Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Superficies de curvatura media constante en el espacio de Minkowski

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Autor
JHON ELVER GOMEZ GOMEZ

Asesor
Dr. CHRISTIAM BERNARDO FIGUEROA SERRUDO

Jurado
Dr. JOSUE ALONSO AGUIRRE ENCISO
Dr. DIMAS PERCY ABANTO SILVA

Lima - Perú
Noviembre - 2019

Superficies de curvatura media constante en el espacio de Minkowski

Jhon Elver Gomez Gomez

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo (Asesor)

Dr. Josue Alonso Aguirre Enciso (Presidente)

Dr. Dimas Percy Abanto Silva (Miembro)

Lima - Perú
Noviembre - 2019

Resumen

El trabajo trata sobre encontrar una representación para superficies espaciales inmersas en $\mathbb{L}^3$ con curvatura media constante y con métrica de Lorentz. Basado en el paper [1], esto conlleva a estudiar la aplicación de Gauss, la ecuación de Beltrami y la fórmula de representación para la superficie espaciales inmersa en $\mathbb{L}^3$, en función de la aplicación de Gauss y la curvatura media de la superficie. Entre otros, se ha utilizado principalmente las bibliografías [2], [3], [7], [13], [14].

Palabras claves: Superficies espaciales, aplicación de Gauss, espacio de Minkowski.

. . . A mi madre...

Índice general

Agradecientos

A los profesores de la maestría en matemática de la escuela de posgrado de la PUCP. En especial a mi asesor de tesis, Dr. Christian Figueroa, por su paciencia durante el desarrollo de este trabajo.

Introducción

Se llamada elíptica, hiperbólica o plana a una variedad riemanniana de curvatura constante según su curvatura seccional positiva, negativa o cero. También se les conoce a estos espacios como formas espaciales.

En general, es posible relacionar propiedades de la aplicación de Gauss con la geometría de la subvariedad cuando se tiene una subvariedad isométricamente inmersa en una variedad riemanniana de curvatura constante. Se encuentra algunos resultados, por ejemplo Akutagawa y Nishikawa [1], señalan: Dada una superficie espacial M inmersa en $\mathbb{L}^3$, se puede expresar la fórmula de representación para M en términos de la aplicación de Gauss Ψ y la curvatura media H de M, donde $\mathbb{L}^3$ es el espacio de Minkowski tridimensional con métrica Lorentziana.

Una vez fundamentado el lineamiento general, la tarea siguiente se basará en describir las fórmulas de Weierstrass para superficies espaciales de curvatura media conocida con métrica inducida de Lorentz que será desarrollados en dos capítulos.

En el primer capítulo se desarrolla temas necesarios para alcanzar el objetivo de la tesis. Estos temas abarcan desde algunas definiciones que son usadas en Geometría de Lorentz, nociones básicas de geometría diferencial y geometría semiriemanniana.

En el segundo capítulo se abordará el objetivo del trabajo. Además, se describen algunas propiedades sobre superficies espaciales orientadas en $\mathbb{L}^3$, las cuales satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Estos sistemas de ecuaciones involucran la aplicación de Gauss y la curvatura media de la superficie.

Lo anterior conllevan a estudiar la aplicación de Gauss, y se obtiene una fórmula de representación para superficies espaciales inmersas en $\mathbb{L}^3$, en función de la aplicación de Gauss y la curvatura media de la superficie.

Luego, se tratará la condición de integrabilidad la cual garantiza que M pueda ser expresada en función de la aplicación de Gauss y la curvatura media. Finalmente, se mostrará ejemplos de superficies espaciales con curvatura media conocida.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo presentamos una serie resultados y conceptos necesarios de geometría diferencial. El desarrollo del presente capítulo es gracias a los grandes aportes encontrados en [2]. Así como también destacamos [3], [7], [13] y [14], por sus aportes significativos.

1.1. Espacio de Lorentz - Minkowski

Definición 1.1. (*Forma cuadrática*). Sea V un espacio vectorial real. Una *forma simétrica bilineal o forma cuadrática* es una aplicación $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface

(1) $\beta(x,\ y) = \beta(y,\ x)$,

(2) $\beta(\ ax + by, z) = a\beta(x, z) + b\beta(y, z)$,

donde $a, b \in \mathbb{R},\ x, y, z \in V$.

Además:

- β es *definida positiva (Negativa)* si $x \neq 0$ implica que $\beta(x,\ x) > 0$ ($\beta(x,\ x) < 0$).
- β es *no degenerada* si para todo $z \in V$ y $\beta(x,\ z) = 0$, entonces $x = 0$

Ejemplo 1.1. El producto escalar estándar $\langle , \rangle$, en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una forma cuadrática definida positiva.

La representación matricial de la forma bilineal β respecto a una base $e_i, 1 \leq i \leq n$ de V es la matriz $(g_{ij}) := (\beta\,(e_i,\ e_j))$

Definición 1.2. El índice ν de β es la dimensión del subespacio maximal $W \subset V$ tal que $\beta_{|W}$ es definida negativa. Es decir, $0 \leq \nu \leq n$.

Proposición 1.1. Sea β una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, β es no degenerada si y solo si su matriz asociada es invertible.

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [13]. $\square$

1.1.1. Espacio de Minkowski

En el espacio $\mathbb{R}^n$ se puede introducir una métrica seudoeuclídiana definiendo el producto escalar, entre dos vectores, $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \cdots, \eta^n)$ como

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^\nu\eta^\nu - \xi^{\nu+1}\eta^{\nu+1} - \cdots - \xi^n\eta^n,$$

para algún índice fijo, donde ν, $1 \leq \nu \leq n$.

Lo que quiere decir que la matriz que representa la métrica seudoeuclideana asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, viene dada por

$$(b_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{pmatrix}$$

Definimos el *espacio de Minkowski* como el par $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, para $n \geq 2$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar de índice $\nu = 1$. Esto suele denotarse por $\mathbb{R}^n_1$ o $\mathbb{L}^n$.

En particular cuando $n = 4$ se tiene el conocido espacio tiempo $\mathbb{L}^4$, que es el espacio de la teoría de la relatividad especial, ver [3].

La métrica de Minkowski en $\mathbb{L}^4$, de coordenadas (x, y, z, t) está dado por

$$dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + d(z)^2 - (dt)^2.$$

Obervemos que en $\mathbb{L}^n$ el producto de un vector consigo mismo puede resultar negativo, por ejemplo $\langle (0, ..., 1), (0, ..., 1) \rangle = -1$. Debido a esto, daremos la siguiente clasificación.

Definición 1.3. Un vector $\xi \in \mathbb{L}^n$ se dirá:

- *Temporal* si $\langle \xi, \xi \rangle < 0$,
- *Espacial* si $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ o $\xi = 0$.
- *Luminoso* si $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ con $\xi \neq 0$.

Sea $\tau = \{\xi \in \mathbb{L}^n / \langle \xi, \xi \rangle < 0\}$, notemos que τ está formada por dos componentes conexas abiertas contenidos en el cono.

Al conjunto de todos los vectores luminosos se le conoce como el *cono de luz.*

Proposición 1.2. Sean ξ y η dos vectores en τ. Si ξ, η se encuentran en la misma componente de τ, entonces $\langle \xi, \eta \rangle < 0$; caso contrario, ξ, η están en diferentes componentes.

Demostración.

Sea $\pi_e : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definido por $\pi_e(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, \xi^n) := (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$. Además definimos la norma de $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ como $\|\tilde{\xi}\| = \sqrt{\langle \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle}$, siendo $\tilde{\xi} = \pi_e(\xi)$ y $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, \xi^n)$.

$$\langle \xi, \xi \rangle = -(\xi^n)^2 + \|\tilde{\xi}\|^2 < 0 \;\; y \;\; \langle \eta, \eta \rangle = -(\eta^n)^2 + \|\tilde{\eta}\|^2 < 0$$

$$(\xi^n)^2 > \|\tilde{\xi}\|^2; \quad (\eta^n)^2 > \|\tilde{\eta}\|^2 \tag{1.1}$$

Por otro lado,

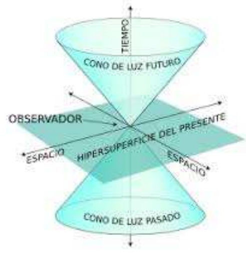

Figura 1.1: Cono de luz

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta \rangle &= \text{-}\xi^n \eta^n + b_{ij}\xi^i \eta^j \\ &= \text{-}\xi^n \eta^n + \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\| cos(\varphi) \\ &\leq \text{-}\xi^n \eta^n + \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\|,\end{aligned}$$

donde φ es el ángulo entre las proyecciones de los vectores. De las desigualdades (1.1) se obtiene

$$(\xi^n \eta^n)^2 > (\|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\|)^2 \quad \text{es decir} \quad |\xi^n \eta^n| > \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\|$$

Si ξ y η se encuentran en la misma componente, entonces $\xi^n \eta^n > \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\|$. Por lo tanto

$$\langle \xi, \eta \rangle \leq -\xi^n \eta^n + \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\| < 0.$$

Si $\xi^n \eta^n < 0$ se encuentren en distintas componentes convexas, usando las desigualdades (1.1) se obtiene

$$\langle \xi, \eta \rangle \geq -\xi^n \eta^n - \|\tilde{\xi}\| \|\tilde{\eta}\| > 0.$$

□

Presentamos a continuación la desigualdad de Cauchy-Schwarz invertida y la desigualdad triangular invertida, es decir

- Si ξ y η vectores temporales en $\mathbb{L}^n$. Entonces

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \geq \| \xi \| \, \| \eta \| \tag{1.2}$$

- Si ξ y η son dos vectores temporales en $\mathbb{L}^n$, que se encuentran en la misma componente convexa de τ, entonces

$$\| \xi + \eta \| \geq \| \xi \| + \| \eta \|$$

  La igualdad se verifica si y solo si ξ y η son proporcionales.

Definamos el caracter causal de cualquier subespacio, restringida a la métrica de $\mathbb{L}^n$.

Definición 1.4. Sean $(V, \langle \ , \rangle)$, y $W \subset V$ un subespacio vectorial. Decimos que

W es espacial	si	$\langle \ , \rangle$ en W es definido positivo;
W es temporal	si	$\langle \ , \rangle$ en W es no degenerado con índice uno;
W es luminoso	si	$\langle \ , \rangle$ es degenerada en W.

Ejemplo 1.2. En $\mathbb{L}^3$ se tiene los siguientes subespacios.

- $W_1 = span\{e_1, e_2\}$ es espacial.
- $W_2 = \{t(a,b,c) : t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 - c^2 < 0\}$ es temporal.
- $W_3 = \{t(1,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$ es luminoso.

1.1.2. Grupo de Isometrías de Lorentz

A igual que en el caso del espacio euclideano, mostraremos que toda isometría de $\mathbb{L}^n$ es la composición de una transformación lineal con una traslación.

