PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA ASOCIADO AL CONCEPTO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL EN UN PUNTO PARA UNA INSTITUCIÓN DE NIVEL SUPERIOR

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

AUTORA

Emily Lizbeth De la Cruz Sánchez

ASESOR

Francisco Javier Ugarte Guerra

Julio, 2019

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, Francisco Ugarte, por su gran aporte con cada una de sus revisiones y su gran paciencia para colaborar conmigo en este proyecto.

A todos los profesores de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas por todo el conocimiento que compartieron conmigo, en especial, a las profesoras Jesús Flores, Cecilia Gaita y Carolina Reaño por el entusiasmo mostrado en cada una de sus clases y por la motivación que incentivaron en mí el desarrollo de este proyecto.

A mis dos madres, Rosa Sánchez y Elena Neyra, que constantemente me motivaron a continuar en este proyecto y que me enseñaron a siempre mostrar una actitud positiva y luchadora.

A mi hermano, Marco De la Cruz, que siempre fue un ejemplo de superación y motivación ante el estudio.

A mi gran amigo, Manuel Malquichagua, por su valioso apoyo y acompañamiento en todo el proceso.

A Jorge Luis Yi que estuvo a mi lado en cada una de las sesiones de trabajo de esta tesis, por su paciencia y su afecto.

RESUMEN

Esta investigación, se desarrolla en el marco teórico de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) y tiene por objetivo construir un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) asociado al límite de una función real en un punto. Esta tesis surge por el interés de explicitar y analizar las organizaciones matemáticas que se encuentran asociadas al límite en una institución educativa universitaria. El MER propuesto ha sido desarrollado fundamentalmente a través de la modelización matemática. Para la construcción del MER, se realizó un análisis epistemológico del concepto, una revisión sobre la forma de presentar el concepto en libros de Cálculo y un análisis praxeológico del texto seleccionado; adicionalmente, se han considerado aportes de otras investigaciones que complementaron la construcción del MER.

Palabras clave: modelo epistemológico de referencia, modelización matemática, límite de una función en un punto.

ABSTRACT

This research is developed in the theoretical framework of the Anthropological Theory of the Didactic (TAD) and aims to build a Reference Epistemological Model (MER) associated with the limit of a real function at a point. This thesis arises from the interest of explaining and analyzing the mathematical organizations that are associated with the limit in a university educational institution. The proposed MER has been developed primarily through mathematical modeling. For the construction of the MER an epistemological analysis of the concept was carried out, a review on the way of presenting the concept in books of Calculus and a praxeological analysis of the selected text; additionally, contributions from other research have complemented the construction criteria of the MER.

Key words: epistemological reference model, mathematical modeling, limit of a function at a point

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS/CUADROS

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en Didáctica de las matemáticas relacionadas con el límite de una función real en un punto evidencian algunas de las dificultades que presentan los alumnos y profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto, las mismas que están presentes en la institución educativa universitaria en estudio. Partimos del supuesto de que las dificultades pueden estar asociadas a la desarticulación de los conocimientos relacionados al límite de una función, así como a los conocimientos previos. Es por ello, que esta investigación se propone la construcción de un modelo que articule esos conocimientos, asociados al concepto de límite, para la institución en estudio. Se selecciona como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ya que nos ofrece las herramientas necesarias para describir una actividad matemática a través de praxeologías, permite construir las organizaciones matemáticas (OM) asociadas al límite mediante el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) y la modelización matemática y con ello posibilita su análisis y eventual articulación.

La tesis está conformada por cuatro capítulos:

En el primer capítulo, se presentan investigaciones de referencia en torno al concepto del límite que evidencian una parte de la problemática en torno a él. En cada investigación de referencia, se muestran los aspectos relevantes y las conclusiones obtenidas en relación a su contribución para el desarrollo de esta tesis. Adicionalmente, se presenta un estudio del artículo de Trigueros, Bosch y Gascón (2011) donde se evidencia de qué manera se pueden articular la Descomposición Genética (DG) de la teoría APOE y el MER de la TAD. Finalmente, se presentan la justificación de esta investigación, la pregunta de investigación y los objetivos de delimitaron el trabajo realizado.

El segundo capítulo contiene el marco teórico de esta investigación (TAD), así como la descripción de los elementos utilizados. Sobre la base del artículo de Trigueros, Bosch y Gascón (2011), se considerarán también algunos elementos de la teoría APOE que servirán para enriquecer los criterios de construcción del

MER planteado. Finalmente, se presenta la metodología utilizada en esta investigación.

En el tercer capítulo, se pretende mostrar las transformaciones que ha sufrido el concepto del límite (relacionada a la transposición didáctica del concepto). Por ello, se presentan los resultados del análisis epistemológico del límite; así como también la forma de presentar este concepto en los libros de texto seleccionados, adicionalmente, se presenta el alcance del concepto en la institución en estudio a través de la revisión de algunos documentos institucionales, y, finalmente, se selecciona el texto guía relacionado a este concepto y se reconstruyen las organizaciones matemáticas encontradas.

En el cuarto capítulo, se presenta, en primer lugar, la construcción de una descomposición genética (DG) preliminar para este concepto y los aportes de esta como criterios que complementan la construcción de un MER; y, en segundo lugar, se muestra la construcción de un MER, como una sucesión de praxeologías cada vez más amplias, asociado al concepto del límite de una función real en un punto para la institución en estudio.

En el último capítulo, se presentan algunas consideraciones finales y conclusiones respecto a esta investigación, así como también algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

A continuación, presentaremos investigaciones de referencia para el trabajo de investigación que se realiza. Estas investigaciones han sido agrupadas en tres grupos: el primero contiene investigaciones cuyo objeto de estudio es el concepto del límite, el segundo presenta investigaciones que muestran el proceso de construcción de un modelo epistemológico de referencia (en adelante, MER) y, el tercero muestra investigaciones relacionadas a las concepciones históricas del límite de una función.

Sobre las investigaciones que tienen como objeto de estudio el concepto de límite, destacamos en principio que todos los autores concuerdan con la idea de que el límite es el concepto fundamental para los cursos de cálculo y en particular para los conceptos de derivada e integral. El enfoque en cada una de estas investigaciones, así como la metodología y el marco teórico son muy diversos. Las investigaciones que mostraremos a continuación han sido organizadas de acuerdo al marco teórico de cada una. En primer lugar, mostramos las investigaciones que analizan las concepciones de los alumnos sobre el límite de una función desde la perspectiva de imagen conceptual y definición conceptual de Tall y Vinner. En segundo lugar, presentamos las investigaciones que muestran la manera cómo un alumno construye el concepto del límite desde la perspectiva de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE). En tercer lugar, mostramos investigaciones que evidencian las praxeologías en torno al concepto del límite desarrolladas en el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Por otro lado, sobre las investigaciones que tienen como objetivo la construcción de un MER, son desarrolladas en el marco teórico de la TAD y son construidas para los conceptos de límite y derivada de una función. Para una de las investigaciones, mostraremos un resumen enfocándonos en el proceso para la construcción del MER. Finalmente, presentamos algunas investigaciones adicionales sobre el concepto del límite desde diversas perspectivas y que ayudarán a complementar este análisis preliminar sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto del límite de una función.

1.1 Investigaciones de referencia sobre límites

1.1.1 Investigaciones asociadas a la Imagen Conceptual y Definición conceptual

En primer lugar, Tall y Vinner (1981) presentan en su artículo la noción de imagen conceptual y lo definen como toda la estructura mental que está relacionada a un concepto, esto incluye imágenes mentales, propiedades y procesos. La imagen conceptual le pertenece a cada individuo (es propia de cada uno) y va evolucionando según los diversos estímulos que este tiene. Luego, cada estímulo puede activar una parte de esta imagen conceptual y desactivar otra, a la parte evocada se le denomina imagen conceptual evocada. Además, definen la definición conceptual como la forma personal de un individuo de definir un concepto específico, que puede ser elaborado por él mismo o puede ser dado a él. Aquí introducen la idea de que la imagen conceptual de un individuo comúnmente difiere de la definición conceptual. Finalmente, los autores plantean que partes de la imagen conceptual o de la definición conceptual pueden traer conflictos con otras partes de estos. A estos se les llama factores de conflicto potencial que se convierten en factores de conflicto cognitivo cuando son evocados. Y aquellos factores de conflicto potencial que tienen conflicto con la definición formal del concepto son los que pueden ocasionar un impedimento en el aprendizaje.

Luego, los autores analizan estos conceptos para el caso del límite de una función en un punto. En la investigación, se trabaja con un grupo de 70 alumnos que ya habían recibido la clase de límites, donde primero se les brindó una definición informal del límite y luego se formalizó el concepto. La definición informal se refiere a la forma usual de considerar el límite como un proceso dinámico: cuando x se acerca a a, la función $f(x)$ se acerca a c. La definición formal se relaciona con la visión estática del límite y se presenta del siguiente modo: $\forall\ h > 0, \exists\ k\ tal\ que\ |x - a| < k \rightarrow |f(x) - c| < h$.

Se les pidió a los alumnos que escribieran su definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ y que explicaran qué significaba para ellos que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$. En la primera pregunta, se obtuvo que, de los 49 que contestaron, 27 dieron la definición dinámica correcta y 4 dieron la definición formal correcta. Además, 21 no pudieron dar una definición del concepto y, sin embargo, sí pudieron contestar la segunda. En la segunda pregunta, se obtuvo que 54 alumnos usaron la definición dinámica del límite y usaron términos como “se acerca a”, “tiende a” y “se aproxima a”.

Luego, realizan un cuestionario de preguntas de verdadero y falso para alumnos de cursos más avanzados, donde se les pide analizar si la siguiente proposición es verdadera: $Si\ se\ cumple\ que\ cuando\ x \to a, f(x) \to b\ y\ cuando\ x \to b, g(x) \to c,\ se\ debe\ cumplir\ que\ cuando\ x \to a, entonces\ g(f(x)) \to c.$ Muchos de los alumnos evidenciaron usar la imagen conceptual en lugar de la definición conceptual para responder. Finalmente, Tall y Vinner (1981) concluyen que los estudiantes tienen grandes dificultades con la definición formal del límite y afirman que los alumnos se pueden encontrar en una situación en la que la imagen conceptual es muy fuerte en ellos, mientras que la definición conceptual es muy débil.

De esta investigación, consideramos importante destacar la evidencia de la fuerte presencia de la concepción dinámica del límite sobre la débil presencia de la concepción estática, así como la evidencia de la dificultad de que los alumnos formen una definición del límite.

En segundo lugar, en su artículo, Sierra, González y López (2000), describen las concepciones de alumnos de Bachillerato sobre los conceptos de límites y de continuidad de funciones desde las perspectivas de la imagen conceptual y la definición conceptual (Tall y Vinner, 1981). A continuación, presentaremos un resumen del artículo en lo que se refiere a las concepciones de límite de una función.

En primer lugar, los autores definen las concepciones de los alumnos como una gran estructura mental que contiene todas las ideas relacionadas con el concepto, tales como creencias, conceptos, definiciones, propiedades, reglas e imágenes mentales. Además, los autores plantean la idea de que el estudio de la evolución histórica de un concepto es importante porque permite relacionar las concepciones históricas del concepto con las dificultades de los alumnos. Por ello, en el artículo se presenta la relación de las concepciones de los alumnos con las del matemático que representó la época en donde se desarrolló esa concepción.

En la investigación, se tomó un cuestionario a un grupo de 145 alumnos que participaron en sesiones de clases en donde se abordó la noción de límite. Para cada pregunta correctamente contestada, se analizaron las justificaciones brindadas por los alumnos que evidencian la concepción de cada uno sobre el límite de una función. Este cuestionario contaba con 9 preguntas sobre límites de funciones en todas sus posibles representaciones: tabla de valores, gráfica de funciones, expresiones algebraicas, una pregunta donde se pide calcular el límite en un contexto geométrico (cálculo del límite del área de un triángulo) y una pregunta donde se les pide explicar la noción del límite de una función. En estas preguntas, se han considerado casos de funciones con límites finitos, límites infinitos, sin límites, límites laterales iguales y no coincidentes, y un caso de indeterminación. Los resultados de esta investigación muestran 10 criterios de justificación para la existencia o no existencia del límite de una función: L1: Aproximación, L2: El valor de la función en el punto, L3: Uso de los límites laterales, L4: La continuidad de la función, L5: Uso de la fórmula de la derivada, L6: Uso de funciones conocidas, L7: Uso de función seccionada, L8: Noción de indeterminación, L9: Visual, L10: Definición formal del límite. Además, se han considerado las siguientes opciones adicionales: L11: Otras, L12: Respuesta sin justificación, L13: Ausencia de respuesta. A continuación, se muestra la cantidad de veces que se presentó alguno de estos criterios en las justificaciones de los alumnos (un alumno puede haber presentado más de un criterio en una misma pregunta), además, se muestra su relación con alguna concepción histórica del límite de una función.

Tabla 1: Relación de los criterios con las concepciones históricas del límite

Criterio	**Concepción**	**Descripción**	**Frecuencia de uso del criterio**
L1	D'Alembert y Cauchy	Relacionada con la idea de "aproximarse" aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable	212
L2	Euler y Lagrange	Centrada exclusivamente en los aspectos relacionales de la función, sin tener en cuenta los entornos	89
L3	Conocimiento escolar	Concepto de límite lateral	315

L4	Continuidad	Contaminación del concepto del límite por el de continuidad	58
L5	Conocimiento escolar	Concepto de derivada	11
L6	Conocimiento escolar	Relación con funciones conocidas	73
L7	Euler y conocimiento escolar	Función definida por ramas	16
L8	Conocimiento escolar	Concepto de indeterminación	18
L9	Conocimiento escolar	Concepto de representación gráfica de una función	40
L10	Weierstrass	Definición formal usando ε y δ	47
L11			48
L12			119
L13			253

Fuente: Adaptada de Sierra, González y López (2000, p. 7)

En sus conclusiones, Sierra, González y López (2000) resaltan que los criterios más utilizados son L3, L1 y L2, en ese orden. Además, comentan que la variedad de las respuestas de los alumnos en las justificaciones evidencia la diferencia en las concepciones formadas por cada uno. La forma cómo estas se relacionan con las concepciones históricas del límite nos pone en evidencia la importancia del estudio de la evolución histórica del límite.

En tercer lugar, presentaremos el artículo de Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2015). En este artículo, los objetivos son realizar una descripción de las concepciones de un grupo de alumnos sobre el límite finito en un punto y analizar la coherencia entre las definiciones individuales con los argumentos usados para justificar la existencia del límite de una función en un punto. A continuación, desarrollaremos un resumen del artículo enfocado en el primer objetivo que es el de nuestro interés.

Este estudio se sustenta teóricamente en las nociones de definición y concepción planteadas por los autores y basadas en Tall y Vinner, 1981; así como también, se basan en los sistemas de representación matemáticos y los procedimientos para identificar las concepciones de los alumnos. Los autores diferencian las concepciones de las definiciones. Entienden la definición de un concepto matemático como un conjunto de propiedades que siguen una lógica, esto les da el carácter de ser consistentes, formales y rigurosas. A la manera como un alumno define las propiedades del concepto se le denomina definición individual. Por otro lado, entienden las concepciones, que son propias de cada individuo, desde dos perspectivas: en primer lugar, definen la concepción como la forma de cada estudiante de describir el concepto y, en segundo lugar, la definen como la interpretación del investigador a partir de las respuestas del estudiante a ciertos estímulos. Además, los autores plantean que existen ciertas características asociadas al concepto del límite que no forman parte de la definición pero que están presentes en las concepciones de los alumnos como, por ejemplo, la no rebasabilidad del límite (este término es usado por los autores para representar la idea del límite como el término usado en el lenguaje común, es decir, es el valor que no debe ser superado), el valor de la función evaluado en un punto o la alcanzabilidad del límite (este término es usado por los autores para representar la idea de que el límite es el valor de la función en el punto).

Para interpretar las concepciones de los estudiantes, se analizan las concepciones elementales que son las respuestas a estímulos específicos. Y para identificar las concepciones de los alumnos, los autores proponen dos tipos de tareas: sintético/definidor, donde se recopila información general sobre el conocimiento del estudiante del concepto (definiciones individuales o concepciones sintéticas) y, analítico/diagnóstico, donde se recopila información específica sobre alguna característica del concepto (concepciones elementales analíticas).

Finalmente, Fernández-Plaza et al. (2015) definen y relacionan la definición, y las concepciones elementales analíticas con la imagen conceptual y la definición conceptual (Tall y Vinner, 1981) y proponen que el estadio intermedio entre ellos es la concepción sintética o definiciones individuales.

En esta investigación, se utilizan dos sistemas de representación para el concepto del límite: gráfico y verbal. Se les pide a 36 estudiantes de Bachillerato responder dos preguntas: en la primera (sintético/definidor), se les pide elaborar una definición personal del límite finito de una función en un punto y, en la segunda (analítico/diagnóstico), se les pide analizar si el límite existe en un punto dado para el caso de tres gráficas de funciones (una continua, otra con discontinuidad removible y otra donde el límite no existe).

Para el caso de la tarea sintético/definidor, se presentó la siguiente pregunta a los alumnos: “Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite finito de una función en un punto” (Fernández-Plaza et al, 2015, p.8). Para el caso de la tarea analítico/diagnóstico, se presentó la siguiente pregunta a los alumnos (aunque se analizó solo el caso de G2):

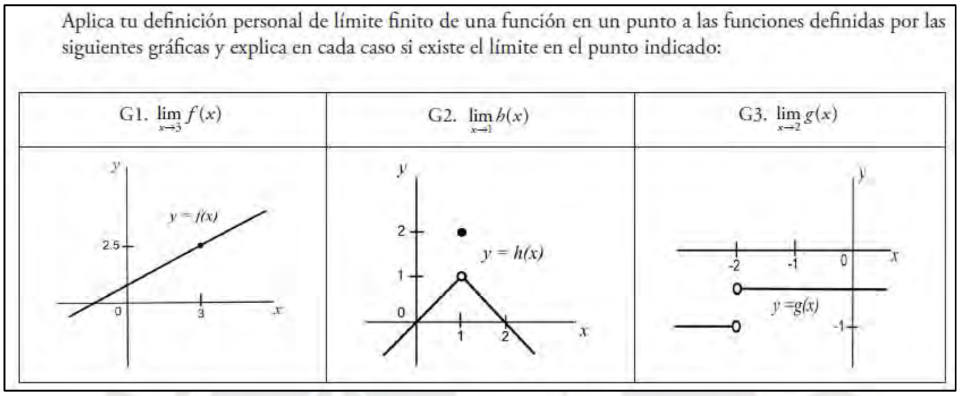


Figura 1: Tareas del tipo sintético/definidor
Fuente: Fernández-Plaza et al. (2015, p.8)

A partir del análisis de las respuestas de los alumnos y de sus justificaciones de la segunda tarea, Fernández-Plaza et al. (2015) identificaron siete categorías de argumentos o concepciones elementales sobre la existencia o no existencia del límite de una función en un punto:

- Análisis y comparación de los límites laterales: deciden si existe un límite a partir de la igualdad o desigualdad de los límites laterales.
- Por continuidad visual/alcanzabilidad: identifican que existe el límite cuando se trata de una función continua o de discontinuidad removible (es decir, el límite es alcanzable).
- Confusión en el rol de variables en el límite: consideran que el límite corresponde al valor de la variable x.
- Rebasabilidad del candidato a límite: buscan una cota de la función en torno al punto, pero no se considera dicho punto, la cota es el valor del límite.

- No alcanzabilidad del posible valor del límite: los argumentos son los opuestos al de continuidad visual; es decir, existe el límite si hay discontinuidad en ese punto.
- Necesidad de definición: consideran que es necesaria la definición de la función en ese punto para analizar la existencia del límite.
- Confusión en la interpretación de las aproximaciones laterales: identifican tender por la izquierda y por la derecha a los casos de $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$, respectivamente.

Estas tres investigaciones nos muestran las concepciones de los alumnos sobre el concepto del límite y las posibles dificultades que están asociadas a algunas de ellas.

1.1.2 Investigaciones desde la perspectiva de la teoría APOE

La Teoría Acción, proceso, objeto y esquema (APOE), desarrollada por Dubinsky (1996), tiene sus orígenes en la teoría cognitiva de la construcción del conocimiento de Piaget. Esta teoría estudia la forma en que un alumno construye un objeto matemático. Esta forma es representada por un modelo (llamado descomposición genética, DG) que explicita los mecanismos cognitivos que un alumno debe formar para construir el objeto matemático. La DG no es única y está sujeta a posibles cambios a partir de los resultados de la experimentación (mediante una secuencia de actividades propuesta que permitan al alumno realizar los mecanismos). A continuación, revisaremos algunas investigaciones sobre el concepto del límite desde la perspectiva de esta teoría.

En primer lugar, en el artículo de Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic (1996), se propone una DG para el concepto del límite.

En el artículo, se parte de la siguiente premisa: El conocimiento matemático está compuesto por acciones, procesos, objetos y esquemas. Las acciones son definidas como las transformaciones que se aplican a un objeto con el objetivo de obtener otro, estas acciones son respuestas de un estímulo. Cuando el individuo controla las transformaciones, estas acciones se convierten en procesos. Se entiende controlar como la habilidad de explicar y describir la acción sin necesidad de aplicarla. Se define objeto como el constructo que se obtiene al encapsular un proceso y se entiende esta encapsulación como el total entendimiento del proceso (toma el proceso como un todo y es capaz de construir esas transformaciones). Además, se realza la importancia de que el individuo debe ser capaz de invertir y obtener el proceso del que se obtuvo el objeto. Finalmente, el esquema es la colección de acciones, procesos y objetos con relaciones coherentes entre ellos.

Además, los autores definen la DG como una forma de describir cómo un individuo comprende el concepto del límite. Esta DG permite desarrollar una propuesta de cómo debe ser enseñado este concepto. Luego de la aplicación y del análisis de los datos, se realiza una revisión y ajuste de la DG. Es decir, la DG inicialmente planteada sirve para analizar los datos y estos últimos sirven para reajustar esta descomposición.

Finalmente, se menciona que varios autores coinciden en la idea de que la concepción dinámica de límite ($\lim_{x\to a} f(x) = L$: $f(x)$ se acerca a L, cuando x se acerca a a) es fácilmente desarrollable por el estudiante (y es entendida como un proceso) y que la dificultad se encuentra en el paso a la definición formal del límite (definición $\varepsilon - \delta$). Sin embargo, los autores plantean la hipótesis de que la concepción dinámica del límite de una función no es un simple proceso, sino que es un esquema. Además, plantean la idea de que construir este esquema debe ser el primer paso en la enseñanza del límite. Y que el no construir de manera completa este esquema puede producir dificultades más adelante con el concepto del límite. Según Cotrill et al. (1996), la definición informal del límite ($\lim_{x\to a} f(x) = L\ interpretada\ como\ f(x) \to L\ cuando\ x \to a$) consta de dos procesos (dos aproximaciones) que constituyen un esquema, el cual permite obtener el proceso definido como $0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$. El siguiente paso es el encapsular este proceso en un objeto y aplicarle dos esquemas que implican cuantificadores ($Para\ todo\ \varepsilon, existe\ un\ \delta\ tal\ que$ …).

Luego, los autores presentan inicialmente la siguiente descomposición genética del concepto del límite de una función en un punto ($\lim_{x\to a} f(x) = L$):

1) La acción de obtener el valor de la función $f(x)$ en puntos que se van acercando al valor de a.
2) Interiorización de la acción previa como un proceso donde $f(x)$ se acerca a L, cuando x se acerca a a

3) Encapsulación del proceso del paso 2: cuando se aplican las propiedades de límites y así los límites son vistos como objetos a los que podemos transformarlos con procesos
4) Reconstrucción del proceso del paso 2: uso de los intervalos y desigualdades para calcular qué tanto se pueden aproximar: $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$
5) Aplicar una cuantificación para el paso 4, es decir, mostrar que para cada valor de ε, siempre existe un δ que cumpla las desigualdades, de manera que se permita obtener la definición formal del límite (definición $\varepsilon - \delta$)
6) Aplicar la definición $\varepsilon - \delta$ del límite a otras situaciones

Luego de esta descomposición genética preliminar, los autores plantean una secuencia de actividades que trabaja con cinco actividades (algunas de ellas computacionales pues según los autores esto facilita las construcciones previstas en la DG, las otras serán en clase para que reflejen en lápiz y papel lo que aplicaron en las computacionales y otras serán ejercicios con los que el alumno refuerza lo aprendido en las anteriores): la primera buscaba que los alumnos escribieran un código para investigar la tasa promedio de cambio de un cuerpo en caída en un pequeño intervalo de tiempo (y averiguar qué sucedía cuando este disminuía); en la segunda, se les pedía estimar el valor de la pendiente de la tangente de la curva de una función definida por tramos (usando un programa, podían graficar la función y medir la pendiente de una secante en el punto, luego usando un programa algebraico, podían obtener las relaciones entre las variaciones de x y de $f(x)$); en la tercera actividad, se les brindaba un código a los alumnos para que obtuvieran el valor de la función en un punto y se les pedía estimar el valor del límite en un punto (aquí se buscaba que el alumno hubiera interiorizado la idea de aproximación); en la cuarta actividad, se les daba a los alumnos un programa que evaluaba la función para puntos cercanos al del límite (tanto a la izquierda como a la derecha) y se les pedía a los alumnos estimar el valor del límite. En la última actividad, se les pedía ajustar la escala de una ventana de manera que el gráfico de una función no desaparezca y así puedan coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango.

Finalmente, luego de aplicar y analizar los datos resultantes, Cotrill et al. (1996) realizan dos reajustes a la descomposición genética: se incluye un paso previo al 1 donde se evalúa la función en un punto cercano a a o en el mismo punto a y en el paso 3 se desarrolla en otros tres pasos adicionales: Interiorización de la acción del paso 2 (el proceso donde x se acerca a a), construcción del proceso donde y se acerca al valor de L, coordinación de los dos pasos previos a través de f. Esto último se interpreta como que f es aplicada al proceso donde x se acerca a a para obtener el proceso del acercamiento de $f(x)$ a L.

Como conclusiones importantes, Cotrill et al. (1996) sugieren que la secuencia de actividades computacionales propuesta puede servir como un modelo con el que los alumnos pueden aprender y entender el concepto del límite; sin embargo, también sugieren que este diseño se reajuste a partir de los resultados obtenidos en la experimentación. Además, concluye que la definición dinámica del límite implica más que solo la definición de un proceso. Y plantea que la definición formal del límite es un esquema más complejo que incluye esquemas de concepciones dinámicas del límite, además las dificultades para construir la concepción formal del límite están relacionadas al insuficiente desarrollo de la concepción dinámica.

Con estos resultados, resaltamos el trabajo de la definición dinámica del límite que debe ser entendida como un esquema, es decir como una agrupación de acciones, procesos y objetos y no ser considerada simplemente como un proceso.

En segundo lugar, la tesis doctoral de Pons (2014) tiene por objetivo profundizar en la comprensión que los alumnos tienen sobre el concepto del límite de una función. Por ello, en su investigación acerca del límite de una función en un punto, se propone como objetivo principal caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de manera que se evidencie cómo se logra pasar de un nivel a otro; además, también se propone como objetivo evidenciar la influencia de las representaciones de una función en la comprensión de las concepciones del límite (para lograrlo, propone realizar un análisis implicativo).

El autor plantea que el aprendizaje del concepto del límite implica que el estudiante pueda pasar del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado, que define como un nivel en donde el alumno es capaz de describir, definir, probar mediante construcciones lógicas sobre la base de las definiciones. Por ello, afirma que el concepto del límite no debe ser presentado con su definición formal (definición de Weierstrass), sino que se debe trabajar con una serie de ejercicios de manera que el alumno pueda lograr hacer su propia abstracción del concepto.

En la investigación, se plantea que el concepto del límite debe ser visto como un todo cuyas partes son esenciales y se conectan entre ellas. Pons (2014) afirma "… un análisis matemático del concepto de límite requiere de las ideas de: función, entorno, cuantificadores, desigualdades" (p. 77). Por ello, estos conceptos deben formarse antes de conceptualizar el concepto del límite.

Para el desarrollo de su investigación, Pons (2014) toma como marco teórico a la teoría APOE ya que está basada en la idea de que el pensamiento matemático avanzado se forma desarrollando la noción de abstracción reflexiva. El autor afirma que "La abstracción reflexiva es (…) la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre esos objetos." (Pons, 2014, p. 87). El conocimiento de los estudiantes se evidencia al invocar un esquema de manera que logre entender, tratar o dar sentido como respuesta ante una situación problemática. Sin embargo, no es posible identificar los esquemas, los procesos u objetos ya que son propias del estudiante. Este esquema del alumno se puede identificar a partir de las observaciones de sus producciones al resolver situaciones problemáticas.

Para el caso del límite, se dice que el alumno tiene la concepción acción cuando solo evalúa una cantidad finita de valores de la función para valores cercanos a un valor fijo de la variable x. Cuando el alumno repite una acción y empieza a reflexionar sobre ella puede interiorizarla como un proceso. Al interiorizar este proceso, el alumno lo percibe como un ente interno, puede describirlo e invertir sus pasos. En el caso del límite, esta concepción se da cuando el alumno realiza un cálculo que evidencia un número infinito de operaciones. El alumno ha encapsulado el proceso en un objeto cuando considera el proceso como una totalidad y es consciente de las operaciones que se aplican a un proceso, realiza transformaciones sobre el proceso y puede construirlas. Para el caso del límite, esta concepción se da cuando el alumno puede calcular el límite de una suma de funciones coordinando los procesos de cada una de las funciones. Finalmente, al estructurar acciones, procesos y objetos se forma un esquema. Esta concepción le permite al alumno identificar qué estructura mental debe usar al tratar de resolver una situación problemática.

Pons (2014) parte de la DG revisada de Cotrill et al. (1996), pero realiza una adaptación del cuarto paso como una coordinación métrica de desigualdades y propone la siguiente DG para el concepto del límite de una función en un punto:

Tabla 2.1. Mecanismos cognitivos que configuran la Descomposición Genética de límite de una función propuesta

- Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$.
- Idea de aproximación
  - x se aproxima al número a.
  - $f(x)$ se aproxima a L.
- Coordinación en la concepción dinámica: cuando x se aproxima al número a, sus imágenes $f(x)$ se aproximan a L.
- Coordinación en la concepción métrica: si se puede encontrar para cada ocasión *un x suficientemente cerca de a* tal que el valor de *f(x) sea tan próximo a L* como se desee.
- Formalización como una manifestación de la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a. $\lim f(x) = L$.

Figura 2: Descomposición genética del límite

Fuente: Pons (2014, p.93)

Para su investigación, el investigador toma como participantes a 129 alumnos de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud (para ellos, las Matemáticas eran cursos obligatorios): 66 de ellos habían recibido la clase de límites dos semanas previas y los otros 63 habían recibido la clase seis meses antes. El investigador tomó como partida un cuestionario de 7 preguntas para proponer a partir de él un cuestionario de 10 preguntas. Este se realizó sobre la base de las conclusiones del artículo original, de la descomposición genética propuesta por el autor y de los resultados de entrevistas preliminares que se desarrolló con un grupo de los alumnos participantes. Acerca de las actividades propuestas, es importante destacar que cada una de ellas tienen objetivos específicos. Por ejemplo, algunas tratan de identificar si un alumno logra calcular el valor de una función en un punto, logra identificar la aproximación de una variable x hacia un punto a, logra la coordinación entre los procesos de aproximación de x y $f(x)$ o si un alumno logra manifestar la existencia del límite.

Luego del análisis de los resultados y de las entrevistas, Pons (2014) presenta en sus resultados las características de los niveles intra, inter y trans para el concepto de límite de una función en un punto que se muestran a continuación:

NIVEL INTRA	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en modo numérico y algunos en los dos modos, numérico y algebraico-numérico y cuando las aproximaciones laterales no coinciden a lo sumo se es capaz de realizar aproximaciones en un modo de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación c) En algunos casos empezar a manifestar formalmente el límite cuando las aproximaciones laterales coinciden

Figura 3: Características del nivel INTRA en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, p.157)

NIVEL INTER	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en los dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden ser capaz de considerar las aproximaciones a lo sumo en dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en uno o dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden la coordinación solo se realiza en un modo de representación c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades

Figura 4: Características del nivel INTER en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, p.166)

NIVEL TRANS	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes en los dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en los tres modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan al menos en dos modos de representación c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades

Figura 5: Características del nivel TRANS en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, p.171)

Además, en los resultados de su investigación también realiza un análisis implicativo (con la ayuda de un software informático), el cual consiste en la identificación de relaciones entre las variables. Es decir, identifica cómo actúan diferentes elementos en la resolución de tareas. En el proceso de construcción del concepto del límite, Pons (2014) analiza cómo influencian los diferentes modos de representación, así como también identifica cómo influye la coincidencia o no de las aproximaciones laterales. Algunos de los resultados del análisis implicativo se muestran a continuación:

1) Sobre la comprensión de la idea de aproximación a un número:

- “La comprensión de la aproximación a un número en el dominio en modo numérico implica ser capaz de calcular el valor de una función en un punto en modo algebraico-numérico” (Pons, 2014, p. 176). Este resultado implica que, para lograr que el alumno identifique la aproximación a un número, necesita realizar la construcción de una secuencia de valores de la función $f(x)$ sobre la base de los valores de x.

- “La comprensión de la aproximación a un número en el rango en modo algebraico-numérico implica ser capaz de identificar la aproximación a un número en el dominio en modo numérico” (Pons, 2014, p. 177). Este resultado está relacionado con la idea de función que relaciona una variable independiente con otra dependiente.

- “La comprensión de la aproximación a un número en modo numérico, …, implica ser capaz de identificar esta misma aproximación en el registro algebraico-numérico. Y la comprensión de la aproximación a un número en el registro algebraico-numérico, …, implica ser capaz de identificar esta misma aproximación en el modo numérico” (Pons, 2014, p. 178,179). Con ello, el autor plantea que las representaciones numérico y algebraico-numérico tienen el mismo rol en la construcción de la idea de aproximación a un número.

- “La comprensión de la aproximación a un número en el rango se inicia en modo algebraico-numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden y se consolida en este mismo modo, y en el numérico cuando las aproximaciones laterales no coinciden” (Pons, 2014, p. 180). Con esto, el autor da a entender que el modo de representación con el que se inicie el proceso de construcción del límite está asociado a si coinciden o no los límites laterales.

- “La comprensión de la aproximación a un número en el dominio no implica necesariamente la comprensión en la aproximación a un número en el rango” (Pons, 2014, p. 180). Esto evidencia la distinción entre los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y cómo una de ellas no implica a la otra.

- “Comprender la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales no coinciden implica ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden” (Pons, 2014, p. 182). Esto se puede interpretar como que, para construir la noción de las aproximaciones laterales, es necesario construir la noción de aproximación cuando las laterales coinciden.

2) Sobre la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango:

- “La comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en modo gráfico, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, y en modo algebraico-numérico, cuando las aproximaciones laterales coinciden, implican ser capaz de establecer dicha coordinación en modo numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden” (Pons, 2014, p. 184).

- “El acceso a la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en rango cuando estas coinciden se inicia en modo gráfico, se progresa en modo numérico, y se consolida en modo algebraico-numérico” (Pons, 2014, p. 185). A partir de estos resultados, el autor sugiere un orden en el que deben aparecer los modos de representación de una función para lograr la coordinación entre las aproximaciones de $f(x)$ y de x.

- “El acceso a la coordinación de las aproximaciones cuando estas no coinciden se inicia indistintamente en modos gráfico y algebraico-numérico, y se consolida en modo numérico” (Pons, 2014, p. 186). En este resultado, se evidencia que, cuando los límites laterales no coinciden, se construye la coordinación de las aproximaciones $(f(x) \to L, x \to a)$ en primer lugar en los modos gráficos y algebraico-numérico para luego desarrollarse en el modo numérico.

- “El nexo de unión entre la coordinación de las aproximaciones no coincidentes y coincidentes se realiza con los modos gráfico y numérico” (Pons, 2014, p. 186). Esto se puede interpretar como que es necesario que el alumno trabaje en las representaciones gráfica y numérica de una función para lograr el paso de la aproximación (cuando los laterales coinciden) hacia la aproximación (cuando los laterales no coinciden).

3) Sobre la coordinación de las aproximaciones y la comprensión de la coordinación métrica en términos de desigualdades:

- “Cuando las aproximaciones laterales coinciden, la comprensión de la coordinación métrica del límite en términos de desigualdades en modo numérico se apoya en ser capaz de establecer la coordinación de las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en modo algebraico-numérico” (Pons, 2014, p. 188). Esto implica que, para construir la definición formal (métrica) del límite, es necesario primero construir la coordinación entre las aproximaciones $(f(x) \to L, x \to a)$ en la representación algebraica-numérica.

- “La comprensión de la coordinación métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente la compresión de dicha coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden” (Pons, 2014, p. 188). Esto sugiere que la definición métrica de límite inicia con la construcción de la definición dinámica en el caso donde los límites laterales coinciden; sin embargo, esto no se cumple si los límites laterales no coinciden.

1.1.3 Investigaciones desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) fue desarrollada por Chevallard (1999). Esta teoría plantea que cualquier actividad matemática puede ser descrita mediante praxeologías (organización matemática). Esta praxeología está conformada por dos niveles: el nivel praxis, que incluye tipos de tareas y las técnicas para resolverlas, y el nivel del logos, que incluyen las tecnologías que justifican las técnicas usadas y las teorías que justifican estas tecnologías. Además, también se definen las Organizaciones Matemáticas (OM) que están constituidas por uno o varios tipos de tareas que se desarrollan con técnicas matemáticas justificadas por tecnologías y una teoría matemática. Chevallard (1999) distingue cuatro niveles de OM: OM puntuales (OMP), OM locales (OML), OM regionales (OMR) y OM globales (OMG). Las OMP se construyen a partir de un único tipo de tarea que tiene asociada una única técnica, las OML están conformadas por varias OMP articuladas por un único discurso tecnológico común (es decir las técnicas de las OMP que la conforman comparten una misma tecnología para cada una de sus técnicas). Las OMR están formadas por la articulación de varias OML alrededor a una misma teoría.

Además, se definen los géneros de tareas como una clasificación más amplia que agrupa varios tipos de tareas, aquí se definen, por ejemplo, los géneros calcular, demostrar, graficar, construir, etc.

A continuación, revisaremos algunas investigaciones desarrolladas con relación a esta teoría.

En el artículo de Corica y Otero (2009), se presentan las organizaciones matemáticas del límite de una función para una institución educativa de nivel universitario.

Para este estudio, las autoras presentan una investigación descriptiva e interpretativa realizada al curso Análisis Matemático I de una universidad argentina, este curso contaba con 283 estudiantes. La duración del curso es de

4 meses, tiene sesiones de clases teóricas (CT) y clases prácticas (CP), el contenido del curso incluye un capítulo de Límite y Continuidad de Funciones, que es tema de investigación de este artículo. La información obtenida de las autoras consta de las observaciones (donde ellas no intervienen) obtenidas durante 3 meses, audios de las clases teóricas y prácticas, los apuntes de los profesores en la pizarra, los apuntes de los alumnos y las evaluaciones de estos.

Luego, las autoras presentan y analizan la Organización Matemática efectivamente enseñada (OM_{EE}) que fue definida previamente como una etapa de la transposición didáctica (TD), a continuación, se muestra el esquema de la TD que se propone en el artículo. Esta OM_{EE} está compuesta a la vez por varias OMP que son las que consideran a un único tipo de tarea y un único bloque teórico-práctico.

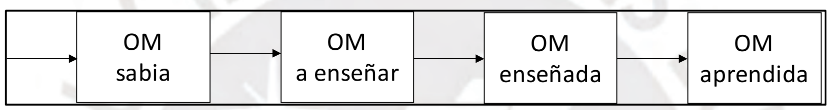


Figura 6: Esquema de la transposición didáctica

Fuente: Adaptado de Corica y Otero (2009, p.7)

En la OM_{EE}, identifican cuatro géneros de tareas: Definir, Demostrar, Calcular y Representar Gráficamente. Para cada una de ellas, las autoras detallan los tipos de tareas y las tareas específicas. Como una de las observaciones importantes, se destaca que el género Calcular presenta la mayor cantidad de tareas (16 en total), mientras que los géneros Demostrar, Definir y Representar gráficamente les corresponden 7, 4 y 1 tarea, respectivamente.

En la siguiente figura, se presentan los principales componentes que constituyen la OM_{EE} del límite de una función:

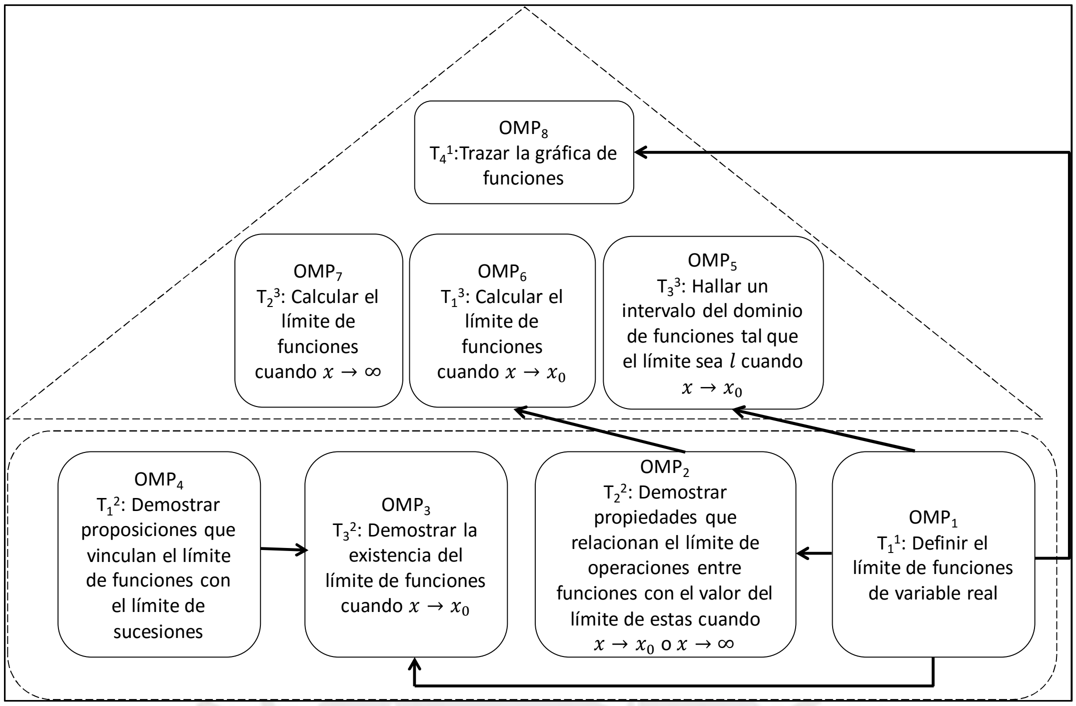


Figura 7: Organización matemática efectivamente enseñada

Fuente: Corica y Otero (2009, p. 16)

T_4^1A partir de esta descripción, Corica y Otero (2009) realizan una descripción detallada de cada OMP y los géneros de tareas que se evidencian en ellas, así como también los tipos de tareas relacionadas. Además, evidencia en su análisis cómo algunas OMP consolidan el bloque tecnológico de otras OMP. Algunas conclusiones se muestran a continuación:

- Las OMP1, OMP2, OMP3 y OMP4 consolidan el bloque tecnológico que justifican las técnicas que sirven para resolver los tipos de tareas que forman parte de las OMP5, OMP6, OMP7 y OMP8.
- La OMP4 consolida el bloque tecnológico que justifica algunas de las técnicas usadas en la resolución de los tipos de tareas de la OMP3.
- La OMP2 consolida la tecnología de algunas de las técnicas usadas en la resolución de los tipos de tareas de la OMP6.
- La OMP1 conforma el bloque tecnológico de la OMP5.
- El bloque tecnológico del tipo de tarea en OMP6 se consolida de manera parcial en la OMP2

- Algunas de las propiedades usadas en la OMP6 aparecen en el material teórico propuesto por los profesores por lo que se usan herramientas incuestionables y utilizables.
- La OMP7 no cuenta con un entorno tecnológico que haya sido consolidado en las anteriores OMP. (Esto está relacionado a la restricción del tiempo al que están supeditados los profesores)
- La OMP1 consolida en entorno tecnológico que justifica las técnicas usadas en la resolución de los tipos de tareas de la OMP8.
- Las OMP identificadas muestran que tienen el propósito de enseñar cómo se resuelven las tareas. No se muestran tareas que cuestionen el entorno tecnológico. Los tipos de tareas identificados están orientados a realizar operaciones algebraicas con límites (esto evidencia un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo).

En el estudio de los exámenes de los alumnos, identifican los siguientes tipos de tareas:

T_1^3: Calcular el límite de funciones cuando $x \to x_0$ ó T_2^3: Calcular el límite de funciones cuando $x \to \infty$

T_3^3: Hallar un intervalo del dominio de funciones tal que el límite sea l cuando x tiende a un valor real finito

T_1^2: Demostrar proposiciones que vinculan el límite de funciones con el límite de sucesiones

Figura 8: Tipos de tareas identificados a partir de las evaluaciones

Fuente: Corica y Otero (2009, p.20)

Y a partir de ellos, realizan la siguiente tabla que muestra las tareas de las evaluaciones:

		Calcular		Demostrar
		T_1^3 o T_2^3	T_3^3	T_1^2
Primer examen parcial por módulo	Tema 1	Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-1}=$	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{1}{2}$	Sea f una función de $\Re$ en $\Re$, $f:\Re\to\Re$ sea x_0 un punto en $\Re$, demostrar que si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, entonces para toda sucesión x_n $(x_n\neq x_o)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ vale que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
	Tema 2	Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{6-x}}{3-\sqrt{7+x}}=$	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x}=1$	
	Tema 3	Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{tg\ 3x\ .\cos(2x-1)}{sen(-6x)}=$	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1} 2x^2+3x-1=4$	
	Tema 4	Calcular $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=$	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2} 2x^2-5x+6=4$	
Primer examen de compensación por módulo		Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}=$	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x}{x-1}=2$	
Primer examen de compensación por parcial			Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x}=\frac{1}{3}$.	

Figura 9: Tareas identificadas en las evaluaciones

Fuente: Corica y Otero (2009, p.21)

A partir de estos resultados y de las soluciones de los alumnos en las evaluaciones, Corica y Otero (2009) notan que los estudiantes no realizan de manera correcta la demostración de la definición formal del límite. Además, evidencian que las actividades de las CP se enfocan en las tareas relativas al género Calcular, lo que da una visión algebraica del límite. Finalmente, también resaltan que las CT muestran el concepto del límite como un conocimiento terminado ya que las clases de los profesores con claramente expositivas (sin participación de los estudiantes) y no permiten que el estudiante desarrolle su definición, esto ocasiona una desconexión entre el bloque práctico y el bloque teórico del conocimiento.

Esta investigación resulta de mucha utilidad ya que nos brinda una visión del trabajo del concepto en estudio (límite) según el marco teórico de la TAD. Es decir, nos muestra una forma de identificar las organizaciones matemáticas (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías). Además, muestran cómo se articulan estas, es decir, sirve de referencia para identificar cómo algunas OM consolidan el entorno tecnológico de otras.

