148)

1.2.2. Desde los resultados de evaluación de desempeño.

Los resultados de la última Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) recogidos en (Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes del Ministerio de Educación del Perú [UMC], 2016), muestran que en el área de matemática correspondiente al VI ciclo, el 71,6% de los estudiantes del 2º grado (entre 11 y 13 años) de educación secundaria no lograron los aprendizajes esperados, ni han consolidado los aprendizajes del ciclo anterior, estipulados en los niveles de desempeño que se señalan en el CNEB. Un 16.9% se encuentra en proceso y solo el 11.5 % logró los aprendizajes esperados que se muestran en la Figura 1.6 y Figura 1.7



	Previo al inicio	En inicio	En proceso	Satisfactorio
Historia, Geografía y Economía	Menor a 426	Entre 426 y 499	Entre 500 y 606	Mayor a 606
Matemática	Menor a 520	Entre 520 y 595	Entre 596 y 648	Mayor a 648
Lectura	Menor a 505	Entre 505 y 580	Entre 581 y 640	Mayor a 640

Figura 1.6 Clasificación de los niveles de logro evaluación censal de estudiantes 2016
Fuente: (UMC, 2016, p. 62)

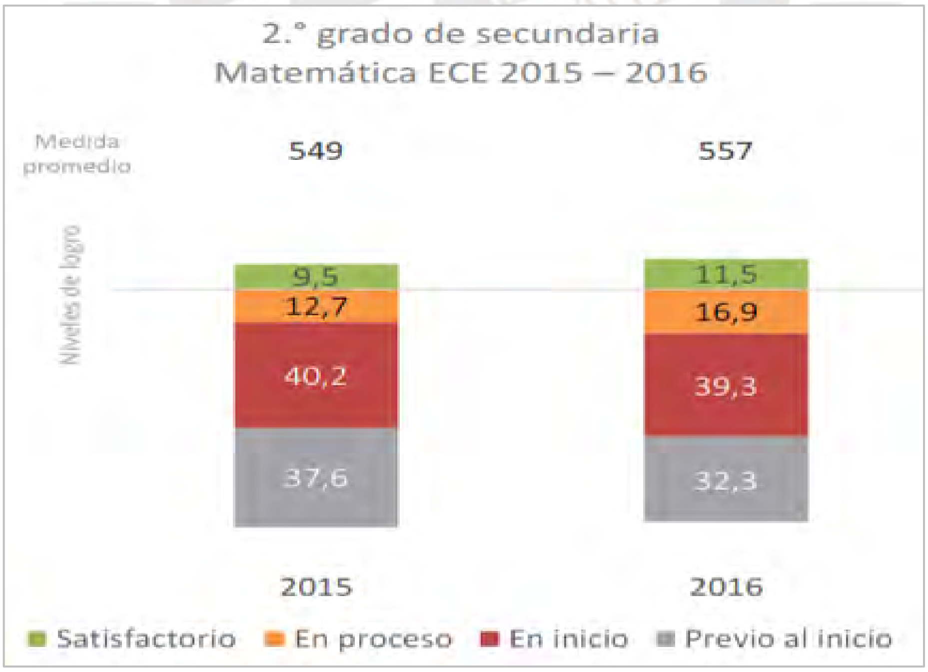


Figura 1.7 Resultado de la Evaluación Censal de Estudiantes ECE 2015-2016
Fuente: (UMC, 2016, p. 95)

Por otro lado, también se encuentra los resultados obtenidos en las pruebas PISA 2015 (UMC, 2017) en el área de matemática, donde se pone en evidencia que el 66,1% de la población estudiantil de nuestro país se encuentra por debajo del nivel 1 respecto a los 6 niveles de desempeño establecidos por PISA. (Figura 1.8).

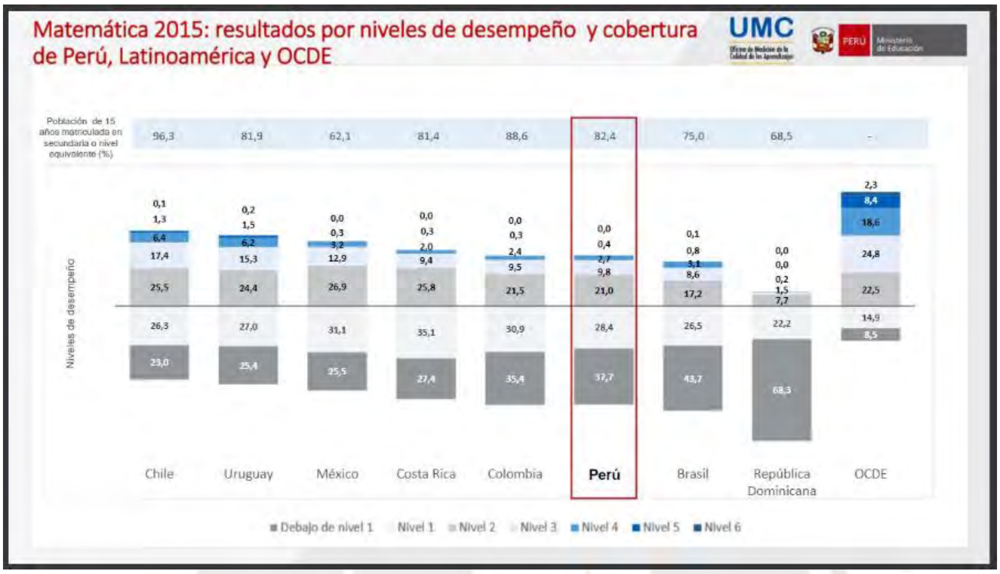


Figura 1.8 Resultados de la prueba PISA 2015

Es evidente que frente a estos resultados los aprendizajes de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural también son afectados y ameritan con suma urgencia intervenciones que permitan revertir esta situación.

1.2.3. Desde la estructura matemática.

La importancia del aprendizaje del concepto matemático de divisibilidad (eje principal de nuestra investigación) radica en el hecho de que este tema se ve inmerso como conocimiento previo en el desarrollo de temas tales como: adición y sustracción de fracciones heterogéneas, factorización de polinomios, resolución de ecuaciones e inecuaciones, resolución de ecuaciones diofánticas, reparto proporcional directo e inverso, múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida entre otros tal como se muestran en los libros de texto usados en la educación secundaria.

1.2.4. Desde los obstáculos evidenciados en las investigaciones.

En las investigaciones descritas en los antecedentes, se muestran evidencias de obstáculos que influyen en la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural, los cuales han sido tomados en cuenta para el desarrollo del presente estudio:

- Al tratar los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural; los alumnos lo relacionan directamente a las operaciones de multiplicar y dividir respectivamente. Si bien es cierto que esto es válido, sin embargo, restringe la comprensión de dichos conceptos a dichas operaciones, focalizando la resolución de problemas solo mediante este proceso metodológico, sin tomar en consideración otras alternativas, como el análisis y resolución a través de los criterios de divisibilidad o a través del análisis de la divisibilidad como una relación de contenencia. Todo esto contribuye al supuesto que la divisibilidad es un número que resulta de multiplicar y/o dividir y no como una relación entre números obstaculizando la comprensión de la noción de divisibilidad.
- Otro obstáculo relacionado al anterior (divisibilidad asociada a las operaciones de multiplicar o dividir) hace que los alumnos realicen cambios invariantes en el sistema de representación original hacia el sistema de representación numérica posicional de base diez y desde allí usando las operaciones descritas evalúan la divisibilidad entre números, siendo en algunos casos innecesario realizar este proceso y en otros de tanta dificultad para los alumnos que simplemente desiste.

  Un ejemplo de ello se muestra en la figura 1.9 donde se aprecia como el estudiante realiza el cambio del sistema de representación canónica hacia el sistema de representación numérico posicional de base diez y luego procede a usar las operaciones de multiplicar y dividir para respuesta al problema

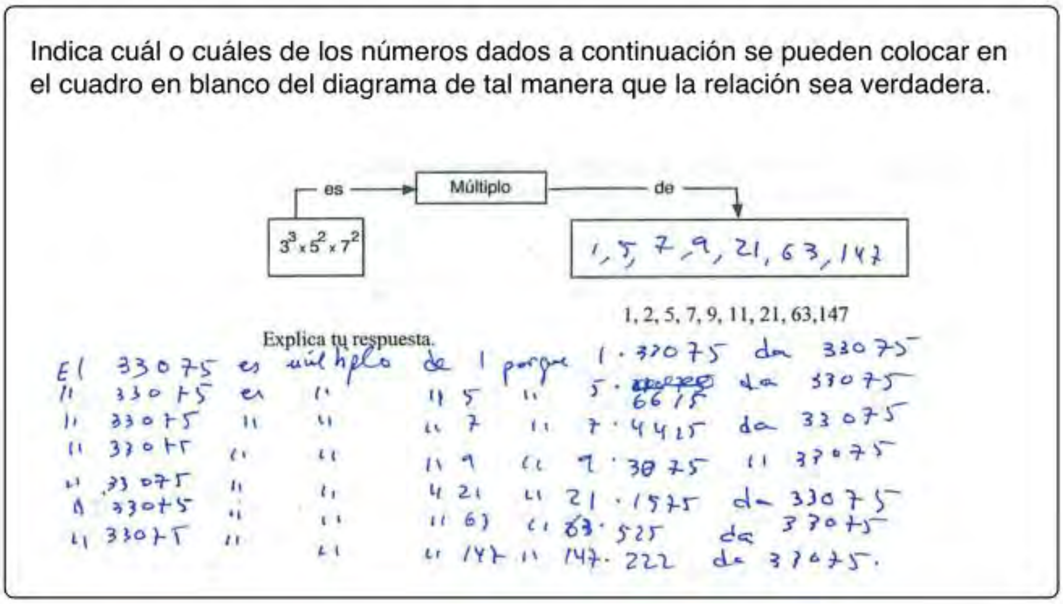


Figura 1.9 Ejemplo de cambio de sistema de representación para evaluar la divisibilidad entre números

Fuente: (López, 2015, pp. 107)

- El desconocimiento de algunos de los criterios elementales de divisibilidad que limitando la comprensión y genera como en los casos anteriores procesos innecesarios.
- Nuevamente y sobre la base de las dificultades anteriores, los alumnos no toman en consideración que pueden evaluar la divisibilidad entre números a partir de sus factores primos, tal como se expresa en Diaz (1980). “Para que un número sea divisible por otro es necesario y suficiente que el primero contenga todos los factores primos del segundo con exponentes iguales o mayores” (p. 54).
- El no contemplar estos obstáculos y las diversas acepciones sobre la divisibilidad e identificadas en las investigaciones de referencia; se corre el riesgo de desvirtuar el concepto inicial de la divisibilidad como una relación y no como resultado de una operación.

Todos estos obstáculos y acepciones justifican la necesidad de hacer un estudio como el nuestro, orientado hacia la comprensión del concepto de múltiplo y divisor de un número en alumnos de educación secundaria.

.

1.2.5. Desde el enfoque de la creación de problemas.

Malaspina y Vallejo (2014) hacen referencia a reconocidos matemáticos preocupados por la educación matemática que consideraban la creación de problemas como una experiencia matemática importante para los estudiantes y expresan que:

> Ya en 1989 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomendaba a los profesores brindar oportunidades para que los estudiantes piensen matemáticamente y desarrollen sus conocimientos mediante la creación de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Textualmente, decía: “los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas” (p. 138); recomendaba también que a los estudiantes se les dé oportunidades de formular problemas a partir de una situación dada y de crear nuevos problemas modificando las condiciones de un problema dado. (p. 9)

Así mismo Malaspina y Vallejo (2014), manifiestan que la creación de problemas por parte de los alumnos contribuye a desarrollar su creatividad y motivación para el estudio, así como fortalecer sus capacidades para resolver problemas y adquirir una formación matemática más sólida.

En la misma línea Ayllón (2012) señala que la tarea de inventar problemas favorece el incremento del conocimiento matemático, ya que este proceso creativo exige articular conexiones entre los diferentes conceptos matemáticos que se han construido a lo largo de la vida escolar. Además, señala que el proceso de creación y resolución de problemas estimula la motivación en los estudiantes de tal forma que fortalece las actitudes positivas en las clases de matemáticas y por ende contribuye en el incremento del rendimiento académico.

Tomando en consideración los estudios referenciales relacionados a la divisibilidad y la creación de problemas y todo lo expuesto anteriormente creemos que la realización de nuestro estudio es pertinente, pues consideramos que, a través de la creación de problemas, los estudiantes pueden mejorar la comprensión de los conceptos asociados a la divisibilidad y particularmente a las nociones de múltiplos y divisores de un número natural; en ese sentido formulamos la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos del estudio.

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

La pregunta de investigación

¿La creación de problemas contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria?

Objetivo general

Analizar si la creación de problemas, contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, en estudiantes del primer grado de secundaria.

Objetivos específicos

1. Identificar los niveles de comprensión previa de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria.
2. Identificar los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria a través de la creación de problemas por variación aplicando la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo).

CAPÍTULO 2: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo describiremos el objeto matemático de nuestra investigación: múltiplo y divisores de un número natural. Iniciaremos con la evolución histórica, las diferentes concepciones e interpretaciones de reconocidos matemáticos y finalmente como se encuentran actualmente definidos en los textos matemáticos que se usan para el primer grado de educación secundaria.

2.1. Aspectos históricos de la divisibilidad

El desarrollo del concepto de número a lo largo de los años ha marcado el estudio de la divisibilidad. Así como el conocimiento de las matemáticas viene de épocas muy antiguas, siendo usado en la india, en la China, en civilizaciones de la Mesopotamia, fueron los griegos quienes inician el estudio formal de la Aritmética y también quienes asociaron la divisibilidad a la medida y a la representación de un número como segmento de recta. Sin embargo, los Pitagóricos al descubrir los números inconmensurables pusieron en evidencia que no todos los números pueden ser representados por un segmento de recta. Este resultado es usado por Euclides en el siglo IV a.C en su obra “los elementos” (citado en López, 2015). De los 13 libros que conforman su obra; los libros VII, VIII y IX están dedicados a la Aritmética. Es tan importante este tema para Euclides que solo en el libro VII, de las 23 definiciones que contiene; 8 están relacionadas con la divisibilidad:

1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas es llamada una (definición 1)
2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades (definición 2)
3. Un número es parte un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor (definición 3)
4. Pero partes cuando no lo mide (definición 4)
5. Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor (definición 5)
6. Un número primo es el medido por la sola unidad (definición 12)
7. Números primos entre si son los medidos por la sola unidad como medida común (definición 13)
8. Número compuesto es el medido por algún número (definición 14) (pp.58-59)

De las 39 proposiciones del Libro VII de los elementos, 8 están asociados a la divisibilidad:

1. Dado dos números desiguales y restándoles sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre si (proposición 1).
2. Dado dos números no primos entre sí, hallar su medida común máximo (proposición 2).
3. Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor (proposición 4).
4. Todo número primo es primo con compuesto a todo (número) al que no mide (proposición 29).
5. Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los iniciales (proposición 30).
6. Todo número compuesto es medido por algún número primo (proposición 31).
7. Todo número o es primo o es medido por algún primo (proposición 32).
8. Dados dos números, hallar el menor número al que miden (proposición 34). (pp, 59)

En el libro IX de los Elementos la proposición 14 establece que: "si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que les median desde un principio" (pp.59)

Las 8 definiciones y las 9 proposiciones que se hemos señalado de la obra de Euclides han sido el inicio del estudio formal de la divisibilidad y que han sido referencia en los trabajos posteriores, muchos siglos después

Con el descubrimiento de los números primos surgieron dos preguntas. ¿Cuántos números primos hay? Y ¿Cuál es el n-ésimo primo? El mismo Euclides demostró la existencia de infinitos números primos tal como lo demuestra en su obra "Los elementos".

Eratóstenes de Cirene (278 – 194 a.C), con la finalidad de encontrar los números primos diseño un método llamado "Criba de Eratóstenes", el cual permite determinar todos los primos menores que un número n dado; partiendo de hecho de que si un número entero $a > 1$ no es divisible por ningún primo $p \leq \sqrt{a}$, entonces a es primo, por lo tanto, conocidos los primos $p \leq \sqrt{n}$, en aquella lista se tachan todos los múltiplos de p, mayores que p. Al terminar esta operación quedan los primos menores que n.

Ya en la era cristiana como continuación de los elementos de Euclides, aparece la famosa aritmética de Diofanto de Alejandría. A diferencia de Euclides, Diofanto en el siglo III d.C trató a los números de una forma algebraica y no geométrica.

Con respecto a la segunda pregunta sobre cuál es el n-ésimo primo. Un resultado que aparece en la obra los “Elementos” y que dio lugar a uno de los más antiguos problemas abiertos de la teoría de números señala, que un número natural de la forma $2^p - 1$ es primo sólo si el número $2^{p-1}.(2^p - 1)$ es un número perfecto. (Un número natural n se dice que es perfecto si la suma de todos sus divisores positivos es $2n$.Por ejemplo, n=6, n=28, n=496, n=8128 son números perfectos)

Marín Mersenne (1588-1648) planteó una serie de conjeturas sobre el primalidad de los números de la forma $M_n = 2^p - 1$ (números de Mersenne). En 1644 conjeturó que M_p es primo para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 67, 127, 257$ y compuesto para todos los otros primos menores a 257. Con el uso de las calculadoras se demostró que había errores.

Por otro lado, el matemático Pierre de Fermat citado en Gentile (1991) conjeturó que los números de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eran primos para todos los $n \epsilon \mathbb{N}$. En este contexto, Euler demostró que Fermat estaba equivocado, pues probó que F_5 es divisible por 641. Sin embargo, en la actualidad se sabe que F_n es primo para $0 \leq n \leq 4$ y compuesto para $5 \leq n \leq 19$ y para muchos valores de n; aunque se ignora si existen infinitos primos de la forma F_n (primos de Fermat).

Posteriormente Euler probó que si n es un número perfecto par entonces tiene la forma $2^{p-1}.(2^p - 1)$ con $(2^p - 1)$ primo. Queda por resolver la existencia de números perfectos impares.

Euler continua los trabajos para encontrar una fórmula que permita determinar el n-ésimo primo en 1772 plantea:

$$X^2 - X + 41 = primo,\ x = 0, 1, 2,\ \dots, 40$$

Por otra parte, Legendre (1798) plantea:

$$X^2 + X + 41 = primo,\ x = 0, 1, 2,\ \dots, 39$$

Sin embargo, vieron que solo funcionaba para determinados valores de X y este proceso de encontrar la fórmula continua hasta el día de hoy.

Por otro lado, con el propósito de estudiar la distribución de los números primos; Gauss, observando tablas de números primos conjeturó en 1792 que la distribución de los números primos tenía el comportamiento asintótico de una función real.

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \cup (0)$$
$$\pi(x) := numero\ de\ primos\ positivos\ \leq x$$
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}\ cuando\ x \rightarrow \infty$$
$$(\log(x) = logaritmo\ natural)$$

Gauss en su obra llamada “Disquisitiones arithmeticae” sentó la base de la teoría de números como disciplina consistente. Gauss demostró el “Teorema fundamental de la aritmética” que Euclides ya había enunciado en su obra “los elementos”.
Es importante reconocer como Gauss contribuyó con el origen de la aritmética modular con su estudio de la congruencia y de los números primos y con la formulación de los enteros Gaussianos y su utilidad para evaluar la divisibilidad entre números.
Sobre estos avances se desarrolla actualmente la criptografía RSA. Este sistema se basa en el problema matemático de la factorización de números grandes específicamente con el uso de números primos y es uno de los mejores ejemplos de aplicación de las matemáticas en el campo de la seguridad y confidencialidad tan usado en nuestros tiempos.

2.2. Conceptos y términos básicos de la divisibilidad

Dado que la investigación busca contribuir a la comprensión de los conceptos matemáticos de múltiplos y divisores de un número natural a través de la creación de problemas; mostraremos través de prestigiosos matemáticos, los conceptos y acepciones asociados a los elementos relacionados a nuestro objeto de estudio, los cuales no necesariamente coinciden unos de otros. Sin embargo, son válidos si se toma en consideración el contexto en que son formulados.

Iniciaremos primero con el diccionario básico de matemáticas (Díaz, 1980) donde se plantea la noción de divisibilidad a partir de la expresión “contiene” y se establece que un número entero es divisible por otro si lo contiene un número entero y exacto de veces. Para evaluar dicha relación toma en consideración diversos procedimientos:

1. A través de la división entera y exacta es decir con resto cero. Ejemplo: $30 \div 3 = 10$; 30 es divisible entre 3 pues lo contiene exactamente 10 veces. P.54
2. Así mismo considera que la relación de divisibilidad puede evaluarse a través de una serie de reglas denominadas criterios de divisibilidad sin la necesidad de realizar la operación aritmética de división. Por ejemplo, un número es divisible por:
   - 2, si termina en 0 o cifra par.
   - 3, si lo es la suma de sus cifras.
   - 5, si la última cifra es cero o cinco.

   Siendo así podemos decir que 36 es divisible por 3, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
3. Para que un número sea divisible por otro es necesario y suficiente que el primero contenga todos los factores primos del segundo con exponentes iguales o mayores (p. 54). Por ejemplo: 144 es divisible por 72; porque 144 contiene todos los factores primos de 72 y además los exponentes de dichos factores son mayores o iguales a los exponentes de los factores primos de 72.

$$144 = 2^4.3^3$$

$$72 = 2^3.3^2$$

De igual forma en (Díaz, 1980) se define que:

> **Factor**. Cada uno de los términos que se multiplican por otro en una multiplicación (p. 68).
>
> **Factor primo**. Factor de un número que es número primo (p. 68).
>
> **Número primo**. Número natural, que es divisible más que por él mismo y la unidad.
>
> **Número compuesto**. Número que tiene más factores comunes que él mismo y la unidad; es decir, no es primo (p. 113).

Múltiplo. Cantidad aritmética o algebraica que es producto de otras dos que son divisores de ellas (p. 106)

Ej.:

$$\underbrace{4\ x\ 3}_{factores} = \underbrace{12}_{múltiplo}$$

$12\ es\ multiplo\ de\ 4\ y\ de\ 3$

El segundo texto usado para mostrar definiciones es el diccionario de matemáticas de Vera (1960) citado en López (2015) donde se define la Divisibilidad Numérica como las condiciones que debe satisfacer un número para ser divisible por otro, es decir para que el cociente de la división sea exacta.

Así mismo, Vera (1960) citado en López (2015) considera que "para que un número sea divisor de otro es necesario y suficiente que no contenga ningún factor primo que no esté contenido en el que ha se de ser divisible y que ninguno este elevado a mayor potencia" (pp. 45)

Además, sugiere que para calcular la cantidad de divisores de un número" n" descompuesto en sus factores primos $n = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$ se use la siguiente formula:

$D(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots (\lambda + 1)$

Por otro lado, Vera (1960) (citado en López, 2015) considera que:

> Para obtener todos los divisores de n, se escriben en una fila la unidad y las potencias sucesivas de a hasta a^{α}; luego se multiplican estos números por $b, b^2, b^3, \dots b^{\beta}$; después se forman los productos de estos números por $c, c^2, c^3, \dots c^{\gamma}$ y así se continua hasta multiplicar por l^{λ} (pp. 46).

Por otro lado, consideramos el libro "Fundamentos de la teoría de números" de Vinográdov (1977) el cual es un manual de texto destinado a estudiantes de las facultades de matemáticas de las universidades. En este libro, en su primer capítulo se describe la teoría de la divisibilidad. A continuación, daremos algunas proposiciones tomadas de tal libro:

Conceptos y teoremas fundamentales

Si el cociente de la división de a por b es entero, designándole con la letra q, se tiene $a = bq$, es decir, a es igual al producto de b por un entero. Diremos entonces que a es divisible por b o que b divide a a. En este caso, a se llama múltiplo de b y b se llama divisor de a. El hecho de que b divide a a se escribe así: $b \backslash a$.

Unicidad de la descomposición en factores primos

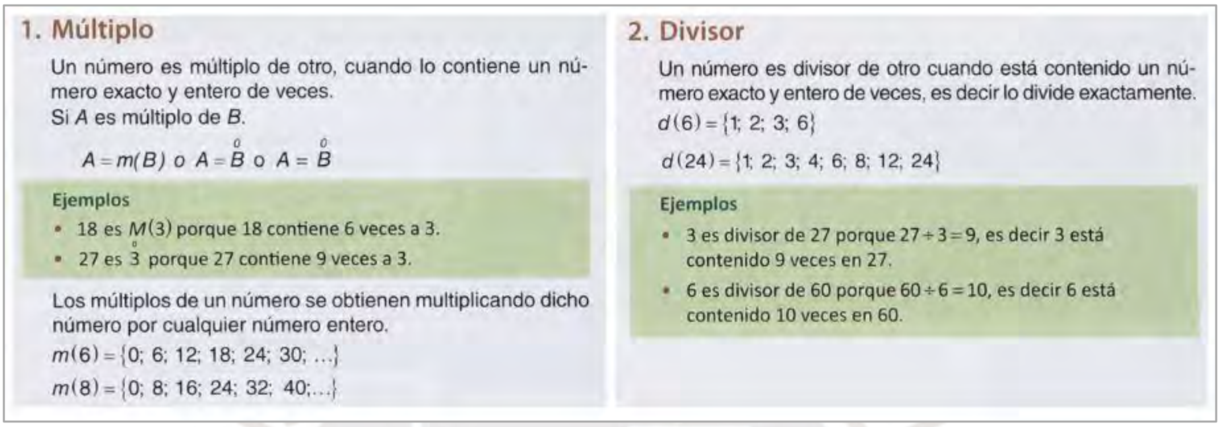
a. Todo entero, mayor que la unidad, se descompone en un producto de factores primos y, además, de modo único, si no se tiene en cuenta el orden de los factores […]
   $a = p_1 p_2 \dots p_n$
b. En la descomposición del número a en factores primos algunos de ellos pueden repetirse, Designando con las letras $p_1, p_2, \dots, p_k$ los primos distintos que figuran en dicha descomposición y con las letras $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sus exponentes obtenemos la llamada descomposición canónica del número a en factores
   $a = p_1^{\propto_1} p_2^{\propto_2} \dots p_k^{\propto_k}$ (p. 27-29).

2.3. La divisibilidad en los libros de textos de educación secundaria

Consideramos que los libros de texto son uno de los principales recursos didácticos que utilizan los profesores en la planificación de sus actividades. En ese sentido en este apartado consideramos pertinente destacar el tratamiento que dan algunos libros de texto usados en el primer grado de educación secundaria, con relación al tema de divisibilidad, enfatizando en los conceptos de múltiplos y divisores, así como sus elementos relacionados, si pretender hacer un análisis exhaustivo de los mismos.

Análisis del libro de texto BRUÑO

En el libro de texto (Asociación Editorial Bruño [BRUÑO], 2018), el tratamiento de los contenidos relacionados a la noción de divisibilidad, básicamente es procedimental, pues está marcado por la realización de operaciones aritméticas como se puede apreciar en la figura 2.1



1. Múltiplo

Un número es múltiplo de otro, cuando lo contiene un número exacto y entero de veces.
Si A es múltiplo de B.

$A = m(B)$ o $A = \overset{o}{B}$ o $A = \overset{o}{B}$

Ejemplos
- 18 es $M(3)$ porque 18 contiene 6 veces a 3.
- 27 es $\overset{o}{3}$ porque 27 contiene 9 veces a 3.

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por cualquier número entero.
$m(6) = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; \ldots\}$
$m(8) = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; \ldots\}$

2. Divisor

Un número es divisor de otro cuando está contenido un número exacto y entero de veces, es decir lo divide exactamente.
$d(6) = \{1; 2; 3; 6\}$
$d(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Ejemplos
- 3 es divisor de 27 porque $27 \div 3 = 9$, es decir 3 está contenido 9 veces en 27.
- 6 es divisor de 60 porque $60 \div 6 = 10$, es decir 6 está contenido 10 veces en 60.

Figura 2.1 Definiciones múltiplo y divisor - Editorial BRUÑO

Si bien es cierto que, en este libro de texto, sobre múltiplo de un número se dice "Un número es múltiplo de otro, cuando lo contiene un número exacto y entero de veces" (BRUÑO, 2018, p. 82). Definiendo el concepto de múltiplo como una relación (MR), sin embargo, posteriormente se expresa que "Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por cualquier número entero" (BRUÑO, 2018, p. 82), denotando una acción procedimental de multiplicar, evidenciando una acepción de múltiplo como producto (MP)

Con respecto a los divisores de un número se sostiene que "Un número es divisor de otro cuando está contenido un número exacto y entero de veces, es decir lo divide exactamente" (BRUÑO, 2018, p. 82), en principio define el concepto de divisor de un número como una relación (D-R) y posteriormente a modo de comprobación propone la operación de dividir, mostrando nuevamente el carácter procedimental para determinar si un número es divisor de otro, evidenciando una acepción de Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd).

Queremos destacar que, en el caso de los ejemplos de los divisores, señala que 3 es divisor de 27 porque al dividir 27 entre 3, se obtiene 9, concluyendo por tal que 3 está contenido 9 veces en 27; la justificación dada es "porque la división es exacta". Sin embargo, no se dice nada del 9 (cociente de la división exacta) que también es divisor de 27, evidenciando una acepción de Divisor como rol de divisor en la división entera y exacta (D-rol); este tipo de razonamiento puede llevar a concepciones erróneas que solo el divisor de una división entera y exacta, es divisor de un número dado (dividendo). Creemos que este tipo de afirmaciones fortalece la noción de divisibilidad como resultado de una operación en detrimento de la divisibilidad como relación entre números.

Por otro lado, en el libro de texto (BRUÑO, 2018, p. 87) para determinar los divisores de un número se sugiere el siguiente procedimiento:

> Se descompone el número dado en sus factores primos. Se toma el factor primo que tiene el mayor exponente y se desarrollan sus potencias. Luego, se multiplica los valores obtenidos en el paso anterior por el siguiente factor. Finalmente, se obtiene una tabla la cual contiene los divisores del número dado (la cantidad de divisores es igual al número de filas por el número de columnas).

Un ejemplo de ello se muestra en la figura 2.1

Ejemplo 2
Elabora la tabla de divisores de 1440.

Solución

1440	2
720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$2^5 \times 3^2 \times 5$

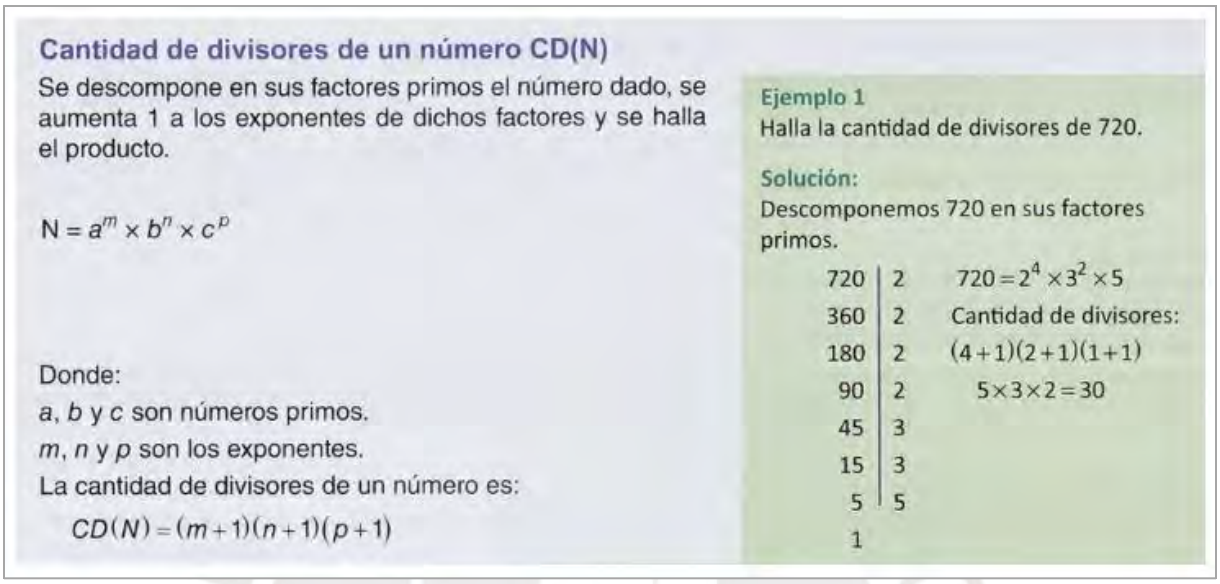
Factor primo afectado al mayor exponente 2^5.
Se desarrollan sus potencias considerando desde el cero al cinco:
$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32$

	1	2	4	8	16	32
×3	3	6	12	24	48	96
9	9	18	36	72	144	288
5	5	10	20	40	80	160
	15	30	60	120	240	480
	45	90	180	360	720	1440

Número total de divisores
Nro. de filas × nro. de columnas 6 × 6 = 36

Figura 2.2 Divisores de un número-método tabular
Fuente: adaptada de (BRUÑO, 2018, p. 87)

Así mismo en el libro de texto (BRUÑO, 2018, p. 88) se da cuenta, que para calcular la cantidad de divisores de un número: “Se descompone en sus factores primos el número dado, se aumenta 1 a los exponentes de dichos factores y se halla el producto”, (Figura 2.3)



Cantidad de divisores de un número CD(N)

Se descompone en sus factores primos el número dado, se aumenta 1 a los exponentes de dichos factores y se halla el producto.

$N = a^m \times b^n \times c^p$

Donde:
a, b y c son números primos.
m, n y p son los exponentes.
La cantidad de divisores de un número es:

$CD(N) = (m+1)(n+1)(p+1)$

Ejemplo 1
Halla la cantidad de divisores de 720.

Solución:
Descomponemos 720 en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

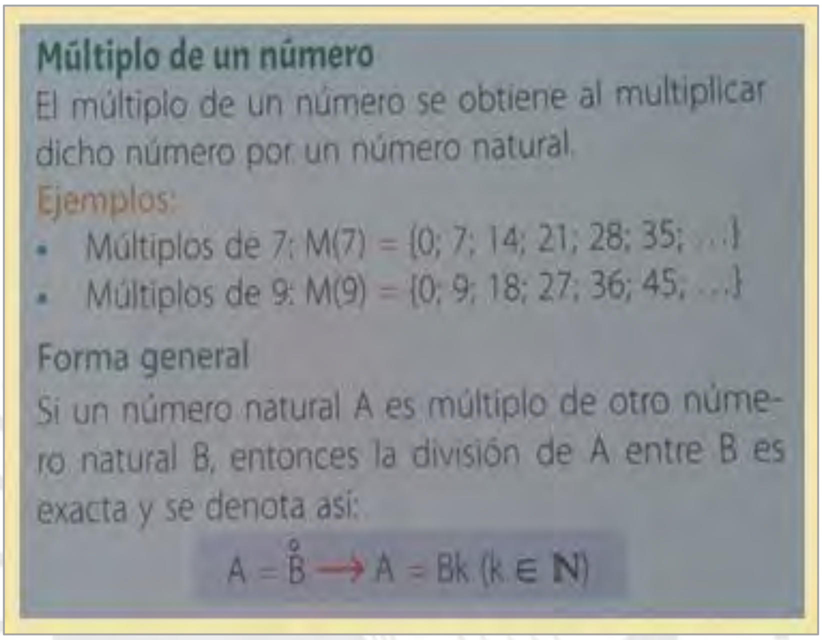
Cantidad de divisores:
$(4+1)(2+1)(1+1)$
$5 \times 3 \times 2 = 30$

Figura 2.3 Cantidad de divisores de un número - Editorial BRUÑO

Respecto a la descomposición canónica de un número, en el libro de texto (BRUÑO, 2018, p. 87) describe que “Todo número entero positivo mayor que la unidad puede expresarse como el producto de sus divisores primos diferentes elevados a exponentes enteros positivos”. Sin embargo, este concepto es usado básicamente como un procedimiento para el cálculo de la cantidad, suma, producto de divisores, sin tomar en consideración su uso como una herramienta para evaluar la relación de divisibilidad entre números.