Definición 1.5. Sea $F : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ una función biyectiva. Decimos que F es una isometría de $\mathbb{L}^n$ si para todo $u, v \in \mathbb{L}^n$ se cumple

$$\langle F(u) - F(v), F(u) - F(v) \rangle = \langle u - v, u - v \rangle$$

La traslación $L : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ dado por $L(x) = x + a$ es una isometría. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle L(u) - L(v), L(u) - L(v) \rangle &= \langle u + a - (v + a), u + a - (v + a) \rangle \\ &= \langle u - v, u - v \rangle, \end{aligned}$$

Proposición 1.3. Si $\Phi : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ es una isometría tal que $\Phi(0) = 0$, entonces se cumple:

1. $\Phi(cu) = c\Phi(u), \quad c \in \mathbb{R}$
2. $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$, para todo $u, v \in \mathbb{L}^n$.

Es decir, Φ es lineal.

Demostración. Como Φ es biyectiva, entonces para todo $v \in \mathbb{L}^n$ existe un único w tal que $\Phi(w) = v$, luego, $\forall\ c \in \mathbb{R}$ se tiene.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(cu), v \rangle &= \langle \Phi(cu), \Phi(w) \rangle \\ &= \langle \Phi(cu) - \Phi(0), \Phi(w) - \Phi(0) \rangle \\ &= \langle cu - 0, w - 0 \rangle \\ &= c\langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle c\Phi(u), v \rangle &= c\langle \Phi(u), \Phi(w) \rangle \\ &= c\langle \Phi(u) - \Phi(0), \Phi(w) - \Phi(0) \rangle \\ &= c\langle u - 0, w - 0 \rangle \\ &= c\langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

De donde,

$$\langle \Phi(cu), v \rangle = \langle c\Phi(u), v \rangle \quad \forall\ u, v \in \mathbb{L}^n,$$

y como la métrica es no degenerada se cumple, lo deseado.

Análogamente.

$$\begin{aligned}\langle \Phi(u+v), \overline{w}\rangle &= \langle \Phi(u+v), \Phi(w)\rangle\\ &= \langle \Phi(u+v)-\Phi(0), \Phi(w)-\Phi(0)\rangle\\ &= \langle u+v-0, w-0\rangle\\ &= \langle u+v, w\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi(u)+\Phi(v), \overline{w}\rangle &= \langle \Phi(u)+\Phi(v), \Phi(w)\rangle\\ &= \langle \Phi(u), \Phi(w)\rangle + \langle \Phi(v), \Phi(w)\rangle\\ &= \langle \Phi(u)-\Phi(0), \Phi(w)-\Phi(0)\rangle + \langle \Phi(v)-\Phi(0), \Phi(w)-\Phi(0)\rangle\\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\\ &= \langle u+v, w\rangle\end{aligned}$$

De donde,

$$\langle \Phi(u+v), \overline{w}\rangle = \langle \Phi(u)+\Phi(v), \overline{w}\rangle \quad \forall\ u, v, \overline{w} \in \mathbb{L}^n,$$

y como la métrica es no degenerada, entonces

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v).$$

□

Proposición 1.4. Si Φ es una isometría tal que $\Phi(0) = 0$, entonces se cumple:

$$\Phi \in O(1, n),$$

donde, $O(1, n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A^T \varepsilon A = \varepsilon\}$, y $\varepsilon = diag(1, 1, ..., -1)$

Demostración. Tenemos que Φ es lineal, por tanto Φ lo consideramos, como una matriz. Sea $\varepsilon = diag(1, 1, ..., -1)$ la matriz que representa a $\langle , \rangle$ en la base canonica de $\mathbb{R}^n$, además $\langle u, v\rangle = u^T \varepsilon u$, entonces, si $A = [\Phi]$, es la matriz que representa a Φ,

$$u^T \varepsilon u = (Au)^T \varepsilon (Av) = u^T (\Phi^T \varepsilon \Phi) u$$

esto implica que $\varepsilon = \Phi^T \varepsilon \Phi$, como consecuencia

$$\Phi \in O(1, n)$$

□

Ahora si, $\Phi(0) = a$, con a fijo en $\mathbb{L}^n$, $L(v) = v - a$ es una traslación, tenemos que $\Psi = L \circ \Phi$ es una isometría tal que

$$\Psi(v) = \Phi(v) - a \quad \text{y} \quad \Psi(0) = 0.$$

Esto implica por las afirmaciones anteriores que

$$\Psi \in O(1, n)$$

Así $\Phi = L^{-1} \circ \Psi$, es decir toda isometría es una composición de una traslación y una transformación lineal en $O(1, n)$.

1.2. Resultados de geometría diferencial

Las variedades diferenciales son objetos que generalizan los espacios euclideanos y donde se pueden hacer cálculo diferencial e integral. Localmente las variedades son espacios euclideanos y por tanto, si el análisis es local, este no difiere del cálculo diferencial clásico.

1.2.1. Variedades diferenciables

Definición 1.6. Sea M un espacio topológico de Hausdorff con base numerable. Un atlas de dimensión n para M es una familia

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha\in\Lambda}$$

de aplicaciones contínuas, tal que $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es un homeomorfismo del abierto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ sobre un abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de M para cada $\alpha \in \Lambda$, cumpliendo con las siguientes condiciones

1. Los abiertos $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ cubren M, es decir:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$$

2. Para todos los índices $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = V_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, las aplicaciones

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta})$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \to \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})$$

son diferenciables.

Un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ sobre M es llamado *maximal* si, además de cumplir con las condiciones de la definición de atlas, se cumple la condición siguiente:

3. Si $\varphi_\gamma : U_\gamma \to M$ es un homeomorfismo de un abierto $U_\gamma \subset \mathbb{R}^n$, sobre $\varphi_\gamma(U_\gamma)$ de M, de modo que para todo sistema de coordenadas $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ con $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\gamma(U_\gamma) = V_{\alpha\gamma} \neq \emptyset$, se tenga que

$$\varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\gamma^{-1}(V_{\alpha\gamma}) \to \varphi_\gamma^{-1}(V_{\alpha\gamma})$$

es diferenciable. Entonces $\varphi_\gamma \in \mathcal{A}$.

Una *estructura diferenciable* para M es un atlas maximal.

Observación 1.2.1.

- Cada aplicación φ_α es llamada una parametrización de una vecindad de M, y $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es denominada *vecindad coordenada.*
- Si $p = \varphi_\alpha(x^1, ..., x^n)$, entonces $x^1, ..., x^n$ son llamadas las coordenadas de p en la parametrización φ_α. Por este motivo, la aplicación φ_α también es denominada un sistema de coordenadas locales.

Definición 1.7. Una *variedad diferenciable* M de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable, y con una estructura diferenciable de dimensión n.

Ejemplo 1.3. *La esfera S^n posee un atlas formado por dos cartas.* En efecto, denotemos a los polos norte y sur de S^n por $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = (0, \dots, 0, -1)$ respectivamente. Las proyecciones estereográficas de N y S están definidas por

$$\varphi_1 : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \varphi_1(x^1, \dots, x^{n+1}) = \Big(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\Big),$$

y

$$\varphi_2 : S^n - \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \varphi_2(x^1, \dots, x^{n+1}) = \Big(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}}\Big).$$

Sus respectivas inversas están dadas por

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\},\ \varphi_1^{-1}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, 2x^2, \dots, 2x^n, \|x\|^2 - 1),\ y$$

$$\varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{S\},\ \varphi_2^{-1}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, 2x^2, \dots, 2x^n, 1 - \|x\|^2).$$

Definimos un atlas de S^n por $\mathcal{A} = \{(S^n - \{N\}, \varphi_1), (S^n - \{S\}, \varphi_2)\}$. No temos que los cambios de coordenadas son difeomorfismos. Por ejemplo $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es el cambio de coordenadas definido por

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{\|x\|^2}(x^1, \dots, x^n),$$

el cual es C^∞.

Cuando denotemos una variedad por M^n, el índice superior n indicará la dimensión de M.

A continuación tenemos la siguiente definición.

Definición 1.8. Sean M^n y N^m variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$ si dada una parametrización $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to N$ en $f(p)$ existe una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ en p tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ y la composición $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$.

Decimos que f es *diferenciable en un abierto* de M si es diferenciable en todo los puntos de este abierto.

Definición 1.9. Sean M^n y N^m variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \to N$ es un *difeomorfismo* si ella es diferenciable, biyectiva y su inversa f^{-1} es también diferenciable. Decimos que f es un *difeomorfismo local* en $p \in M$ si existe vecindades U de p y V de $f(p)$ tal que $f : U \to V$ es un difeomorfismo.

Definición 1.10. Sea M una variedad diferenciable y $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ una curva diferenciable en M. Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$. Denotemos por $C_p^\infty(M)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables reales definidas en un abierto de M que contenga a p.

El *vector tangente* a la curva α en $t=0$ es el operador $\dot{\alpha}(0) : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\dot{\alpha}(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \mid_{t=0}$$

con $f \in C_p^\infty(M)$.

En base a ello, definimos un *vector tangente* en p como el vector tangente a alguna curva $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ en $t=0$, con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes de M en p es denotado por T_pM, y es denominado el *espacio tangente* de M en p.

Si elegimos una parametrización $\varphi : U \to M^n$ en $q = \varphi(p)$, podemos expresar la función f y la curva α en esta parametrización dada por $f \circ \varphi(q) = \hat{f}(x^1, ..., x^n)$, $q = (x^1, ..., x^n) \in U$ y $(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ respectivamente. Por tanto restringiendo f en α, obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(0)(f) &= \tfrac{d}{dt}(f \circ \alpha) \mid_{t=0} \\
&= \tfrac{d}{dt}((f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha)) \mid_{t=0} \\
&= \tfrac{d}{dt}\hat{f}(x^1(t), ..., x^n(t)) \mid_{t=0}, \quad \text{donde} \quad \hat{f} = f \circ \varphi \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\varphi^{-1} \circ \alpha)(0) \frac{dx^i}{dt}(0) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \frac{dx^i}{dt}(0) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\
&= \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p\right) f.
\end{aligned}$$

En otras palabras, el vector $\dot{\alpha}(0)$ puede ser expresado por la parametrización φ por

$$\dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p .$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p$ es un vector tangente en p a una curva coordenada:

$$t \to \varphi(q + t\vec{e}_i), i = 1, ..., n.$$

De la expresión $\dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p$ se muestra que el vector tangente a una curva α en p depende de las derivadas de α en un sistema de coordenadas. De allí también que el conjunto de T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n, y que la elección de una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ determina una base asociada

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \mid_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} \mid_p \right\}$$

en T_pM, generalmente se denota $\frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p$.

Observación 1.2.2.