Por otro lado, la investigación de Hardy (2009) presenta un análisis de una investigación sobre cómo influencian las prácticas institucionales en el conocimiento que los alumnos creen que deben formar.

El estudio se realizó a un grupo de alumnos de 17 o 18 años que habían llevado el curso de cálculo. Se trabajó con el concepto del límite que ellos habían formado a partir de las clases, libros de texto, ejercicios y evaluaciones. En el artículo, la autora se centra en el análisis de las preguntas que se tomaron en los exámenes finales de los últimos seis años para un curso de cálculo y en los procedimientos que se esperaban que los alumnos hicieran. A partir de esto, la investigadora define modelos de lo que los alumnos conciben como el conocimiento que debían aprender y modelos de lo que los profesores del curso conciben el conocimiento que los alumnos debían formar.

En primer lugar, para describir el conocimiento desde la perspectiva de los profesores, la autora identifica tres tareas del cálculo de límites de funciones propuestas en exámenes finales: $\lim\limits_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}$; $\lim\limits_{x\to c}\frac{\sqrt{P(x)}-Q(x)}{R(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$. Para cada tarea, presenta las soluciones que los profesores esperan de los alumnos, las técnicas que se usan en los libros de texto, así como también, presenta la tecnología y la teoría que fundamenta cada una de las técnicas presentadas. La justificación de que estas tareas sean las más representativas de los exámenes solo responde a la tradición (los profesores comparten la idea de que esas tareas representan el mínimo conocimiento que debe tener un alumno sobre el límite de una función).

A partir de la descripción de la praxeología de las tareas, la autora diferencia entre el conocimiento a ser aprendido, presentes en las soluciones de los profesores y en las técnicas, y el conocimiento a ser enseñado, que se muestra en las tecnologías. El conocimiento a ser enseñado, según la perspectiva del profesor, está orientado al bloque práctico, es decir al cálculo de límites, esto se da debido a una tradición que tienen los profesores sobre el mínimo conocimiento que los alumnos deben tener. Esto ocasiona una falta del componente teórico en las percepciones de los alumnos.

Para el análisis de la perspectiva de los alumnos, Hardy (2009) utiliza cuatro ejercicios para el cálculo de límites que corresponden al tipo de tarea 1 presentada anteriormente: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x}$; $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2-9}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4}{x^2-2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+9}{x^2+2}$. En estos ejercicios, se pide el cálculo de límites de funciones racionales y se presenta la cantidad de alumnos que respondieron correctamente, incorrectamente y los que no respondieron. Además, presenta fragmentos de algunas entrevistas que tuvo con los alumnos después de la prueba.

A partir de las entrevistas, la autora identifica que en los problemas 1, 2 y 3, la mayoría de los alumnos buscaban factorizar y simplificar, otros reemplazaban el valor y luego factorizaban. Con esto, se evidencia el comportamiento típico que los alumnos han desarrollado para problemas de cálculo de límites de funciones racionales, donde siguen una secuencia de técnicas. En el problema 2, los alumnos no tuvieron dificultad en hallar la respuesta siguiendo la secuencia aprendida. Sin embargo, en los problemas 1 y 3, se evidenció el conflicto que ocasionó en los alumnos el no poder simplificar un factor. Finalmente, en el problema 4, la mayoría de los alumnos logró obtener la respuesta correcta sustituyendo el valor. Muchos de estos no habían intentado la sustitución directa en el problema 2 debido a que la factorización de las expresiones los hacía identificar este problema como diferente al problema 4.

A partir de la información obtenida en las entrevistas, la autora identifica dos tipos de problemas de cálculo de límites de expresiones racionales que los alumnos esperan: aquellos donde x tiende a una constante y las expresiones son factorizables, estos normalmente presentan la indeterminación $\frac{0}{0}$ y aquellos donde las expresiones no son factorizables, donde normalmente el valor del límite se obtiene reemplazando la constante o donde la variable tiende al infinito. Esto evidencia una norma matemática-social, cognitiva y didáctica, que se debe a que el bloque tecnológico y teórico de los alumnos están formados sobre la confianza en las prácticas institucionales y en la autoridad del profesor.

Finalmente, la autora concluye que las prácticas institucionales han condicionado a los alumnos y a los profesores. A los alumnos, para que estén acostumbrados a preguntas como las presentadas en los tipos de tareas 1, 2 y 3 (aquí se evidencia cómo se condiciona la forma de afrontar los problemas de los alumnos que no presenta el componente tecnológico-teórico que lo sustente) y, a los profesores, para los tipos de preguntas que deben colocar en las evaluaciones. El pensamiento de los alumnos y de los profesores de lo que debe ser aprendido y enseñado se basan en la tradición y la confianza en los elementos (ejercicios, evaluaciones) que lo respaldan en la institución.

1.2 Investigaciones de referencia sobre MER

En esta sección, se presentarán tres trabajos que muestran la construcción de un MER para los conceptos de derivada y de límite. El MER, que se enmarca en la TAD, es el modelo que muestra la interpretación y explicitación de la actividad matemática (enseñanza y aprendizaje) que acompaña al objeto matemático en estudio. En la TAD, se plantea que construcción del MER es imprescindible para la formulación de un problema didáctico. “Dado que la TAD interpreta la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada, un MER (y la cuestión generatriz que viene a responder) se elabora en relación a una institución” (Fonseca, Gasón, Oliveira, 2014, p. 3). De manera general, el MER se constituye como una red de praxeologías matemáticas que se van complementando o que se van ampliando. Esta red de praxeologías matemáticas se presentan mediante cuestiones y respuestas con estructuras praxeológicas. En los trabajos de construcción de MER, la modelización matemática tiene un rol muy importante. Al respecto, la TAD postula que la actividad matemática se identifica como una actividad de modelización matemática. Los procesos de modelización son considerados como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas cada vez más complejas que tienen su origen en el cuestionamiento de la “razón de ser” de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular. (Parra, Otero y Fanaro, 2009)

En primer lugar, en el trabajo de Fonseca, Gascón y Oliveira (2014), se presenta una parte de un MER construido asociado al concepto de derivada. Y muestran algunas de las cuestiones que podrían evidenciar las sucesivas praxeologías, aunque advierten que, debido a la amplitud de un MER completo, la descripción que realizan no incluye todo el bloque tecnológico-teórico necesario para la explicitación de las organizaciones matemáticas.

Para la construcción del MER, los autores usan la modelización matemática, sobre esta afirman lo siguiente:

- La noción de modelización intramatemática está incluida en la noción de modelización y es considerada como la modelización matemática de sistemas matemáticos.
- Los modelos que se construyen muestran una estructura praxeológica y su función no es la de ser una imagen fiel al sistema modelizado, sino que debe ser una construcción artificial para aportar conocimientos sobre él.

> Se interpreta la modelización matemática como un instrumento capaz de articular y dar funcionalidad a la actividad matemática escolar. La TAD describe los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la “razón de ser” de las citadas organizaciones matemáticas (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p. 7)

Antes de presentar las cuestiones planteadas en el MER, Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) advierten que se sitúan en el momento en que la derivada ya forma parte del equipamiento praxeológico inicial de la comunidad en estudio (este equipamiento es entendido como el conjunto de técnicas y tecnologías con el que ya cuenta la comunidad). En este estudio, los autores mencionan que dentro del equipamiento praxeológico inicial, ya se cuenta con las técnicas de derivación y las técnicas asociadas al estudio de funciones (polinómicas, racionales y exponenciales básicas). Esto implica poder obtener ciertas características de la función como la obtención del dominio de la función, la representación gráfica y sus asíntotas, los signos de la función, los ceros, los intervalos de continuidad, los intervalos de monotonía y los extremos de la función. Además, las cuestiones planteadas en el MER están situadas en el ámbito de las Ciencias de la Salud, específicamente, en el estudio de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo.

En el MER planteado, parten de la siguiente cuestión generatriz (que es intencionalmente muy abierta):

“Q0: Con la finalidad de erradicar una epidemia se inyectó una determinada cantidad de medicamento a una población de individuos infectados. ¿Cómo podemos estudiar la variación de la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo de estos pacientes?” (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p. 10)

Para dar respuesta a la cuestión generatriz se generan las siguientes preguntas que evidencian los tres niveles de la modelización funcional.

1) Primer nivel de modelización funcional: está formada por modelos donde se usan funciones aisladas de una única variable y su ecuación asociada. Estos modelos contienen las técnicas relativas al estudio de la variación de magnitudes, crecimiento, decrecimiento, ritmo de variación, extremos, etc. A continuación, se muestra la cuestión planteada para este nivel de modelización. “Q1 : ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente si suponemos que t horas después de ingerido el medicamento, la concentración (medida en miligramos por litro) viene dada por la función $C(t) = \frac{t}{2t^2+1}$?” (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p. 11). Y se plantean las siguientes preguntas derivadas:

> Q11: ¿Se puede afirmar que la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo aumenta con el tiempo?
>
> Q12: ¿Cómo varía dicha concentración a largo plazo?
>
> Q13: ¿A partir de qué momento se inicia la eliminación progresiva del medicamento del torrente sanguíneo?
>
> Q14: ¿Cuánto tiempo después de la ingestión del medicamento se alcanza la máxima concentración en sangre? ¿De cuántos mg/l es dicha concentración máxima?
>
> Q15: ¿En qué momentos decrece más rápidamente la concentración?
>
> (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p.12)

Además, plantean una posible ampliación a la cuestión Q1 planteada con las siguientes cuestiones:

> Q’1 : ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de dos pacientes, Ana y Carlos, si suponemos que son administradas, por la primera vez, dosis terapéuticas iguales y que, durante las primeras 12 horas después de la toma simultánea del medicamento, las concentraciones, medidas en mg por litro de sangre, vienen dadas respectivamente por: $A(t) = 4t^3e^{-t}$ y $C(t) = 2t^3e^{-0.7t}$? (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p.13)

2) Segundo nivel de modelización funcional: se construye sobre modelos que están conformados por familias de funciones de una variable y sus ecuaciones asociadas. Se plantea ampliar el modelo funcional a partir de la diferencia de la función propuesta en Q1 para diferentes tipos de pacientes. Se caracteriza la concentración del medicamento en la sangre de cada paciente mediante el valor de a. A continuación, se muestra la cuestión planteada para este nivel de modelización.

“Q2 : ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente si suponemos que t horas después de ingerido el medicamento, la concentración (medida en miligramos por litro) viene dada por la función $C_a(t) = \frac{at}{2t^2+1}$, con $a > 0$?” (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p.15). Para esta cuestión, se presentan cuatro preguntas derivadas.

Las técnicas usadas en este segundo nivel de modelización evidencian una ampliación a las usadas en Q1, apoyadas en las transformaciones geométricas elementales y dilataciones.

3) Tercer nivel de modelización funcional: se compone de praxeologías de familias de funciones de más de una variable. En este tercer nivel, el papel de la “variable” y del “parámetro” es intercambiable y se estudia cómo varía una función debido a la variación de dos o más variables. A continuación, se muestra la cuestión planteada para este nivel de modelización.

“Q3: ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente si suponemos que, t horas después de ingerido el medicamento, la concentración (medida en miligramos por litro) viene dada por la función de incremento $C(t) = ate^{-kt}$ donde a y k son constantes positivas?” (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p. 18). Para esta cuestión se presentan dos preguntas derivadas donde se analiza la variación de la función a partir de las variaciones de los parámetros a y k.

Si bien este MER construido no corresponde al concepto del límite de una función, brinda una clara descripción de la forma de construir un MER mediante la modelización funcional. Además, mientras los autores describen las posibles técnicas usadas para la resolución de tareas evidencian la ampliación de la técnica usadas en praxeologías anteriores.

Como segundo artículo, revisaremos el trabajo de Parra, Otero y Fanaro (2009) donde proponen una construcción de una organización matemática (OM) de referencia asociado al concepto del límite y de continuidad para la Economía y la Administración. Las autoras plantean que la OM de referencia sirve como punto de análisis desde la cual se pueden analizar las OM que se proponen, reconstruyen y aprenden sobre el concepto en estudio. Además, consideran que esta OM de referencia se define como aquella praxeología que busca tener el carácter de generalidad y a partir de esta podrían emerger cada una de las OM que pueden estudiarse o reconstruirse. Para cada una de estas praxeologías, las autoras realizan una descripción detallada de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías asociadas.

Parra, Otero y Fanaro (2009) evidencian el sentido de la noción de límite dentro de la propia matemática (a partir de la construcción de números irracionales como límite de sucesiones de números racionales: así se evidencia la necesidad del concepto del límite para la construcción de los números reales), el sentido de la noción de límite dentro del área de la economía y la administración (ya que el concepto de derivada muestra una notoria relevancia para análisis de la variación del punto de equilibrio a partir de la variación de parámetros) y, finalmente, el sentido de la noción de límite para la sociedad (muestra como ejemplo una situación en la que se necesita minimizar los costos de una fábrica o la producción máxima de una máquina).

En esta investigación, Parra, Otero y Fanaro (2009) proponen la construcción del MER a partir de la modelización intramatemática que permitirá identificar las OM asociadas a los conceptos de límite y de continuidad que le dan sentido a las OM asociadas al concepto de derivadas. Este último concepto es crucial para la Economía y Administración (pues se usan las derivadas para analizar las variaciones en funciones que simulan el comportamiento de los mercados, que se desarrolla mediante la modelización extra-matemática). En el siguiente gráfico, se muestran las OM identificadas asociadas al límite.

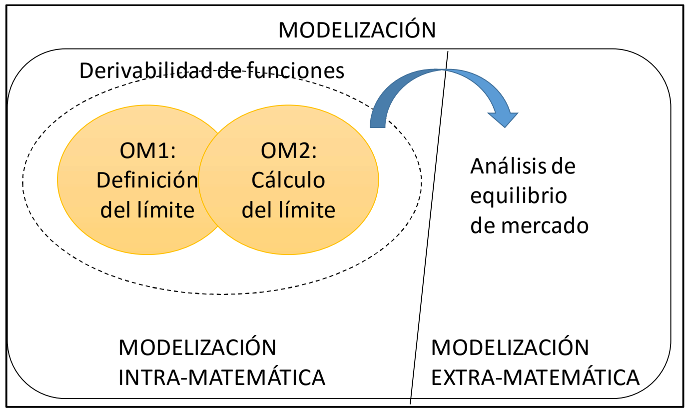


Figura 10: Estructura de la OM de referencia

Fuente: Adaptado de Parra, Otero y Fanaro (2009, p.7)

Así, las autoras plantean las siguientes cuestiones iniciales: "¿Por qué y cómo verificar la existencia o inexistencia del límite de funciones? y ¿Por qué y cómo calcular un límite suponiendo que existe?" (Parra, Otero y Fanaro, 2009, p. 6)

Estas dan origen a dos OML:

> OM1: Esta OM se construye alrededor de la definición usual del límite y continuidad de funciones reales. La cuestión generatriz es la existencia del límite de una determinada función en un cierto conjunto de puntos y/o cuando éste coincide con la función evaluada en dicho conjunto. La tecnología de esta OM local es la definición del límite de funciones
>
> OM2: Esta OM gira en torno al álgebra del límite y su cuestión generatriz es por qué y cómo calcular el límite, habiendo establecido que existe. La tecnología de esta segunda OM es el conjunto de las propiedades del límite de funciones. (Parra, Otero y Fanaro, 2009, p. 6, 7)

Luego, las autoras identifican los siguientes tipos de tareas en cada una de las OML presentadas:

Tabla 2: Tipos de tareas identificadas para cada OML

OML1: en torno a la definición del límite	OML2: en torno al álgebra del límite
$T_{1.1}$: Verificar la existencia o inexistencia del límite finito de una función real f de una variable en un punto.	$T_{2.1}$: Calcular el límite de una función real f de una variable en un punto.
$T_{1.2}$: Verificar la existencia o inexistencia de los límites infinitos y de límites en el infinito de una función real f de una variable.	$T_{2.2}$: Calcular el límite de una función real f de una variable en el infinito.
$T_{1.3}$: Verificar la existencia o inexistencia del límite finito de una función real f de dos variables en un punto del plano o en un subconjunto de puntos.	$T_{2.3}$: Estimar límites de una función real f de una variable en un punto.

$T_{1.4}$: Verificar la continuidad o discontinuidad de una función real $\boldsymbol{f}$ de una variable en un punto o en un subconjunto de puntos.	$T_{2.4}$: Calcular el límite de una función real f de dos variables en un punto del plano.
$T_{1.5}$: Verificar la continuidad o discontinuidad de una función real $\boldsymbol{f}$ de dos variables en un punto del plano o en un subconjunto de puntos.	$T_{2.5}$: Calcular límites sucesivos de una función real f de dos variables.
$T_{1.6}$: Verificar las propiedades del límite y de la continuidad de funciones reales $\boldsymbol{f}$ de una o dos variables	$T_{2.6}$: Calcular límites direccionales de una función real f de dos variables.
	$T_{2.7}$: Determinar puntos o conjunto de continuidad o discontinuidad de una función real f de una variable.
	$T_{2.8}$: Determinar puntos o conjunto de continuidad o discontinuidad de una función real f de dos variables.

Fuente: Adaptado de Parra, Otero y Fanaro (2009, p. 7 y 8)

Al realizar el análisis praxeológico, las autoras destacan que, en la OML1, se demuestran las propiedades que luego forman parte del entorno tecnológico en la OML2. Las OML descritas en la investigación están articuladas y responden a la cuestión generatriz. Y ambas en conjunto le dan sentido al concepto de derivabilidad de funciones reales que, como se muestra en la investigación, es un concepto crucial en las Ciencias Económicas.

Por último, mostraremos un resumen de una parte de la investigación de Corica y Otero (2012) donde muestran una OM de referencia asociada al concepto del límite y de continuidad. Esta OM forma parte de una investigación más amplia donde se analizan las OM asociadas a la enseñanza de estos conceptos a partir de la OM de referencia construida.

Las autoras formulan la siguiente cuestión generatriz (formada por dos preguntas complementarios): “Q_0': ¿Cómo estudiar la existencia del límite de funciones? Q_0'':¿Para qué estudiar la existencia del límite de funciones?” (Corica y Otero, 2012, p. 7). A partir de esta cuestión generatriz, se derivan un conjunto de preguntas generatrices y así se establecieron 16 OM articuladas. En la figura adjunta, se muestran las OM identificadas, así como las relaciones que se forman entre ellas:

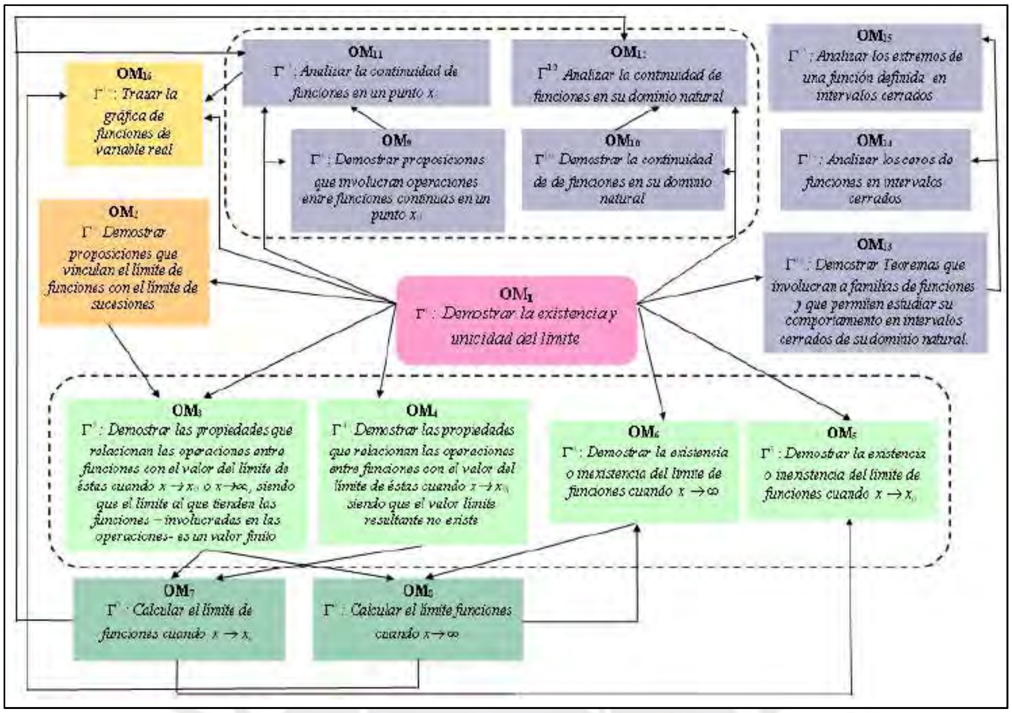


Figura 11: Modelo Epistemológico de Referencia

Fuente: Parra, Otero y Fanaro (2012, p. 9)

A continuación, se muestran las cuestiones generatrices y las OM a las que dieron origen:

Tabla 3: Cuestiones generatrices de las 16 OMP identificadas

Cuestión generatriz	OMP
Q_1: ¿Qué significa que exista el límite?	OM_1
Q_2: ¿Cómo se vincula el límite de funciones con el límite de sucesiones?	OM_2
Q_3: ¿Cómo demostrar la existencia del límite?	OM_3 , OM_4 OM_5 y OM_6
Q_4: ¿Cómo calcular el límite?	OM_7 y OM_8
Q_5: ¿Cómo determinar la continuidad de funciones?	OM_9 , OM_{10} OM_{11} y OM_{12}
Q_6: ¿Cómo demostrar teoremas que permiten estudiar a funciones continuas en intervalos cerrados?	OM_{13}
Q_7: ¿Cómo establecer la existencia de los ceros de una función?	OM_{14}
Q_8: ¿Cómo establecer si una función alcanza un máximo y/o un mínimo?	OM_{15}

Q_9: ¿Cómo representar gráficamente a funciones de variable real?	OM_{16}	

Fuente: Adaptado de Parra, Otero y Fanaro (2009, p. 9, 10 y 11)

En la figura del modelo epistemológico de referencia también se evidencia a través de las flechas, las relaciones entre las OM y cómo en algunas OM se consolida la tecnología que justifica las técnicas para resolver tipos de tareas correspondientes a otras OM. Por ejemplo, la OM_1 es fundamental para consolidar la tecnología que justifica la existencia de las técnicas de las otras OM.

Este análisis nos muestra cómo se identifican las OM relacionadas a los conceptos de límites y de continuidad y cómo se articulan entre ellas.

Estos tres trabajos presentados servirán de base para esta investigación cuyo objetivo es la de construir un MER asociado al concepto del límite para la institución educativa universitaria en estudio, desde el marco teórico de la TAD.

1.3 Investigaciones asociadas a las concepciones históricas del límite

En primer lugar, Medina (2000) propone que, para estudiar las concepciones de los alumnos sobre el límite, es necesario conocer los significados del concepto a lo largo de su historia. Así que, en este estudio, se realiza un resumen sobre la evolución de la concepción del límite. La autora toma como marco teórico la definición de concepción de Vergnaud: cada concepto matemático está formado por una terna: S (conjunto de situaciones que dan coherencia al concepto), I (conjunto de invariantes que conforman el concepto) y s (conjunto de representaciones y propiedades del concepto).

Este análisis de la evolución histórica del concepto tiene como fundamento la Teoría de dificultades y obstáculos epistemológicos. Es decir, que la autora considera que, al definir un concepto matemático, aparecen dificultades y obstáculos. Una dificultad es aquella que se resuelve al reorganizar la teoría que se conoce del concepto; mientras que un obstáculo, es aquel que se resuelve mediante un cambio radical de una concepción, al lograrlo, se dice que se ha superado el obstáculo.

Este marco teórico sirve como base para que Medina (2000) presente los estadios de las concepciones del límite (para): concepción geométrica, concepción de Newton, concepción de Leibnitz, concepción algebraica, concepción aritmética, concepción analítica o de Weierstrass. La autora presenta la terna S,I,s para cada concepción y resalta que estas se interrelacionan y se afectan unas a otras. Esta evolución de la concepción del límite se va desarrollando mientras van apareciendo los siguientes problemas: “La relación entre número (lo discreto) y magnitud (lo continuo) (…) Naturaleza de los elementos infinitesimales (…) Búsqueda del rigor en el álgebra (…) Razonamiento circular en las definiciones de límite y de número irracional” (Medina, 2017, p.14 y 15)

Este análisis epistemológico del concepto del límite sirve de base para el análisis de los obstáculos epistemológicos que se van presentando: “Horror al infinito (…) Separación de lo geométrico y lo numérico (…) Obstáculo geométrico (…) Transferencia de lo finito a lo infinito (…) Principio de continuidad de Leibniz (…) Obstáculo relativo a funciones (…) El límite se alcanza o no (…) Obstáculo de la simbología” (Medina, 2017, p. 15 y 16)

La autora también identifica las dificultades que aparecen en la historia del concepto del límite, estas dificultades no son reconocidas como obstáculos porque son menos resistentes; sin embargo, ayudan a reforzar los obstáculos. Algunas de las dificultades que menciona la autora son: el exceso del rigor, la influencia de la intuición geométrica, la falta de resultados directos, carácter empírico de las matemáticas, las dificultades asociadas al álgebra en su posición finitista, las generados por el uso de las expresiones dinámicas como impedimento para construir la definición formal y simbólica del límite.

Como conclusiones importantes, la autora resalta que el proceso de institucionalización del concepto del límite ha sido bastante difícil y las diferentes concepciones sobre él evidencian la complejidad del concepto. Además, se evidencia que este proceso de institucionalización del límite no es un proceso continuo y secuencial, sino que implica avances y retrocesos mientras iban surgiendo dificultades y obstáculos por superar.

Este artículo visibiliza la importancia del estudio de la evolución histórica de un concepto matemático ya que permite identificar posibles obstáculos que pueden surgir en la enseñanza y aprendizaje de este concepto relacionados a los obstáculos que surgieron en su evolución histórica.

Por otro lado, Artigue (1995) realiza un análisis sobre la enseñanza de los principios del cálculo. Para ello, desarrolla un análisis de la evolución histórica de la enseñanza del cálculo en la educación secundaria en Francia. Luego, identifica, de manera bastante concisa, los problemas (dificultades y obstáculos) que se han evidenciado en las diversas investigaciones relacionadas a cada concepto del cálculo (números reales, funciones, límite de una función). Finalmente, se centra en las realizaciones didácticas y muestra un panorama de las investigaciones que buscan resolver los problemas asociados al concepto del límite. En su artículo, la autora tiene el objetivo de evidenciar los problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos asociados a los conceptos de los principios del cálculo. Con ello, busca de evidenciar la problemática asociada a los principios del cálculo que se refleja en la gran cantidad de investigaciones relacionadas a estos (algunas orientadas a identificar los problemas asociados y otras buscando desarrollar proyectos de innovación en la enseñanza). Estas investigaciones difieren por los marcos teóricos que usan y por el peso que les otorgan a las tres dimensiones (epistemológica, cognitiva y didáctica).

Como conclusiones importantes, la investigadora afirma que es evidente que es inevitable encontrar problemas al introducir un alumno al cálculo. Además, las dificultades y obstáculos asociados a los conceptos del principio del cálculo son diversos e incluso el buscar evitarlos puede reforzarlos. Finalmente, la autora asevera que, en la enseñanza del cálculo, no se sigue un camino continuo y regular, sino que por el contrario, se desarrolla sobre la base de aproximaciones provisionales, que podrían incluso resultar erróneos pero necesarios.

Finalmente, hemos visto que en todas las investigaciones se utiliza de manera natural y preconcebida el término entender para el concepto del límite. Por ello, dentro de los antecedentes, se presentará un resumen del artículo de Sierpinska (1990) que muestra una revisión sobré qué significa entender.

Ya que el objetivo de la enseñanza es lograr que el alumno entienda, en este artículo, se analiza qué es entender a través de 8 preguntas que plantea la autora. Y se enfoca en la respuesta de las 3 siguientes: “¿Es entender un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual o una forma de saber? (…) ¿Cuáles son las relaciones entre entender y saber, concebir, explicar, sentido, significado, obstáculo epistemológico y visión? (…) ¿Existen niveles o tipos de entendimiento?” (Sierpinska, 1990, p.3, 4 y 6).

Para la primera pregunta, la autora plantea la posibilidad de considerar el entender como un acto y no como un proceso. Este acto de entender empieza con una suposición que luego tratamos de justificar y validar, después del cual, esta suposición puede ser mejorada, cambiada o rechazada y la nueva suposición se somete nuevamente a la justificación y validación.

Para la segunda pregunta, la autora respalda la idea de que se pueden definir tipos del acto de entender según los saberes que producen en el alumno. Luego, al analizar una oración, es posible definir el sentido de esta como la respuesta a la pregunta: ¿Qué dice la oración? y la referencia de la oración como la respuesta a la pregunta: ¿De qué se habla en la oración? Esto hace referencia a la diferencia entre semántica y semiótica. Luego, define el entender como un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a los elementos que conforman la estructura del concepto. Se destaca también que el acto de entender puede llevar al individuo a formar un obstáculo epistemológico, y luego, el acto de entender puede hacer superar este obstáculo. Además, la autora plantea que hay dos categorías en el acto de entender: intuición y abstracción lógico-físico. El primero es intuitivo y se desarrolla a partir de la percepción visual del individuo, mientras que, en el segundo, el individuo se hace consciente de las invariantes lógico-físicas, las composición y reversibilidad de las transformaciones y de la generalización. Finalmente, la autora presenta cuatro tipos de categorización del acto de entender: identificar, discriminar, generalizar y sintetizar.

Según este marco teórico, la autora realiza un análisis sobre qué significa entender el concepto de series numéricas convergentes. Se analiza, a partir de una oración sobre este concepto donde se define el límite de una serie convergente. A partir de ahí se analiza en sentido y la referencia de la oración. Sierpinska (1990) analiza todas las categorías sobre el acto de entender este concepto e identifica algunos de los obstáculos que surgen en cada categoría. A partir del análisis de esta investigación, se puede pensar en una metodología para realizar el mismo análisis orientado al acto de entender el concepto del límite.

Blázquez y Ortega (2002) presentan en su artículo una nueva definición del límite funcional (entendido como el límite de una función en un punto). Los autores reconocen en su artículo la dificultad que presentan los alumnos para la comprensión de la definición formal del límite. Y plantean que una introducción adecuada al límite debe motivarse mediante una necesidad de crear una nueva herramienta, es decir, se deben plantear problemas que motiven la construcción de la definición del límite, esta definición debe ser no formal pero sí instrumental. Así, los autores plantean una nueva forma de definir el límite, basada en la concepción del límite de D'Alembert, pero con precisión de la definición de Weierstrass. En esta nueva definición del límite se busca simplificar el formalismo simbólico de la definición de Weierstrass, que puede resultar ser una dificultad insuperable para los alumnos y se busca favorecer la comprensión del concepto.

Para la construcción de la nueva definición del límite, primero presentan un análisis histórico del concepto del límite tratando de evidenciar los problemas que dieron origen a concepciones del límite. Los autores dividen la evolución del límite en cuatro etapas:

Etapa1- De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII: aquí destacan los métodos infinitesimales, relacionados al límite, que habrían sido usados para resolver problemas de obtención de velocidad y aceleración, obtención de tangente a una curva, obtención de máximos y mínimos de una función y cálculo de áreas acotadas por curvas. Los autores muestran una descripción de los siguientes métodos: Método de exhausión de Eudoxo (y mejorado por Arquímedes), método de los indinitesimales de Kepler, método de los indivisibles de Cavalieri, método de Fermat para buscar extremos de la curva, método de Fermat para buscar tangentes a curvas, método de Barrow para buscar tangentes a curvas. Se destaca que los métodos no estaban articulados y no se tenía conciencia de su generalidad. Esta etapa inicial del límite fue superada por los matemáticos Newton y Leibniz que resumen los cuatro problemas mencionados en problemas de diferenciación y antidiferenciación. Más adelante en el análisis epistemológico se hará una descripción de estos métodos utilizados y de las concepciones asociadas a cada uno.

Etapa 2-Segunda mitad del siglo XVIII: surge la necesidad de extender las operaciones a otras funciones, por lo que surge la necesidad de la definición de función y de las operaciones algebraicas asociadas a este. Este concepto fue desarrollado por Euler (que toma de base el Bernoulli), así se formaliza el Análisis como una rama de las matemáticas que estudia los procesos infinitos. Lagrange muestra un trabajo algebraico del análisis; pero rehúye a la noción de límite. D'Alembert crea la teoría de límites con la siguiente definición:

> Se dice que una cantidad es límite de otra cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima: de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite se absolutamente inasignable (Blázquez y Ortega, 2002, p. 10)

Etapa3-Siglo XIX y principios del siglo XX: el avance del trabajo de los matemáticos en el análisis evidencia la necesidad de la construcción de la teoría de límites como fundamento del análisis matemático. Así, Cauchy brinda una concepción del límite más aritmética (aunque relacionada a la concepción dinámica del límite). Finalmente, Weierstrass brinda una definición satisfactoria del límite (satisfactoria es entendida como aquella definición que es aceptada por la comunidad matemática), esta definición está asociada a la concepción métrica del límite: "Si, dado cualquier ε, existe un n_0, tal que $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$" (Blázquez y Ortega, 2002, p. 12)

Etapa 4-siglo XX: surgen concepciones topológicas del límite, donde se trabaja con conjuntos no necesariamente numéricos.

Los autores reconocen que el primer acercamiento al concepto del límite debe darse mediante procesos de aproximaciones. Y consideran el aspecto dinámico de la concepción del límite para plantear la definición del límite en términos de aproximaciones, este sería el paso preliminar para dar la definición estática y formal del límite planteada por Weierstrass. Para la introducción de la nueva definición, previamente se realiza un trabajo intuitivo con sucesiones. Y se establece la diferencia entre aproximación y tendencia: "Una variable que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número son cada vez menores" (Blázquez y Ortega, 2002,

p. 15), y la tendencia es entendida como la mejor aproximación. El siguiente ejemplo, muestran cómo pueden existir diferentes aproximaciones.

> Ejemplo 1: Los valores 3´1209, 3´12009, 3´120009, ... se aproximan a 3 porque los errores son 0´1209, 0´12009, 0´120009, ... pero también se aproximan a 3´1 (los errores son 0´0209, 0´02009, 0´020009, ...), a 3´12 (en este caso los errores son 0´0009, 0´00009, 0´000009,...), etcétera.

Figura 12: Ejemplo de diferentes aproximaciones

Fuente: Blázquez y Ortega (2002, p. 15)

En este segundo ejemplo, se muestra cómo se mejora una aproximación y se define así una tendencia.

> Ejemplo 2: Los valores 3´1, 3´01, 3´001, 3´0001, ... son aproximaciones de 3, pero además la proximidad que se logra con este tipo de valores es mayor que con cualquier número distinto de 3, pues si tomáramos, por ejemplo, 2´99999999 como aproximación de 3 (el error es 0´000000001) y, por ejemplo, el valor 3´0000000001 mejora la aproximación (el error es 10 veces menor).

Figura 13: Tendencia y aproximación

Fuente: Blázquez y Ortega (2002, p. 15)

Para la definición del límite se deben entender las tendencias de ambas variables x e y. Así, los autores plantean la siguiente definición para el límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$:

> Si L es el límite, a cada aproximación de L le corresponde una aproximación de a, de manera que la imagen de todos los puntos que son mejor aproximación de a que ésta mejoran la aproximación de L. Esto equivale a decir que a toda aproximación de L le corresponde un entorno reducido de a de manera que las imágenes de los puntos de dicho entorno mejoran la aproximación (Blázquez y Ortega, 2002, p. 15 y 16)

Los autores muestran así que el límite puede ser entendido como una aproximación óptima. Ya que la idea de aproximación perdura más en los alumnos, esta definición está relacionada con esta noción dinámica del límite; pero, con la aclaración realizada entre tendencia y aproximación, se garantiza que el alumno vea el límite como un valor único (se garantiza la unicidad del límite).

Por último, revisaremos la investigación de Trigueros, Bosch y Gascón (2011), donde presentan tres modalidades de diálogo entre las teorías APOE y TAD. En su artículo, empiezan con una breve descripción de cada teoría y analizan cómo están pueden complementarse. A continuación, presentamos un resumen de esta investigación.

En su artículo, Trigueros, Bosch y Gascón (2011) tienen por objetivo mostrar cómo se puede realizar el diálogo entre ambas teorías teniendo en cuenta todos sus elementos teóricos, además, buscan identificar cómo algunos elementos de una de las teorías pueden extender el marco teórico de la otra sin interferir con sus principios fundamentales.

Antes de definir unas modalidades de diálogo, los autores plantean visualizar estas teorías dentro de un único marco teórico; para ello, eligen la TAD y así definen que tanto la TAD como el APOE serán identificadas como Praxeologías de Investigación (PI), y que cada una de ellas estará compuesta por sus componentes básicos (tipos de problemas, técnica, tecnología, teoría). Entonces, cada componente de la PI se interpreta de la siguiente manera: El bloque práctico está compuesto por los problemas que se pueden formular dentro de la PI, así como también contienen las técnicas de investigación que se consideran. Mientras que el bloque teórico está compuesto por los principios fundamentales de cada PI mediante el cual se describen, explican, se justifica el problema formulado.

A continuación, se proponen tres modalidades de diálogo entre estas dos teorías: partiendo de los componentes tipos de problemas, partiendo de los componentes técnico-tecnológico y partiendo de los componentes teóricos. Sin embargo, solo desarrollan los dos últimos. A continuación, veremos un resumen de estos diálogos.

Diálogo partiendo de los componentes teóricos:

El diálogo comienza partiendo de la afirmación de que el objeto de estudio de ambas teorías es la propia matemática. La teoría APOE plantea modelos que describen la forma cómo los estudiantes construyen un determinado concepto matemático. Estos modelos se detallan en la descomposición genética (DG) del concepto. Esta DG se desarrolla para lo que se podría considerar como un alumno genérico. Los autores plantean que la idea de alumno genérico del APOE puede relacionarse con la idea de sujeto en posición de alumno de la TAD. En el caso de la TAD, esta noción de alumno genérico se puede ajustar como la noción de un alumno genérico de una institución determinada. Según. Trigueros, Bosch y Gascón (2011): "Esto permitirá tomar en consideración la incidencia de la interpretación institucional de un concepto sobre la descomposición genética del mismo en dicha institución" (p. 91).

En la teoría APOE, a partir de la DG de un objeto, se diseña una secuencia de actividades didácticas que permitan al alumno pasar por todos los niveles de la descomposición genética y, a través del análisis de los resultados de la misma, se realizan ajustes a la descomposición genética inicial. La descomposición genética inicial puede ser diferente para distintos investigadores.

Trigueros, Bosch y Gascón (2011) afirman que la TAD puede ser entendida como una evolución de los programas epistemológicos que tuvieron su origen en la TSD. En el desarrollo del programa, se evidenció que para interpretar correctamente la actividad matemática escolar, era necesario tomar en cuenta los fenómenos que tienen su origen en la institución productora del saber matemático. Así surgió la noción de relatividad institucional del conocimiento matemático. Y así la TAD tiene como su foco de investigación a la actividad matemática institucionalizada. Por ello, la TAD se concentra en la ecología institucional de las organizaciones matemáticas y didácticas. Para analizar la actividad matemática institucionalizada (la construcción y difusión de los conocimientos intra-institucional), se requiere construir un modelo epistemológico de referencia (MER).

Aquí los autores comentan que se evidencia un paralelismo entre la DG del APOE, que busca describir la construcción de un concepto matemático y el MER de la TAD, que busca describir, analizar y evaluar los modelos epistemológicos dominantes en una institución.

Dado que diversos estudios, que tienen como base a la teoría APOE, utilizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas para los alumnos para reajustar sus propias DG, los autores plantean que, estos datos y sus resultados se pueden aprovechar en la TAD para desarrollar una metodología de manera que se contraste y se modifique progresivamente los MER planteados.

Es posible también identificar de algún modo el nivel institucional en las investigaciones cuya base es la teoría APOE: a partir de una DG, se diseña una secuencia de actividades que se aplica en una clase, específicamente en un contexto institucional.

Finalmente, Trigueros, Bosch y Gascón (2011) afirman que

> la teoría APOE formula siempre la descomposición genética de los objetos matemáticos en términos de acciones de las personas que llevan a cabo la actividad matemática y, tanto en los textos desarrollados como en las actividades diseñadas para la investigación y para la enseñanza, estas acciones se explicitan en términos de tareas matemáticas específicas y de actividades que permiten la interiorización de dichas acciones en procesos, su encapsulación en objetos o su tematización en esquemas. (p. 96)

Diálogo partiendo de los componentes técnico y tecnológico

Los autores proponen que las ideas sobre las concepciones (acción, proceso y objeto) en la teoría APOE pueden ser reinterpretadas de manera que permitan identificar el nivel de desarrollo de las técnicas en cierta institución. Además, la noción de los niveles de esquemas (intra-, inter-, trans-) de la teoría APOE pueden ser útiles para especificar los grados de completitud de las praxeologías en la TAD. Finalmente, "el ciclo ACE propuesto en APOE podría describirse de una manera más detallada utilizando una reinterpretación de la teoría de momentos didácticos de la TAD." (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p. 97)

- **Desarrollo institucional de las técnicas en la TAD reinterpretando los niveles de conceptualización de la APOE:**

1) Los autores plantean que una determinada técnica (τ) se propone como una acción en una institución I (o como una técnica-acción) si la técnica es vista como una sucesión de acciones arbitrarias (que no necesitan justificación dentro de I), o si la técnica es rígida (es decir, que no existe dentro de I variaciones de la técnica), o si la técnica se aplica a actividades aisladas (es decir, se usa para tipos de tareas muy específicas que no se relacionan entre sí)

2) Se plantea que una determinada técnica (τ) se propone como un proceso en una institución I (o como una técnica-proceso) si la técnica puede ser descrita, interpretada y justificada (es decir, que cuente con el bloque tecnológico-teórico que la respalde dentro de I), o si la técnica es flexible (es decir, que dentro de I, existan variaciones de la técnica: simplificándola o alterando su orden de resolución, obteniendo su inversa, por ejemplo), o si la técnica se articula o

coordina con otras técnicas (es decir, que se puedan formar técnicas más complejas para tareas más generales).

3) Se plantea que una determinada técnica (τ) se propone como objeto en una institución I (o como una técnica-objeto) si la técnica es vista como un objeto de estudio.

Además, los autores indican que si en una institución I, una técnica es vista como técnica-objeto, entonces también podría usarse como técnica-proceso o como técnica-acción. Por otro lado, si en una institución I, la técnica es vista como técnica-acción, los sujetos de I estarán condicionados a utilizarla exclusivamente como técnica-acción.

- **La evolución de los esquemas, los niveles intra-inter-trans y el desarrollo de las praxeologías:**

Los autores inician este diálogo afirmando que en APOE la identificación de los esquemas personales se da mediante la práctica matemática institucionalizada que realiza el sujeto y dicha práctica (actividad matemática) se describe mediante las praxeologías propuestas por la TAD. Y afirman que, desde la perspectiva de la teoría APOE, el desarrollo de los esquemas evidencia el desarrollo de un individuo de los conceptos matemáticos, por otro lado, desde el punto de vista de la TAD, el desarrollo de las praxeologías (de un alumno genético en determinada institución) están definidas por las praxeologías institucionales.

En ese sentido, se busca describir el tipo de dinámica praxeológica que interviene en los niveles de evolución de los esquemas en APOE para una institución I.

1) Los esquemas del nivel intra- llevan a cabo actividades matemáticas que pueden ser descritas con praxeologías aisladas (e incluso por una única praxeología). Estas praxeologías pueden ser generadas por técnicas que se ven como técnicas-acción (e incluso pueden asociarse al bloque práctico de una praxeología puntual).

2) Los esquemas del nivel inter- llevan a cabo actividades matemáticas que, para ser descritas, se necesita de elementos tecnológicos que correspondan a un grupo de praxeologías locales o relativamente completas (e incluso por una

única praxeología local). Las técnicas usadas en las prácticas matemáticas de este nivel deben ser identificadas como mínimo como técnicas-proceso.

3) Los esquemas del nivel trans- llevan a cabo actividades matemáticas que necesitan una interpretación superior, es decir, requieren de una teoría que corresponde a un grupo de al menos una praxeología regional. Las técnicas usadas en las prácticas matemáticas de este nivel deben ser identificadas como técnicas-objeto.

En la siguiente figura, se muestra la relación entre los niveles intra, inter y trans con la praxeología asociada a este.

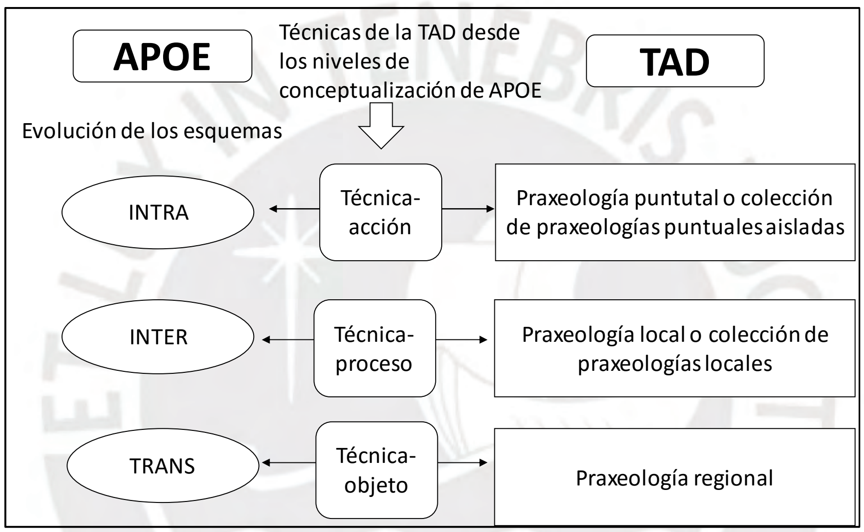


Figura 14: Relación entre niveles intra, inter y trans y praxeologías en Trigueros, Bosch y Gascón (2011)

Fuente: Elaboración propia

- **La relatividad institucional de la TAD y la descomposición genética de APOE**

En este punto, los autores tratan de evidenciar la relatividad institucional en la DG planteada en APOE. Para evidenciarlo, toman como ejemplo el caso del objeto matemático derivada. Y afirman que, para describir la forma de construir este concepto para un alumno, es necesario tomar en cuenta la institución donde se encuentra. Ya que lo que se pretende que el alumno genérico aprenda en una universidad es diferente a lo que se pretende que un alumno genérico aprenda en el nivel escolar. Entonces, en cada uno de estos casos se debería proponer diferentes DG. E incluso si se considerara la misma DG en ambos casos, al momento de diseñar la secuencia de actividades para que los alumnos construyan el conocimiento, en el caso de alumnos universitarios, se necesitarían actividades que permitan hacer todas las construcciones consideradas en la DG, mientras que, para los alumnos de nivel escolar, se les plantearían actividades orientadas a lograr construcciones de una parte de la DG.