Análisis del libro de texto COREFO

Por otro lado, el contenido de la divisibilidad del libro de área (Ediciones Corefo [COREFO], 2016) Tanto la definición de múltiplo y divisor de un número utilizada en este texto es únicamente procedimental, en la figura 2. 4, se hace notar que “El múltiplo de un número se obtiene al multiplicar dicho número por un número natural” (COREFO, 2016, p. 68) reforzando la acepción de múltiplo como producto (MP); luego posteriormente en una definición más general (COREFO, 2016, p. 68) dice “Si un número natural A es múltiplo de otro número natural B, entonces la división de A entre B es exacta”, sin decirlo claramente sugiere que para evaluar si un número es múltiplo de otro, hay que usar la división exacta como un mecanismo de verificación, reforzando la idea de múltiplo como dividendo (MP).


Múltiplo de un número

El múltiplo de un número se obtiene al multiplicar dicho número por un número natural.

Ejemplos:

- Múltiplos de 7: M(7) = {0; 7; 14; 21; 28; 35; ...}
- Múltiplos de 9: M(9) = {0; 9; 18; 27; 36; 45; ...}

Forma general

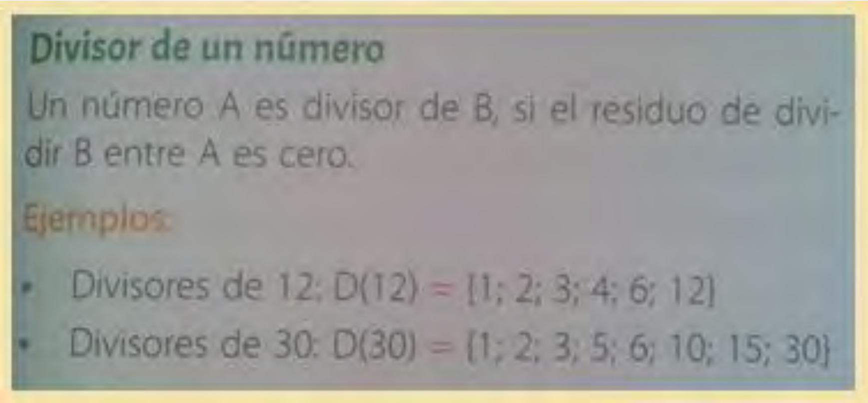
Si un número natural A es múltiplo de otro número natural B, entonces la división de A entre B es exacta y se denota así:

$$A = \overset{\circ}{B} \longrightarrow A = Bk \ (k \in \mathbb{N})$$

Figura 2.4 Múltiplo de un número
Fuente: (COREFO, 2018, p. 68)

En cuanto a divisor de un número en (COREFO, 2016, p. 69) se describe que “Un número A es divisor de B, si el residuo de dividir B entre A es cero”; reforzando la acepción de divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd), ver figura 2.5

Cabe señalar que en este libro de texto no se indica un procedimiento para determinar cuáles son los divisores de un número dado, tal vez considera suficiente la división exacta o los criterios de divisibilidad como única manera. Finalmente señalamos que en este libro de texto, los ejercicios o problemas desarrollados o propuestos básicamente son de carácter intra matemáticos relacionados a aplicar directamente los conceptos vertidos.



Divisor de un número

Un número A es divisor de B, si el residuo de dividir B entre A es cero.

Ejemplos:

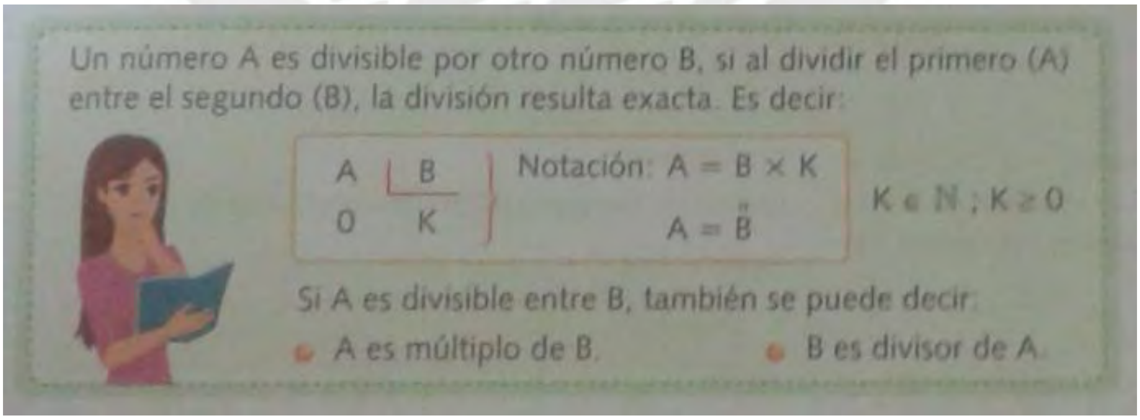
- Divisores de 12: D(12) = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
- Divisores de 30: D(30) = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}

Figura 2.5 Divisor de un número

Fuente: (COREFO, 2018, p. 69)

Análisis del libro de texto GenioMatic

En el libro de consulta (GenioMatic, 2016) el concepto de divisibilidad está asociado directamente a la operación de dividir, reforzando la acepción de divisibilidad como consecuencia de una división exacta es decir para determinar si un número A es divisible por otro número B, se divide el número A entre el número B y se verifica si la división es exacta. De ser así entonces implica que A es múltiplo de B y que B es divisor de A. (Figura 2.6)



Un número A es divisible por otro número B, si al dividir el primero (A) entre el segundo (B), la división resulta exacta. Es decir:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline 0 & K \end{array} \quad \text{Notación: } A = B \times K \qquad A = \overset{\circ}{B} \qquad K \in \mathbb{N}\ ;\ K \geq 0$$

Si A es divisible entre B, también se puede decir:

- A es múltiplo de B.
- B es divisor de A.

Figura 2.6 Noción de ser divisible

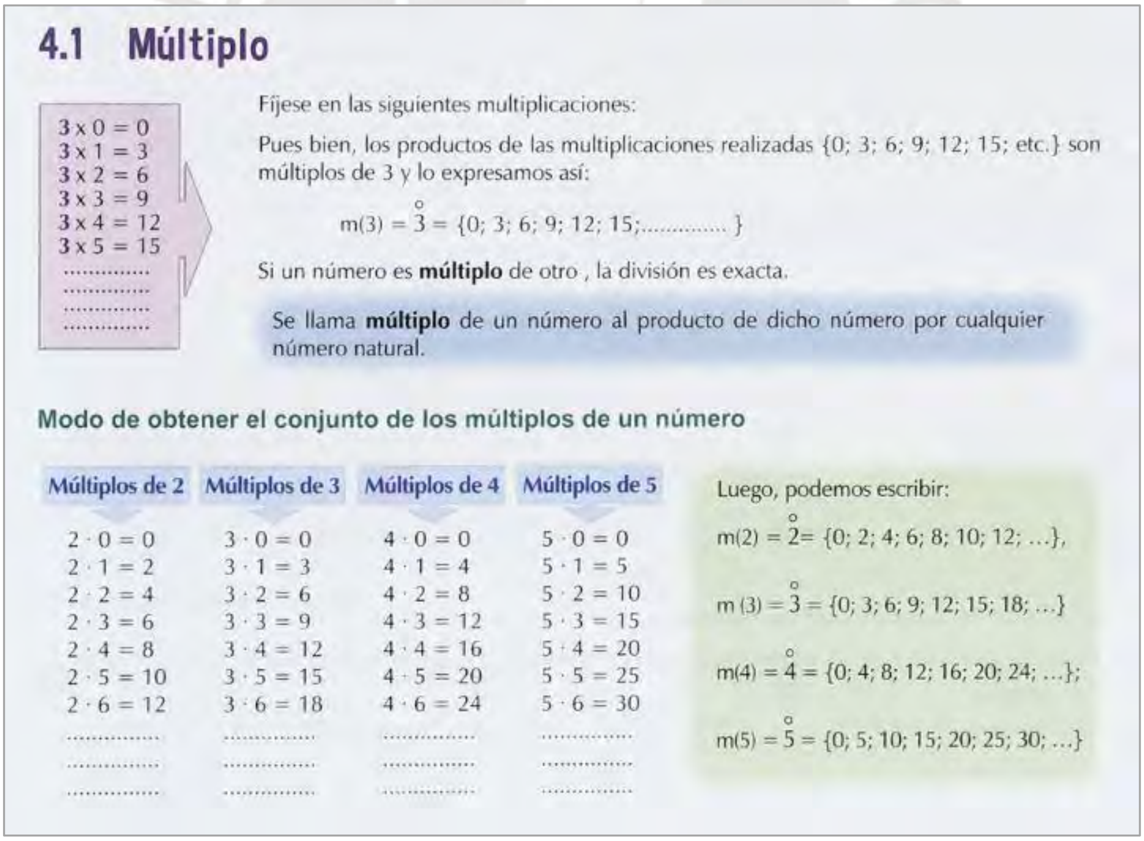
Fuente: (GenioMatic, 2016)

Si bien, esta definición es correcta; es incompleta, porque no considera que la divisibilidad entre números también puede ser evaluada desde los criterios de divisibilidad o desde la representación canónica de los números dados, pues la divisibilidad es una relación entre dos números.

Además, en este libro de texto respecto al estudio de los divisores de un número, se considera la descomposición canónica como un procedimiento para poder determinar la cantidad, suma y producto de los divisores de dicho número.

Análisis del libro de texto de la Editorial Coveñas

En este libro de texto de la Editorial Coveñas (2016) en relación a múltiplo de un número. En la figura 2.7 claramente se observa la asociación del concepto a la operación de multiplicar pues el autor así lo hace expreso “fíjese en las siguientes multiplicaciones”, fortaleciendo la acepción de múltiplo como producto (MP).



4.1 Múltiplo

$3 \times 0 = 0$
$3 \times 1 = 3$
$3 \times 2 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 4 = 12$
$3 \times 5 = 15$
....
....
....
....

Fíjese en las siguientes multiplicaciones:

Pues bien, los productos de las multiplicaciones realizadas {0; 3; 6; 9; 12; 15; etc.} son múltiplos de 3 y lo expresamos así:

$$m(3) = \overset{\circ}{3} = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; ....\}$$

Si un número es **múltiplo** de otro , la división es exacta.

Se llama **múltiplo** de un número al producto de dicho número por cualquier número natural.

Modo de obtener el conjunto de los múltiplos de un número

Múltiplos de 2	Múltiplos de 3	Múltiplos de 4	Múltiplos de 5
$2 \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$	$4 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$	$5 \cdot 1 = 5$
$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$	$5 \cdot 2 = 10$
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 3 = 12$	$5 \cdot 3 = 15$
$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 4 = 16$	$5 \cdot 4 = 20$
$2 \cdot 5 = 10$	$3 \cdot 5 = 15$	$4 \cdot 5 = 20$	$5 \cdot 5 = 25$
$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 6 = 18$	$4 \cdot 6 = 24$	$5 \cdot 6 = 30$
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

Luego, podemos escribir:

$m(2) = \overset{\circ}{2} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots\},$

$m(3) = \overset{\circ}{3} = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; \ldots\}$

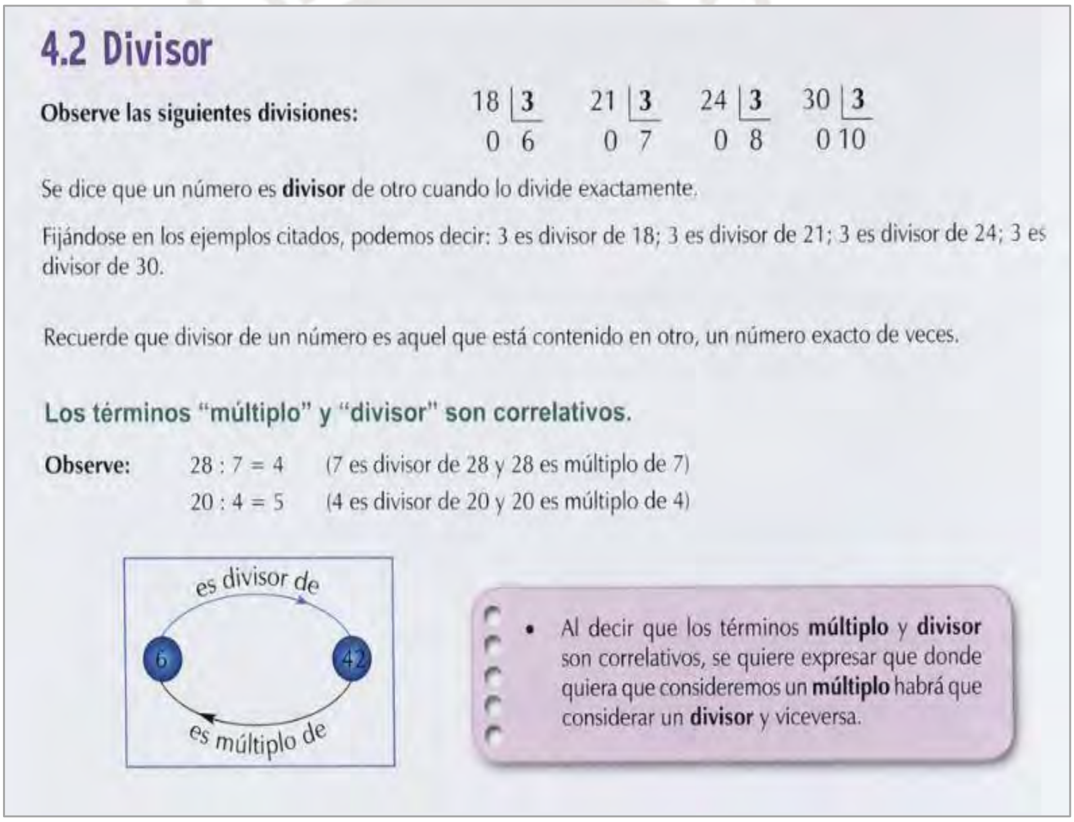
$m(4) = \overset{\circ}{4} = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; \ldots\};$

$m(5) = \overset{\circ}{5} = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; \ldots\}$

Figura 2.7 Noción de múltiplo de un número
Fuente: Editorial Coveñas (2016)

Así mismo en (Editorial Coveñas, 2016, p. 113) se encuentra el siguiente texto “Se llama múltiplo de un número al producto de dicho número por cualquier número natural”; además señala que, si un número es múltiplo de otro, la división es exacta. Se evidencia que las definiciones refuerzan la acepción de múltiplo como producto (MP) y múltiplo como dividendo (MD).

Con respecto al concepto de divisor se asocia directamente a la operación de dividir (Figura 2.8). Se dice explícitamente “Observe las siguientes divisiones” y luego expresa “Un número es divisor de otro cuando lo divide exactamente”. Posteriormente se comenta que 3 es divisor de 18, sin embargo, no dice nada del 6; 3 es divisor de 21 pero no dice nada del 7; y continua. Fortaleciendo la acepción de Divisor como rol de divisor en la división entera (D-rol)



4.2 Divisor

Observe las siguientes divisiones: 18 | 3 → 0, 6; 21 | 3 → 0, 7; 24 | 3 → 0, 8; 30 | 3 → 0, 10

Se dice que un número es **divisor** de otro cuando lo divide exactamente.

Fijándose en los ejemplos citados, podemos decir: 3 es divisor de 18; 3 es divisor de 21; 3 es divisor de 24; 3 es divisor de 30.

Recuerde que divisor de un número es aquel que está contenido en otro, un número exacto de veces.

Los términos “múltiplo” y “divisor” son correlativos.

Observe: 28 : 7 = 4 (7 es divisor de 28 y 28 es múltiplo de 7)
20 : 4 = 5 (4 es divisor de 20 y 20 es múltiplo de 4)

- Al decir que los términos **múltiplo** y **divisor** son correlativos, se quiere expresar que donde quiera que consideremos un **múltiplo** habrá que considerar un **divisor** y viceversa.

Figura 2.8 Noción de divisor de un número
Fuente: Editorial Coveñas (2016)

Señala además que los términos múltiplo y divisor son correlativos queriendo decir que si un número A es múltiplo de B entonces B es divisor de A; estableciendo la relación inversa entre múltiplo y divisor.

Respecto al conjunto de divisores de un número, (Editorial Coveñas, 2016, p. 114) describe que “Para hallar los divisores de un número, es suficiente encontrar todos los productos equivalentes a dicho número” (Figura 2.9). De esta apreciación se puede concluir que, una vez encontrado un divisor para un número dado, siempre existirá otro que, multiplicado por este, dé como resultado el valor del número dado.

Conjunto de divisores de un número:

Para hallar los divisores de un número es suficiente encontrar todos los productos equivalentes a dicho número.

Por ejemplo:

a) Divisores de 12.

$12 = 1 \times 12$
$12 = 2 \times 6$
$12 = 3 \times 4$

Divisores de 12 ={1; 2; 3; 4; 6; 12}

b) Divisores de 18

$18 = 1 \times 18$
$18 = 2 \times 9$
$18 = 3 \times 6$

Divisores de 18 = {1; 2; 3; 6; 9; 18}

Figura 2.9 Conjunto de divisores de un número
Fuente: Editorial Coveñas (2016)

Por otra parte, en (Editorial Coveñas, 2016, p. 126) para evaluar si un número es primo o no, además de la criba de Eratóstenes, señala que:

> Para conocer si un número es primo se le divide sucesivamente por los números primos 2; 3; 5; 7; 11; 13 y los siguientes hasta que el cociente llegue a ser igual o empiece a ser menor que el divisor, además el resto tiene que ser diferente de cero.

En el libro de texto se dice que cuando un número no es primo puede factorizarse, es decir expresar dicho número como producto de una serie de factores primos y describe paso a paso como realizar este procedimiento. Señala además que la factorización del número, permite calcular el número de divisores de un número, aumentando en 1 los exponentes de los factores primos y realizando el producto de los exponentes así modificados.

Análisis del libro de texto de la Editorial Norma

El libro de texto de la Editorial Norma (2018) antes de definir los conceptos relacionados a la divisibilidad, presenta situaciones contextualizadas (Figura 2.10) donde expone que: “Los divisores o factores de un número son todos los números que lo dividen exactamente, Si a es el número $D_{(a)}$ representa al conjunto de divisores de a” (Editorial Norma, 2018, p. 72) así mismo se sostiene que un número es divisible por otro número cuando al dividir el primero entre el segundo, el cociente es natural y el residuo es cero”; en estas definiciones se evidencia que el autor hace expresa la equivalencia entre divisor y factor y asocia la definición a la acepción de divisor como consecuencia de una división exacta (D-cd).

Divisores de un número

Mauro distribuirá a 10 estudiantes en grupos iguales sin que sobren. ¿Cuáles son las posibilidades que tiene?

Mauro puede formar:

1 grupo de 10 estudiantes	10 grupos de 1 estudiante
2 grupos de 5 estudiantes	5 grupos de 2 estudiantes

Él utilizó el conjunto de divisores de 10 para distribuir a sus estudiantes:

$D_{(10)} = \{1; 2; 5; 10\}$ donde $D_{(10)}$ se lee: conjunto de divisores de 10.

Los **divisores** o **factores** de un número son todos los números que lo dividen exactamente. Si a es el número, ($D_{(a)}$) representa al conjunto de divisores de a.

Figura 2.10 Divisores de un número - Editorial Norma
Fuente: (Editorial Norma, 2018, p.72)

Respecto a la conceptualización de múltiplos de un número en la figura 2.11, en el libro de texto (Editorial Norma, 2018, p. 73) se describe que “Los múltiplos de un número se obtienen de multiplicar a dicho número por cada uno de los números naturales. Si a es el número, usaremos el símbolo $M_{(a)}$ para representar el conjunto de los múltiplos de a”, reforzando la acepción de múltiplo como producto (MP).

Múltiplos de un número

Un atleta entrena en una pista circular de 3 km de longitud. ¿Cuántos kilómetros recorrerá al dar 1; 2; 3; 4; 5 vueltas?

Elaboramos una tabla para encontrar los kilómetros según el número de vueltas.

Nº de vueltas	0	1	2	3	4	5…
Nº de kilómetros	0	3	6	9	12	15…

Así obtenemos el conjunto de múltiplos de 3:

$M_{(3)} = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; \ldots\}$ Donde $M_{(3)}$ se lee: conjunto de múltiplos de 3.

Por lo tanto, al dar 1; 2; 3; 4; 5 vueltas recorrerá 3; 6; 9; 12 y 15 km respectivamente.

Los **múltiplos** de un número natural se obtienen de multiplicar a dicho número por cada uno de los números naturales. Si *a* es el número, usaremos el símbolo $M_{(a)}$ para representar el conjunto de los múltiplos de *a*.

Figura 2.11 Múltiplos de un número - Editorial Norma
Fuente: (Editorial Norma, 2018, p.73)

Es interesante como los libros de texto incluido los oficiales, priorizan el abordaje de los conceptos de múltiplos a la acepción de múltiplo como producto (MP) y múltiplo como dividendo (MD), mientras que el concepto de divisor es asociado a la acepción de divisor como consecuencia de realizar la división entera y exacta (D-cd) y a la acepción de Divisor como rol de divisor en una división entera (D-rol). Estos hallazgos no hacen más que corroborar lo enunciado por (Bodí, 2006 y López, 2015) cuando llaman la atención de como todas estas acepciones pueden desvirtuar el verdadero concepto de la divisibilidad como una relación. Precisamente en nuestro trabajo de investigación tratamos de presentar situaciones que contemplen el uso de todas estas estas acepciones.

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En esta sección hacemos referencia a los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas que usaremos durante el desarrollo de nuestra investigación, así mismo describimos el procedimiento metodológico seguido.

3.1. Marco teórico

En este apartado describimos los elementos de un problema matemático, cómo se crean los problemas matemáticos; presentamos la estrategia OAR como una adaptación de la estrategia EPP descrita en Malaspina y Vallejo (2014); y presentamos la tabla de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

3.1.1. Los problemas matemáticos

En este trabajo de investigación adoptamos la noción propuesta por Malaspina y Vallejo (2014) quienes describen que, los problemas matemáticos tienen cuatro componentes fundamentales: Información, requerimiento, contexto y entorno matemático. Además, señalan que:

> La información está constituida por los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.
>
> El requerimiento es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.
>
> En cuanto al contexto: suele llamarse “problema contextualizado” a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, consideraremos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que, en un problema, el contexto puede ser intra matemático o extra matemático. […]
>
> El elemento entorno matemático se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En el marco de la creación de problemas para el aprendizaje, el entorno matemático puede ser el punto de partida para la creación de nuevos problemas, como “el tema a tratar”. […] (p. 12-13).

3.1.2. La creación de problemas

Malaspina y Vallejo (2014) considera que la creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, además define dos formas para crear problemas: a) partiendo de un problema dado (variación de un problema) y b) partiendo de una situación dada (elaboración de un problema). Además, señala que:

> **Variación** de un problema dado: proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado.
>
> Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan de plantear generalizaciones a partir de un problema dado.
>
> **Elaboración** de un problema: proceso según el cual se construye un nuevo problema, a partir de una situación (dada, o configurada por el autor)
>
> - cuyo contexto se origina en tal situación
> - cuya información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación
> - y cuyo requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático. (p. 14)

En el trabajo de investigación que realizamos, nos centramos en la creación de problemas por variación en los términos señalados por Malaspina y Vallejo (2014).

3.1.3. La estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo)

Malaspina y Vallejo (2014) como parte de la formación de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio; proponen la realización de talleres basados en la estrategia EPP (Episodio, Problema Pre, Problema Pos); en los cuales los participantes de manera individual y grupal crean problemas matemáticos por variación a partir de un Episodio en clase, señalan además que la idea del episodio en clase es presentar un problema en contexto didáctico, de tal forma que permita observar las reacciones de los alumnos ante el problema propuesto y pedir a los participantes que de manera individual y luego grupal analicen el episodio y creen dos problemas por variación; el primero (Problema Pre) más sencillo que el propuesto con la finalidad de orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo. El segundo (Problema Pos) más retador y cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente el problema anterior, esto con el propósito de estimular a los alumnos a ir más allá de una única solución correcta al problema dado. Así mismo Malaspina y Vallejo (2014) sostienen que:

> Los problemas que se creen pueden tener varias partes de dificultad gradual. Esto es particularmente útil en el problema Pre. La creación de los problemas Pos, contribuirá a ampliar el panorama de las matemáticas, por ejemplo, haciendo generalizaciones y buscando modelos matemáticos relacionados con el contexto del problema del episodio. Por otra parte, un problema Pre, el problema del episodio y un problema Pos, constituirán una secuencia de problemas, relacionados entre sí, con tres niveles de dificultad. (p. 18).

Ante esto, hay que señalar que la estrategia EPP está orientada a la formación de profesores y dado que nuestro estudio de investigación está orientado a estudiantes de educación secundaria; creemos conveniente realizar una adaptación de la estrategia EPP para poder aplicarla en estudiantes de educación secundaria.

Esta adaptación tendrá sus bases en los aportes realizados en (Malaspina y Vallejo, 2014; Polya, 1965 y Roig, Llinares y Penalva 2010).

Presentamos la **estrategia OAR** (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) que utilizaremos para contribuir con la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural en estudiantes del primer grado de educación secundaria, donde:

Problema Original: Es un problema matemático generado por el investigador bajo la configuración de una situación contextualizada que tiene la peculiaridad de ser motivadora pues debe generar el involucramiento del alumno al reconocer un problema relacionado al entorno local o al contexto más cercano.

Debe además permitir observar las reacciones de los alumnos ante el problema propuesto tal como se propone en Malaspina y Vallejo (2014).

Debe ser además retadora buscando la comprensión de los conceptos y permitir que podamos graficar el proceso seguido por parte de los alumnos.

Un aspecto muy importante, es que el concepto matemático que resuelve el problema no debe ser redactado en forma explícita pues limita el análisis crítico y la toma de decisiones por parte del alumno, donde una estructura implícita es un buen instrumento para generar procesos de construcción de los conceptos que resuelva la situación indicada, tal como lo señala Brown (2002) citado en Roig, Llinares y Penalva (2010).

Problema Auxiliar

El problema auxiliar es un problema de estructura simple y más accesible, construido por los alumnos a partir del problema original, variando cualquiera de sus elementos con el propósito que en el proceso de resolución se este problema auxiliar, el estudiante se dé cuenta del elemento matemático que ayudará a resolver el problema original. En este sentido, el problema original es un fin que queremos alcanzar, mientras que el problema auxiliar es el medio por el cual tratamos de alcanzarlo.

Según (Polya, 1965), un problema auxiliar puede construirse a partir de un problema original, variando, descomponiendo y recomponiendo sus elementos y para ello se pueden usar recursos como la generalización, particularización y analogías.

Problema Retrospectivo

Polya (1965) sostiene que luego que los alumnos resuelven un problema; deben realizar una visión retrospectiva del mismo, como una forma de afianzar su aprendizaje. Textualmente sostiene que "reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas" (p. 35).

En esos términos, el problema retrospectivo es un problema de estructura mas retadora, construido por los alumnos a partir del problema original, variando cualquiera de sus elementos tomando en consideración los conceptos matemáticos movilizados en la creación y resolución del problema auxiliar y original, sustentado en la visión retrospectiva propuesta por Polya (1965), con la finalidad de promover la comprensión de los mismos.

3.1.4. Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

En este apartado describimos las consideraciones preliminares, los procedimientos seguidos para la elaboración de la guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural, la cual es una adaptación del estándar de caracterización de nos niveles de desarrollo de esquema propuesta por Bodí (2006).

3.1.4.1. Consideraciones preliminares

Gallardo y González (2007) basados en la elevada complejidad de poder valorar la comprensión del concomimiento matemático, sostienen que se debe considerar tres aspectos fundamentales y que hemos recogido en la presente propuesta: las estructuras fundamentales tanto epistemológicas como fenomenológicas, algunas características y lineamientos que facilitan su elaboración e implementación y que a continuación detallamos:

1. Estructuras asociadas que determinan la naturaleza y existencia de la comprensión:
    a) Una Estructura Epistemológica. Parte del análisis sobre la propia naturaleza interna del conocimiento matemático seleccionado […]
    b) Una Estructura Fenomenológica. Surge de considerar el conocimiento matemático en relación con las distintas situaciones en las que participa, tiene sentido o se hace legítimo su empleo de algún modo como medio que contribuye a la obtención de las posibles soluciones. [...] (Gallardo y González, 2007, p. 5-6).
2. Características para la elaboración e implementación de un sistema de valoración y categorización de la comprensión.
    - **Ser operativa:** que puedan ser observados por medio de tareas y situaciones que obliguen al sujeto a responder de manera contextualmente correcta.
    - **Ser indirecta:** porque dada las limitaciones para observar de manera directa el nivel de comprensión, el investigador puede interpretar e inferir indirectamente a través de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas.

- **Ser fenomenológica:** pues el carácter indirecto de la aproximación de la comprensión remite a los fenómenos, tareas y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en juego.
- **Ser positiva:** porque está orientada a determinar lo que los alumnos comprenden y no lo que no comprenden.
- **Ser provisional y abierta:** porque no es posible completar al cien por cien el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático y cuya comprensión nos interesa estudiar.

3. Lineamientos generales para la elaboración e implementación de un sistema de valoración y categorización de la comprensión.
   a) Análisis Didáctico del concepto o elemento matemático.
   b) Delimitación de las estructuras epistemológica y fenomenológica del concepto o elemento matemático.
   c) Elaboración a partir de ellas de una clasificación para las situaciones vinculadas al conocimiento matemático.
   d) Análisis sistemático y definición clara y precisa de las acciones interpretables de los sujetos; delimitación, categorización y enumeración de las respuestas posibles y de los criterios de valoración;
   e) Construcción de los instrumentos de observación tareas, pruebas, situaciones y protocolos.
   f) Obtención de datos, categorización y valoración de respuestas y conformación de perfiles de comprensión.
   g) Análisis de resultados en función del problema específico.

Sobre esta base se procedió a la elaboración de la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural que a continuación detallamos.

3.1.4.2. Procedimiento de construcción de la Guía de caracterización de los niveles de compresión

Siguiendo lo propuesto por Gallardo y González (2007) hemos realizado un análisis didáctico de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural haciendo énfasis en el análisis de contenido que es uno de los cinco tipos del ciclo del análisis didáctico López (2015), ya que considera tres aspectos fundamentales (figura 3.1): el abordaje desde la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (modos de uso), nos permitirá identificar los significados que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven las tareas asignadas y que evidencian el nivel de comprensión. Estos elementos conformarán los descriptores que permitirán categorizar la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural.

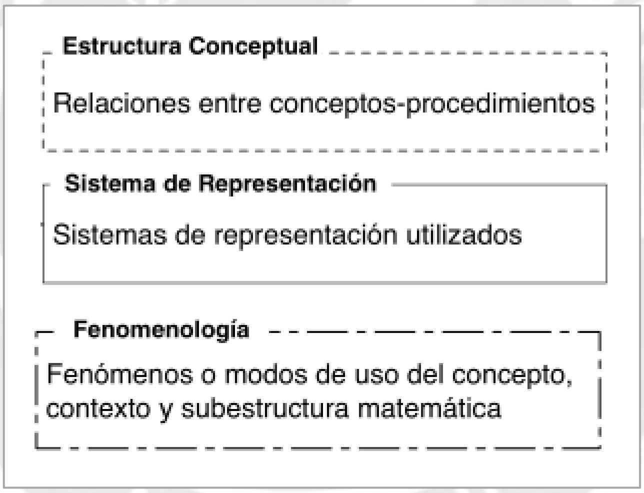


Figura 3.1 Dimensiones del análisis de contenido

Fuente: Adaptado de (López, 2015, p. 104)

A continuación, en cada una de las dimensiones del análisis de contenido de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, procederemos a identificar los descriptores necesarios para la elaboración de la Guía de categorización de los niveles de comprensión de dichos conceptos.

1. Descriptores basados en la estructura conceptual

De las tres estructuras antes mencionadas es importante resaltar que la estructura conceptual de los múltiplos y divisores, nos permite rescatar tanto elementos conceptuales como procedimentales. En el caso de los elementos conceptuales, se destacan hechos, conceptos y estructuras que nos permiten delimitar y disgregar los conceptos asociados al tema en estudio, mientras que en el campo procedimental se destacan las destrezas, estrategias y razonamientos utilizados por los alumnos para abordar dichos conceptos. En la tabla 3.1 mostramos algunos ejemplos.

Tabla 3.1 Elementos de la estructura conceptual de la divisibilidad

Campo conceptual		
Hechos	Conceptos	Estructuras
Los hechos son unidades más pequeñas de información dentro del tema en mención, están compuestos por términos, notaciones, convenios y resultados de la divisibilidad (tabla)	Relación ser múltiplo Relación ser divisor Relación ser divisible Relación ser factor Número primo Número compuesto Divisores de un número natural	Múltiplos y divisores en el conjunto de los números naturales.
Campo procedimental		
Destrezas	Razonamientos	Estrategias
Determinar si un número es primo o compuesto. Establecer equivalencias entre un número escrito en sistema de representación numérico posicional de base diez y escrito en su descomposición canónica.	Inductivo Deductivo	Utilizar la descomposición en factores primos. Utiliza la estructura multiplicativa $b = a \times c$ para determinar los múltiplos y divisores de un número dado. .

2. Descriptores basados en los sistemas de representación

En cuanto a los sistemas de representación nos propusimos obtener descriptores que permitan graficar como se produce el proceso de comprensión y su relación con el uso de los diversos sistemas de representación.