- Si denotamos a un elemento arbitrario de T_pM por X_p, este operador satisface, por definición las siguientes dos propiedades
  - Linealidad
  $$X_p(af + g) = a(X_pf) + X_pg;$$
  - Regla de Leibniz
  $$X_p(fg) = (X_pf)g(p) + f(p)(X_pg);$$
  para todo $a \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_p^\infty(M)$.

- Por otra lado, las operaciones de espacio vectorial en T_pM estan definidas por
$$(X_p + Y_p)f = X_pf + Y_pf \quad \text{y} \quad (aX_p)f = a(X_pf)$$

1.2.2. Campos vectoriales

Definición 1.11. Un *campo vectorial* X es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X(p) \in T_pM$. Este es llamado *diferenciable* cuando a demás se cumple lo siguiente: si $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ son coordenadas locales sobre un subconjunto abierto U de M^n, entonces podemos escribir:
$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p$$
donde requerimos que las funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ sean diferenciables. Estas son llamadas las *componentes* de X con respecto al sistema de coordenado local $x^1, ..., x^n$.

Es conveniente denotar $X(p)$ por X_p, donde $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es un vector tangente.

Denotemos el conjunto de los campos vectoriales diferenciables en M por $\mathfrak{X}(M)$.

Podemos entender a un campo vectorial como un operador diferencial $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, donde, definimos la función Xf sobre M por
$$(Xf)(p) = X(p)f \equiv X_p(f) \quad \text{con } p \in M$$
Dada una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$, podemos expresar
$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$
lo cual muestra que Xf es diferenciable, y es llamada la *derivada de* f en la dirección de X. Esto es equivalente a que X es C^∞ .

En el conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $X + Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definida como:
$$(X + Y)(f) : M \to \mathbb{R},$$

$$(X+Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$ entonces $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es definida por:

$$(fX)(g) : M \to \mathbb{R},$$
$$(fX)(g)(p) = f(p)X_p(g).$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite una estructura de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

Rescribiendo lo anterior podemos definir un campo vectorial deferenciable apartir de las propiedades mencionadas arriba:

Definición 1.12. Sea M una variedad diferenciable. Un *campo vectorial diferenciable* en M es una aplicación $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisface las siguientes propiedades.

1. El campo vectorial X es lineal: $X(af + bg) = aXf + bXg$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$
2. El campo vectorial X satisface la propiedad de Leibniz: $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$, para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Observe que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos diferenciables en M y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces podemos considerar las funciones $X(Yf)$ y $Y(Xf)$. En general, tales operadores no conducen a campos vectoriales, pues se prueba que YX no es una derivación. Pero $(XY - YX)$, si es un campo vectorial.

Definición 1.13. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. El *corchete de Lie* es una función.
$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M)$$

Proposición 1.5. El corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ en $\mathfrak{X}(M)$ cumplen las siguientes propiedades:

1. $[\ ,\ ]$ es $\mathbb{R}$-bilineales,
2. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$,
4. (La identidad de Jacobi) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,
   para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Demostración. Ver [7]. □

1.2.3. Métricas y conexiones

Definición 1.14. (*Variedad Riemanniana*). Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una *métrica Riemanniana* en M es un campo 2-tensorial[1] covariante diferenciable g, que es simétrico (es decir, $g_p(u,v) = g_p(v,u)$ para todo $u, v \in T_pM$) y positivo definido (es decir, $g_p(u,v) > 0$, para $u \neq 0$). Una variedad diferenciable M que admite una métrica Riemanniana g es llamada *variedad Riemanniana.*

Definición 1.15. (*Variedad de Lorentz*). Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una *métrica de Lorentz* en M es un campo 2-tensorial covariante diferenciable g, que es simétrico (es decir, $g_p(u,v) = g_p(v,u)$ para todo $u, v \in T_pM$), no degenerada (es decir, $g_p(u,v) = 0$, para todo $v \in T_pM$ entonces $u = 0$) y con índice constante $\nu = 1$. Una variedad diferenciable M que admite una métrica de Lorentz g dada es llamada *variedad de Lorentz.*

Observación.

- La definición anterior se puede formular para un índice arbitrario ν. Con esto, g_p tendría índice ν para cada espacio tangente.
- En el caso de tener una métrica de índice arbitrario, al par (M, g_p) es llamada *variedad semiriemanniana.*
- Toda variedad Riemanniana admite una métrica Riemanniana, sin embargo, en el caso semiriemanniano no siempre ocurre.

Acontinuación escribimos el tensor métrico en coordenadas. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M$ una parametrización de una vecindad V de M, $B_p = \{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ una base coordenada de T_pM asociada a esta parametrización, para cada $p \in V$, y $B_p^* = \{dx^1|_p, ..., dx^n|_p\}$ base dual para el espacio cotangente T_p^*M, luego

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

Denotemos $g_p(u,v) = \langle u, v\rangle_p$. Escribiendo $u, v \in T_pM$ en coordenadas, se obtiene

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v^i(p)\frac{\partial}{\partial x^j}|_p.$$

Luego, la matriz que representa a g en la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Está dada por (g_{ij}) donde $g_p(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

En forma tensorial podemos escribir.

$$g_p(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)dx^i|_p \otimes dx^j|_p(u,v)$$

[1]Un tensor de tipo (k,l) es un tensor k-covariante y l-contravariante, es decir, una función multilineal real . $T : \underbrace{V \times ... \times V}_{k-veces} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l-veces} \to \mathbb{R}$ donde V es espacios vectoriales real de dimensión finita y V^* su espacio dual.

donde las funciones $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$ son definidas por

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p$$

Observación.
La métrica es diferenciable en el siguiente sentido. Sea $\varphi : V \to \mathbb{R}$ es una parametrización de una vecindad V de M, y $B_p = \{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ una base coordenada de T_pM asociada a esta parametrización: Para cada $p \in V$, y $B_p^* = \{dx^1|_p, ..., dx^n|_p\}$ base dual para el espacio T_p^*M, entonces las funciones

$$g_{ij} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definidas por $p \mapsto g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p$ son diferenciables.

Dado que la métrica es no degenerada la matriz $[g_{ij}(p)]$ es invertible (ver proposición (1.1)). Su inversa se denota como $[g^{ij}(p)]$, donde los coeficientes $g^{ij}(p)$ son funciones C^∞.

Definición 1.16. (*Conexión Afin*). Sea M una variedad C^∞. Una *conexión afin* ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para todo $f, g \in C^\infty(M)$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La expresión $\nabla_X Y$ es la *derivada direccional* del campo Y en la dirección de X.

Si ∇ es una conexión sobre una variedad diferenciable M, entonces $(\nabla_X Y)_p$ depende del valor de X en p y del valor de Y a lo largo de una curva tangente a X_p.

Sea M una variedad con una conexión ∇. Si $B = \{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ es una base del espacio tangente T_pM, entonces

$$(\nabla_{\partial_i}\partial_j)(p) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)\partial_k(p), \; i, j = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Definición 1.17. (*Símbolos de Christoffel*). Las funciones diferenciables Γ_{ij}^k definidas por la expresión (1.3) son llamadas *símbolos de Christoffel* asociados a la parametrización utilizada.

Sea M una variedad con una conexión ∇, y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si $B_p = \{\partial_1, ..., \partial_n\}$ es una base coordenada del espacio tangente T_pM, $X = \sum_{i=1}^n X^i\partial_i$, $Y = \sum_{j=1}^n Y^j\partial_j$ y $\nabla_X Y$ está dada por

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Definición 1.18. Se dice que una conexión afin ∇ sobre una variedad M es simétrica si para X, Y campos tangentes a M se verifica que $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

Si (X_α, U_α) es una parametrización y $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ es la base asociada, donde $i, j = 1, ..., n$, se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right](f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Y en términos de la conexión, se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0.$$

Esto es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ji}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Por tanto $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, donde $k = 1, ..., n$.

Definición 1.19. Se dice que una conexión afin ∇ sobre una variedad M es *compatible con la métrica* si para X, Y, Z campos tangentes a M se verifica que

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Pasamos ahora al siguiente teorema válido para toda variedad riemaniana, semiriemanniana así como su demostración.

Teorema 1.1. (*Conexión de Levi-Civita*). Sea M una variedad semiriemanniana entonces existe una única conexión ∇ en M tal que:

1. ∇ es simétrica $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
2. ∇ es compatible con la métrica: $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

   para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ es llamada la *conexión de Levi-Civita* de M, y es caracterizado por la *fórmula de Koszul.*

   $$2\langle \nabla_Y X, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle$$

Demostración. Ver ([2])

□

Seguidamente presentamos en forma explicita la conexión semimanniana en términos de la métrica de M. En efecto, sean X^i campos vectoriales asociados al sistema de coordenadas, tal que $\nabla_{X^i} X^j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X^k$. En la expresión de Koszul, elegimos: $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ y $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, se obtiene

$$\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\},$$

por otro lado

$$\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle = \langle \sum_l \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk}, \; k = 1, ..., n.$$

De esta última igualdades, obtenemos

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \}.$$

Llevando a la forma matricial la igualdad anterior, se obtiene

$$(\Gamma_{ij}^1, \cdots, \Gamma_{ij}^n) \begin{pmatrix} g_{lk} & \cdots & g_{1k} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \}.$$

Como la matriz (g_{lk}) admite inversa (g^{lk}), concluimos que

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g_{lk} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \}$$

Ejemplo: El caso lorentziano $\Gamma_{ij}^k = 0$.

1.2.4. Geodésica

Definición 1.20. Una curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$, es una *geodésica* en $t_0 \in I$, si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ en el punto t_0. Se dice que γ es una *geodésica* si γ es una geodésica en cada $t \in I$. Si $[a, b] \subset I$, entonces la restricción $\gamma_{[a,b]}$ es el *segmento de geodésica* uniendo $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

Proposición 1.6. Una curva γ es una geodésica en M si para todo entorno coordenado se cumple que

$$\frac{d^2 \left(x^k \circ \gamma\right)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d \left(x^i \circ \gamma\right)}{dt} \frac{d \left(x^j \circ \gamma\right)}{dt}, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{1.4}$$

Al tratar con curvas, a menudo es conveniente usar una abreviatura común, escribiendo las funciones de coordenadas de γ como x^i en lugar de $x^i \circ \gamma$. En cualquier contexto razonable no debe haber confusión entre estas funciones en el dominio I de γ y las funciones de coordenadas de M. Las ecuaciones geodésicas se convierten en

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{1.5}$$

A continuación, se va a determinar las ecuaciones locales que verifican una geodésica en una parametrización (U, φ) alrededor de $\gamma(t_0)$. Sea $\gamma : I \to M$ una curva cuya imagen está contenida en $\varphi(U)$. En $U \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$x(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$$

donde $x(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t))$. De ahí que,

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t)) \quad = \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma(t)).$$

Así tenemos,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.6}$$

Por otro, lado usando la ecuación (1.6) y las propiedades de derivada covariante, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{D}{dt}\left(\tfrac{d\gamma}{dt}\right)=\tfrac{D}{dt}\left(\textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{dx^j}{dt}\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{D}{dt}\left(\tfrac{dx^j}{dt}\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\tfrac{d^2x^j}{dt}\tfrac{\partial}{\partial x^j}+\tfrac{dx^j}{dt}\tfrac{D}{dt}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\nabla_{\sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.8}$$

Sustituyendo la ecuación (1.8) en la ecuación (1.7), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{d^2x^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{j=1}^n\frac{dx^j}{dt}\left[\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n\frac{d^2x^k}{dt^2}\frac{\partial}{\partial x^k}+\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i,j=1}^n\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \sum_{k=1}^n\left[\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^n\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right]\frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Luego γ es una geodésica si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_{k}\left(\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.9}$$

Como los $\frac{\partial}{\partial x^k}$ son linealmente independientes, entonces

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Lo anterior es conocido como las ecuaciones locales satisfechas por una geodésica γ en una parametrización (U, φ).