La relatividad institucional se evidencia sobre todo en el diseño de las actividades que están relacionadas con las construcciones propuestas en la DG e introducen la noción de “Diseño de una descomposición genética de un concepto relativa al alumno de una institución dada” (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p. 104).

Según lo presentado en este artículo, tomaremos la DG como un posible instrumento para la construcción del MER, que es el objetivo de esta investigación. Por ello, hemos revisado las investigaciones de Cotrill et al. (1996) y Pons (2014) donde se presentan las DG del concepto del límite ya, a continuación, presentamos algunas investigaciones sobre la construcción de un MER.

1.4 Justificación de la investigación

En el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas, la gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre el concepto del límite evidencian la importancia de este concepto. Como menciona Artigue (1995), el concepto del límite tiene una atención especial en las investigaciones sobre la enseñanza del cálculo, debido a la posición de este concepto en el curso de Cálculo. Según la autora, algunas de estas investigaciones construyen el desarrollo histórico del concepto como un recurso para la identificación de los obstáculos epistemológicos asociadas al concepto. Por otro lado, también se encuentran investigaciones que identifican las dificultadas originadas por la disociación de la visión del límite como proceso de la visión del límite como objeto. (Para el siguiente límite: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, la visión de límite como proceso la define de la siguiente manera: cuando el valor de x se acerca a a, el valor de $f(x)$ se acerca a L; mientras que la visión de límite como objeto la define de la siguiente manera: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ tal\ que\ |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$, que corresponde con la definición formal del límite).

Previamente, se han mostrado diversas investigaciones desde diferentes perspectivas teóricas que centran su estudio en diferentes aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje del límite: Tall y Vinner (1981), Sierra, González y López (2000), Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2015) muestran en sus artículos las concepciones de los estudiantes sobre el concepto del límite, a partir de ellas, identifican qué dificultades presentan los alumnos y cómo la concepción dinámica del límite es más fuerte en los alumnos que la concepción estática , Cotrill, et al. (1996) y Pons (2014) toman como base a la teoría APOE, realizan la descomposición genética del concepto del límite y desarrollan una secuencia de activiadades sobre la base de este, Sierpinska (1996) y Medina (2017) se enfocan en el desarrollo histórico del concepto del límite como base para el análisis de los obstáculos relacionados con el concepto del límite, Corica y Otero (2009) y Hardy (2009) toman como base teórica a la TAD y desarrollan las praxeologías del concepto del límite según las evaluaciones y los libros de texto usados en la enseñanza del límite así como también realizan un análisis sobre este. Blázquez y Ortega (2002) proponen una nueva definición del límite de una función de manera que mantienen la rigurosidad de la definición formal, pero evitan las dificultades que ocasionan el trabajo con desigualdades de la definición de Weierstrass. Todos los autores mencionados reconocen, desde un principio en sus artículos, que los alumnos presentan problemas para comprender la noción del límite.

Finalmente, Artigue (1995) afirma que "…la evidencia de los problemas encontrados (en investigaciones relacionadas a los principios básicos del cálculo) y la insatisfacción que generaban han tenido dos efectos notorios: De un lado, se han convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en este campo…Del otro lado, tales problemas han motivado numerosos proyectos de investigación de la enseñanza (en especial de los niveles de la educación media y ciclo básico universitario)" (Artigue, 1995, p. 98).

Por otro lado, los mismos autores mencionados previamente también concuerdan en que el concepto del límite es la base del cálculo infinitesimal. Y parten de la idea de que este concepto es necesario para temas más avanzados del cálculo, tales como: continuidad de funciones, derivadas, integrales, etc. Respaldando esta idea, Blázquez y Ortega (2000) afirman que

> La importancia del estudio de las dificultades del concepto de límite se justifica por varias razones. Por una parte, este es uno de los conceptos más importantes del Análisis, ya que es necesario para introducir otros (continuidad, derivada, integral) y, por lo tanto, su estudio se hace necesario. Por otra parte, para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender. Todas estas razones nos han llevado a investigar las dificultades de enseñanza y aprendizaje, y a desarrollar una metodología apropiada. (Blázquez y Ortega, 2000, p. 1)

La importancia del concepto del límite también se visibiliza en su epistemología, ya que en su evolución histórica se evidencian las situaciones que dieron origen al concepto, desde la noción primigenia en el cálculo de áreas hasta la necesidad de formalización. Así, Blázquez y Ortega (2002) definen cuatro etapas, sobre la base del trabajo de Cornu en 1983. En la primera etapa, se evidencia el origen del límite como concepto intuitivo en métodos infinitesimales para resolver problemas (cálculo de áreas, de volúmenes, obtención de tangentes de curvas, cálculo de velocidad y aceleración en un instante, estudio de máximos y mínimos, etc.). En la segunda etapa, se evidencia una necesidad de extensión de las operaciones del análisis y con ello surge la necesidad de formalización del concepto de función, en esta etapa, se formaliza la rama de las matemáticas llamada Análisis, además algunos conceptos empiezan a ser trabajos como objetos matemáticos en estudio y se logra la el inicio de la separación de la geometría con el análisis, aunque aún se tiene una concepción algebraica del límite y no se lograr separar los métodos analíticos de los algebraicos. En la tercera etapa, se evidencia la búsqueda de la formalización del concepto del límite debido al cambio en el ámbito matemático logrado por la Revolución Francesa y la implementación del curso obligatorio de matemáticas en la Escuela Normal superior y la Politécnica; estas dos situaciones incentivaron a muchos matemáticos a buscar una formalización de los conceptos de continuidad y derivada, que contaban con un fundamento en la concepción dinámica del límite insuficiente. Así, se logra la definición métrica del límite (definición estática) que es la utilizada actualmente y que corresponde a la concepción aritmética del límite. Finalmente, en la cuarta etapa, se hace la aclaración de que el proceso de evolución del límite no termina en la definición brindada en la etapa anterior, sino que luego surgen las definiciones del tipo topológicas, donde se busca la generalización de algunos conceptos del análisis a conjuntos no necesariamente numéricos.

Al formalizarse el concepto del límite y ser aceptada esta definición en la comunidad matemática, aparece en los libros de texto de cálculo. Esto se respalda por la producción de libros matemáticos que incluyen este concepto: Lima (1997), Lang (1969), Apostol (1983), Haaser (1992), Spivak (1996), autores conocidos en la comunidad matemática, incluyen el capítulo de límite de una función como base para conceptos más avanzados: continuidad de funciones, derivadas, integrales. Además, los libros de estos autores sirven de base para el desarrollo de otros que están incluidos en la bibliografía de los cursos de cálculo que se usan actualmente, tales como Leithold (1998), Stewart (1999) y Rogawski (2012).

La importancia del concepto del límite también se evidencia en los currículos de los cursos de cálculo en diversas instituciones educativas de nivel universitario en nuestro país. En la Pontifica Universidad Católica del Perú (PUCP), los alumnos de ciencias y de ingenierías están organizados en una sola facultad (Estudios Generales Ciencias) en los primeros cuatro ciclos. Durante este periodo, llevan cursos según su plan de estudios, algunos de ellos son obligatorios para todos los alumnos. El concepto de límite de una función en un punto se lleva en el curso obligatorio de Cálculo Diferencial. A continuación, se muestra una parte del programa analítico de este curso que respalda la afirmación anterior.

I. Competencias y resultados de aprendizaje

El curso de Cálculo Diferencial contribuirá al desarrollo de la *competencia Aprender a aprender*, en relación con el perfil de egresado de Estudios Generales Ciencias y con el objetivo a) de ABET "*Capacidad de aplicar conocimientos de matemáticas, ciencias e ingeniería*" en la medida en que al finalizar la asignatura los estudiantes serán capaces de:

1. Aplicar los conceptos, propiedades y procedimientos asociados a las nociones de límites, continuidad, derivada de funciones reales de variable real y de integral indefinida para resolver problemas sobre velocidad y aceleración, tasas de crecimiento, soluciones aproximadas de ecuaciones, optimización de funciones y fenómenos físicos que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales.
2. Aplicar los conceptos y las propiedades de asíntotas, intervalos de monotonía e intervalos de concavidad de las funciones reales de una variable real usando programas de software matemáticos que permiten representaciones simbólicas y gráficas para explorar problemas, verificar sus procedimientos o formular conjeturas.

Figura 15: Competencias y resultados de aprendizaje asociados al límite

Fuente: PUCP (2018)

Como se puede observar en la Figura, este curso es obligatorio para todas las especialidades de ciencias e ingenierías. Además, una de las competencias y resultados de aprendizaje planteados es el "Aplicar los conceptos, propiedades y procedimientos asociados a las nociones de límites…". En los contenidos del curso, se puede observar la relevancia de este tema debido a que está definido como una Unidad Didáctica. Finalmente, es importante resaltar que este curso de Cálculo Diferencial es requisito indispensable para llevar los cursos de Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables y Cálculo Aplicado, cursos que también son obligatorios para todas las especialidades.

Previamente, se ha evidenciado la importancia del concepto del límite en la didáctica de las matemáticas, en su epistemología y en la institución en estudio. Por ello, en esta investigación, se estudiarán aspectos relacionados al concepto del límite de una función en un punto. En este estudio, se buscará estudiar la manera como el concepto del límite debe ser estructurado y que sirva de referencia para el análisis sobre la manera como es enseñado actualmente.

Por otro lado, hemos observado en las investigaciones presentadas respecto al MER cómo esta se presenta como herramienta de la TAD que permite estudiar un concepto matemático antes de su transformación para ser enseñado. Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) afirman que la construcción del MER es imprescindible para la formulación de un problema didáctico y definen el MER como la interpretación y explicitación de la actividad matemática (enseñanza y aprendizaje) que acompaña al objeto matemático en estudio. Además, Parra, Otero y Fanaro (2009) afirman que la construcción de un MER es importante porque actúa como punto de observación sobre el que se podría realizar el análisis de las organizaciones matemáticas que se proponen, reconstruyen y aprenden en un curso, que se denomina como Modelo Epistemológico Dominante. Finalmente, Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) señalan que, dado que la TAD interpreta la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada, un MER (y las cuestiones que lo conforman) se construye en torno a una institución. Sin embargo, Trigueros, Bosch y Gascón (2011) afirman que los criterios de construcción del MER, de la TAD, son propios del investigador y no siempre son explicitados, además, la DG, de la teoría APOE, tiene un ciclo de trabajo que permite aprovechar los datos obtenidos de la experimentación. Además, los autores mencionan que existe un paralelismo entre el MER de la TAD y la DG de la teoría APOE. Por ello, en esta investigación se plantea aprovechar la DG revisada del concepto del límite para complementar los criterios de construcción del MER.

Por lo expuesto anteriormente, esta investigación propone desarrollar una propuesta de modelo epistemológico de referencia asociado al concepto del límite de una función en un punto para el curso de Cálculo Diferencial de la institución educativa universitaria PUCP.

1.5 Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de investigación

¿Qué características debería tener un modelo epistemológico de referencia asociado al concepto del límite de una función real en un punto para la institución en estudio?

Objetivo general

Construir un modelo epistemológico de referencia (MER) asociado al concepto de límite de una función real en un punto para la institución en estudio

Objetivos específicos

- Analizar la epistemología del concepto de límite, el programa analítico del curso de cálculo de la institución que comprende el concepto de límite y algunos libros de texto de cálculo en los capítulos referenciados al límite.
- Identificar las organizaciones matemáticas asociadas al límite en un libro de texto de la bibliografía del curso
- Considerando el análisis preliminar y los aportes de otras investigaciones, construir un MER final asociado al límite de una función real en un punto para la institución en estudio

CAPITULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo, se presenta el marco teórico donde se desarrolla la investigación, así como también la metodología a utilizar. Debido a que el objetivo de esta investigación es el de construir un modelo epistemológico de referencia (MER) asociado al concepto del límite de una función en un punto mediante la modelización matemática, se tomará como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD). Si bien la TAD ofrece los elementos necesarios para la construcción del MER, en esta tesis se plantea usar algunos elementos de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) que puedan ayudar a complementar el MER sin violentar los principios fundamentales establecidos por la TAD, a través del diálogo propuesto por Trigueros, Bosch y Gascón (2011). Por ello, en la primera sección de este capítulo, presentaremos los elementos de la TAD y del APOE que se usarán en la investigación.

2.1 Marco teórico

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La TAD ha sido desarrollada a partir de la Teoría de la Transposición Didáctica propuesta por Yves Chevallard en 1985.

La TAD fue propuesta por Chevallard, quien afirma que "… la TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales." (Chevallard, 1999, p. 1). Además, postula que "…se admite en efecto que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de praxeología." (Chevallard, 1999, p.2)

Bosch, García, Gascón e Higueras indican que "la TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (praxis + logos). Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más." (Bosch et al, 2006, p.38)

Fonseca complementa afirmando que “Hemos visto que la TAD postula que toda actividad matemática institucional puede modelizarse mediante la noción de praxeología (u organización) matemática. Este postulado debe ser completado con otro que se resume afirmando que toda actividad matemática institucional puede analizarse en términos de praxeologías matemáticas de complejidad creciente” (Fonseca, 2004, p. 39)

Praxeologías u organizaciones matemáticas

En la TAD, la actividad matemática institucionalizada puede ser descrita mediante las praxeologías u organizaciones matemáticas, que están compuestas por tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Tipos de tareas

Según Chevallard (1999), las tareas (t) son acciones que deben ser realizadas por un sujeto, estas usualmente son expresadas mediante verbos como, por ejemplo, multiplicar 265 por 15, dividir los polinomios $P(x)$ y $d(x)$, calcular el límite de la función $f(x) = 3x - 2$ en el punto $x = 2$, etc.). Cada tarea pertenece a un tipo de tarea (T). Cada tipo de tarea puede estar conformado por uno o más tareas. En lo ejemplos anteriores, los tipos de tarea son multiplicar dos cantidades, dividir dos polinomios, calcular el límite de una función en un punto. Las tareas y tipos de tareas pueden ser considerados como acciones relativamente precisas, de manera más general, se pueden definir los géneros de tareas. En los ejemplos, los géneros de tarea son multiplicar, dividir, calcular. Además, el autor resalta que las tareas, tipos de tareas y género de tareas son construidos dentro de una institución.

A continuación, se muestra un ejemplo para el caso del límite de una función en un punto.

Género de tareas: Verificar

Tipo de tarea: Verificar que L es el valor del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un punto a

Tarea: Verificar que L es el valor del límite de una función lineal $f(x)$ cuando x tiende a un punto a

Ejemplo: Usando la definición del límite, verificar que $\lim_{x \to 3}(8x + 3) = 27$ (Rogawski, 2012)

Técnicas

Según Chevallard (1999), para construir una praxeología relativa a un tipo de tareas (T), es necesario asociar a cada tipo de tarea su manera de realizarla. Se le llama técnica (τ) a una forma de realizar una tarea. El bloque conformado por un tipo de tareas (T) y una técnica (τ) asociada a ella se llama bloque práctico-técnico $[T/\tau]$ o saber-hacer. También, se menciona que, en una institución I, de manera general, se define una sola técnica, o un pequeño número de técnicas, para cada tipo de tarea. Así en esa institución esa técnica sería institucionalmente reconocida, esto puede ocasionar que otras técnicas alternativas sean excluidas. Esto también se evidencia en los actores participantes de la institución I, admiten estas técnicas como "naturales".

Para el caso del ejemplo presentado anteriormente, se proponen las siguientes técnicas que se evidencian en su resolución:

Ejemplo: Usando la definición del límite, verificar que $\lim_{x \to 3}(8x + 3) = 27$ (Rogawski, 2012)

Tabla 4: Ejemplo de identificación de la técnica para una tarea

- Reemplazar la función $\boldsymbol{f(x) = 8x + 3}$ y el valor de $\boldsymbol{L = 27}$ en la siguiente expresión: $\boldsymbol{\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon}$: $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$
- Reemplazar el valor de $\boldsymbol{a = 3}$ en la siguiente expresión: $\boldsymbol{\lvert x - a \rvert < \delta}$ $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \delta}$
- Transformar $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$ en $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \delta}$ $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{\lvert 8x - 24 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{8\lvert x - 3 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \frac{\varepsilon}{8}}$

- Determinar $\boldsymbol{\delta(\varepsilon)}$	$\boldsymbol{\delta = \frac{\varepsilon}{8}}$

Fuente: Rogawski (2012)

Tecnología

Según Chevallard (1999), La tecnología (θ) de una técnica (τ) es el discurso racional que cumple tres objetivos. En primer lugar, busca justificar a esta técnica, es decir, la tecnología (θ) asegura que esa técnica (τ) resuelve las tareas del tipo (T). En segundo lugar, la tecnología busca explicar la técnica, es decir, aclara la técnica y evidencia por qué es correcta para resolver ese tipo de tareas (T). Por último, la tecnología tiene la función de producir las técnicas, es decir, tiene la característica de poder asociar nuevas técnicas a él.

Es importante resaltar que el autor menciona que el criterio de la racionalidad del discurso de la tecnología se forma dentro de una institución I, es decir, la racionalidad de una institución puede parecer poco racional en otra. En el ejemplo en estudio, se identifican las siguientes tecnologías:

Tabla 5: Ejemplo de identificación de la tecnología asociada a una técnica

Técnicas	Tecnología
- Reemplazar la función $\boldsymbol{f(x) = 8x + 3}$ y el valor de $\boldsymbol{L = 27}$ en la siguiente expresión: $\boldsymbol{\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon}$: $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$	- Definición del valor absoluto como distancia
- Reemplazar el valor de $\boldsymbol{a = 3}$ en la siguiente expresión: $\boldsymbol{\lvert x - a \rvert < \delta}$ $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \delta}$	- Definición del valor absoluto como distancia
- Transformar $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$ en $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \delta}$ $\boldsymbol{\lvert 8x + 3 - 27 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{\lvert 8x - 24 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{8\lvert x - 3 \rvert < \varepsilon}$ $\boldsymbol{\lvert x - 3 \rvert < \frac{\varepsilon}{8}}$	- Definición formal del límite: $\varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ tal\ que$ $\lvert x - 3 \rvert < \delta \rightarrow \lvert 8x - 24 \rvert < \varepsilon$ - Propiedades de desigualdades $ax < b,\ a > 0 \rightarrow x < \frac{b}{a}$ - Propiedades de valor absoluto

	$\lvert ax\rvert = a\lvert x\rvert$
- Determinar $\boldsymbol{\delta(\varepsilon)}$ $$\boldsymbol{\delta = \frac{\varepsilon}{8}}$$	- Coordinación entre los procesos de aproximación alrededor de L y alrededor de a

Fuente: Rogawski (2012)

Teorías

El discurso usado en las tecnologías contiene afirmaciones que pueden ser consideradas muy particulares y que necesitan una justificación. Esta justificación de la tecnología (θ), que puede ser considerada como un nivel superior de justificación-explicación-producción, se llama teoría (Θ). Así, la teoría de una tecnología cumple el papel de la tecnología para las técnicas.

Para el ejemplo mostrado anteriormente, la teoría asociada que justifica las tecnologías es la teoría del análisis matemático y el cálculo diferencial.

Organización matemática

Chevallard (1999) afirma que asociada a cada tipo de tareas (T) se encuentra por lo menos una técnica, una tecnología y una teoría. Estos elementos $[T/\tau/\theta/\Theta]$ conforman una praxeología u organización matemática. Para cada praxeología, se define el bloque práctico-técnico, conocido como el saber-hacer, como el par formado por $[T/\tau]$ y el bloque tecnológico-teórico, conocido como el saber, como el par conformado por $[\theta/\Theta]$. Además, Chevallard (1999) define los cuatro tipos de organización matemática según el grado de complejidad de sus componentes.

- Organización Matemática puntual (OMP): es aquella que está referida a un único tipo de tareas (T). Para Secundaria, Fonseca ejemplifica las organizaciones matemáticas puntuales: "descomponer en factores un polinomio con raíces enteras; resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; determinar la ecuación de una recta dada por un punto y un vector director; etc." (Fonseca, 2004, p. 39). Además, el autor realiza la aclaración de que cada una de las OMP presentadas deben ser correctamente definidas, para ello, es necesario especificar de manera detallada el tipo de tarea considerado, la técnica presentada en la institución de referencia, además de los elementos tecnológicos y la teoría que fundamenta la tecnología.

- Organización matemática local (OML): es aquella que se obtiene al combinar varias OMP y que se centran en una determinada tecnología (θ). Según Fonseca, las funciones de esta tecnología son las de "justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las OMP que la integran." (Fonseca, 2004, p.39) Las OML, que integran varias OMP, surgen para dar respuesta a un tipo de cuestionamientos que no se podían resolver o formular de manera adecuada en ninguna de las OMP que la integran.
- Organización matemática regional (OMR): es aquella que se obtiene al integrar diversas OML y que se centran en una determinada teoría (Θ). Esta integración se logra al coordinar y articular de las OML alrededor de una misma teoría (Θ). Para ejemplificar algunas OMR, Fonseca (2004) las representa mediante su teoría unificadora: "la teoría de Galois; la teoría de ecuaciones diferenciales lineales; el álgebra lineal; la teoría de la medida; la teoría de funciones analíticas." (p. 41) aunque realiza la aclaración que esta descripción no es suficiente para presentar una OMR, para ello, es necesario describir las OML que la componen, las relaciones entre ellas y los cuestionamientos que no podían abordarse desde las OMR que la integran.
- Organización matemática global (OMG): es aquella que se conforma de diversiones OMR correspondientes a diversas teorías.

Se resalta que Chevallard (1999), así como también Fonseca (2004), hace hincapié en que las OMP, OML, OMR y OMG se constituyen dentro de una determinada institución ya que lo que cada praxeología reconstruida se mantiene dentro del estudio de las fronteras institucionales. Bosch, García, Gascón e Higueras (2006) afirman que las praxeologías no suelen corresponder a una persona, sino que son compartidas por grupos de personas organizadas en una institución. Es por ello que la actividad matemática en una institución puede ser descrita mediante praxeologías matemáticas. En ese mismo sentido, Corica y Otero (2009) afirman que los elementos de cada praxeología, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías, son doblemente relativos. En principio, son relativos a una determinada institución I; es decir, un tipo de tarea (o una técnica, tecnología o teoría) para una institución, no necesariamente lo será en otra. En segundo lugar, los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías definidos para una praxeología son relativos para una determinada actividad matemática.

Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

Según Fonseca, Gascón y Lucas (2014), el MER es la interpretación y explicitación de la actividad matemática (enseñanza y aprendizaje) que acompaña al objeto matemático en estudio. Los autores mencionan que la construcción del MER es imprescindible para la formulación de un problema de investigación en el marco teórico de la TAD.

Además, Sierra postula que

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de respuestas parciales a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (Sierra, 2006, p. 47)

Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) afirman además que se debe tener en cuenta que el MER no es absoluto ni único, ya que es considerado como una hipótesis que luego será contrastada con la experimentación. Los autores afirman que el MER debe ser elaborado para la institución específica en estudio.

Adicionalmente, Gascón (2011) resalta la importancia de la explicitación del MER en una investigación didáctica, ya que a partir del MER, el investigador tiene la facultad de deconstruir y reconstruir las organizaciones matemáticas de una institución que busca analizar. Además, agrega que “El MER también es necesario para estudiar el saber matemático antes de que se transforme para ser enseñado.” (Gascón, 2011, p. 7)

Además, Gascón (2011) sostiene que el MER condiciona las siguientes características en una investigación didáctica:

- La amplitud del objeto matemático en estudio adecuado para el estudio
- Los fenómenos didácticos que el investigador podrá visualizar
- Los tipos de problemas de investigación que abarcará el estudio
- Las explicaciones que se darán en el estudio (admisibles en la investigación)

Fonseca, Gascón y Lucas (2014) mencionan que, en las investigaciones donde se ha realizado la construcción de un MER, la modelización matemática ha sido una herramienta fundamental para este. Los autores indican que “las praxeologías matemáticas que estructuran el MER suelen cumplir la siguiente condición: cada nueva praxeología no sólo amplía y completa relativamente a la praxeología anterior, sino que además puede considerarse como un modelo matemático de ésta” (Fonseca, Gascón y Lucas, 2014, p. 4).

Además, Parra, Otero y Fanaro (2009) afirman que en las OM de referencia (MER) se pueden distinguir cuatro niveles: puntuales, locales, regionales y globales. Las puntuales son aquellas asociadas a una única técnica, las locales están formadas por varias puntuales que tienen en común un único discurso tecnológico, las regionales son aquellas que articulan varias locales asociadas a una única teoría y las globales están conformadas por varias organizaciones regionales asociadas a una teoría común.

Modelización Matemática

La TAD postula que la actividad matemática puede identificarse con una modelización matemática (Bosch, García, Gascón e Higueras, 2006). Los autores afirman: “Esto implica que la modelización no es sólo una dimensión de la actividad matemática, sino que la actividad matemática es, en esencia, una actividad de modelización.” (Bosch et al.,2006, p. 15). Sin embargo, advierten que se debe tener en cuenta que la modelización matemática no se trata de matematizar situaciones en contexto extra-matemáticos, sino que se debe considerar a la modelización intramatemática como un aspecto fundamental de las matemáticas y se debe dar un significado exacto a la actividad de modelización.

Sobre la modelización matemática, Bosch, García, Gascón e Higueras (2006) afirman que se debe tener en cuenta que la relevancia de la modelización no se debe centrar en la situación concreta propuesta, sino que debe estar orientada a enfatizar lo que se puede hacer luego con la solución obtenida. De esta manera, los problemas planteados deben poder evolucionar en problemas más complejos. Es decir, cada situación debe ser producir la necesidad de construir nuevas técnicas y nuevas tecnologías que justifiquen estas nuevas técnicas.

En ese mismo sentido, Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) afirman que la modelización matemática es una herramienta que permite articular y habilitar a la actividad matemática debido a su lógica interna. En la modelización matemática, se plantea una cuestión problemática inicial y a partir de ella se plantea una respuesta provisional que tiene asociada una praxeología (que podría ser puntual) y es en esta praxeología que surgen nuevas cuestiones problemáticas que evidenciarán la necesidad de considerarla como otro sistema a estudiar y así construir otro modelo que será más amplio y complejo que el anterior. Mientras este proceso continúe se extenderá a praxeologías locales y articular así la actividad matemática estudiada. Además, los autores proponen la siguiente la siguiente modificación a lo que es entendido como modelización matemática:

> Se incluye la modelización intramatemática en la noción de “modelización”. Consideramos la modelización matemática de sistemas matemáticos (esto es, la modelización intramatemática como, por ejemplo, la modelización algebraica de un sistema numérico o geométrico) como una parte esencial de la actividad de modelización que es inseparable de la modelización de sistemas extramatemáticos. (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014, p. 6)

Finalmente, Parra, Otero y Fanaro (2009) mencionan que los procesos de modelización matemática implican una reconstrucción y articulación de las praxeologías de complejidad creciente y que tienen su origen en los cuestionamientos de la razón de ser de las OM asociadas al concepto en estudio. Esto se ejemplifica en su investigación donde el MER asociado a los conceptos de límite y continuidad, que construyen para la Economía y Administración, busca responder a la cuestión de derivabilidad de ciertos tipos de funciones. Debido a que, la derivabilidad de funciones es una herramienta crucial en el análisis de modelos económicos (que simulan el comportamiento del mercado) y el concepto de derivabilidad requiere y necesita del estudio de OM asociadas al límite, entonces en el MER propuesto tiene un sentido intramatemático. Y así surgen las siguientes cuestiones iniciales: ¿Por qué y cómo verificar la existencia del límite de funciones? ¿Por qué y cómo calcular un límite suponiendo que existe?

Los elementos presentados anteriormente permiten mirar el concepto del límite de una función a través de un enfoque institucional. El MER, como herramienta de la TAD, nos permite describir el concepto a partir de una sucesión de praxeologías cada vez más amplias que buscan dar respuesta a las cuestiones que evidencian la razón de ser del concepto. La TAD brinda las herramientas para la descripción de la forma en la que se enseña un concepto a través del Modelo Epistemológico Dominante donde se reconstruye las praxeologías que forman parte de la institución en estudio. Con estas herramientas que proporciona la TAD la investigación sobre un concepto se puede ampliar al comparar dos instituciones educativas a partir de las praxeologías o procesos de modelización matemática que tienen lugar. En este proceso de exploración de análisis de las organizaciones matemáticas, se evidencia el proceso de construcción del bloque tecnológico-teórico en referencia a una institución. Sin embargo, si deseamos analizar a nivel más focalizado la construcción del conocimiento matemático en un alumno, es decir, si deseamos analizar las construcciones necesarias para que el alumno interiorice un concepto matemático, es necesario abordar la forma de aprender el conocimiento desde una teoría cognitiva. En ese sentido, la teoría APOE resulta un marco teórico útil para analizar la construcción del límite de una función a nivel individual. Además, la teoría APOE dota de herramientas, a través de los diseños didácticos, para la construcción del concepto. A continuación, se revisarán algunos elementos de la teoría APOE que nos servirán para la investigación y finalmente se mostrará la forma cómo ambas teorías podrían dialogar sin violentar sus principios teóricos.

Algunos elementos de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)

La teoría APOE desarrollada por Dubinsky fue concebida sobre la noción de abstracción reflexiva aplicada al pensamiento matemático avanzado. Según Arnon et al (2014), Piaget definió la abstracción reflexiva, en el campo de la matemática, como el mecanismo mental con el cual se generan todas las estructuras lógico-matemáticas. Esta abstracción reflexiva es descrita en dos partes que la constituyen:

> La primera parte implica la reflexión, en el sentido de la conciencia y el pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget denominó contenido y operaciones en ese contenido, y en el sentido de reflejar el contenido y la operación desde un nivel o etapa cognitiva inferior a uno superior. La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y las operaciones en esta etapa superior que hace que las operaciones se conviertan en contenido al que se pueden aplicar las nuevas operaciones. (Arnon et al., 2014, p. 6, traducción propia)

Con esta segunda parte, Dubinsky considera a la abstracción reflexiva como una herramienta que permite describir el desarrollo de conceptos matemáticos avanzados. Así, Dubinsky reinterpreta los elementos de la teoría de Piaget para conformar la teoría APOE.

Según Arnon et al. (2014), la teoría APOE es un modelo que permite describir cómo un individuo aprende los conceptos matemáticos. Los individuos conforman un concepto matemático a través de la construcción y el uso de las estructuras mentales (que en la teoría APOE, son consideradas como etapas del aprendizaje de cierto concepto matemático). Estas estructuras mentales (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) se generan mediante tipos de abstracción reflexivas, en la teoría APOE, los tipos de abstracciones reflexivas son denominados mecanismos mentales: la interiorización, la encapsulación, la coordinación, la inversión, la desencapsulación y la tematización. Se debe aclarar que, en la teoría APOE, cuando se hace referencia a un estudiante (o individuo) no se está considerando a un alumno específico, sino que se refiere a un alumno genérico, es decir, un alumno que represente a los alumnos que está aprendiendo cierto concepto determinado. En la siguiente figura, se muestran los componentes de la teoría APOE, la flecha entre los mecanismos mentales y las construcciones busca representar que las estructuras se construyen mediante los mecanismos. Esto de desarrollará con más detalle en el siguiente punto. A continuación, realizaremos una breve descripción de cada uno de ellos a partir de los expuesto por Arnon et al. (2014).

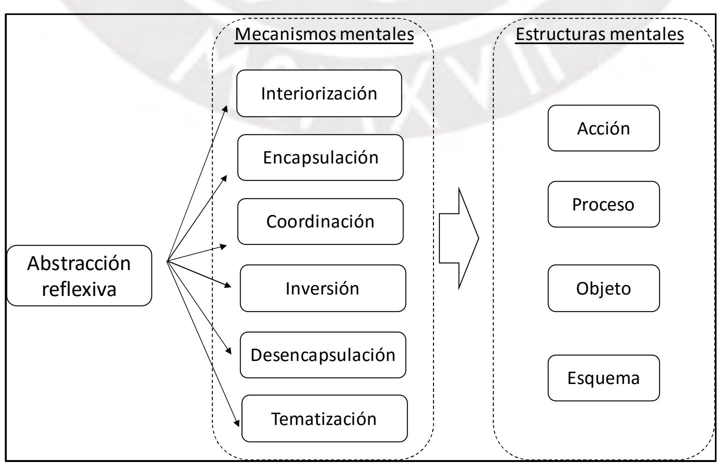


Figura 16: Mecanismos y estructuras mentales de la teoría APOE

Fuente: Elaboración propia

Construcciones mentales y mecanismos

- **Acción:** Un concepto matemático es concebido como una Acción cuando es entendido como una transformación externa de otro objeto matemático. Esta transformación es externa ya que son necesarios las instrucciones externas paso a paso. Además, cada paso se desarrolla a partir del anterior; es decir, en este nivel, no es posible imaginar ni saltar algún paso. Los autores brindan un ejemplo en Cálculo (relacionado al nivel de trabajo del caso del límite): para construir la definición de la integral como el área bajo la curva de función, son necesarias las acciones: dividir un intervalo en intervalos más pequeños de una longitud específica, construir un rectángulo bajo la curva para cada intervalo, calcular el área de cada rectángulo, etc.
- **Interiorización y Proceso:** Cuando un individuo repite una acción, puede pasar a tener un trabajo interno (control interno de esta) en lugar de ser una serie de pasos con instrucciones externas. Esto se evidencia cuando el individuo es capaz de imaginar los pasos, saltar algunos de ellos o invertirlos. Es decir, cuando un individuo repite una acción, empieza a reflexionar sobre ella y así una acción interiorizada es un proceso, En Cálculo, los autores dan el siguiente ejemplo con respecto a la integral definida: la acción de determinar la suma de Riemann para una partición se interioriza en un Proceso, cuando el individuo puede visualizar cómo se calcula la suma de Riemann para cierta partición y visualiza que este proceso continúa mientras aumento la cantidad de intervalos.
- **Encapsulación y Objeto:** La encapsulación se da cuando un individuo aplica una acción a un proceso, esto quiere decir, el individuo mira el Proceso como una totalidad (empieza a verla como una estructura estática en lugar de dinámica) y por ello se da cuenta de las transformaciones que pueden actuar sobre esta totalidad. Es decir, el alumno es consciente de las operaciones/transformaciones que se aplican a un proceso, realiza transformaciones sobre este y puede construir esas transformaciones. En Cálculo, si se calcula el límite de las sumas de Riemann, estamos aplicando una Acción al Proceso de la suma de Riemann. Para determinar el área

bajo la curva de una función en un intervalo cerrado, el individuo debe encapsular el Proceso de la suma de Riemann en un Objeto.

- **Desencapsulación, coordinación e inversa de un proceso:** Cuando un alumno ha encapsulado un Proceso en un Objeto, puede desencapsular este último y retroceder hasta el Proceso que dio origen a este Objeto. Por otro lado, la coordinación es la que permite la construcción de algunos Objetos. Si dos Objetos son desencapsulados hasta llegar a los Procesos que les dieron origen, sus procesos pueden ser coordinados y estos procesos coordinados pueden ser encapsulados para generar un nuevo Objeto. Esto se puede ejemplificar de la siguiente manera: si dos funciones son desencapsuladas y se coordinan sus Procesos, estos Procesos coordinados pueden ser encapsulados y obtener el Objeto de la función compuesta. Finalmente, un Proceso puede ser también invertido, por ejemplo, el Proceso de función puede ser invertido para obtener la noción de la función inyectiva y de la función inversa.
- **Tematización y Esquema:** La interacción de las construcciones mentales y de los mecanismos mencionados conforman el Esquema. La construcción del Esquema como un objeto mental se logra a través de la tematización, este proceso se da a partir de la coherencia entre las estructuras y las conexiones establecidas entre ellas, se transforman en una estructura estática y usarse como una estructura dinámica que asimila a otros Objetos o esquemas relacionados. El Esquema es dinámico ya que su reconstrucción varía según como el individuo determina la actividad matemática para enfrentar situaciones matemáticas diferentes. La coherencia del nivel Esquema está determinada por la capacidad del individuo para identificar qué estructura mental debe usar al tratar de resolver una situación problemática.

Finalmente, acerca de las estructuras mentales y los mecanismos, Arnon et al. (2014) citan a Asiala que afirma lo siguiente:

> …consideramos que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales construidos previamente para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que luego se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden desencapsular de nuevo a los procesos a partir de los cuales se formaron. Finalmente, las acciones,

procesos y objetos se pueden organizar en esquemas. (Asiala, 1996, citado en Arnon et al., 2014, p. 19)

Esta interacción entre los elementos de la teoría APOE descritos previamente se muestra gráficamente en la siguiente figura:

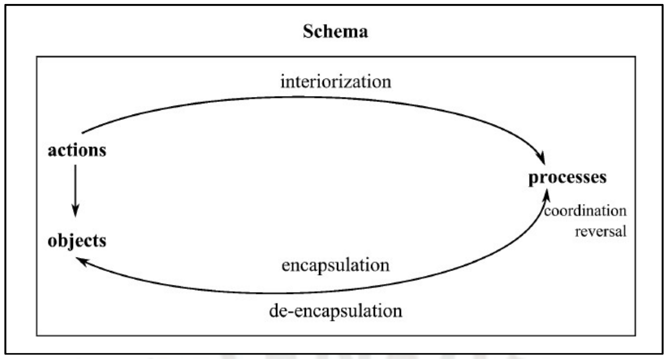


Figura 17: Elementos de la teoría APOE

Fuente: Arnon et al. (2014, p.10)

Descomposición genética

Una vez que se han definido las construcciones mentales y los mecanismos mentales de la teoría APOE, se plantea un modelo que muestre cómo estas construcciones se relacionan y se desarrollan. La descomposición genética es el modelo que cumple esta función. Arnon et al. (2014) definen:

> Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. (Arnon et al., 2014, p. 27 y 28)

Además, se afirma que la construcción de la descomposición genética de un concepto matemático se inicia a partir de algunos de los siguientes ítems: experiencia del investigador en la enseñanza y aprendizaje sobre el concepto, el conocimiento de la teoría APOE, resultados de investigaciones preliminares sobre el concepto, perspectivas históricas sobre el desarrollo del concepto o análisis de un texto sobre el concepto. Esta descomposición genética preliminar sirve de guía para el análisis de los resultados de una instrucción (una clase donde se recopilará información sobre los resultados en los alumnos). Los datos obtenidos en la instrucción (en forma de entrevistas o en instrumentos de medición escritos) permiten analizar y revisar la descomposición genética a través de dos cuestionamientos:

(1) ¿Hicieron los estudiantes las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética? (2) ¿Cuán bien aprendieron los sujetos el contenido matemático? (Arnon et al., 2014, p. 28)

Las respuestas a están preguntas permiten revisar la descomposición genética inicialmente planteada.

Arnon et al. (2014) no sugieren que una descomposición genética sobre un objeto sea única y tampoco describen exactamente lo que sucede en la mente de cada estudiante, sino que brinda un modelo que ayuda a comprender las construcciones mentales que aparecen en un alumno genérico.

A continuación, se muestran la descomposición genética preliminar para el límite de una función en un punto propuesta por Cotrill et al. (1996).

1. The action of evaluating the function f at a few points, each successive point closer to a than was the previous point.
2. Interiorization of the action of Step 1 to a single process in which $f(x)$ approaches L as x approaches a.
3. Encapsulate the process of 2 so that, for example, in talking about combination properties of limits, the limit process becomes an object to which actions (e.g., determine if a certain property holds) can be applied.
4. Reconstruct the process of 2 in terms of intervals and inequalities. This is done by introducing numerical estimates of the closeness of approach, in symbols, $0 < |x-a| < \delta$ and $|f(x) - L| < \epsilon$.
5. Apply a quantification schema to connect the reconstructed process of the previous step to obtain the formal definition of limit. As we indicated in our comments on the literature, applying this definition is a process in which one imagines iterating through all positive numbers and, for each one called ϵ, visiting every positive number, calling each δ this time, considering each value, called x in the appropriate interval and checking the inequalities. The implication and the quantification lead to a decision as to whether the definition is satisfied.
6. A completed ϵ-δ conception applied to specific situations.

Figura 18: Descomposición genética preliminar del límite

Fuente: Cotrill et al. (1996, p. 9 y 10)

Podemos observar en la figura que se muestran las relaciones entre construcciones mentales que un alumno debe realizar para comprender el concepto del límite (por ejemplo, la acción de evaluar la función en puntos cercanos a otro, cuando el alumno interioriza esta acción se convierte en proceso). A partir de esta DG, los autores plantean una secuencia de actividades que deberían ser las activadoras para que los alumnos realicen cada una de estas construcciones. Las descripciones de estas actividades se muestran en el resumen presentado en las investigaciones de referencia. Luego, analizan los resultados y realizan los ajustes necesarios. En esta investigación, los autores realizaron dos ajustes: incluir un paso previo al primero y en el paso 3 se explicitan los mecanismos. La DG revisada por los autores, con los ajustes mencionados, se muestra a continuación:

1. The action of evaluating f at a single point x that is considered to be close to, or even equal to, a.
2. The action of evaluating the function f at a few points, each successive point closer to a than was the previous point.
3. Construction of a coordinated schema as follows.
   (a) Interiorization of the action of Step 2 to construct a domain process in which x approaches a.
   (b) Construction of a range process in which y approaches L.
   (c) Coordination of (a), (b) via f. That is, the function f is applied to the process of x approaching a to obtain the process of $f(x)$ approaching L.
4. Perform actions on the limit concept by talking about, for example, limits of combinations of functions. In this way, the schema of 3 is encapsulated to become an object.
5. Reconstruct the processes of 3(c) in terms of intervals and inequalities. This is done by introducing numerical estimates of the closeness of approach, in symbols, $0 < |x-a| < \delta$ and $|f(x) - L| < \epsilon$.
6. Apply a quantification schema to connect the reconstructed process of the previous step to obtain the formal definition of a limit.
7. A completed ϵ-δ conception applied to specific situations.

Figura 19: Descomposición genética revisada del límite

Fuente: Cottrill et al. (1996, p. 9 y 10)

El ciclo ACE

Según Arnon et al. (2014), el ciclo ACE es un diseño pedagógico que cuenta con tres componentes: actividades (A), discusión en clase (C) y ejercicios fuera de clase (E). La primera etapa de este diseño es el de Actividades (A) que consta de trabajos cooperativos con tareas diseñadas para que logren las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética. Los autores plantean que las actividades computacionales (programar) promueven en el alumno la abstracción reflexiva, esto se respalda en los trabajos con diseños pedagógicos computacionales realizados por Dubinsky, a partir de los cuales, el autor observó que el trabajo exigente de programar, depurar y ejecutar un programa de computadora tenía un efecto positivo en cómo los estudiantes aprendían el concepto matemático. Por ello, plantea que una cuidadosa selección de actividades con la computadora podría favorecer el pensamiento de los individuos sobre un concepto matemático.

La siguiente parte del diseño, la discusión en clase (C) está dirigida por un instructor e implica un trabajo en grupos con los estudiantes con lápiz y papel, la idea es que estas se basen en las actividades de laboratorio completadas en la primera parte de Actividades. El objetivo de la discusión es dar a los alumnos el momento adecuado para la reflexión sobre su trabajo anterior con la guía del instructor que proporciona definiciones, explicaciones sobre lo que los alumnos ya han estado pensando.

La parte final del diseño con los ejercicios fuera de clase (E). Que consisten en problemas cuyo objetivo es el de reforzar las dos etapas preliminares (las actividades y la discusión en clase). Los ejercicios deben fomentar el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética.

Con la siguiente figura se puede visibilizar el diseño del ciclo ACE y su relación con la descomposición genética:

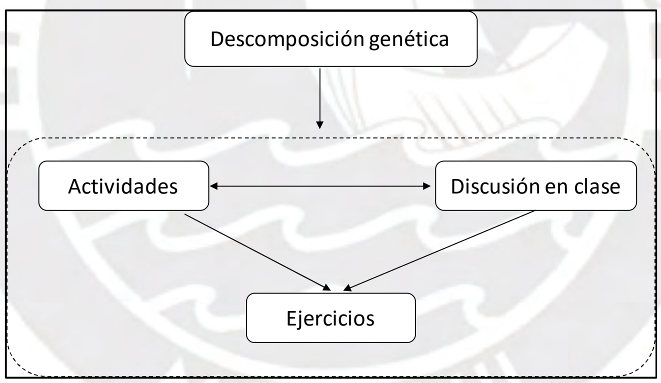


Figura 20: Relación entre la descomposición genética y el ciclo ACE

Fuente: Adaptado de Arnon et al. (2014)

Diálogo entre APOS y TAD

Como ya se mostrado previamente en los antecedentes, Trigueros, Bosch y Gascón (2011) presentan tres formas en las que las teorías APOE y TAD pueden dialogar. Para esta investigación, nos centraremos en el diálogo propuesto a partir de los componentes teóricos, específicamente a partir de la idea de paralelismo entre la DG de la teoría APOE y el MER de la TAD.

Los autores afirman lo siguiente:

- En primer lugar, plantean que, al igual que la DG, el MER es un modelo provisional que puede ser revisado y modificado. Y tal como indica, Barquero, Bosch y Gascón (2013) el MER tiene siempre carácter provisional ya que deben ser contrastados, revisados y posiblemente modificados.
- Dado que las investigaciones en el marco teórico del APOE aprovechan los datos provenientes de la experimentación (implementación de la secuencia de actividades diseñadas) para revisar sus DG, entonces los autores proponen que sus resultados pueden ayudar a complementar la metodología de la TAD. Es decir, estos resultados obtenidos pueden servir de herramienta complementaria con el que se puede contrastar y modificar cada MER construido.
- Por otro lado, los autores también resaltan que la DG se plantea en términos de las acciones que las personas deben llevar a cabo. Y estas acciones se explicitan en las secuencias diseñadas en términos de tareas matemáticas.

En esta sección del capítulo dos, se han presentado los elementos teóricos que se usarán para el desarrollo de esta investigación. Aclaramos que, aunque se han mencionado elementos de dos teorías cuyas bases se fundamentan en principios diferentes, tenemos en cuenta que el objetivo de la investigación es la de construir un modelo epistemológico de referencia (MER) asociado al concepto del límite, por lo tanto, se considera como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y al diálogo propuesto entre los elementos de la TAD y la teoría APOE. Los elementos de la teoría APOE sirven como insumos para este diálogo planteado, por ello han sido descritos en esta sección.

En la siguiente sección de este capítulo, se describirá la metodología a utilizar en la investigación. Para ello, primero se definirá qué se entiende por investigación cualitativa, cuáles son sus características, se definirá qué tipo de investigación cualitativa se usará en esta investigación y los pasos a utilizar.

2.2 Metodología y procedimientos

Investigación cualitativa

Para la siguiente investigación consideramos, en primer lugar, la definición de metodología que brindan Taylor y Bogdan (1987) y la definen como la manera como se enfoca un problema y se desarrolla la búsqueda de respuestas. Además, según Martínez (2006), las metodologías con enfoque cualitativo son aquellas que presentan características de la hermeneútica, fenomenológica, etnografía, etc. Es decir, son aquellas que tratan de describir, construir, comparar, evaluar y analizar una unidad de análisis.