Dentro de los diversos sistemas de representación hemos considerado cuatro de ellos: simbólico numérico, simbólico algebraico, verbal y tabular, los mismos que han sido extraídos de los antecedentes del estudio y del análisis de los libros de texto usados en el primer grado de educación secundaria y que a continuación detallamos:

- **Sistema de representación simbólico numérico**

López (2015) sostiene que “El sistema posicional de base diez establece una forma de representar números utilizando solo diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, y 9. Con estos diez dígitos se pueden escribir todos los números atendiendo a la agrupación de diez unidades, cada diez unidades se forman otra de orden superior. El valor de cada digito es relativo y depende de la posición que ocupe” (p. 78). Por ejemplo, el número 459 está formado por 4 centenes, 5 decenas y 9 unidades y se puede escribir $459 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

- **Sistema de representación simbólico algebraico.**

López (2015) describe que “Este sistema de representación es utilizado habitualmente para escribir las relaciones, conceptos y procedimientos mediante símbolos asociados al algebra. Por ejemplo, la escritura de a, b y c que $\in \mathbb{N}$ en la estructura multiplicativa $b = a \times c$ determinan la relación de divisibilidad. Esta forma de representación de relaciones, conceptos y procedimientos sintetizan una cantidad considerable de información” (p. 79)

- **Sistema de representación verbal**

López (2015) describe que “En este sistema de representación se hace uso de la terminología y convenios propios de la divisibilidad y que son expresados en el lenguaje habitual. Por ejemplo, el enunciado “todo número natural mayor que uno puede ser escrito como producto de factores primos en forma única” es una forma verbal de expresar el teorema fundamental de la aritmética” (p. 79).

- **Sistema de representación tabular**

López (2015) describe que "Este sistema de representación es utilizado, por ejemplo, habitualmente para introducir los números primos mediante la criba de Eratóstenes. También es frecuente su utilización para determinar los divisores de un número natural" (p. 79).

En estos sistemas de representación se pueden identificar dos tipos de operaciones: traducciones y transformaciones y cuya importancia se verá reflejada durante el análisis del proceso de comprensión.

La **traducción** se da cuando un mismo objeto es expresado equivalentemente en diferentes sistemas de representación y la **transformación,** cuando el cambio de expresión se produce dentro del mismo sistema de representación. Esta transformación puede ser puede ser invariante o variante.

La transformación invariante se caracteriza por escribir un objeto matemático en forma equivalente en el mismo sistema de representación. El número 459, por ejemplo, se puede escribir desde la estructura multiplicativa, como el producto de números $459 = 9 \times 51$ o como $459 = 27 \times 17$. También se puede utilizar la descomposición única, dada desde el teorema fundamental de la aritmética, para escribir el número $459 = 3^3 \times 17$.

La transformación variante implica un cambio en el objeto representado. Por ejemplo, al escribir $3^4 \times 17$ como un múltiplo del número $3^3 \times 17$, los dos números no son equivalentes, en ese sentido hay una variación.

3. Descriptores basados en la Fenomenología

En cuanto a la fenomenología o modos de uso de los conceptos de múltiplos y divisores, siguiendo los criterios de López (2015) tanto en la revisión de los antecedentes de estudio, así como en el análisis de los textos del primer grado de educación secundaria hemos podido identificar las siguientes acepciones o modos de uso asociados al tema en estudio y que hemos tomado en consideración para la elaboración de los descriptores del sistema de valoración de los niveles de compresión:

Múltiplo como producto (MP), cuando se justifica que un número natural a es múltiplo de otro número natural b porque resulta de multiplicar b por otro número natural c, es decir $a = b \times c$.

Múltiplo como dividendo (MD), cuando para justificar que un número natural a es múltiplo de otro número natural b, se procede a dividir a entre b y si el resultado es exacto es decir el resto es cero, se concluye que a es múltiplo de b.

Múltiplo como relación (MR), cuando se expresa explícitamente la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro; es decir que el primero contenga todos los factores primos del segundo con exponentes iguales o mayores.

Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd), cuando para justificar que un número natural a es divisor de otro número natural b, se procede a dividir b entre a y si el resultado es exacto es decir el resto es cero, se concluye que a es divisor de b.

Divisor como rol de divisor de una división entera y exacta (D-rol), por ejemplo, cuando se entiende o dice que solo el divisor de una división entera y exacta es divisor de un número dado, pero no se dice nada del cociente que también es divisor del número dado.

Divisor como relación (D-R), cuando se expresa explícitamente la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisor de otro; es decir que el primero no contenga ningún factor primo que no esté contenido en el que ha se de ser divisible y que ninguno este elevado a mayor potencia.

Culminando con la identificación de los descriptores de la estructura conceptual, de sistemas de representación y de la fenomenología o modos de uso, se hace necesario ubicarlos en un espacio que permitiera categorizarlos. Para ello elaboramos la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural adaptando la propuesta de Bodi (2006) y que a continuación describimos

3.1.4.3. Elaboración de la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

La propuesta de Bodí (2006) básicamente consistía en la categorización de los niveles de desarrollo de esquema de la divisibilidad en tres niveles (Intra, Inter y Trans), pero dado a las características de nuestro estudio necesitábamos de descriptores de categorización más específicos que nos pudieran describir el proceso de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisores de un número a través de la creación de problemas, en ese sentido haciendo el análisis de contenido de dichos conceptos y a través de las observaciones de las tareas propuestas en las diversas sesiones de este estudio, pudimos identificar una serie de descriptores que los categorizamos en niveles: Nivel 1 (constituido por descriptores análogos a los descritos en el nivel Intra), Nivel 2 (constituido por descriptores análogos a los descritos en el nivel Inter) y Nivel 3 (constituido por descriptores análogos a los descritos en el nivel Trans). Finalmente, cada uno de los descriptores fueron codificados con la finalidad de facilitar el proceso de implementación de la Guía que mostramos en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural

Nivel	Descriptores	Código
Nivel 1	Recordar de forma aislada y con errores algunos elementos matemáticos como: múltiplo, divisible, divisor y factor; y utilizarlos mecánicamente sin manifestación de relaciones lógicas entre ellos.	D01N1
	De manera general para evaluar si un número es múltiplo o divisor de otro, realiza conversiones y/o traducciones al sistema de representación numérica posicional de base diez.	D02N1
	De manera general evalúa si un número es múltiplo de otro solo a través de la división entera y exacta (acepción múltiplo como dividendo MD); por ejemplo:	D03N1

- para evaluar si un número “$\boldsymbol{a}$” es múltiplo de “$\boldsymbol{b}$”; dividen “$\boldsymbol{a}$” entre “$\boldsymbol{b}$” y verifican que su resto sea cero, de ser así concluyen que “$\boldsymbol{a}$” es múltiplo de “$\boldsymbol{b}$”.

Evalúa si un número es divisor de otro solo a través de la división entera y exacta (acepción de divisor como consecuencia de haber efectuado una división entera y exacta D-cd); por ejemplo: D04N1

- para evaluar si un número “$\boldsymbol{a}$” es divisor de “$\boldsymbol{b}$”; dividen “$\boldsymbol{b}$” entre “$\boldsymbol{a}$” y verifican que su resto sea cero, de ser así concluyen que “$\boldsymbol{a}$” es divisor de “$\boldsymbol{b}$”.

De manera general solo puede determinar los divisores de números pequeños a través de ensayo de prueba y error mediante el uso de la división entera y exacta o desde algún criterio de divisibilidad. D05N1

De manera general solo puede determinar los elementos del conjunto formado por los múltiplos de un número en un rango determinado, a través de ensayo de prueba y error mediante la multiplicación de dicho número por los números naturales D06N1

De manera general no realiza relaciones lógicas entre los conjuntos de múltiplos de ciertos números o de manera aislada y/o con errores solo puede determinar los elementos del conjunto formado por la Intersección, diferencia y unión entre los conjuntos de los múltiplos de otros números, pues, por ejemplo: D07N1

- Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a\ y\ b}$” halla los múltiplos de “$\boldsymbol{a\ x\ b}$".
- Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a\ pero\ no\ de\ b}$” halla los múltiplos de “$\boldsymbol{a}$" y les quita los múltiplos de "$\boldsymbol{b}$".

	• Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a}$ ó $\boldsymbol{b}$” halla los múltiplos de “$\boldsymbol{a}$" y les agregan los múltiplos de "$\boldsymbol{b}$"	
	Realiza traducciones y conversiones entre sistemas de representación, por ejemplo: • Conversión del sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica	D08N1
Nivel 2	Recordar de forma aislada elementos matemáticos como: múltiplo, divisible, divisor y factor y realizar algunas relaciones entre ellas como: • La equivalencia entre múltiplo y divisible • La equivalencia entre divisor y factor	D01N2
	Dependiendo del contexto evalúa si un número es múltiplo o divisor de otro a través de la división entera o desde algún criterio de divisibilidad.	D02N2
	De manera general a través de la descomposición canónica determina la cantidad de divisores de un número.	D03N2
	De manera general utilizando la representación tabular, y la representación canónica de un número, puede determinar sus divisores, solo cuando este tiene hasta dos factores primos.	D04N2
	De manera general utilizando la representación tabular, y la representación canónica de un número puede determinar los divisores simples y compuestos de dicho número, solo cuando este tiene hasta dos factores primos.	D05N2
	Utilizar la relación conjunción lógica para coordinar criterios de divisibilidad de manera conjunta entre números para evaluar la divisibilidad del número compuesto formado por el producto de	D06N2

ambos, por ejemplo, coordinar los criterios de divisibilidad del 3 y del 5 para evaluar la divisibilidad por 15 o viceversa.

De manera general puede determinar los múltiplos de un número natural que están comprendidos en un determinado rango, a través de la comprensión, aplicación y cálculo de los valores de k que satisfacen la condición “$\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{b}$ si, y solo si, existe un número natural $\boldsymbol{k}$, tal que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{kb}$”. (Acepción de múltiplo como producto MP) D07N2

De manera general solo puede determinar los elementos del conjunto formado por la Intersección de los múltiplos de dos o más números que son primos entre si (PESI), por ejemplo: D08N2

- Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a\ y\ b}$” halla los múltiplos de “$\boldsymbol{a\ x\ b}$".

De manera general solo puede determinar los elementos del conjunto formado por la Diferencia entre conjuntos de múltiplos de números que son primos entre si (PESI), pues, por ejemplo: D09N2

- Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a\ pero\ no\ de\ b}$” halla los elementos del conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{a}$" y luego quita los elementos del conjunto formado por los múltiplos de "$\boldsymbol{a\ x\ b}$".

De manera general solo puede determinar los elementos del conjunto formado por la Unión de los múltiplos de dos o más números que son primos entre si (PESI), pues, por ejemplo: D10N2

- Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$\boldsymbol{a}$ ó $\boldsymbol{b}$” halla los elementos del conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{a}$" y luego le agrega los elementos de conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{b}$" y posteriormente quita los elementos del conjunto formado por los múltiplos de "$\boldsymbol{a\ x\ b}$"

Nivel 3	Recordar los elementos matemáticos como: múltiplo, divisible, divisor y factor y utilizarlos correctamente haciendo las conexiones lógicas entre ellos; por ejemplo: • La equivalencia entre múltiplo y divisible • La equivalencia entre divisor y factor • La relación inversa entre múltiplo/divisible y divisor/factor	D01N3
	Dependiendo del contexto, evalúa si un número es múltiplo de otro a través de la división entera (Múltiplo como dividendo), desde algún criterio de divisibilidad o como una relación de contenencia, es decir si el primero contiene al segundo una cantidad entera y exacta de veces, dicha evaluación puede darse en cualquier sistema de representación numérica: posicional de base diez, estructura multiplicativa o canónica. (Múltiplo como relación)	D02N3
	Dependiendo del contexto evalúa si un número es divisor de otro a través de la división entera y exacta (Divisor como resultado de realizar la división entera), desde algún criterio de divisibilidad o como relación de contenencia, es decir si el primero está contenido en el segundo una cantidad entera y exacta de veces, dicha evaluación puede darse en cualquier sistema de representación numérica: posicional de base diez, estructura multiplicativa o canónica. (Divisor como relación D-r)	D03N3
	De manera general utilizando la representación tabular, y a partir de su representación canónica puede determinar cuáles son los divisores de un número.	D04N3
	De manera general utilizando la representación tabular, y la representación canónica de un número, puede determinar cuáles son los divisores simples y compuestos de dicho número.	D05N3

Interpreta correctamente la existencia de pares multiplicativos en el conjunto de divisores de un número, es decir comprende y determina que para cada divisor de un número existe otro divisor de dicho número o el mismo tal que al ser multiplicados se obtiene como resultado el valor de dicho número.	D06N3
De manera general puede determinar los elementos del conjunto formado por la Intersección entre los conjuntos de los múltiplos de otros números, por ejemplo: • Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos "$\boldsymbol{a\ y\ b}$" halla los múltiplos de "$\boldsymbol{MCM\ (a, b)}$".	D07N3
De manera general puede determinar los elementos del conjunto formado por la Diferencia entre los múltiplos de dos números, por ejemplo: • Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos "$\boldsymbol{a\ pero\ no\ de\ b}$" halla los elementos del conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{a}$" y luego quita los elementos del conjunto formado por los múltiplos de "$\boldsymbol{MCM\ (a, b)}$".	D08N3
De manera general puede determinar los elementos del conjunto formado por la Unión de los múltiplos de otros números, por ejemplo: • Para hallar los elementos del conjunto formado por los múltiplos "$\boldsymbol{a}$ ó $\boldsymbol{b}$" halla los elementos del conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{a}$" y luego le agrega los elementos de conjunto de múltiplos de "$\boldsymbol{b}$" y posteriormente quita los elementos del conjunto formado por los múltiplos de "$\boldsymbol{MCM\ (a, b)}$"	D09N3
Interpreta correctamente que todo número es múltiplo de todos sus divisores	D10N3

Fuente: Adaptado de Bodí (2006)

3.2. Metodología y procedimientos

El procedimiento metodológico seguido para desarrollar nuestro estudio de investigación está basado en la metodología de investigación cualitativa en los términos que se propone en Latorre (1996) donde se sostiene que el proceso de investigación cualitativa, se puede entender como una secuencia abierta, articulada, flexible y retroactiva de las seis fases que la conforman: Fase exploratoria/de reflexión, fase de planificación, fase de entrada al escenario, fase de recogida y análisis de información, fase de retirada del escenario y fase de elaboración del informe, de tal forma que cada una de estas fases se construyen sobre la información obtenida de las otras. (Figura 3.2)

Figura 3.2 Proceso de la Investigación cualitativa
Fuente: adaptada de Latorre (1996, p. 206)

3.2.1. Fase exploratoria

Tal como lo expresa Latorre (1996) esta fase del proceso consiste en tomar contacto con los temas de interés del estudio de investigación que permita tomar decisiones. Aquí se contempla la definición del problema de investigación, la pregunta y definición de los objetivos de la investigación, la revisión documental y la perspectiva teórica; puntos que hemos abordado.

En el capítulo 1 hemos presentado los estudios de referencia que dan sustento científico a nuestro estudio, justificamos la relevancia de estudiar la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural en estudiantes de primer grado de educación secundaria, seguidamente hemos formulado la pregunta de investigación y definimos el objetivo general y los objetivos específicos.

En el capítulo 2 hemos descrito el contenido matemático de nuestra investigación, los significados de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural, la evolución histórica de la noción de la divisibilidad y realizado el análisis de los libros de textos matemáticos usados en el primer grado de educación secundaria que nos ha permitido enriquecer la propuesta.

Finalmente, en el capítulo 3 hicimos referencia al marco del enfoque teórico de la creación de problemas que sirvió de guía para el desarrollo de nuestra investigación. Asi mismo y como un aspecto muy importante presentamos la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) que usaríamos durante la investigación, la cual es una adaptación de la estrategia EPP (Episodio, problema Pre, problema Pos) formulada por Malaspina y Vallejo (2014) y dirigida a la formación de docentes, mientras que la estrategia OAR a usar es aplicable a estudiantes. En este mismo capítulo hemos presentado la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural

3.2.2. Fase de planificación

En esta fase detallamos dónde se realizará el estudio y por cuanto tiempo, quiénes serán los participantes, que técnicas de recolección de información se usará y que instrumentos y materiales son necesarios.

3.2.2.1. Escenario de investigación

El lugar elegido para la realización de nuestra investigación es la Institución Educativa Privada “Wonderful Stars” ubicada en el Distrito de Santa Anita, Lima, cuenta con 14 años de creación. Esta institución brinda enseñanza a estudiantes de nivel inicial, primaria y secundaria y cuenta con una población estudiantil de aproximadamente 300 estudiantes.

La Institución Educativa Particular Wonderful Stars, fue creada en el año 2004 con el nivel Inicial, en el 2007 se amplió al nivel Primaria y desde el 2010 al nivel Secundaria mediante Resolución Directoral Regional N° 3210 – 2010 DRELM.

Esta Institución Educativa tiene como Misión, el de promover una formación educativa de calidad, integral, humana, científica y cristiana contribuyendo con el mejoramiento del proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de sus alumnos. Tiene dentro de sus objetivos el de promover el fortalecimiento de competencias de sus docentes y la aplicación de metodología técnico-pedagógico que permita mejorar la competencia de sus alumnos, esto unido al fortalecimiento del desarrollo de la personalidad, autoestima, formación en valores y preparación para la vida.

Esta Institución educativa es reconocida por contar con docentes calificados en el área de matemáticas y por su participación constante en concursos ligados a esta temática. La población estudiantil del nivel secundaria es de estrato social medio, con edad acorde al nivel educativo y con antecedentes de buena conducta. Hay grupos de alumnos ubicados en tercio y quinto superior.

Así mismo se estableció que el recojo de la información se realizaría en horario escolar en cuatro sesiones de dos horas académicas cada una y una vez por semana y donde los participantes elegidos serían notificados por la dirección.

3.2.2.2. Participantes del estudio

Los sujetos de nuestro estudio de investigación fueron alumnos del primer grado de educación secundaria, de la Institución Educativa Particular Wonderful Stars y cuyo promedio de edades es de 12 años. Son de estrato socio económico medio y viven en zonas aledañas a la Institución Educativa.

3.2.2.3. Técnicas de recojo de información

En esta investigación de tipo cualitativo, el recojo de información fue de fuente primaria usándose técnicas como la observación, entrevistas y encuestas en eses sentido en este apartado presentamos los instrumentos y materiales utilizados durante el desarrollo de nuestra investigación:

- Ficha de evaluación exploratoria (Anexo A)
- Presentación de diapositivas en PowerPoint “Los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas y la estrategia OAR” (Anexo B)

- Presentación de diapositivas en PowerPoint “El cumpleaños de Rosita” (Anexo C)
- Ficha “Los lotes de terreno” (Anexo D)
- Ficha “Los armarios” (Anexo E)

3.2.3. Fase de entrada en el escenario

Para la aplicación de la presente investigación se obtuvo el permiso y las facilidades correspondientes por parte de la dirección de la Institución Educativa para realizar la investigación en horario de clase.

La selección de los participantes fue a través de muestreo intencional, eligiéndose como sujetos de estudio a tres estudiantes del primer grado de educación secundaria pertenecientes al tercio superior, dos hombres y una mujer y que además mostraban actitud positiva y participación activa durante las clases.

Para fines de la presente investigación se les denominará participante P1, P2 y P3.

Una vez elegido los participantes y el calendario de actividades se definieron los roles entre el investigador y los sujetos de estudio dándose a conocer los objetivos, la metodología y resultados esperados de ellos.

3.2.4. Fase de recogida y análisis de la información

La implementación de esta investigación se realizó en cuatro sesiones, las cuales están detallada en el capítulo 4. En cuanto a la fase de recogida y análisis de información tenemos que en la Sesión Nº 1 “Evaluación exploratoria” hemos aplicado instrumentos tipo cuestionario con una situación matemática en particular que demandaba en los alumnos respuestas, otorgándoles para ello dos horas de duración.

Al finalizar esta sesión, el investigador recogió los resultados en medio físico, identificando aquellos vacíos relacionados al objeto de investigación antes de aplicar la estrategia OAR. El investigador usó como apoyo la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural. Esto le permitió ubicar aquellos vacíos que limitan la comprensión y conservarlos como insumos para la siguiente sesión donde se compartieron y analizaron los resultados obtenidos.

En la sesión Nº 2, se analizaron los resultados obtenidos en la evaluación exploratoria de la sesión N° 1 y el recojo de información se realizó grabando las intervenciones de cada uno de los participantes sobre las opiniones al respecto, acepciones, procedimientos, estrategias, modos de representación y razones de sus respuestas. Estos resultados permitieron caracterizar el nivel de comprensión, el mismo que está incluido en las conclusiones de este estudio.

Las sesiones N° 3 y N°4 estuvieron dirigidas a la resolución de las actividades matemáticas a través de la implementación de la estrategia OAR, la cual tuvo su reforzamiento en la sesión anterior. Aquí el recojo de información fue muy similar a la sesión N°1 donde los resultados se comparan con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural. Estos resultados nos permiten evaluar si a través de dicha estrategia se logra contribuir en la comprensión de los objetos matemáticos en estudio.

3.2.5. Fase de retirada del escenario

Se ha presentado los resultados ante la dirección de la Institución Educativa y se ha recibido sugerencias de parte de los docentes de organizar talleres para aplicar la estrategia OAR en otros grados de educación secundaria.

CAPÍTULO 4: PARTE EXPERIMENTAL DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos como fueron desarrolladas cada una de las sesiones, las actividades que la conforman, duración, objetivos y resultados esperados

La Tabla 4.1 nos muestra la organización de las cuatro sesiones en actividades.

Tabla 4.1 Planificación de las sesiones del estudio de investigación

Sesión	Actividades	Duración
Sesión 1	• Evaluación exploratoria. actividad "La oferta de jabones"	9:40 – 11:20 am.
Sesión 2	• Discusión de resultados de la evaluación exploratoria. • Descripción de los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas y de la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo). actividad "El cumpleaños de Rosita" desarrollada por el Docente investigador.	9:40 – 11:20 am.
Sesión 3	• Aplicación de la estrategia OAR - Desarrollo de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollada por los alumnos.	9:40 – 11:20 am.
Sesión 4	• Aplicación de la estrategia OAR - Desarrollo de la actividad "Los armarios" desarrollada por los alumnos.	9:40 – 11:20 am.

4.1. Sesión 1: Evaluación exploratoria

Esta sesión tiene por finalidad identificar, describir y caracterizar el nivel de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número que muestran los participantes del estudio antes de aplicar la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo).

Para obtener este resultado se diseñó la actividad “La oferta de jabones”, consistente en una situación problemática y cinco preguntas relacionadas. Para fines de la investigación, cada una de las preguntas tiene su propio objetivo y su solución experta.

Finalizada la actividad, describimos, analizamos y caracterizamos las soluciones propuestas por cada uno de los participantes del estudio, tomando en consideración tanto las acepciones, modos de uso, y sistemas de representación de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, así como los procedimientos y dificultades evidenciados.

Durante este proceso se toma como referencia la solución experta y la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural que presentamos en el acápite 3.1.4.3, Tabla 3.2

4.1.1. Actividad “La oferta de jabones”

Anita es una pequeña empresaria, en su casa tiene un pequeño bazar donde vende artículos de perfumería e higiene. Cierto día en el supermercado; Anita se percató que los jabones estaban en oferta: 3 pack por el precio de 2, cada pack contenía 3 cajas y que en cada caja había 3 jabones. Entonces, decidió comprar los últimos 13 packs que quedaban.

Anita, pensando revender los jabones en su pequeño negocio, decide empacarlos en cajitas con capacidad para 1, 2, 3, 4, 5, ó 6 jabones.

1. ¿Puede Anita empacar la totalidad de jabones que compró en cajitas de 6 unidades cada una, haciéndolo de forma equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

2. De las cajitas que dispone Anita; ¿cuáles puede usar para empacar todos los jabones de manera equitativa y máxima, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuántos jabones como mínimo debería destinar Anita para su uso personal, de tal forma que el resto de jabones pueda ser empacados de manera equitativa y máxima en cajitas de 6 unidades, sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.
4. Si del total de jabones que compró Anita, solo usó uno, ¿cuántas y cuáles son las posibilidades que tiene ahora para empacar de manera equitativa y máxima el resto de jabones en las cajitas que dispone, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuántos jabones como mínimo debería separar Anita para su uso personal de tal forma que el resto de jabones no pueda ser empacado de manera equitativa y máxima en cajitas de tres o cinco unidades? Justifica tu respuesta.

4.1.2. Objetivos de la actividad “La oferta de jabones”

- Identificar y caracterizar las acepciones y modos de uso que muestran los participantes respecto a los conceptos de múltiplo y divisor de un número.
- Observar y caracterizar la manera como los participantes determinan los múltiplos y divisores de un número.
- Observar y caracterizar la manera como los participantes determinan los divisores primos y compuestos de un número.
- Observar y caracterizar los sistemas de representación movilizados en el desarrollo de la actividad.

4.1.3. Descripción y análisis de la pregunta 1 de la actividad “La oferta de jabones”

¿Puede Anita empacar la totalidad de jabones que compró en cajitas de 6 unidades cada una, haciéndolo de forma equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

4.1.3.1. Objetivo de la pregunta 1 de la actividad "La oferta de jabones"

Observar la acepción o modo de uso que tienen los participantes sobre el concepto "ser múltiplo" o "ser divisible", así también analizar los procedimientos utilizados en la resolución de la actividad propuesta.

4.1.3.2. Solución experta de la pregunta 1 de la actividad "La oferta de jabones"

Paso 1: expresar el total de jabones como una estructura multiplicativa

$Total\ de\ jabones = 13\ x\ 3\ x\ 3$

Paso 2: representar la capacidad de la cajita (6 unidades) como producto de los factores $2\ x\ 3$

Paso 3: evaluar si el total de jabones es divisible entre 6; evidentemente no lo es porque el factor 2 no es factor del total de jabones.

Finalmente, el participante debe responder que el total de jabones no se puede colocar en cajitas de 6 unidades de forma equitativa y máxima, sin que sobre ni falte ningún jabón. Porque el total de jabones no es divisible por 6.

4.1.3.3. Análisis del proceso de resolución de la pregunta 1 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio.

Tal como se puede apreciar en la Figura 4.1, Figura 4.2 y Figura 4.3; cada uno de los participantes ante el sistema de representación verbal del enunciado y requerimiento del problema, optaron en primer lugar con traducir la situación planteada y representar el total de jabones como una estructura multiplicativa $13\ x\ 3\ x\ 3$. Seguidamente calcularon el producto obteniendo un total de 117 jabones poniendo en evidencia la necesidad de realizar una conversión hacia el sistema de representación numérica posicional de base diez para evaluar las condiciones del problema.

Tomando en cuenta la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural y los descriptores usados (codificados como D02N1) evidenciamos que los participantes se encuentran en el nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número.

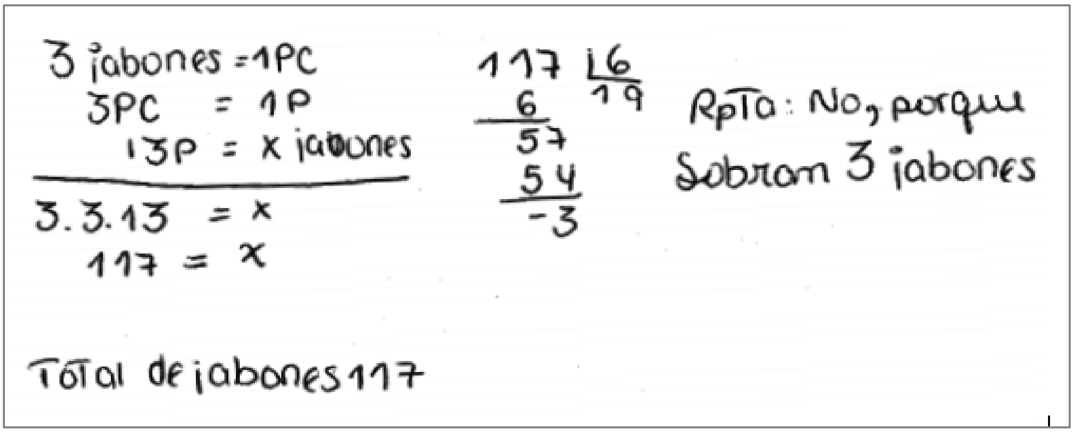


Figura 4.1 Solución de la pregunta 1 de la actividad “la oferta de jabones” desarrollado por el participante P1

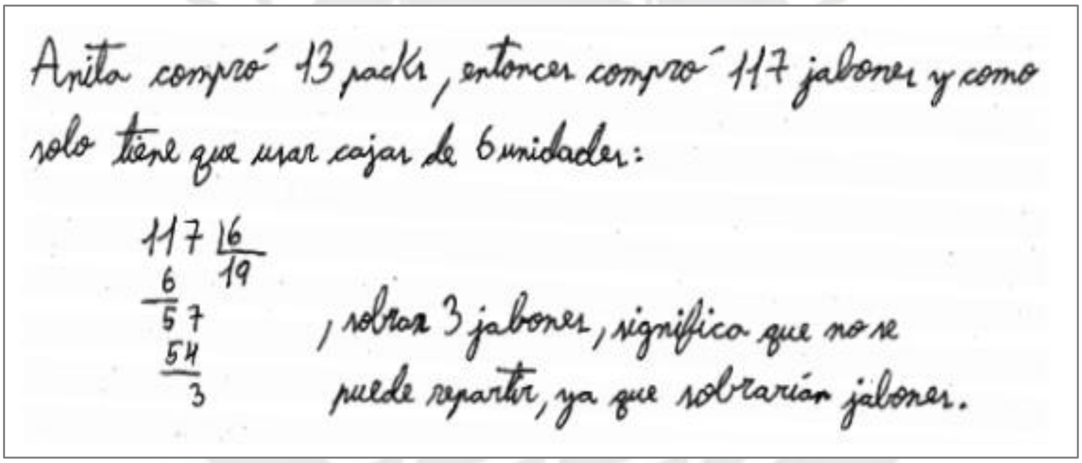
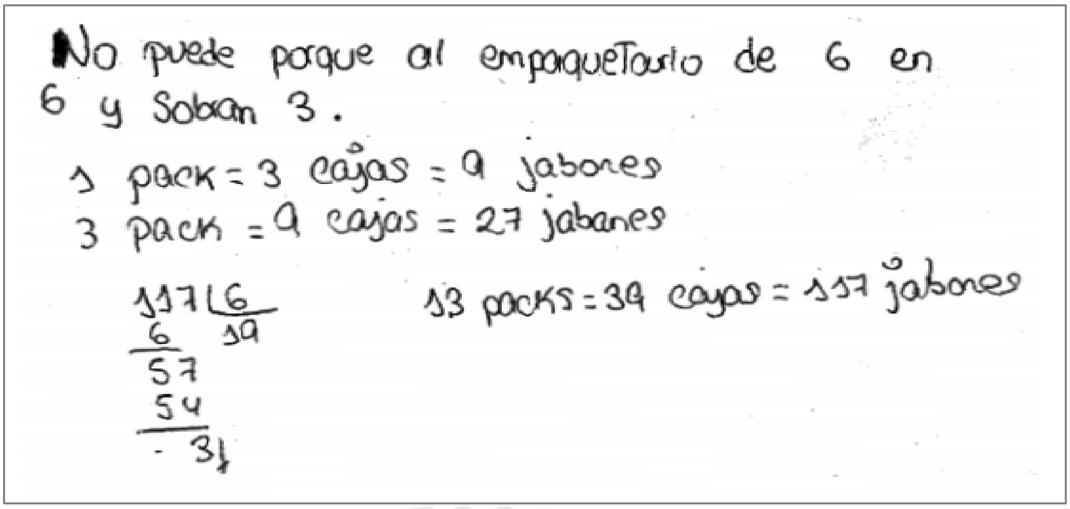


Figura 4.2 Solución de la pregunta 1 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollado por el participante P2

Posteriormente los participantes proceden con realizar la división entera entre 117 y 6, con el propósito de evaluar si el total de jabones se pueden colocar en cajitas de 6 unidades y que cumpla las condiciones del problema. Por lo observado consideramos que los participantes de manera indirecta evidencian una acepción de múltiplo como dividendo (MD) o una acepción de divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd) codificados como D03N1 y D04N1 respectivamente.



No puede porque al empaqueTarlo de 6 en
6 y Sobran 3.

1 pack = 3 cajas = 9 jabones
3 pack = 9 cajas = 27 jabanes

117 | 6
6   19
57
54
3

13 packs = 39 cajas = 117 jabones

Figura 4.3 Solución de la pregunta 1 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollado por el participante P3

4.1.3.4. Conclusiones sobre el proceso de resolución de la pregunta 1 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollados por los participantes del estudio

Realizado el análisis de las respuestas de los participantes y haciendo un comparativo con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural y con la solución experta para esta pregunta en particular; podemos decir que los participantes no utilizan de manera explícita la noción de divisor de un número. Así mismo se puede notar la necesidad de los participantes por realizar un cambio al sistema de representación numérico posicional de base diez y proceder a evaluar las condiciones de la pregunta a través de la división entera y exacta, mostrando la acepción Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd).

Los participantes no toman en consideración que, en el contexto del problema, este puede ser evaluado de manera general a través de la acepción Múltiplo como relación (MR) o Divisor como relación (D-R), pues no se está considerando la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por otro. En este caso particular no se destaca el uso del producto $13 \times 3 \times 3$; y que 13 y 3 son números primos y que no está presente el número 2, que es factor primo de 6. En ese sentido consideramos que los participantes del estudio se encuentran en un Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

4.1.4. Descripción y análisis de la pregunta 2 de la actividad “La oferta de jabones”

De las cajitas que dispone Anita; ¿cuáles puede usar para empacar todos los jabones de manera equitativa y máxima, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

4.1.4.1. Objetivo de la pregunta 2 de la actividad “La oferta de jabones”

Observar si los participantes del estudio identifican el concepto matemático divisor de un número como el elemento que permite guiar la resolución de la actividad planteada; así mismo se pretende indagar en el procedimiento que siguen dichos participantes para determinar cuáles son estos divisores.

4.1.4.2. Solución experta de la pregunta 2 de la actividad “La oferta de jabones”

A partir de la estructura multiplicativa del total de jabones, proceder a representar el total de jabones en su forma canónica, luego, mediante la representación tabular determinar los divisores de dicho número; posteriormente relacionar estos divisores con las capacidades de las posibles cajitas que se podrían usar para empacar el total de jabones de manera equitativa y máxima sin que no sobre ni falte ningún jabón y luego proceder a relacionar y determinar las alternativas correctas de tal forma que se cumpla con las condiciones planteadas en la actividad. (Figura 4.4)

Total de jabones $= 13 \times 3 \times 3$
$= 13 \times 3^2$

Divisores:

	3^0	3^1	3^2
	1	3	9
13	13	39	117

Posibles cajitas = {1; 3; 9; 13; 39; 117}

Cajitas disponible = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Figura 4.4 Solución experta de la pregunta 2 de la actividad “La oferta de jabones”

Finalmente, el participante debe responder, Para empacar la totalidad de jabones de manera equitativa y máxima, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón, Anita puede utilizar las cajitas de 1 y 3 unidades.