Lema 1.2.1. Sea $p \in M$ y $v \in T_pM$, existe un intervalo I que incluya al 0 y una única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$.

Proposición 1.7. Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$, hay una única geodésica γ_v en M que inicia en p con velocidad inicial v (es decir, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$), y el dominio I_v es el mayor posible.

Demostración. Ver ([2]). □

Definición 1.21.

- La geodésica γ_v en la que el dominio es el mayor posible se dice que es maximal, o inextendible.
- Una variedad semi riemanniana para la cual cada geodésica maximal está definida en toda la recta real es llamada geodésicamente completa o simplemente completa.

Notar que si una variedad M es completa, entonces $M - \{p\}$ no será completa, pues las geodésicas que originalmente pasaban por p ahora deben terminar en ese mismo punto.

Proposición 1.8. Si γ es una geodésica, entonces $\|\frac{d\gamma(t)}{dt}\|$ (o *longitud de vector tangente*) es constante para todo $t \in I$.

Demostración. Como, $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$, se cumple que

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0.$$

Es decir, la longitud del vector velocidad de γ es constante. □

A partir de esta proposición, podemos deducir que si γ es geodésica, entonces el carácter causal de su vector tangente no cambiará, y por lo tanto, siempre caerá en una, y solo una de las tres clasificaciones causales. Las geodésicas son entonces temporales, nulas o espaciales.

Ejemplo 1.4. Considere $\mathbb{L}^n$ con la métrica de Minkowski, entonces en símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo i, j, k. Entonces el sistema (1.5) toma la forma

$$\frac{d^2\left(x^k \circ \gamma\right)}{dt^2} = 0, \quad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

cuyas soluciones tienen la forma

$$\gamma(t) = (v_1t + b_1, ..., v_kt + b_k)$$

para las constantes $v_k, b_k, k = 1, 2, \cdots, n$. En otras palabras, las geodésicas de $\mathbb{L}^n$ son líneas rectas con velocidad constante. En particular, $\mathbb{L}^n$ es completamente geodésica.

En el siguiente ejemplo se ilustran las geodésicas del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

Ejemplo 1.5. Sea $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ con la métrica $g_{ij}(x^1, x^2) = \frac{\delta_{ij}}{(x^2)^2}$, Conexión de Levi-Civita ∇, y con símbolos de Christoffel dadas por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \\
\Gamma_{11}^2 &= -\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Entonces el sistema (1.5) de las geodésicas toma la forma

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Para resolver este sistema, consideremos dos casos:

Caso 1. Si $\frac{dx}{dt} = 0$, entonces de la primera ecuación tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0$. En este caso, $x(t) = x_0$, donde $x_0 = constante$, y de la segunda ecuación tenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Si reducimos el orden, esto es, definimos $z = \frac{dy}{dt}$, entonces

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y}(z)^2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{z}{y}, \quad \text{con} \quad y > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$, entonces $\ln|z| = \ln|y| + c$, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Luego $z = (\pm e^c)y = by$, para alguna constante $b \in \mathbb{R}$, así que $\frac{dy}{dt} = by$, entonces $y(t) = y_0 e^{bt}$, donde y_0 es constante positiva. Consecuentemente, en este caso las geodésicas son

$$\gamma(t) = (x_0, y_0 e^{bt}), t \in \mathbb{R}$$

las semirectas superiores del plano hiperbólico.

Caso 2. Si $\frac{dx}{dt} \neq 0$ entonces, por la primera ecuación obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}.$$

Esto implica

$$\ln\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2\ln(y) + c$$

luego consideramos

$$\frac{dx}{dt} = cy^2. \tag{1.10}$$

La geodésica γ parametrizada por longitud de arco, esto implica que

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right\| = 1,$$

donde, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Por lo tanto usando la ecuación (1.10), tenemos

$$\begin{aligned}
1 &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \frac{1}{y^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{y^2} \left[(cy^2)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{dy}{dt} = y\sqrt{1 - c^2y^2}. \tag{1.11}$$

Usando regla de la cadema y las ecuaciones (1.11) y (1.10) se obtiene: esto implica

$$dx = \frac{cy}{\sqrt{1 - c^2y^2}} dy.$$

Integrando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1 - c^2y^2}}{cy}$$

Así

$$dx = \frac{cy}{\sqrt{1 - c^2y^2}} dy$$

Luego llegamos a $(x - d)^2 = \frac{1}{c^2}(1 - c^2y^2)$, donde $d \in \mathbb{R}$.

Finalmente se obtiene la ecuación con $c, d \in \mathbb{R}$

$$(x - d)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Por lo tanto, en este caso, las geodésicas son semicírculos superiores centrados en los puntos $(d, 0)$ del eje x.

1.3. Inmersiones Isométricas

Intuitivamente una subvariedad $M^n \subset N^m$ está situada en N, de modo análogo una superficie $M^n \subset \mathbb{R}^n$, situada en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.22. (Inmersión, encajamiento y subvariedad) Sea M^n y N^m variedades diferenciales y la aplicación diferenciable $f : M \to N$. Con $n < m$, decimos que:

1. f es una inmersión en p, si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ es inyectiva.

2. f es una inmersión, si f es una inmersión en cada punto.

3. f es una inmersión inyectiva, si f es una inmersión y f es inyectiva.

4. f es un encajamiento, si f es una inmersión 1-1 y $f : M \to f(M) \subset N$, es un homeomorfismo, donde $f(M)$ tiene la topología inducida por N.

5. M es una subvariedad de N, si $M \subset N$ y la inclusión $i : M \hookrightarrow N$ es un encajamiento.

En geometría es indiferente trabajar con inmersiones o encajamientos para cuestiones locales, lo cual se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.2. Sea $f : M \to N$ inmersión, entonces f es localmente un encajamiento.

Demostración. Sea (U_α, X_α) y (U_β, Y_β) parametrizaciones en $p \in M$ y $f(p) \in N$, respectivamente.

Sea $h : Y_\beta^{-1} \circ f \circ X_\alpha : U_\alpha \to U_\beta$ tal que

$$h(x_1, \cdots, x_n) = (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n))$$

Notemos que $(dh)(x_1, \cdots, x_n)$ es 1-1. Luego definimos $\phi : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to U_\beta \times \mathbb{R}^m$,

por $\phi(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_k) = (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1} + t_1, \cdots, y_{n+k} + t_k),\ \phi \in C^\infty$

donde $y_i = y_i(x_1, \cdots, x_n),\quad i = 1, \cdots, n+k,\quad n+k = m.$

Notemos $\phi\,(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) = h\,(x_1, ..., x_n)$

$$d\phi_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n+k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n+k}}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

Notemos que $det(d\phi_0) \neq 0$, entonces $d\phi_0$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa existe $U_{\alpha_0} \subset U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $U_{\beta_0} \subset U_\beta$, tal que $\phi : U_{\alpha_0} \to U_{\beta_0}$ es un difeomorfismo.

Luego $\phi^{-1} \circ h : U_\alpha \to U_\beta$ está dada por $\phi^{-1} \circ h(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{0})$. Es decir, es la inmersión canónica. Luego f es localmente un encajamiento. □

Definición 1.23. (Inmersión Isométrica) Sea $f : M \longrightarrow N$ una inmersión entre variedades Riemannianas. Se dice que ϕ es una inmersión isométrica si

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$$

para todo $u, v \in T_pM$ y $p \in M$.

Continuando, como toda inmersión f es un encaje local, existe un abierto U alrededor de $p \in M$ tal que $f(U)$ es un objeto geométrico. Entonces se puede asociar a cada vector $u \in T_pM$ un único vector $df_p(u) \in T_pN$ para todo p; así, T_pM será siempre un subespacio no nulo de T_pN. Con esto, diremos que:

Observación 1.3.1. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{L}^3$ es una inmersión diremos que.

- Si M es tipo tiempo si el espacio tangente T_pM es un subespacio tipo tiempo de T_pN para toda $p \in M$
- M es tipo espacio si T_pM es tipo espacio y
- Si M es nulo T_pM es nulo para toda $p \in M$

Entonces, T_pM será un subespacio no degenerado de T_pN.

De ahora en adelante siempre que se hable de una inmersión o un encaje, siempre debe entenderse que se habla de uno que sea isométrico.

1.4. Curvatura

En una curva plana $\alpha \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^2)$, la curvatura es una función real de variable real que nos indica que tan lejos la curva deja de ser una recta. Así por ejemplo tenemos que la curvatura de la recta es cero. Como veremos a continuación, en una variedad riemanniana tenemos un concepto similar que nos indica cuando una variedad riemanniana deja de ser euclidiana.

Definición 1.24. Una *curvatura* R de una variedad semiriemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.12}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita.

Proposición 1.9. La expresión $R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$ dada en la definición anterior, define un *tensor curvatura* 1 - contravariante y 3 - covariante.

Demostración. Ver ([7]). □

A continuación se define la *curvatura seccional.*

Definición 1.25. Sea $p \in M$ y $\sigma \subset T_pM$ subespacio generado por $\{v, w\}$ linealmente independientes. Se define la *curvatura seccional* en p, según σ,

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R(v,w)v, w\rangle}{Q(v,w)} \tag{1.13}$$

donde $Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2,$ *para todo* $v, w \in T_pM$.

El valor de $K_p(\sigma)$ es invariante al aplicar las transformaciones elementales:

$$\{v,w\} \to \{w,v\}, \quad \{v,w\} \to \{\lambda v, w\}, \quad \{v,w\} \to \{v + \lambda w, w\}.$$

$Q \neq 0$, es el área del paralelogramo formado por los vectores v y w en el plano σ.

Se dice que una variedad M tiene *curvatura constante* si su *curvatura seccional es constante*.

1.5. Segunda Forma Fundamental

Es importante el estudio de la segunda forma fundamental asociada a una inmersión $f : M \longrightarrow N$, pues nos permite obtener la relación existente entre la métrica y la conexión de la subvariedad con la conexión y métrica del espacio ambiente.