Según, Taylor y Bogdan (1987), una investigación cualitativa debe mostrar las siguientes características:

- Debe ser inductiva, en el sentido en que los datos no buscan corroborar hipótesis preconcebidas, sino que se desarrollan comprensiones, conceptos y conclusiones a partir de estos datos obtenidos. Por ello, se indica que las investigaciones cualitativas tienen el carácter de ser flexibles. Esta investigación es inductiva ya que se plantea la construcción de un MER a partir de las observaciones obtenidas de la DG revisada de Pons (2014).
- Debe ser holística, en el sentido en que las unidades de análisis (personas, escenarios, etc.) no son consideradas como variables independientes sino son analizadas dentro de un todo. Es decir, las unidades de análisis deben ser consideradas dentro de su contexto (pasado y presente). Esta investigación tiene esa característica ya que se realizará la construcción de un MER del concepto límite de una función en un punto, mediante praxeologías cada vez más amplias que permiten responder a la cuestión de la razón de ser del concepto en sí.
- En la investigación cualitativa, se busca describir y entender a las unidades de análisis dentro de su marco de referencia. En esta investigación, se busca describir los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías asociadas al concepto del límite de una función en un punto. Las técnicas y tecnologías descritas están asociadas a las formas como se presentan las soluciones a las tareas en los libros de texto de cálculo.
- Es necesario que el investigador cualitativo considere todas las perspectivas como importantes. En esta tesis, se tomará como marco teórico los elementos de la Teoría Antropológica de la Didáctico (TAD) para realizar el análisis de las organizaciones matemáticas identificadas en un libro de texto; sin

embargo, este análisis se complementará con la visión de la descomposición genética desarrollada en la tesis doctoral de Pons (2014).

En el mismo sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2010) muestran las características que debe tener una investigación cualitativa:

a) En las investigaciones cualitativas se plantea un problema inicial, pero no se define unos lineamientos predeterminados estrictos que se debe seguir. En esta investigación, se plantea una pregunta de investigación inicial pero los pasos a seguir corresponden a la investigación cualitativa del tipo bibliográfica en general.
b) Las investigaciones cualitativas brindan perspectivas teóricas luego de la descripción y la observación de un fenómeno.
c) En las investigaciones cualitativas no se busca probar hipótesis planteadas inicialmente, sino que se van generando hipótesis durante el desarrollo de la investigación.

Los criterios b y c se pueden interpretar como la característica de inductividad que plantean Taylor y Bogdan (1987).

d) Para la investigación cualitativa, se obtienen datos cualitativos que corresponden a descripciones detalladas de las unidades de análisis. Estos datos no se obtienen de una medición numérica. En esta tesis, no se busca cuantificar alguna característica del límite de funciones en un punto, sino que se busca describirla a partir de las reconstrucciones de las organizaciones matemáticas correspondientes a este tema en un libro de texto.
e) Las técnicas más usadas en la investigación cualitativa son la observación no estructurada, entrevistas, revisión de documentos, etc. En nuestro caso, se realizará el análisis de un capítulo de un libro de texto y de la epistemología del concepto.
f) El procedimiento usado es flexible y su propósito es el de reconstruir una realidad tal y como la observan los participantes. Además, se considera como un proceso holístico porque busca considerar las unidades de análisis como parte de un todo.

Además, tanto Taylor y Bogdan (1987) como Hernández, Fernández y Baptista (2010) concuerdan en que el investigador debe buscar la menor participación posible en la investigación; sin embargo, de algún modo, sigue siendo parte del fenómeno estudiado.

Las definiciones mostradas nos dan una visión general de las características de la investigación cualitativa. En el área de investigación en educación matemática, Sierra (2011) sostiene que los procedimientos experimentales y cuantitativos no reflejan la complejidad de la actividad de enseñanza y aprendizaje y no permiten tener una visión más amplia del objeto de estudio. Por ello, afirma que muchos investigadores en la línea de las investigaciones en educación matemática optan por la metodología cualitativa.

A partir de las características de las investigaciones cualitativas brindadas, planteamos que esta investigación será del tipo cualitativa. En primer lugar, porque tiene por objetivo la descripción del concepto del límite a través de la construcción de un MER. Esta descripción se realizará a partir del análisis de los resultados obtenidos de la secuencia de actividades planteadas por Pons (2014) y a partir del análisis epistemológico del límite. En el plan de trabajo de esta investigación, se plantea en primer lugar, realizar un análisis epistemológico, que muestre las concepciones históricas que han surgido sobre el concepto del límite, así como también se evidencien los problemas que dieron origen a estas concepciones. También, se analizan aportes de otras investigaciones para la construcción del MER. Sobre la base del artículo de Trigueros, Bosch y Gascón (2011), se muestra cómo los criterios de construcción del MER pueden complementarse con los datos obtenidos del planteamiento de una DG del límite de una función de Pons (2014), de la secuencia de actividades propuestas, de los resultados obtenidos y del análisis implicativo. Es decir, se plantea un enriquecimiento del MER a partir de la DG. Finalmente, se presenta la construcción del MER como una secuencia de tareas que forman praxeologías con complejidad creciente.

Investigación cualitativa bibliográfica y documental

En cuanto a la investigación cualitativa de tipo bibliográfica, Férnandez y del Valle (2016) indican que se basa principalmente en la consulta de fuentes bibliográficas impresas o virtuales. Se caracteriza por realizar análisis a partir de la lectura de lo que otros autores han producido en el área de conocimiento que se está investigando. Además, plantean que la investigación bibliográfica es parte introductoria fundamental para cualquier disciplina debido a que las fuentes bibliográficas son recursos que brindan información, evidencias, argumentos y confrontación de discursos. Es sobre la base de ellos que un investigador puede elaborar su propia propuesta.

Por otro lado, Gil (2002) la caracteriza por trabajar sobre la base de un material ya elaborado (libros y/o artículos científicos). Además, el autor resalta que una de las ventajas más importantes de este tipo de investigación es la de poder acceder a una cobertura más amplia de su accionar, esto se da por la accesibilidad de la bibliografía requerida.

El autor afirma que hay una gran similitud entre las investigaciones del tipo bibliográfica y de tipo documental, y la principal diferencia entre ambas es la naturaleza de las fuentes usadas. Mientras que, en la bibliográfica, se toman fuentes bibliográficas, como las mostradas en la siguiente tabla, de diferentes autores y que se pueden encontrar en una biblioteca, en el caso de la documental, se trabaja sobre la base de documentos que no han sido tratados analíticamente como, por ejemplo, documentos de instituciones públicas o privadas. Al igual que en el caso de la bibliográfica, el autor resalta la ventaja de la investigación documental en el sentido de la accesibilidad de la información.

<table>
<tr><td rowspan="10">FUENTES BIBLIOGRÁFICAS</td><td rowspan="7">LIBROS</td><td rowspan="2">DE LECTURA ACTUAL</td><td colspan="2">OBRAS LITERARIAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">DIVULGACIÓN DE OBRAS</td></tr>
<tr><td rowspan="5">DE REFERENCIA</td><td rowspan="5">INORMACIÓN DEL REMITENTE</td><td>DICCIONARIOS</td></tr>
<tr><td>ENCICLOPEDIAS</td></tr>
<tr><td>ANUARIOS</td></tr>
<tr><td>ALMANAQUES</td></tr>
<tr><td>LIBROS DE TEXTO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PUBLICACIONES PERIÓDICAS</td><td colspan="3">PERIÓDICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">REVISTAS</td></tr>
<tr><td colspan="4">DOCUMENTOS IMPRESOS</td></tr>
</table>

Figura 21: Clasificación de las fuentes bibliográficas

Fuente: Rondan (2015, p.66)

Esta investigación cualitativa es del tipo bibliográfica ya que trabajará sobre la base del análisis de capítulos de libros de texto de cálculo, relacionados al concepto del límite de una función en un punto, presentado como bibliografía principal del curso de Cálculo Diferencial de la institución educativa seleccionada. Además, debido a que el MER debe ser construido para una institución, en este caso se define la institución como el curso de Cálculo Diferencial de la institución educativa universitaria, por ello, se revisarán el currículo del curso. Este último entraría en la categoría de documentos que no han sido tratados analíticamente y que pertenecen a una institución privada. Por ello, esta investigación es del tipo bibliográfica y documental.

Finalmente, la estructura del plan de trabajo de esta investigación será como se muestra a continuación:

1) Se realizará un análisis epistemológico del concepto del límite. (descrito previamente)
2) Se realizará un análisis sobre la formar de presentar el concepto del límite en tres libros de cálculo: Haaser (1992), Apostol (1983) y Leithold (1994). Se analiza si parte de un problema relacionado con alguna concepción histórica del límite, o surge de la necesidad de fundamento de otros conceptos.
3) Se realizará una descripción del concepto del límite en la institución en estudio. Se presentará la forma de enfocar este concepto a partir del análisis del currículo del curso y a partir del análisis praxeológico del libro de cálculo principal en la bibliografía del curso (Rogawski, 2012).
4) Se revisarán los aportes de la DG revisada de la tesis doctoral de Pons (2014) a partir de la propuesta del artículo de Trigueros, Bosch y Gascón (2011). Aquí se definirá de qué manera la DG de la teoría APOE aportará criterios complementarios para la construcción del MER de la TAD.
5) Finalmente, se realizará la construcción del MER.

Pasos de la investigación cualitativa bibliográfica y documental

Finalmente, Gil (2002) afirma que ambos tipos de investigaciones, bibliográfica y documental, usan los mismos procedimientos metodológicos. Para ello, el autor define 9 pasos; sin embargo, sugiere que, para seleccionar cuáles son los pasos a seguir en una investigación, se deben tener en cuenta muchos factores:

naturaleza del problema de investigación, conocimiento previo del investigador sobre la unidad de análisis, el grado de complejidad de la investigación, etc. A continuación, detallaremos algunos de esos pasos que servirán como método para este trabajo de investigación:

1) Elección del tema: Esta es la primera etapa de toda investigación. Según el autor, esta etapa debe realizarse después de haber reflexionado sobre los temas que sean de interés y conocimiento del investigador. En ese mismo sentido, Rivas (1995) complementa y propone que, para la correcta selección del tema, se debe tener en consideración la disponibilidad de un especialista en el tema, bibliografía disponible, el tiempo destinado a la investigación y que el trabajo pueda continuarse en el futuro. En esta etapa, esta investigación tiene por objetivo el análisis del concepto del límite de una función en un punto, ya que existen diversas investigaciones en educación matemática que muestran interés por el tema, algunas de ellas han sido presentadas en los antecedentes de esta tesis.
2) Levantamiento bibliográfico preliminar: en esta etapa, se busca que el investigador realice un estudio exploratorio sobre las investigaciones/trabajos relacionados al tema de investigación de manera que así se logre familiarizar con él. Este estudio debe involucrar investigaciones recientes del tema de manera que logre obtener una visión general del avance en el área de investigaciones de educación matemática. Este paso es necesario para lograr delimitar el problema de investigación de manera clara y precisa. En esa misma línea, Fernández y del Valle (2016) afirman que

   > Para poder entender más y tener un mayor manejo teórico del tema, se requiere, pues, del apoyo de aquellos textos que otros investigadores han escrito sobre el aspecto o fenómeno que nos interesa (…) este tipo de textos amplían nuestro conocimiento del tema a la vez que nos brindan un mayor contexto para nuestro saber. (Fernández y del Valle, 2016, p.53)

   De manera más detallada, Rivas (1995) afirma que para hacer la selección de las referencias se debe "…hacer el examen preliminar y decidir mediante el análisis de los títulos, oraciones, resúmenes, ilustraciones, tablas, diagrames, etc…" (p.113).

   Debido a la gran cantidad de investigaciones asociadas al tema de límite de una función en un punto, esta etapa es muy importante para que ayude a delimitar el enfoque en esta investigación. El estudio exploratorio se ha realizado tomando en cuenta el objeto matemático en estudio, así como también el marco teórico en cada uno. Aquí se ha delimitado a revisar investigaciones cuyos marcos teóricos han sido la TAD o el APOE. A partir de este estudio, se decidió que el marco teórico adecuado para el enfoque de este estudio será la TAD.

3) Formulación del problema: Debido a la complejidad de esta etapa, Gil (2002) propone las siguientes preguntas de manera que con ellas se evalúe si el problema propuesto es apto para la investigación:

   - ¿El tema es interés del investigador?
   - ¿El problema presenta relevancia teórica y práctica?
   - ¿Existe material bibliográfico suficiente y disponible para su planteamiento y solución?
   - ¿El problema se formuló de manera clara, precisa y objetiva? (p. 62)

   El autor resalta que es posible que en principio se defina un problema de investigación que pueda ser reformulado. Además, para el planteamiento del problema, se requiere una evaluación crítica de los diferentes enfoques teóricos de distintos autores de manera que se seleccione la perspectiva teórica adecuada para lo que se quiere investigar.

   Esta etapa en nuestra investigación corresponde al planteamiento del problema, del objetivo general y de los objetivos específicos.

4) Elaboración del plan provisional: en esta etapa, se busca que se defina una estructura inicial de trabajo, de manera que se identifiquen las partes que componen la investigación. En esta investigación, esta etapa se refleja en la construcción del índice identificando las componentes de los capítulos.

5) Identificación de las fuentes: A partir del paso 2 (Levantamiento bibliográfico preliminar), se deben identificar las fuentes que resulten necesarias para el desarrollo de la investigación. Estas fuentes pueden corresponder a libros, tesis, disertaciones, publicaciones en revistas científicas, etc. En esta etapa, se seleccionan aquellos artículos que ayuden a responder la pregunta de investigación.

6) Fichaje: en esta etapa, el investigador debe elaborar fichas de manera que sirva de registro de las fuentes seleccionadas en el paso anterior. Estas fichas deben contener resúmenes y deben tener una organización adecuada según criterios del investigador. En esta investigación, este registro se llevó a cabo en los antecedentes y los aspectos teóricos considerados para el estudio.

7) Construcción lógica del trabajo: en esta etapa, se busca la organización de las tareas a realizar para lograr responder a la pregunta de investigación planteada. Se busca una estructura lógica para el desarrollo de la investigación.

8) Redacción del informe: La secuencia y el estilo de la redacción son propias del investigador. En esta etapa de la investigación, se realizará la redacción del análisis de la organización matemática identificada para el límite de una función en un punto sobre la base del marco teórico definido. Finalmente, se redactarán las conclusiones y sugerencias de la investigación.

CAPITULO III: EPISTEMOLOGÍA DEL LÍMITE, LÍMITE EN LA INSTITUCIÓN EN ESTUDIO, ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

En este capítulo, presentaremos los resultados de un estudio epistemológico-histórico del concepto del límite de una función de los trabajos de Blázquez y Ortega (2002), Pons (2014), Medina (2017) y Boyer (1959). Además, se realizará un análisis de las praxeologías de algunos libros de cálculo seleccionados de manera que sirvan como paso inicial para la construcción del MER, que es el objetivo de esta investigación. Según Munzón, Bosch, y Gascón (2015), para construir un modelo epistemológico de referencia asociado a un concepto matemático, es necesario iniciar con los datos obtenidos del desarrollo histórico del concepto en la matemática. En este capítulo, se revisará, la evolución histórica del concepto del límite de una función, de manera que así se logre evidenciar las concepciones asociadas a este concepto a lo largo de la historia y las situaciones problema que están relacionadas y dieron origen a estas concepciones. Por otro lado, Sierra, González López (1999) reconocen que la transformación de la matemática hacia el contenido escolar (transposición didáctica, Chevallard, 1980) se refleja en los libros de texto, por ello, reconocen la importancia del análisis de libros de texto donde se visibilicen los cambios que se han producido sobre el concepto. Por ello, en este capítulo, también se revisarán las organizaciones matemáticas asociadas al concepto del límite en un libro de texto seleccionado.

3.1 Epistemología del límite de funciones

Para el concepto de límite, Sierra, González, López (1997), afirman que el análisis epistemológico de este concepto cumple tres objetivos: en primer lugar, evidencia que el concepto del límite se desarrolla en conexión con otros, en segundo lugar, al identificar los problemas relacionados con el límite, muestra el contexto donde se origina su concepción y, en tercer lugar, evidencia que la evolución del concepto del límite no ha sido siempre progresiva sino que involucra avances y retrocesos, así se evidencian los obstáculos que fueron apareciendo en su desarrollo. Respecto al primer objetivo, Medina (2017), en su investigación, menciona que para realizar la descripción de la evolución histórica del concepto del límite se debe realizar un recorrido histórico a las Matemáticas, ya que el límite de una función no ha surgido de manera independiente y autónoma, sino que su origen y desarrollo están asociados a otros conceptos matemáticos (de manera que conforman una red). Así, la autora muestra los conceptos matemáticos asociadas al desarrollo del límite en la siguiente figura:

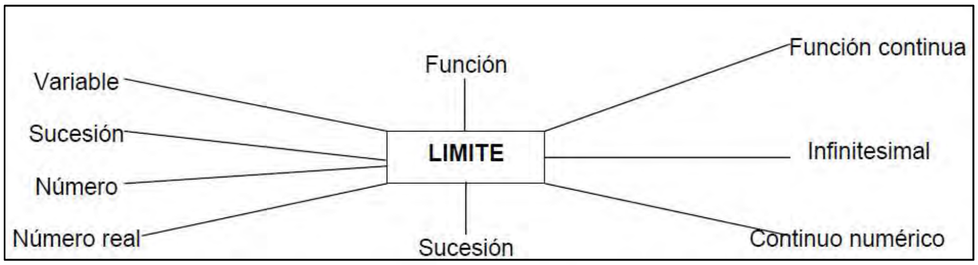


Figura 22: Concepciones asociadas al límite

Fuente: Medina (2000, p.4)

De esta figura, podemos observar y comentar de manera preliminar que, para desarrollar la definición del límite de una función, se realizaron estudios para entender y definir el infinitesimal. Además, la definición del límite se pudo desarrollar a partir de la teoría de funciones.

La evolución del concepto del límite es estudiada por diversos autores, que definen etapas según la concepción del límite en cada etapa. Aunque la mayoría reconoce que las separaciones entre las etapas no son completamente marcadas. Partiremos de las etapas definidas por Blázquez y Ortega (2002).

La epistemología del concepto del límite de una función no tuvo su origen en el campo del cálculo, ni parte de su definición formal. Sino que existen otros campos de las matemáticas que dieron origen a nociones relativas a él.

A continuación, realizaremos una descripción de la evolución histórica del límite orientada a la descripción de la concepción del límite. Estas concepciones han sido consideradas sobre la base de los trabajos de Blázquez y Ortega (2002), Pons (2014) y Medina (2000). Y sobre la base del libro de Boyer (1959) que evidencia algunos de los problemas que surgieron en cada etapa.

3.1.1 Concepción geométrica (De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII)

La primera concepción del límite es una idea muy intuitiva del límite como un proceso del paso al infinito. Sobre esta primera noción de límite, Blázquez y

Ortega (2002) identifican los siguientes problemas en los que el concepto del límite era necesario para su resolución (aunque no necesariamente fuese explicitado en las resoluciones):

a) Dada la fórmula del espacio en función del tiempo, obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio.

b) Obtención de la tangente a una curva. En óptica es necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general (cuando surgen nuevas curvas) pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva sólo sirve para algunas cónicas.

c) Estudio de máximos y mínimos de una función, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, etc.

d) Cálculo de áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria.

Figura 23: Problemas históricos asociados al concepto del lìmite

Fuente: Blázquez y Ortega (2002, p.3 y 4)

A continuación, se revisarán los problemas y los métodos infinitesimales usados para su resolución en orden cronológico de manera que así se mostrará la concepción del límite a lo largo de la historia del cálculo.

En la época griega, el límite no es concebido como un concepto matemático ni como operación matemática; sin embargo, la noción de límite está implícita en el método de exhaución de esa época. Los problemas que surgen en esta época están relacionados al contexto geométrico y el límite es concebido (de manera implícita) como una aproximación de procesos geométricos infinitos.

Método de Exhaución: Atribuido a Eudoxo. Es un método que sirve para determinar una magnitud de una figura (área, volumen) a partir de una aproximación a otra figura a la que se pueda calcular esa magnitud. Eudoxo presenta un ejemplo que aparece en el Libro XII de los Elementos de Euclides, que consiste en aproximar el área del círculo a partir de polígonos regulares inscritos a él como se muestra en la siguiente figura:

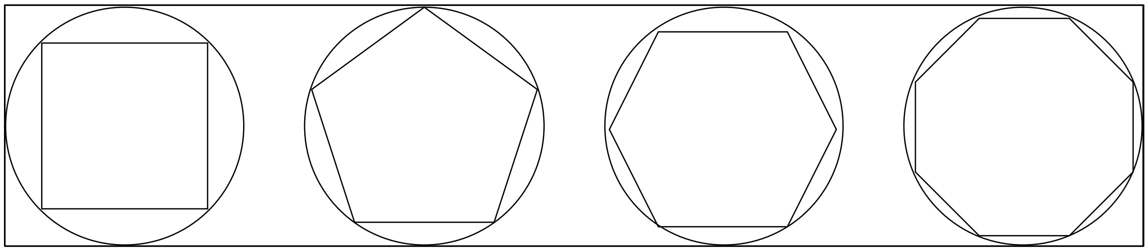


Figura 24: Aproximación del área con el método de exhaución

Fuente: Elaboración propia

Según, Ortiz (2005), Eudoxo plantea lo siguiente: "Lema. La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee." (p.114).

El método de exhaución es la primera noción que surge sobre lo que actualmente podemos describir como un límite al infinito. Sin embargo, según Boyer (1959), los griegos no consideraban este método como un proceso infinito.

Por ello, este método es considerado como una idea intuitiva de la aplicación del límite en un contexto geométrico.

Este método permitía aproximar el área del círculo tanto como se quiera mediante los polígonos inscritos; sin embargo, nunca se llegaba a calcular exactamente el área del círculo y no se planteaba que los polígonos inscritos se convirtieran eventualmente en el círculo pedido, por lo que se evidencia que predomina la concepción dinámica del límite (donde el límite es considerado como un proceso).

Debido a lo mencionado anteriormente, existía una brecha entre la línea curva y la línea recta de los polígonos que aún no había sido explorada. Además, según Boyer (1959), debido a que el aplicar este método era un proceso extenso, los matemáticos empezaron a buscar métodos más directos. En esa búsqueda, Arquímedes crea un procedimiento heurístico para hallar la longitud de un segmento parabólico que está basado en una anticipación del concepto de los indivisibles (que no explicita, pues menciona que el segmento parabólico está formado por líneas rectas, pero no menciona la cantidad de líneas rectas, es decir, no menciona que esté formado por infinitas líneas). Sin embargo, este método heurístico (que podría considerarse lo suficientemente riguroso actualmente) no tenía la demostración matemática suficiente según Arquímedes.

Así que, para ello, Arquímedes modifica el método de exhaución y le agrega el análisis de los polígonos circunscritos a la figura y usa una doble reducción al absurdo para su demostración.

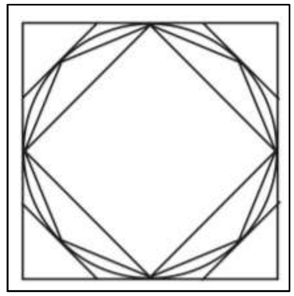
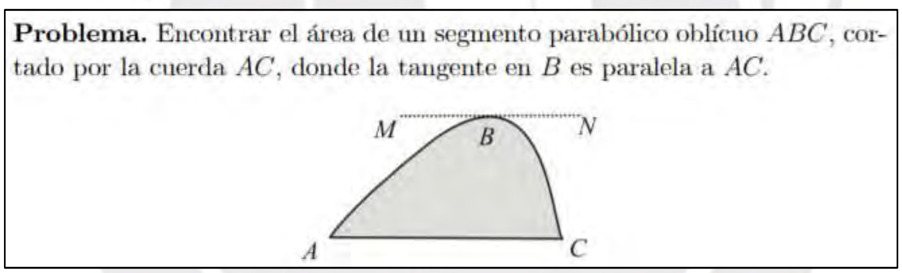


Figura 25: Modificación del método de exhaución por Arquímedes

Fuente: Ortiz (2005, p. 114)

Luego, Arquímedes utiliza su método heurístico para el cálculo de áreas y de volúmenes y el método de exhaución para la demostración. Ortiz (2005) ejemplifica problemas como los trabajados en su obra *La cuadratura de la Parábola.*



Problema. Encontrar el área de un segmento parabólico oblícuo ABC, cortado por la cuerda AC, donde la tangente en B es paralela a AC.

Figura 26: Problema del libro Cuadratura de la Parábola

Fuente: Ortiz (2005, p. 241)

Para el cálculo de área de un segmento parabólico, Arquímedes plantea una suma de infinitos términos de una sucesión (aunque no lo reconoce así). En lugar de eso, calcula la suma de los n términos de una sucesión y prueba que al aumentar la cantidad de término la serie se "exhausta". Este procedimiento sería el que actualmente demuestra la existencia del límite de una serie al infinito. Pero Arquímedes no llega a plantear que la suma es exactamente 4A/3 sino que lo demuestra con la doble reducción al absurdo (plantea que el área no puede ser mayor ni menor que el valor de 4A/3).

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}A.$$

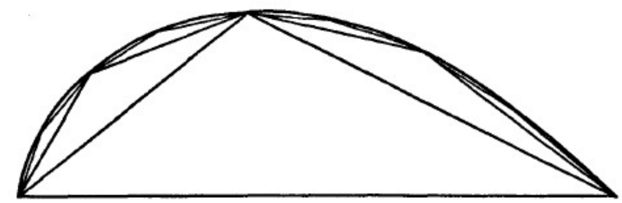


Figura 27: Método de exhaución con doble reducción al absurdo

Fuente: Boyer (1959, p.52)

Pero en los trabajos de Arquímedes, se evidencia que evita referenciar al infinito y a los infinitesimales debido a las escuelas de sus predecesores (escuela de Aristóteles, que no reconoce la existencia del infinito actual y restringe el uso del infinito solo al de infinito potencial).

Finalmente, Arquímedes no llegó a darle una definición satisfactoria de los infinitesimales, que luego llega a conseguirse con Newton y Leibniz.

Así, según Boyer (1959), en las matemáticas griegas siempre había una brecha entre una cantidad real (finita) y una ideal (infinita). Es decir, los matemáticos griegos excluyeron el uso del infinito en sus razonamientos. También se puede evidenciar que las nociones del límite surgieron en el ámbito geométrico y con nociones de límites de series al infinito.

Contreras (2001) afirma que, alrededor de 1100, se empieza a crear un clima intelectual, de manera que así se comienza a conocer los trabajos griegos (de Euclides y Arquímedes) en Europa. En ese entorno, la matemática infinitesimal se abre camino entre los escolásticos." Así surge, por ejemplo, Brawardine (1290-1349) que define dos tipos de magnitud infinita y Oresme (1323-1382) introduce la idea de disminución de la variación en las proximidades de un extremo y el cálculo de la distancia (área bajo la curva velocidad-tiempo) mediante la de la suma continua.

A continuación, veremos que la continuación del trabajo de los matemáticos griegos fue retomada en el Renacimiento. Según Pons (2014), esto se debe a la gran cantidad de obras griegas pertenecientes a las bibliotecas del Imperio Bizantino. Además, el autor afirma que la difusión del trabajo de los matemáticos griegos y en general la difusión del conocimiento puede estar relacionada a la invención de la imprenta en el año 1450. A continuación, revisaremos algunos métodos que se usaron en el siglo XVI, XVII e inicios del siglo XVIII.

Método de los infinitésimos de Kepler (1571-1630): Este método surgió para resolver problemas de cálculo de volúmenes y algunos relacionados a la astronomía. El método definido por Kepler, basado en el método de exhaución de Eudoxo, "consiste en considerar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos" (Blázquez y Ortega, 2002, p.4).

Según Pons (2014), en este método, se consideraban que los volúmenes estaban conformados por superficies y que las superficies estaban conformadas por líneas.

Método de los indivisibles de Cavalieri (1598-1647): Este método fue usado por Cavalieri para calcular el área de figuras planas y volúmenes de sólidos. Según Sierra, González, López (1997), este método "consiste en considerar como indivisibles a los elementos que constituyen una figura de dimensión mayor: los puntos son los indivisibles de un segmento; los segmentos, de figuras planas; las secciones planas, de sólidos." (p. 16)

Respecto a este método, Pons (2014) afirma que tenía deficiencias: la falta de dimensiones de los indivisibles hacía no adecuado su uso en el cálculo de longitudes de curvas y la complejidad del concepto de indivisible no permitía que fuera fácilmente explicable.

Método de Fermat (comienzos del siglo XVII)

Este método apareció en su obra "parábolas e hipérbolas de Fermat", aquí Fermat trabajó con curvas de ecuación $y = x^n$ (con n positivo para el caso de parábola o n negativo para el caso de hipérbola). En esos casos, Fermat buscaba hallar extremos de las curvas que llamaba "cumbres" o "valles". Este método consiste en tomar $f(x + E) = f(x)$, dividirlo entre E y finalmente tomar $E = 0$. Según Medina (2000), Fermat es considerado como el primer matemático en considerar un incremento diferencial, en la que se analiza el comportamiento de una variable dependiente a partir del incremento diferencial de la variable independiente.

Sobre los métodos de Kepler, Cavalieri y Fermat, Blázquez y Ortega (2002) afirman que estos métodos pueden ser considerados como el germen del análisis infinitesimal, pero es importante destacar que surgieron debido a las exigencias en contextos extra-matemáticos (mecánica, astronomía y física). Estos métodos funcionaban cada uno de manera separada a los otros y no había identificado su generalidad. A pesar de los métodos y procedimientos que se tenían hasta ese momento, Fermat no logró unificarlos en lo que actualmente llamamos análisis infinitesimal. En esa etapa ya se empieza a evidenciar la necesidad de una teoría que armonizara los métodos desarrollados y que les diera un carácter de universalidad. Por ello, surgen los trabajos de Newton y Leibniz que permitieron una evolución en el análisis infinitesimal. Así los problemas trabajados previamente fueron resumidos e identificados como problemas de diferenciación y antidifirenciación.

Concepción de Newton (1648-1727):

Según Sánchez-Compaña (2012), Newton, en el campo de la mecánica, crea la teoría de fluxiones, cuyo objetivo fue el de tratar los problemas de análisis infinitesimal. Y propone el Método de las Fluxiones en su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* en 1736, "donde se estudian magnitudes variables, introducidas como abstracción de diferentes formas del movimiento mecánico continuo, denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones." (Sánchez-Compaña, 2012, p.19 y 20)

Así, según Boyer (1959), x e y son para Newton los fluentes y sus fluxiones son $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En esta obra, Newton propone uno de los problemas más representativos del cálculo: dada la relación entre dos cantidades, hallar la relación de sus fluxiones y el mismo problema planteado de modo inverso. Como ejemplo, Newton demuestra la relación entre las fluentes de las variables x e y cuando se cumple que $y = x^n$, sustituye $x = x + \dot{x}_0$, $y = y + \dot{y}_0$ y utiliza el binomio de Newton para expandir la expresión y cancela los términos infinitamente pequeños. Así obtiene la siguiente relación: $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. Este procedimiento es el que demuestra lo que actualmente se conoce como el concepto de la derivada de una función.

Por otro lado, según Blázquez y Ortega (2002), Newton, en su obra *Tratatus quadratura curvarum* en 1704, explicita el método de las "razones primeras y últimas". Los autores muestran el problema asociado a este método.

> Fluya una cantidad x uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad x^n. En este tiempo, la cantidad x, al fluir, se convierte en $x+o$, la cantidad x^n resultará $(x+o)^n$; que por el método de las series infinitas es $x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$. Desvanézcanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a nx^{n-1}. Y por eso, la fluxión de la cantidad x es la fluxión de la cantidad x^n como 1 es la nx^{n-1} (Blázquez y Ortega, 2002, p.7).

Finalmente, sobre el trabajo de Newton, Medina (2000) afirma que su aporte más representativo fue el de evidenciar que, para calcular la razón de cambio instantánea, se necesitaba tomar en cuenta los procesos infinitos. Además, la autora afirma que la noción de límite está inmersa en los métodos de Newton.

Concepción de Leibniz (1646-1716):

“Al igual que Newton, (Leibniz) estuvo interesado en resolver problemas de movimiento y variación, pero mientras que a Newton le interesaba la descripción científica de la generación de magnitudes, a Leibniz le preocupaba la explicación metafísica de tal generación” (Boyer, citado en Medina, 2000).

Según Sánchez-Compaña (2012), con su Teoría sobre las diferenciales aporta al origen del cálculo infinitesimal. Leibniz estuvo motivado por buscar la claridad de los conceptos y por buscar darle carácter de formalidad en el campo de las matemáticas.

Según Blázquez y Ortega (2002), Leibniz se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la división de las diferencias de las primeras componentes y de las segundas componentes, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias; y que el área bajo una curva está relacionada con la suma de las áreas de los rectángulos que conforman esa área, estos rectángulos son considerados infinitamente estrechos. Además, afirman que Leibniz resolvió muchos problemas relacionados con las sumas de series, sin embargo, en esos trabajos, evitó definir la noción de “infinitamente pequeño”.

Newton y Leibniz tuvieron una enorme influencia en las matemáticas, en particular en el cálculo. Newton, motivado por la resolución de los problemas relacionados a la física, logró desarrollar la noción de las derivadas de mayor orden, así como también la regla de la cadena, la regla del producto, las series de Taylor y las funciones analíticas. Casi en paralelo, los trabajos de Leibniz contribuyeron en gran medida a la formalización del trabajo con las cantidades infinitesimales ya que logró desarrollar las derivadas de mayor orden, la regla de la cadena, la regla del producto. La gran diferencia entre ambos es que Leibniz puso mayor énfasis en el formalismo matemático. Después de los trabajos de Newton y Leibniz, la derivada y la integral dejan de ser solo herramientas para las nociones de tangentes, velocidad instantánea o cálculo de áreas, sino que se convierten en conceptos básicos del cálculo. Es por ello que es comúnmente aceptado afirmar que Newton y Leibniz son los creadores del cálculo diferencial.

3.1.2 Segunda etapa (segunda mitad del siglo XVIII)

Con la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de esa época pudieron resolver muchos de los problemas planteados. Así, luego, surge la necesidad de extender las operaciones desarrolladas en el cálculo infinitesimal hacia una mayor cantidad de funciones. Para ello, era necesario clarificar el concepto de una función y sus manipulaciones algebraicas y con ello surge la necesidad de darle una definición al límite funcional.

Euler (1707-1743):

Euler considera como base el cálculo diferencial de Leibniz y el método de fluxiones de Newton y los integra para crear una nueva rama de las matemáticas llamada Análisis. En esta rama, Euler se ocupa de estudiar los procesos infinitos y logra separar el cálculo de la geometría pues trabaja con funciones. Euler formaliza la teoría de funciones y define una función de la siguiente manera: “una función es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes.” El cálculo que define Euler se centra en el estudio de funciones, ya no necesariamente en el estudio de curvas. Según Boyer (1959), Euler, en su trabajo, logra realizar un estudio donde clasifica las funciones elementales junto con sus diferenciales e integrales.

En esa época, los matemáticos consideraban que lo que se cumplía para cantidades finitas también se cumplía para cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, del mismo modo pensaban que lo se cumplía en series convergentes debía también cumplirse en divergentes. Por ello, Euler se interesaba por los resultados y no en la fundamentación de los métodos desarrollados. Según Pons (2014), D´Alembert presentaba dudas sobre el trabajo de Euler con las series divergentes y consideraba errónea la necesidad de desvanecer una cantidad. Esto lo impulsa a brindar una primera definición del límite.

D´Alembert (1717-1783):

D´Alembert es el primero en crear la "Teoría de Límites" en su obra *Encyclopédie.* En ella, brinda la siguiente definición:

> Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad cuando la segunda puede aproximarse a la primera tan cerca como una cantidad dada, tan pequeña como se pueda suponer, sin que la cantidad que se acerca pueda sobrepasar la cantidad a la que se acerca; de suerte que la diferencia de una semejante cantidad a su límite es absolutamente inasignable (D'Alembert, 1765 en Enciclopedie, citado por Medina, 2000, p.12)

En esta definición se debe destacar que, aunque se aproxime de manera intuitiva a la definición que actualmente se tiene para el límite, tiene una restricción: la magnitud que se aproxima no puede "alcanzar el límite", es decir, no lo puede superar (es decir, solo considera el límite como un proceso de aproximación unilateral)

Según, Blázquez y Ortega (2002)

> La concepción que subyace a esta etapa es una concepción algebraica, puesto que los problemas de paso al límite, que se vinculan a las funciones, se resuelven con ayuda de operaciones algebraicas (manipulación de series, cálculos con infinitos), y, por tanto, las necesidades prácticas y la complejidad del concepto de límite reducen el análisis a un conjunto de cálculos algebraicos. (p. 10)

Esto se refleja en los métodos heurísticos en los que actualmente se hace énfasis en la enseñanza del límite.

Lagrange (1736-1813):

Según Sánchez (2012), Lagrange identifica el cálculo integral como el inverso del cálculo de derivadas. Lagrange también toma la concepción algebraica del límite. Según Medina (2000), Lagrange se vio influenciado por el "horror al infinito" y evita trabajar con el infinito y los infinitesimales. El trabajo de Lagrange se centró en el desarrollo de funciones en series de potencias (series de Taylor) y creyó que podría prescindir del concepto del límite.

En esta segunda etapa, el cálculo infinitesimal se ve relacionado al álgebra, incluso podría ser considerado como extensión del álgebra (Pons, 2014).

3.1.3 Tercera etapa (Siglo XIX y principios del siglo XX – Aritmetización del análisis)

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, los matemáticos observaron la necesidad de construir una teoría de límites como base del Análisis Matemático: es decir, la aritmetización del mismo. Esta búsqueda fue propiciada por el desarrollo del concepto de función, el surgimiento de nuevos problemas matemáticas y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas (debido a la Revolución Francesa, las matemáticas se convierten en una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica). Además, se evidencia la necesidad de la conceptualización del límite a partir de la necesidad de la clarificación de los conceptos de continuidad de funciones y derivada de una función. Ya que, a partir de las definiciones que brinda Bolzano para el concepto de continuidad y derivada, se evidencia la necesidad de la definición del límite de una función.

Sánchez (2012) afirma que hay uno de los motivos principales que impulsó el desarrollo de la concepción aritmética del límite fue que los infinitésimos no eran suficientes para resolver problemas relacionados con la convergencia o divergencia de las series de Taylor, o problemas relaciones con la resolución de ecuaciones diferenciales.

Las bases rigurosas del análisis matemático y en particular de la teoría de límites son atribuidos a los siguientes matemáticos: Bolzano, Cauchy y Weierstrass.

Bolzano (1781-1848):

No trabaja directamente la noción de límite. Pero logra plantear una definición de continuidad que evidencia la necesidad de la noción de límite en ella. Él define una función continua en un intervalo de la siguiente manera: para cualquier valor de x que pertenezca a este intervalo, la diferencia $f(x+\Delta x)-f(x)$ se convierte y sigue siendo menor que cualquier cantidad para Δx, suficientemente pequeña (positiva o negativa). (Boyer, 1959). Además, Bolzano también propone la siguiente definición para la derivada de una función: $F'(x)$ es el valor al que se aproxima infinitamente cerca el ratio $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero (con valores positivos o negativos). (Boyer, 1959). Esta definición de la derivada de una función evidencia la necesidad del concepto del límite para su definición.

Cauchy (1789-1857):

Cauchy rechaza el planteamiento de Lagrange y retoma el trabajo de D´Alembert y propone la siguiente definición para el límite:

> …, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Cauchy, citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 11)

La necesidad de la definición del límite surgió en base a la necesidad de la formalización de los conceptos de continuidad y derivada. Cauchy define así el concepto de continuidad de la siguiente manera: $f(x)$ es continua en un intervalo si el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a es $f(a)$, para cualquier valor a del intervalo. (Boyer, 1959). Y define así el concepto de derivada (que fue más precisa que la de Bolzano): Si la variable x de una función $f(x)$ tiene un incremento $\Delta x = i$, se forma el ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ y el límite de este ratio (cuando existe) cuando i se aproxima a cero se representa como $f´(x)$ y se llama la derivada de y respecto a x. Estas dos definiciones son las que actualmente se consideran para los conceptos de continuidad y derivadas y es Cauchy quien evidencia la necesidad de la formalización del límite para estos conceptos.

Así mismo, según Boyer (1959), Cauchy presenta una definición de la integral definida como el límite de una sumatoria, incluso menciona que el símbolo $\int$ debe ser entendido como el límite de una suma.

Según Medina (2000), antes de Cauchy, el límite era visto como una “noción instrumental” y Cauchy fue el primero en formalizar el concepto de límite como “objeto matemático”.

Las razones que impulsaron a Cauchy a establecer el concepto del límite fueron “los problemas prácticos de la cuerda vibrante y de la conducción del calor, el cambio social ocurrido en el interior de la comunidad matemática después de la Revolución Francesa” (Pons, 2014, p.18)

A partir de la definición de Cauchy, se propone la siguiente visualización para el concepto del límite: la circunferencia es definida como el límite de un polígono. Sin embargo, esta propuesta de ejemplo de límite trajo las siguientes cuestiones: ¿Los lados del polígono se convierten en puntos de la circunferencia? ¿El polígono se llega a convertir en la circunferencia? ¿Las propiedades del polígono y de la circunferencia son los mismos? Estas fueron las cuestiones que retardaron la aceptación de la definición del límite (Boyer, 1959).

Según, Pons (2014) la definición brindada por Cauchy evidenció imprecisiones ya que usa frases “aproximan indefinidamente a un valor fijo”, “un crecimiento infinitamente pequeño” que luego buscarán ser mejor precisados en el trabajo de Weierstrass.

Weierstrass (1815-1897):

Finalmente, Weierstrass contribuyó a la aritmetización del análisis brindando la definición satisfactoria de número real y otra del concepto del límite. La formulación que propone Weierstrass para el límite es considerada una concepción aritmética (Medina, 2000) e implica una formulación métrica y puramente estática (Blázquez y Ortega, 2002). La definición que brinda, que aparece en la obra de discípulo, es la siguiente:

> Si dado cualquier ε, existe un n_0, tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

A partir de este punto, la noción de límite sirve como soporte para conceptos más avanzados de cálculo (continuidad, derivada, integrales). Sin embargo, Blázquez y Ortega (2002) afirma lo siguiente:

> …esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye una cuarta etapa en el desarrollo del concepto. (p. 12)

La concepción del límite es esencialmente numérica en esta tercera etapa. Se observa una evolución desde la concepción dinámica del límite de Cauchy a la concepción estática de Weierstrass.

Luego, de identificar las concepciones asociadas al límite, entenderemos a partir de ahora las siguientes definiciones: definición dinámica (asociadas a las definiciones de D’Alembert y Cauchy), definición estática (asociada a la definición de Weierstrass).

Tabla 6: Definiciones dinámica y estática del límite

Definición dinámica o informal del límite	Definición estática o formal del límite

$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{L} \leftrightarrow$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima al valor de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f(x)}$ se aproxima al valor de $\boldsymbol{L}$.	$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x \in Dom(f)$, $0 < \lvert x - a \rvert < \delta \rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
Definición de D´Alembert: “Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad cuando la segunda puede aproximarse a la primera tan cerca como una cantidad dada, tan pequeña como se pueda suponer, sin que la cantidad que se acerca pueda sobrepasar la cantidad a la que se acerca; de suerte que la diferencia de una semejante cantidad a su límite es absolutamente inasignable” (D’Alembert, 1765 en Enciclopedie, citado por Medina, 2000, p.12) Definición de Cauchy: cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Cauchy, citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 11)	Definición de Weierstrass: Si dado cualquier ε, existe un n_0, tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

En esta primera parte del capítulo, hemos visto la evolución del concepto del límite, así hemos revisado las concepciones históricas asociadas al límite y las situaciones o problemas que fomentaron el desarrollo de cada concepción. Este análisis epistemológico es el paso inicial para revisar las transformaciones del concepto del límite hacia el contenido que se encuentra en los libros de texto. A continuación, se mostrará una descripción de la forma de abordar el concepto del límite en algunos libros de textos de cálculo seleccionados. Esta descripción es importante para la construcción del MER ya que, al evidenciar las transformaciones propias de la transposición didáctica del concepto en estudio, se pueden identificar “factores que posibilitan, condicionan, e incluso a veces impiden, la construcción de ciertos saberes en una institución determinada” (García y Sierra, 2015, p. 2).

3.2 Análisis de los libros de texto

Previamente, hemos revisado las concepciones históricas asociadas al límite. Luego, es necesario continuar con el estudio de la concepción del límite dentro de la comunidad matemática y orientado a la enseñanza de este concepto. Para llegar a analizar cómo este concepto sufre ciertas modificaciones para constituirse como concepto dispuesto a ser enseñado, revisaremos en primer lugar la noción de transposición didáctica, planteada por Chevallard en 1991.

Chevallard (1991) afirma que un contenido del saber que ha sido seleccionado para ser enseñado, sufre una serie de transformaciones de manera que este se transforme en un objeto de enseñanza. Al proceso en donde se transforma un saber sabio a un objeto de enseñanza lo llama transposición didáctica. A partir del siguiente esquema, Chevallard muestra el proceso de transposición didáctica:

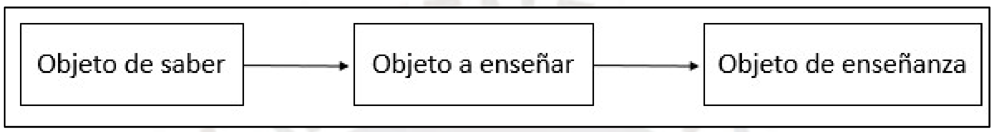


Figura 28: Esquema de la transposición didáctica

Fuente: Chevallard (1991)

En este esquema se pueden evidenciar tres estadios del objeto en estudio: se muestra la transformación del objeto desde el saber sabio hasta ser objeto de enseñanza. Para clarificar cada estadio, el autor presenta el siguiente ejemplo asociado al concepto de distancia:

> –la noción de *distancia* (entre dos puntos) se utiliza espontáneamente "desde siempre";
> –el *concepto matemático* de distancia es introducido en 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
> –en el primer ciclo de la enseñanza secundaria francesa, la noción matemática de distancia, surgida de la definición de Fréchet aparece en 1971 en el programa de la clase de cuarto curso (objeto a enseñar);
> –su tratamiento didáctico varía con los años a partir de su designación como objeto a enseñar: continúa el "trabajo" de transposición.

Figura 29: Ejemplo de los estadios de la transposición didáctica

Fuente: Chevallard (1980, p. 47)

En el caso de nuestro concepto en estudio: límite de una función en un punto, el objeto de saber se puede encontrar en la epistemología del concepto, que fue desarrollado en la sección anterior. El objeto a enseñar se refiere al resultado de realizar las transformaciones necesarias a este objeto de saber para convertirlo en un concepto dispuesto a ser enseñado. Esto se puede encontrar en los libros de texto relacionados a este concepto, en los manuales del curso o en los materiales usados en el curso (separatas de ejercicios, evaluaciones, etc). Según Bravo y Cantoral (2012), para analizar la transposición didáctica de un objeto matemático (saber sabio) a un objeto de enseñanza, los libros de texto resultan unidades de análisis tangibles. Es necesario realizar una investigación sobre la forma como los autores de libros de texto introducen, demuestran, explican y ejemplifican los conceptos matemáticos.