4.1.4.3. Análisis del proceso de resolución de la pregunta 2 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio.

Tal como se puede apreciar en la figura 4.5, figura 4.6 y figura 4.7 de manera similar todos los participantes, en primer lugar realizan la traducción del sistema de representación verbal del problema planteado, a un sistema de representación numérica posicional de base diez y desde allí evalúan las condiciones del problema, evidenciando el uso de descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número, codificados como D02N1; obteniendo un total de 117 jabones. Posteriormente tomando en consideración que Anita dispone de cajitas de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ unidades; realiza una serie de pruebas de ensayo y error mediante el uso de la división entera y evaluando si el resto es cero, para concluir que si es posible usar determinada cajita para empacar el total de jabones y de tal forma que se satisfagan las condiciones planteadas en la actividad; Haciendo uso sucesivo de las acepciones implícitas de Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd); evidenciando el uso de descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número codificados como D05N1, D03N1 o D04N1 respectivamente.

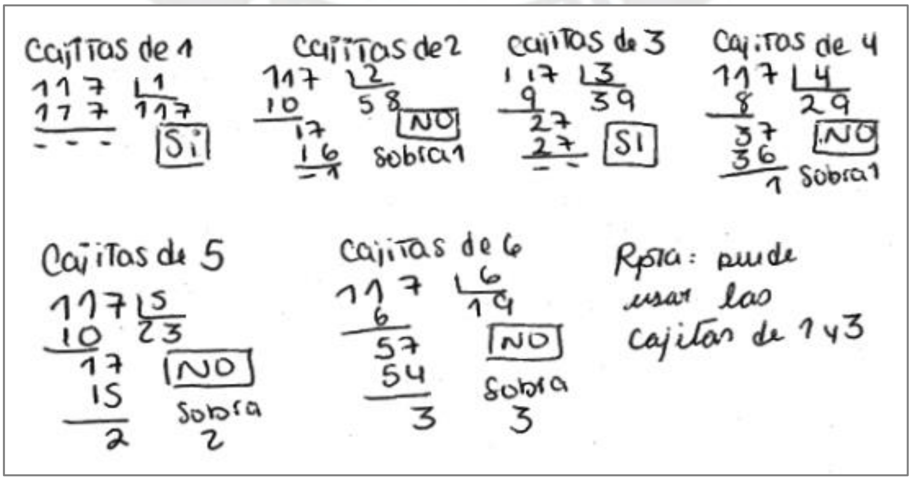


Figura 4.5 Solución de la pregunta 2 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P1

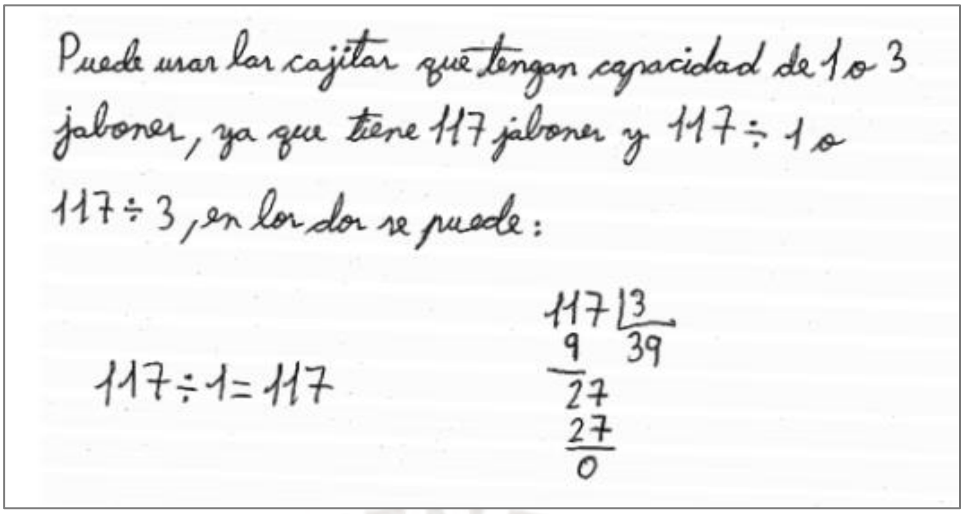


Figura 4.6 Solución de la pregunta 2 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P2

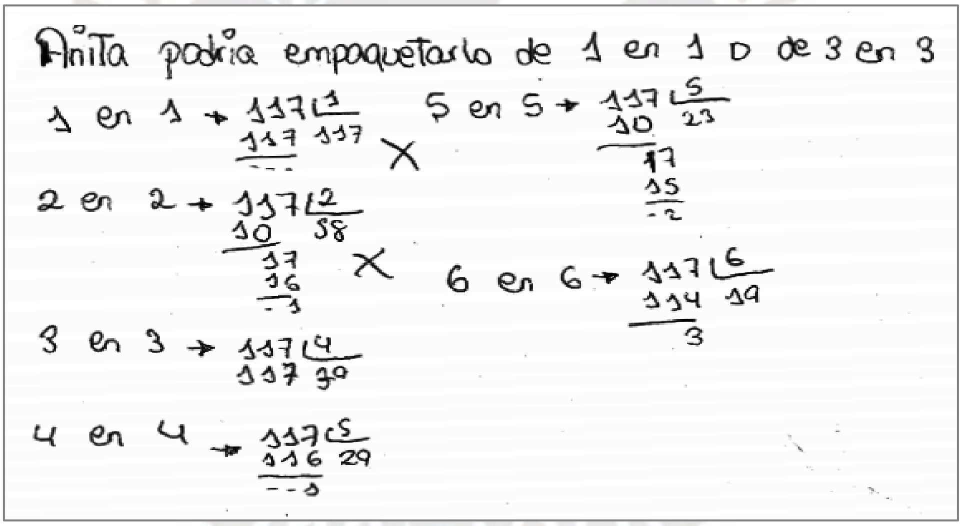


Figura 4.7 Solución de la pregunta 2 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P3

4.1.4.4. Conclusiones sobre el proceso de resolución de la pregunta 2 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio

Realizado el análisis de las producciones de los participantes del estudio y haciendo un comparativo con la solución experta para esta pregunta en particular, se ha podido detectar que los participantes no han podido identificar de manera explícita los elementos matemáticos asociados a los conceptos de múltiplos y divisores de un número; así mismo se puede notar la necesidad de los participantes, por realizar una conversión invariante al sistema de representación numérico posicional de base diez y el uso de la acepción Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd), para evaluar de manera implícita la divisibilidad entre números, a través de sucesivos ensayos de prueba y error sin tomar en consideración que este procedimiento puede ser inviable de realizar en casos en que los datos sean números grandes y no plantear un procedimiento de resolución más eficiente tal como se propone en la solución experta planteada anteriormente, en el que se considera el uso de la descomposición canónica de un número y a partir de ello determinar los divisores de dicho número a través de la representación tabular y de esta forma poder determinar cuáles de dichos divisores satisfacen la condición del problema. En ese sentido consideramos que los participantes del estudio se encuentran en un nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

4.1.5. Descripción y análisis de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones"

¿Cuántos jabones como mínimo debería destinar Anita para su uso personal, de tal forma que el resto de jabones pueda ser empacados de manera equitativa y máxima en cajitas de 6 unidades, sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

4.1.5.1. Objetivo de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones"

A través de esta pregunta se pretende que el estudiante de manera contextualmente correcta realice la división entera, y el resto sea asociado al número de jabones que Anita debe reservar para su uso personal.

4.1.5.2. Solución experta de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones"

Paso 1: pasar de la estructura multiplicativa a un sistema de representación numérica posicional de base diez.

$13\ x\ 3\ x\ 3 = 117$

Paso 2: Realizar la división entera del total de jabones entre 6 y determinar el resto y asociarlo a la cantidad de jabones que Anita debe reservar para su uso personal, de tal forma que se cumpla con las condiciones del problema

Finalmente, el participante debe responder, Anita debe reservar 3 jabones para su uso personal de tal forma que el resto de jabones pueda ser empacada de manera equitativa y máxima en cajitas de 6 unidades, sin que sobre ni falte ningún jabón.

4.1.5.3. Análisis del proceso de resolución de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio.

Tal como se puede apreciar en la figura 4.8, figura 4.9 y figura 4.10 los tres participantes, de manera contextualmente correcta realizan el cambio de sistema de representación verbal del problema planteado al sistema de representación numérica posicional de base diez, obteniendo un total de 117 jabones, posteriormente realizan la división entera entre 6, y el resto lo relacionan con la cantidad de jabones que Anita debe reservar para su uso personal de tal forma que los jabones restantes se puedan empacar en cajitas de 6 unidades de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ninguno; movilizando descriptores de Nivel 3 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número, codificados como D02N3 o D03N3.

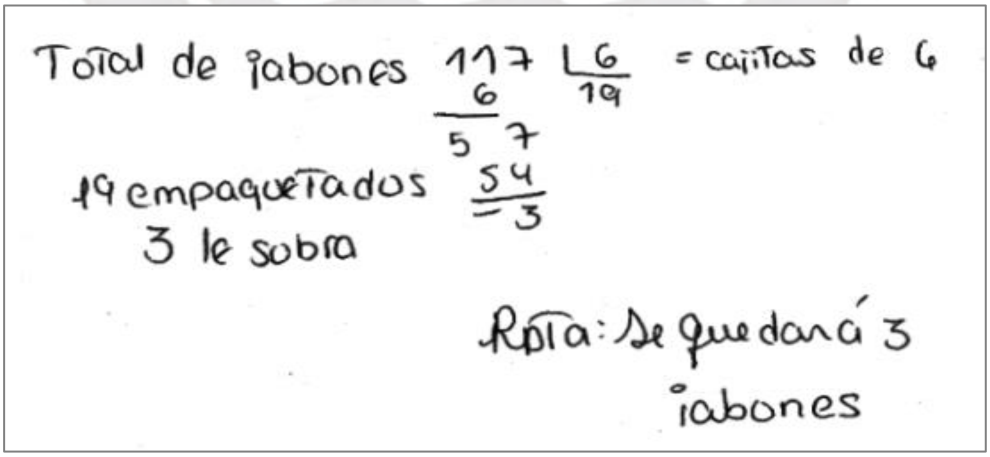


Figura 4.8 Solución de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P1

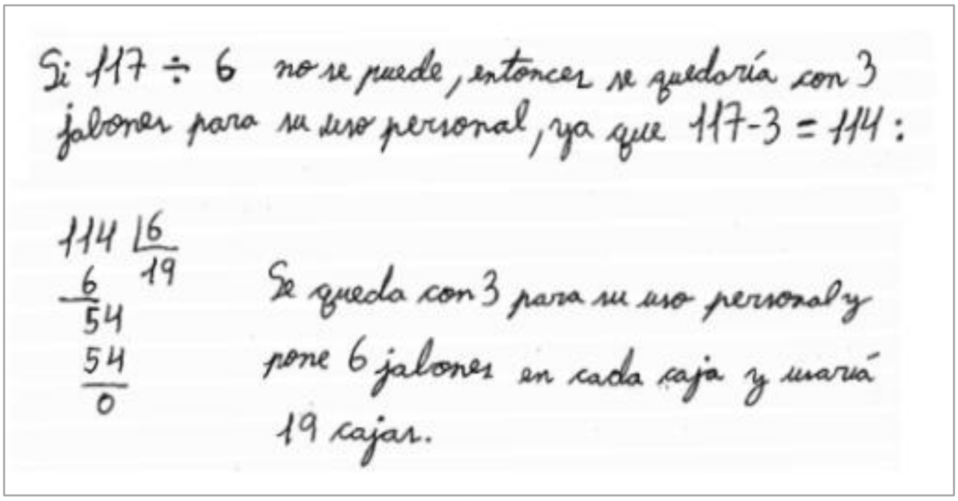


Figura 4.9 Solución de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollada por el participante P2

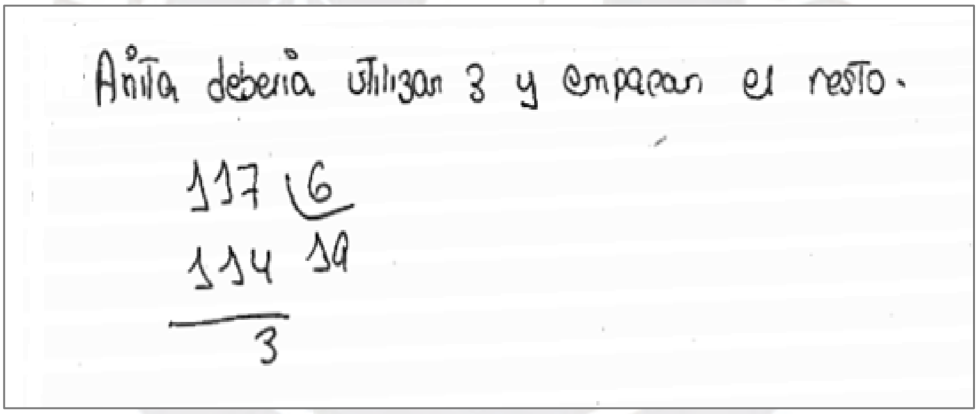


Figura 4.10 Solución de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P3

4.1.5.4. Conclusiones sobre el proceso de resolución de la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio

Realizado el análisis de las producciones de los participantes y haciendo un comparativo con la solución experta para esta pregunta en particular, los participantes de manera implícita usan la acepción Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd), realizan la división entera para determinar el resto y asociarlo a la cantidad de jabones que debe reservar Anita para su uso personal y de esta forma garantizar las condiciones del problema. En ese sentido respecto a esta pregunta consideramos que los estudiantes mostraron un Nivel 3 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural, codificados como D02N3 o D03N3.

4.1.6. Descripción y análisis de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones"

Si del total de jabones que compró Anita, solo usó uno, ¿cuántas y cuáles son las posibilidades que tiene ahora para empacar de manera equitativa y máxima el resto de jabones en las cajitas que dispone, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

4.1.6.1. Objetivo de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones"

Observar si los participantes del estudio identifican el concepto matemático divisor de un número como el elemento que permite dar solución al problema planteado, así como observar el procedimiento seguido para determinar cuáles son los divisores de un número.

4.1.6.2. Solución experta de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones"

Inicialmente calculamos el total de jabones, a dicho total le restamos 1 jabón, obteniendo un total de 116 jabones, posteriormente procedemos a representar dicho número en su forma canónica, y luego mediante la representación tabular proceder a determinar los divisores de dicho número; relacionando estos divisores con las capacidades de las posibles cajitas que se podrían usar para empacar el total de jabones de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ninguno; luego, sabiendo las capacidades de las cajitas disponibles, proceder a determinar las alternativas correctas de tal forma que se cumpla las condiciones planteadas. (Figura 4.11)

Finalmente, el participante debe responder, Si Anita se reserva un jabón para su uso personal, entonces el resto de jabones podrán ser empacados de 3 formas diferentes: $\{1; 2; 4\}\, unidades$, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón.

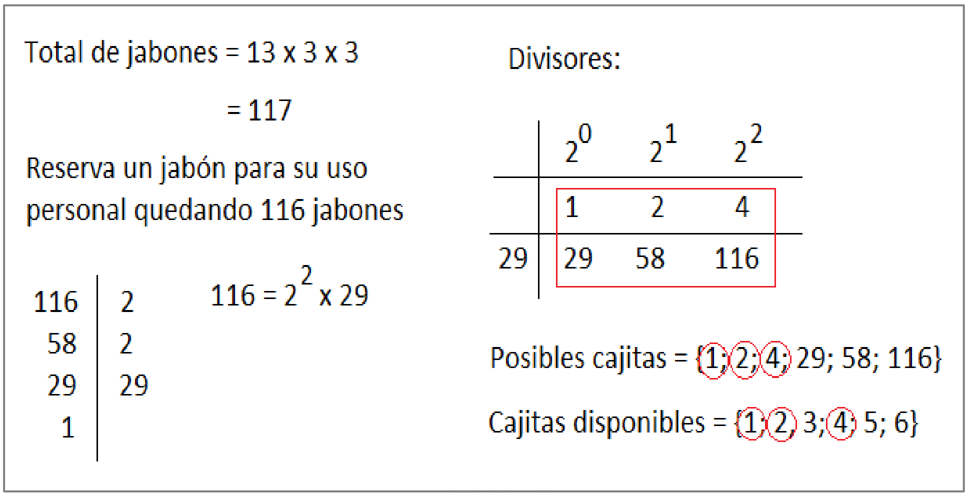


Figura 4.11 Solución experta de la pregunta 4 de la actividad
"La oferta de jabones"

4.1.6.3. Análisis del proceso de resolución de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio.

Tal como se puede apreciar en la figura 4.12, figura 4.13 y figura 4.14 de manera similar todos los participantes del estudio, de manera contextualmente correcta en primer lugar realizan una traducción del sistema de representación verbal del problema planteado, al sistema de representación numérica posicional de base diez obteniendo un total de 117 jabones, posteriormente quitan un jabón obteniendo un nuevo total de 116 jabones. Luego tomando en consideración que Anita dispone de cajitas de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ unidades; realiza una serie de pruebas de ensayo y error, mediante el uso de la división entera y evaluando si el resto es cero para concluir que si es posible usar determinada cajita para empacar los jabones y que satisfagan las condiciones planteadas en la actividad; Haciendo uso sucesivo de las acepciones implícitas de Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd); evidenciando el uso de descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número codificados como D05N1,D03N1 o D04N1 respectivamente.

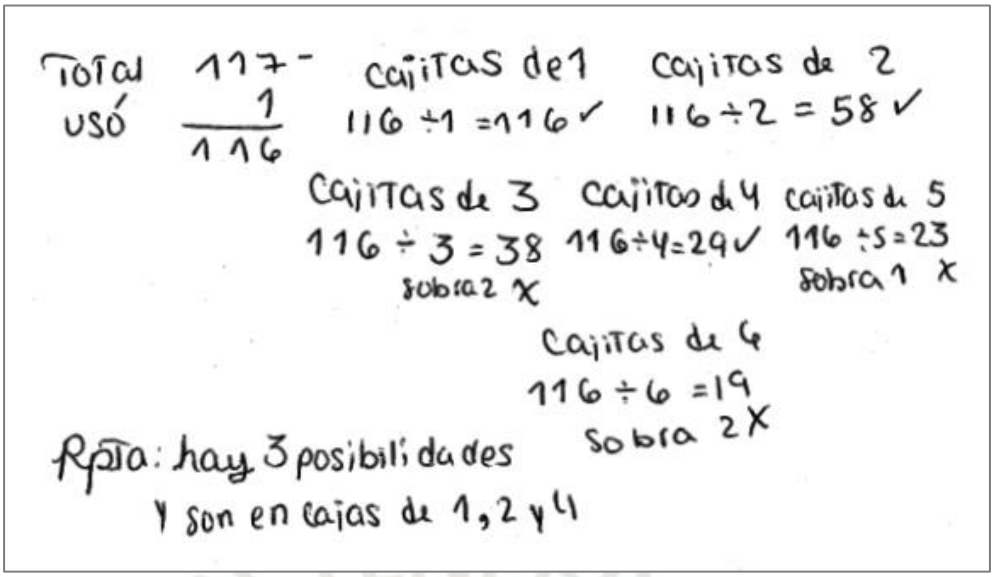


Figura 4.12 Solución de la pregunta 4 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollado por el participante P1

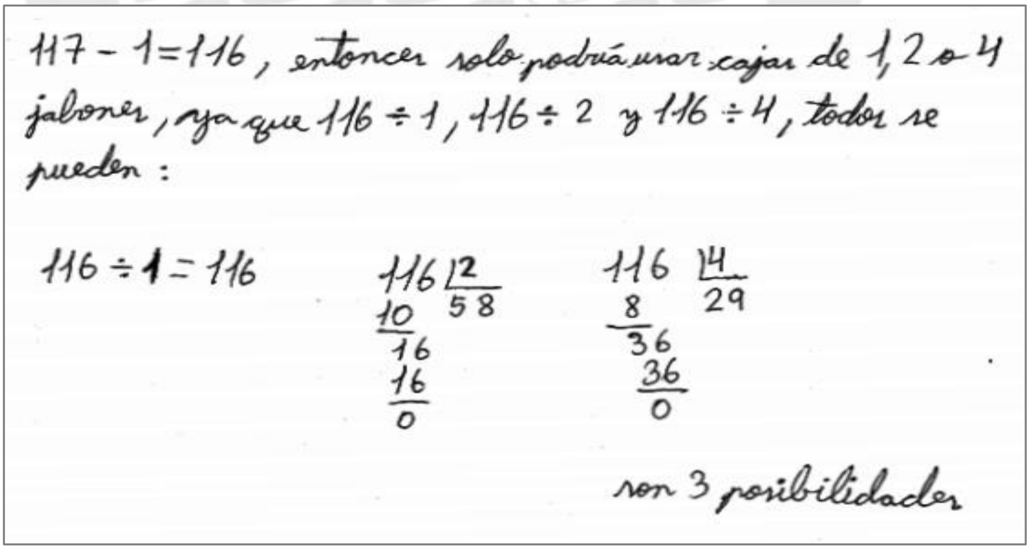


Figura 4.13 Solución de la pregunta 4 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollado por el participante P2

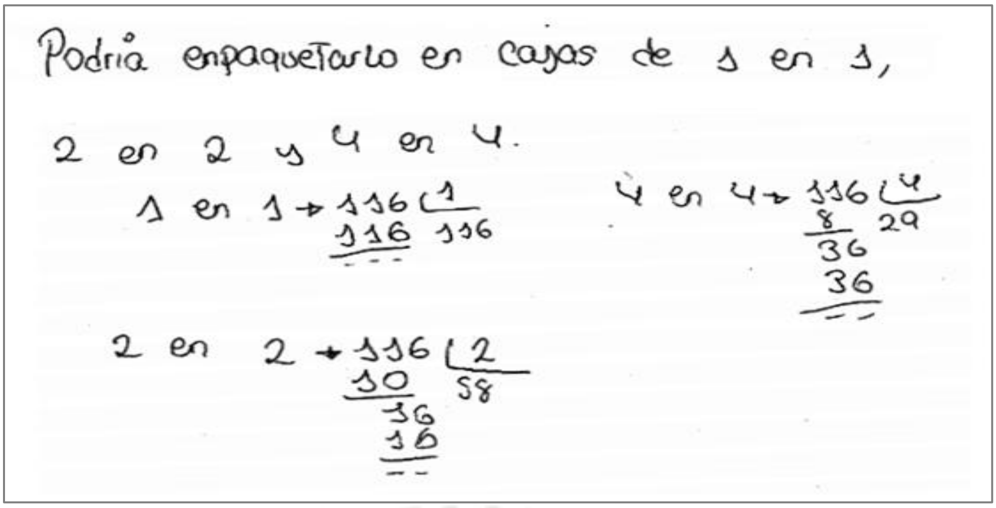


Figura 4.14 Solución de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P3

4.1.6.4. Conclusiones sobre el proceso de resolución de la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio

Realizado el análisis de las producciones de los participantes y haciendo un comparativo con la solución experta para esta pregunta en particular, los estudiantes no han podido identificar de manera explícita los elementos asociados a los conceptos de múltiplos y divisores de un número; así mismo se puede notar la necesidad de los estudiantes, por realizar una conversión al sistema de representación numérica posicional y el uso de la acepción Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd), para evaluar de manera implícita la divisibilidad entre números, a través de sucesivos ensayos de prueba y error sin tomar en consideración que este procedimiento puede ser inviable de realizar en casos en que los datos sean números grandes y no plantear un procedimiento de resolución más eficiente tal como se propone en la solución experta planteada anteriormente, en el que se considera el uso de la descomposición canónica de un número y desde allí determinar los divisores de dicho número a través de la representación tabular y poder determinar cuál de dichos divisores satisfacen la condición del problema. En ese sentido consideramos que los estudiantes se encuentran en un Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

4.1.7. Descripción y análisis de la pregunta 5 de la actividad “La oferta de jabones”

¿Cuántos jabones como mínimo debería separar Anita para su uso personal de tal forma que el resto de jabones no pueda ser empacado de manera equitativa y máxima en cajitas de tres o cinco unidades? Justifica tu respuesta.

4.1.7.1. Objetivo de la pregunta 5 de la actividad “La oferta de jabones”

El propósito de este requerimiento consiste en que los participantes evalúen la indivisibilidad a través de los criterios de divisibilidad sin tener que realizar la operación de dividir y evaluar el resto.

4.1.7.2. Solución experta de la pregunta 5 de la actividad “La oferta de jabones”

Paso 1: realizar la conversión del sistema de representación de la estructura multiplicativa al sistema de representación posicional de base diez.

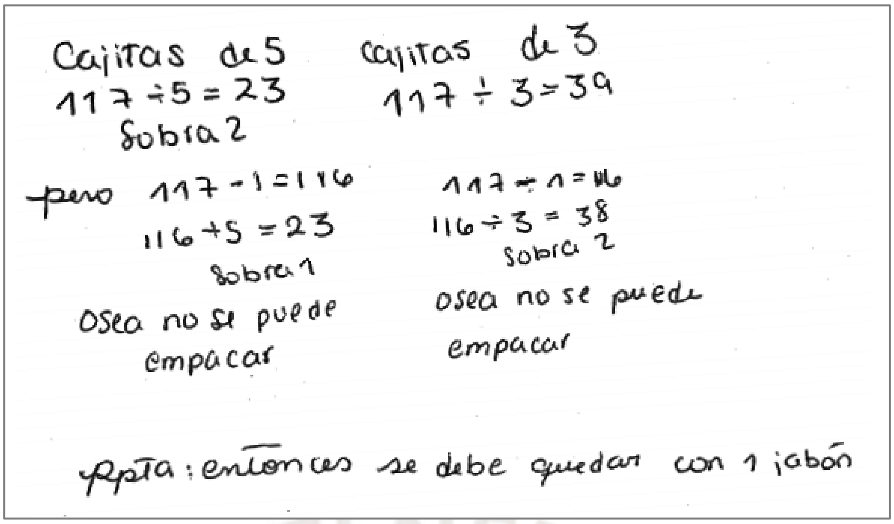
$Total\ de\ jabones = 13\ x\ 3\ x\ 3 = 117$

Paso 2: quitar 1 jabón y aplicar el criterio de divisibilidad por 3 y por 5 para evaluar la indivisibilidad por estos números.

Finalmente, el participante debe responder, Anita debe reservar como mínimo un jabón para su uso personal, de tal forma que los jabones restantes no puedan ser empacados de manera equitativa y máxima en cajitas de 3 o 5 unidades.

4.1.7.3. Análisis del proceso de resolución de la pregunta 5 de la actividad “La oferta de jabones” desarrollados por los participantes del estudio.

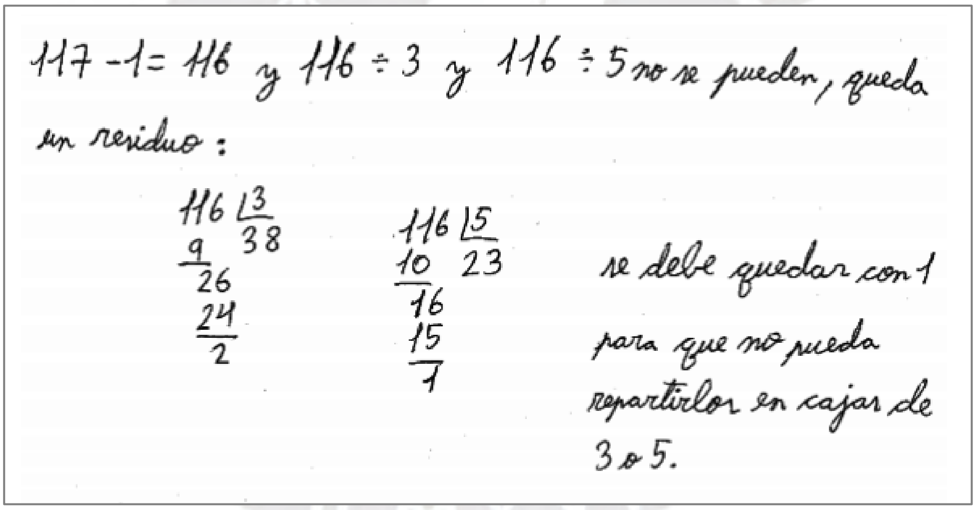
Tal como se puede apreciar en la figura 4.15, figura 4.16 y figura 4.17 de manera similar todos los participantes del estudio, de manera contextualmente correcta en primer lugar realizan una traducción del sistema de representación verbal del problema planteado, al sistema de representación numérico posicional de base diez obteniendo un total de 117 jabones.


Cajitas de 5
117 ÷ 5 = 23
Sobra 2
pero 117 - 1 = 116
116 ÷ 5 = 23
Sobra 1
Osea no se puede empacar

Cajitas de 3
117 ÷ 3 = 39
117 - 1 = 116
116 ÷ 3 = 38
Sobra 2
osea no se puede empacar

Rpta: entonces se debe quedar con 1 jabón

Figura 4.15 Solución de la pregunta 5 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P1


117 - 1 = 116 y 116 ÷ 3 y 116 ÷ 5 no se pueden, queda un residuo:

116 | 3
9 | 38
26
24
2

116 | 5
10 | 23
16
15
1

se debe quedar con 1 para que no pueda repartirlos en cajas de 3 o 5.

Figura 4.16 Solución de la pregunta 5 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P2

Luego mediante ensayos de prueba y error movilizando descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número codificados como D05N1, procede a quitar inicialmente un jabón y el nuevo total de jabones mediante la división entera entre 3, verifica que el resto sea diferente de cero, para concluir que el nuevo total no se puede colocar en cajitas de 3 unidades y que se satisfaga las condiciones del problema, de ser cierto, acto seguido procede a realizar la división entera entre 5 y verificar que el resto también sea diferentes de cero y que además satisfaga la condiciones del problema para concluir que Anita debe reservar un jabón para su uso personal de tal forma que el resto de jabones no se puedan empacar en cajitas de 3 unidades ni de 5 unidades y que además se verifique las condiciones del problema; en caso contrario procedería a quitar 2 jabones y repetir el proceso; movilizando acepciones implícitas de Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd); evidenciando el uso de descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número codificados como D03N1 o D04N1.

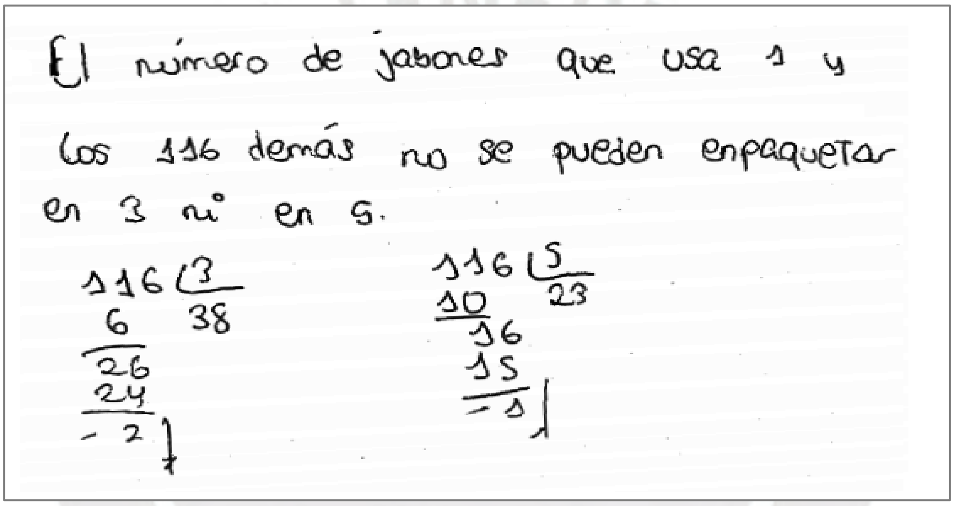


Figura 4.17 Solución de la pregunta 5 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollado por el participante P3

4.1.7.4. Conclusiones sobre el proceso de resolución de la pregunta 5 de la actividad "La oferta de jabones" desarrollados por los participantes del estudio

Realizado el análisis de las producciones de los participantes y haciendo un comparativo con la solución experta esperada para esta pregunta en particular, los estudiantes no han podido identificar de manera explícita los elementos asociados a los conceptos de múltiplos y divisores de un número; así mismo se puede notar los estudiantes realizan una serie de ensayos de prueba y error, sin reconocer que este proceso en ciertas ocasiones puede ser inviable de realizar. Por otro lado, se hace evidente la movilización de la acepción Múltiplo como dividendo (MD) o Divisor como consecuencia de haber efectuado una división entera y que esta resulte exacta (D-cd), para evaluar de manera implícita la divisibilidad entre números, envés de plantear soluciones como las expresadas en la propuesta de solución experta. En la que se propone el uso de los criterios de divisibilidad y la acepción de múltiplo y divisor como una relación de contenencia. En ese sentido consideramos que los estudiantes se encuentran en un Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural.

4.1.8. Conclusión general sobre los resultados de la evaluación exploratoria

A través de la aplicación y desarrollo de esta actividad, se logró identificar que los participantes del estudio evidenciaron encontrase en un nivel 1 de comprensión de los conceptos matemáticos en estudio; pues básicamente dichos participantes no mostraron de manera explícita la movilización de los conceptos en estudio en ningunas de sus acepciones o modos de uso, sin embargo la mayoría de manera implícita evalúan la divisibilidad entre números solo a través de la división entera y exacta; en ese sentido los participantes tenían la necesidad de realizar conversiones invariantes hacia el sistema de representación numérico posicional de base diez, basado en la necesidad de realizar la operación aritmética mencionada; esto los lleva a no tomar en cuenta otras alternativas para evaluar la divisibilidad entre números, por ejemplo la divisibilidad como una relación de contenencia a partir de la representación como producto de factores primos u otra forma de estructura multiplicativa.

En general las actuaciones y respuestas de los participantes se enmarcan en una percepción operacional de la noción de múltiplo y divisor de un número, pues el significado implícito que asignan dichos participantes presentan dos acepciones: 1) múltiplo como dividendo en una división entera y exacta y 2) divisor como consecuencia de una división entera y exacta, en ese sentido los participantes para evaluar si un números es divisible otros varios, tienen la necesidad de realizar una serie de ensayos de prueba y error mediante la división entera y exacta entre dicho número y los otros varios.

4.2. Sesión 2: Discusión de resultados de la evaluación exploratoria y Descripción de los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas

El contenido de esta sesión se basa en dos aspectos, por una parte, realizar una discusión de los resultados de la evaluación exploratoria y por otro lado poner en contacto a los estudiantes con las nociones y lineamientos del marco teórico de la creación de problemas, específicamente la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) que usaremos con el propósito de contribuir en la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural.