Definición 1.26. Sean $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$ extensiones locales de $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, donde los abiertos $U \subset M$, $\tilde{U} \subset N$. Luego definimos:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\top}$$

El símbolo ∇ representa la conexión Levi - Civita de M.

Proposición 1.10. Sean $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$ extensiones locales de $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, donde los abiertos $U \subset M$, $\tilde{U} \subset N$, la aplicación $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\perp}(U)$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Es bilineal sobre $C^{\infty}(M)$ y simétrico.

Demostración.
Veamos que B está bien definido, en efecto, sea $\overline{X}_1$ otra extensión, entonces

$$\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y\right) - \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y\right) = \overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}_1 - \overline{X}} \overline{Y}|_{p \in M},$$

en M, se cumple $\overline{X}_1(p) = X = \overline{X}(p)$, luego $\overline{\nabla}_{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}\right)} \overline{Y} = \overline{\nabla}_0 \overline{Y} = 0$.

Análogamente, si $\overline{Y}_1$ es otra extensión de Y

$$\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y\right) - \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y\right) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)|_{p \in M} = 0,$$

pues, si $\alpha(t)$ es la trayectoria de X, entonces $\overline{Y}_1(\alpha(t)) = \overline{Y}(\alpha(t)) = Y(\alpha(t))$.

B es bilineal,

$$B(X + Z, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X+Z}} \overline{Y} - \nabla_{X+Z} Y = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{Z}} \overline{Y} - \nabla_X Y - \nabla_Z Y,$$

así tenemos $B(X + Z, Y) = B(X, Y) + B(Z, Y)$. Análogamente para la segunda componente.

Resta ver la segunda condición de linealidad, para lo cual consideramos $f \in C^{\infty}(M)$ y $\overline{f}$ una extensión de f en N. Luego

$$B(fX, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{fX}} \overline{Y} - \nabla_{fX} Y = \overline{f} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - f \nabla_X Y.$$

En M, $B(fX, Y) = fB(X, Y)$.

Además, $B(X, fY) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{fY} - \nabla_X fY = \overline{X}\left(\overline{f}\right) \overline{Y} + \overline{f} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - X(f) Y - f \nabla_X Y$. En M, se tiene:

$$\overline{X}\left(\overline{f}\right)(p) = \overline{X}(p)\left(\overline{f}\right) = X(p)\left(\overline{f}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{f} \circ \alpha(t)\right) = X(p) f \text{ y } f = \overline{f}$$

entonces $B(X, fY) = f\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y\right) = fB(X,Y)$.

Finalmente. Sea $B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_X Y$ y $B(Y,X) = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X$, restando las ecuaciones, se tiene

$$B(X,Y) - B(Y,X) = \left[\overline{X},\overline{Y}\right] - [X,Y], \tag{1.14}$$

como en M,

$$\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_p\left(\overline{f}\right) = \overline{X}_p\left(\overline{Y}\left(\overline{f}\right)\right) - \overline{Y}_p\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right) = X_p\left(\overline{Y}\left(\overline{f}\right)\right) - Y_p\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right),$$

luego considerando las curvas que pasan por p y es tangente a X e Y respectivamente,

$$\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_p\left(\overline{f}\right) = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X,Y]_p(f),$$

por lo tanto,

$$B(X,Y) = B(Y,X).$$

□

Por el caracter tensorial de B, tenemos que $B(X,Y)(p)$ solo depende de X_p y Y_p.

Definición 1.27. Sea $p \in M$ y $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h_\eta : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto h_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle \end{aligned}$$

donde $x, y \in T_pM$, y por la proposición (1.10) h_η, es bilineal y simétrica.

Definición 1.28. La forma cuadrática $\prod_\eta$ definida en T_pM por $\prod_\eta(x) = h_\eta(x,x)$ es llamada la *segunda forma fundamental* de f en p según el vector normal η.

Se usa también la expresión segunda forma fundamental, para designar la aplicación B que toma valores en $(T_pM)^{\perp}$. La aplicación bilineal h_η tiene asociado una aplicación lineal auto - adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = h_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle \tag{1.15}$$

La siguiente proposición relaciona una aplicación lineal, asociada con las segunda forma fundamental en términos de la derivada covariante.

Proposición 1.11. Sea $p \in M$, $x \in T_pM$ y $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Si $\overline{\eta}$ es una extensión local de η normal a M, entonces

$$S_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x\overline{\eta}\right)^{\top}.$$

Demostración. Sean $x, y \in T_pM$ y X e Y extensiones locales de x e y respectivamente, tangentes a M entonces

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = \left\langle B(X,Y)_{(p)}, \overline{\eta}\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, \overline{\eta}\right\rangle_{(p)}.$$

Como $\langle Y, \overline{\eta}\rangle = 0$, derivando covariantemente con respecto a X, se tiene

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Y, \overline{\eta}\right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X\overline{\eta}\right\rangle = 0.$$

Luego $\langle S_\eta(x), y\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \overline{\eta}\right\rangle_{(p)} = -\left\langle Y, \overline{\nabla}_X\overline{\eta}\right\rangle_{(p)}$, es decir $\langle S_\eta(x), y\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_x\overline{\eta}, y\right\rangle = \left\langle -\left(\overline{\nabla}_x\overline{\eta}\right)^{\perp}, y\right\rangle$, para todo $y \in T_pM$. □

Proposición 1.12. La aplicación S definida como,

$$\begin{aligned} S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(M) &\to \mathfrak{X}(M), \\ (X, \eta) &\mapsto S(X, \eta) = S_{\eta}(X), \end{aligned}$$

es bilineal sobre $C^{\infty}(M)$.

Demostración. Basta notar que $S_{\eta}(X) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$ y que B y $\langle , \rangle$ son bilineales sobre C^{∞}. □

Si $f : M \to N$ es una inmersión isométrica, se define una conexión en el fibrado normal

$$\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(M) \to \mathfrak{X}^{\perp}(M)$$

$$\nabla^{\perp}_X \eta = \left(\overline{\nabla}_{f_*(X)} \eta\right)^{\perp},$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}_f(M)$, $f_*(X)(p) = df_p(X(p))$, $p \in M$.

Proposición 1.13. $\nabla^{\perp}$ es una conexión afín en el fibrado normal, es decir si X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^{\perp}$(M), $h : M \to \mathbb{R}$ de clase C^{∞}, entonces la conexión $\nabla^{\perp}$ cumple las siguientes propiedades:

i) $\nabla^{\perp}_{hX+Y} \xi = h \nabla^{\perp}_X \xi + \nabla^{\perp}_Y \xi$

ii) $\nabla^{\perp}_X (\xi + \eta) = \nabla^{\perp}_X \xi + \nabla^{\perp}_X \eta$

iii) $\nabla^{\perp}_X h\xi = X(h)\xi + h\nabla^{\perp}_X \xi$

iv) $X \langle \xi, \eta \rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_X \xi, \eta \right\rangle + \left\langle \xi, \nabla^{\perp}_X \eta \right\rangle$

Demostración. Solo veremos (i). En efecto, como $\nabla^{\perp}_X \xi = \overline{\nabla}_X \xi + S_{\xi}(X)$. Entonces, de la linealidad de $\overline{\nabla}$ y S_{ξ} se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^{\perp}_{hX+Y} \xi &= \overline{\nabla}_{hX+Y} \xi + S_{\xi}(hX + Y) \\ &= \overline{\nabla}_{hX} \xi + \overline{\nabla}_Y \xi + hS_{\xi}(X) + S_{\xi}(Y) \\ &= h\left(\nabla_X \xi + \nabla^{\perp}_X \xi\right) + \nabla_Y \xi + \nabla^{\perp}_Y \xi - h\nabla_X \xi - \nabla_Y \xi, \end{aligned}$$

donde luego de efectuar la expresión anterior, se concluye la demostración. □

Sea $\{E_i\}_{i=1\ldots,m}$ base ortonormal de vectores en $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$, donde U es una vecindad de p en la cual f es un encajamiento, podemos escribir, en p.

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x, y) E_i, \quad x, y \in T_pM,$$

donde $h_i = h_{E_i}$. Luego el vector normal es dado por.

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (\textit{trazo } S_i) E_i,$$

donde $S_i = S_{E_i}$. El vector H es llamado vector *curvatura media* de f. Se puede probar que H no depende de la base ortonormal escogida.

Es oportuno fijar términos y notaciones para el segundo capítulo, donde trabajaremos en superficies regulares.

Definición 1.29. Sea f una inmersión isométrica de M en N y $\overline{g}$ la métrica de N. Si el *pullback* $f^*(\overline{g})$ es una *métrica de Lorentz* sobre M se tienen los siguientes casos:

- M es tipo tiempo si $f^*(\overline{g})$ es no degenerado y tiene índice $\nu = 1$.
- M es tipo espacio si $f^*(\overline{g})$ es no degenerado y tiene índice $\nu = 0$.

Si $f^*(\overline{g})$ es una métrica degenerada para todo $p \in M$ se dice que M es *tipo luz o nulo.*

Tomemos de aquí en adelante el caso *no degenerado.*

Denotemos al espacio de Minkowski tridimensional con métrica Lorentziana $\overline{g}$ y de asignatura $(+,+,-)$ como.

$$\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \overline{g}) = \mathbb{R}^3_1.$$

En términos de las coordenadas canónicas (x^1, x^2, x^3) de $\mathbb{R}^3$, la métrica $\overline{g}$ queda expresada como

$$\overline{g} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{1.16}$$

Sea M^2 una 2-variedad diferenciable conexa orientable y $X : M^2 \to \mathbb{L}^3$ una inmersión de M^2 en $\mathbb{L}^3$. A lo largo del trabajo asumiremos que X es una inmersión espacial, o que M^2 es una superficie espacial en $\mathbb{L}^3$. Esto quiere decir que el pullback $X^*\overline{g}$ de la métrica Lorentziana $\overline{g}$ vía X es una métrica definida positiva.

Denotemos a $M = (M^2, g)$ como la 2-variedad Riemanniana M^2 con métrica inducida $g = X^*\overline{g}$. Es decir, $X : M^2 \to \mathbb{L}^3$ es una inmersión isométrica.

Definición 1.30. Sea el conjunto $\mathbb{H} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1\}$, llamado el hiperbóloide de dos hojas, es una variedad diferenciable 2-dimensional.

Suele escribirse también, $\mathbb{H} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid \langle (x^1, x^2, x^3), (x^1, x^2, x^3) \rangle = -1\}$

Definición 1.31. Sean $u = (a, b, c)$, $v = (x, y, z) \in \mathbb{L}^3$. Definimos el producto cruz Lorentziano como

$$u \times v := \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & -\widehat{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy, cx - az, bx - ay)$$

En la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, el producto cruz resulta.