Además, sustentan su afirmación de la siguiente manera:

> Cuando la comunidad matemática produce conocimiento, comunica sus resultados con el propósito de mostrar su relevancia y su validez, de modo que no reproducen la ruta de pensamiento de su creación, sino que presentan el conocimiento nuevo en forma lo más axiomática posible para que sea factible la verificación de su validez. Esta comunicación da inicio a un proceso de transformación del conocimiento que constituye uno de los objetos de estudio centrales de la Matemática Educativa. (Bravo y Cantoral, 2012, p. 3)

Luego de ser comunicado y aceptado en la comunidad matemática, un conocimiento sufre otras transformaciones de manera que así es llevado a la escuela para ser enseñado. Entonces, vemos cómo estas transformaciones se inician en el desarrollo del concepto en la comunidad matemática; así, como el propósito de esta investigación es la de construir un MER para una institución educativa universitaria, planteamos la revisión de algunas de las modificaciones que sufre el concepto para convertirse en objeto a enseñar a través de los libros de texto. Los libros de texto, debido a que presentan de manera explícita sus explicaciones, teoremas, demostraciones, ejemplos propuestos y resueltos, etc, permiten identificar las características de las transformaciones que sufre un objeto en el proceso de la transposición didáctica. En ese sentido, Bravo y Cantoral (2012) afirman que

> …los textos son un punto esencial a lo largo del proceso de transposición del conocimiento matemático escolar; como también señala Jeremy Kilpatrick (1992): ellos nos proveen de una fuente en la cual algunos de los aspectos de la transposición didáctica pueden ser investigados. (p.4)

Entonces, se podría concluir que el análisis de los libros de texto corresponde al análisis de la transformación del objeto como objeto a enseñar. Sin embargo, esto no necesariamente es cierto para cualquier concepto y en cualquier institución educativa. Se debe tomar consideración que, para la institución educativa en estudio, el concepto del límite tal y como se presenta en los libros de texto de la bibliografía del curso, pasa por una transformación adicional correspondiente al encuadre que le dan al concepto los profesores del curso. Es en este encuadre que se define la manera de presentar el límite, la definición de límite, los teoremas válidos en la institución, los ejercicios propuestos y resueltos, etc. En esta investigación, se describen los estadios de la transposición didáctica de la siguiente manera:

Saber sabio	Saber a enseñar	Saber enseñado
Conocimiento validado por la comunidad matemática	Conocimiento delimitado por los profesores del curso	Conocimiento impartido en la escuela, en las aulas
Instituciones productores del saber: Epistemología del límite	Libros de texto de Cálculo Sistema Educativo: Programa analítico del curso, delimitación de las definiciones, teoremas y tipos de ejercicios	Implementación en las aulas: Clases correspondientes al límite, evaluaciones, materiales de trabajo en clase

Figura 30: Interpretación de la transposición didáctica en la investigación

Fuente: Elaboración propia

Por lo visto previamente, justificamos el análisis de los libros de cálculo relacionados al concepto del límite como parte del proceso de la construcción del MER, que es el objetivo de esta investigación. Y debido a que este MER se construirá para la institución educativa universitaria en estudio (específicamente para el curso de Cálculo Diferencial), también se revisará el programa analítico del curso.

Con respecto al análisis de los libros de texto de Cálculo, debido a la gran cantidad de producciones sobre el límite de una función, consideraremos que los libros seleccionados son los de Apostol (1983), Haaser (1992), Leithold (1994) y Rogawski (2012). Todos ellos son libros que fueron parte de la bibliografía de los cursos en los que se revisaba el tema de límite funcional.

Para cada libro de cálculo, se revisará el capítulo que incluya el concepto del límite. Se mostrará un resumen sobre la forma de presentar el concepto, la forma de presentar los teoremas y algunos de los problemas propuestos. Sin embargo, debido a la extensión del trabajo de descripción de cada libro, se resumirá cada uno y nos enfocaremos en la identificación de las praxeologías del libro de Rogawski (2012).

Haaser (1992)

El libro Análisis Matemático tiene 15 capítulos. El tema de límite se encuentra en el capítulo 8:"Límites y Derivadas". El cual se estructura de la siguiente manera:

Figura 31: Estructura del capítulo de Límites y Derivadas en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p.9)

El capítulo inicia con una introducción sobre algunos problemas que dieron origen al concepto del límite y resalta algunos matemáticos importantes en el desarrollo del concepto. En el punto 2: Tangentes, se presenta el problema de tangentes: calcular la recta tangente a una curva en un punto. En esta parte se presenta el problema mediante las aproximaciones con pendientes de rectas tangentes y se define la pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en el punto x_0 con la expresión: $f(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}, x \neq x_0$. Luego, definen que lo que se busca es aproximar $x - x_0$ a cero y mencionan la idea de que se busca el valor de $f(x)$ de tal manera que $x - x_0$ sea lo suficientemente pequeño. Para ello, presentan de manera directa el siguiente cálculo: $m = \lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Es importante destacar que previamente no se define lo qué es el límite de una función; además, tampoco muestran la forma de calcular ese límite. El cálculo del límite de manera intuitiva se realiza con el siguiente ejemplo:

2.2 Ejemplo. Encuéntrese la tangente a la parábola $y = g(x) = x^2$ en el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, x_0{}^2)$.

Figura 32: Ejemplo de introducción del límite en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p.336)

Para la solución de este ejercicio de introducción, plantean la siguiente expresión:

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$

Cuando $x \neq x_0, \frac{(x-x_0)}{x-x_0} = 1$. Entonces, si x está próxima a x_0, el factor $x + x_0$ está muy cercano a $2x_0$. Vemos como aquí se maneja la noción de límite como de un proceso de aproximación. Finalmente, el autor evidencia la falta de precisión de las frases “x es próximo a x_0” y “$x + x_0$ es próximo a $2x_0$”. Y así propone la necesidad de brindar expresiones más precisas, así presenta a $|x - x_0|$ como la distancia de x a x_0 y una forma de medir la proximidad de x a x_0. La aclaración de $x \neq x_0$, se traduce con la siguiente expresión $0 < |x - x_0|$. Finalmente, el ejercicio se replantea de la siguiente manera:

$$\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - 2x_0\right| = \left|\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} - 2x_0\right| = |x + x_0 - 2x_0| = |x - x_0| < \delta$$

Donde δ es algún número positivo. Con ello, demuestran que $\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - 2x_0\right|$ se puede hacer tan pequeño como deseamos si $|x - x_0|$ es lo suficientemente pequeño. Aquí podemos observar que el libro brinda en la introducción de su capítulo un problema que origina la noción de límite, luego presentan una manera de calcular de manera intuitiva y algebraica y finalmente busca la formalización de los términos usados mediante desigualdades (relacionada con la definición de Weierstrass). En el punto 3 del capítulo, se presenta la definición formal del límite:

3.1 Definición. *El número L se dice que es el* ***límite de la función*** *f* ***en*** *x_0 si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y*

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Las notaciones

$$\lim_{x_0} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite de f en x_0.

Figura 33: Definición de límite en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p. 338)

Y presentan la siguiente interpretación geométrica para el límite:

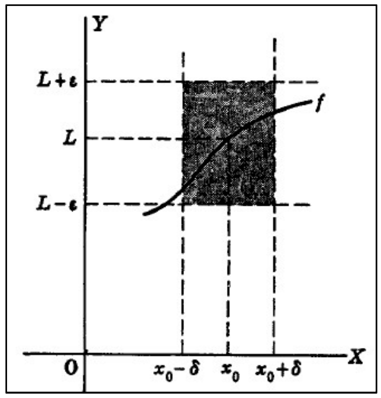


Figura 34: Interpretación geométrica del límite en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p. 339)

A partir de aquí, el trabajo con límite siempre se realiza siguiendo la definición formal presentada. Así, los ejemplos del libro muestran el cálculo de límites mediante desigualdades. Y los teoremas presentados en este punto 3 son los siguientes:

3.7 Teorema. $\lim_{x_0} f = L$ *si y sólo si* $\lim_{0} f \circ (x_0 + I) = L$. *Es decir, si alguno de los límites existe, el otro límite también existe y*

$$\lim_{x_0} f = \lim_{0} f \circ (x_0 + I).$$

3.14 Teorema. *Si* $\lim_{x_0} f = L_1$ *y* $\lim_{x_0} f = L_2$, *entonces* $L_1 = L_2$.

3.15 Teorema. *Si existe un intervalo abierto* $\mathfrak{J}$ *que contiene a* x_0 *tal que para todo* $x \neq x_0$ *en* $\mathfrak{J}$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *y si* $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = L$, *entonces* $\lim_{x_0} g$ *existe y* $\lim_{x_0} g = L$.

Figura 35: Teoremas de límites en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p. 343, 348 y 349)

Sobre el libro, podemos resaltar la rigurosidad del trabajo matemático presentado que se evidencia en la definición formal del límite desde la introducción del trabajo, así como del cálculo de límites mediante desigualdades. Además, cada uno de los teoremas propuestos presenta demostración matemática rigurosa.

Finalmente, en el punto 3 de este capítulo, se definen los límites laterales y el teorema sobre el cálculo de límites mediante la redefinición de una función:

3.18 Definición. *Sea $\mathcal{E}$ un conjunto y sea $f_{\mathcal{E}}$ la función con dominio $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f$ y regla de correspondencia*

$$f_{\mathcal{E}}(x) = f(x) \text{ para } x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f.$$

Entonces el ***límite de f en x_0 restringido a*** *$\mathcal{E}$ es L, escrito*

$$\lim_{x_0} f = L \quad (\text{sobre } \mathcal{E})$$

o

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f),$$

si y sólo si

$$\lim_{x_0} f_{\mathcal{E}} = L.$$

Hay dos casos especiales que son de particular importancia.

3.19 Definición. *El límite de f en x_0 restringido a $\mathcal{E} = \langle -\infty, x_0 \rangle$ se llama* ***límite izquierdo de f en x_0****.*

Las notaciones

$$\lim_{x_0^-} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite izquierdo de f en x_0.

3.20 Definición. *El límite de f en x_0 restringido a $\mathcal{E} = \langle x_0, \infty \rangle$ se llama* ***límite derecho de f en x_0****.*

Las notaciones

$$\lim_{x_0^+} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite derecho de f en x_0.

Figura 36: Definiciones de límites laterales en Haaser (1992)

Fuente: Haaser (1992, p. 351)

En el punto 4 de este capítulo, se presenta la demostración de los límites trigonométricos conocidos (mediante desigualdades) y no se presentan ejercicios resueltos. Y finalmente, el punto 5 presenta los teoremas sobre límites orientados a los métodos algebraicos para el cálculo del límite (suma, resta, multiplicación y división de límites). Sin embargo, no se presentan formalmente las técnicas de factorización, simplificación, multiplicación de una conjugada ni se menciona el término de indeterminación, que actualmente se usa. Además, en el punto 5, solo se presentan dos ejercicios resueltos. Aquí se evidencia que en los puntos 4 y 5, relacionados al cálculo del límite, el enfoque del libro se orienta a las demostraciones de los teoremas propuestos y no a los procedimientos utilizados en el cálculo en sí.

De manera general, el libro busca dar la definición del límite con la rigurosidad con la que se trabaja en la definición de Weierstrass y no se centra en los métodos algebraicos para el cálculo del límite. Vemos como presenta el límite de modo que su enfoque se centre en los teoremas y sus demostraciones. Y el objetivo es brindar la rigurosidad de la definición del límite como fundamento matemático para los conceptos de continuidad y derivada que son parte de ese capítulo, por ello cada teorema dado en el libro presenta su demostración mediante la definición formal del límite (y usando desigualdades). También podemos observar que no existe un enfoque tabular ni gráfico para la noción del límite, es decir, no se presenta una noción intuitiva del límite, ni se desarrolla en relación a la noción de sucesión. Finalmente, en el siguiente gráfico, presentamos un esquema de la forma de presentar el concepto del límite de una función en un punto en Haaser (1992):

Introducción	**Definición del límite**	**Cálculo de límites**
• Problema de tangente de una curva en un punto • Método algebraico-intuitivo del cálculo del límite • Necesidad de la formalización de los términos usados en términos de desigualdades • Cálculo del límite mediante desigualdades • Ejercicios propuestos	• Definición formal/estática del límite en términos de desigualdades • Teorema del cambio de variable en límites • Teorema de la unicidad del límite • Teorema del sándwich • Límite de una función mediante el límite de otra con igual entorno • Definición de límites laterales • Ejercicios propuestos	• Presentación y demostración de algunos límites trigonométricos "notables" • Teoremas sobre límites: suma, resta, multiplicación y cociente de límites • Ejercicios propuestos

Figura 37: Esquema de trabajo del concepto del límite en Haaser (1992)

Apostol (1983)

El libro Calculus presenta 16 capítulos y el tema de límites es abarcado en el Capítulo 3: Funciones continuas. Este capítulo, se estructura de la siguiente manera:

3. FUNCIONES CONTINUAS

Figura 38: Estructura del capítulo Funciones Continuas en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p.15)

Antes de revisar la forma de presentar el concepto del límite de una función, destacaremos la introducción presentada en el libro como un capítulo preliminar: en donde muestra algunos de los problemas que permitieron el desarrollo del Cálculo. En esta introducción, se hace una descripción del método de exhaución usado por Arquímedes para el área de una región circular y a partir de él, se propone la tarea del cálculo de área de un segmento de parábola con el método de exhuación. Esta tarea es desarrollada en el libro mediante la división de la figura en rectángulos y se obtienen dos aproximaciones del área, una por defecto y otra por exceso.

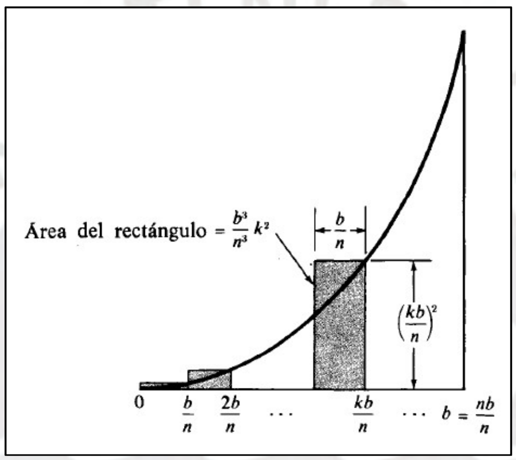


Figura 39: Cálculo del área del segmento parabólico propuesto en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 29)

Luego, el cálculo de áreas se plantea mediante una sumatoria de las áreas de los rectángulos en los que se divide la figura. Se propone que el área de la región será la suma de las áreas de los rectángulos exteriores (por exceso) y los rectángulos interiores (por defecto). Esta introducción, aunque no menciona explícitamente la noción de límite, está relacionada a esta debido a uso del método de exhaución (que, como se ha visto en el análisis epistemológico, estaba relacionado con la noción de límites al infinito).

El tema de límite es presentado dentro del capítulo de Funciones continuas (en el punto 1), el cual inicia con una noción intuitiva de continuidad (previa a la definición del límite):

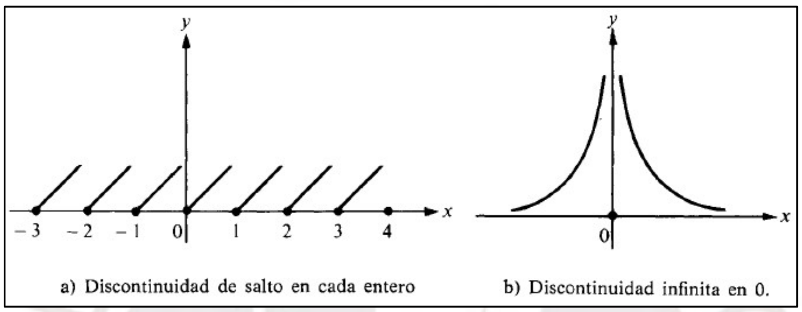
Prescindiendo del rigor podemos presentar el asunto así: Supongamos una función f que tiene el valor $f(x)$ en un cierto punto p. Se dice que f es continua en p si en todo punto próximo x el valor de la función $f(x)$ es próximo a $f(p)$.

Otro modo de expresar este hecho, es el siguiente: Si x se mueve hacia p, el correspondiente valor de la función $f(x)$ debe llegar a ser tan próximo a $f(p)$ como se desee, cualquiera que sea la forma con que x tienda a p. En los valores de una función continua *no* se presentan saltos bruscos

Figura 40: Noción intuitiva de continuidad en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 179)

Además, se muestran dos casos de discontinuidad gráficamente:



a) Discontinuidad de salto en cada entero
b) Discontinuidad infinita en 0.

Figura 41: Dos tipos de discontinuidad en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 179)

En la descripción de estos casos de discontinuidad se evidencia la presencia de frases que evidencian la presencia de la noción de aproximación. Sobre el primer gráfico: “Por ejemplo, $f(2) = 0$, pero cuando el valor de x tiende a 2 por la izquierda, $f(x)$ tiende al valor de 1, que no coincide con $f(2)$…$f(x)$ tiende a $f(2)$ si x se aproxima a 2 por la derecha…”

Luego, el autor presenta la evidencia de la necesidad de la definición de la continuidad de una función a partir de los trabajos de Fourier. Menciona que, para definir correctamente este concepto, se debe definir previamente el concepto del límite. Aquí podemos inferir que el concepto de límite de una función está orientado en el libro a dar sentido matemático a la noción de continuidad.

Así, autor introduce la siguiente notación para el límite:

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p, si bien no debemos insistir en que f esté definida en p. Sea A un número real. La igualdad

$$\lim_{x \to p} f(x) = A$$

se lee: «El límite de $f(x)$, cuando x tiende a p, es igual a A», o «$f(x)$ tiende a A cuando x tiende a p». También se escribe sin el símbolo de límite, como sigue:

$$f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to p\,.$$

Figura 42: Notaciones sobre límites en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 180)

Para brindar la definición de límite de una función, el autor introduce primera la noción de entorno en un punto.

DEFINICIÓN DE ENTORNO DE UN PUNTO. *Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.*

Notación. Designemos los entornos con $N(p)$, $N_1(p)$, $N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama *radio* del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x, cuya distancia a p es menor que r.

Figura 43: Definición de entorno de un punto en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 181)

Esta noción de entorno permite al autor plantear la definición de límite de la siguiente manera:

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. *El simbolismo*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [o \quad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

(3.1) $\qquad f(x) \in N_1(A)$ *siempre que* $x \in N_2(p) \quad$ *y* $\quad x \neq p\,.$

Figura 44: Definición de límite en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 181)

Esta definición de límite también es presentada gráficamente de la siguiente manera:

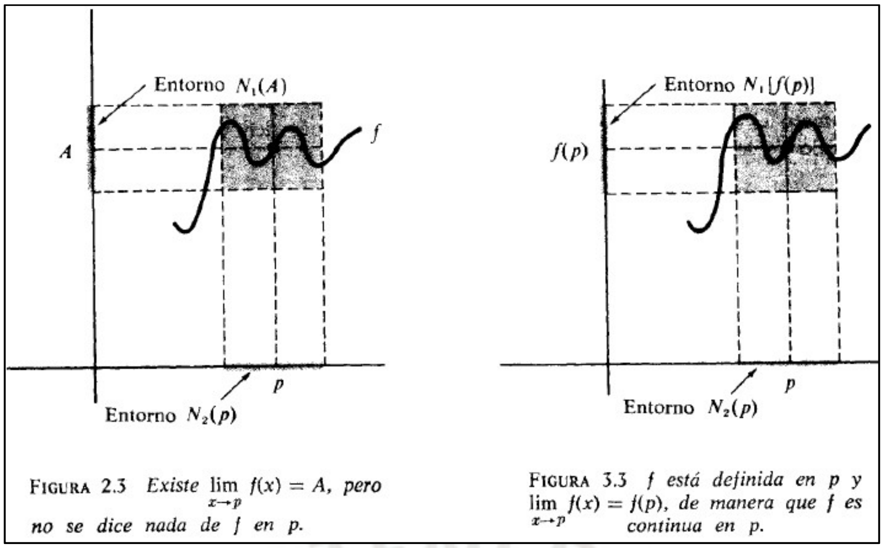


Figura 45: Representación gráfica de la noción de límite en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 182)

Nuevamente, podemos observar en el segundo gráfico cómo la noción de límite está relacionada a la noción de continuidad, de manera que se presenta el límite como concepto necesario para la definición de continuidad. También, podemos observar que el autor brinda una definición rigurosa del límite (asociada a la definición aritmética de Weierstrass). A partir de esta noción de entorno, el autor la traduce en términos del radio del entorno y de las distancias hacia el centro. Así define que decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$ y, del mismo modo, $x \in N_2(p), x \neq p$ es equivalente a la desigualdad $0 < |x - p| < \delta$. Así presentan la definición de Weierstrass para el límite:

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

(3.2) $$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta .$$

Figura 46: Definición formal de límite en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 182)

Al igual que en el caso del Haaser (1992), en este libro se presenta el teorema del cambio de variable para el límite; sin embargo, esta es presentada de manera menos estricta que en el Haaser de la siguiente manera:

Al considerar límites cuando $x \to p$, conviene a veces designar la diferencia $x - p$ con el nuevo símbolo h, y hacer luego que $h \to 0$. Esto implica tan sólo un cambio de notación, porque, como se comprueba fácilmente, las dos igualdades siguientes son equivalentes:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{h \to 0} f(p + h) = A .$$

Figura 47: Teorema sobre límites en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 183)

Al igual que en el caso del Haaser (1992), a continuación, se presenta la demostración de los límites de las funciones constante e identidad.

Los límites «laterales» pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el *límite por la derecha* de f en p, e indicamos esto poniendo

$$\lim_{x \to p+} f(x) = A .$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{siempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad y \qquad x > p. \tag{3.3}$$

Los límites a la izquierda, que se indican poniendo $x \to p-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

Figura 48: Definición de límites laterales en Apostol (1983)

Fuente: Apostol (1983, p. 183)

A partir de la definición de los límites laterales, se afirma que si f tiene límite A en p, también tiene límite a la derecha y a la izquierda de p, siendo ambos iguales a A. Es interesante destacar que esta definición sobre el valor del límite relacionada a los límites laterales no es presentada como una definición, ni teorema en el libro.

El punto 3 del capítulo está relacionada a la definición de continuidad: que se da en relación a la noción del entorno de un número y en relación a las desigualdades planteadas a partir de las distancias hacia el centro del entorno.

El punto 4 de este capítulo está relacionado a los teoremas fundamentales sobre límites (suma, resta, multiplicación y cociente de límites). Estos teoremas luego servirán para demostrar los teoremas acerca de la suma, resta, multiplicación y cociente de dos funciones continuas. Y en el punto 5, se presentan las demostraciones de los teoremas fundamentales de límites presentadas en el punto 4, estas demostraciones se basan en la definición formal del límite, en términos de desigualdades.

De manera general, este libro introduce la noción de entorno de un punto como una introducción a la definición estática del límite (definición de Weierstrass). Es evidente que, debido a la forma de presentar el concepto y la forma de presentar sus teoremas, el concepto del límite tiene por objetivo brindar el fundamento matemático necesario para el concepto de continuidad. Vemos cómo se presenta el límite y sus teoremas de manera que le den sentido y rigurosidad matemática a la definición y teoremas del concepto de continuidad. Además, este libro no se centra en las demostraciones de los teoremas relacionados al límite debido a que estas son presentadas en un apartado final; sin embargo, sí se mantiene la misma rigurosidad matemática en las demostraciones que las presentadas en el Haaser (1992). Además, en este libro, debido a la cantidad de problemas desarrollados sobre el cálculo de límites, podemos afirmar que tampoco se centra en presentar los métodos algebraicos asociados a este. Como ya se ha mencionado, el enfoque principal sobre el límite funcional en este libro es el de sustentar las definiciones y los teoremas relativos al concepto de continuidad. Por otro lado, también podemos observar que no se presenta una noción intuitiva del límite mediante la gráfica de la función o mediante una representación tabular. Finalmente, en el siguiente gráfico, presentamos un esquema de la forma de presentar el concepto del límite de una función en un punto en Apostol (1983):

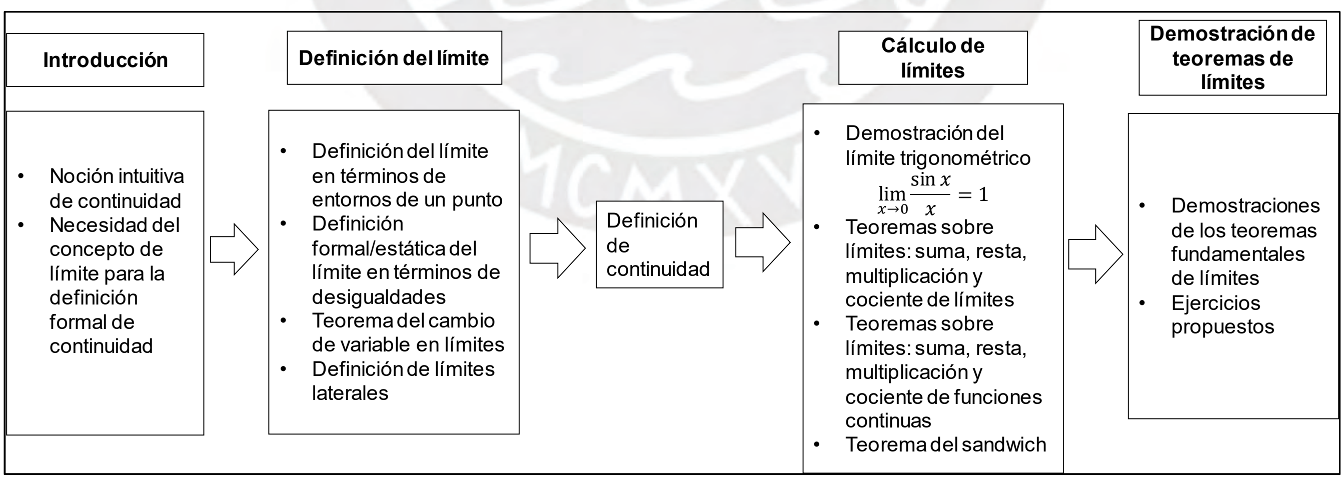


Figura 49: Esquema de trabajo del concepto del límite en Apostol (1983)

Leithold (1994)

En el libro El Cálculo se presentan 14 capítulos y el tema de límites se trabaja en el capítulo 1: Funciones, límites y continuidad. La estructura de este capítulo se muestra a continuación:

Figura 50: Estructura del capítulo de Funciones, límites y continuidad en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p.6)

Sobre este capítulo, vemos que para la noción del límite no se presenta una introducción relacionada a la evolución histórica del concepto o los métodos asociados a este. Sin embargo, se inicia con una introducción gráfica a los límites de funciones. Para ello se trabaja con el caso de la función: $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$ que no está definida en $x = 1$. Se presenta la tarea de analizar hacia qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de 1. Para ello, usan una representación tabular de la función alrededor del punto 1 como se muestra en la siguiente imagen:

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0.25	3.5
0.5	4
0.75	4.5
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

Tabla 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1.75	6.5
1.5	6.0
1.25	5.5
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

Figura 51: Límite de una función a partir de su representación tabular en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p.54)

A partir de los datos de la tabla, muestra un análisis intuitivo del valor del límite de la función en el punto 1 ya que cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ se aproxima a 5. Sin embargo, este análisis intuitivo del límite se acompaña de un análisis aritmético de la siguiente forma: "se observa que cuando x difiere de 1 por ± 0.001 (esto es $x = 0.999$ o $x = 1.001$), $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.002 (es decir $f(x) = 4.998$ o $f(x) = 5.002$). Y cuando x difiere de 1 por ± 0.0001, $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.0002." (Leithold, 1994, p. 54) Con este análisis, representan el análisis de la siguiente forma: "Es posible hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cercanos de 5 como se desee, si se toman valores de x suficientemente cercanos a 1; esto es $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee haciendo $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño.

Luego, presentan ese mismo análisis en términos de las diferencias pequeñas (ε, δ). Así, establecen que: si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Esta representación que brindan corresponde a la definición formal del límite (definición de Weierstrass). Además, reconocen que la función puede presentarse de este modo:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} \rightarrow f(x) = 2x + 3 \quad , \; x \neq 1$$

A partir de ella, presentan el análisis previo de manera gráfica como se muestra a continuación:

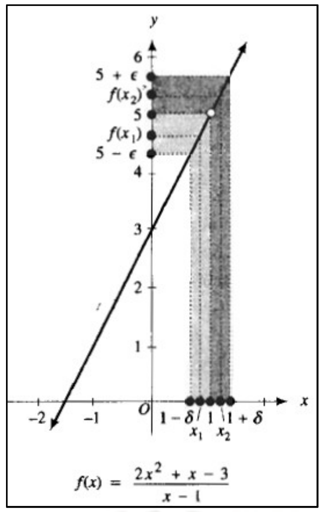


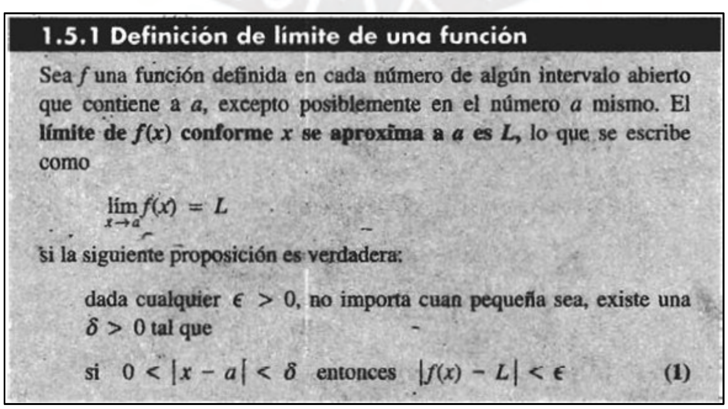
Figura 52: Representación gráfica del límite de una función en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 55)

Luego, el autor presenta una forma de encontrar un valor δ para ciertos valores de ε dados. Y llegan a la siguiente conclusión: siempre se puede encontrar un valor de δ que depende del valor de ε elegido, de tal manera que se cumpla que si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Con esto, se establece que " el límite de $f(x)$ cuando x tiende a se aproxime a 1, es igual a 5, o expresado con símbolos $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$." (Leithold, 1994, p. 56)

Finalmente, el autor hace la aclaración de que la expresión $0 < |x - 1|$ asegura la consideración de los valores de $f(x)$ cuando x esta cerca de 1, pero no para el caso de $x = 1$.

Luego, de la introducción de la definición con el caso de la función seleccionada, el libro de texto formaliza de la siguiente manera:



1.5.1 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:

dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

si $\quad 0 < |x - a| < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad$ **(1)**

Figura 53: Definición del límite en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 63)

Aunque esta definición corresponde a la definición estática del límite, la complementan con la siguiente afirmación (que puede mostrar una visión dinámica):

> En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Figura 54: Concepción dinámica del límite en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 64)

Esta definición es acompañada por la siguiente representación gráfica:

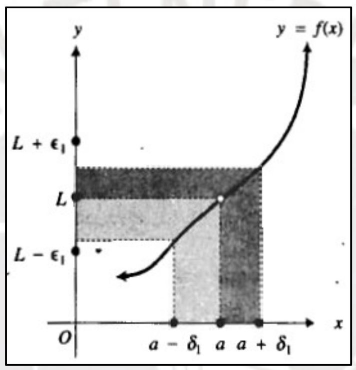


Figura 55: Representación gráfica de la definición del límite en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 64)

Luego, el autor se centra en la presentación de los teoremas que simplificarían el cálculo del límite: presenta y demuestra, con desigualdades, el límite de una función lineal, constante y la función identidad. Adicionalmente, se presentan los teoremas fundamentales del límite (suma, diferencia, producto, potencia, cociente y raíz n-ésima de límites). Con estos teoremas propuestos, el autor busca la simplificación de los métodos usados para el cálculo del límite. Por ello agrega los siguientes teoremas:

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Figura 56: Teoremas sobre límites en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 69 y p. 70)

Con ello, resuelve problemas sobre el cálculo del límite y presenta el caso de un límite indeterminado donde evidencia que los teoremas previamente brindados no son suficientes. En estos ejemplos presenta casos donde el factor que causa la indeterminación se puede simplificar en el numerador y en el denominador. Sin embargo, no presenta los teoremas que respaldan este proceso y los justifica de la siguiente manera:

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Si $x \neq 5$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 5$ para obtener $x + 5$. Recuerde que cuando se calcula el límite de una función conforme x se aproxima a 5, se consideran los valores de x cercanos a 5, pero sin tomar este valor. Por tanto, es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 5$. La solución se expresa en la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5} (x + 5) \\ &= 10 \qquad \textbf{(T. 1 L.)} \end{aligned}$$

◀

Figura 57: Caso de límite indeterminado en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 70)

Finalmente, esta sección se termina con la presentación de los siguientes teoremas:

1.5.14 Teorema

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

1.5.15 Teorema

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$

1.5.16 Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Figura 58: Teoremas sobre límites en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 71)

Aquí podemos observar una clara orientación del libro hacia el cálculo de límites, ya que presentan los teoremas de manera directa y se centran en presentar su aplicación. Las demostraciones de los teoremas se complementan en los anexos.

El siguiente punto en este capítulo corresponde a los límites laterales. Para ello, inician con la siguiente definición:

1.6.1 Definición de límite por la derecha

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

1.6.2 Definición de límite por la izquierda

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Se referirá al $\lim_{x \to a} f(x)$ como el **límite bilateral** para distinguirlo de los límites laterales.

Los teoremas 1 a 10 de límites estudiados en la sección 1.5 siguen siendo válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Figura 59: Definición de límites laterales en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 75)

Y así formalización la existencia del límite mediante los límites laterales:

1.6.3 Teorema

El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Figura 60: Teorema de la existencia del límite en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 75)

A partir de los capítulos anteriores, se presentan ejemplos en donde no se utiliza la definición formal del límite para su solución. Es decir, solo se trabajan casos donde es posible calcular el límite con la ayuda de los teoremas brindados. Y casos en donde el límite lateral obtenido es un valor real.

Más adelante, se presentan los casos donde los límites laterales son infinitos a partir del siguiente ejemplo: $f(x) = \frac{2}{x^3}$ (junto con su gráfica). La introducción de límites infinitos se da de manera intuitiva a partir de su representación tabular:

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.25	48
0.1	300
0.01	30 000
0.001	3 000 000

Observe en esta tabla que $f(x)$ crece conforme x se aproxima cada vez más a 0, a través de valores mayores que 0. En realidad, se puede hacer $f(x)$ tan grande como se desee para todos los valores de x suficientemente cercanos a 0 y mayores que 0. Debido a este hecho, se dice que $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 mediante valores mayores que 0, lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Figura 61: Noción intuitiva de límites infinitos en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 81)

Luego, se formaliza la definición del límite al infinito en términos de desigualdades; sin embargo, se mantiene la interpretación intuitiva como se muestra a continuación:

1.7.1 Definición de valores de función que crecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (1)$$

si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Esta definición también puede establecerse en otra forma como sigue: "Los valores de función $f(x)$ crecen sin límite conforme x tiende a un número a si $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee (esto es, mayor que cualquier número positivo N) para todos los valores de x suficientemente cercanos a a, pero sin considerar a a, mismo.

Figura 62: Definición de límites infinitos en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p. 81)

Sin embargo, en el libro no se le da mayor énfasis a la definición formal del límite infinito, sino que, en esta sección, se orienta al cálculo del límite. Esto se relaciona con la cantidad de teoremas que se muestran en este capítulo que se muestra en la siguiente figura:

1.7.3 Teorema 11 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

1.7.5 Teorema

(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

1.7.6 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

1.7.7 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Figura 63: Teoremas de límites infinitos en Leithold (1994)

Fuente: Leithold (1994, p.83, 84, 87 y 88)

De manera general, este libro introduce la definición formal del límite a partir de un análisis de la representación tabular de la función alrededor de un punto. Este primer análisis intuitivo es complementado con un análisis numérico que permite brindar la definición formal del límite. Además, se puede observar que en cada punto trabajado (definición formal, límites laterales y límites infinitos), se ha trabajado con un caso particular y partir de un análisis intuitivo (sobre la representación tabular). Esto también permite concluir que en el libro la representación gráfica no permite brindar una justificación suficiente para el cálculo y la determinación de la existencia de un límite, ya que hemos observado que los análisis intuitivos han sido respaldados por la tabla de valores de x y $f(x)$. Aunque la gráfica siempre se ha presentado como una manera de complementar el análisis.

En general, en el capítulo de límites no se ha evidenciado su conexión con otros conceptos. Es decir, no se ha afirmado que la razón de ser del límite está en brindar la fundamentación matemática a los conceptos de continuidad y derivada, como se ha visto en los libros anteriores. Sin embargo, este concepto es usado en la definición de continuidad y derivada.

La cantidad de teoremas propuestos en el libro y la cantidad de problemas resueltos y propuestos evidencian el enfoque del libro, orientado hacia los métodos algebraicos para realizar el cálculo del límite. Se evidencia la necesidad de presentar diferentes tipos de funciones como una manera de ir ampliando las herramientas usadas en las partes preliminares. En cuanto a la rigurosidad matemática, en el capítulo de límites no se incluyen las demostraciones de los teoremas brindados, que se presentan como herramientas para aplicar de manera directa en los ejercicios. Finalmente, en el siguiente gráfico, presentamos un esquema de la forma de presentar el concepto del límite de una función en un punto en Leithold (1994).

Introducción	Definición del límite y teoremas	Límites laterales	Límites infinitos y asíntota
Para el caso de $f(x)=\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ • Introducción gráfica al límite de una función • Introducción tabular al límite de una función • Introducción al límite de una función en términos de desigualdades • Ejercicios resueltos y propuestos	• Definición formal/estática del límite en términos de desigualdades • Límite de una función lineal, constante e identidad • Teoremas sobre límites: suma, resta, multiplicación y cociente de límites • Límite de una función mediante el límite de otra con igual entorno • Teorema del cambio de variable en límites • Teorema de la unicidad del límite • Ejercicios resueltos y propuestos	Para el caso de $f(x)=\sqrt{x-4}$ • Investigación intuitiva del límite lateral • Definición de límites laterales • Existencia de límite a partir de los límites laterales • Ejercicios resueltos y propuestos	Para el caso de $f(x)=\frac{3}{x^2}$ • Investigación intuitiva del límite cuando x se aproxima a 0 • Definición formal de los límites laterales • Teoremas relacionados al cálculo de límites infinitos • Ejercicios resueltos y propuestos

Figura 64: Esquema de trabajo del concepto del límite en Apostol (1983)

Fuente: Elaboración propia

Rogawski (2012)

El libro *Calculus* presenta 18 capítulos. El tema de límite de una función se encuentra en el capítulo 2: *Limits* que se estructura como se muestra:

Figura 65: Estructura del capítulo de Límites en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 8)

En la sección 2.1 del libro, se muestra una introducción al concepto del límite a partir del problema del cálculo de la velocidad instantánea a partir de la pendiente de la tangente a la curva de posición-tiempo en cierto instante de tiempo. Para ello, en el libro, se define primero la velocidad promedio de la siguiente manera, también introducen la notaciones de Δs: cambio en la posición y Δt: cambio en el tiempo.

$$\text{Average velocity} = \frac{\text{change in position}}{\text{length of time interval}}$$

$$\text{Average velocity over } [t_0, t_1] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Figura 66: Definición de la velocidad promedio en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 42)

También, presentan la interpretación gráfica de la velocidad promedio a través de la gráfica de la recta secante que se forma con los puntos:

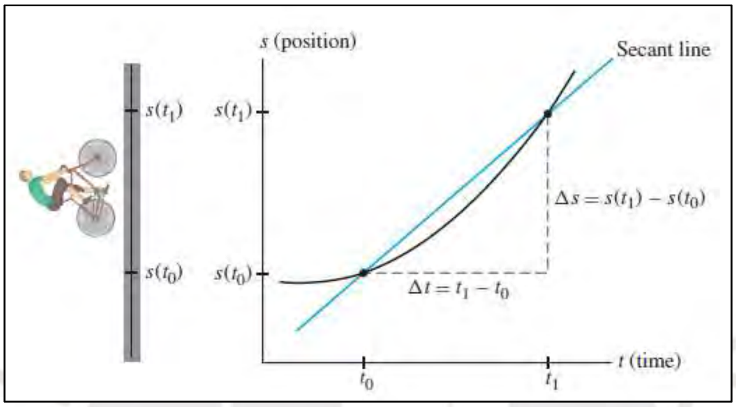


Figura 67: Interpretación gráfica de la velocidad instantánea en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 43)

Finalmente, presentan idea de la velocidad instantánea como la recta que se obtiene al hacer más y más pequeño el Δt.

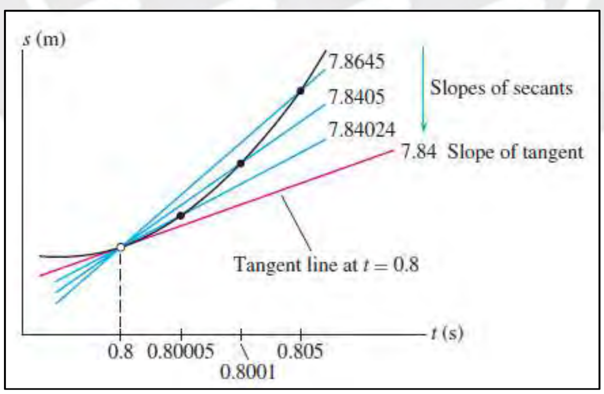


Figura 68: Introducción a la velocidad instantánea en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 43)

Y plantean que el cálculo de la velocidad instantánea requerirá el cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva; sin embargo, no realizan un acercamiento a cómo calcularlo.

En la sección 2.2 del libro se realiza una aproximación al concepto del límite a partir de las representaciones numérica (tabular) y gráfica. Y trabajan con el caso de la función $f(x) = \frac{sinx}{x}$.

TABLE 1

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.841470985	−1	0.841470985
0.5	0.958851077	−0.5	0.958851077
0.1	0.998334166	−0.1	0.998334166
0.05	0.999583385	−0.05	0.999583385
0.01	0.999983333	−0.01	0.999983333
0.005	0.999995833	−0.005	0.999995833
0.001	0.999999833	−0.001	0.999999833
$x \to 0+$	$f(x) \to 1$	$x \to 0-$	$f(x) \to 1$

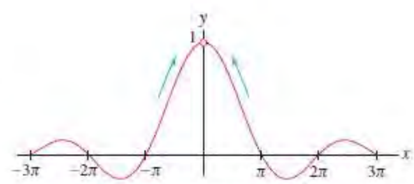


FIGURE 1 Graph of $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Figura 69: Acercamiento tabular y gráfica al límite de una función en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p.49)

Se hace un análisis sobre a qué valor converge $f(x)$ cuando $x \to 0^-$ y cuando $x \to 0^+$. A partir del acercamiento tabular y gráfico, se concluye que $f(x)$ converge a 1 cuando $x \to 0$ esto está relacionado a la definición del límite a partir de la igualdad de los límites laterales. A partir de este ejemplo, presentan la siguiente definición del límite:

DEFINITION Limit Assume that $f(x)$ is defined for all x in an open interval containing c, but not necessarily at c itself. We say that

the limit of $f(x)$ as x approaches c is equal to L

if $|f(x) - L|$ becomes arbitrarily small when x is any number sufficiently close (but not equal) to c. In this case, we write

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

We also say that $f(x)$ *approaches* or *converges to* L as $x \to c$ (and we write $f(x) \to L$).

Figura 70: Definición del límite en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 50)

Podemos observar que esta definición está relacionada a la definición informal del límite $(\lim_{x \to a} f(x) = L\ interpretada\ como\ f(x) \to L\ cuando\ x \to a)$; sin embargo, se evidencia la búsqueda de la formalidad al interpretar $f(x) \to L$ como hacer muy pequeña $|f(x) - L|$ cuando x se aproxima a c.

Después de esta definición del límite, se trabaja con las aproximaciones gráfica y numérica (tabular) para valores donde x se aproxima a c por la izquierda y por derecha y se afirma en el libro que si $f(x)$ se aproxima al mismo valor L en ambos casos, entonces se dirá que L es el valor estimado del límite. Aquí se trabajan casos donde el límite existe y cuando no existe.

Finalmente, en esta sección también se introduce la noción de límites laterales, a partir de las representaciones gráfica y numérica de la función. Y se presenta la noción de límites infinitos con la siguiente definición:

Some functions $f(x)$ tend to ∞ or $-\infty$ as x approaches a value c. If so, $\lim_{x \to c} f(x)$ does not exist, but we say that $f(x)$ has an *infinite limit*. More precisely, we write

- $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ if $f(x)$ increases without bound as $x \to c$.
- $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ if $f(x)$ decreases without bound as $x \to c$.

Here, "decrease without bound" means that $f(x)$ becomes negative and $|f(x)| \to \infty$. One-sided infinite limits are defined similarly. When using this notation, keep in mind that ∞ and $-\infty$ are not numbers.

When $f(x)$ approaches ∞ or $-\infty$ as x approaches c from one or both sides, the line $x = c$ is called a **vertical asymptote**. In Figure 8, the line $x = 2$ is a vertical asymptote in (A), and $x = 0$ is a vertical asymptote in both (B) and (C).

Figura 71: Definición de límites infinitos en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 53)

En la sección 2.3 de este libro, se busca formalizar el trabajo de los límites a partir del cálculo de límites a partir de los siguientes teoremas presentados:

THEOREM 1 Basic Limit Laws If $\lim_{x \to c} f(x)$ and $\lim_{x \to c} g(x)$ exist, then

(i) Sum Law: $\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big)$ exists and

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

(ii) Constant Multiple Law: For any number k, $\lim_{x \to c} kf(x)$ exists and

$$\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$$

(iii) Product Law: $\lim_{x \to c} f(x)g(x)$ exists and

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \Big(\lim_{x \to c} f(x)\Big)\Big(\lim_{x \to c} g(x)\Big)$$

(iv) Quotient Law: If $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$, then $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ exists and

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

(v) Powers and Roots: If p, q are integers with $q \neq 0$, then $\lim_{x \to c} [f(x)]^{p/q}$ exists and

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^{p/q} = \Big(\lim_{x \to c} f(x)\Big)^{p/q}$$

Assume that $\lim_{x \to c} f(x) \geq 0$ if q is even, and that $\lim_{x \to c} f(x) \neq 0$ if $p/q < 0$. In particular, for n a positive integer,

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \Big(\lim_{x \to c} f(x)\Big)^n, \qquad \lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

In the second limit, assume that $\lim_{x \to c} f(x) \geq 0$ if n is even.

Figura 72: Teoremas sobre límites en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 58)

Aquí podemos observar una clara orientación del libro hacia el cálculo de límites porque los teoremas se presentan de manera directa y se centran en la aplicación de estos en los ejercicios posteriores. Las demostraciones de los teoremas se presentan en los apéndices del libro.