4.2.1. Discusión de resultados de la evaluación exploratoria

En este apartado describimos los objetivos de realizar las discusiones de los resultados de la evaluación exploratoria; en función de los resultados evidenciados, hacer una revisión de los conceptos, significados, modos de uso o acepciones de los elementos matemáticos asociados a la noción de múltiplo y divisor de un número natural; mostraremos algunos diálogos

4.2.1.1. Objetivos de la discusión de los resultados de la evaluación exploratoria.

Específicamente con esta actividad procuramos:

- Explicar la equivalencia directa entre “múltiplo de un número natural a” y “divisible por un número natural a”; “divisor de un número natural b” y “factor de un número natural b”.
- Explicar cómo evaluar la divisibilidad entre números de forma contextualmente correcta
- Explicar cómo calcular y determinar los múltiplos y divisores de un número natural.

4.2.1.2. Discusión sobre la pregunta 1 de la actividad “La oferta de jabones”

¿Puede Anita empacar la totalidad de jabones que compró en cajitas de 6 unidades cada una, haciéndolo de forma equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta

El docente investigador (DI), comentó, que todos los participantes, procedieron de una u otra forma a calcular el total de jabones multiplicando 13 x 3 x 3 y obteniendo como resultado un total de 117 jabones, luego para evaluar si los 117 jabones se podían empacar en cajitas de 6 unidades, de tal forma que se cumpla las condiciones del problema, procedieron a realizar la división entera 117 entre 6, obteniendo 19 como cociente y 3 como resto, concluyendo que dicha cantidad de jabones, no se podían empacar en cajitas de 6 unidades y que además cumpla las condiciones del problema; El docente investigador hizo la aclaración de que este resultado era correcto, sin embargo podrían darse casos en que este procedimiento de solución podría ser inviable de realizar, poniendo como ejemplo la siguiente situación: ¿Cómo se evaluaría las condiciones del problema si el total de jabones fuera $13^{18}\ x\ 3\ x\ 3$?, produciéndose el siguiente dialogo:

P1 Tendría que ver si ese número es divisible entre 6

DI Y como harías eso, ¿procederías a dividir tal como lo hicieron en la prueba exploratoria?

P1 Sonríe, y dice No.

DI Entonces ¿cómo podemos hacerlo?

Nadie responde.

El docente investigador expresa que además de la división entera la divisibilidad entre números puede ser evaluada a través de los criterios de divisibilidad y a través de la relación de contenencia, es decir si uno de los números contiene un determinado número entero y exacto de veces al otro. Haciendo hincapié que el ejemplo que estamos analizando se resuelve usando este tercer método de evaluación de la divisibilidad entre números.

DI ¿ $\mathbf{13^{18}\ x\ 3\ x\ 3}$ es múltiplo de 6 o es divisible entre 6?

P3 Si es múltiplo entonces no es divisible.

P2 Sonriendo dice es lo mismo, múltiplo es lo mismo que divisible

DI efectivamente ser múltiplo es lo mismo que ser divisible; así también ser divisor es lo mismo que ser factor.

P1 Profesor, yo creo que ese número no es divisible por 6

DI ¿Por qué?

P1 El 6 es igual a $\mathbf{2\ x\ 3}$; en el número que me dan contiene al 3 pero no al 2.

DI Correcto, entonces como ya dijimos anteriormente, para poder decir que un número es divisible por otro solo basta ver si el primero contiene al segundo un número entero y exacto de veces, es decir si todos los factores o divisores del segundo son factores o divisores del primero.

4.2.1.3. Discusión sobre la pregunta 2 de la actividad “La oferta de jabones”

De las cajitas que dispone Anita; ¿cuáles puede usar para empacar todos los jabones de manera equitativa y máxima, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

El docente investigador explica que la totalidad de participantes procedió a realizar una serie de ensayos de prueba y error, calculando en primer lugar el total de jabones y luego proceder a dividirlo entre 1, 2, 3, 4, 5, 6; y verificar el resto de cada una de estas divisiones, sea cero, concluyendo que todas aquellas divisiones que dan un resto cero, significa que si se puede empacar todos los jabones en esa cajita y que se cumpla con las condiciones del problema; señalando una vez más que esta metodología en ocasiones puede ser inviable de realizar.

A continuación, el docente investigador expresa que un procedimiento alternativo más eficiente consistiría en calcular todos los divisores del número total de jabones a partir de su representación canónica y mediante la representación tabular determinar dichos divisores. Mostrando a través del equipo multimedia el procedimiento de solución experta propuesta para esta pregunta descrita anteriormente en el apartado anterior.

4.2.1.4. Discusión sobre la pregunta 3 de la actividad "La oferta de jabones"

¿Cuántos jabones como mínimo debería destinar Anita para su uso personal, de tal forma que el resto de jabones pueda ser empacados de manera equitativa y máxima en cajitas de 6 unidades, sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

Con respecto al procedimiento empleado por los participantes del estudio para la resolución de este problema, el docente investigador expresa que todos los participantes procedieron de manera contextualmente correcta, es decir dividieron el total de jabones entre 6, obteniendo un resto de 3; relacionando este valor con la cantidad de jabones que debe reservar Anita para su uso personal y que además se satisfaga las condiciones del problema.

4.2.1.5. Discusión sobre la pregunta 4 de la actividad "La oferta de jabones"

Si del total de jabones que compró Anita, solo usó uno, ¿cuántas y cuáles son las posibilidades que tiene ahora para empacar de manera equitativa y máxima el resto de jabones en las cajitas que dispone, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

Respecto al procedimiento a seguir para resolver este problema, el docente investigador comentó, que inicialmente se debió proceder a calcular el total de jabones, luego quitar un jabón y evaluar si el resto de jabones cumple con las condiciones del problema para ello proceder como el caso de la pregunta 2.

4.2.1.6. Discusión sobre la pregunta 5 de la actividad "La oferta de jabones"

¿Cuántos jabones como mínimo debería separar Anita para su uso personal de tal forma que el resto de jabones no pueda ser empacado de manera equitativa y máxima en cajitas de tres o cinco unidades? Justifica tu respuesta.

El docente investigador explica que, para la solución de este problema, se pudo haber utilizado los criterios de divisibilidad, por ejemplo, al total de jabones quitar uno de los jabones y a través de los criterios de divisibilidad por 3 y por 5 evaluar si se cumple con las condiciones del problema.

4.2.2. Descripción de los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas y la estrategia OAR.

En este apartado definimos los objetivos de esta sesión, diseñamos y aplicamos la presentación de diapositivas (Anexo A) con el propósito de explicar los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas y la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) como una adaptación de la estrategia EPP (Episodio, problema Pre, problema Pos), que usaremos en nuestro estudio; así también creamos y presentamos la actividad denominada “El cumpleaños de Rosita” que utilizaremos como ejemplo de aplicación de la estrategia OAR. En calidad de ejemplos presentamos los posibles problemas original, auxiliar y retrospectivo con sus respectivas soluciones expertas.

4.2.2.1. Actividad “El cumpleaños de Rosita”

La señora María, con el propósito de celebrar el cumpleaños de su hija Rosita, compró en el supermercado 5 pack de besos de moza; cada pack contiene 3 cajas y cada caja a su vez contiene 9 unidades. La señora María se pregunta si ¿Podrá repartir de manera equitativa y máxima todos los besos de moza entre los 18 invitados que asistieron a la fiesta, de tal manera que no sobre ni falte ningún beso de moza? Justifica tu respuesta.

4.2.2.2. Objetivos de la actividad “El cumpleaños de Rosita”

- Describir los elementos de un problema.
- Explicar cómo crear problemas auxiliares y retrospectivos por variación del problema original.
- Explicar los propósitos de los problemas original, auxiliar y retrospectivo.

4.2.2.3. Descripción del problema original de la actividad “El cumpleaños de Rosita”

A continuación, veamos los elementos de este problema.

Información:

- La señora María, la mama de Rosita, compra 5 pack de besos de moza.
- Cada pack contiene 3 cajas
- Cada caja contiene 9 besos de moza.

Requerimiento:

- Determinar si ¿Se puede repartir la totalidad de besos de moza entre los 18 invitados de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ninguno?

Contexto:

- Extra matemático

Entorno matemático:

Divisores de un número, acepción de Divisor como relación (D-R), acepción Múltiplo como relación (MR).

4.2.2.4. Posible problema auxiliar de la actividad "El cumpleaños de Rosita"

A continuación, presentamos el enunciado y la descripción de los elementos de un posible problema auxiliar creado por variación del problema original, con el propósito de facilitar la resolución del problema original.

Posible enunciado del problema auxiliar.

> La señora María, con el propósito de celebrar el cumpleaños de su hija Rosita, compró en el supermercado 5 pack de besos de moza; cada pack contiene 3 cajas y cada caja a su vez contiene 9 unidades. La señora María se pregunta si ¿Podrá repartir de manera equitativa y máxima todos los besos de moza entre los 2 invitados que asistieron a la fiesta, de tal manera que no sobre ni falte ningún beso de moza?

Información:

- La señora María, la mama de Rosita, compra 5 pack de besos de moza.
- Cada pack contiene 3 cajas
- Cada caja contiene 9 besos de moza.

No hay variación.

Requerimiento:

- Determinar si ¿Se puede repartir la totalidad de besos de moza entre 2 invitados de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ninguno?

Tal como se puede apreciar ha habido una variación en el requerimiento del problema siendo en este caso 2 los invitados y no 18.

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- Divisores de un número, acepción de Divisor como relación (D-R), acepción Múltiplo como relación (MR).

No hay variación

4.2.2.5. Solución experta del posible problema auxiliar de la actividad "El cumpleaños de Rosita"

Para resolver esta situación planteada evaluaremos si el total de besos de moza es divisible entre el número de invitados, para ello usaremos la acepción de divisibilidad como relación, es decir evaluaremos si en el número total de besos de moza están contenidos todos los factores o divisores del número de invitados.

Seguidamente, procederemos a representar el total de besos de moza como el producto de factores primos a partir de su estructura multiplicativa, lo mismo realizaremos con el número total de invitados.

Total, de besos de moza = $5 x 3 x 9$ = $5 x 3^3$

Número de invitados = 2

Evidentemente no se puede repartir entre 2 invitados, porque el 2 no es divisor o factor del total de besos de moza $5 x 3^3$.

4.2.2.6. Solución experta del problema original de la actividad “El cumpleaños de Rosita”

Usando el mismo criterio de resolución del problema auxiliar; procederemos a resolver el problema original planteado en dicha actividad. En primer lugar, expresaremos el total de besos de moza como un producto de factores primos a partir de su estructura multiplicativa.

$\text{Total de besos de moza} = 5\ x\ 3\ x\ 9 = 5\ x\ 3^3$

Posteriormente haremos lo mismo con el total de invitados.

$\text{Total de invitados} = 18 = 2\ x\ 3^2$

Como el factor o divisor 2 del número total de invitados, no está contenido en el número total de besos de moza; entonces podemos decir que no es posible repartir el total de besos de moza entre los 18 invitados de tal forma que se satisfaga con las condiciones del problema.

4.2.2.7. Posible problema retrospectivo de la actividad “El cumpleaños de Rosita”

A continuación, presentamos el enunciado y la descripción de los elementos de un posible problema retrospectivo creado por variación del problema original de la actividad “El cumpleaños de Rosita”.

<u>Enunciado del posible problema retrospectivo</u>.

> La señora María, con el propósito de celebrar el cumpleaños de su hija Rosita, compró en el supermercado 4 pack de besos de moza; cada pack contiene 3 cajas y cada caja a su vez contiene 9 unidades. La señora María se pregunta si ¿Entre cuantos posibles invitados se puede repartir la totalidad de besos de moza de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún beso de moza?

<u>Información:</u>

- La señora María mamá de Rosita, compra 4 pack de besos de moza.
- Cada pack contiene 3 cajas
- Cada caja contiene 9 besos de moza.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, se ha variado la cantidad de pack de besos de moza que compra, de 5 a 4 packs.

Requerimiento:

- ¿Entre cuantos posibles invitados se puede repartir la totalidad de besos de moza de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún beso de moza?

Tal como se puede observar, ha habido una variación significativa en el requerimiento pues en el problema original, se pedía determinar si se podía repartir de manera equitativa y máxima la totalidad de besos de moza entre 18 invitados, en este caso se pregunta entre cuantos posibles invitados se puede repartir el total de besos de moza de tal forma que se cumplan con las condiciones del problema.

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, acepción de Divisor como relación (D-R), acepción Múltiplo como relación (MR).

No hay variación

4.2.2.8. Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad "El cumpleaños de Rosita"

Para resolver este problema basta con calcular la cantidad de divisores del total de besos de moza. Para ello a partir de la estructura multiplicativa del total de besos de moza procederemos a expresar dicho número en su forma canónica y posteriormente a través de la representación tabular, procederemos a calcular y determinar los divisores de dicho número. (Figura 4.18)

Total de besos de moza = $4 \times 3 \times 9$

$= 2^2 \times 3^3$

Divisores:

	3^0	3^1	3^2	3^3
	1	3	9	27
2^1	2	6	18	54
2^2	4	12	36	108

{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108}

Existen 12 posibles cantidades de invitados

Figura 4.18 Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad "El cumpleaños de Rosita"

4.3. Sesión 3: Desarrollo de la actividad “Los lotes de terreno” mediante la aplicación de la estrategia OAR

En esta sesión diseñamos y aplicamos la actividad “Los lotes de terreno” mediante la aplicación de la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) y desarrollamos una solución experta de la actividad que junto con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural que presentamos en el acápite 3.1.4.3, Tabla 3.2, permitirá describir y caracterizar el proceso de comprensión del concepto divisor de un número.

4.3.1. Actividad “Los lotes de terreno”

> El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres, La inmobiliaria a cargo de la venta de los terrenos, tiene varias opciones de venta, sin embargo, todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor a 4 metros; si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 324 m^2. ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?
>
> Nota: considerar que un cuadrado tiene cuatro lados iguales que forman cuatro ángulos rectos y el rectángulo dispone de cuatro lados (dos de una longitud y dos de otra diferente) que forman cuatro ángulos rectos.

4.3.2. Objetivos de la actividad “Los lotes de terreno”

- Observar y describir si los participantes del estudio a través de la creación y resolución del problema auxiliar, logran identificar el concepto matemático divisor de un número, como el elemento a usar en la resolución del problema original.
- Observar, describir y caracterizar las acepciones y modos de uso de los conceptos de divisor de un número que evidencian los participantes del estudio durante el proceso de resolución del problema auxiliar, original y retrospectivo.

- Observar, describir y caracterizar las traducciones y conversiones en los sistemas de representación movilizada por los participantes del estudio en el proceso de resolución de la actividad planteada.
- Observar, describir y caracterizar los procedimientos, estrategias, razonamientos, vinculaciones, destrezas y dificultades que evidencian los participantes del estudio cuando resuelven la actividad propuesta.

4.3.3. Descripción del problema original de la actividad "Los lotes de terreno"

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada o rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayores a 4 metros.
- El área del terreno a comprar es de 324 m^2.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

Contexto:

- Extra matemático

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

4.3.4. Desarrollo preliminar de la actividad "Los lotes de terreno"

4.3.4.1. Posible problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno"

A continuación, presentamos el enunciado y la descripción de los elementos de un posible problema auxiliar creado por variación del problema original de la actividad "Los lotes de terreno"

Enunciado del posible problema auxiliar

El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres, La inmobiliaria a cargo de la venta de los terrenos, tiene varias opciones de venta, sin embargo, todos los lotes son de forma rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor a 4 metros; si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 324 m^2. ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

Nota: considerar que un rectángulo dispone de cuatro lados (dos de una longitud y dos de otra diferente) que forman cuatro ángulos rectos.

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayores a 4 metros.
- El área del terreno a comprar es de 100 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que se refiere a la forma del terreno y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.4.2. Solución experta del posible problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno”

Para resolver este problema realizamos la descomposición canónica de 100, cifra que representa el área del terreno, y a partir de ello, mediante una representación tabular, determinar los divisores de dicho número. Posteriormente agrupar dichos divisores en pares multiplicativos de manera que el producto sea 100, seguidamente asociar los pares multiplicativos con las dimensiones de los posibles terrenos a comparar y descartar los que no cumplen con las condiciones del problema y de esta manera determinar las posibles opciones de compra que tiene el papá de Luis. (figura 4.19)

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 . 5^2$

	2^0	2^1	2^2
	1	2	4
5	5	10	20
5^2	25	50	100

1 x 100
2 x 50
4 x 25
$\boxed{5 \text{ x } 20}$
10 x 10

Figura 4.19 Solución experta del posible problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno”

4.3.4.3. Solución experta del problema original de la actividad “Los lotes de terreno”

La solución de dicho problema consiste en determinar los divisores de 324 (área del terreno) y los posibles pares multiplicativos de 324. Para ello se debe realizar la descomposición canónica de dicho número y mediante la representación tabular determinar los divisores y los pares multiplicativos, relacionar los pares multiplicativos con las dimensiones de los posibles terrenos que podría comprar el papá de Luis. (figura 4.20)

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$324 = 2^2 . 3^4$

	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
	1	3	9	27	81
2	2	6	18	54	162
2^2	4	12	36	108	324

1 x 324
2 x 162
3 x 108
4 x 81
6 x 54
9 x 36
12 x 27
18 x 18

Figura 4.20 Solución experta del problema original de la actividad “Los lotes de terreno”

4.3.4.4. Posible problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno”

A continuación, presentamos el enunciado y la descripción de los elementos de un posible problema retrospectivo creado por variación del problema original.

Enunciado del posible problema auxiliar

> El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres, La inmobiliaria a cargo de la venta de los terrenos, tiene varias opciones de venta, sin embargo, todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor a 10 metros; si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 720 m^2. ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?
>
> Nota: considerar que un cuadrado tiene cuatro lados iguales que forman cuatro ángulos rectos y el rectángulo dispone de cuatro lados (dos de una longitud y dos de otra diferente) que forman cuatro ángulos rectos.

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayores a 10 metros.
- El área del terreno a comprar es de 720 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.4.5. Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno”

En la figura 4.21, presentamos el procedimiento seguido para la resolución de este problema, en el cual se procede en idéntica forma que la solución experta propuesta para la resolución del problema original.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
	1	2	4	8	16
3	3	6	12	24	48
3^2	9	18	36	72	144
5	5	10	20	40	80
	15	30	60	120	240
	45	90	180	360	720

10 x 72
12 x 60
15 x 48
16 x 45
18 x 40
20 x 36
24 x 30

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720

Figura 4.21 Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno”

4.3.5. Desarrollo de la actividad “Los lotes de terreno” realizado por el participante P1

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador, previo a la creación y resolución de problema auxiliar.

P1 Profesor, ¿puedo considerar que el lote que quiere comprar el papa de Luis sea de 100 m^2.?

DI Por supuesto que sí, ahora te pregunto ¿es la única modificación que harías al problema original planteado?

P1 No, también voy a considerar que los lados de los terrenos que vende la inmobiliaria sean mayores o igual a 2 metros.

DI Ok, y ya ¿tienes idea como vas hacer para resolver el problema que estas creando.?

P1 Creo que sí, (mostrando una versión preliminar del problema) dice, voy a agrupar, por ejemplo: el 1 con el 100, el 2 con el 50, 4 con el 25, el 5 con el 20, el 10 con el 10 y …nada mas

DI Entonces ¿cuántos posibles terrenos podría comprar el papa de Luis?

P1 cuatro, porque el 1 con el 100 no cuenta porque 1 es menor que 2

DI Correcto, pero si el terreno fuera mucho más grande, ¿procederías de la misma manera?

P1 Uhmm no, creo que ya sé cómo hacerlo, lo hago y le aviso.

4.3.5.1. Problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno” creado por el participante P1

En la (Figura 4.22) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P1, variando el problema original de la actividad “Los lotes de terreno”. Así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

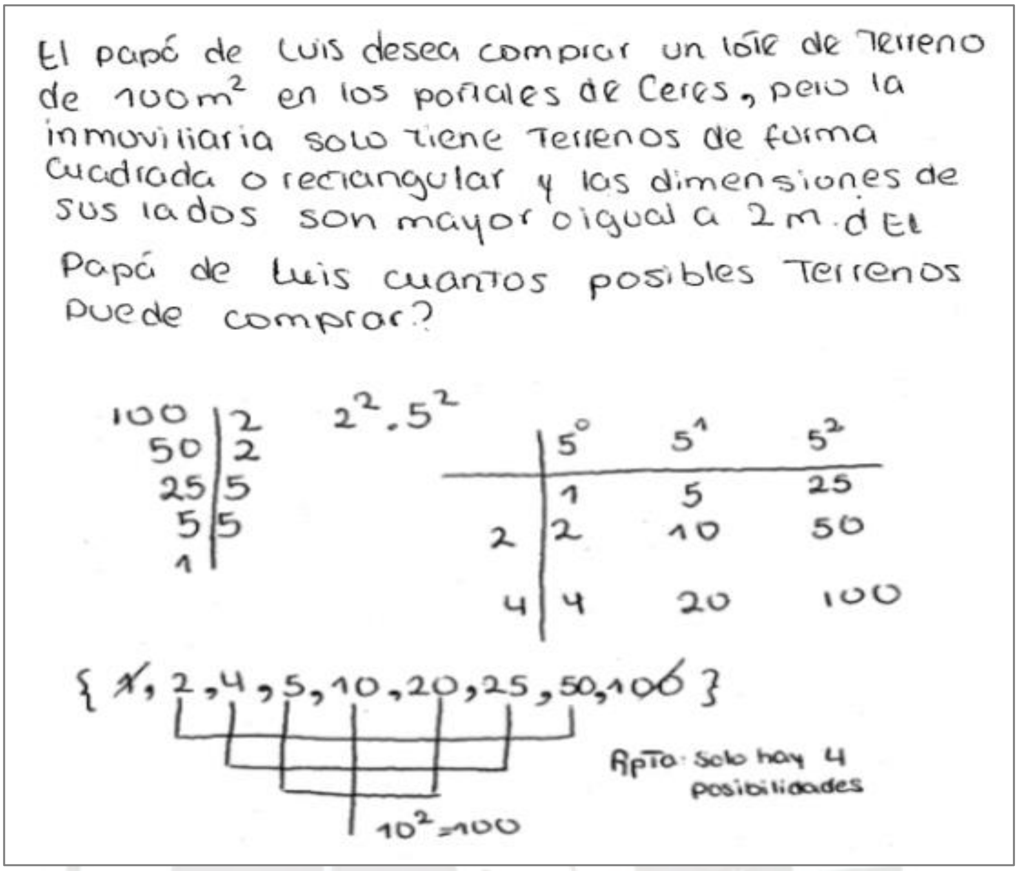


Figura 4.22 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P1

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual 2 metros.
- El área del terreno a comprar es de 100 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.5.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P1

En el proceso de resolución de este problema auxiliar creado por el participante P1, correctamente se ha realizado el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Posteriormente determinó cuáles son los divisores de 100 haciendo uso del método de representación tabular y movilizando descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2.

A continuación, el participante P1 de manera implícita determinó los divisores pares multiplicativos de 100, ordenando los divisores de menor a mayor y agrupándolos de dos en dos, de tal manera que el producto de ambos dé como resultado 100, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D06N3.

El participante P1 asoció las parejas de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar y tal como lo manifestó previamente en el dialogo sostenido con el docente investigador, descarta la pareja del 1 con el 100, por no cumplir con la condición de las dimensiones del terreno. Finalmente concluye que solo existen 4 posibilidades de compra.

4.3.5.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P1

En cuanto a la resolución del problema original; el participante P1 aplica y moviliza correctamente los conceptos matemáticos identificados y usados en la resolución del problema auxiliar. Tal como se puede apreciar en la figura 4.23, el participante P1, correctamente realizó el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Posteriormente determinó cuáles son los divisores de 324 haciendo uso del método de representación tabular y movilizando descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2.

A continuación, el participante P1 de manera implícita determinó los divisores pares multiplicativos de 324, ordenando los divisores de menor a mayor y agrupándolos de dos en dos, de tal manera que el producto de ambos dé como resultado 324, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D06N3.

El participante P1 asoció las parejas de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar y tal como lo manifestó previamente en el dialogo sostenido con el docente investigador, descarta la pareja del 1 con 324, 2 con 162, 3 con 108, 4 con 81 por no cumplir con la condición de las dimensiones del terreno. Finalmente concluye que solo existen 4 posibilidades de compra.

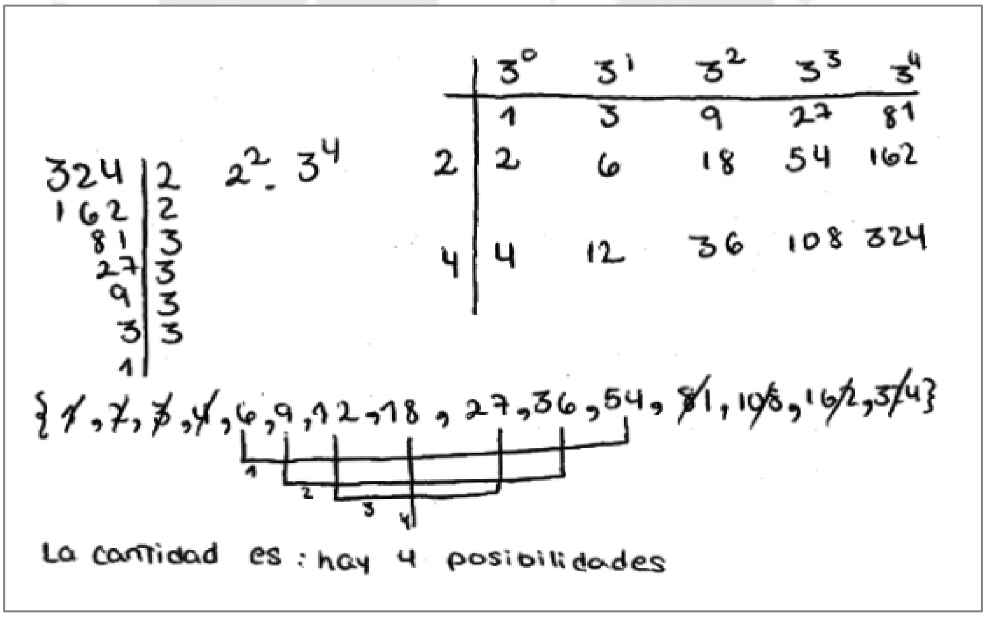
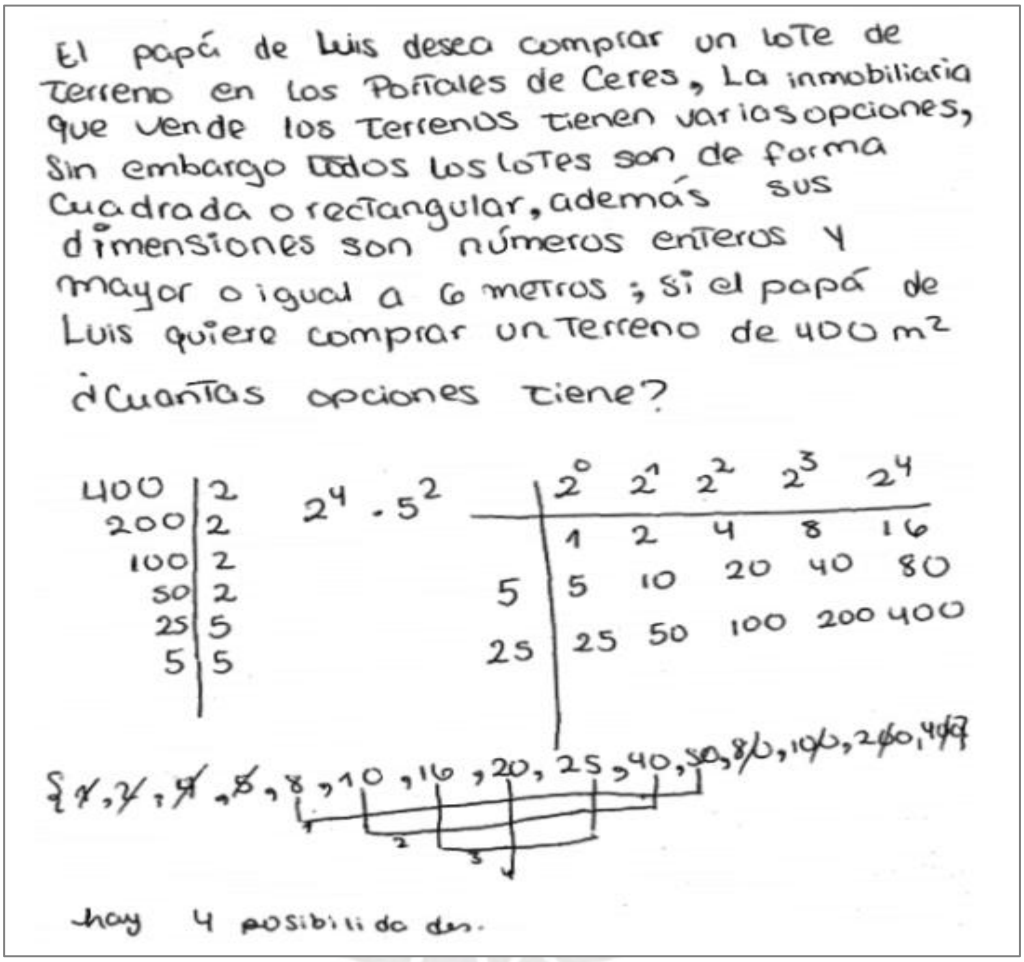


Figura 4.23 Solución del problema original de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P1

4.3.5.4. Problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” creado por el participante P1

En la (Figura 4.24) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P1, variando el problema original de la actividad “Los lotes de terreno”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que siguió.


El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en los Portales de Ceres, La inmobiliaria que vende los terrenos tienen varias opciones, sin embargo todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor o igual a 6 metros; si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 400 m^2 ¿Cuántas opciones tiene?

$400 = 2^4 \cdot 5^2$

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
	1	2	4	8	16
5	5	10	20	40	80
25	25	50	100	200	400

{~~1~~, ~~2~~, ~~4~~, ~~5~~, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, ~~80~~, ~~100~~, ~~200~~, ~~400~~}

hay 4 posibilidades.

Figura 4.24 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P1

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.

- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual a 6 metros.
- El área del terreno a comprar es de 400 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información respecto a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.5.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P1

En lo que respecta a la resolución de este problema retrospectivo el participante P1 procede de manera similar a la resolución del problema original, es decir realiza correctamente el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a la representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Posteriormente determinó cuáles son los divisores de 400 haciendo uso del método de representación tabular y movilizando descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2.

A continuación, el participante P1 de manera implícita determinó los divisores pares multiplicativos de 400, ordenando los divisores de menor a mayor y agrupándolos de dos en dos, de tal manera que el producto de ambos dé como resultado 400, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D06N3.

El participante P1 asoció las parejas de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar y tal como lo manifestó previamente en el dialogo sostenido con el docente investigador, descarta las parejas del 1 con 400, 2 con 200, 4 con 100, y 5 con 80, por no cumplir con la condición de las dimensiones del terreno. Finalmente concluye que solo existen 4 posibilidades de compra.

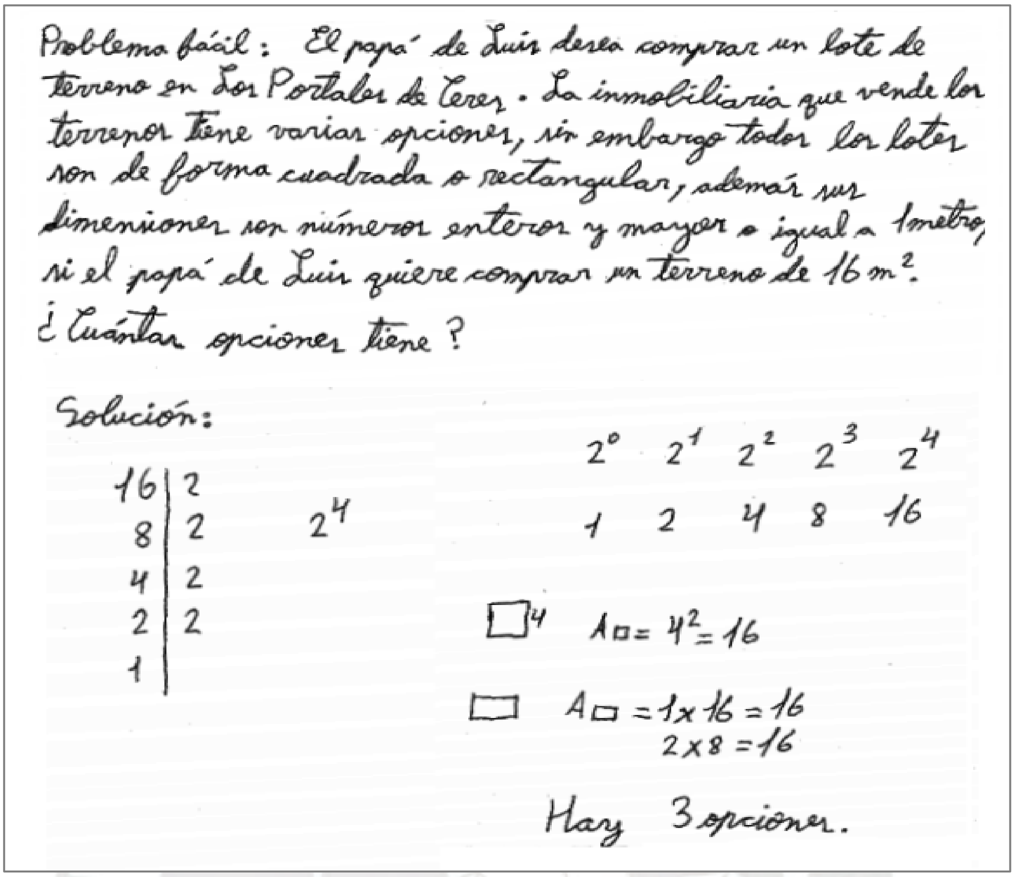
4.3.6. Desarrollo de la actividad "Los lotes de terreno" realizado por el participante P2

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador previo a la creación del problema auxiliar.

P2	Profesor, ¿está bien que considere un lote de 16 m^2.?
DI	Si, pero ¿es la única modificación que harías al problema original planteado?
P2	No, voy a considerar que todos los lados sean mayores o igual que 1 metro.
DI	Ok, y ya ¿tienes idea cómo vas hacer para resolver el problema que estas creando?
P2	sí, voy a tomar el 1 con el 16, el 2 con el 8, y el 4 con el 4.
DI	Entonces ¿cuántos posibles terrenos podría comprar el papa de Luis?
P2	Tres.
DI	Correcto, ¿crees que ahora podrás resolver el problema original?
P2	Si.

4.3.6.1. Problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno" creado por el participante P2

En la (Figura 4.25) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P2, variando el problema original de la actividad "Los lotes de terreno", así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.