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \qquad e_1 \times e_3 = -e_2 \quad \text{y} \quad e_3 \times e_2 = -e_1.$$

Por otra parte, sea M una superficie en $\mathbb{L}^3$ tipo espacio y sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}^3$ una parametrizaciones compatible con la orientación.

Definimos:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

La aplicación normal de Gauss como $G : M \to \mathbb{H}$, donde $G(p) = N(p)$. Notemos que la imágen está contenida en la superficie espacial $\mathbb{H}$ en $\mathbb{L}^3$. Pues, en cada punto de la superficie se cumple $\langle N, N\rangle = -1$.

Sean $p \in M$ y $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ curva parametrizada en M. Para simplificar la notación, vamos a suponer que las siguientes funciones están evaluadas en p. El vector tangente a $\alpha(t)$ en p es $\alpha' = u'X_u + v'X_v$ y $dN(\alpha') = u'N_u + v'N_v$, $dN(\alpha') = \overline{\nabla}'_{\alpha}N$, donde $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{L}^3$.

Desde que $N_u, N_v \in T_pM$, tenemos

$$\begin{cases} N_u &= h_{11}X_u + h_{21}X_v \\ N_v &= h_{12}X_u + h_{22}X_v \end{cases} \tag{1.17}$$

Por lo tanto, $dN(\alpha') = (h_{11}u' + h_{21}v')X_u + (h_{21}u' + h_{22}v')X_v$. Luego, en la base $\{X_u, X_v\}$,

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, la expresión matricial de dN en la base $\{X_u, X_v\}$, está dada por la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$. Esta matriz en general no es simétrica, a pesar de que dN sea auto adjunto.

En esta base, la expresión de la segunda forma fundamental es dada por,

$$\begin{aligned} h_p(\alpha') &= - < dN_p(\alpha'), \alpha' > \\ &= - < u'N_u + v'N_v, u'X_u + v'X_v > \\ &= - < N_u, X_u > (u')^2 - (< N_u, X_v > + < N_v, X_u >)(u')(v') - < N_v, X_v > (v')^2. \end{aligned}$$

Sea $e = - < N_u, X_u >$, $f = - < N_u, X_v >$, $g = - < N_v, X_v >$ teniendo en cuenta que $< N, X_u > = < N, X_v > = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e &= < N, X_{uu} > \\ f &= < N, X_{vu} > = < N, X_{uv} > = - < N_v, X_u > \\ g &= < N, X_{vv} > . \end{aligned}$$

Por otro lado de (1.17), tenemos

$$\begin{aligned} -f &= < N_u, X_v > = h_{11}F + h_{21}G \\ -f &= < N_v, X_u > = h_{12}E + h_{22}F \\ -e &= < N_u, X_u > = h_{11}E + h_{21}F \\ -g &= < N_v, X_v > = h_{12}F + h_{22}G, \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$.

El sistema (1.18) puede ser escrito de forma matricial como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Considerando la matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

obtenemos las expresiones de los coeficientes (h_{ij}),

$$h_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad h_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$h_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \qquad h_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

De (1.19) tenemos que la curvatura Guassiana de M es,

$$K = \det(h_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \tag{1.20}$$

La curvatura media resulta ser,

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) = \frac{1}{2}\frac{(eG - 2fF + gE)}{EG - F^2}. \tag{1.21}$$

Veamos a ver un ejemplo de superficie espacial en la cual calculamos la curvatura de Gauss K y curvatura media H.

Sea

$$\mathbb{H} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid \langle (x^1, x^2, x^3), (x^1, x^2, x^3) \rangle = -1\}.$$

Parametrizando $\mathbb{H}$, con $x^3 > 0$.

$$X(\omega, \theta) \;=\; (cos\theta senh\omega, sen\theta senh\omega, cosh\omega) \tag{1.22}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Tenemos

$$\begin{aligned} X_\omega &= (cos\theta cosh\omega, sen\theta cosh\omega, senh\omega) \\ X_\theta &= (-sen\theta senh\omega, cos\theta senh\omega, 0). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Induciendo la métrica $\mathbb{L}^3$ en $\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle X_\omega, X_\omega \rangle = 1, \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle X_\omega, X_\theta \rangle = 0, \\ G &= g_{22} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = senh^2\omega. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Consideremos el campo vectorial normal N de $\mathbb{H}$, dado por

$$N = \frac{X_\omega \times X_\theta}{|X_\omega \times X_\theta|} = (senh\omega cos\theta, sen\theta senh\omega, cosh\omega).$$

Luego cálculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$
\begin{aligned}
e &= < N, X_{uu} >= -1\\
f &= < N_v, X_u >= 0\\
g &= < N, X_{vv} >= -senh^2\omega.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (1.20) y (1.21) obtenemos la curvatura gaussiana y curvatura media, respectivamente, $K = -1, \quad H = -1$.

Capítulo 2

Superficies espaciales con curvatura media constante

Definición 2.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana con una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Si $(x^1, ..., x^n)$ son coordenadas locales isotérmicas, entonces la representación de la métrica g en estas coordenadas es de la forma $g = e^{\phi}((dx^1)^2 + ... + (dx^n)^2)$ donde ϕ es una función diferenciable de clase C^{∞} . Esto significa que, la métrica es conforme a la métrica euclídeana.

En ese sentido podemos considerar a M como una superficie de Riemann introduciendo coordenadas complejas $\xi^1 + i\xi^2$, donde $i = \sqrt{-1}$. Para nuestro caso denotaremos como $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ las coordenadas isotérmicas compatible con la orientación sobre M, por la cual g es expresada localmente como

$$g = \lambda^2\Big((d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2\Big), \quad \text{donde} \qquad \lambda > 0,$$

La existencia de coordenadas isotérmicas en torno a cada punto está probada para cualquier variedad Riemanniana 2-dimensional. Ver ([5]).

Sea $X : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión tipo espacial.

Definimos un *campo local de base Lorentziano* $\{e_1, e_2, e_3\}$ adaptado a M en $\mathbb{L}^3$ de la siguiente manera:

$$X(\xi) = \Big(X^1(\xi^1, \xi^2), X^2(\xi^1, \xi^2), X^3(\xi^1, \xi^2)\Big).$$

Esta es la expresión local de la inmersión X con respecto a coordenadas isotérmicas (ξ^1, ξ^2) sobre M.

Definimos para $k = 1, 2$ los vectores e_k como

$$e_k = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial X}{\partial \xi^k} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^k}, \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k}, \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k}\right)$$

Luego $\{e_1, e_2\}$ define una base ortonormal sobre M, y compatible con la orientación.

Ahora definimos e_3. Este vector es definido como $e_3 = -(e_1 \times e_2)$.

Observemos que apartir de la definición se verifica las siguientes igualdades: $\langle e_3, e_3\rangle = -1$ y $\langle e_3, e_k\rangle = 0$ para $k = 1, 2$. En términos de coordenadas locales y usando el producto cruz se tiene que

$$e_3 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\right). \quad (2.1)$$

Por otra parte, ya denotemos por h a la segunda forma fundamental de M en $\mathbb{L}^3$. Con respecto al campo con base Lorentziano $\{e_1, e_2, e_3\}$, h es representado por la matriz $(h_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$, donde

$$h_{ij} = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, e_3\rangle.$$

Donde $\overline{\nabla}$ denota la derivada covariante en $\mathbb{L}^3$.

Tenemos $\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^k}, \frac{\partial X}{\partial \xi^k}\rangle = \lambda^2$ y $e_k = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial X}{\partial \xi^k}$ para $k = 1, 2$ y podemos expresar un vector como combinación lineal, es decir,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} = a.e_1 + b.e_2 + c.e_3,$$

con a, b y c escalares.

Haciendo cálculos respectivos encontramos que $a = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1}$, $b = -\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2}$ y $c = \lambda^2 h_{11}$ y de forma análoga para las otras ecuaciones.

Luego, las fórmulas fundamentales de Gauss para M en $\mathbb{L}^3$ están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1}\frac{\partial X}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2}\frac{\partial X}{\partial \xi^2} + \lambda^2 h_{11} e_3, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2}\frac{\partial X}{\partial \xi^1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1}\frac{\partial X}{\partial \xi^2} + \lambda^2 h_{12} e_3, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1}\frac{\partial X}{\partial \xi^1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2}\frac{\partial X}{\partial \xi^2} + \lambda^2 h_{22} e_3.
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Asimismo se obtienen las expresiones de Weingarten para M en $\mathbb{L}^3$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} &= h_{11}\frac{\partial X}{\partial \xi^1} + h_{12}\frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \\
\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} &= h_{21}\frac{\partial X}{\partial \xi^1} + h_{22}\frac{\partial X}{\partial \xi^2}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

A continuación veamos como se consigue (2.3).

En efecto, derivando la expresión $\frac{\partial X}{\partial \xi^1} = \lambda e_1$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial X}{\partial\xi^1}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi^1}(\lambda e_1)=\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}e_1+\lambda\frac{\partial e_1}{\partial\xi^1}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+\lambda\frac{\partial e_1}{\partial\xi^1}.$$

Ordenamos esta última parte y usando la primera igualdad de (2.2) conseguimos:

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\xi^1}e_1=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 X}{\partial\xi^1\partial\xi^1}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^2}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}+\lambda^2 h_{11}e_3.$$

Luego

$$\frac{\partial e_1}{\partial\xi^1} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^2}e_2+\lambda \mathrm{h}_{11}e_3. \tag{2.4}$$

Análogamente

$$\frac{\partial e_2}{\partial\xi^1}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}e_1+\lambda h_{12}e_3. \tag{2.5}$$

Ahora, como $-e_3=e_1\times e_2$, entonces derivando esta expresión obtenemos.

$$-\frac{\partial}{\partial\xi^1}e_3=\frac{\partial e_1}{\partial\xi^1}\times e_2+e_1\times\frac{\partial e_2}{\partial\xi^1}.$$

Luego reemplazando (2.4) y (2.5) en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial e_3}{\partial\xi^1}&=\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^2}e_2+\lambda \mathrm{h}_{11}e_3\right)\times e_2+e_1\times\frac{\partial e_2}{\partial\xi^1}\\&=\lambda h_{11}e_3\times e_2+\lambda h_{12}e_2\\&=\lambda h_{11}e_1+\lambda h_{12}e_2.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\partial e_3}{\partial\xi^1}=h_{11}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+h_{12}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}.$$

De forma similar conseguimos la segunda parte de la ecuación (2.3).

La *curvatura media*, H, de una superficie M en un punto $p\in M$ es el promedio de las curvaturas principales (la máxima y mínima curvatura de las secciones normales), es decir,

$$H=\frac{1}{2}(h_{11}+h_{22}).$$

Si H es idénticamente nula sobre M, entonces M es llamado *máximal*. Se verifica de las ecuaciones (2.2) que M es máximal si y solo si cada función componente de la inmersión X es armónica sobre M.