En la sección 2.4 del libro, se inicia con una definición informal de continuidad (aquella función cuya gráfica no tiene brechas) y se formaliza esta definición usando el concepto del límite:

DEFINITION Continuity at a Point Assume that $f(x)$ is defined on an open interval containing $x = c$. Then f is **continuous** at $x = c$ if

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

If the limit does not exist, or if it exists but is not equal to $f(c)$, we say that f has a **discontinuity** (or is **discontinuous**) at $x = c$.

Figura 73: Definición de continuidad en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 62)

Luego, se presentan los tipos de discontinuidad, las leyes básicas de continuidad (suma, resta, multiplicación y división de funciones continuas), se muestra como teorema que las funciones polinomiales son continuas en todos los reales y así se presenta el análisis de continuidad de otras funciones.

THEOREM 2 Continuity of Polynomial and Rational Functions Let $P(x)$ and $Q(x)$ be polynomials. Then:

- $P(x)$ is continuous on the real line.
- $P(x)/Q(x)$ is continuous on its domain (at all values $x = c$ such that $Q(c) \neq 0$).

THEOREM 3 Continuity of Some Basic Functions

- $y = x^{1/n}$ is continuous on its domain for n a natural number.
- $y = \sin x$ and $y = \cos x$ are continuous on the real line.
- $y = b^x$ is continuous on the real line (for $b > 0, b \neq 1$).
- $y = \log_b x$ is continuous for $x > 0$ (for $b > 0, b \neq 1$).

Figura 74: Continuidad de algunas funciones en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 65)

Esto es importante mencionar ya que son estos teoremas los que luego son usados para calcular límites de ciertas funciones que son conocidas como continuas:

Substitution: Evaluating Limits Using Continuity

It is easy to evaluate a limit when the function in question is known to be continuous. In this case, by definition, the limit is equal to the function value:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

We call this the **Substitution Method** because the limit is evaluated by "plugging in" $x = c$.

Figura 75: Método de sustitución para el cálculo de límites en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p.66)

las formas de identificar una función continua, por ejemplo, se menciona que las funciones polinomiales son siempre continuas

En la sección 2.5 del libro, se presentan todas las técnicas para el cálculo de límites en casos de indeterminación $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty.0; \infty - \infty$. Presentan los métodos de simplificación de un factor en el numerador y en el denominador, multiplicación por la conjugada. Esta sección también está orientada al cálculo de límites y a los métodos algebraicos para encontrar una función que sea la misma que $f(x)$ excepto en el punto donde se evalúa el límite.

En la sección 2.6, se presenta el teorema del sándwich y los casos de límites trigonométricos:

THEOREM 1 Squeeze Theorem Assume that for $x \neq c$ (in some open interval containing c),

$$l(x) \leq f(x) \leq u(x) \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c} l(x) = \lim_{x \to c} u(x) = L$$

Then $\lim_{x \to c} f(x)$ exists and $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Figura 76: Teorema del sándwich en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 77)

A partir del teorema previamente mostrado, se presenta en el libro los siguientes casos de límites trigonométricos conocidos:

THEOREM 2 Important Trigonometric Limits

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0}$$

Figura 77: Límites trigonométricos conocidos en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p.77)

En la sección 2.7, se presenta la definición del límite al infinito de la siguiente manera:

The notation $x \to \infty$ indicates that x increases without bound, and $x \to -\infty$ indicates that x decreases (through negative values) without bound. We write

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ if $f(x)$ gets closer and closer to L as $x \to \infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ if $f(x)$ gets closer and closer to L as $x \to -\infty$.

As before, "closer and closer" means that $|f(x) - L|$ becomes arbitrarily small. In either case, the line $y = L$ is called a **horizontal asymptote**. We use the notation $x \to \pm\infty$ to indicate that we are considering both infinite limits, as $x \to \infty$ and as $x \to -\infty$.

Infinite limits describe the **asymptotic behavior** of a function, which is behavior of the graph as we move out to the right or the left.

Figura 78: Definición de límites al infinito en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 81)

Esta definición solo se ejemplifica a partir de la gráfica de una función; sin embargo, no se presenta una definición formal de este límite. Para el cálculo de los límites al infinito, se presenta el siguiente teorema:

THEOREM 1 For all $n > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{-n} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

If n is a whole number,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{if } n \text{ is even} \\ -\infty & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{and} \quad \lim_{x\to-\infty} x^{-n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Figura 79: Teorema de los límites al infinito en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p.82)

En estas dos secciones 2.6 y 2.7, el libro nuevamente se centra en la descripción de los métodos algebraicos necesarios para obtener el valor del límite.

Finalmente, en la última sección 2.9 del capítulo de límites, se presenta la definición formal. Para ello, se formaliza que la distancia de $f(x)$ a L se representa mediante $|f(x) - L|$ y que la distancia de x a c se representa mediante $|x - c|$. Y se relacionan ambas distancias con el siguiente gráfico para el caso de la función $f(x) = \frac{sinx}{x}$:

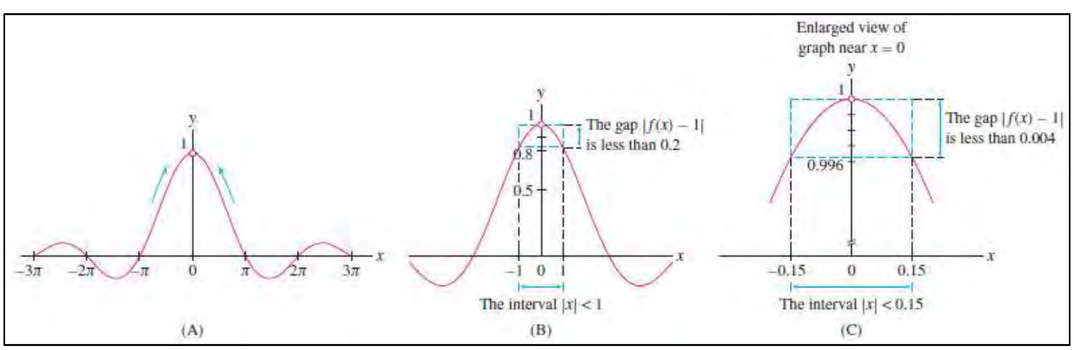


Figura 80: Relación entre las distancias $|f(x) - L|$y $|x - c|$ en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 92)

Así, se presenta la definición formal del límite:

FORMAL DEFINITION OF A LIMIT Suppose that $f(x)$ is defined for all x in an open interval containing c (but not necessarily at $x = c$). Then

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

if for all $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

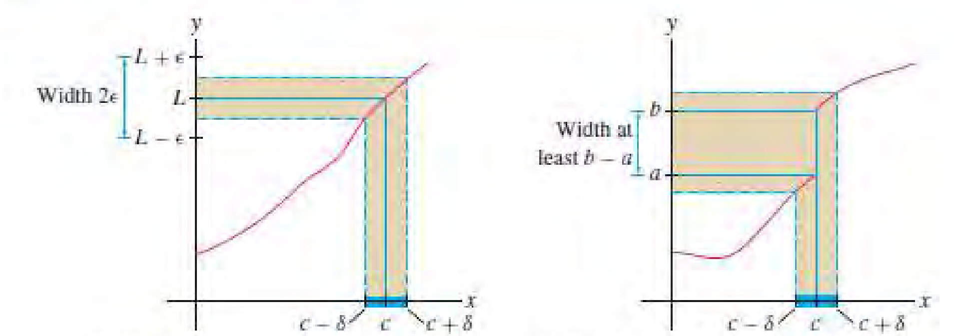
$$\boxed{|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{if} \quad 0 < |x - c| < \delta}$$

Figura 81: Definición formal del límite en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p.92)

Los siguientes ejercicios presentados están orientados a hallar el valor de δ adecuado dado un valor de ε y en demostrar, con la definición formal del límite, algunos límites dados. También el libro presenta una interpretación gráfica de esta definición formal del límite:

GRAPHICAL INSIGHT Keep the graphical interpretation of limits in mind. In Figure 4(A), $f(x)$ approaches L as $x \to c$ because for any $\epsilon > 0$, we can make the gap less than ϵ by taking δ sufficiently small. By contrast, the function in Figure 4(B) has a jump discontinuity at $x = c$. The gap cannot be made small, no matter how small δ is taken. Therefore, the limit does not exist.



(A) The function is continuous at $x = c$. By taking δ sufficiently small, we can make the gap smaller than ϵ.

(B) The function is not continuous at $x = c$. The gap is always larger than $(b - a)/2$, no matter how small δ is.

Figura 82: Interpretación gráfica de la definición formal del límite en Rogawski (2012)

Fuente: Rogawski (2012, p. 95)

De manera general, el enfoque de este libro es el de presentar las concepciones intuitivas del límite en primer lugar a partir de las representaciones numérica y gráfica de las funciones, luego, presentan los teoremas, las técnicas y los procedimientos necesarios de manera que le den fundamento necesario para el cálculo del límite. Es decir, el libro se centra en los métodos algebraicos del cálculo del límite; sin embargo, no deja de presentar las demostraciones de muchas propiedades y teoremas presentados (aunque excluye el trabajo con desigualdades de la definición formal).

Luego, el libro presenta la noción de continuidad de manera que esta sirva como herramienta complementaria en el cálculo de límites. Los casos de indeterminación también son trabajados a partir de la redefinición de la función con una función continua. También se muestran los límites trigonométricos y límites al infinito cuyo enfoque se encuentra en la resolución de ejercicios a partir de las técnicas y teoremas presentados. Y al final del capítulo 2, se presenta la definición formal del límite.

También, en este libro, debido a la cantidad de problemas desarrollados sobre el cálculo de límites, podemos afirmar que se centra en presentar los métodos algebraicos asociados a este y no en las demostraciones y la riguridad matemática presente en los otros libros analizados y muchas demostraciones o análisis del libro se sustentan en la gráfica de la función (análisis intuitivo). Esto se ve reforzado por la presentación de la definición formal en la sección final del capítulo 2. Finalmente, en el siguiente gráfico, presentamos un esquema de la forma de presentar el concepto del límite de una función en un punto en el Rogwaski (2012):

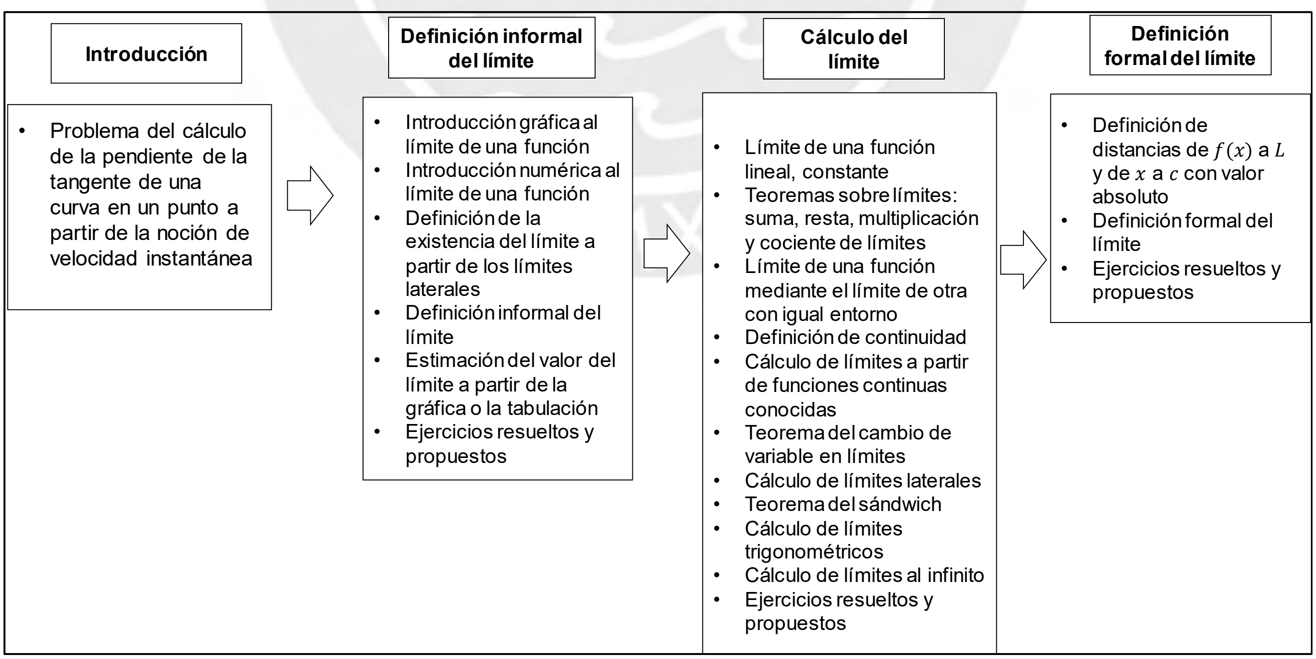


Figura 83: Esquema de trabajo del concepto del límite en Rogawski (2012)

En esta segunda sección del capítulo, hemos visto la forma de presentar el concepto del límite de una función en los libros de texto seleccionados a partir de la bibliográfica del curso de la institución educativa seleccionada. Como se ha mencionado previamente, el análisis de la transposición didáctica del concepto permite la emancipación institucional en la construcción del MER, es decir nos permite observar las transformaciones que ha sufrido el concepto del límite.
Por ello, este análisis epistemológico es considerado como el primer paso para la construcción del MER (que debe ser independiente de las ideologías dominantes en la institución).

3.3 Límite en la institución en estudio

Como se ha visto, debido a que el MER debe ser construido para una institución, en esta investigación, la institución va a ser interpretada como el curso de Cálculo Diferencial de la PUCP. Por ello, a continuación, se mostrará una breve descripción del límite para la institución en estudio.

En primer lugar, se realizará una descripción de cómo se estructura el curso de Cálculo Diferencial (en donde se trabaja el concepto del límite) en la institución educativa en estudio. El curso tiene una duración de 5 meses y consta de cuatro elementos: clases teóricas (CT), prácticas dirigidas (PD), prácticas calificadas (PC) y exámenes. Las sesiones de las clases teóricas son de 4 horas semanales y son desarrolladas por el profesor del horario (el coordinador de la parte teórica se encarga de planificar los contenidos de cada sesión). Distribuido a lo largo del ciclo, se desarrollan cuatro prácticas dirigidas de 2 horas cada una, donde los alumnos resuelven un material con preguntas sobre los temas que se evaluarán en la próxima práctica calificada. En estas sesiones, son asesorados por cuatro profesores (incluido el profesor de las clases teóricas).

A lo largo del ciclo, también tienen cuatro prácticas calificadas de 2 horas cada, donde los alumnos son evaluados sobre los temas trabajados hasta ese momento. En estas sesiones, son asesorados de manera más restringida que en el caso de las prácticas dirigidas. Finalmente, los exámenes duran 3 horas cada uno y solo se dan dos veces en el ciclo (en la mitad, examen parcial, y al final del ciclo, examen final), en ellos, los alumnos son evaluados con todos los temas trabajados hasta ese momento y no son asesoras durante la evaluación.

El curso de Cálculo Diferencial que tiene cinco meses de duración considera las siguientes unidades didácticas:

- Límites y continuidad
- Derivada y sus aplicaciones
- Introducción a las integrales y a las ecuaciones diferenciales ordinarias

En este curso de Cálculo Diferencial, para los conceptos de límites, continuidad, derivadas e integrales, se trabaja con funciones de una variable real. Por ello, en esta investigación, cuando mencionamos funciones hacemos referencia a este tipo de funciones. Y delimitaremos nuestro estudio al límite de funciones en un punto. Por ello, cuando nos refiramos al límite de una función, se hará referencia al límite de una función real de una variable real en un punto.

El diseño de los contenidos de cada unidad está a cargo del profesor-coordinador de la parte teórica en coordinación con los profesores del curso. Ahí se delimitan los teoremas, definiciones y proposiciones fundamentales para la enseñanza de las unidades. El diseño de los materiales de las PD y de las PC está a cargo del profesor-coordinador de las prácticas en coordinación con los profesores del curso.

El contenido de cada unidad didáctica se formaliza en el programa analítico del curso. En este documento oficial, se detallan las competencias y resultados de aprendizaje, la metodología, la sumilla, resultados de aprendizaje relacionados con la unidad didáctica, la descripción del programa, la bibliografía del curso y el sistema de evaluación. En la primera unidad didáctica (Límites y continuidad) del curso de Cálculo Diferencial se desarrollan los siguientes contenidos:

Unidad didáctica
Capítulo 1: Límites y Continuidad (**14 horas**)
Descripción general de la unidad
La existencia de raíces y soluciones aproximada de ecuaciones no lineales son situaciones cuya resolución va más allá de cálculos algebraicos y donde los conceptos de límites y continuidad de funciones juegan un papel fundamental.
Contenidos
Límite de una función. Teoremas sobre límites. Teorema del Sándwich y Límites trigonométricos. Limites Laterales. Límites infinitos y asíntotas verticales. Límites al infinito y asíntotas oblicuas. Continuidad de una función en un punto. Operaciones con funciones Continuas. Continuidad de una función en un intervalo. Continuidad de funciones elementales. Teorema del valor intermedio y aplicaciones.

Figura 84: Contenidos de la unidad Límites y Continuidad

Fuente: PUCP (2018)

3.4 Organizaciones matemáticas identificadas en un libro de texto

En el programa analítico del curso de Cálculo, se muestra la bibliografía recomendada del curso donde se incluyen libros de cálculo de diferentes autores: Leithold (1998), Rogawski (2012), Stewart (2012). Sin embargo, después de consultar al coordinador de teoría del curso sobre el libro que sirve de referencia para el concepto del límite, se selecciona el libro de Rogawski (2012) para identificar las organizaciones matemáticas presentes asociadas al límite de una función. Este análisis ha sido fundamentado previamente en el análisis de la presencia de los libros de texto en el proceso de transposición didáctica y permite delimitar el alcance del análisis del límite de una función en un punto para la institución en estudio.

Para ello, se ha tomado en cuenta solo el capítulo del concepto del límite de una función en un punto. La identificación de las OM se ha desarrollado sobre la base del marco teórico de la TAD, identificando las tareas, técnicas asociadas, y tecnologías y teorías que respaldan las técnicas usadas en cada caso. Sin embargo, debido a la extensión de un análisis praxeológico completo, a modo de resumen solo se presentarán los géneros de tareas y las tareas asociadas a cada uno de ellos (lo que no se presenta a continuación es el bloque tecnológico-teórico de cada uno de ellos).

1. <u>G_1: Estimar</u>

T_1: Estimar el valor del límite de una función en un punto a partir de su gráfica

T_2: Estimar el valor del límite de una función en un punto a partir de una tabla de valores

T_3: Estimar el valor de los límites laterales de una función en un punto a partir de su gráfica

T_4: Estimar el valor de los límites laterales de una función en un punto a partir de una tabla de valores

T_5: Estimar el valor del límite de una función cuando $x \to \pm\infty$ a partir de su gráfica

2. <u>G_2: Demostrar</u>

T_6: Demostrar el valor del límite de una función en un punto con la definición formal de límite

3. <u>G_3: Determinar</u>

T_7: Determinar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto a partir de su gráfica

T_8: Determinar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto a partir de una tabla de valores

T_9: Determinar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto a partir de los límites laterales

T_{10}: Determinar el valor de δ dado un ε tal que cumplan que si $|x-a|<\delta$ entonces se cumple que $|f(x)-L|<\varepsilon$

4. G4: Calcular

T_{11}: Calcular el valor del límite de una función en un punto a partir de las propiedades de límites (suma, resta, multiplicación y división de límites)

T_{12}: Calcular el valor del límite de una función en un punto usando la condición de función continua

T_{13}: Calcular el valor del límite de una función racional en un punto (forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ o $\infty \times 0$ o $\infty \times \infty$)

T_{14}: Calcular el valor del límite de una función irracional en un punto (forma indeterminada $\frac{0}{0}$)

T_{15}: Calcular el valor del límite de una función trigonométrica en un punto

T_{16}: Calcular el valor del límite de una función cuando $x \to \pm\infty$.

T_{17}: Calcular el valor del límite de una función en un punto con el teorema del sándwich

5. G5: Hallar

T_{18}: Hallar las asíntotas verticales de una función

T_{19}: Hallar las asíntotas horizontales de una función

T_{20}: Hallar las asíntotas oblicuas de una función

6. G6: Evaluar

T_{21}: Evaluar el límite infinito de una función en un punto

7. G6: Representar gráficamente

T_{22}: Realizar un bosquejo de la gráfica de una función a partir de la información de límites de la función

Se hace la aclaración de que hay cuatro tipos de tareas del caso límite al infinito que no corresponden al objeto en estudio (límite de una función en un punto) que son aquellos que están en letra roja; sin embargo, se consideraron importantes de presentar ya que luego pertenecen al bloque tecnológico-teórico de otros.

Cada una de los tipos de tareas identificados determinan una organización matemática puntual (Chevallard, 1999). Por ello, se identificaran las OMPi como aquella asociada al tipo de tarea T_i. Además, se consideró que, para la identificación de las tareas, se presentan funciones con diversidad de expresiones. Esto se refleja, en los tipos de tareas asociados al cálculo del límite de una función en un punto (del género Calcular), cada tipo de función (racional, exponencial, logarítmica, irracional, trigonométrica y polinómica) presenta una técnica diferente para su resolución y por tanto define un tipo de tarea diferente.

Identificamos que la OM reconstruida sobre el límite de una función a partir del capítulo de límite en el libro del Rogawski es una OML que se centra en la problemática de determinar la existencia y el cálculo del límite de funciones. Esta OML se compone de 22 OMP.

De acuerdo con la forma de presentar el concepto del límite en el libro analizado, se reconoce que la tecnología que se consolida en algunas OMP justifican las técnicas empleadas para realizar los tipos de tareas de otras OMP.

En el libro se presentan en primer lugar las OMP7, OMP8 y OMP9 (del género determinar) que consolidan la tecnología que justificarán luego las técnicas empleadas en las OMP1, OMP2, OMP3, OMP4 (del género estimar).

Por otro lado, las OMP1, OMP2, OMP3, OMP4 (del género estimar) consolidan la tecnología relativas a las técnicas presentes en el desarrollo de los tipos de tareas correspondientes a las OMP11, OMP12, OMP13 y OMP14.

Por otro lado, según la presentación del libro de texto guía, la OMP5 justifica la técnica empleada en la OMP16 y del mismo modo, esta última justifica la técnica empleada en la OMP19 y OMP20.

Todas las tareas asociadas al género Calcular conforman las tecnologías de las técnicas asociadas a la solución de las tareas de las OMP18, OMP19 y OMP20. Y estas últimas justifican las técnicas usadas en las tareas de la OMP22.

La relación entre las OMP identificadas se muestran en el siguiente gráfico.

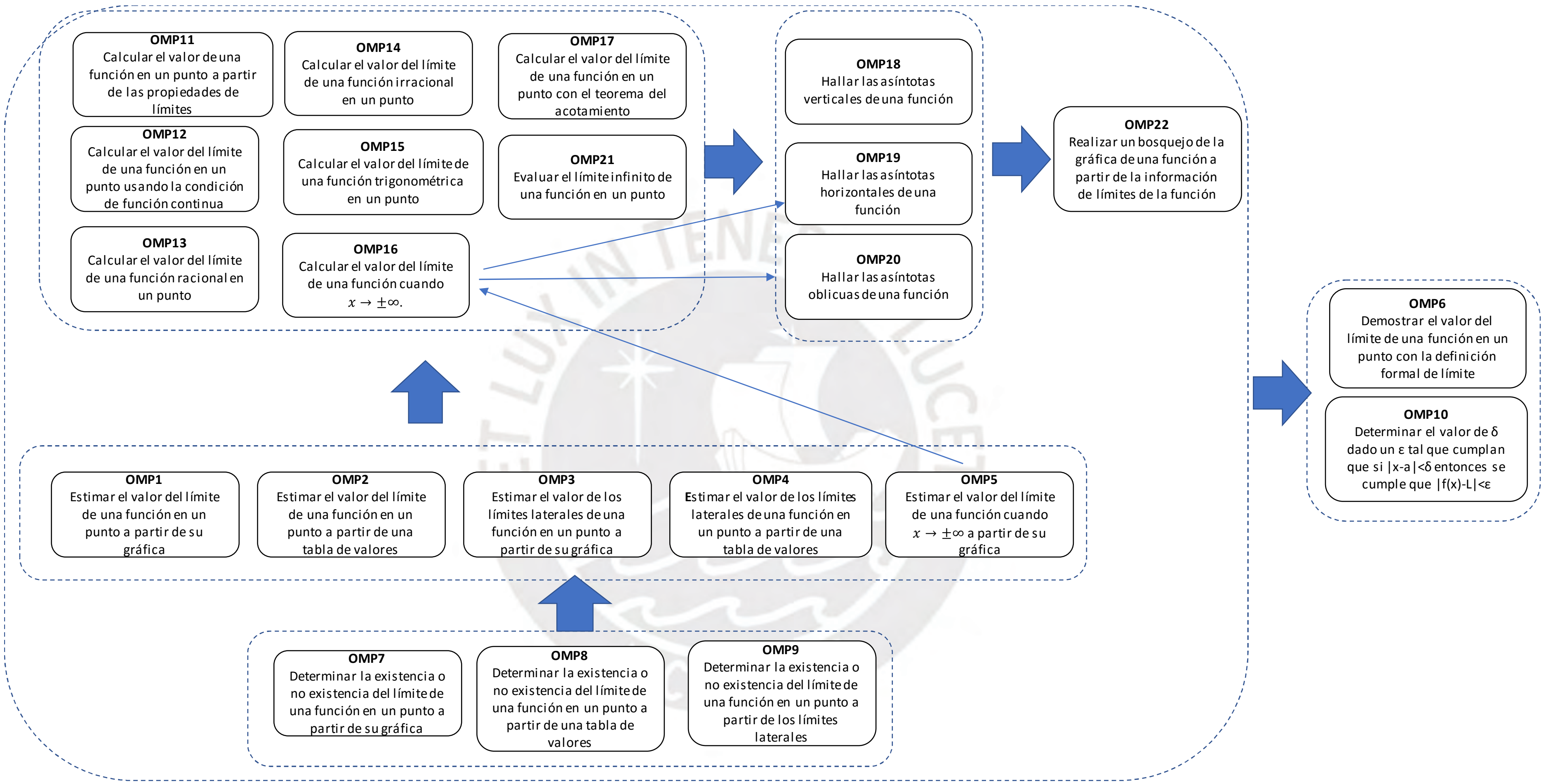


Figura 85: Organizaciones matemáticas identificadas en el Rogawski (2012)

Fuente: Elaboración propia

CAPITULO IV: PROPUESTA DE MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA EN TORNO AL LÍMITE

En este capítulo, se presenta una posible reconstrucción de la Organización Matemática (OM) del límite de una función real de variable real, a partir de ella, se planteará una propuesta de Modelo Epistemológico de Referencia (MER). La explicitación de este modelo es importante, pues nos permitirá describir, analizar, comparar y finalmente proponer otros modelos. En esta investigación, el MER servirá para analizar el modelo epistemológico dominante (MED) en una institución y partir de ello configurar un nuevo MER. En la misma línea, que en los trabajos presentados por García (2005), Fonseca, Gascón y Oliveira (2013), Parra, Otero y Fanaro (2009) y Ruiz Munzón (2010), Munzón, Bosch y Gascón (2015) quienes realizan construcciones de MER, para analizar cómo un objeto matemático es entendido en una institución para luego identificar y analizar el MED a partir del MER construido.

4.1 Características y objetivo del MER

Como ya hemos mencionado, tomaremos la definición de MER que propone Fonseca, Gascón y Lucas (2014) (ver el capítulo 2). Según los autores, un MER se elabora en relación a una institución. Por ello, en el capítulo anterior, se ha presentado el programa analítico del curso de Cálculo Diferencial de la PUCP (institución en estudio) y los libros de texto del curso. Entonces, en esta investigación se construirá un MER en torno al límite de una función (entendido como el límite de funciones reales de una variable real en un punto).

Para iniciar la construcción del MER se ha considerado, en primer lugar, el análisis epistemológico del límite donde se evidencian las nociones matemáticas relacionadas al límite tales como sucesión, continuidad y derivada de una función. Ya vimo en el capítulo 3 que el concepto del límite estuvo implícito en los métodos infinitesimales para resolver ciertos problemas relacionados con continuidad y derivada, y son estos los que evidenciaron la necesidad de la formalización de la definición del límite.

Por otro lado, se ha analizado la presentación del concepto del límite en libros de texto de cálculo (Haaser (1992), Apostol (1983), Leithold (1994) y Rogawski

(2012)), en cada uno de ellos, se ha revisado el capítulo correspondiente al límite de una función (Cap8: Límites y Derivadas, Cap3: Funciones continuas, Cap1: Funciones, límites y continuidad), se observó de qué manera se presenta el concepto del límite (a partir de un problema relacionado a la epistemología del límite o a través de su definición directa), también se observó si los libros ponían énfasis en la teoría y las demostraciones de los teoremas relacionados al límite o bien en la resolución de ejercicios. Finalmente, se observó si los libros presentan la definición estática o dinámica del límite y en qué orden las presentan. Este análisis evidencia las transformaciones que sufre el límite (como saber sabio) para convertirse en un objeto de enseñanza (transposición didáctica). Producto de este análisis, hemos podido visibilizar el objetivo de presentar el límite en el cálculo según cuatro autores:

- Haaser (1992) introduce el concepto del límite mediante el problema de tangentes a una curva, además afirma que el concepto del límite se desarrolla de modo que brinde el fundamento matemático necesario para los conceptos de continuidad y derivada.
- Apostol (1983) introduce el concepto del límite mediante la necesidad de formalizar la noción intuitiva de continuidad. En este libro, el límite se presenta a partir de su definición formal, sin embargo, ya no se enfatiza en las demostraciones de los teoremas presentados, sino en el uso de cada uno de ellos para el concepto de continuidad.
- Leithold (1994) introduce el límite como un proceso de aproximación (concepción dinámica del límite) y realiza un análisis aritmético sobre estas aproximaciones para así presentar la definición formal del límite. Debido a la cantidad de problemas y teoremas propuestos en este libro, el enfoque del concepto de límite se encuentra en los procedimientos algebraicos usados para el cálculo del mismo.
- Rogawski (2012) introduce el concepto del límite mediante la necesidad de la obtención de la pendiente de la recta tangente a una curva (posición-tiempo) para obtener la velocidad instantánea. La definición inicial del límite que se presenta corresponde a una descripción informal, de modo que plantea la existencia del límite y la estimación del valor del límite a partir de las representaciones gráfica y tabular de una función. Debido a la cantidad de

ejercicios resueltos, de teoremas y técnicas de cálculo de límites del libro, el enfoque de este radica en los procedimientos algebraicos (metodologías y técnicas de resolución). La definición formal del límite se presenta en la parte final del capítulo, las demostraciones de los teoremas presentados se encuentran en un apéndice adicional, estos dos hechos evidencian que el libro no busca la rigurosidad matemática que se encuentra en los otros libros presentados.

- Finalmente, se ha seleccionado el libro de texto Rogawski (2012) pues es el texto guía base para la institución en estudio y se ha realizado un análisis praxeológico, para ello, se han identificado los géneros de tareas, los tipos de tareas que conformaban las OMP identificadas y se muestra cómo algunas OMPs forman parte del bloque tecnológico-teórico de otras.

Con respecto a la construcción del MER, Fonseca, Gascón y Oliveira (2014) afirman que el MER no es absoluto ni único ya que debe ser considerado como hipótesis inicial que luego será contrastado con la experimentación. Se sabe que, en la teoría APOE, los datos provenientes de los alumnos como respuesta de las actividades planteadas permiten modificar la DG planteada inicialmente y realizar posibles reajustes. Este reconocimiento del aprovechamiento de los datos provenientes de la experimentación en el APOE puede ayudar a complementar la metodología de la construcción del MER en la TAD. Es decir, la información obtenida de las actividades propuestas en APOE pueden ayudar como criterios complementarios para contrastar y modificar el MER propuesto inicialmente. (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011).

Para la construcción del MER propuesto consideramos la modelización matemática como herramienta principal, cuya noción fue explicitada en el capítulo de Marco Teórico (en la sección 2.1). Al tomar en consideración la epistemología del concepto del límite, hemos evidenciado cómo la definición del límite surge debido a la necesidad de brindar la rigurosidad matemática a otros conceptos del cálculo (continuidad, derivada e integral de una función) (capítulo 3). Por ello, se considerará que el MER planteado responde a la necesidad de dar fundamento matemático a otros conceptos del cálculo (tales como continuidad, derivada, integrales). Esto implica que se orienta a desarrollar los conceptos matemáticos necesarios y las herramientas matemáticas necesarias para conceptos más avanzados del cálculo (como derivada, integral y límites, derivadas e integrales de funciones de varias variables). En ese sentido, las cuestiones planteadas para el MER corresponden a un contexto intramatemático. Es decir, se desarrollará un MER en torno a la modelización intramatemática. El MER propuesto además se realizará sobre la base de los trabajos de modelización propuestos por Parra, Otero, Fanaro (2009) para el concepto del límite y de Fonseca, Gascón, Oliveira (2014) para el concepto de derivada.

A continuación, se propondrá una DG que toma en cuenta el análisis epistemológico (capítulo 3), la DG planteada por Pons (2014) y el análisis implicativo. Luego, esta DG será usada como criterio adicional para la construcción del MER propuesto inicialmente. Según como plantean Trigueros, Bosch y Gascón (2011), los mecanismos que forman parte de la DG pueden ser reinterpretados en términos de tareas; es decir, se pueden identificar tareas a partir del análisis de la secuencia de actividades propuestas para la revisión de la DG. Esta reinterpretación es la que nos permitirá aportar a la construcción del MER, aprovechando los datos de la construcción y revisión de una DG.

Al analizar las actividades propuestas y sus resultados, en el trabajo de Pons (2014) y sobre la base de lo revisado en los antecedentes de este trabajo, podemos afirmar que una de las mayores dificultades asociadas al concepto del límite están relacionados a la comprensión de su definición formal. Por ello, se considerará la propuesta de nueva definición del límite propuesta por Blázquez y Ortega (2002): límite como aproximación óptima, sobre la base de las concepciones de D`Alembert y Cauchy, que fue descrita en los antecedentes. Esta nueva propuesta fue presentada a un grupo de alumnos de ingeniería (Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006), es decir fue puesta a experimentación y como conclusiones importantes se obtuvo que los alumnos comprenden mejor la conceptualización del límite basada en la aproximación óptima que la concepción métrica.

4.2 Aportes de otras investigaciones

En esta sección, presentaremos el aporte de las investigaciones mencionadas. Empezaremos con el aporte de la DG para la construcción del MER. Para ello, debemos tomar en cuenta que la DG es el modelo que permite describir las construcciones mentales y los mecanismos que un estudiante necesitaría para aprender un concepto matemático. Además, la DG puede incluir la estructura de los prerrequisitos que un estudiante debe haber construido antes y puede lograr explicar las diferencias entre las formas de construir un concepto en los estudiantes (Arnon et al., 2014). Así finalmente, los autores afirman que "la descomposición genética es un modelo de la epistemología y cognición de un concepto matemático" (Arnon et al., 2014, p.28).

Acerca del diálogo APOE-TAD de Trigueros, Bosch y Gascón (2011) (relacionada a los elementos DG de la teoría APOE y el MER de la TAD), se menciona lo siguiente:

> En este punto aparece un importante paralelismo entre la noción de «descomposición genética» (DG) que permite describir la construcción de un concepto o ámbito matemático en APOS, y la noción de «modelo epistemológico de referencia» (MER) que se utiliza en la TAD para describir, analizar y evaluar los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio. (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p.18)

Y mencionan que el aporte de la DG hacia el MER se da en el siguiente sentido:

> Dado que la comunidad científica que trabaja en el ámbito de la teoría APOS tiene mucha experiencia en el aprovechamiento de los datos provenientes de las actividades de los alumnos para refinar las descomposiciones genéticas, sus propuestas podrían ayudar a desarrollar la metodología de la TAD, proporcionando estrategias para utilizar sistemáticamente dichos datos como criterio complementario para contrastar y modificar progresivamente los MER considerados. (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p.18 y 19)

Por ello, para plantear el aporte del DG al MER y sobre la base de lo expuesto por Trigueros, Bosch y Gascón (2011), proponemos, en primer lugar, la identificación de tipos de tareas a partir de la descomposición genética del concepto del límite. Sobre esto, Trigueros, Bosch y Gascón (2011) afirman que

> …la teoría APOE formula siempre la descomposición genética de los objetos matemáticos en términos de acciones de las personas que llevan a cabo la actividad matemática y, tanto en los textos desarrollados como en las actividades diseñadas para la investigación y para la enseñanza, estas acciones se explicitan en términos de tareas matemáticas específicas y de actividades que permiten la interiorización de dichas acciones en procesos, su encapsulación en objetos o su tematización en esquemas. (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p.21)

Este fragmento del texto se puede reinterpretar de la siguiente manera: se puede identificar a partir de las construcciones mentales y los mecanismos propuestos en la DG del límite y en la secuencia de actividades propuestas a partir de esta, tareas que tenían por objetivo realizar esas construcciones o alguno de los mecanismos.

A continuación, se propondrá una DG preliminar sobre la base del análisis epistemológico del concepto, la propuesta de Pons (2014), los resultados del diseño de actividades de Pons (2014) y sobre la base de la DG de Cotrill et al. (1996). Esta DG será preliminar ya que, como se ha mencionado antes, la refinación de esta DG se da a través del diseño, la aplicación de instrumentos y el análisis de los datos obtenidos.

Descomposición genética preliminar del límite de una función en un punto

En esta DG preliminar se proponen las estructuras mentales y los mecanismos mentales que un alumno necesitaría para aprender el concepto del límite de una función en un punto.

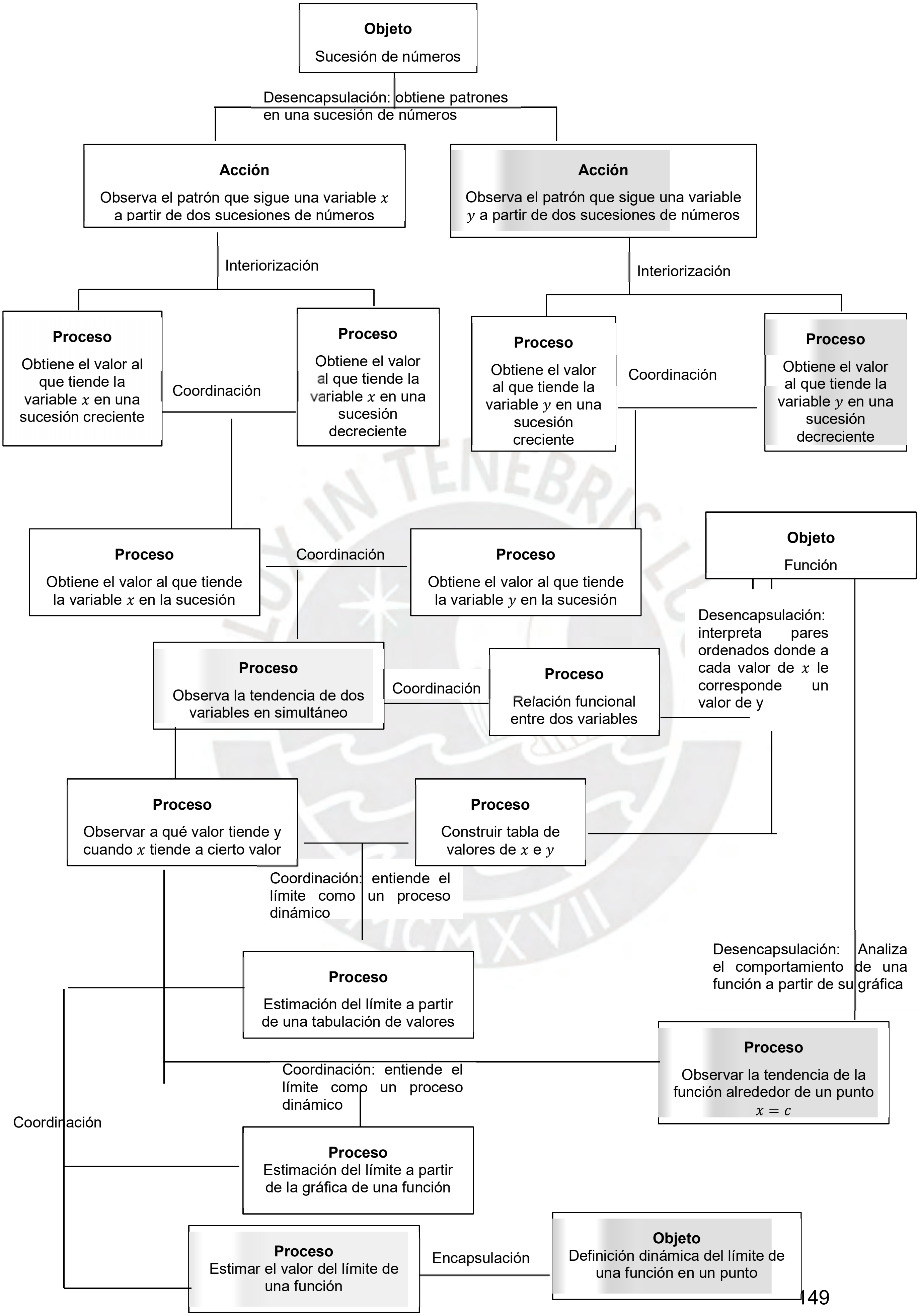


Figura 86: Primera parte de la DG del límite

En esta primera parte de la descomposición genética del límite, consideramos que se produce el mecanismo de la desencapsulación del objeto sucesión para que el alumno construya la acción de observar el patrón a partir de una o dos secuencias de valores, la interiorización de esta acción permite al alumno identificar a qué valor tiende una variable a partir de una sucesión de valores (que puede ser creciente o decreciente). La coordinación entre esos dos procesos permite la construcción del siguiente proceso: obtener hacia qué valor tiende una variable en las dos sucesiones, la coordinación se da mediante la comparación de las tendencias observadas en ambas sucesiones. Este proceso se plantea tanto para la variable x como para otra variable y. La coordinación entre dos de estos procesos da lugar al siguiente proceso: observar las tendencias de ambas variables en simultáneo. La desencapsulación del objeto función, permite al alumno regresar al proceso de la relación funcional entre dos variables que, al coordinarla con la anterior, se construye el proceso de la estimación de la tendencia de y dependiendo de la tendencia de la variable x. La misma desencapsulación del objeto función permite al alumno regresar al proceso de construir una tabla de valores que relaciona x e y alrededor de cierto punto $x = c$, al coordinar este proceso junto con el proceso de estimar la tendencia de y partir de la tendencia de x, se construye el proceso de estimación del límite a partir de una tabla de valores.

Por otro lado, si se desencapsula el objeto función y se obtiene el proceso de observar el comportamiento de una función alrededor de un punto este proceso se puede coordinar con el estimar la tendencia de y partir de la tendencia de x, y obtener así el proceso de estimación del límite a partir de la gráfica de una función.

La coordinación de estos dos procesos permite la construcción del proceso de estimación del límite de una función en un punto, que, al ser encapsulada, se obtiene el siguiente objeto: definición dinámica del límite. Esta encapsulación se puede dar a partir de las acciones que se pueden aplicar al proceso de estimación del límite como por ejemplo la estimación del límite de una suma o resta de funciones.

Ahora, continuamos con la construcción de la DG del límite como se muestra en la figura:

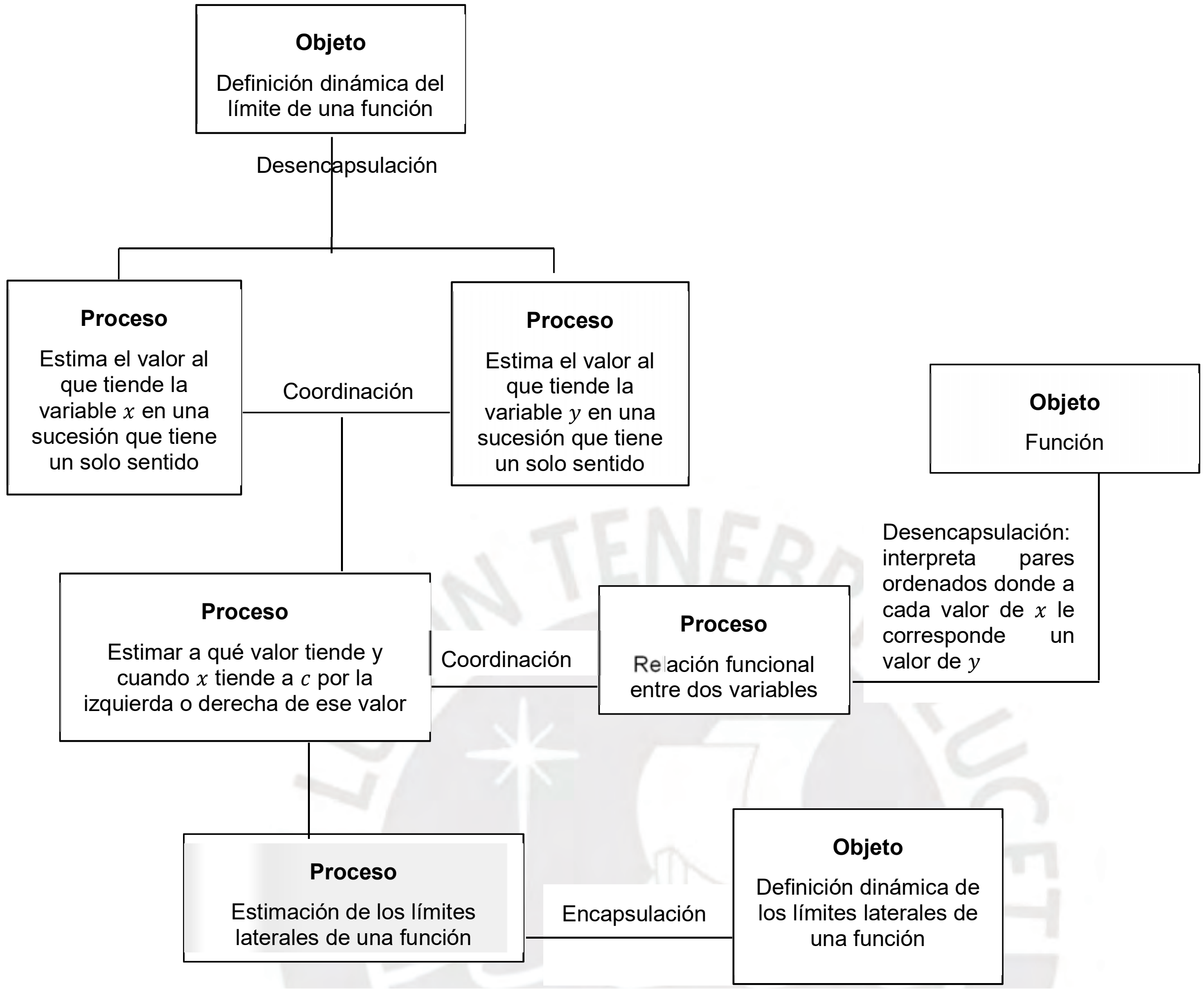


Figura 87: Segunda parte de la DG del límite

Fuente: Elaboración propia

En esta segunda parte de la descomposición genética del límite, se produce el mecanismo de la desencapsulación del objeto definición dinámica de una función en un punto para obtener los procesos de estimación de la variables x e y en una sucesión de números que tiene un solo sentido (esto se entiende por una sucesión de números o creciente o decreciente, donde x e y tienden a un valor solo por la izquierda o por la derecha de ese número). La coordinación de estos dos procesos permite que el alumno construya la estimación del valor al que tiende y cuando x tiende al valor de c por la izquierda o por la derecha. Este último proceso al ser coordinado con el proceso de relación funcional entre dos variables, permiten construir el proceso de estimación de los límites laterales de una función. El mecanismo final de encapsulación para obtener el objeto de la definición de límites laterales se obtiene cuando el alumno deja de ver este proceso de estimación de límites laterales como dinámico y lo estabiliza a través de acciones que le aplica, por ejemplo, puede encontrar la diferencia de la estimación de límites laterales por la izquierda y derecha.