Problema fácil: El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres. La inmobiliaria que vende los terrenos tiene varias opciones, sin embargo todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor o igual a 1metro, si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 16 m².
¿Cuántas opciones tiene?

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 2^4$$

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	2	4	8	16

4 $A_{\square} = 4^2 = 16$

$A_{\square} = 1 \times 16 = 16$
$2 \times 8 = 16$

Hay 3 opciones.

Figura 4.25 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P2

<u>Información:</u>

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada o rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual a 1 metro.
- El área del terreno a comprar es de 16 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

<u>Requerimiento:</u>

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.6.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P2

En la resolución de este problema auxiliar elaborado por el participante P2, se observa que en forma correcta procedió con el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1, codificados con D08N1. Procediendo luego a determinar cuáles son los divisores de 16 haciendo uso del método la representación tabular y movilizando descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2.

A continuación, el participante P2 determinó de manera implícita los divisores pares multiplicativos de 16, para ello agrupo los divisores de dos en dos, de tal manera que el producto de ambos dé como resultado 16, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D06N3.

El participante P2 asoció las parejas de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar y finalmente concluye que existen 3 posibilidades de compra.

4.3.6.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P2.

En cuanto a la resolución del problema original, el participante P2 aplica correctamente los conceptos matemáticos identificados y movilizados en la resolución del problema auxiliar (Figura 4.26). Posteriormente realiza correctamente el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Luego procede a determinar cuáles son los divisores de 324 haciendo uso del método tabular y movilizando descriptores del Nivel 2 codificados como D04N2.

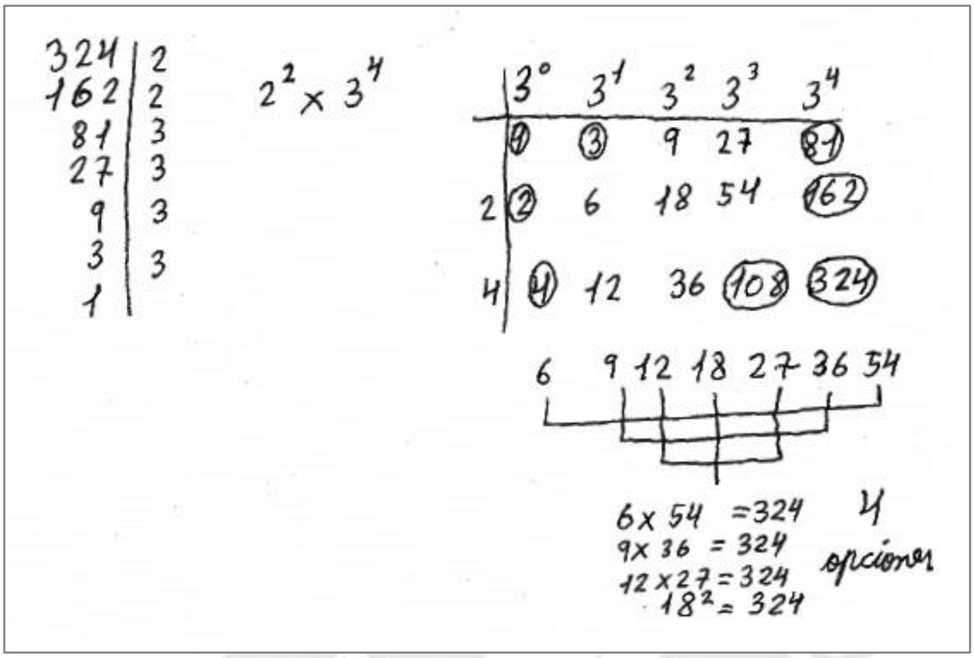


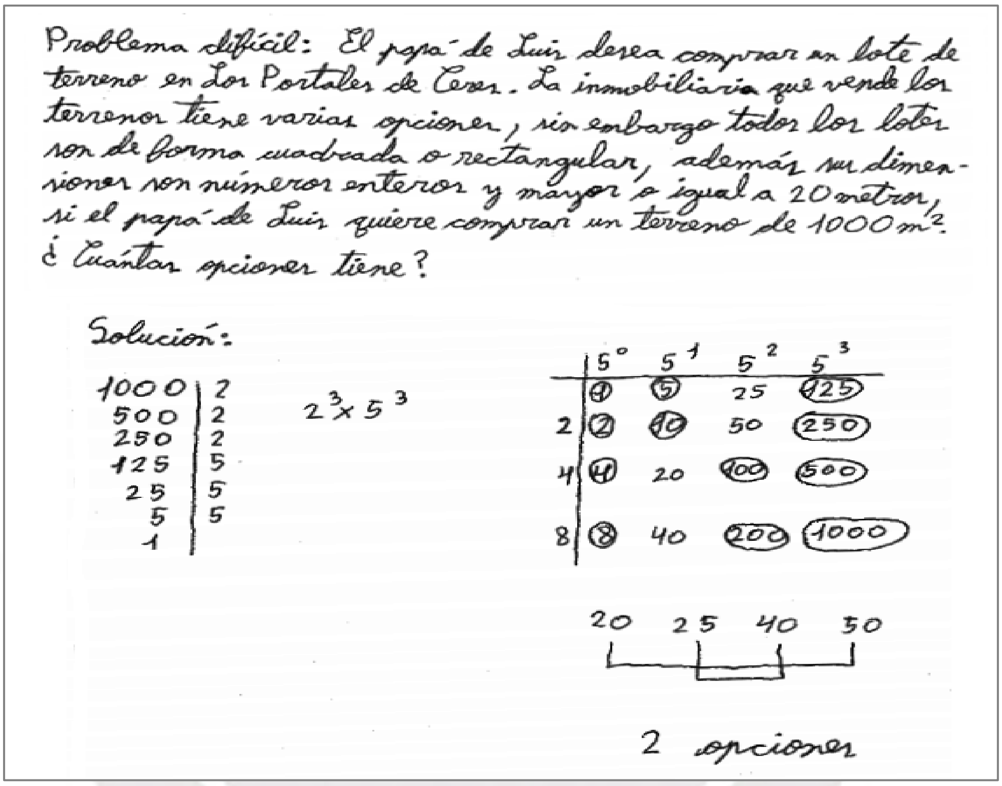
Figura 4.26 Solución del problema original de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P2

Seguidamente, el participante P2 de manera implícita identificó los divisores pares multiplicativos de 324, agrupando los divisores en parejas, de tal forma que el producto de como resultado 324 movilizando descriptores de Nivel 3 codificadas como D06N3.

El participante P2 asocia cada elemento de la pareja de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar, descartando los que no cumplen con las condiciones del problema y finalmente concluye que solo existe 4 posibilidades de compra y señala los posibles terrenos que se podrían comprar (6 x 54; 9 x 36; 12 x 27 y 18 x 18.)

4.3.6.4. Problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” creado por el participante P2

En la (Figura 4.27) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P2, variando el problema original de la actividad “Los lotes de terreno”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que se ha seguido.


Problema difícil: El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres. La inmobiliaria que vende los terrenos tiene varias opciones, sin embargo todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor o igual a 20 metros, si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 1000 m². ¿Cuántas opciones tiene?

Solución:

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$2^3 \times 5^3$

	5^0	5^1	5^2	5^3
	1	5	25	125
2	2	10	50	250
4	4	20	100	500
8	8	40	200	1000

20 25 40 50

2 opciones

Figura 4.27 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P2

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual a 20 metros.
- El área del terreno a comprar es de 1000 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.6.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P2

En la figura 4.27 mostramos el proceso de resolución seguido por el participante P2, en el que se puede observar que procede de manera similar a la resolución del problema original, es decir realiza correctamente el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Procede luego a determinar cuáles son los divisores de 400 haciendo uso del método tabular evidenciando descriptores de Nivel 2 codificados como D04N2.

Seguidamente, el participante P2 de manera implícita identificó los divisores pares multiplicativos de 1000, agrupando los divisores en parejas, de tal forma que el producto de como resultado 1000 movilizando descriptores de Nivel 3 codificadas como D06N3.

El participante P2 asocia cada elemento de la pareja de divisores a las dimensiones de los posibles terrenos a comprar, descartando los que no cumplen con las condiciones del problema y finalmente concluye que solo existe finalmente concluye que solo existe 2 posibilidades de compra.

4.3.7. Desarrollo de la actividad “Los lotes de terreno” realizado por el participante P3

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador, previo a la creación del problema auxiliar.

DI ¿Como te va con la creación del problema auxiliar?

P3 Estoy considerando que el área del terreno sea 16 m^2.

DI Ya, ¿algo más?

P3 No.

DI Ok, y ¿cómo estás haciendo para resolver este problema?

P3 Relacionando el 1 con el 16, el 2 con el 8 y el 4 con el 4.

DI Ok. Y ¿crees a hora que ya puedes resolver el problema original planteado?

P3 No.

DI Es que aún no identificas el concepto matemático que te ayudará a resolver el problema original; trata de crear otro problema auxiliar.

P3 Voy a considerar 36 m^2

DI Ya, ahora ¿cuántos posibles lotes se pueden comprar que tengan un ara de 36 m^2?

P3 Luego de una pausa…y luego de haber hecho algunos tanteos responde el 1 con el 36, el 2 con el 18, el 3 con el 12, el 4 con el 9, el 6 con el 6.

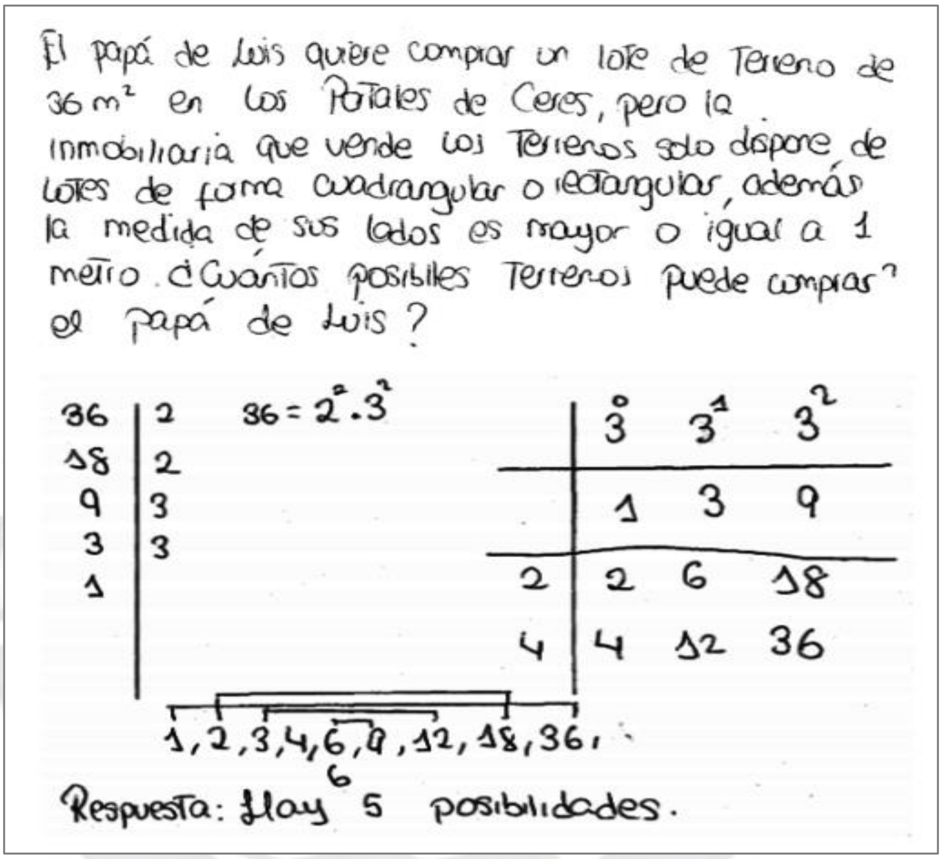
P3 Que… son los divisores de 36

DI Así es, y ¿ahora crees que puedas resolver el problema original?

P3 Si.

4.3.7.1. Problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno” creado por el participante P3

En la (Figura 4.28) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P3, variando el problema original de la actividad “Los lotes de terreno”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.


El papá de Luis quiere comprar un lote de Terreno de $36 m^2$ en Los Portales de Ceres, pero la inmobiliaria que vende los Terrenos solo dispone de lotes de forma cuadrangular o rectangular, además la medida de sus lados es mayor o igual a 1 metro. ¿Cuántos posibles Terrenos puede comprar el papá de Luis?

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

	3^0	3^1	3^2
	1	3	9
2	2	6	18
4	4	12	36

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

6

Respuesta: Hay 5 posibilidades.

Figura 4.28 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P3

Información:

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.
- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual a 1 metro.
- El área del terreno a comprar es de 36 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación

4.3.7.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad "Los lotes de terreno" creado por el participante P3

En el proceso de resolución de dicho problema auxiliar podemos apreciar que el participante P3, correctamente ha realizado el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a una representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados con D08N1. Procede luego a determinar cuáles son los divisores de 36, haciendo uso del método la representación tabular evidenciando el uso de descriptores de Nivel 2 codificados como D04N2.

A continuación, realiza un listado ordenado de todos los divisores de 36 y los agrupa de dos en dos de tal manera que el producto de ambos resulte 36, movilizando descriptores de Nivel 3, codificadas como D06N3 y finalmente concluye que existe 5 posibilidades de compra.

4.3.7.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P3

En cuanto a la resolución del problema original planteado en esta actividad, el participante P3 aplica correctamente los conceptos matemáticos identificados y movilizados en la resolución del problema auxiliar (Figura 4.29). Como primer paso realiza correctamente el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a la representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados con D08N1. Procede luego a determinar cuáles son los divisores de 324 haciendo uso del método la representación tabular y evidenciando descriptores de Nivel 2 codificados como D04N2.

A continuación, ordena los divisores de menor a mayor, agrupa los divisores de dos en dos de tal manera que el producto de ambos de 324, evidenciando el uso de descriptores de Nivel 3 codificadas como D06N3, luego descarta las pareja del 1 con 324, 2 con 162, 3 con 108, 4 con 81 por no cumplir con la condición de las dimensiones de los posibles terrenos y finalmente concluye que solo existe 4 posibilidades de compra.

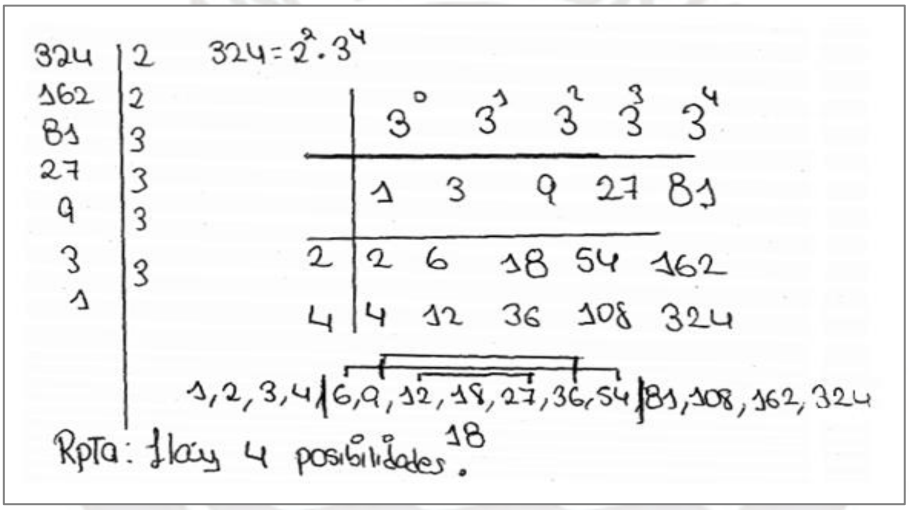


Figura 4.29 Solución del problema original de la actividad "Los lotes de terreno" desarrollado por el participante P3

4.3.7.4. Problema retrospectivo de la actividad "Los lotes de terreno" creado por el participante P3

En la (Figura 4.30) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P3, variando el problema original de la actividad "Los lotes de terreno", así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

<u>Información:</u>

- Se muestra un escenario de venta de terrenos.
- Los terrenos en venta son de forma cuadrada y rectangular.

- Las dimensiones de los terrenos en venta son números enteros y mayor o igual a 6 metros.
- El área del terreno a comprar es de 672 m^2.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, en lo que respecta a las dimensiones de los terrenos en venta y al área del terreno a comprar.

Requerimiento:

- Determinar ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

No hay variación

Contexto:

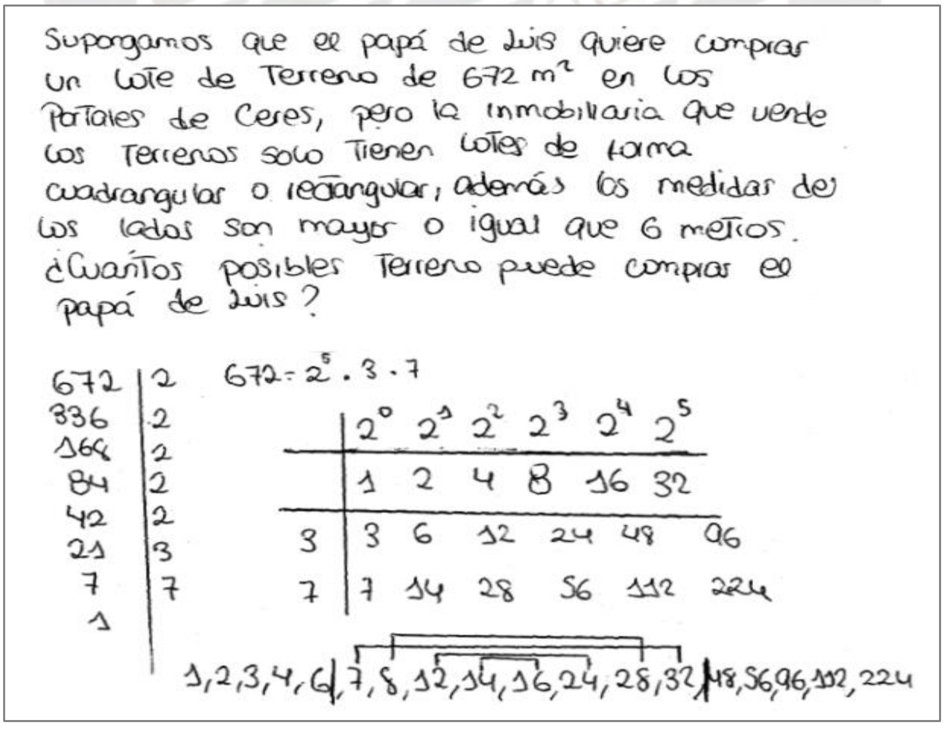
- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- divisores de un número, divisores pares multiplicativos.

No hay variación


Supongamos que el papá de Luis quiere comprar un lote de terreno de 672 m^2 en los Portales de Ceres, pero la inmobiliaria que vende los terrenos solo tienen lotes de forma cuadrangular o rectangular, además los medidas de los lados son mayor o igual que 6 metros. ¿Cuántos posibles terreno puede comprar el papá de Luis?

672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
	1	2	4	8	16	32
3	3	6	12	24	48	96
7	7	14	28	56	112	224

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 24, 28, 32, 48, 56, 96, 112, 224

Figura 4.30 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P3

4.3.7.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los lotes de terreno” desarrollado por el participante P3

En lo que respecta a la resolución de este problema retrospectivo, el participante P3 realiza correctamente el cambio de sistema de representación numérica posicional de base diez a la representación canónica, movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D08N1. Sin embargo, al construir la tabla de divisores de 672 comete un error y pasa por alto divisores como: 21, 42, 84, 168, 336, 672, suponemos que este error se debe a que el número 672 tiene 3 divisores primos y que el participante no tiene claro como calcular los divisores de un número cuando este tiene más de 2 factores primos. En ese sentido consideramos que el participante P3 moviliza descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2; y finalmente concluye de manera errónea la existencia de 4 posibilidades de compra.

4.3.8. Análisis de los resultados de la actividad “Los lotes de terreno” mediante la aplicación de la estrategia OAR

Realizado el análisis de las producciones de los participantes P1, P2, P3 y haciendo un análisis comparativo con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural y la solución experta propuesta para esta actividad; podemos decir que de manera general los tres participantes a través de la creación y resolución del problema auxiliar, lograron identificar el elemento matemático “divisores de un número” y la existencia de “pares multiplicativos en el conjunto de divisores de un número”, de tal forma que mediante el uso de dichos conceptos lograron resolver el problema original. Así mismo la creación y resolución del problema retrospectivo fortaleció el nivel de comprensión de los conceptos relacionados a los divisores de un número; resultado que se evidencia en el cambio favorable en el nivel de comprensión de este concepto.

4.4. Sesión 4: Desarrollo de la actividad “Los armarios” mediante la aplicación de la estrategia OAR

En esta sesión diseñamos y aplicamos la actividad “Los armarios” mediante la aplicación de la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo) y desarrollamos una solución experta de la actividad que junto con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural que presentamos en el acápite 3.1.4.3, Tabla 3.2, permitirá describir y caracterizar el proceso de comprensión del concepto múltiplo de un número.

4.4.1. Actividad “Los armarios”

En un pasadizo se tienen dispuestos 40 armarios uno a continuación del otro, en un primer momento pasa una primera persona por cada uno de los armarios y los marca con un sticker con el número 1, posteriormente pasa una segunda persona pero esta vez cada dos armarios empezando en el segundo armario y marcándolos con un sticker con el número 2, seguidamente pasa una tercera persona cada tres armarios empezando en tercer armario, y marcándolos con un sticker con el número 3 , luego pasa una cuarta persona cada cuatro armarios empezando en el cuarto armario y marcándolos con un sticker con el número 4, y así sucesivamente hasta pasar 40 personas. (Figura 4.31) ¿De todos los armarios que llevan la marca de la persona Nº 5, cuantos no llevan la marca de la persona Nº 2?

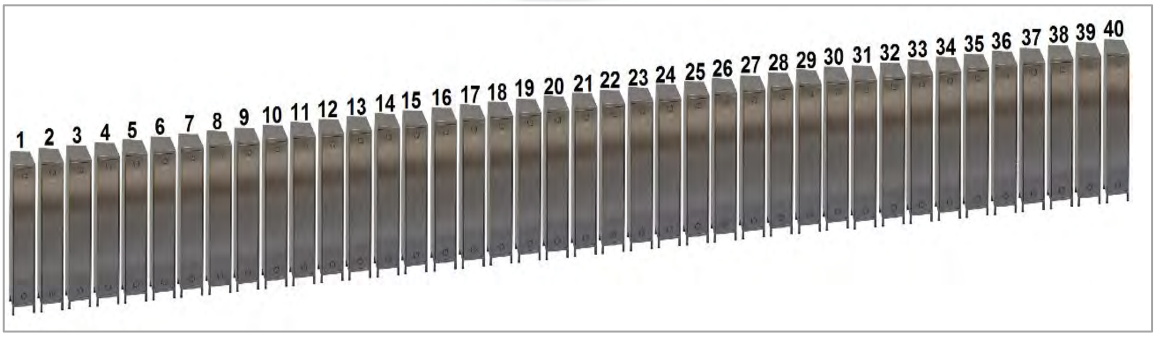


Figura 4.31 Problema original de la actividad "Los armarios"

4.4.2. Objetivos de la actividad “Los armarios”

- Observar y describir si los participantes del estudio a través de la creación y resolución del problema auxiliar, logran identificar el concepto de múltiplo de un número, como el elemento matemático a usar en la resolución del problema original.
- Observar, describir y caracterizar las acepciones y modos de uso del concepto múltiplo de un número que evidencian los participantes del estudio durante el proceso de resolución del problema auxiliar, original y retrospectivo.
- Observar, describir y caracterizar las traducciones y conversiones en los sistemas de representación movilizada por los participantes del estudio en el proceso de resolución de la actividad planteada.
- Observar, describir y caracterizar los procedimientos, estrategias, razonamientos, vinculaciones, destrezas y dificultades que evidencian los participantes del estudio cuando resuelven la actividad propuesta.

4.4.3. Descripción del problema original de la actividad “Los armarios”

Información:

- Escenario, un pasadizo
- 40 armarios uno a continuación del otro
- 40 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Requerimiento:

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2?

Contexto:

- Extra matemático

Entorno matemático:

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

4.4.4. Desarrollo de la actividad “Los armarios”: Caso experto

4.4.4.1. Posible problema auxiliar de la actividad “Los armarios”

A continuación, presentamos el enunciado y los elementos de un posible problema auxiliar creado por variación del problema original “Los armarios”.

Enunciado de un posible problema auxiliar

> En un pasadizo se tienen dispuestos 10 armarios uno a continuación del otro, en un primer momento pasa una primera persona por cada uno de los armarios y los marca con un sticker con el número 1, posteriormente pasa una segunda persona pero esta vez cada dos armarios empezando en el segundo armario y marcándolos con un sticker con el número 2, seguidamente pasa una tercera persona cada tres armarios empezando en tercer armario, y marcándolos con un sticker con el número 3 , luego pasa una cuarta persona cada cuatro armarios empezando en el cuarto armario y marcándolos con un sticker con el número 4, y así sucesivamente hasta pasar 10 personas. ¿De todos los armarios que llevan la marca de la persona Nº 5, cuantos no llevan la marca de la persona Nº 2?

Información:

- Escenario, un pasadizo
- 10 armarios uno a continuación del otro
- 10 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas

Requerimiento:

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2?

No hay variación

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación

4.4.4.2. Solución experta del posible problema auxiliar de la actividad “Los armarios”

A partir de la simulación de la situación planteada que se muestra en la Figura 4.32, se puede extraer tres conclusiones:

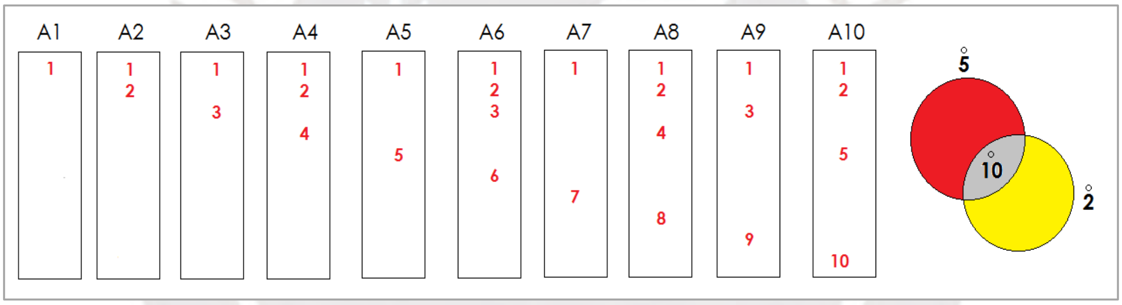


Figura 4.32 Simulación de la situación planteada en el posible problema auxiliar de la actividad “Los armarios”

1) Las marcas en cada armario corresponden a los divisores del número que identifica la posición de cada armario.
2) Las marcas que realiza cada persona son hechas en los armarios cuya posición corresponden a un múltiplo del número que identifica a dicha persona.
3) Hay armarios que fueron marcados de manera conjunta por varias personas; por lo tanto, la posición de dichos armarios son múltiplos del MCM de los números de identificación de dichas personas.

Entonces, la solución del problema planteado; requiere inicialmente calcular la cantidad de armarios cuyas posiciones son múltiplos de 5; y luego quitarles la cantidad de armarios cuyas posiciones son múltiplos del MCM (5, 2). Seguidamente se debe proceder a calcular la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5. para ello realizamos la división entera entre 10 (cantidad de armarios) y 5, obteniendo 2 armarios que cumplen esa condición.

Posteriormente con el mismo criterio, se debe proceder a calcular la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos del MCM (5, 2) o dicho de otra forma múltiplos de 10. Para ello realizamos la división entera entre 10 (cantidad de armarios) y 10, obteniendo un armario que cumplen esa condición.

Finalmente, a la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5, se le debe quitar la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 10; obteniendo un armario que fue marcado por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2. (Figura 4.33)

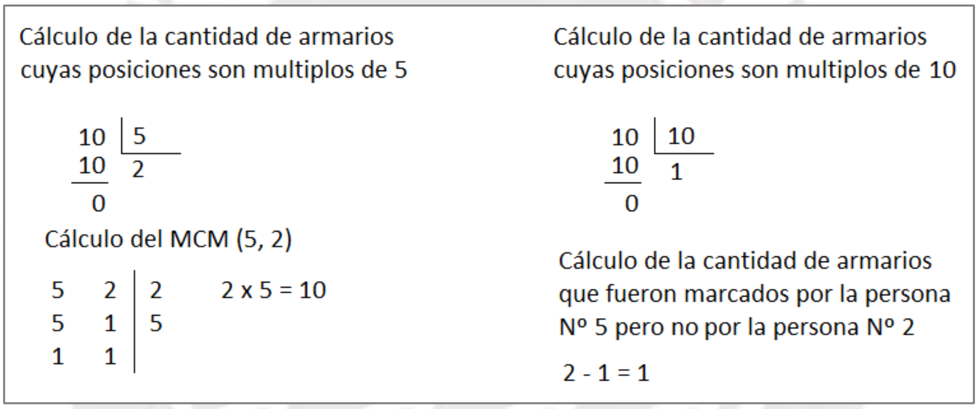


Figura 4.33 Solución experta del posible problema auxiliar de la actividad "Los armarios"

4.4.4.3. Solución experta del problema original de la actividad “Los armarios”

Aplicando los mismos criterios de resolución del problema auxiliar para resolver adecuadamente el problema original, se procede en primer lugar calculando la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5. Para ello realizamos la división entera entre 40 (cantidad de armarios) y 5, obteniendo 8 armarios que cumplen esa condición. (Figura 4.34)

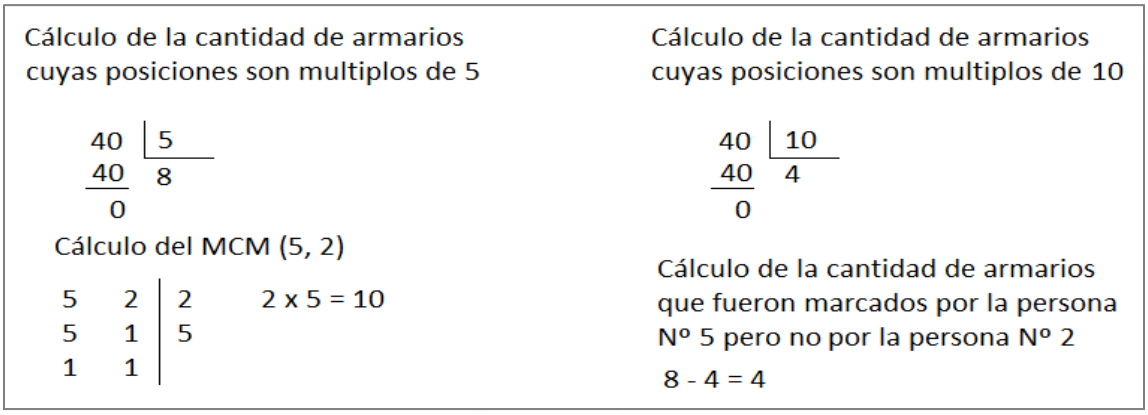


Figura 4.34 Solución experta del problema original de la actividad “Los armarios

Posteriormente procedemos a calcular la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5 y 2 de manera conjunta, es decir que sean múltiplos del MCM (5, 2) o dicho de otra forma múltiplos de 10. Para ello realizamos la división entera entre 40 (cantidad de armarios) y 10, obteniendo 4 armarios que cumplen esa condición.

Finalmente, a la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5, se le debe quitar la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 10; obteniendo 4 armarios que fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2.

4.4.4.4. Posible problema retrospectivo de la actividad “Los armarios”

A continuación, presentamos el enunciado y los elementos de un posible problema retrospectivo creado por variación del problema original “Los armarios”.

<u>Enunciado de un posible problema retrospectivo</u>

> En un pasadizo se tienen dispuestos 100 armarios uno a continuación del otro, en un primer momento pasa una primera persona por cada uno de los armarios y los marca con un sticker con el número 1, posteriormente pasa una segunda persona pero esta vez cada dos armarios empezando en el segundo armario y marcándolos con un sticker con el número 2, seguidamente pasa una tercera persona cada tres armarios empezando en tercer armario, y marcándolos con un sticker con el número 3 , luego pasa una cuarta persona cada cuatro armarios empezando en el cuarto armario y marcándolos con un sticker con el número 4, y así sucesivamente hasta pasar 100 personas. ¿De todos los

armarios que llevan la marca de la persona Nº 5, cuantos no llevan la marca de la persona Nº 3?

. Información:

- Escenario, un pasadizo
- 100 armarios uno a continuación del otro
- 100 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas

Requerimiento:

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 3?

Como se puede a preciar también hubo una ligera modificación en el requerimiento del problema

Contexto:

- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación

4.4.4.5. Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad “Los armarios”

La solución de esta actividad involucra los conceptos y procedimientos de las actividades anteriores, en ese sentido para dar respuesta al problema, tenemos que calcular la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5; luego a este total tenemos que quitarle la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos del MCM (5, 3), es decir múltiplos de 15.

Por lo tanto, en primer lugar, calculamos la cantidad de armarios cuyas posiciones sea múltiplos de 5. Para ello podemos realizar la división entera entre 100 (cantidad de armarios) y 5, obteniendo 20 armarios que cumplen esa condición.

Posteriormente y con el mismo criterio calculamos la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5 y 3 de manera conjunta, o dicho de otra forma que sean múltiplos del MCM (5, 3), es decir múltiplos de 15. Para ello realizamos la división entera entre 100 (cantidad de armarios) y 15, obteniendo 6 armarios que cumplen esa condición.

Finalmente, a la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 5, se le debe quitar la cantidad de armarios cuyas posiciones sean múltiplos de 15 obteniendo 14 armarios que fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 3. (Figura 4.35)

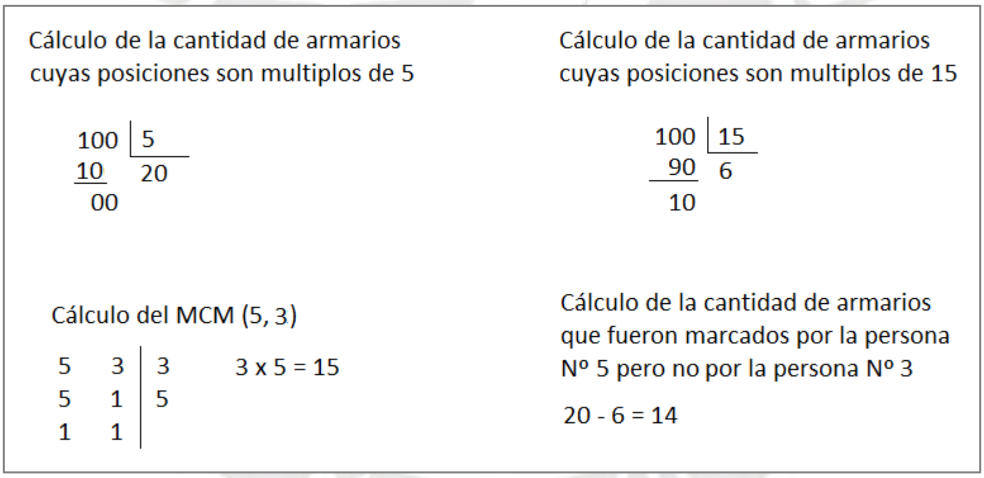


Figura 4.35 Solución experta del posible problema retrospectivo de la actividad “Los armarios"

4.4.5. Desarrollo de la actividad “Los armarios” realizado por el participante P1

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador, previo a la creación del problema auxiliar.