Sea $\phi=\frac{1}{2}(h_{11}-h_{22})-i\,h_{12}$, la complexificación de la segunda forma fundamental h de M.

Note que de ocurrir $\phi(p)=0$ en un punto $p\in M$, entonces p es un punto umbílico de M.

Sean

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}-i\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right)\qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}+i\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right),$$

Proposición 2.1. Sea $X : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión espacial, H la curvatura media y ϕ la complexificación de la segunda forma de M.

Entonces se cumple,

$$\frac{\partial e_3}{\partial z}=H\frac{\partial X}{\partial z}+\phi\frac{\partial X}{\partial\overline{z}}. \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial\overline{z}}=H\frac{\partial X}{\partial\overline{z}}+\overline{\phi}\frac{\partial X}{\partial z}. \tag{2.7}$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_3}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_3}{\partial\xi^1}-i\frac{\partial e_3}{\partial\xi^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}h_{11}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2}h_{12}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}-i\frac{1}{2}h_{21}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}-\frac{i}{2}h_{22}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otra parte sabemos que:

$$H\frac{\partial X}{\partial z}=\left(\frac{h_{11}+h_{22}}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{\partial X}{\partial\xi^1}-i\frac{\partial X}{\partial\xi^2}\right],$$

$$\phi\frac{\partial X}{\partial\overline{z}}=\left(\frac{h_{11}+h_{22}}{2}-ih_{12}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{\partial X}{\partial\xi^1}+i\frac{\partial X}{\partial\xi^2}\right].$$

Sumando estas dos expresiones se tiene

$$\begin{aligned}H\frac{\partial X}{\partial z}+\phi\frac{\partial X}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}\left(\frac{h_{11}+h_{22}}{2}+\frac{h_{11}-h_{22}}{2}-ih_{12}\right)\\ &\quad+\frac{i}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}\left(-\left(\frac{h_{11}+h_{22}}{2}\right)+\frac{h_{11}-h_{22}}{2}-ih_{12}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}(h_{11}-ih_{12})+\frac{i}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}(-h_{22}-ih_{12})\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}h_{11}+\frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}h_{12}-\frac{i}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^1}h_{21}-\frac{i}{2}\frac{\partial X}{\partial\xi^2}h_{22}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como las ecuaciones (2.8) y (2.9) son iguales, concluimos que:

$$\frac{\partial e_3}{\partial z}=H\frac{\partial X}{\partial z}+\phi\frac{\partial X}{\partial\overline{z}}.$$

De similar forma obtenemos (2.7).

□

2.1. La aplicación de Gauss

Sea $M \subset \mathbb{L}^3$. La aplicación de Gauss G es por definición una aplicación de M en $\mathbb{L}^3$, el cual asigna a cada punto de $p \in M$ el punto en $\mathbb{L}^3$ obtenido al trasladar paralelamente el vector unitario normal $e_3(p)$ de M en el punto p hacia el origen de $\mathbb{L}^3$.

Definición 2.2. Sea M una superficie espacial en $\mathbb{L}^3$. La aplicación $G : M \to \mathbb{L}^3$ que toma valores en $\mathbb{H} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1\}$ es llamada *aplicación de Gauss* de M.

Como $e_3(p)$ es un vector unitario tipo tiempo en $p \in \mathbb{L}^3$, la aplicación de Gauss G es de hecho la aplicación de M en la seudoesfera unitaria $\mathbb{H}$ en $\mathbb{L}^3$, es decir, la imagen de G está contenida en una superficie espacial $\mathbb{H}$ en $\mathbb{L}^3$.

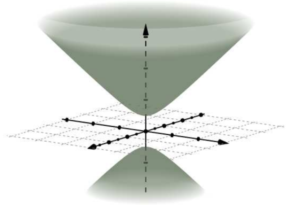

Figura 2.1: $\mathbb{H} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1\}$

Por otro lado, sobre $\mathbb{H}$ podemos definir una estructura compleja natural de la siguiente manera. Sean $U_1 = \mathbb{H} - \{(0,0,1)\}$ y $U_2 = \mathbb{H} - \{(0,0,-1)\}$. Introducimos coordenadas complejas por medio la aplicación estereográficas $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ y $\psi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$, las cuales están definidas, como:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{x^1 + i\,x^2}{1 - x^3}, \qquad x = (x^1, x^2, x^3) \in U_1, \\ \psi_2(x) &= \frac{x^1 - i\,x^2}{1 + x^3}, \qquad x = (x^1, x^2, x^3) \in U_2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

respectivamente.

De hecho, $\psi_1(x)$ es la representación de la recta uniendo $x \in U_1$ y el polo norte $(0,0,1) \in \mathbb{H}$. Similarmente $\psi_2(x)$ representa el conjugado de la aplicación estereográfica desde el polo sur $(0,0,-1) \in \mathbb{H}$.

Se puede ver geométricamente que las imágenes de ψ_1 y ψ_2 están contenidas en el conjunto $\mathbb{C} - \{|\zeta| = 1\}$. Las inversas ψ_1^{-1} y ψ_2^{-1} de ψ_1 y ψ_2 están dadas respectivamente, por

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1}(\zeta) &= \Big(\frac{2\,Re\,\zeta}{1 - |\zeta|^2}, \frac{2\,Im\,\zeta}{1 - |\zeta|^2}, -\frac{1 + |\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}\Big), \\ \psi_2^{-1}(\zeta) &= \Big(\frac{2\,Re\,\zeta}{1 - |\zeta|^2}, -\frac{2\,Im\,\zeta}{1 - |\zeta|^2}, \frac{1 + |\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}\Big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $\zeta \in \mathbb{C} - \{|\zeta| = 1\}$.

Además se verifica que $\psi_1(x)\psi_2(x) = -1$ para $x \in U_1 \cap U_2$, y el conjunto $\{\psi_1, \psi_2\}$ define una estructura compleja sobre $\mathbb{H}$, esto es debido a que

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \qquad \text{y} \qquad \psi_1 \circ \psi_2^{-1}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}.$$

Los ψ_1 y ψ_2 son conformes con respecto a la métrica inducida sobre $\mathbb{H}$ y la métrica plana en $\mathbb{C}$. (De hecho, la métrica inducida sobre $\mathbb{H}$ puede ser escrita como $4\frac{|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2}$, siendo ζ coordenadas complejas definas por las aplicaciones estereográficas).

A menudo nos referiremos también a la aplicación composición $\Psi_k = \psi_k \circ G$ para $k = 1, 2$ como la *aplicación de Gauss* de M en $\mathbb{C}$, pues es su representante de G.

De ahora en adelante se omitirá el índice k en Ψ_k, y escribimos simplemente como Ψ si no existe confusión o si la afirmación bajo consideración se cumple para ambos Ψ_k.

2.2. La ecuación de Beltrami

Sea $X : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión tipo espacial. Denotemos por Ψ la aplicación de Gauss de M en $\mathbb{C}$ como en la sección (2.1). El objetivo de esta sección es probar que Ψ satisface la ecuación de Beltrami.

Para comenzar, presentamos algunas definiciones y resultados.

- $\dfrac{\partial X}{\partial z} = (\dfrac{\partial X^1}{\partial z}, \dfrac{\partial X^2}{\partial z}, \dfrac{\partial X^3}{\partial z})$,
- $\dfrac{\partial X}{\partial \overline{z}} = (\dfrac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}, \dfrac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}, \dfrac{\partial X^3}{\partial \overline{z}})$,
- $\left\langle \dfrac{\partial X}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \dfrac{\partial X^1}{\partial z}\dfrac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial X^2}{\partial z}\dfrac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \dfrac{\partial X^3}{\partial z}\dfrac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}$,
- $\left\langle \dfrac{\partial X}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = \left(\dfrac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2$.

Donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar que proviene de una forma bilineal de $\mathbb{L}^3$.

Proposición 2.2. $X = (X^1, X^2, X^3) : M \to \mathbb{L}^3$ es una inmersión espacial, si y solamente si,

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \frac{\lambda^2}{2} \tag{2.12}$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = 0. \tag{2.13}$$

Demostración. En efecto; sea $z = \xi^1 + i\xi^2$ donde (ξ^1, ξ^2) son coordenadas isotérmicas sobre M, se sigue que

$$\frac{\partial X^k}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial X^k}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^1} + \frac{i}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^2} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}} &= \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1} + \frac{i}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} &= \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1} + \frac{i}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \bar{z}} &= -\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1} + \frac{i}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sumando (2.14), (2.15) y (2.16) obtenemos:

$$\Big\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \Big\rangle = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^2}{2}$$

Para la segunda parte:

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial X^1}{\partial z}\Big)^2 &= \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\Big)^2 - \frac{i}{2}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial X^2}{\partial z}\Big)^2 &= \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\Big)^2 - \frac{i}{2}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} -\Big(\frac{\partial X^3}{\partial z}\Big)^2 &= -\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}\Big)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\Big)^2 + \frac{i}{2}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sumando (2.17), (2.18) y (2.19) e igualando la parte real e imaginaria obtenemos:

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \qquad y \qquad \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = 0$$

De forma similar para la conjugada.

Ahora para el regreso demostremos que:

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^k}, \frac{\partial X}{\partial \xi^k} \right\rangle = \lambda^2 \quad \text{para k=1,2} \qquad \text{y} \qquad \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = 0$$

En efecto, partimos de (2.13),

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle. \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Igualando la parte real e imaginaria obtenemos:

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = 0 \tag{2.20}$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle. \tag{2.21}$$

Luego de (2.12) tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle - i \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando (2.20) y (2.21) en está última ecuación obtenemos lo deseado.

De forma similar si usamos la conjugada. □

Para calcular las derivadas complejas de la aplicación de Gauss Ψ , probaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. Si $X = (X^1, X^2, X^3) : M \to \mathbb{L}^3$ es una inmersión espacial, entonces

$$\frac{\partial(X^1 + iX^2)}{\partial z} = -\Psi_1 \frac{\partial X^3}{\partial z}, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} = -\Psi_1 \frac{\partial(X^1 - iX^2)}{\partial z}, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial(X^1 + iX^2)}{\partial \overline{z}} = -\frac{\lambda^2 \Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2}. \tag{2.24}$$

Demostración. Como $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base Lorentziana adaptada a M en $\mathbb{L}^3$, entonces de la ecuación (2.1) se tiene

$$e_3 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}\right)$$

Además, también tenemos las fórmulas

$$\frac{\partial X^k}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^1} - \frac{i}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^2}$$

y

$$\frac{\partial X^k}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^1} + \frac{i}{2}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^2}$$

Para $k = 1, 2, 3$.