Ahora, continuamos con la construcción de la DG del límite como se muestra en la figura:

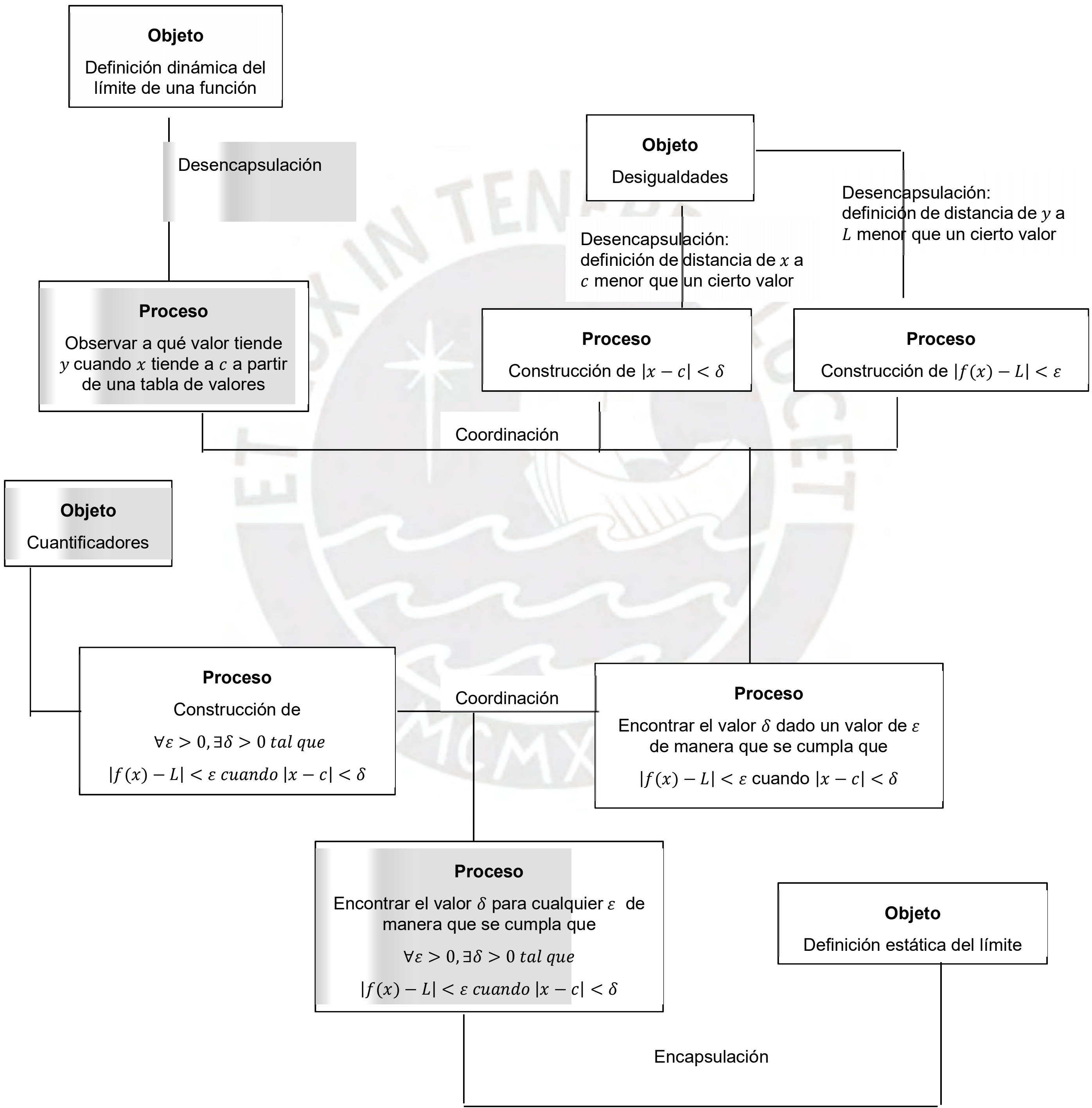


Figura 88: Tercera parte de la DG del límite

Fuente: Elaboración propia

En esta tercera parte de la DG del límite, se desencapsula el objeto definición dinámica del límite para obtener el proceso de observar a qué valor tiende y cuando x tiende a un valor de c. Por otro lado, se debe desencapsular el objeto desigualdades, para que el alumno regrese a los procesos de redefinición de una distancia de x a un valor c o de y a un valor L por medio de desigualdades. Estos tres procesos construidos se deben coordinar para que el estudiante construya el proceso encontrar un el valor δ dado un valor de ε de manera que se cumpla que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $|x - c| < \delta$. Al desencapsular el objeto de cuantificadores, el alumno puede construir el proceso de la construcción de la desigualdad $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $|x - c| < \delta$. Y finalmente al coordinar estos dos procesos, se obtiene el proceso de encontrar el valor δ para cualquier ε de manera que se cumpla que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon\ cuando\ |x - c| < \delta$.

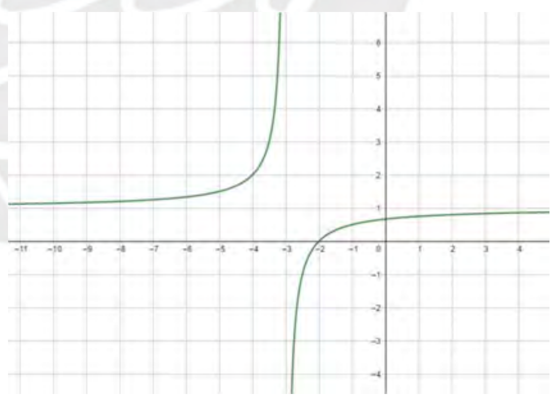
Aporte de la DG del límite de una función en un punto a la construcción del MER

Antes de la identificación de tareas a partir de la DG y de la secuencia de actividades propuesta por Pons (2014), aclaramos que en esta investigación el autor trabaja con las siguientes representaciones para una función:

Numérico

x	$f(x)$
-2	0
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{4}{5}$

Gráfico



Algebraico

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+2}{x+3}}$$

Algebraico-numérico

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Es importante reconocer que el aporte de la DG a la construcción del MER no se da de manera directa. El procedimiento que seguiremos será el siguiente: presentaremos la construcción mental o mecanismo que se identifica en las actividades propuestas por Pons (2014) y, a partir de ellos se plantearán los tipos de tareas que se puedan identificar a partir de ambos.

1) En la primera parte de la DG, se desencapsula el objeto función para obtener el Proceso construir tabla de valores de x e y y el proceso de observar la tendencia de la gráfica de una función . Esto se puede reflejar en la siguiente actividad diseñada en Pons (2014)

Tarea 3

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ complete.

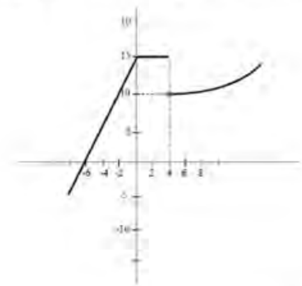
x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)				

2,0001	2,001	2,01	2,1

a. Completa la tabla

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función f(x) en ese punto

Figura 89: Actividades de las Tareas 3 y 7 en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, anexo)

Aquí, podemos identificar los siguientes tipos de tareas:

- Evaluar una función en un punto $x = x_0$ a partir de su regla de correspondencia
- Evaluar una función en un punto $x = x_0$ a partir de su gráfica

2) En la primera parte de la DG, la coordinación entre los Procesos obtiene el valor al que tiene la variable x en una sucesión creciente y obtiene el valor al que tiene la variable x en una sucesión decreciente es el mecanismo que permite la construcción del proceso obtiene el valor al que tiende x en ambas sucesiones. La actividad diseñada para este mecanismo es la siguiente:

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	…	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	…	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) **¿A qué número a se aproxima x?**

b) **¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

Figura 90: Actividad de la Tarea 1 en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, anexo)

A partir del mecanismo descrito y la actividad correspondiente, se identifican los siguientes tipos de tareas:

- Identificar a qué número real se aproxima x a partir de una tabla de valores (por la izquierda y por la derecha)
- Identificar a qué número real se aproxima $f(x)$ a partir de una tabla de valores (por la izquierda y por la derecha)

3) En la primera parte de la DG, el mecanismo de la coordinación donde el alumno entiende el límite como un proceso dinámico es identificada en la actividad c de la tarea 1 mostrada, el resultado de ese mecanismo es el proceso de la estimación del límite a partir de una tabulación de valores, esto se identifica con la actividad d planteada.

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	…	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	…	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) **¿A qué número a se aproxima x?**

b) **¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

c) **Describe el comportamiento de la función f(x) con relación al comportamiento de la variable x**

d) **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x=3**

Figura 91: Actividades de la tarea 1 en Pons (2014)

Fuente: elaboración propia

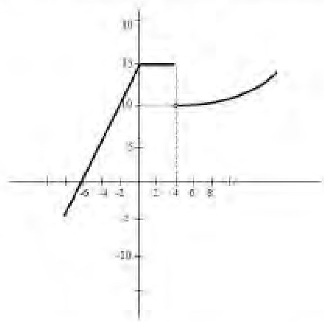
A partir del mecanismo de coordinación y el proceso descritos, se identifican los siguientes tipos de tareas:

- Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a a partir de una tabla de valores
- Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a a partir de la gráfica de una función.

4) En la segunda parte de DG, una de las construcciones mentales es el proceso de estimar a qué valor tiende y cuando x tiende a una valor a por la izquierda o por la derecha. Las actividades c y d propuestas en la siguiente tarea están relacionadas a este proceso. Mientras que la actividad d está relacionada con el proceso de la estimación de los límites laterales de una función.

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función f(x) en ese punto

b) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

c) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

d) Describe el comportamiento de la función f(x) con relación al comportamiento de la variable x.

Figura 92: Actividades propuestas en la Tarea 7 en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, anexo)

A partir del mecanismo de coordinación y el proceso descritos, se identifican los siguientes tipos de tareas:

- Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha a partir de una tabla de valores
- Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha a partir de la gráfica de $f(x)$
- Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha dada su regla de correspondencia
- Estimar la existencia o no existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a.

5) En la tercera parte de la DG, una de las construcciones es el proceso de encontrar el valor de δ dado un valor de ε de manera que se cumpla que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \; cuando \; |x - c| < \delta$$

La siguiente actividad propuesta en Pons (2014) está diseñada para identificar este proceso

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función f(x) y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	...	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	...	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
|0,5 - x|	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	...	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
|1,5 - f(x)|	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	...	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5–f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001?

Figura 93:Actividad de la tarea 4 en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, anexo)

En este proceso, se ha identificado un tipo de tarea:

- Determinar el valor de δ dado un ε tal que cumplan que si $|x - a| < \delta$ entonces se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$

6) En la tercera parte de la DG, la coordinación entre el proceso de encontrar el valor de δ dado un valor de ε de manera que se cumpla que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \; cuando \; |x - c| < \delta$$

Con el proceso de construcción de la expresión

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, tal \; que \; |f(x) - L| < \varepsilon \; cuando \; |x - c| < \delta$$

Construye el proceso de encontrar el valor de δ para cualquier valor de ε de manera que se cumpla que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, tal \; que \; |f(x) - L| < \varepsilon \; cuando \; |x - c| < \delta$$

Este proceso se identifica en la siguiente actividad b propuesta en la tarea 4.

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato, con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función f(x) y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	...	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	...	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
|0,5 - x|	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	...	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
|1,5 - f(x)|	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

a. **¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5–f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001?**

b. **Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x=0,5?**

Figura 94: Actividad propuesta en la tarea 4 en Pons (2014)

Fuente: Pons (2014, anexo)

Planteamos que las tareas matemáticas asociadas a este mecanismo son las siguientes:

- Determinar el valor del límite de una función en un punto después de hallar el valor de δ para un ε cualquiera.

Finalmente, se mencionarán algunas observaciones que se detallaron en la sección de investigaciones de referencia de Pons (2014) y de las que consideramos solo la interpretación realizada.

1) Para comprender la aproximación a un número en modo tabular es necesario poder calcular el valor de una función en un punto.
2) Para lograr comprender la aproximación de $f(x)$ a L (en modo tabular y tabular-algebraico, es decir, acompañado de la regla de correspondencia) es necesario poder establecer la aproximación de la variable x en modo tabular.
3) Para lograr la comprensión de la aproximación a un número, las representaciones tabular y algebraico-tabular de una función tienen la misma jerarquía (desempeñan la misma función).
4) El autor menciona que, para que el alumno sea capaz de coordinar las aproximaciones de ambas variables (x y $f(x)$) debe ser capaz de realizar la aproximación de una variable hacia un número real. Según esto, podemos concluir que es necesario incluir tareas relacionadas a la

aproximación de una sola variable a un número real en la propuesta de MER (este puede darse en el registro tabular o algebraico-tabular).

5) Luego, al analizar la implicancia de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales sobre este mecanismo en el DG, Pons (2014) concluye que para lograr la comprensión de la aproximación de $f(x)$, es necesario iniciar en el registro algebraico-tabular y en el caso en el que los límites laterales coinciden.
6) Y, para comprender la aproximación a un número (en el caso en el que las aproximaciones laterales no son iguales), es necesario lograr coordinar antes las aproximaciones de x y $f(x)$ en los casos en los que las aproximaciones laterales son iguales. Esto nos podría sugerir que para que el alumno construya el proceso de estimación del límite, se debe iniciar primero con tareas donde las aproximaciones laterales coinciden y luego ampliar estas con tareas donde las aproximaciones laterales no coincidan.
7) En las conclusiones, Pons (2014) también sugiere un orden adecuado para la construcción de la coordinación de las aproximaciones: registro gráfico, registro tabular y registro algebraico-tabular. Esto nos puede sugerir que para que un alumno construya el proceso de observar a qué valor tiende $f(x)$ cuando x tiende a c, se sugiere iniciar con tareas donde las aproximaciones laterales coincidan y en la representación gráfica de la función.

Además, para complementar este análisis, Cotrill et al. (1996) propone un acercamiento a la definición formal del límite a partir del registro gráfico de una función en una actividad computacional. En esta actividad, los alumnos trabajan con alguna herramienta informática en la que a partir de la gráfica de la función y dadas las dimensiones verticales de una caja, se les pide ajustar las dimensiones horizontales de la caja de manera que se logre que la gráfica de la función no salga de la caja formada. Por ejemplo, si trabajamos con la gráfica de la función $f(x) = \frac{senx}{x}$ y las gráficas de las rectas $x = -0.1$ y $x = 0.1$, se pide encontrar rectas de la forma $y = b$ de modo que la gráfica de f quedé dentro del recuadro formado.

Así podemos observar dos maneras de lograr que el alumno logre este proceso de la definición formal del límite.

Aporte de la investigación de Blázquez y Ortega (2002) a la construcción del MER

En la investigación de Blázquez y Ortega (2002), se propone una nueva forma de definir el límite (con la aproximación óptima) que fue puesta a experimentación y como conclusiones importantes se obtuvo que los alumnos comprenden mejor la conceptualización del límite basada en la aproximación óptima que la concepción métrica (definición formal del límite). Por ello, sobre esta investigación, tomaremos en primer lugar, las aclaraciones que proponen para los términos aproximar y tender hacia y, en segundo lugar, tomaremos su propuesta de una nueva definición de límite.

1) Diferencia entre aproximación y tendencia: Pueden existir diferentes aproximaciones de una sucesión, sin embargo, la sucesión se dice que solo tiende a un valor que es identificado como la mejor de las aproximaciones.
2) Se define el límite L de una función en un punto a como aquel L para el que, escogida una aproximación distinta del mismo, existe otra aproximación de a, de manera que las imágenes de los valores que mejoran esta última aproximación y son distintos de ella mejoran la aproximación de partida

4.3 Consideraciones preliminares para la reconstrucción de un MER

En este punto, revisaremos algunas consideraciones preliminares a la presentación del MER:

En primer lugar, se denominará *equipamiento praxeológico inicial* al conjunto de técnicas y tecnologías necesarias con el que la comunidad en estudio cuenta para cierta investigación (Fonseca, Gascón, Oliveira, 2013). Para esta investigación, se supone que dentro del *equipamiento praxeológico inicial* de la comunidad en estudio, ya cuenta con las técnicas y las tecnologías necesarias para analizar las características fundamentales de diferentes tipos de funciones (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, trigonométricas, etc.):

tales como la obtención del dominio, rango, representación gráfica (junto con sus asíntotas), su representación tabular, las nociones intuitivas de asíntotas y de continuidad.

En segundo lugar, en la epistemología del límite se mostró que la noción de este concepto surgió en las ideas preliminares de los matemáticos griegos plasmadas en el método de exhausión (usados por Eudoxo y Arquímedes, descritos en el capítulo anterior), que actualmente sería interpretado de la siguiente manera: para calcular el área de un círculo, se inscribe un polígono de n lados y se calcula el área del polígono cuando la cantidad de lados tiende al infinito. Esto nos podría sugerir que, para la introducción del concepto del límite, se inicie con el estudio de sucesiones convergentes tal y como proponen Bartle (2004) y Apostol (1996) en sus libros de análisis matemático. En la misma línea, Blázquez y Ortega (1997) proponen las sucesiones como una aproximación al concepto del límite. Con respecto a ello, Bergé (2006) afirma que, aunque la historia del concepto del límite puede brindar una compresión genuina del origen de un concepto, esta génesis no necesariamente puede y debe usarse directamente en un curso en la actualidad. Además, la autora menciona que, en la época griega, para la aplicación del método de exhausión no fue necesario definir el concepto de secuencia y no se usó esta como herramienta para la aplicación por lo que se puede afirmar que para introducir la noción de límite no necesariamente se debe iniciar con la noción de límite de una secuencia.

Sobre la noción de secuencia, en la construcción del MER propuesto, se supone que los estudiantes cuentan con este concepto en su equipamiento praxeológico inicial sobre la base de la propuesta del Diseño Curricular Nacional (DCN) del Perú. En ese documento, se precisa que los estudiantes terminan la secundaria pueden interpretar y formular sucesiones con números naturales, fracciones y decimales exactos. En el anexo 1, se muestran los logros de aprendizajes relacionados al concepto de sucesión que están considerados en el curso de Número, Relaciones y Funciones.

4.4 Propuesta de MER

Presentamos a continuación la construcción del MER mediante el proceso de modelización intramatemática: proceso de reconstrucción y articulación de OM cada vez más complejas. El MER está descrito como una sucesión de preguntas y respuestas, donde estas últimas conforman praxeologías cada vez más amplias. Nos situamos en el momento en que el concepto de una función ya forma parte del equipamiento praxeológico inicial de la comunidad de estudio (Fonseca, Gascón, Oliveira, 2014) y se muestran las praxeologías matemáticas que se construyen a medida que se avanza en la modelización intramatemática.

Las cuestiones planteadas para el MER han sido adaptadas de las investigaciones de Parra, Otero, Fanaro (2009) y de Fonseca, Gascón, Oliveira (2014).

El problema que se aborda en este parte de la investigación es el siguiente: ¿cómo conseguir los conocimientos matemáticos necesarios en relación al límite de una función en un punto? Para empezar a responder esa pregunta, partimos de la siguiente pregunta generatriz:

Q_0: ¿Qué es el límite de una función en un punto?

Esta pregunta es intencionalmente muy abierta (no se indica con qué tipo de función se trabaja ni su tipo de representación).

Iniciaremos el proceso de modelización con las siguientes notaciones:

Q_i: representa la pregunta i planteada

Q_{ij}: representa la pregunta j derivada de la pregunta i

T_{ij}: representa el tipo de tarea j asociada a la pregunta Q_i

t_{ijk}: representa la tarea k correspondiente al tipo de tarea j asociada a la pregunta Q_i

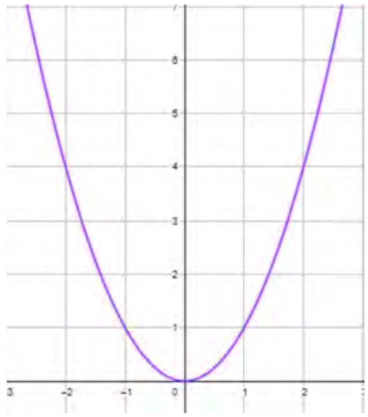
t_{im}^*: representa la tarea bisagra m, que será entendida en esta investigación como la tarea que evidencia el agotamiento de la técnicas producidas en la resolución de los tipos de tareas relativas a la tarea de la pregunta Q_i, de manera que así se presente la siguiente pregunta Q_{i+1}.

Además, se trabajará con las siguientes representaciones para una función:

Tabla 7: *Representaciones de una función*

Representación algebraica	Representación gráfica	Representación algebraico-tabular

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$



$f(x) = x^2$

x	$f(x)$
-2	4
-1.5	2.25
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25

Para la primera pregunta planteada, consideramos el aporte del análisis implicativo de los resultados de la investigación de Pons (2014) sobre la cual se evidenció la necesidad de iniciar este proceso con la evaluación de una función en un punto. Como ya hemos mencionado previamente, nos situamos en el momento en que la comunidad en estudio ya cuenta con las técnicas necesarias para analizar las características elementales de una función: identificación del dominio, evaluación de una función en un punto, esbozo de la gráfica de funciones elementales, etc.

Así, planteamos la primera pregunta:

Q_1: ¿Cuál es el valor de una función en un punto?

Esta pregunta está orientada a que el alumno identifique, halle o calcule el valor de una función en un punto a partir de las representaciones gráfico y algebraico de una función. Algunas de las preguntas que se derivan de Q_1 son las siguientes:

Q_{11}: ¿Cuál es el valor de una función f en un punto, a partir de la gráfica de f?

Q_{12}: ¿Cuál es el valor de una función f en un punto, a partir de la representación algebraica de f?

Para responder a estas cuestiones se utilizan las técnicas que pertenecen al equipamiento praxeológico inicial. Las preguntas derivadas definen cada una un tipo de tarea (cada una de ellas presenta una técnica asociada y representan una OMP).

Tabla 8: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_1

$\boldsymbol{Q_1}$: ¿Cuál es el valor de una función en un punto?	$\boldsymbol{Q_{11}}$: ¿Cuál es el valor de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto, a partir de la gráfica de $\boldsymbol{f}$?	$\boldsymbol{T_{11}}$: Calcular el valor de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{x = a}$ a partir de su gráfica
	Q_{12}: ¿Cuál es el valor de una función f en un punto, a partir de la representación algebraica de f?	T_{12}: Calcular el valor de una función f en un punto $x = a$ a partir de su regla de correspondencia

Para cada de estos tipos de tareas, se presenta a continuación, algunas tareas representativas en donde se usan casos de funciones lineales y cuadráticas.

t_{111}: A continuación, se muestra la gráfica de una función lineal f, a partir de ella calcule lo siguiente: $f(-1), f(0), f(1)$.

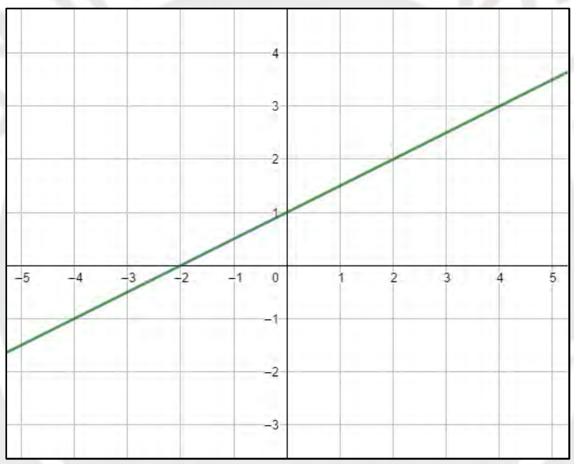


Figura 95: tarea t_{111}

t_{112}: A continuación, se muestra la gráfica de una función cuadrática f, a partir de ella calcule lo siguiente: $f(-1), f(0), f(1), f(2)$

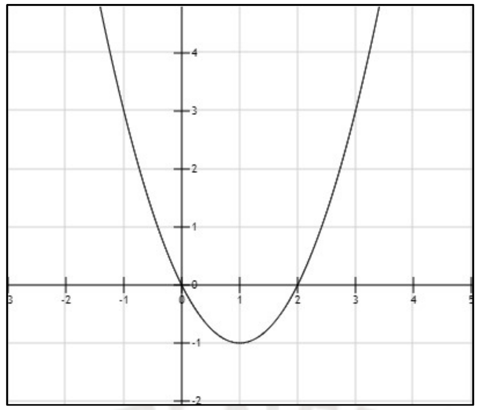


Figura 96: tarea t_{112}

Es importante mencionar que, si bien esta tarea presentada es representativa, pueden generarse diferentes variantes a la misma a partir de los diferentes tipos de funciones con los que se puede trabajar: polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, trigonométricas, seccionadas, etc. Sin embargo, la técnica para su resolución en cada caso sería la misma. A continuación, presentaremos una tarea que permite evidenciar la necesidad del planteamiento de la pregunta Q_{12}.

t_{113}: De la gráfica de la función cuadrática f mostrada, ¿es posible calcular el valor de $f(1{,}5)$?

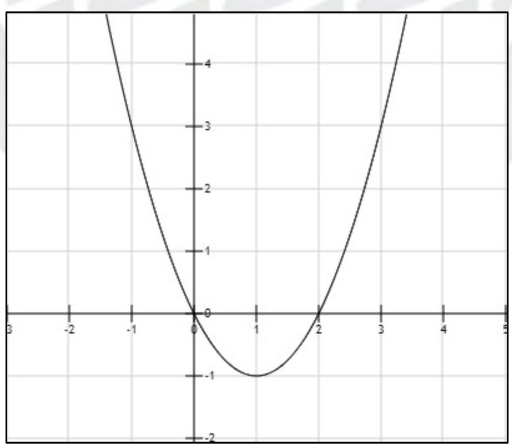


Figura 97: tarea t_{113}

Aquí podemos observar una tarea que evidencia la necesidad del análisis de la función a partir de sus otras representaciones. Es decir, se evidencia la necesidad de la ampliación de la técnica previamente utilizada. A continuación, se presenta una tarea representativa de Q_{12}.

t_{121}: A partir de la regla de correspondencia de $f(x) = \frac{x^3-5x^2+6x}{x-3}$, calcule lo siguiente: $f(-1), f(0), f(1), f(1{,}5)$.

En el mismo caso que el de la tarea t_{112}, la tarea t_{121} puede presentar diferentes variantes al trabajar con diferentes tipos de funciones; sin embargo, la técnica utilizada para su resolución sería la misma.

Para presentar la segunda pregunta de este proceso de modelización, planteamos la siguiente pregunta bisagra

t_{11}^*: A partir de la gráfica y de la regla de correspondencia de f, ¿es posible calcular el valor de $f(3)$? ¿qué sucede con f en los alrededores de $f(3)$?

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$$

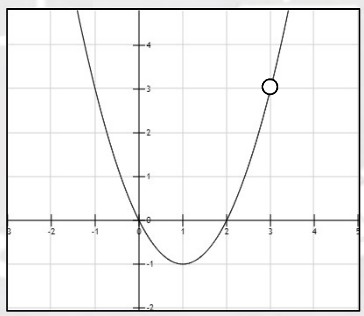


Figura 98: tarea t_{11}^*

En este caso, la técnica asociada a la resolución de esta tarea resulta intuitiva. Ya que se puede determinar que $x = 3$ no pertenece al dominio de la función y por lo tanto es posible dar respuesta a la primera pregunta planteada; sin embargo, la segunda pregunta implica una noción intuitiva de proximidad o aproximación. Por ello, se plantea la segunda pregunta de la siguiente manera:

Q_2: A partir de términos de una sucesión de números, ¿a qué valor se aproxima la sucesión?

Esta pregunta está orientada a que el alumno desarrolle la noción de aproximación en el sentido definido por Blázquez y Ortega (2002) ya que según los autores el límite puede ser entendido como la aproximación óptima. Los tipos de tareas que surgen para dar respuesta a la segunda pregunta planteada son los siguientes:

Tabla 9: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_2

$\boldsymbol{Q_2}$: A partir de términos de una sucesión de números, ¿a qué valor se aproxima la sucesión?	$\boldsymbol{T_{21}}$: A partir de términos de una sucesión de números, determinar si la sucesión se aproxima o no a un valor
	T_{22}: A partir de términos de una sucesión de números, determinar a qué valor se aproxima la sucesión
	T_{23}: A partir de términos de los términos de dos sucesiones de números, determinar si se aproximan al mismo valor

Para cada de estos tipos de tareas, se presenta a continuación, algunas tareas representativas:

t_{211}: A continuación, se muestran algunos términos de diferentes sucesiones de números, determinar si estos términos se aproximan o no a un valor.

5.732	5.761	5.789	5.817	5.844	5.871	5.897	5.924	5.949	5.975

5.87083	5.89737	5.92354	5.94936	5.97484	5.99750	5.99975

5.000	5.225	5.414	5.581	5.732	5.871	5.975

6.191	6.168	6.145	6.121	6.098	6.074	6.049	6.025	6.002

En esta primera tarea, se han considerado los casos donde los tipos de respuesta son del tipo sí/no. Por lo tanto, se desarrolla la técnica asociada a la identificación de la aproximación hacia un valor.

t_{221}: A continuación, se muestran algunos términos de diferentes sucesiones de números, determinar a qué valor se aproxima la secuencia

5.732	5.761	5.789	5.817	5.844	5.871	5.897	5.924	5.949	5.975

5.87083	5.89737	5.92354	5.94936	5.97484	5.99750	5.99975

5.000	5.225	5.414	5.581	5.732	5.871	5.975

En la tarea asociada al segundo tipo de tarea, se busca desarrollar una noción intuitiva de aproximación como parte de la técnica en su resolución, aunque como indica Blázquez y Ortega (2002), este tipo de tareas pueden tener diferentes respuestas ya que se pueden considerar aproximaciones a diferentes valores para una misma sucesión de números. Por lo tanto, aquí se desarrolla la técnica asociada a la identificación del valor al que se aproxima una sucesión de números. Para el tipo de tarea 3, se muestra la siguiente tarea representativa:

t_{213}: A continuación, se muestran algunos términos de dos sucesiones de números, determinar si ambas sucesiones se aproximan al mismo valor en la dirección de las flechas.

13.69	13.91	14.14	14.36	14.59	14.90	15.21	15.52	15.84	15.98
17.06	16.99	16.84	16.64	16.59	16.44	16.33	16.23	16.18	16.01

5.000	5.225	5.414	5.581	5.732	5.871	5.975	5.924	5.949	5.975
6.025	6.049	6.074	6.098	6.121	6.145	6.168	6.191	6.214	6.236

En este tipo de tarea, las técnicas asociadas a su resolución resultan una ampliación de la técnica anterior ya que se trabajan con comparaciones entre las aproximaciones de dos sucesiones. Finalmente, la tarea bisagra para el planteamiento de la siguiente pregunta debe evidenciar la necesidad de la coordinación entre las dos aproximaciones según lo visto en el análisis preliminar de Pons (2014).

t_{21}^{*}: Determine a qué valor se aproxima x en sus dos sucesiones siguiendo la dirección de las flechas, luego, determine a qué valor se aproxima $f(x)$ en sus dos sucesiones siguiendo la dirección de las flechas , ¿cómo se relacionan las aproximaciones de x y $f(x)$?

$$f(x) = x^2$$

x	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.61	3.96	3.996

2.001	2.01	2,1
4.004	4.04	4.41

En esta tarea, se evidencia que no son suficientes las técnicas desarrolladas en la pregunta anterior, por ello surge una ampliación de esta técnica sustentada en la noción de coordinación entre aproximaciones.

Q_3: ¿A qué valor se aproxima una función cuando la variable independiente se aproxima a un punto?

Esta pregunta está orientada a que el alumno coordine las aproximaciones de las variables x y $f(x)$, a partir de las representaciones gráfico y algebraico-tabular de una función. Siguiendo el análisis de los resultados de la investigación de Pons (2014) el desarrollo de la técnica de la coordinación entre las aproximaciones de las variables debe iniciarse en la representación gráfica. Por ello, las preguntas que se derivan de Q_3 son las siguientes:

Q_{31}: ¿A qué valor se aproxima una función f cuando la variable independiente se aproxima a un punto, a partir de la gráfica de f?

Q_{32}: ¿A qué valor se aproxima una función f cuando la variable independiente se aproxima a un punto, a partir de su representación algebraico-tabular?

Las preguntas derivadas definen cada una dos tipos de tareas.

Tabla 10: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_3

<table>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{Q_3}$: ¿A qué valor se aproxima una función cuando la variable independiente se aproxima a un punto?</td><td rowspan="2">$\boldsymbol{Q_{31}}$: ¿A qué valor se aproxima una función $\boldsymbol{f}$ cuando la variable independiente se aproxima a un punto, a partir de la gráfica de $\boldsymbol{f}$?</td><td>$\boldsymbol{T_{31}}$:A partir de la gráfica de $\boldsymbol{f}$, calcular el valor al que se aproxima $\boldsymbol{f}$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a un valor $\boldsymbol{x = a}$</td></tr>
<tr><td>T_{32}: A partir de la gráfica de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$ por la izquierda y por la derecha</td></tr>
<tr><td>Q_{32}: ¿A qué valor se aproxima una función f cuando la variable independiente se aproxima</td><td>T_{33}:A partir de la representación algebraico-tabular de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$</td></tr>
</table>

	a un punto, a partir de su representación algebraico-tabular?	T_{34}: A partir de la representación algebraico-tabular de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$ por la izquierda y por la derecha

Para cada de estos tipos de tareas, se presenta a continuación, algunas tareas representativas:

t_{311}: A partir de la gráfica de f, ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 3?

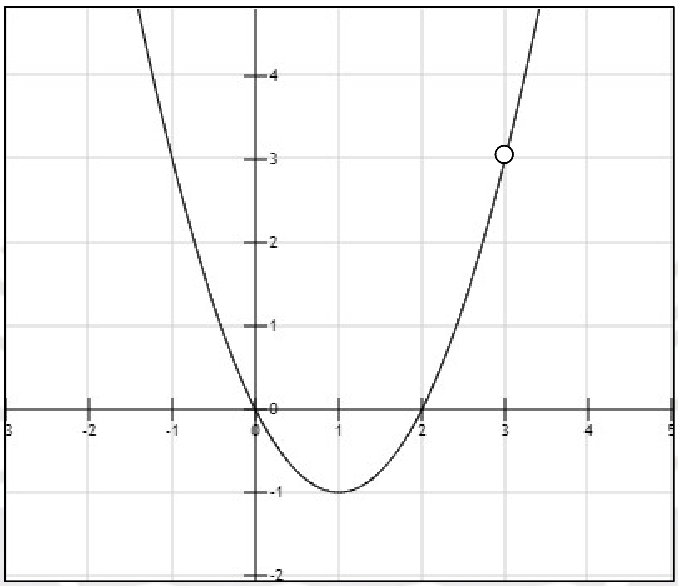


Figura 99: tarea t_{311}

Nuevamente, podemos mencionar que una ampliación de este tipo de tareas se presenta al estudiar diferentes tipos de funciones (polinomiales, racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, secciones, etc.). Considerando solo los casos donde las aproximaciones laterales son iguales ya que como se muestra en los resultados de la investigación de Pons (2014) la coordinación entre los procesos de aproximaciones de las variables debe iniciarse en el caso donde las aproximaciones laterales coinciden. Por lo tanto, una ampliación a la técnica desarrollada en este tipo de tarea se da en el caso de aproximaciones laterales no coincidentes. Para ello, mostramos una tarea que evidencia la necesidad de la ampliación de la técnica.

t_{312}: A partir de la gráfica de f, ¿se puede afirmar que f se aproxima a un valor cuando x se aproxima a 3?

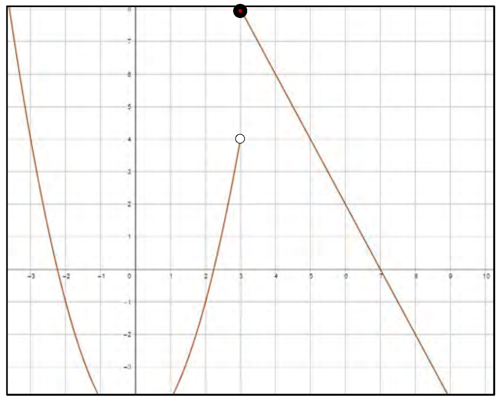


Figura 100: tarea t_{312}

Así, una tarea representativa del tipo T_{32} se muestra de la siguiente manera:

t_{321}: A partir de la gráfica de f, ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 3 por la izquierda? ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 3 por la derecha?

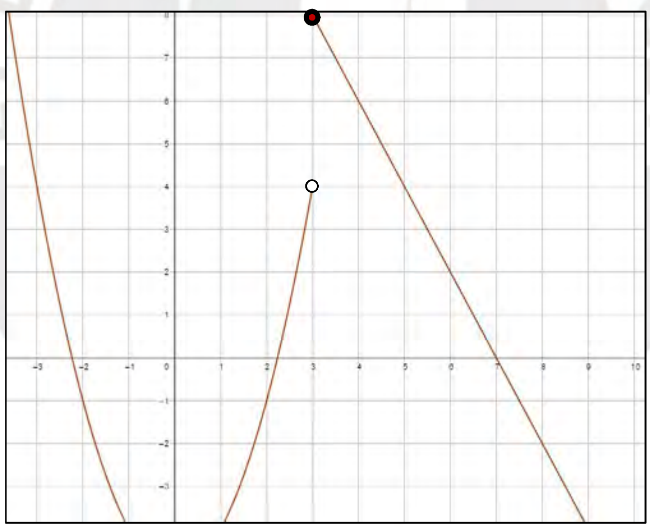


Figura 101: tarea t_{321}

Una ampliación de la técnica empleada en el desarrollo de esta tarea se evidencia en la siguiente tarea:

t_{322}: A partir de la gráfica de f, ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha?

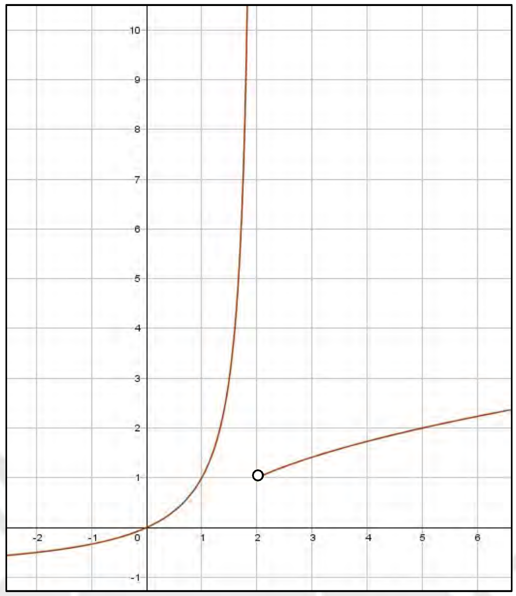


Figura 102: tarea t_{322}

Esta tarea evidentemente implica una ampliación de las técnicas desarrolladas previamente ya que es necesaria identificación de la aproximación hacia el infinito.

Por otro lado, para evidenciar la necesidad de la ampliación de las técnicas desarrolladas en el registro gráfico, se presenta la siguiente tarea:

t_{323}: A partir de la gráfica de $f(x) = \frac{senx}{x}$, ¿se puede afirmar que f se aproxima a un valor cuando x se aproxima a 0 por la izquierda y por la derecha? Use una graficadora para representar la gráfica de la función si fuera necesario.

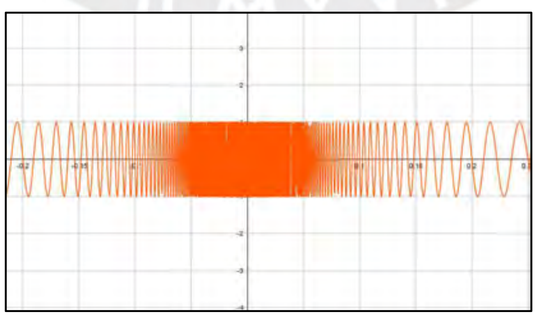


Figura 103: tarea t_{323}

Esta tarea permite la ampliación de las técnicas en el registro algebraico-tabular.

t_{331}: A partir de la regla de correspondencia de f, complete la siguiente tabla. ¿A qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 2?

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$\boldsymbol{x}$	1,9	1,99	1,999	1,999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$\boldsymbol{f(x)}$								

Nuevamente la ampliación de la técnica desarrollada, se evidencia en las tareas de casos de límites laterales no coincidentes. Así se presenta la siguiente tarea que evidencia la necesidad de la ampliación de la técnica.

t_{332}: A partir de la regla de correspondencia de f, complete la tabla. ¿Se puede afirmar que f se aproxima a un valor cuando x se aproxima a 3?

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
$\boldsymbol{f(x)}$								

El tipo de tarea T_{34} se ejemplifica con la siguiente tarea:

t_{341}: A partir de la regla de correspondencia de f y de tabla completa, ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 3 por la izquierda? ¿a qué valor se aproxima f cuando x se aproxima a 3 por la derecha?

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
$\boldsymbol{f(x)}$								

Antes de continuar con la ampliación de las praxeologías, se presentan las siguientes notaciones, definiciones y consideraciones:

- Como ya se ha mencionado antes, se supone que la comunidad en estudio ya conoce la idea de aproximación en una sucesión, por lo que se denotará la aproximación de una variable a un valor de la siguiente manera:

$$x \to a \quad \vee \quad f(x) \to L$$

  Se considera inicialmente que ambas son dos aproximaciones para magnitudes y que no implica una coordinación entre ellas. Además, se considera que en la aproximación $x \to a$, x no llega a tomar el valor de a; es decir, se consideran aproximaciones por la izquierda y por la derecha de a.
- Además, para identificar la aproximación, representada por $x \to a$, se leerá como "x tiende a a" y la aproximación, representada por $f(x) \to L$, se leerá como "$f(x)$ tiende a L".
- Cuando la variable x tiende al valor de a con valores menores que a, se identifica como "x tiende a a por la izquierda" y se representa de la siguiente manera: $x \to a^-$.
- Cuando la variable x tiende al valor de a con valores mayores que a, se identifica como "x tiende a a por la derecha" y se representa de la siguiente manera: $x \to a^+$.
- Se dice que existe el límite de $f(x)$ cuando las imágenes de x tienden a un valor real L cuando $x \to a$ (y este valor L debe ser el mismo tanto cuando $x \to a^-$ como cuando $x \to a^+$). Caso contrario, se dirá que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ no existe.
- Como ya se ha mencionado que los alumnos cuentan con la noción de asíntota como parte de su equipamiento praxeológico inicial, entonces se considerarán las siguientes definiciones:
  - En la aproximación $x \to a^-$, si se cumple que las imágenes de x crecen y la función presenta una asíntota vertical por el lado izquierdo, se dirá que el límite no existe, pero que $f(x) \to +\infty$ (es decir, $f(x)$ tiende al $+\infty$). Como notación se representará de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

- En la aproximación $x \to a^-$, si se cumple que las imágenes de x decrecen y la función presenta una asíntota vertical por el lado izquierdo, se dirá que el límite no existe, pero que $f(x) \to -\infty$ (es decir, $f(x)$ tiende al $-\infty$). Como notación se representará de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

- En la aproximación $x \to a^+$, si se cumple que las imágenes de x crecen y la función presenta una asíntota vertical por el lado izquierdo, se dirá que el límite no existe, pero que $f(x) \to +\infty$ (es decir, $f(x)$ tiende al $+\infty$). Como notación se representará de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

- En la aproximación $x \to a^+$, si se cumple que las imágenes de x decrecen y la función presenta una asíntota vertical por el lado izquierdo, se dirá que el límite no existe, pero que $f(x) \to -\infty$ (es decir, $f(x)$ tiende al $-\infty$). Como notación se representará de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

- Se llama valor estimado del límite de una función $f(x)$ al valor L al cual tienden las imágenes de x cuando x tiende a a.
- Se usará la siguiente notación en el cálculo y las aproximaciones del límite de una función: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$; $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$; $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Es importante destacar que debido a que se iniciará con la noción dinámica de límite, se usará el término tiende como una forma de asociar el límite a un solo valor tal y como lo plantean Blázquez y Ortega (2002). Además, se hace referencia al valor estimado del límite cuando se calcula el valor del límite a partir de las representaciones gráfica o algebraico-tabular ya que se usa la noción dinámica del límite. La forma de calcular el valor del límite como un proceso dinámico no es considerado como un cálculo riguroso matemático según la bibliografía revisada, por lo que usamos el término estimar el valor en lugar de calcular el valor del límite.

Así, se plantea la siguiente pregunta:

Q_4: ¿Cuál es el valor estimado del límite de una función en un punto?

Esta pregunta está orientada a la definición dinámica del límite.

Q_{41}: ¿Cuál es el valor estimado del límite de una función a partir de su gráfica?

Q_{42}: ¿Cuál es el valor estimado del límite de una función a partir de su representación algebraico-tabular?

Q_{43}: ¿Cuáles son los valores estimados de los límites laterales de una función a partir de su gráfica?

Q_{44}: ¿Cuáles son los valores estimados de los límites laterales de una función a partir de su representación algebraico-tabular?