P1 Profesor, he considerado que sean 10 armarios y busco calcular ¿cuántos armarios llevan la marca de la persona Nº 3 pero no de la persona Nº 2.?

DI Ok. Y ¿cómo vas hacer eso?

P1 Voy a calcular la cantidad de armarios que son múltiplos de 3 y lo voy a restar la cantidad de armarios que son múltiplos de 2 mostrando un borrador de como llego a esa conclusión.

A continuación, en la Figura 4.36, mostramos un esquema de simulación del marcado de los armarios que llevan la marca de la persona Nº3 y la persona Nº 2. Realizado por el participante P1.

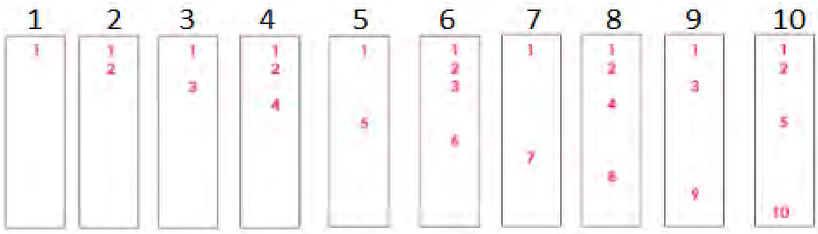


Figura 4.36 Simulación del problema auxiliar de la actividad "Los armarios" realizado por el participante P1

DI ¿Me puedes mostrar como lo harías?

P1 Mire profesor, estos son los armarios múltiplos de 3. $\{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{9}\}$ y estos son los múltiplos de 2 $\{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}\}$

DI Ok, me estabas diciendo que para calcular los armarios marcados por la persona Nº 3 pero no por la persona Nº 2 restarías la cantidad de armarios marcado por la persona Nº 3 menos la cantidad de armarios marcados por la persona Nº 2.

P1 Ah, algo anda mal.

DI Piensa un poco más o crea otro problema auxiliar y analiza la situación.

P1 Luego de unos instantes, profesor creo que ya lo tengo, he considerado que sean 20 armarios entonces los armarios múltiplos de 3 son:

$\{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{9}; \mathbf{12}; \mathbf{15}, \mathbf{18}\}$ y estos son los múltiplos de 2: $\{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}; \mathbf{12}; \mathbf{14}; \mathbf{16}; \mathbf{18}; \mathbf{20}\}$

DI Ya, y ¿ahora como harías?

P1 Profesor mirando mi dibujito, me he dado cuenta que tengo que quitar los armarios que tengan la marca de la persona 2 y la persona 3 o sea que estén en ambos lados, marco el $\{\mathbf{6}; \mathbf{12}; \mathbf{18}\}$

DI Y que me puedes decir de dichos números

P1 Uhmmm, son múltiplos de 6 ósea de 2 x 3; creo que ya entendí.

DI Pero supongamos que la cantidad de armarios sea muy grande, ¿cómo harías para determinar cuántos armarios ocupan una posición múltiplo de 3?

P1 Luego de revisar sus apuntes manifiesta que debe realizar la división entera entre 3.

4.4.5.1. Problema auxiliar de la actividad “Los armarios” creado por el participante P1

En la (Figura 4.37) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P1, variando el problema original de la actividad “Los armarios”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

<u>Información:</u>

- Escenario, un pasadizo
- 10 armarios uno a continuación del otro
- 10 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

<u>Requerimiento:</u>

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 3 pero no por la persona Nº 2?

Como se puede a preciar también hubo una ligera modificación en el requerimiento del problema

<u>Contexto:</u>

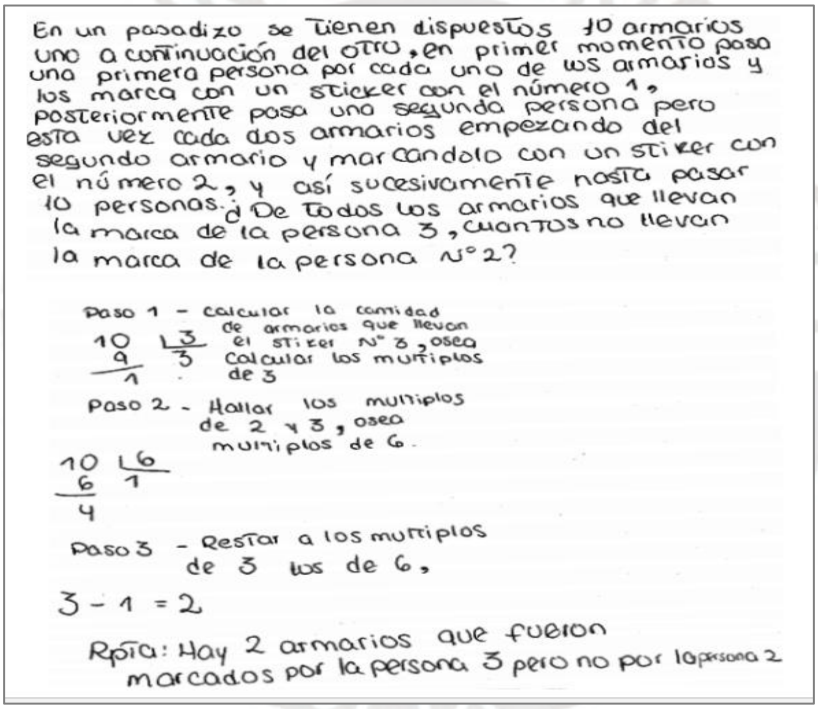
- Extra matemático

No hay variación

<u>Entorno matemático:</u>

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación



En un pasadizo se tienen dispuestos 10 armarios uno a continuación del otro, en primer momento pasa una primera persona por cada uno de los armarios y los marca con un sticker con el número 1, posteriormente pasa una segunda persona pero esta vez cada dos armarios empezando del segundo armario y marcandolo con un stiker con el número 2, y así sucesivamente hasta pasar 10 personas. ¿De todos los armarios que llevan la marca de la persona 3, cuantos no llevan la marca de la persona N°2?

Paso 1 - calcular la cantidad de armarios que llevan el stiker N° 3, osea calcular los multiplos de 3

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \underline{9} & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Paso 2 - Hallar los multiplos de 2 y 3, osea multiplos de 6.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & 1 \\ 4 & \end{array}$$

Paso 3 - Restar a los multiplos de 3 los de 6,

$3 - 1 = 2$

Rpta: Hay 2 armarios que fueron marcados por la persona 3 pero no por la persona 2

Figura 4.37 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P1

4.4.5.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” creado por el participante P1

En el proceso de resolución de este problema auxiliar el participante P1, de manera correcta deduce que los armarios que llevan la marca de la persona Nº 3 son todos los armarios cuya posición son múltiplos de 3, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D01N3.

Posteriormente calculó la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 3. Para ello, procedió a dividir la cantidad de armarios entre 3, es decir 10 entre 3; movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 3 armarios que cumplen esta condición.

Seguidamente halló los múltiplos de 2 y 3 ósea de múltiplos de 6; evidenciando la movilización de descriptores de nivel 2 codificados como D08N2. Posteriormente calculó la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 6; para ello dividió la cantidad de armarios entre 6 (10 entre 6) movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado un armario que cumple dicha condición.

Finalmente, el participante P1 para determinar la cantidad de armarios que fueron marcados por la persona Nº 3, pero no por la persona Nº 2, de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 3 restó la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 6, obteniendo como resultado 2 armarios que cumplen esta condición movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.5.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad "Los armarios" desarrollado por el participante P1

En cuanto a la resolución del problema original, el participante P1 aplica correctamente los conceptos matemáticos identificados y movilizados en la resolución del problema auxiliar (Figura 4.38).

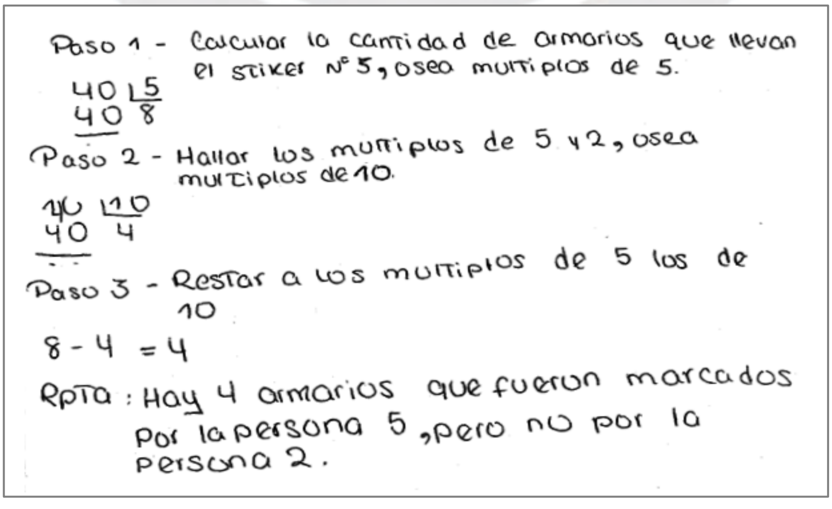


Figura 4.38 Solución del problema original de la actividad "Los armarios" desarrollado por el participante P1

Inicialmente de forma correcta deduce que los armarios que llevan la marca de la persona Nº 5 son todos los armarios cuya posición son múltiplos de 5, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D01N3.

Seguidamente calculó la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 5 dividiendo la cantidad de armarios entre 5, es decir divide 40 entre 5 movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 8 armarios que cumplen esta condición.

Luego el participante P1 halló los múltiplos de 5 y 2 ósea los múltiplos de 10; evidenciando la movilización de descriptores de nivel 2 codificados como D08N2. Posteriormente procedió a calcular la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 10; para ello procede a dividir la cantidad de armarios entre 10, es decir divide 40 entre 10, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 4 armarios que cumplen dicha condición.

Finalmente, el participante P1 para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2, de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 5, restó la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, obteniendo como resultado 4 armarios que fueron marcados por la persona Nº 5, pero no por la persona Nº 2, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.5.4. Problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” creado por el participante P1

En la (Figura 4.39) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P1, variando el problema original de la actividad “Los armarios”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

Información:

- Escenario, un pasadizo
- 200 armarios uno a continuación del otro
- 200 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

<u>Requerimiento:</u>

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 4 pero no por la persona Nº 18?

Como se puede a preciar también hubo una ligera modificación en el requerimiento del problema

<u>Contexto:</u>

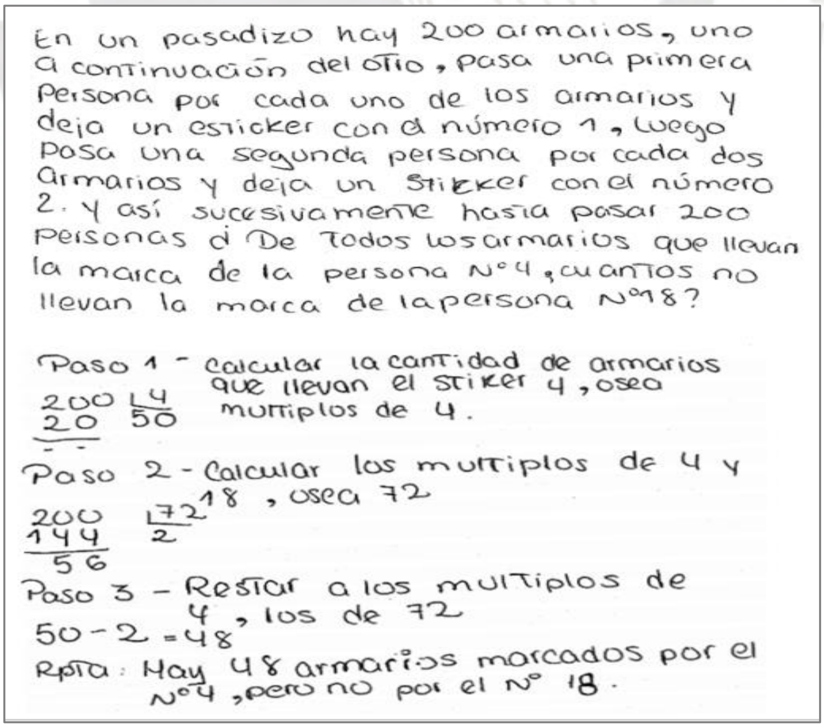
- Extra matemático

No hay variación

<u>Entorno matemático:</u>

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación


En un pasadizo hay 200 armarios, uno
a continuación del otro, pasa una primera
persona por cada uno de los armarios y
deja un esticker con el número 1, luego
pasa una segunda persona por cada dos
armarios y deja un sticker con el número
2. Y así sucesivamente hasta pasar 200
personas ¿De todos los armarios que llevan
la marca de la persona N°4, cuantos no
llevan la marca de la persona N°18?

Paso 1 - Calcular la cantidad de armarios
que llevan el stiker 4, osea
multiplos de 4.

200 |4
20 50

Paso 2 - Calcular los multiplos de 4 y
18, osea 72

200 |72
144 2
56

Paso 3 - Restar a los multiplos de
4, los de 72

50 - 2 = 48

Rpta: Hay 48 armarios marcados por el
N°4, pero no por el N° 18.

Figura 4.39 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P1

4.4.5.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P1

Siguiendo el procedimiento usado en los casos anteriores, el participante P1, procedió a calcular la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 4, para ello dividió la cantidad de armarios entre 4 (200 entre 4) movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 50 armarios que cumplían esa condición.

Luego el participante P1 halló los múltiplos de 4 y 18, ósea los múltiplos de 72. Evidentemente el participante P1 ha cometido un error pues no ha tomado en consideración que los números 4 y 18 no son primos entre sí movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2. La forma correcta era calcular los múltiplo del MCM(4,18).

Posteriormente el participante P1 procedió con el cálculo de la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 72 dividiendo la cantidad de armarios entre 72 (200 entre 72) movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 2 armarios que cumplen dicha condición.

Finalmente, el participante P1, para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 4 pero no por la persona Nº 18, de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 4, restó la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 72, obteniendo como resultado 48 armarios que fueron marcados por la persona Nº 4, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

Obviamente no se alcanzó el resultado deseado por el error cometido, sin embargo, durante un dialogo posterior reconoce fácilmente su equivocación demostrando manejo de conceptos y comprensión a través de la problematización.

4.4.6. Desarrollo de la actividad “Los armarios” realizado por el participante P2

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador, previo a la creación del problema auxiliar.

P2 Profesor, no sé cómo empezar.

DI Primero tienes que crear un problema relativamente más sencillo; ya sabes puedes variar cualquier elemento del problema

P2 Si fueran 10 armarios, la persona Nº 5 marcaría el armario $\{\mathbf{5}; \mathbf{10}\}$; o sea los armarios múltiplos de 5

DI Correcto, ¿Qué más?

P2 La persona Nº 2 marcaria los armarios $\{\mathbf{2};\ \mathbf{4};\ \mathbf{6};\ \mathbf{8}; \mathbf{10}\}$; o sea los armarios múltiplos de 2

DI Correcto ¿Qué más?

P2 Ahí no entiendo por qué si a los múltiplos de 5 le quito los múltiplos de 2 me da negativo.

DI Ok, trata de crear otro problema auxiliar y lo analizamos

Minutos después

P2 Profesor si fueran 20 armarios; los armarios múltiplos de 5 serian: $\{\mathbf{5}; \mathbf{10}; \mathbf{15}; \mathbf{20}\}$ y los armarios múltiplos de 2 serian: $\{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}; \mathbf{12}; \mathbf{14}; \mathbf{16}; \mathbf{18}; \mathbf{20}\}$

DI Correcto ahora a los armarios múltiplos de 5 le tienes que quitar los armarios múltiplos de 2. ¿De acuerdo?

P2 Si

DI ¿En los armarios múltiplos de 5 cuales son múltiplos de 2?

P2 El $\{\mathbf{10}; \mathbf{20}\}$, ah ya entendí tengo que quitar los que son múltiplos de 5 y a la vez múltiplos de 2 o sea los múltiplos de 10.

4.4.6.1. Problema auxiliar de la actividad “Los armarios” creado por el participante P2

En la (Figura 4.40) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P2, variando el problema original de la actividad “Los armarios”, así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido

<u>Información:</u>

- Escenario, un pasadizo
- 10 armarios uno a continuación del otro
- 10 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

<u>Requerimiento:</u>

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2?

No hay variación

<u>Contexto:</u>

- Extra matemático

No hay variación

<u>Entorno matemático:</u>

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación

En un pasadizo hay 10 armarios uno a continuación del
otro y están enumerados del 1 a 10, para una primera
persona por cada uno de los armarios y lo marca con
un stiker que tiene el número 1, luego para una
segunda persona pero cada dos armarios y le coloca
un sticker con el número 2, luego para una tercera
persona cada tres armarios y le pone un sticker con
el número 3 y así sucesivamente hasta pasar diez
personas. ¿De todos los armarios que llevan la marca de
la persona número 5, cuántos no llevan la marca de la
persona número 2?

Primero tengo que calcular cuántos son los múltiplos de 5:

$10 \underline{|5}$ son 2 en total
$\;\;\;\;\;\;2$

Luego tenemos que calcular cuántos son los múltiplos de 10:

$10 \underline{|10}$ son 1 en total
$\;\;\;\;\;\;1$

Ahora para sacar cuántos son los múltiplos de 5 pero no de 2:

T. múltiplos de 5 - T. múltiplos de 10 = 2 - 1 = 1

Existe una marca de la persona N°5, que no lleve la marca
de la persona N°2.

Figura 4.40 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2

4.4.6.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2

En los que respecta a la resolución de este problema auxiliar, el participante P2 en primer lugar, interpretó correctamente que los armarios que llevan la marca de la persona Nº 5 son todos los armarios cuya posición son múltiplos de 5, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D01N3.

Posteriormente el participante P2 procedió a calcular la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 5 dividiendo la cantidad de armarios entre 5 (10 entre 5), movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 2 armarios que cumplen esta condición.

Luego el participante P2 calculó los múltiplos de 10, refiriéndose a los armarios cuyas posiciones son múltiplos de 5 y 2, es decir armarios que ocupan posiciones múltiplos de 10, evidenciando la movilización de descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P2 calculó la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 10 dividiendo cantidad de armarios entre 10 (10 entre 10), movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado un armario que cumple dicha condición.

Para determinar la cantidad de armarios que fueron marcados por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2, el participante P2 restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 5, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, obteniendo como resultado un armario que fue marcado por la persona Nº 5, pero no por la persona Nº 2. Con esto moviliza descriptores de nivel 2 codificado como D09N2.

4.4.6.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2.

En cuanto a la resolución del problema original, el participante P2 aplica correctamente los conceptos matemáticos identificados y movilizados en la resolución del problema auxiliar (Figura 4.41).

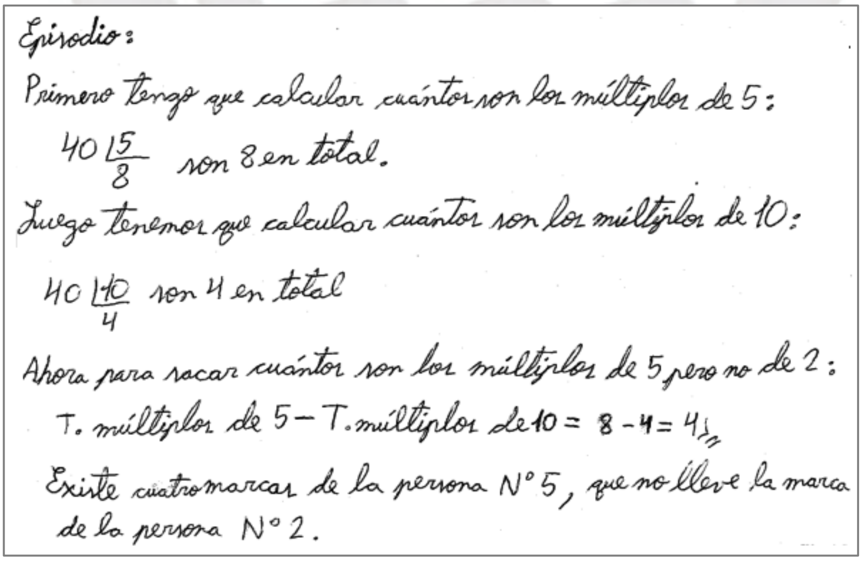

Episodio:
Primero tengo que calcular cuántos son los múltiplos de 5:
$40 \underline{|5}$ / 8 son 8 en total.
Luego tenemos que calcular cuántos son los múltiplos de 10:
$40 \underline{|10}$ / 4 son 4 en total
Ahora para sacar cuántos son los múltiplos de 5 pero no de 2:
T. múltiplos de 5 − T. múltiplos de 10 = 8 − 4 = 4
Existe cuatro marcas de la persona N° 5, que no lleve la marca de la persona N° 2.

Figura 4.41 Solución del problema original de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2

El participante P2 procedió con el cálculo de la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 5; dividiendo la cantidad de armarios entre 5, es decir 40 entre 5, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 8 armarios que cumplen esta condición.

Luego el participante P2 halló los múltiplos de 5 y 2 (múltiplos 10), movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P2 calculó la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 10; dividiendo la cantidad de armarios entre 10, es decir 40 entre 10, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 4 armarios que cumplen dicha condición.

Para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2, el participante P2 restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 5, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, obteniendo como resultado 4 armarios que fueron marcados por la persona Nº 5, pero no por la persona Nº 2. Movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.6.4. Problema retrospectivo de la actividad "Los armarios" creado por el participante P2

En la (Figura 4.42) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P2, variando el problema original de la actividad "Los armarios", así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

<u>Información:</u>

- Escenario, un pasadizo
- 1000 armarios uno a continuación del otro y 1000 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

<u>Requerimiento:</u>

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 7 pero no por la persona Nº 5?

Tal como se puede apreciar hubo una ligera variación en el requerimiento.

<u>Contexto:</u>

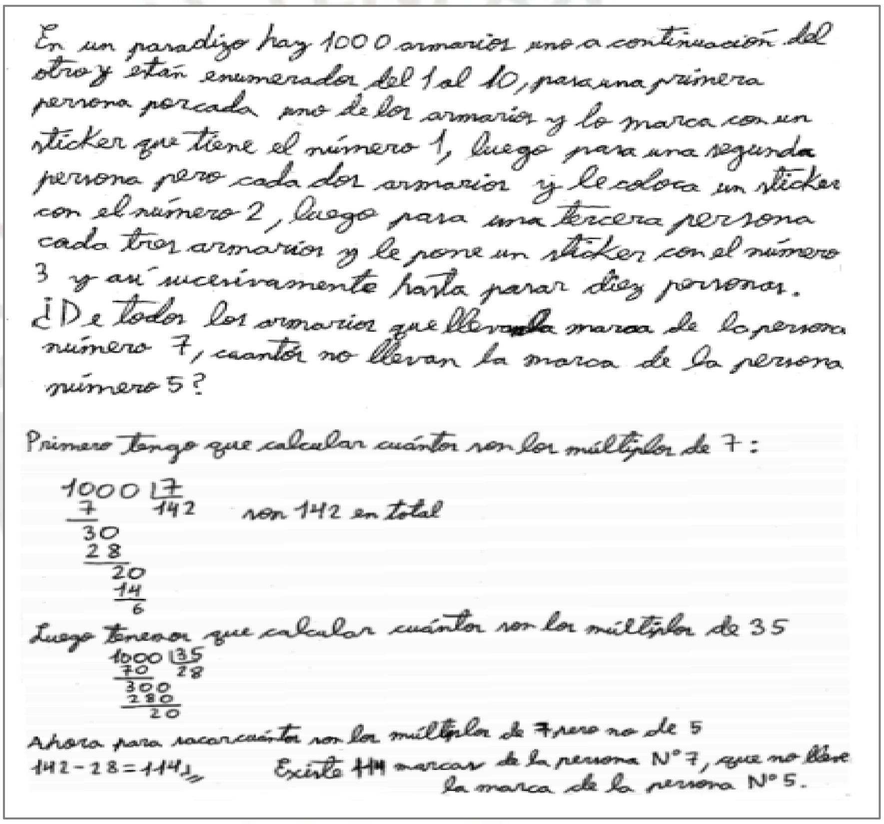
- Extra matemático

No hay variación

<u>Entorno matemático:</u>

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación



En un paradizo hay 1000 armarios uno a continuación del otro y están enumerados del 1 al 10, para una primera persona por cada uno de los armarios y lo marca con un sticker que tiene el número 1, luego para una segunda persona pero cada dos armarios y le coloca un sticker con el número 2, luego para una tercera persona cada tres armarios y le pone un sticker con el número 3 y así sucesivamente hasta pasar diez personas. ¿De todos los armarios que llevan la marca de la persona número 7, cuantos no llevan la marca de la persona número 5?

Primero tengo que calcular cuántos son los múltiplos de 7:

1000 | 7 → 142 son 142 en total

Luego tenemos que calcular cuántos son los múltiplos de 35

1000 | 35 → 28

Ahora para sacar cuántos son los múltiplos de 7 pero no de 5

142 − 28 = 114 Existe 114 marcas de la persona N° 7, que no lleve la marca de la persona N° 5.

Figura 4.42 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2

4.4.6.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P2

En relación al proceso de resolución de este problema retrospectivo, el participante P2 calculó la cantidad de armarios que llevan la marca de la persona Nº 7 dividiendo la cantidad de armarios entre 7, es decir 1000 entre 7, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 142 armarios que cumplen esta condición.

Luego el participante P2 calculó los múltiplos de 35, refiriéndose a los armarios cuyas posiciones son múltiplos de 7 y 5, es decir armarios que ocupan posiciones múltiplos de 35, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P2 calculó la cantidad de armarios que ocupan las posiciones múltiplos de 35 dividiendo la cantidad de armarios entre 35, es decir 1000 entre 35, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 28 armarios que cumplen dicha condición.

Para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 7 pero no por la persona Nº 5, el participante P2, restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 7, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 35, obteniendo como resultado 114 armarios que fueron marcados por la persona Nº 7, pero no por la persona Nº 5, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.7. Desarrollo de la actividad "Los armarios" realizado por el participante P3

A continuación, mostramos un extracto del dialogo entre el estudiante y el docente investigador, previo a la creación del problema auxiliar.

P3 Profesor, creo que está muy fácil, solo hay que calcular cuántos armarios son múltiplos de 5, luego calcular los múltiplos de 2 y restarlos.

DI ¿Puedes mostrarme como lo harías?

P3 Los armarios múltiplos de 5 son $\boldsymbol{M(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40\}}$ y los armarios múltiplos de 2 serian:

$$\boldsymbol{M(2) = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40\}}$$

DI Correcto, ¿Y ahora qué harías?

P3 La cantidad de múltiplos de 5 serian 8 y la cantidad de múltiplos de 2 serian 20; y si los resto sería negativo, ya fui…

DI Es interesante como has representado los múltiplos de 5 y múltiplos de 2; como si fueran conjuntos. ¿consideras que son conjuntos?

P2 Si, $\boldsymbol{M(5) formado\ por\ todos\ los\ multiplos\ de\ 5}$ y

$\boldsymbol{M(2) formado\ por\ todos\ los\ multiplos\ de\ 2}$

DI Y ¿recuerdas la unión, intersección y diferencia de conjuntos?

P2 Más o menos

DI Supongamos un conjunto A y un conjunto B, Cómo sería el conjunto $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ Es decir, A unión B

P2 Todos los elementos de A unidos a los elementos de B

DI Y ¿cómo sería el conjunto $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ es decir A intersección B?

P2 Serían los elementos que pertenecen a ambos

DI Y ¿cómo sería el conjunto $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ es decir A menos B?

P3 No me acuerdo

DI Te voy a dar una ayuda, seria todos los elementos de A que no están en B.

DI Tú me dijiste que $\boldsymbol{M(5) y\ M(2)}$ eran conjuntos, te pregunto como seria el conjunto $\boldsymbol{M(5)-M(2)}$ es decir el conjunto $\boldsymbol{M(5)}$ menos el conjunto $\boldsymbol{M(2)}$

P3 Todos los elementos de $\boldsymbol{M(5)}$ que no están en $\boldsymbol{M(2)}$, entonces seria $\boldsymbol{\{5; 15; 25; 35\}}$

DI Finalmente, ¿a $\boldsymbol{M(5)}$ que elementos quitaste?

P3 $\{\mathbf{10}; \mathbf{20}; \mathbf{30}; \mathbf{40}\}$ creo que ya entendí

4.4.7.1. Problema auxiliar de la actividad "Los armarios" creado por el participante P3

En la (Figura 4.43) mostramos el problema auxiliar creado por el participante P3, variando el problema original de la actividad "Los armarios", así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido

Información:

- Escenario, un pasadizo
- 20 armarios uno a continuación del otro
- 20 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

Requerimiento:

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 4 pero no por la persona Nº 3?

Tal como se puede apreciar hubo una ligera variación en el requerimiento.

Contexto:

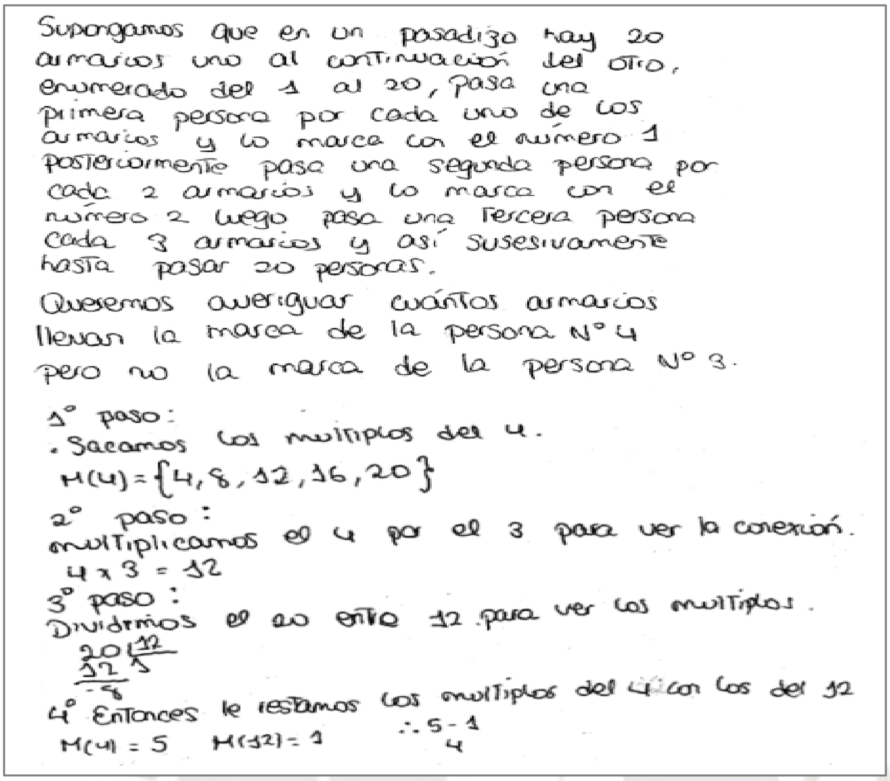
- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación


Supongamos que en un pasadizo hay 20 armarios uno al continuación del otro, enumerado del 1 al 20, pasa una primera persona por cada uno de los armarios y lo marca con el número 1 posteriormente pasa una segunda persona por cada 2 armarios y lo marca con el número 2 luego pasa una tercera persona cada 3 armarios y así susesivamente hasta pasar 20 personas.
Queremos averiguar cuántos armarios llevan la marca de la persona N° 4 pero no la marca de la persona N° 3.

1° paso:
• Sacamos los multiplos del 4.
$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
2° paso:
multiplicamos el 4 por el 3 para ver la conexión.
$4 \times 3 = 12$
3° paso:
Dividimos el 20 entre 12 para ver los multiplos.
$20 \div 12 = 1$, -12, 8
4° Entonces le restamos los multiplos del 4 con los del 12
$M(4) = 5$ $M(12) = 1$ $\therefore 5 - 1 = 4$

Figura 4.43 Creación y resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P3

4.4.7.2. Análisis del proceso de resolución del problema auxiliar de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P3

En relación al proceso de resolución de este problema auxiliar, el participante P3 en primer lugar interpreta correctamente que los armarios que llevan la marca de la persona Nº 4 son todos los armarios cuya posición son múltiplos de 4, movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D01N3.

Posteriormente el participante P3 mostrando una acepción de múltiplo como producto procede a determinar cuáles son los armarios que llevan la marca de la persona Nº 4 es decir cuáles son los armarios que ocupan posiciones múltiplos de 4; determinando que dichos armarios son los elementos del conjunto

$M(4) = \{4; 8; 12; 16; 20\}$ movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 5 armarios que cumplen esta condición.

Luego el participante P3 procedió a multiplicar 4 por 3 intentando establecer una conexión entre ambos números. A raíz del procedimiento seguido se entiende que el estudiante pretende establecer que los armarios cuya posición son múltiplos de 4 y de

3, son los mismos armarios cuya posición son múltiplos de 12, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P3 para calcular la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 12, procedió a dividir la cantidad de armarios entre 12, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2. Obtiene como resultado un armario cuya posición es múltiplo de 12 y que evidentemente fue marcado por la persona Nº 4 y por la persona Nº 3.

Para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 4 pero no por la persona Nº 3 el participante P3, restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 4, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 12, obteniendo que existen 4 armarios que fueron marcados por la persona Nº 4, pero no por la persona Nº 3, con ello moviliza descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.7.3. Análisis del proceso de resolución del problema original de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P3

En cuanto a la resolución del problema original, el participante P3 aplica los conceptos matemáticos identificados y movilizados en la resolución del problema auxiliar (Figura 4.44).