Los tipos de tareas que se presentan para las respuestas a estas preguntas se muestran a continuación:

Tabla 11: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_4

$\boldsymbol{Q_4}$: ¿Cuál es el valor estimado del límite de una función en un punto?	$\boldsymbol{T_{41}}$: Determinar la existencia o no existencia del límite de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{x = a}$
	T_{42}: Calcular el valor estimado del límite de una función f en un punto $x = a$
	T_{43}: Calcular los valores estimados de los límites laterales de una función f en un punto $x = a$

Las tareas representativas a de cada uno de estos tipos de tareas se muestran a continuación:

t_{411}: A partir de la gráfica de f, determinar si existe o no existe el límite de f en el punto $x = 2$

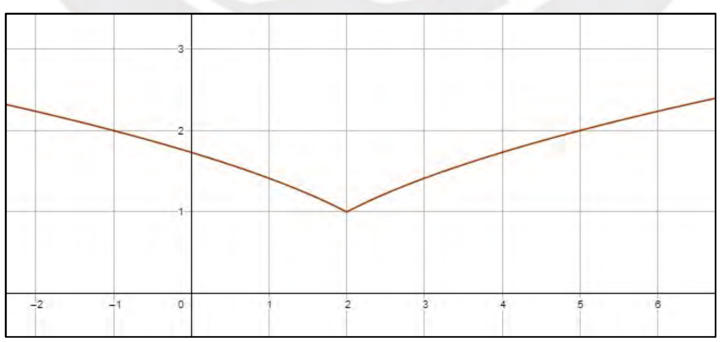


Figura 104: tarea t_{411}

t_{412}: A partir de la gráfica de f, determinar si existe o no existe el límite de f en el punto $x = 0$

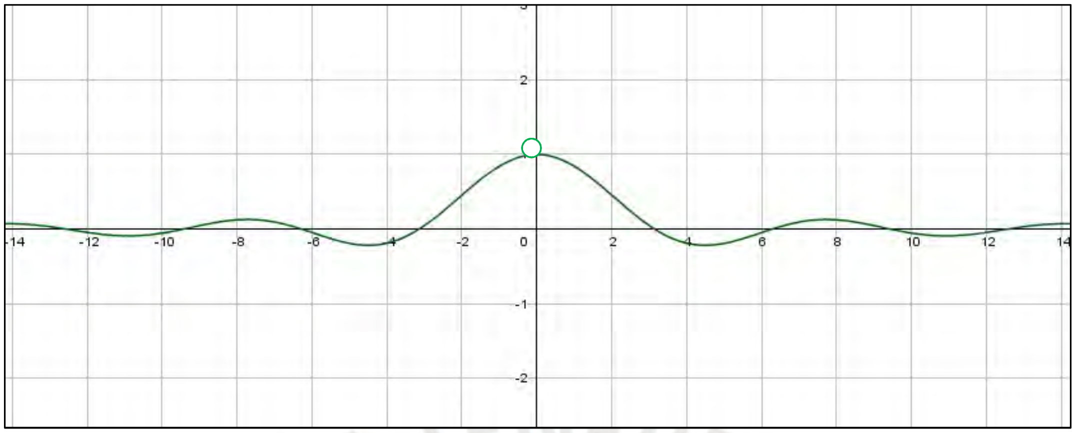


Figura 105: tarea t_{412}

t_{413}:A partir de la gráfica de f, determinar si existe o no existe el límite de f en el punto $x = 0$

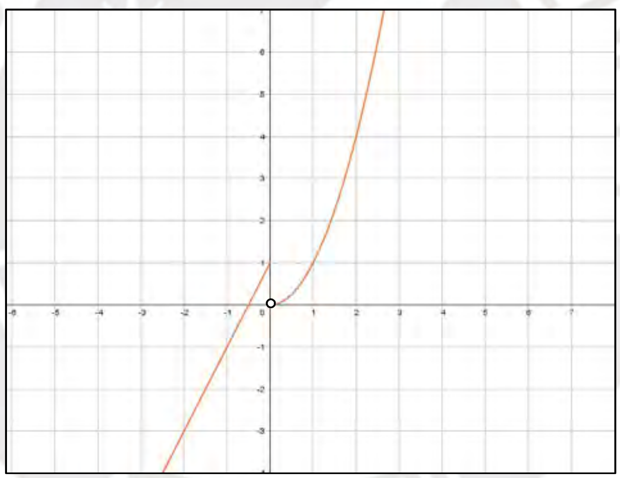


Figura 106: tarea t_{413}

t_{414}:A partir de la gráfica de f, determinar si existe o no existe el límite de f en el punto $x = 0$

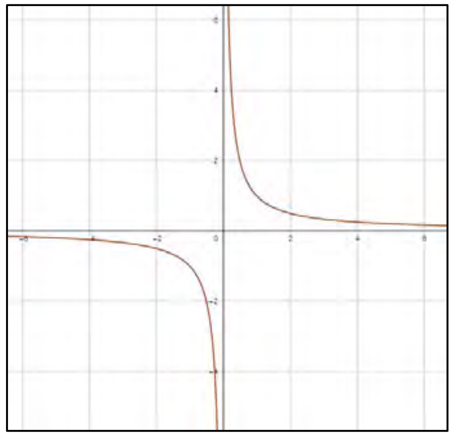


Figura 107: tarea t_{414}

Como se muestra, las tareas presentadas buscan evidenciar diferentes tipos de casos, de manera que se genere así un entorno técnológico-teórico para las siguientes praxeologías. Las siguientes praxeologías hacen referencia a la estimación del límite, por lo que las tareas anteriores conforman el entorno tecnológico-teórico donde se define que existe el valor del límite cuando los límites laterales son iguales.

Para los casos de los límites laterales coincidentes, se puede evidenciar una ampliación a la técnica desarrollada a partir del cálculo del valor estimado del límite de la función:

t_{421}:A partir de la gráfica de f, calcular el valor estimado de f en el punto $x = 2$

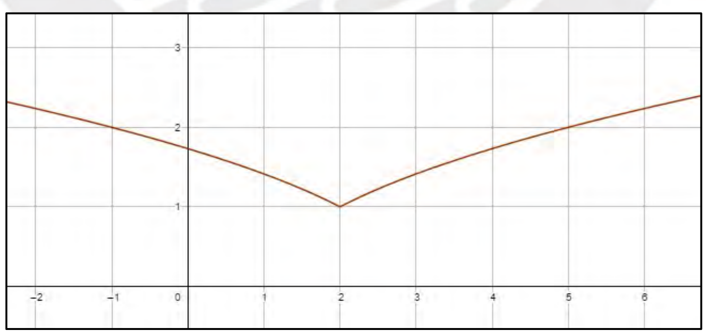


Figura 108: tarea t_{421}

t_{422}:A partir de la gráfica de f, calcular el valor estimado del límite de f en el punto $x = 0$

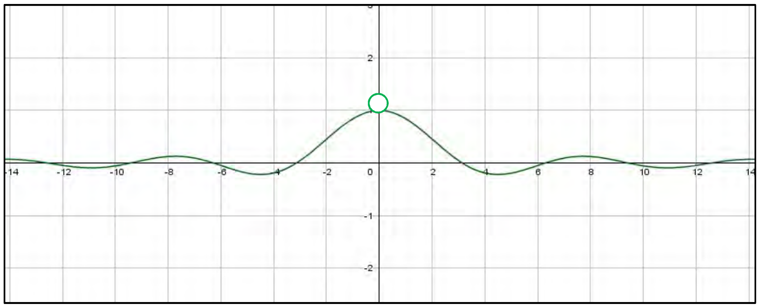


Figura 109: tarea t_{422}

Una necesaria ampliación hacia el siguiente tipo de tarea se evidencia en la siguiente tarea:

t_{423}:A partir de la gráfica de f, ¿es posible calcular el valor estimado de f en el punto $x = 0$?

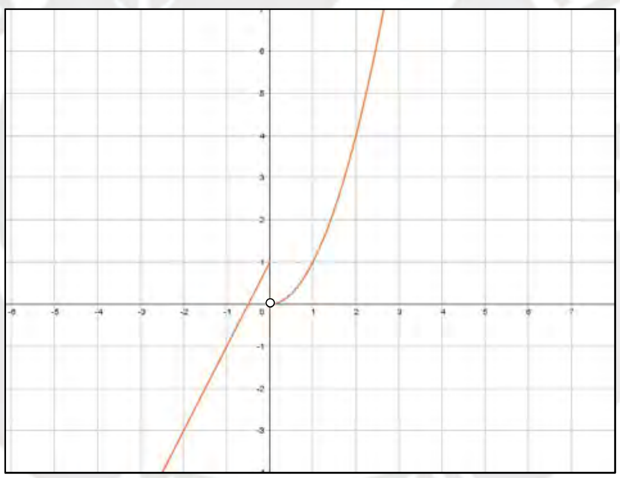


Figura 110: tarea t_{423}

Por ello, se ejemplifican las tareas del tipo de tarea T_{43}.

t_{431}:A partir de la gráfica de f, calcular los valores estimados de los límites laterales de f en el punto $x = 0$

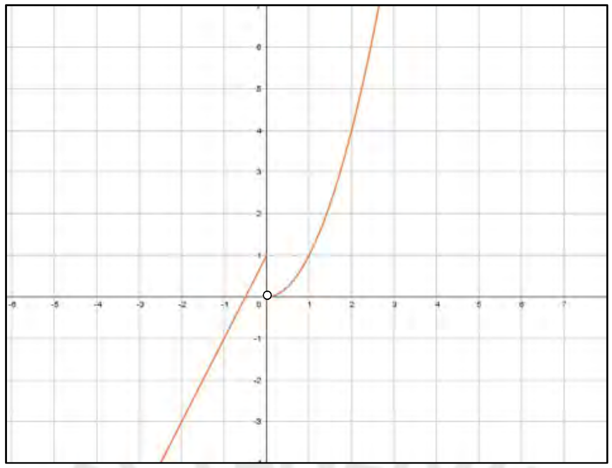


Figura 111: tarea t_{431}

t_{432}:A partir de la gráfica de f, calcular los valores estimados de los límites de f en el punto $x = 6$

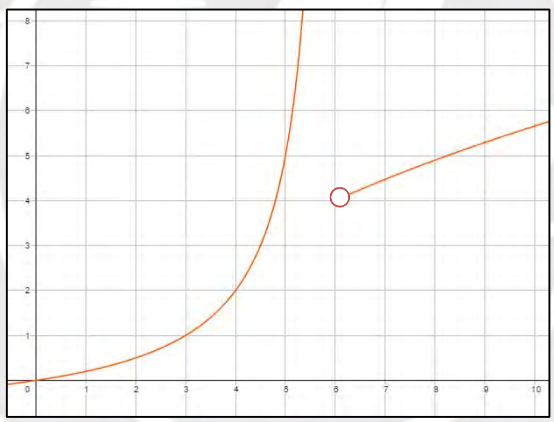


Figura 112: tarea t_{432}

Del mismo modo se puede evidenciar, la ampliación de las praxeologías en el registro algebraico numérico con las siguientes tareas:

t_{411}:Después de completar la tabla, determinar la existencia o no existencia del límite de la siguiente función en $x = 4$.

$$f(x) = \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$$

$\boldsymbol{x}$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1
$\boldsymbol{f(x)}$							

t_{412}:Después de completar la tabla, determinar la existencia o no existencia del límite de la siguiente función en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01	2.1
$\boldsymbol{f(x)}$									

t_{421}:Después de completar la tabla, calcular el valor estimado de f en el punto $x = 4$

$$f(x) = \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$$

$\boldsymbol{x}$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1
$\boldsymbol{f(x)}$							

t_{431}:Después de completar la tabla, calcular los valores estimados de los límites laterales de f en el punto $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01	2.1
$\boldsymbol{f(x)}$									

Las resoluciones de estos tipos de tareas requieren de nuevas técnicas apoyadas en las técnicas desarrolladas a partir de la cuestión Q_3 y a partir de la definición dinámica del límite. Esta ampliación de las OM planteadas han generado entonces nuevas necesidades tecnológico-teóricas por ello se afirma que se presenta una ampliación de la praxeología.

Una posible ampliación a las preguntas planteadas resulta al evidenciar la necesidad de los registros gráfico y tabular para el análisis del límite de una función. Esto se muestra en la siguiente pregunta:

Q_{4*}: ¿Cuál es el valor estimado del límite de una función a partir de su representación algebraica?

Q_{4*}: ¿Cuáles son los valores estimados de los límites laterales de una función a partir de su representación algebraica?

Para dar respuesta a estas preguntas, se generan los siguientes tipos de tareas:

T_{44}: Calcular el valor estimado del límite de una función f en un punto $x = a$ a partir de su representación algebraica

T_{45}: Calcular los valores estimados de los límites laterales de una función f en un punto $x = a$ a partir de su representación algebraica

Para la resolución de esta pregunta es necesario utilizar las técnicas aprendidas en las praxeologías previas. Es decir, se encontrará aquí la necesidad de representar la función para facilitar el análisis de la existencia del límite como un proceso dinámico (representaciones algebraico-tabular y gráfica). Por ello, para la resolución de esta pregunta, se utilizan las técnicas asociadas a estas tareas con la ampliación de la representación algebraico-tabular o gráfico de la función. Para ello, como se mencionó antes se supone que dentro del equipamiento praxeológico inicial los alumnos ya cuentan con las técnicas y tecnologías necesarias para ciertas funciones (polinómicas, racionales, exponenciales y trigonométricas). Sin embargo, para el caso de funciones más complejas (con asíntotas o con puntos de discontinuidad), se podría responder a la cuestión planteada con la ayuda de un asistente matemático (por ejemplo, Geogebra).

La siguiente tarea se propone como articuladora pues se evidencia que el alcance de las técnicas desarrolladas no es suficiente.

t_{41}^{*}: Calcular el valor estimado del límite de una función $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en el punto $x = 0$

En esta pregunta se evidencia que las representaciones algebraico-tabular y gráfico no son suficientes para su resolución ni tampoco la noción intuitiva de la estimación del límite como se muestra en las siguientes figuras. En la segunda figura, se muestra cómo al tratar de mejorar la escala del eje X para identificar el valor del límite, esto es insuficiente.

x	$f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$
0.1	0.54402
0.01	-0.50636
0.001	0.82687
0.0001	-0.30561
-0.0001	0.30561
-0.001	-0.82687
-0.01	0.50636
-0.1	-0.54402

Figura 113: Evidencia de la insuficiencia en el registro algebraico-tabular

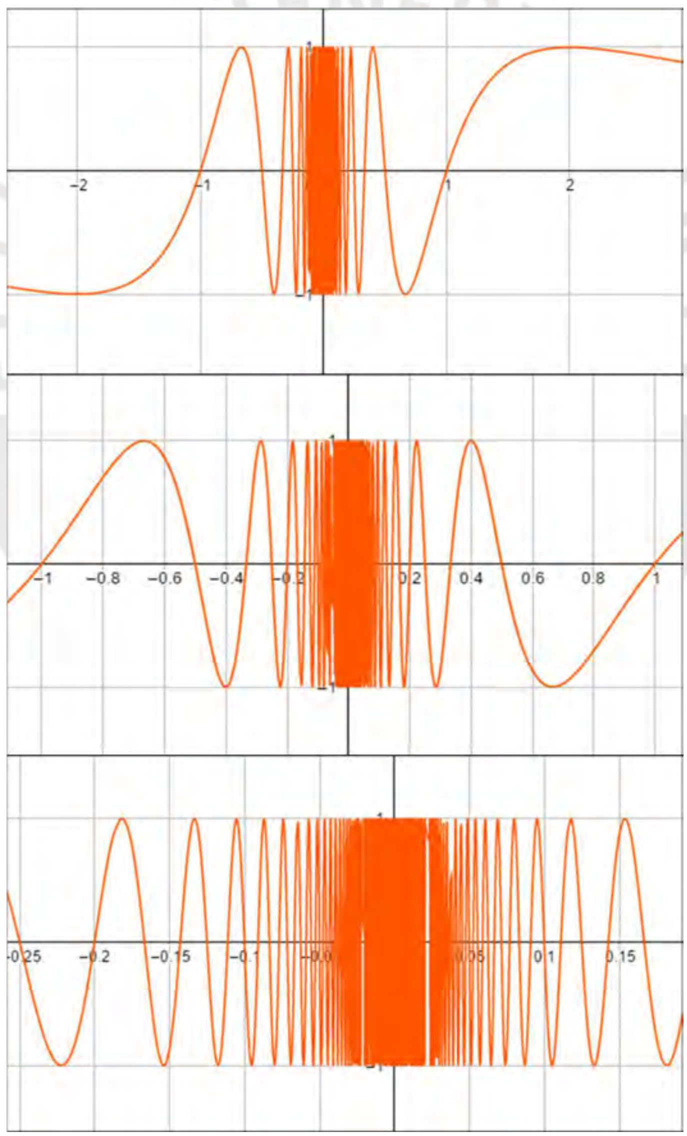


Figura 114: Evidencia de la insuficiencia en el registro gráfico

Entonces, se evidencia el agotamiento de la técnica y surge una necesidad de ampliar esta mediante el cálculo de los límites. Así se define la siguiente pregunta:

Q_5: ¿Cómo calcular el valor del límite de una función en un punto?

Para responder esta pregunta, no es suficiente la técnica usada en la pregunta anterior (que mostraba un trabajo intuitivo con las representaciones gráfica y tabular). Esta pregunta busca generar las técnicas asociadas a los diferentes métodos algebraicos para calcular el límite de una función en un punto por lo que se trabaja solo con la representación algebraica de una función (en base a la manipulación de las funciones). Las preguntas derivadas de la cuestión Q_5 están orientadas a considerar dos casos de funciones: función continua y función discontinua.

Q_{51}¿Cómo calcular el límite de una función continua en un punto?

Q_{52}: ¿Cómo calcular el límite de una función discontinua en un punto?

Previamente, se revisarán algunas notaciones, aclaraciones y teoremas:

- Se considera previamente que se entiende que una función continua es aquella cuya gráfica se puede realizar "sin levantar el lápiz"; es decir, su gráfica no presenta interrupciones. En este momento, se supone que los alumnos deben trabajar con funciones cuyos esbozos de gráficas puedan realizar (casos sencillos de funciones polinomiales, exponenciales, racionales, irracionales, trigonométricas y seccionadas); es decir, pueden identificar, a partir de la gráfica, qué funciones son continuas y cuáles no lo son. En los casos de funciones más complejas este análisis se realizará con la ayuda de una herramienta informática (como Geogebra). Esta definición está basada en la definición preliminar de continuidad brindada en el libro de Apostol (1983), donde se identifica si una función es continua o no a partir de su gráfica.
- Cuando una función no es continua, se dice que es discontinua. Y aquí se definen dos tipos: discontinuidad removible (la función no está definida en un punto, pero no presenta asíntota en ese punto) o discontinuidad no removible

(la función presenta asíntota en ese punto o la función no presenta asíntota en ese punto y los límites laterales son diferentes).

- Se presentan en esta etapa, una selección de los teoremas asociados al trabajo de límites (estos se muestran en el anexo 2)
- Para el caso de funciones continuas, se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- En el caso de una función seccionada $f(x)$, para el planteamiento del límite $\lim_{x \to a^{\pm}} f_i(x)$ en una función seccionada se debe tomar en consideración el dominio de la función para seleccionar la regla de correspondencia que está asociada a esta.
- Si al evaluar el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ se obtienen algunas de las formas

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \ \infty - \infty; \ \infty.0; \ 1^{\infty}; \ 0^{0}; \ \infty^{0}$$

Se dice que se obtiene una forma indeterminada.

- Si al evaluar un límite $\lim_{x \to a} f(x)$ se obtiene la forma $\frac{c}{\infty}$ $con\ c \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

- Si al evaluar un límite $\lim_{x \to a} f(x)$ se obtiene la forma $\frac{c}{0}$ $con\ c \neq 0$, entonces

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (los teoremas para definir el signo, se presentan en el anexo2)

Los tipos de tareas que se presentan para las respuestas de las preguntas derivadas de Q_5 se muestran a continuación:

Tabla 12: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_5

$\boldsymbol{Q_5}$: ¿Cómo calcular el valor del límite de una función en un punto?	$\boldsymbol{Q_{51}}$: ¿Cómo calcular el límite de una función continua en un punto?	$\boldsymbol{T_{51}}$: Calcular el valor del límite en una función $\boldsymbol{f}$ continua en un punto $\boldsymbol{x = a}$
	Q_{52}: ¿Cómo calcular el límite de una función discontinua en un punto?	T_{52}: Calcular el valor del límite en una función f en un punto $x = a$ donde f tiene una discontinuidad removible
		T_{53}: Calcular el valor del límite en una función f en un punto $x = a$ donde f tiene una asíntota vertical

Las tareas representativas a de cada uno de estos tipos de tareas se muestran a continuación:

t_{511}: Calcular el valor del límite de la función f

$$\lim_{x \to 2} x^3 + 5x + 7$$

Evidentemente, se puede producir una extensión bastante amplia de las tareas asociadas a este tipo de tarea según diferentes tipos de funciones (que pueden hacerse cada vez más complejas). Pero resaltaremos solo el siguiente caso, que nos permitirá ampliar esta praxeología.

t_{512}: Calcular el valor del límite de la función f

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

En este caso, todavía es posible resolver la tarea con técnica desarrollada; sin embargo, la tarea que articula hacia la siguiente praxeología se presenta de la siguiente forma:

t_{513}: ¿Es posible calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

Con esta tarea, se evidencia la necesidad de la ampliación de la técnica para el cálculo de límites de una función discontinua.

t_{521}: Calcular el valor del límite de la función f

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

Las técnicas de resolución están asociadas a los métodos algebraicos para redefinir una función con discontinuidad removible f a una función continua que tenga el mismo entorno que f.

Esta técnica también se agota al presentar la siguiente tarea

t_{522}: ¿Es posible calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + 3}{x^2 - 1}$$

Aquí, las técnicas asociadas a la redefinición de la función no son suficientes ya que este caso corresponde al de una función con discontinuidad no removible (función que presenta una asíntota vertical).

t_{531}: Calcular el valor del límite de la función f

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x^2-1}$$

Para la resolución de esta tarea ya se presenta una ampliación en la técnica.

Finalmente, para la presentación de la última pregunta, se presenta la siguiente tarea bisagra:

t_{51}^{*}: ¿Cómo se interpreta que el límite de la función $x^2 + 5x$ cuando x tiende a 2 sea igual a 14?

En esta tarea, se pide expresar con palabras una definición preliminar del límite. Que permite evidenciar que las técnicas presentadas en las organizaciones matemáticas preliminares no son suficientes para dar una definición rigurosa del límite de una función en un punto. Por lo tanto, se produce la necesidad de la ampliación de las técnicas desarrolladas a partir de la siguiente pregunta:

Q_6: ¿Cómo definir el límite de una función en un punto?

Antes del desarrollo de esta pregunta, se revisarán algunas notaciones, aclaraciones y teoremas:

- Se redefine la noción de aproximación $x \to a$, como la medida de la distancia hacia el punto $|x - a|$
- Se redefine la noción de aproximación $f(x) \to L$, como la medida de la distancia hacia el punto $|f(x) - L|$
- Se presenta la definición del límite propuesta por Blázquez y Ortega (2002): Se define el límite L de una función en un punto a como aquel L para el que, escogida una aproximación distinta del mismo, existe otra aproximación de a, de manera que las imágenes de los valores que mejoran esta última aproximación y son distintos de ella mejoran la aproximación de partida

- En esta definición, se realizan redefiniciones propuestas de manera que el límite se interprete de la siguiente manera:
  Siempre es posible encontrar una aproximación de x ($|x-a|<\delta$) de tal manera que $f(x)$ se aproxima a L ($|x-a|<\varepsilon$)

Así, los tipos de tareas que se presentan para las respuestas de las preguntas derivadas de Q_6 se muestran a continuación:

Tabla 13: Tipos de tareas asociados a la pregunta Q_6

$\boldsymbol{Q_6}$: ¿Cómo definir el límite de una función en un punto?	$\boldsymbol{T_{61}}$: Dada la gráfica de $\boldsymbol{f}$ y un valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$ determinar el valor de $\boldsymbol{\delta}$ de tal manera que la gráfica de $\boldsymbol{f}$ quede dentro de la caja formada por $\boldsymbol{|x-a|<\delta}$ y por $\boldsymbol{|f(x)-L|<\varepsilon}$
	T_{62}: Dada la regla de correspondencia de f y un valor de ε determinar el valor de δ de tal manera que $|x-a|<\delta$ implique que $|f(x)-L|<\varepsilon$

Las tareas representativas de cada tipo de tarea se muestran a continuación:

t_{611}: Mediante un asistente matemático, grafique la función $f(x)=x+2$ y grafique la región $|y-4|<0.2$. Luego, determine un valor de δ de tal manera que al graficar la región $|x-2|<\delta$, la gráfica de la función no salga de la rectángulo formado

El objetivo de esta tarea es que se construya la siguiente figura, de manera que se prueben valores de δ para el cual se asegura que la gráfica de la función lineal $f(x)=x+2$ se quede dentro del recuadro formado. En el caso en el que se elija el valor de $\delta=0.2$ esta sería la gráfica obtenida.

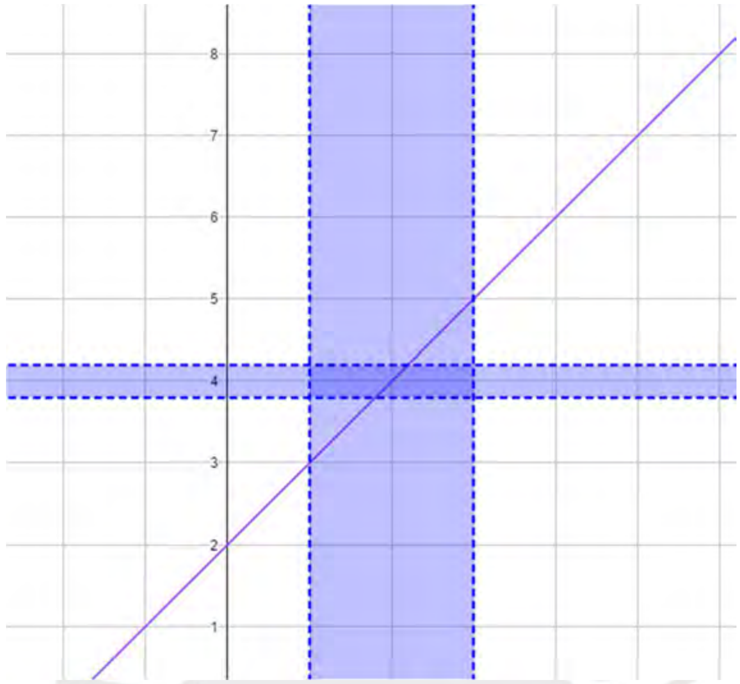


Figura 115: Gráfica de $f(x) = x + 2$*,* $|y - 4| < 0.2$ *y* $|x - 2| < 0.2$

t_{621}: Para la función $f(x) = x + 2$, determine un valor de δ de tal manera que se cumpla lo siguiente:

$$|x - 2| < \delta \rightarrow |f(x) - 4| < 0.2$$

Finalmente, la construcción del MER completo se muestra en la siguiente figura:

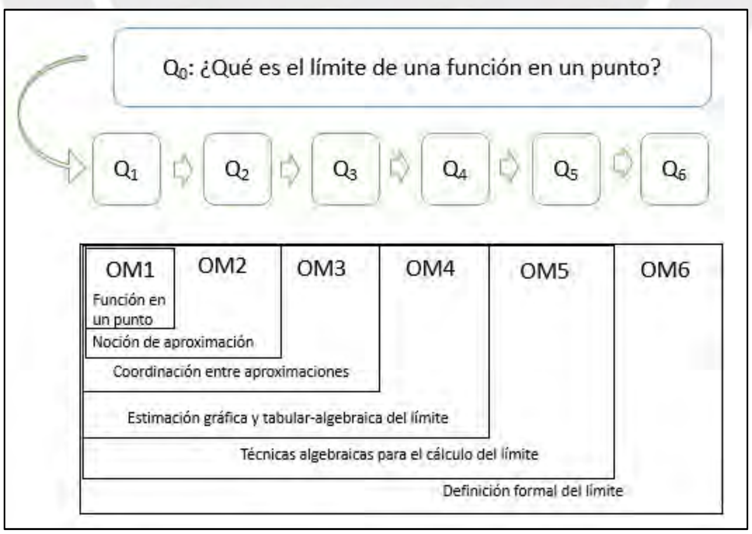


Figura 116: Esquema de MER propuesto

Los criterios para la construcción y selección de las preguntas del MER propuesta han sido enriquecidos por el análisis desarrollado en el capítulo 4.2 en donde se identificaron tareas a partir de los mecanismos de la DG revisada propuesta por Pons (2014). Adicionalmente, a partir del análisis implicativo del mismo autor se pudieron considerar los siguientes criterios para la construcción del MER:

- Son necesarias las tareas relacionadas a la evaluación de una función en un punto previas a las tareas de aproximación de una variable a un valor.
- Son necesarias las tareas donde el alumno identifique los valores hacia los cuales se aproximan dos variables independientes previas a las tareas donde deban usar la coordinación entre ambas aproximaciones. Según esto se decidieron incluir tareas relacionadas a la aproximación de una sola variable a un número real.
- Las tareas donde se calcule el límite de una función en un punto debe iniciarse con los casos en donde los límites laterales coinciden. Y estas últimas se deben iniciar en la representación gráfica de la función.
  - Se debe considerar el registro algebraico-tabular previo al registro algebraico.

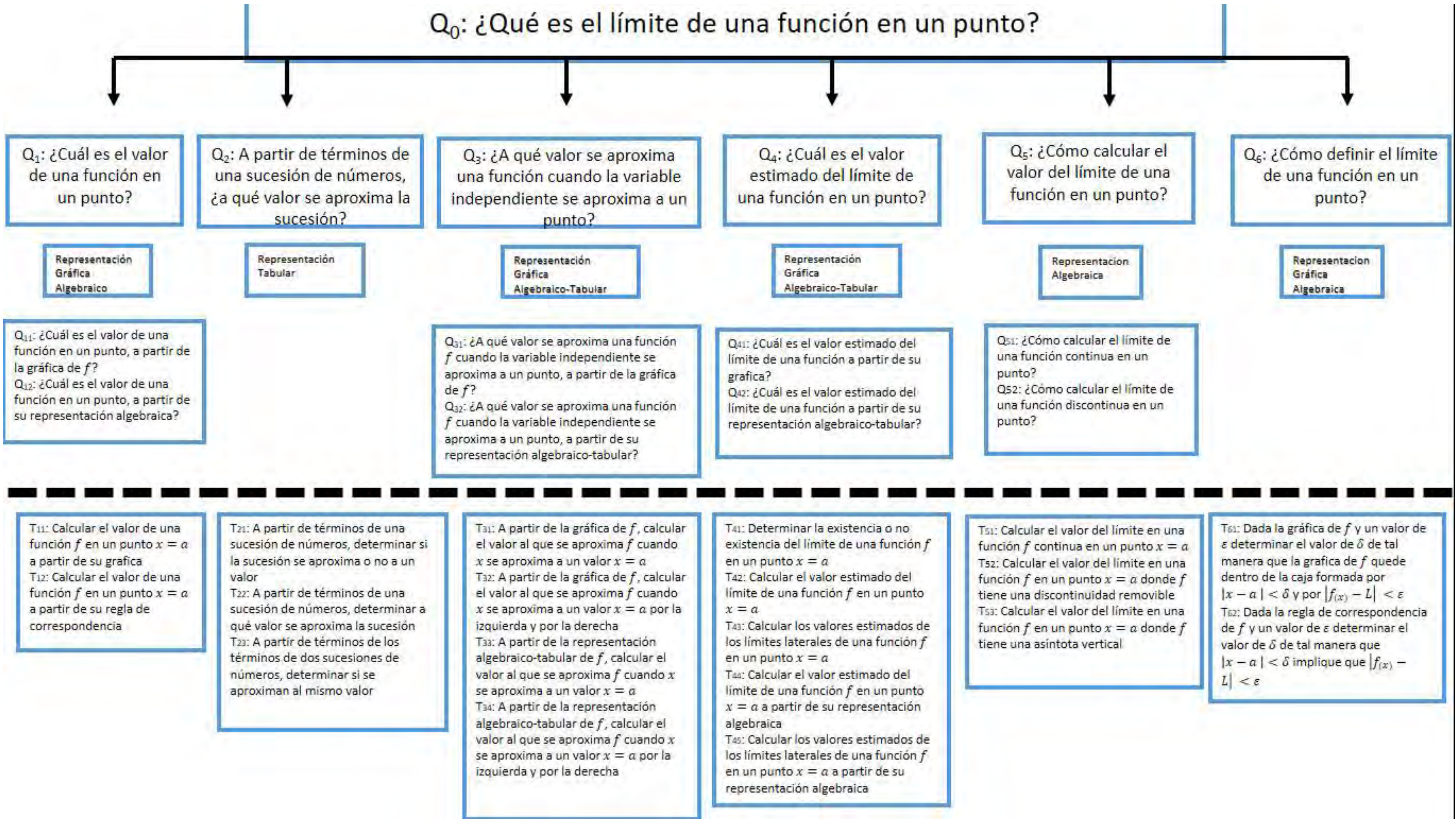


Figura 117: Preguntas y tipos de tareas del MER propuesto

CONCLUSIONES

En este capítulo, presentaremos las conclusiones obtenidas en el desarrollo del trabajo en relación a los objetivos planteados de la investigación. Adicionalmente, indicaremos algunas recomendaciones que quedarán como problemas abiertos para futuras investigaciones relacionadas al límite de una función en un punto o para construcción de un MER como un instrumento de modelización.

Con respecto al primer objetivo de la investigación, el análisis de la epistemología del límite permitió identificar los conceptos matemáticos relacionados a la concepción del límite, así como también permitió describir los métodos infinitesimales donde la noción del límite estuvo implícita. Por otro lado, también nos permitió evidenciar las nociones del límite preliminares a la definición formal. Adicionalmente, las descripciones de los libros de Cálculo seleccionados permitieron observar el concepto del límite transformado como un objeto de enseñanza. Este análisis de la epistemología del concepto y de la forma de presentarse en los libros de texto permite la independización institucional necesaria para la construcción de un MER.

Con respecto al segundo objetivo de la investigación, se logró identificar las organizaciones matemáticas asociadas al concepto del límite en un punto. El análisis praxeológico evidencia cómo algunas OMP se consolidan luego como el entorno tecnológico-teórico de otras. Este análisis fue importante para la construcción del MER ya que delimita el concepto del límite para la institución de referencia (define el alcance del concepto en la institución).

Con respecto al tercer objetivo de la investigación, mediante el proceso de modelización matemática, se plantea un Modelo Epistemológico de Referencia asociadas al límite de una función en un punto para el curso de Cálculo Diferencial de la PUCP. Este MER evidencia que el concepto del límite puede ser estructurado en praxeologías matemáticas sucesivas y ampliadas.

También, se resalta que la TAD permitió a través del modelo epistemológico de referencia (MER) describir las organizaciones matemáticas asociadas al concepto del límite, así como también permitió articularlas a través de la modelización matemática.

Finalmente, en esta investigación, se ha podido ejemplificar cómo las teorías APOE y TAD pueden cooperar a partir del diálogo propuesto por Trigueros, Bosch y Gascón (2011). Este aporte de la teoría APOE surge de la necesidad de complementar los criterios de construcción del MER en la TAD, además, el MER es una cuestión preliminar planteada que debe ser contrastada y modificada, en ese sentido, también se pudo aprovechar los datos obtenidos del ciclo ACE de la teoría APOE. Sin embargo, debido a que cada teoría se basa en principios diferentes, el artículo de Trigueros, Bosch y Gascón (2011) permitió lograr una conversación entre teorías sin violentar sus principios fundamentales. Esta conversación fue traducida en esta investigación a través del aporte de la DG a la construcción del MER. Así, se realizó una reconstrucción de una DG sobre las propuestas por Cotrill et al. (1996) y Pons (2014) y, a partir de las actividades propuestas en el diseño de actividades de Pons (2014), se logró identificar, a partir de ellas, tareas que luego formaron parte de las praxeologías incluidas en la construcción del MER. Adicionalmente, en cuanto al aprovechamiento de la experimentación de la DG revisada, el análisis implicativo de Pons (2014) permitió aportar información que complementó los criterios considerados al plantear las praxeologías cada vez más complejas en la construcción del MER.

Para futuras investigaciones, se propone que este MER sirva de referencia para el análisis del modelo epistemológico dominante en la institución en estudio. Esta descripción del modelo epistemológico dominante se deberá hacer sobre la enseñanza del límite en la institución: clases teóricas, clases prácticas, preguntas de límites presentes en los materiales de clase y en las evaluaciones.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer Science & Business Media.Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *19*(2), 221-266.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática. P. Gomez,* 97-140.

Bergé, A. (2006). Convergence of numerical sequences–a commentary on "the vice: some historically inspired and proof generated steps to limits of sequences" by RP Burn. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 395-402.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1997). Las sucesiones como aproximación didáctica a los conceptos de función y límite funcional. En Actas de las VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Salamanca, España: Sociedad Castellano–Leonesa de Profesorado de Matemáticas (Burgos). 303–306

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En Cantoral, R. (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal*. 331-354

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. UNO: *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-84.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática.* 18(2), 37-74.

Boyer, C. (1959). The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc. New York.

Bravo, A. S., & Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de Cálculo y el fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación matemática*, 24(2), 91-122.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique Grupo Editor. (Versión original en francés publicada en 1985)

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Perú: Horsori.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12* (3), 305–331.

Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las Praxeologías que se Proponen Estudiaren un Curso Universitario de Cálculo. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42 B).

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192.

Fernández, M. del Valle, J. (2016). *Cómo iniciarse en la investigación académica: una guía práctica*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial.

Fernández-Plaza, J. , Ruiz-Hidalgo, J., Rico, L. (2015) Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. Enseñanza de las Ciencias, 33.2, 211-229

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis Doctoral, Universidad de Vigo).

Fonseca, C., Gascón, J., Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista* *latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Andalucía, España.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4ta. edicao. Brasil: Editorial Atlas.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Hardy, N. (2009). Students' Perceptions of Institutional Practices: The Case of Limits of Functions in College Level Calculus Courses. *Educational Studies In Mathematics*, (3), 341. doi:10.1007/s10649-009-9199-8

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación- Quinta edición. México: Interamericana Editores S.A.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 137-174.Lang, S. (1969). Analysis i (No. 517 LAN).

Lima, E. L. (1997). Analisis real, vol. instituto de matematica y ciencias afines.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI*, 9 (1), 123-146.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XIII,* 5-20.

Medina, A. (2000). Concepciones históricas asociadas al concepto de Límite e implicaciones didácticas. *Tecné, Episteme y Didaxis, 1*(9), 44-59.

Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Journal of Research in Mathematics Education*, 4(2), 106-131.

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Osses, S., Sánchez, I. e Ibáñez, F. (2006). Investigación cualitativa en educación. Hacia la generación de teoría a través del proceso analítico. *Estudios Pedagógicos XXXII*, 1, 119-133.

Parra, V., Otero, M. y Fanaro, M. (2009). Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad, *REIEC.*

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante. Alicante. España

Rivas, E. (1995). *Metodología de la investigación bibliográfica*. Editorial Libertad EIRL Trujillo-Perú.

Sánchez-Compaña, T. (2012). Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1996). The diachronic dimension on research on understanding in mathematics Usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*, 289 – 318.

Sierra, M., González, M. T., & López, C. (1997). *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos.* Salamanca: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

Sierra, M., González, M., López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1)*,* 71-85.

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173-198.

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image y Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2)*,* 151- 169.

Valencia Álvarez, A. B., & Valenzuela González, J. R. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación matemática, 29*(3)*,* 51-78.

ANEXOS

Anexo 1: Logros de aprendizaje relacionados al concepto de sucesión en el DCN.

III CICLO		IV CICLO		V CICLO	
Primer Grado	Segundo Grado	Tercer Grado	Cuarto Grado	Quinto Grado	Sexto Grado
Capacidades y actitudes					
•Interpreta y formula sucesiones finitas con números naturales menores o iguales que 20. •Identifica el criterio de organización de patrones en series. •Interpreta la adición de números naturales con significados de juntar, agregar, avanzar, y sustracción con significados de separar, quitar, retroceder.	•Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 100: de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 10 en 10. Interpreta la relación que existe entre adición y sustracción de números naturales. Ejemplo: 6 + = 15.	Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 1 000 con un mismo criterio de formación. Ejemplo: 324, 336, 348, ...	Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 1 000 con dos criterios de formación. Ejemplo: 4; 9; 5; 7; 6; 5: ...	Interpreta y formula sucesiones con números naturales y decimales. Utiliza diversos criterios de formación.	Interpreta y formula sucesiones con números naturales, fracciones y decimales exactos.

Anexo 2: Teoremas sobre límites

<u>Teorema de límites 1</u>

Sea ε un conjunto y sea f_ε la funcion con dominio $\varepsilon \cap D_f$ y regla de correspondencia

$$f_\varepsilon(x) = f(x) \text{ para } x \in \varepsilon \cap D_f$$

Entonces el límite de f en x_0 restringido a ε es L, escrito

$$\lim_{x_0} f = 0 \ (sobr \quad \varepsilon)$$

O

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L \ (x \in \varepsilon \cap D_f)$$

Si y solo si

$$\lim_{x_0} f_\varepsilon = L.$$

<u>Teorema de límites 2</u>

El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

<u>Teorema de límites 3</u>

Si existe un intervalo abierto δ que contiene a x_0 tal que para todo $x \neq x_0$ en δ, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, y si $\lim_{x0} f = \lim_{x0} h = L$, entonces $\lim_{x0} g$ existe $\lim_{x0} g = L$.

Límite de una función constante. Teorema 4

Si c es una constante, entonces para cualquier numero a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Límite de la función identidad. Teorema 5

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Limite de la suma y de la diferencia de dos funciones. Teorema 6

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Limite del producto de dos funciones. Teorema 7

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Limite de la n-esima potencia de una función. Teorema 8

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier numero entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Límite del cociente de dos funciones. Teorema 9

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ si } M \neq 0$$

Límite de la raíz n-esima de una función. Teorema 10

Si n es un numero entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Con la restricción de que si n es par, $L > 0$

Teorema de límites 11

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0$

Teorema de límites 12

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{t\to 0} f\,(t + a) = L$

Teorema de límites 13

$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$

Teorema de límites 14

Si r es cualquier numero entero positivo, entonces

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty;$

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \; si\ r\ es\ impar \\ +\infty \quad si\ r\ es\ par \end{cases}$

Teorema de límites 15

Si a es cualquier numero real y si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(ii) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativo de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(iii) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(iv) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye “$x \to a$” por “$x \to a^+$” o “$x \to a^-$”

Anexo 3: Descripción de las praxeologías reconstruidas en el MER

Tipo de tarea	Técnica	Tecnología	Teoría
T_{11}: Calcular el valor de una función $f$en un punto $x = a$ a partir de su gráfica	Trazar la gráfica de $x = a$. Identificar el punto de corte de $x = a$ con la gráfica de la función f Ubicar la ordenada del punto de intersección	Definición de gráfica de una función: La gráfica de una función f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f	Teoría de funciones
T_{12}: Calcular el valor de una función f en un punto $x = a$ a partir de su regla de correspondencia	Reemplazar el valor de $x = a$ en la regla de correspondencia de f.	Definición de función: Una función f es una relación de dos variables (x e y), en donde a cada valor de x le corresponde un único valor de y.	Teoría de funciones
T_{21}: A partir de términos de una sucesión de números, determinar si la sucesión se aproxima o no a un valor	Identificar el patrón de los números de la sucesión Identificar la tendencia de la sucesión	Noción de aproximación Definición de sucesión	Teoría de sucesiones
T_{22}: A partir de términos de una sucesión de números, determinar a qué valor se aproxima la sucesión	Identificar el patrón de los números de la sucesión e identificar la tendencia de la sucesión	Noción de aproximación Definición de sucesión	Teoría de sucesiones
T_{23}: A partir de términos de los términos de dos sucesiones de números, determinar si se aproximan al mismo valor	Identificar el patrón de los números de la sucesión e identificar la tendencia de la sucesión Identificar si ambas sucesiones tienden al mismo valor	Noción de aproximación Definición de sucesión	Teoría de sucesiones

T_{31}:A partir de la gráfica de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$	Identificar el comportamiento de la gráfica de la función alrededor del punto $(a, f(a))$	Definición informal del límite como un proceso: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a.	Teoría de límites
T_{32}: A partir de la gráfica de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$ por la izquierda y por la derecha	Identificar el comportamiento de la gráfica de la función alrededor del punto $(a, f(a))$ por la izquierda y por la derecha	Definición informal del límite como un proceso: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a.	Teoría de límites
T_{33}:A partir de la representación algebraico-tabular de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$	Identificar el comportamiento de la gráfica de la función alrededor del punto $(a, f(a))$. Identificar el comportamiento del valor de $f(x)$ cuando x se aproxima a a a partir de las sucesiones de los valores de la tabla	Definición informal del límite como un proceso: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a.	Teoría de límites
T_{34}: A partir de la representación algebraico-tabular de f, calcular el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a un valor $x = a$ por la izquierda y por la derecha	Identificar el comportamiento de la gráfica de la función alrededor del punto $(a, f(a))$ por la izquierda y por derecha Identificar el comportamiento del valor de $f(x)$ cuando x se aproxima a a a partir de las sucesiones de los valores de la tabla por la izquierda y por la derecha.	Definición informal del límite como un proceso: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a.	Teoría de límites

T_{41}: Determinar la existencia o no existencia del límite de una función f en un punto $x = a$	Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la derecha Si ambos valores son iguales, se determina que existe el límite, caso contrario, se determina que el límite no existe	Definición de la existencia del límite de una función a partir de los límites laterales Definición de límites laterales Teorema de la unicidad del límite	Teoría de límites
T_{42}: Calcular el valor estimado del límite de una función f en un punto $x = a$	Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la derecha Estimar el valor del límite de la función a partir de los valores identificados en los pasos anteriores	Definición de la existencia del límite de una función a partir de los límites laterales Definición de límites laterales Teorema de la unicidad del límite	Teoría de límites

T_{43}: Calcular los valores estimados de los límites laterales de una función f en un punto $x = a$	Identificar a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha, considerando los casos donde puede ser un punto donde la función es continua, discontinua con discontinuidad removible o no removible	Definición de límites laterales Definición de límites infinitos	Teoría de límites
T_{51}: Calcular el valor del límite en una función f continua en un punto $x = a$	Reemplazar el valor de $x = a$ en la regla de correspondencia de $f(x)$	Definición de una función continua Teoremas presentados en el anexo 2	Teoría de límites
T_{52}: Calcular el valor del límite en una función f en un punto $x = a$ donde f tiene una discontinuidad removible	Identificar la discontinuidad removible de la función a partir del análisis del dominio de la función y de su gráfica Redefinir la función a una continua a partir de métodos algebraicos (factorización, simplificación, multiplicación por la conjugada)	Teoremas presentados en el anexo 2	Teoría de límites
T_{53}: Calcular el valor del límite en una función f en un punto $x = a$ donde f tiene una asíntota vertical	Identificar la discontinuidad no removible de la función a partir del	Teoremas presentados en el anexo 2	Teoría de límites

	análisis del dominio de la función y de su gráfica Identificar la asíntota de la función Definir el signo del infinito en el límite a partir del teorema 15 del anexo 2		
T_{61}: Dada la gráfica de f y un valor de ε determinar el valor de δ de tal manera que la grafica de f quede dentro de la caja formada por $\|x-a\|<\delta$ y por $\|f_{(x)}-L\|<\varepsilon$	Graficar la función Graficar la región $\|f_{(x)}-L\|<\varepsilon$ Y probar valores de δ, de manera que la gráfica de f quede dentro de la caja formada por $\|x-a\|<\delta$ y por $\|f_{(x)}-L\|<\varepsilon$	Definición formal del límite de una función en un punto	Teoría de límites
T_{62}: Dada la regla de correspondencia de f y un valor de ε determinar el valor de δ de tal manera que $\|x-a\|<\delta$ implique que $\|f(x)-L\|<\varepsilon$	Transformar $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ en $\|x-a\|<\delta$ Determinar δ en términos de ε	Definición formal del límite de una función en un punto	Teoría de límites