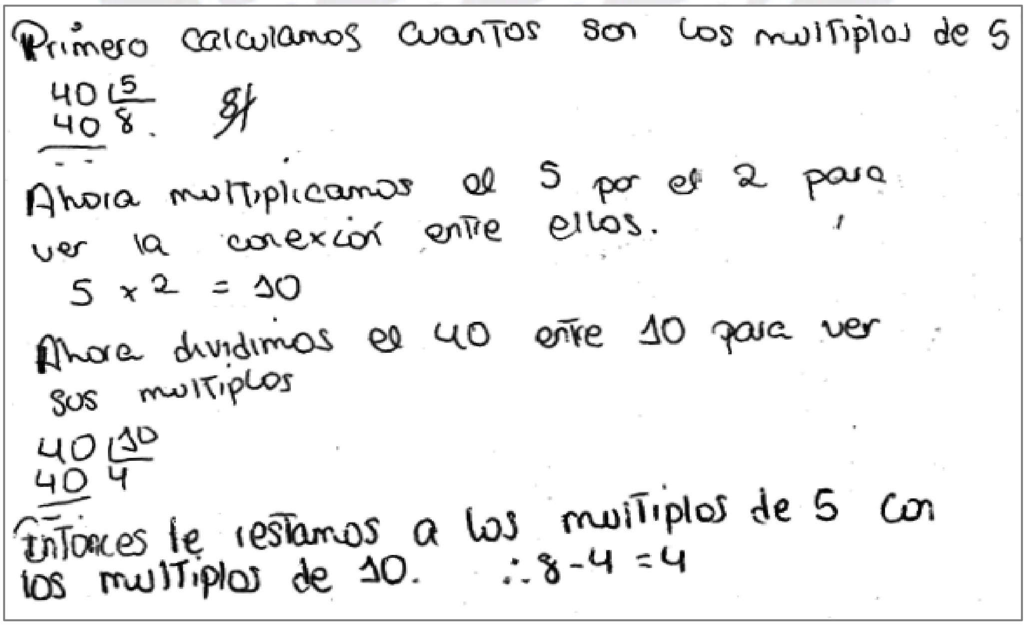

Primero calculamos cuantos son los multiplos de 5
40 |5
40 8.   8
Ahora multiplicamos el 5 por el 2 para ver la conexción entre ellos.
5 x 2 = 10
Ahora dividimos el 40 entre 10 para ver sos multiplos
40 |10
40 4
Entonces le restamos a los multiplos de 5 con los multiplos de 10. ∴ 8-4 = 4

Figura 4.44 Solución del problema original de la actividad “Los armarios” desarrollado propuesto por el participante P3

El participante P3, para calcular cuántos armarios fueron marcados por la persona N°5 procedió a dividir la totalidad de armarios entre 5, es decir 40 entre 5, encontrando 8 armarios cuyas posiciones son múltiplos de 5.

Luego el participante P3 procedió a multiplicar 5 por 2 para inferir que la cantidad de armarios cuya posición son múltiplos de 5 y de 2 equivale a determinar la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P3 para calcular la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, procedió a dividir la cantidad de armarios entre 10, es decir 40 entre 10, obteniendo como resultado 4 armarios cuya posición es múltiplo de 10 y que evidentemente fue marcado por la persona Nº 5 y por la persona Nº 2, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2.

Para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 5 pero no por la persona Nº 2 el participante P3 restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 5, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 10, obteniendo que existen 4 armarios que fueron marcados por la persona Nº 5, pero no por la persona Nº 2. Movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2.

4.4.7.4. Problema retrospectivo de la actividad "Los armarios" creado por el participante P3

En la (Figura 4.45) mostramos el problema retrospectivo creado por el participante P3, variando el problema original de la actividad "Los armarios", así mismo se muestra el procedimiento de resolución que ha seguido.

Información:

- Escenario, un pasadizo
- 800 armarios uno a continuación del otro
- 800 personas
- Se describe una forma de marcado de los armarios.

Se puede notar que se ha variado la información referida al número de armarios y personas.

Requerimiento:

- ¿Determinar cuántos armarios fueron marcados por la persona Nº 20 pero no por la persona Nº 10?

Tal como se puede apreciar hubo una ligera variación en el requerimiento.

Contexto:

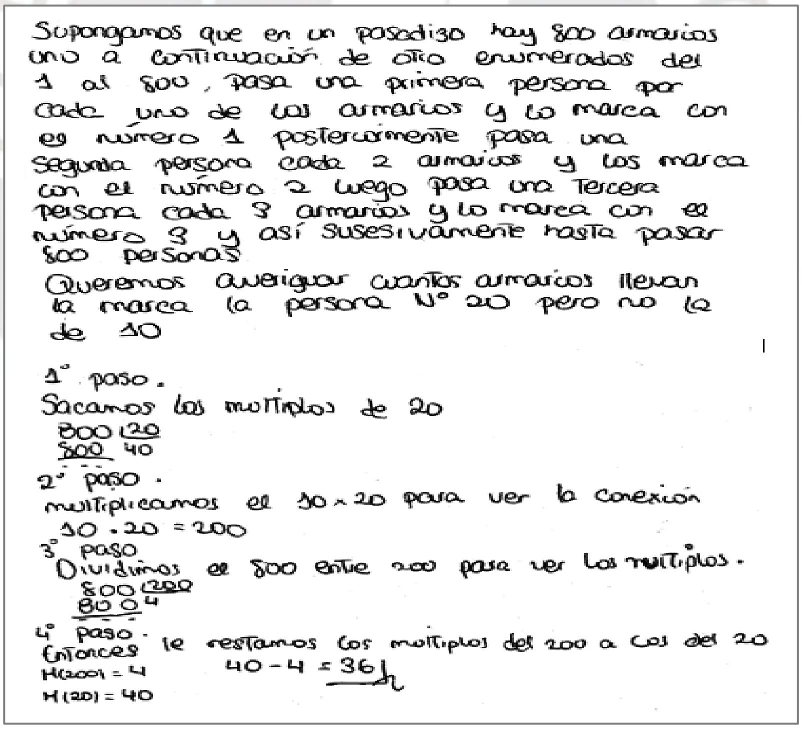
- Extra matemático

No hay variación

Entorno matemático:

- múltiplos de un número e intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.

No hay variación


Supongamos que en un posadizo hay 800 armarios uno a continuación de otro enumerados del 1 al 800, pasa una primera persona por cada uno de los armarios y lo marca con el número 1 posteriormente pasa una segunda persona cada 2 armarios y los marca con el número 2 luego pasa una tercera persona cada 3 armarios y lo marca con el número 3 y así susesivamente hasta pasar 800 personas

Queremos averiguar cuantos armarios llevan la marca la persona N° 20 pero no la de 10

1° paso.
Sacamos los multiplos de 20
800 |20
800 40

2° paso.
multiplicamos el 10 x 20 para ver la conexión
10 . 20 = 200

3° paso
Dividimos el 800 entre 200 para ver los multiplos.
800 |200
800 4

4° paso. le restamos los multiplos del 200 a los del 20
Entonces 40 − 4 = 36
M(200) = 4
M(20) = 40

Figura 4.45 Creación y resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P3

4.4.7.5. Análisis del proceso de resolución del problema retrospectivo de la actividad “Los armarios” desarrollado por el participante P3

Tal como se puede apreciar en la figura 4.45, el participante P3 procedió con el calculo de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 20. Para ello dividió la cantidad de armarios entre 20, es decir 800 entre 20 obteniendo un total de 40 armarios cuya posición es múltiplo de 20. movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2.

Luego el participante P3 procedió a multiplicar 10 x 20 para inferir que los armarios que fueron marcados de manera conjunta por la persona Nº 10 y por la Persona Nº 20, son equivalentes a los armarios que ocupan posiciones múltiplos de 200. Sin embargo, no tomó en consideración que los números 10 y 20 no son primos entre sí, cometiendo un error, pues debió considerar como armarios equivalentes, aquellos que son múltiplos del MCM(10,20) movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D08N2.

Posteriormente el participante P3, para calcular la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 200, procede a dividir la cantidad de armarios entre 200, movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2 y obteniendo como resultado 4 armarios cuya posición es múltiplo de 200 y que evidentemente fue marcado por la persona Nº 20 y por la persona Nº 10.

Finalmente, el participante P3 para determinar la cantidad de armarios que fue marcado por la persona Nº 20 pero no por la persona Nº 10, restó de la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 20, la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de 200, obteniendo que existen 36 armarios que fueron marcados por la persona Nº 20, pero no por la persona Nº 10 movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D09N2. Sin embargo, arrastró el error cometido en pasos anteriores.

4.4.8. Análisis de los resultados de la actividad “Los armarios” mediante la aplicación de la estrategia OAR.

Realizado el análisis de las producciones de los participantes P1, P2, P3 y haciendo un análisis comparativo con la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural y la solución experta propuesta para esta actividad; podemos decir de manera general que los tres participantes a través de la creación y resolución del problema auxiliar, lograron identificar el elemento matemático “múltiplos de un número” e “intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números”, de tal forma que a través de dichos conceptos lograron resolver el problema auxiliar y el problema original. Así mismo a través de la creación y resolución del problema retrospectivo fortalecieron el nivel de comprensión de los conceptos relacionados a los múltiplos de un número. Con estos resultados se evidencia el cambio favorable en el nivel de comprensión del concepto múltiplo de un número natural.

CONSIDERACIONES FINALES

Como hemos puesto de manifiesto en el capítulo 1 del presente trabajo de investigación, nuestro objetivo general es analizar si la creación de problemas, contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, en estudiantes del primer grado de secundaria.

Para el logro de nuestro objetivo general, definimos dos objetivos específicos:

1. Identificar los niveles de comprensión previa de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria.
2. Identificar los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria a través de la creación de problemas por variación aplicando la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo).

El procedimiento metodológico seguido para desarrollar nuestro estudio de investigación está basado en la metodología de investigación cualitativa en los términos que se propone en (Latorre, 1996). Los sujetos de nuestro estudio fueron alumnos del primer grado de educación secundaria, de la Institución Educativa Particular Wonderful Stars y cuyo promedio de edades es de 12 años y pertenecen al tercio superior.

En esta investigación de tipo cualitativo, el recojo de información fue de fuente primaria usándose técnicas como la observación, entrevistas y encuestas. Para ello se utilizaron cuestionarios, fichas con situaciones problemáticas y fichas de observación como principales instrumentos y como material de apoyo la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural que presentamos en el acápite 3.1.4.3, Tabla 3.2

Para ello se diseñaron cuatro sesiones, que se inició con una evaluación exploratoria y continuaba con actividades de situaciones problemáticas para ser resueltas creando problemas auxiliares y retrospectivos por variación del problema original.

Respecto a nuestro primer objetivo especifico

Identificar los niveles de comprensión previa de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria.

Para este objetivo se realizó una evaluación exploratoria la cual tiene por finalidad identificar, describir y caracterizar el nivel de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número que muestran los participantes del estudio antes de aplicar la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo).

Esta evaluación exploratoria incluyo 5 preguntas que permitiría caracterizar el nivel de comprensión el cual fue realizado con la ayuda de la Guía de caracterización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural.

A través de la aplicación y desarrollo de esta actividad se logró identificar en términos generales, que los participantes del estudio evidenciaron encontrase en un nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural por las razones siguientes:

- Los participantes mostraron la necesidad de realizar conversiones invariantes hacia el sistema de representación numérico posicional de base diez, basado en la necesidad de realizar la operación aritmética mencionada movilizando descriptores de nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número, codificados como D02N1. (ver Figura 4.1) Esto los llevó a no tomar en cuenta otras alternativas para evaluar la divisibilidad entre números, por ejemplo; la divisibilidad como una relación a partir de la representación como producto de factores primos u otra forma de estructura multiplicativa.
- Los participantes de manera implícita evidenciaron una acepción de múltiplo como dividendo (MD) o una acepción de divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd) movilizando descriptores de nivel 1 codificados como D03N1 y D04N1 respectivamente. (ver Figura 4.2)
- Los participantes tienen la necesidad de realizar una serie de pruebas de ensayo y error mediante el uso de la división entera y exacta movilizando descriptores de Nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número codificados como D05N1. (ver Figura 4.5)

En general, las actuaciones y respuestas de los participantes se enmarcan en una percepción operacional de la noción de múltiplo y divisor de un número, pues el significado implícito que asignan dichos participantes presenta dos acepciones (definidas en el marco teórico):

1) Múltiplo como dividendo en una división entera y exacta (MD)
2) Divisor como consecuencia de una división entera y exacta (D-cd)

Respecto a nuestro segundo objetivo especifico

Identificar los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural en estudiantes del primer grado de secundaria a través de la creación de problemas por variación aplicando la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo).

Para el logro de este objetivo se realizaron tres sesiones: la primera donde se realiza un proceso de motivación y se presenta los lineamientos de la estrategia OAR. Las sesiones siguientes están organizadas en actividades con situaciones problemas, las cuales serán resueltas aplicando la estrategia OAR que involucra la creación y resolución de un problema auxiliar y otro retrospectivo mediante la variación de un problema original. En cada una de estas sesiones se identifica, describe y caracteriza las acepciones o modos de uso, sistemas de representación, procedimientos y dificultades presentadas en su ejecución.

En el apartado 4.2.2, 4.3 y 4.4 se encuentran la descripción de cada una de las actividades con sus respectivos objetivos y soluciones expertas.

Los resultados y producciones de dichas actividades fueron contrastadas con la adaptación de la tabla de categorización de los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural propuesta en (Bodí, 2006), la cual mostramos en el apartado 3.1.4; y de esta forma pudimos identificar que luego de aplicar la estrategia OAR, los participantes del estudio evidenciaron un cambio favorable en el nivel de comprensión de los conceptos múltiplos y divisores de un número natural pues tras encontrarse en un nivel 1 de comprensión de los conceptos matemáticos en estudio, pasaron a un nivel 2 o nivel 3.

En términos generales, los participantes en el caso de divisores, tras crear y resolver el problema auxiliar creado por variación del problema original, lograron identificar que el concepto matemático “divisores de un número” y “la existencia de pares multiplicativos en el conjunto formado por dichos divisores”, les permitiría resolver el problema original planteado en la actividad. movilizando descriptores de Nivel 3, codificadas como D06N3 (ver Figura 4.24)

En relación a los procedimientos seguidos para resolver el problema auxiliar y el problema original, los participantes realizaron las traducciones y conversiones en los sistemas de representación de manera contextual, pues expresaron correctamente los números mediante su descomposición canónica, y a partir de ello determinaron los divisores de dicho número a través de la representación tabular de los mismos, formando los pares multiplicativos en el conjunto formado por dichos divisores y en función de ello emitieron la respuesta correcta. movilizando descriptores de Nivel 2, codificadas como D04N2. (ver Figura 4.26)

Por otro lado, en el caso de múltiplos, los participantes tras crear y resolver el problema auxiliar creado por variación del problema original, lograron identificar que el concepto matemático “múltiplos de un número” e “intersección y diferencia entre conjuntos de múltiplos de dos números.” les permitiría resolver el problema original planteado en la actividad. movilizando descriptores de Nivel 3, codificadas como D01N3. (ver Figura 4.33)

En relación a los procedimientos seguidos para resolver el problema auxiliar y el problema original, los participantes movilizaron y usaron descriptores como:

- Para determinar los elementos del conjunto formado por los múltiplos “$a\ pero\ no\ de\ b$” se debe hallar los elementos del conjunto de múltiplos de "a" y luego quitar los elementos del conjunto formado por los múltiplos del $MCM(a, b)$ movilizando descriptores de nivel 3 codificados como D01N3. (ver Figura 4.36 y Figura 4.37)
- Para determinar los elementos del conjunto de múltiplos de un número natural a que están comprendidos en un determinado rango, hay que calcular los valores de k que satisfagan la condición “a es múltiplo de b si, y solo si, existe un número natural k, tal que $a = kb$”. Evidenciando la acepción de múltiplo

como producto (MP) movilizando descriptores de nivel 2 codificados como D07N2. (ver Figura 4.38)

- Para calcular la cantidad de múltiplos de un número "a" que existen en un determinado conjunto, hay que dividir el cardinal de dicho conjunto entre "a".

En ese sentido los participantes del estudio, en primer lugar, interpretaron correctamente que los armarios que llevan la marca de la persona "a" son todos los armarios cuya posición son múltiplos de "a", posteriormente procedieron a calcular la cantidad de armarios cuya posición es múltiplo de "a", para ello dividieron la cantidad de armarios entre "a"; luego infirieron que los armarios marcados por la persona "a" y "b" de manera conjunta, son aquellos armarios que ocupan la posición $MCM(a,b)$ y para calcular cuántos armarios cumplen esta condición dividen el número de armarios entre el $MCM(a,b)$ y finalmente para determinar la cantidad de armarios que fueron marcados por la persona "a" pero no por la persona "b", proceden a restar la cantidad de múltiplos de "a" menos la cantidad de múltiplos del $MCM(a,b)$.

Respecto a nuestro objetivo general

Analizar si la creación de problemas, contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, en estudiantes del primer grado de secundaria.

Tras de la aplicación de la evaluación exploratoria, y desarrollar la discusión de los resultados de la misma, hemos podido identificar que los participantes de nuestro estudio antes de la aplicación de la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo), mostraban un nivel 1 de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, con lo cual hemos logrado desarrollar el primer objetivo específico.

Así mismo, tras el desarrollo de las actividades "Los lotes de terreno" y "los armarios", tomando como referencia el enfoque teórico de la creación de problemas y la estrategia OAR (problema Original, problema Auxiliar, problema Retrospectivo, hemos podido identificar que los participantes del estudio, mostraron cambios favorables en los niveles de comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor de un número natural, pasando de un nivel 1 a nivel 2 y nivel 3; logrando la consecución de nuestro segundo objetivo específico.

Por lo tanto, podemos decir que nuestro objetivo general se cumplió y que hay evidencia de que el enfoque teórico de la creación de problemas, contribuye a la comprensión de los conceptos de múltiplos y divisores de un número natural en estudiantes de primer grado de educación secundaria.

SUGERENCIAS PARA FUTUROS TRABAJOS

Es normal que en cualquier investigación se abran varias líneas de continuidad; en la investigación que hemos realizado han surgido posibles vías para explorar en futuras investigaciones. Señalamos algunas de ellas con el propósito que puedan servir como estímulo para continuar investigando en esta área de la educación matemática que ofrece unas extraordinarias posibilidades para desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos.

Continuar con trabajos de investigación en la misma línea sobre creación de problemas en estudiantes con énfasis en la variación del entorno matemático pero relacionado a la noción de divisibilidad,

El tema de la divisibilidad es muy amplio, se debería continuar con esta línea de investigación con estudiantes que involucre otros conceptos matemáticos asociados.

Diseñar secuencias de aprendizaje a través de la línea de investigación de creación de problemas con estudiantes, que involucre el cálculo de los factores primos y compuestos.

Hacer un estudio sobre los significados que se muestran en los libros de texto de educación secundaria sobre contenidos de divisibilidad.

REFERENCIAS

Asociación Editorial Bruño. (2018). *Matemáticas 1*. Lima, Perú: Editorial Bruño.

Ayllón, M. (2012). *Invención-resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria* (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada). Recuperado de https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales* (Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, España). Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/7757

Cazares, J., Castro, E., & Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula*, *10*, 19–39. Recuperado de http://revistas.usal.es/index.php/0214-3402/article/view/3529

Clapham, C. (1998). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid, España: Editorial Complutense S.A.

Díaz, M. (1980). *Diccionario básico de matemáticas*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Ediciones Corefo. (2016). *Matemáticas 1*. Lima, Perú: Editorial Corefo.

Editorial Coveñas. (2016). *Covematic 1 grado de educación secundaria* (2ª ed.). Lima, Perú: Editorial Coveñas.

Editorial Norma. (2018). *Descubre Matemática 1° Secundaria*. Lima, Perú: Editorial Norma.

Gallardo, J. y González, J. L. (2007). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.) Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico (pp. 157-184). Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12342236.pdf

GenioMatic. (2016). *Aritmética 1*. Lima, Perú: Editorial Ingenio.

Gentile, E. (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática.*

Latorre, A. (1996). Parte III Metodología constructivista-cualitativa. Parte IV Investigación Orientada a la Práctica educativa. In A. Latorre (Ed.), *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa* (pp. 197–291). Recuperado de https://www.academia.edu/4537791/Latorre_Antonio_Bases_Metodologicas_De_La_Investigacion_Educativa?auto=download

López, A. (2015). Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España). Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/42431

Malaspina, U. (2014). Flexibilidad, Originalidad y fluidez en la variación de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática [Unión]*, (39), 135–140. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo12.pdf

Malaspina, U., & Vallejo, E. (2014). Creación de Problemas en la Docencia e Investigación. En Malaspina, U. (Ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Recuperado de http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2015/07/Reflexiones-y-Propuestas-en-Educación-Matemática_IREM.pdf

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2016a). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2016b). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes del Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes ECE 2016*.

Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/ECE-2016-presentaci%C3%B3n-de-resultados-web.pdf

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes del Ministerio de Educación del Perú. (2017a). *El Perú en PISA 2015, Informe nacional de resultados*. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Libro_PISA.pdf

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes del Ministerio de Educación del Perú. (2017b). *PISA 2012: primeros resultados. Informe Nacional del Perú*. Recuperado de http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/5184

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Recuperado de https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Roig, A., Llinares, S., & Penalva, M. (2010). Construcción del concepto múltiplo común en el dominio de los números naturales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *28*(2), 261–273. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/199617

Romaña, R. (2014). *Posibles implicaciones del discurso metafórico docente en el abordaje del concepto de divisibilidad con estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Santa Teresita del municipio de la Victoria (Valle del Cauca)* (Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia). Recuperado de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/5065

Song, S., Yim, J., Shin, E., & Lee, H. (2007). Posing problems with use the 'what if not? strategy in NIM game'. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4ª ed., pp. 193–200). Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499418.pdf

Soto, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos.* (3ª ed.). Recuperado de http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf

ANEXOS

ANEXO A

Ficha de evaluación exploratoria

Actividad “La oferta de jabones”

Anita es una pequeña empresaria, en su casa tiene un pequeño bazar donde vende artículos de perfumería e higiene. Cierto día en el supermercado; Anita se percató que los jabones estaban en oferta: 3 pack por el precio de 2, cada pack contenía 3 cajas y que en cada caja había 3 jabones. Entonces, decidió comprar los últimos 13 packs que quedaban. Anita, pensando revender los jabones en su pequeño negocio, decide empacarlos en cajitas con capacidad para 1, 2, 3, 4, 5, ó 6 jabones.

¿Puede Anita empacar la totalidad de jabones que compró en cajitas de 6 unidades cada una, haciéndolo de forma equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

De las cajitas que dispone Anita; ¿cuáles puede usar para empacar todos los jabones de manera equitativa y máxima, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

¿Cuántos jabones como mínimo debería destinar Anita para su uso personal, de tal forma que el resto de jabones pueda ser empacados de manera equitativa y máxima en cajitas de 6 unidades, sin que sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

Si del total de jabones que compró Anita, solo usó uno, ¿cuántas y cuáles son las posibilidades que tiene ahora para empacar de manera equitativa y máxima el resto de jabones en las cajitas que dispone, de tal forma que no sobre ni falte ningún jabón? Justifica tu respuesta.

¿Cuántos jabones como mínimo debería separar Anita para su uso personal de tal forma que el resto de jabones no pueda ser empacado de manera equitativa y máxima en cajitas de tres o cinco unidades? Justifica tu respuesta.

ANEXO B

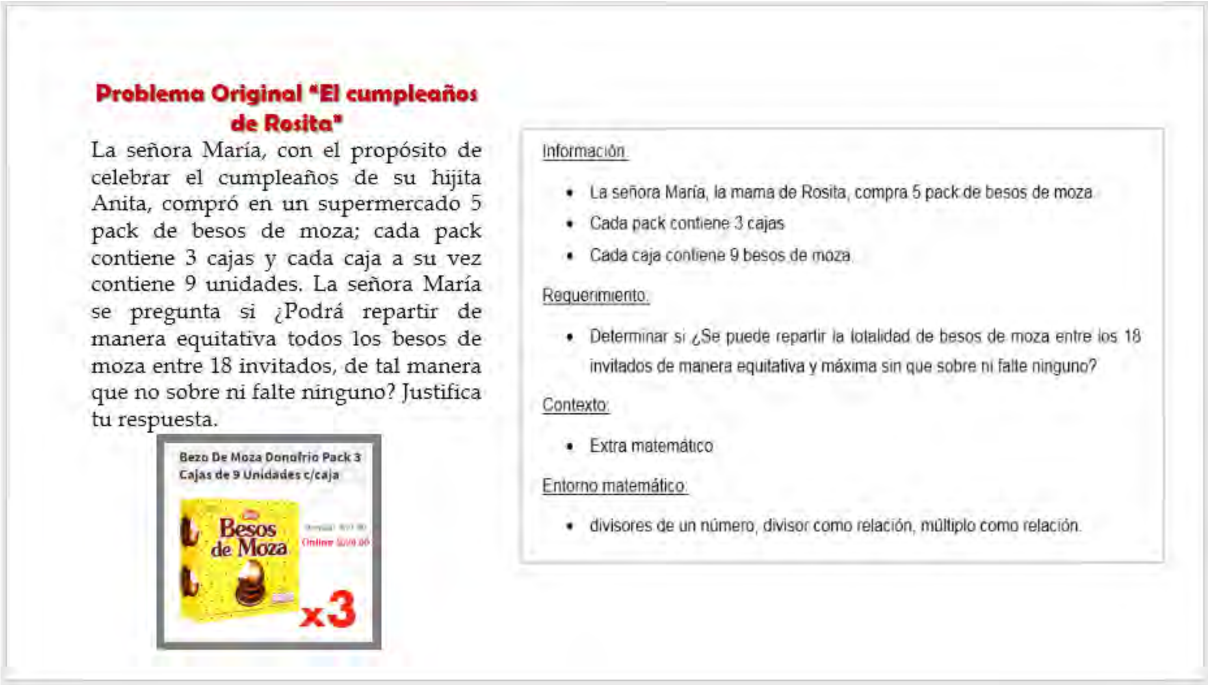
Presentación de diapositivas en PowerPoint "Los lineamientos del enfoque teórico de la creación de problemas y la estrategia OAR"

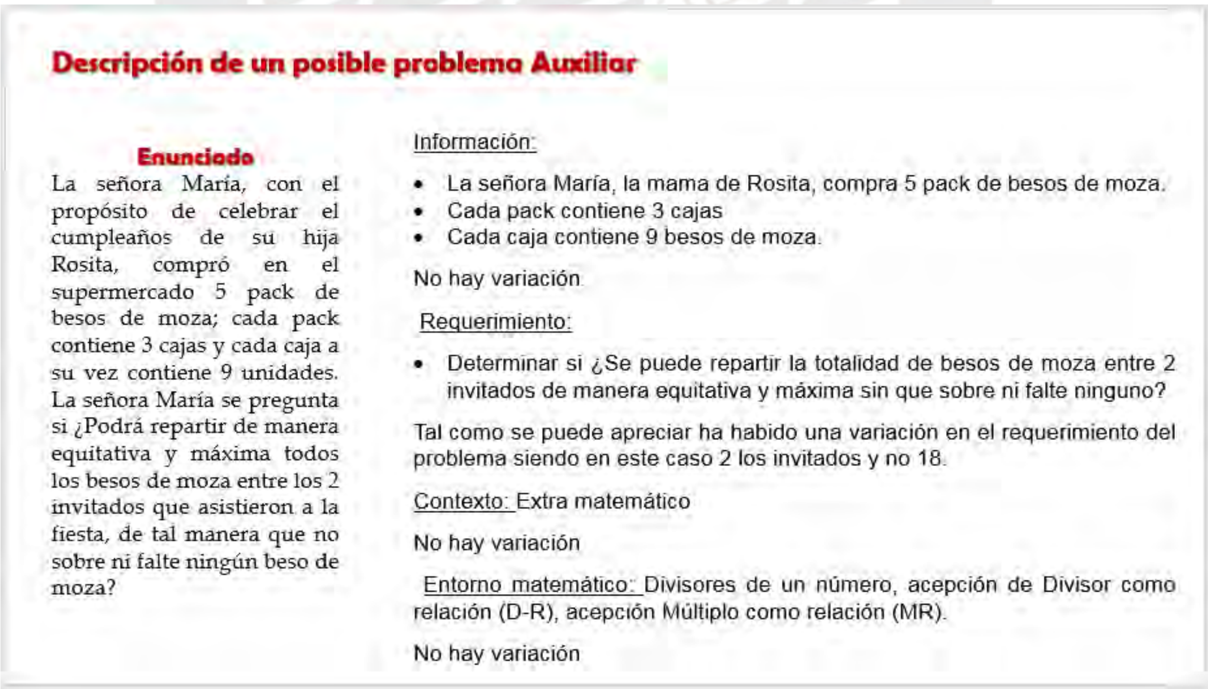
ENFOQUE DE CREACIÓN DE PROBLEMAS PROPUESTO EN MALASPINA (2017)

ENFOQUE DE CREACIÓN DE PROBLEMAS ESTRATEGIA OAR (Problema Original, Problema Auxiliar, Problema Retrospectivo)

ANEXO C

Presentación de diapositivas en PowerPoint “El cumpleaños de Rosita”





Solución experta del problema auxiliar

Cantidad de pack = 5

Cajas x pack = 3

Besos de moza x caja = 9

Total, de Total de besos de moza = $5\ x\ 3\ x\ 9 = 5\ x\ 3^3$

Número de invitados a quienes se repartirá los besos de moza = 2

Para dar solución al problema tenemos que evaluar si $5\ x\ 3^3$ es divisible entre 2

$$\frac{5\ x\ 3^3}{2}$$

Evidentemente que no porque $5\ x\ 3^3$ no contiene al factor 2

Solución experta del problema original

Dicho esto, para dar solución al problema planteado en el episodio hay que evaluar si el total de besos de moza $\mathbf{5\ x\ 3\ x\ 9 = 5\ x\ 3^3}$ es múltiplo de 18;

Una forma sería expresar el 18 en factores primos es decir $\mathbf{2\ x\ 3^2}$

luego, evaluar si $\mathbf{5\ x\ 3^3}$ es divisible entre $\mathbf{2\ x\ 3^2}$

$$\frac{\mathbf{5\ x\ 3^3}}{\mathbf{2\ x\ 3^2}}$$

Evidentemente no, porque no contiene al factor 2

Descripción de un posible problema Retrospectivo

Enunciado

La señora María, con el propósito de celebrar el cumpleaños de su hija Rosita, compró en el supermercado 4 pack de besos de moza; cada pack contiene 3 cajas y cada caja a su vez contiene 9 unidades. La señora María se pregunta si ¿Entre cuantos posibles invitados se puede repartir la totalidad de besos de moza de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún beso de moza?

Información:

- La señora María mamá de Rosita, compra 4 pack de besos de moza.
- Cada pack contiene 3 cajas
- Cada caja contiene 9 besos de moza.

Se puede apreciar que hay modificaciones en la información, se ha variado la cantidad de pack de besos de moza que compra, de 5 a 4 packs.

Requerimiento:

- ¿Entre cuantos posibles invitados se puede repartir la totalidad de besos de moza de manera equitativa y máxima sin que sobre ni falte ningún beso de moza?

Tal como se puede observar, ha habido una variación significativa en el requerimiento del problema original, en este caso se pregunta entre cuantos posibles invitados se puede repartir el total de besos de moza de tal forma que se cumplan con las condiciones del problema.

Contexto: Extra matemático (No hay variación)

Entorno matemático:

- divisores de un número, acepción de Divisor como relación (D-R), acepción Múltiplo como relación (MR). No hay variación

Solución experta del problema retrospectivo

Tomando en consideración la solución del problema Pre y del Episodio, el total besos de moza tiene que ser múltiplo de todos los posibles invitados

Recordar que todo número es múltiplo de todos sus divisores.

Entonces hay que calcular los divisores del total de besos de moza.

Cantidad de pack = 4

Cajas x pack = 3

Besos de moza x caja = 9

Total, de Total de besos de moza = 4 x 3 x 9

= $2^2 \ x\ 3^3$

Recordemos el método tabular para determinar todos los divisores

	3^0	3^1	3^2	3^3
	1	3	9	27
2^1	2	6	18	54
2^2	4	12	36	108

La cantidad de besos de moza se podrían repartir entre

{1;2;3;4;6;9;12;18;27;36;54;108}

invitados es decir 12 posibles cantidades de invitados.

ANEXO D

Ficha “Los lotes de terreno”

Problema original: Los lotes de terrenos

El papá de Luis desea comprar un lote de terreno en Los Portales de Ceres, La inmobiliaria a cargo de la venta de los terrenos, tiene varias opciones de venta, sin embargo, todos los lotes son de forma cuadrada o rectangular, además sus dimensiones son números enteros y mayor a 4 metros; si el papá de Luis quiere comprar un terreno de 324 m^2. ¿Cuántas alternativas de compra tiene el papá de Luis?

Nota: considerar que un cuadrado tiene cuatro lados iguales que forman cuatro ángulos rectos y el rectángulo dispone de cuatro lados (dos de una longitud y dos de otra diferente) que forman cuatro ángulos rectos.

Problema Auxiliar

Solución del Problema Auxiliar

Solución del Problema Original

Problema Retrospectivo

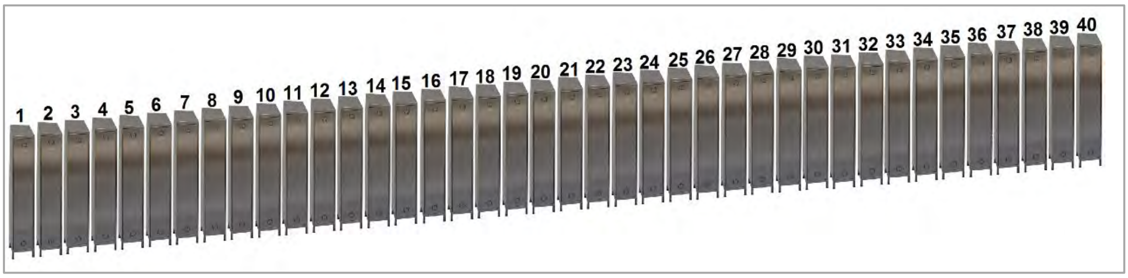
Solución del Problema Retrospectivo

ANEXO E

Ficha “Los armarios”

Problema original: Los armarios

En un pasadizo se tienen dispuestos 40 armarios uno a continuación del otro, en un primer momento pasa una primera persona por cada uno de los armarios y los marca con un sticker con el número 1, posteriormente pasa una segunda persona pero esta vez cada dos armarios empezando en el segundo armario y marcándolos con un sticker con el número 2, seguidamente pasa una tercera persona cada tres armarios empezando en tercer armario, y marcándolos con un sticker con el número 3 , luego pasa una cuarta persona cada cuatro armarios empezando en el cuarto armario y marcándolos con un sticker con el número 4, y así sucesivamente hasta pasar 40 personas.¿De todos los armarios que llevan la marca de la persona Nº 5, cuantos no llevan la marca de la persona Nº 2?



Problema Auxiliar

Solución del Problema Auxiliar

Solución Problema Original

Problema Retrospectivo

Solución del Problema Retrospectivo