Sumando y restando adecuadamente las dos ecuaciones anteriores conseguimos:

$$\frac{\partial X^k}{\partial \xi^1} = \frac{\partial X^k}{\partial z} + \frac{\partial X^k}{\partial \overline{z}},$$

$$\frac{\partial X^k}{\partial \xi^2} = i\frac{\partial X^k}{\partial z} - i\frac{\partial X^k}{\partial \overline{z}}.$$

Ahora construimos las componente de e_3 en términos de $\frac{\partial X^k}{\partial z}$ y $\frac{\partial X^k}{\partial \overline{z}}$. De los resultados anteriores se obtienen

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{\partial X^3}{\partial z} + \frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\right)\left(i\frac{\partial X^2}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\right)\\ &= i\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial z} - i\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z} - i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{\partial X^2}{\partial z} + \frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\right)\left(i\frac{\partial X^3}{\partial z} - i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\right)\\ &= i\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}},\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} = -i\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial z} + i\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} - i\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial z} + i\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}.$$

Luego, sumando las expresiones anteriores primera y tercera obtenemos:

$$\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} = -2i\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} + 2i\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}$$

De manera análoga, obtenemos la segunda y tercera componente de e_3, es decir,

$$e_3 = -\frac{2i}{\lambda^2}\Big(\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\Big), \tag{2.25}$$

Por otro lado de (2.10) y considerando $e_3 = (e_3^1, e_3^2, e_3^3)$ se tiene

$$\Psi_1(p) = \psi_1(G(p)) = \psi_1(e_3(p)) = \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3}(p)$$

es decir,

$$\Psi_1 = \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3}. \tag{2.26}$$

Como $(e_3^1)^2 + (e_3^2)^2 - (e_3^3)^2 = -1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(1 - |\Psi_1|^2\right)\left(1 - e_3^3\right) &= \left\{1 - \left[\left(\frac{e_3^1}{1 - e_3^3}\right)^2 + \left(\frac{e_3^2}{1 - e_3^3}\right)^2\right]\right\}\left(1 - e_3^3\right) \\
&= \frac{\left((1 - e_3^3)^2 - \left[(e_3^1)^2 + (e_3^2)^2\right]\right)}{(1 - e_3^3)^2}\left(1 - e_3^3\right) \\
&= \frac{\left((1 - e_3^3)^2 - \left((e_3^3)^2 - 1\right)\right)}{(1 - e_3^3)} \\
&= \frac{\left((1 - e_3^3)^2 + (1 - e_3^3)(1 + e_3^3)\right)}{(1 - e_3^3)} \\
&= \left(1 - e_3^3\right) + \left(1 + e_3^3\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(1 - |\Psi_1|^2)(1 - e_3^3) = 2, \tag{2.27}$$

Ahora probemos (2.22).

En efecto, notemos que Ψ_1 se puede expresar como:

$$\Psi_1 = -\frac{2i}{\lambda^2}\frac{\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} + i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right)\right)}{(1 - e_3^3)}.$$

Luego multiplicando Ψ_1 con $\frac{\partial X^3}{\partial z}$ resulta.

$$\Psi_1 \frac{\partial X^3}{\partial z} = -\frac{2i}{\lambda^2} \frac{\left[\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial z} + i\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial z} - i\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} \right]}{(1-e_3^3)}$$

Notemos que el denominador es igual a

$$1 - e_3^3 \;=\; 1 + \frac{2i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right). \tag{2.28}$$

Usamos (2.13) en el numerador.

$$-\frac{2i}{\lambda^2}\left[\left(\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\right)\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right.$$
$$\left. + i\frac{\partial X^1}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda^2}{2}\right) - i\left(\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\right)\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right]$$

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} - \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\right.$$
$$+ \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\lambda^2}{2} + i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - i\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\lambda^2}{2} - i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}$$
$$\left. - i\left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right]$$

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right) - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\lambda^2}{2}i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)\right].$$

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + \frac{i\partial X^2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda^2}{2}i\right)\right].$$

Es decir,

$$\Psi_1 \frac{\partial X^3}{\partial z} = \frac{-\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + \frac{i\partial X^2}{\partial z}\right)\left[\frac{2i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right) + 1\right]}{\left[1 + \frac{2i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right)\right]}$$

$$= -\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} + \frac{i\partial X^2}{\partial z}\right)$$

Ahora probemos (2.23),

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} = -\Psi_1\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right).$$

En efecto, hacemos $\Omega = \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)$, se tiene

$$\Psi_1.\Omega = -\frac{2i}{\lambda^2}\frac{\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} + i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial z}\cdot\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right)\right)}{(1-e_3^3)}.\Omega$$

Efectuando el producto en el numerador.

$$-\frac{2i}{\lambda^2}\left[\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} + i\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} - i\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z}\right.$$
$$\left.-i\frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z} + i\left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right]$$

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\frac{\partial X^3}{\partial z}\left(\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z}\right) + i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\left(\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.- i\frac{\partial X^3}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} + \frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)\right]$$

Luego, aplicando (2.12), y (2.13), tenemos

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\frac{\partial X^3}{\partial z}\left(\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z}\right) + i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.- i\frac{\partial X^3}{\partial z}\left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)\right]$$

$$= -\frac{2i}{\lambda^2}\left[\frac{\partial X^3}{\partial z}\left(\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\frac{\partial X^2}{\partial z}\right) + i\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.- i\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial X^3}{\partial z} - i\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}\right],$$

factorizando $\frac{\partial X^3}{\partial z}$, y usando (2.28)

$$\Psi_1\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right) = \frac{-\left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)\left[\frac{2i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right) + 1\right]}{\left[1 + \frac{2i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}\right)\right]}$$

$$= -\frac{\partial X^3}{\partial z}.$$

Finalmente (2.24), resulta de las dos igualdades anteriores y (2.27).

$\square$

Las derivadas complejas de la aplicación de Gauss Ψ. Están dadas en la siguiente proposición:

Proposición 2.3. Las derivadas complejas de la ecuación de Gauss Ψ_1 están dadas por

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = \frac{H}{2}(1-|\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \overline{z}}, \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\phi}{2}(1-|\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \overline{z}}. \tag{2.30}$$

Demostración. Diferenciando la ecuación (2.26) con respecto a $\overline{z}$ y aplicando (2.6), obtenemos

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{1-e_3^3}\left[H\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \overline{\phi}\frac{\partial X^1}{\partial z} + i\Big(H\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} + \overline{\phi}\frac{\partial X^2}{\partial z}\Big)\right] + \frac{1}{1-e_3^3}\Psi_1\left[H\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} + \overline{\phi}\frac{\partial X^3}{\partial z}\right].$$

Luego, por las ecuaciones (2.22), y (2.23), del lema anterior y usando la (2.27), se verifica que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} &= \frac{1-|\Psi_1|^2}{2}\left[H\frac{\partial (X^1+iX^2)}{\partial \overline{z}} + \overline{\phi}\frac{\partial (X^1+iX^2)}{\partial z}\right] \\
&\quad -\frac{1-|\Psi_1|^2}{2}\left[|\Psi_1|^2 H\frac{\partial (X^1+iX^2)}{\partial \overline{z}} + \overline{\phi}\frac{\partial (X^1+iX^2)}{\partial z}\right] \\
&= \frac{H}{2}(1-|\Psi_1|^2)^2\frac{\partial (X^1+iX^2)}{\partial \overline{z}}.
\end{aligned}$$

De manera similar se prueba (2.30). $\square$

Por argumentos similares, también podemos probar para la aplicación de Gauss Ψ_2. Es decir,

Proposición 2.4. Las derivadas complejas de la aplicación de Gauss Ψ_2 están dadas por

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \overline{z}} = \frac{H}{2}(1-|\Psi_2|^2)^2 \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial \overline{z}}, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = \frac{\phi}{2}(1-|\Psi_2|^2)^2 \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial \overline{z}}. \tag{2.32}$$

De estas dos proposiciones el siguiente teorema es inmediato para Ψ_1 y Ψ_2.

Teorema 2.1. La aplicación de Gauss Ψ de una superficie espacial M en $\mathbb{L}^3$ satisface la ecuación de Beltrami:

$$H\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \phi\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}. \tag{2.33}$$

Es conocido que la aplicación de Gauss de una superficie mínimal en el espacio Euclideano es una aplicación holomorfo en una esfera de Riemann. Tomando en cuenta esto, podemos resaltar lo siguiente.

Proposición 2.5. Sea M una superficie espacial en $\mathbb{L}^3$. Entonces en $p \in M$ se tiene

$$H(p) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}(p) = 0 \tag{2.34}$$

$$\phi(p) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z}(p) = 0 \tag{2.35}$$

Demostración. De las ecuaciones (2.23) y (2.24) obtenemos.

$$\left(-\Psi_1 \frac{\partial\left(x^1 - iX^2\right)}{\partial z}\right) \frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}} = -\frac{\lambda^2 \Psi_1}{\left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2}.$$

Luego,

$$\Psi_1 \left(\frac{\partial\left(X^1 - iX^2\right)}{\partial z} \cdot \frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\lambda^2 \Psi_1}{\left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2}$$

Cancelando Ψ_1 en ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{\left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2} &= \frac{\partial\left(X^1 - iX^2\right)}{\partial z} \cdot \frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}} \\
&= \overline{\left(\frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right)} \cdot \frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}} \\
&= \left|\frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right|^2.
\end{aligned}$$

De esto se concluye que

$$\frac{\lambda}{\left|1 - |\Psi_1|^2\right|} = \left|\frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right|. \tag{2.36}$$

Tomando el módulo en la ecuación (2.29),

$$\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}\right| = \left|\frac{H}{2}\right| \left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2 \left|\frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right|$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}\right| &= \left|\frac{H}{2}\right| \left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2 \frac{\lambda}{\left|1 - |\Psi_1|^2\right|} \\
&= \frac{|H|}{2} \lambda \left|1 - |\Psi_1|^2\right|.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Tomando $\alpha = \dfrac{\lambda \left|1 - |\Psi_1|^2\right|}{2} \neq 0$, conseguimos $\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}\right| = |H|\, \alpha$.

Por lo tanto $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H = 0.$

Análogamente para la otra ecuación, tomando módulo en la ecuación (2.30)

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\phi}{2}\left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2 \frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}},$$

$$\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right| = \left|\frac{\phi}{2}\right| \left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2 \left|\frac{\partial\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial \overline{z}}\right|$$

y reemplazando en la ecuación (2.36)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right| &= \left|\frac{\phi}{2}\right| \left(1 - |\Psi_1|^2\right)^2 \frac{\lambda}{\left|1 - |\Psi_1|^2\right|} \\ &= \frac{|\Phi|}{2}\lambda \left|1 - |\Psi_1|^2\right| \\ &= |\phi|\, \alpha.\end{aligned}$$

De esto se concluye que

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \Phi = 0$$

□

2.3. Fórmula de representación

Dada una superficie espacial M en $\mathbb{L}^3$, probaremos una fórmula de representación para M en términos de la aplicación de Gauss Ψ y la curvatura media H de M.

Teorema 2.2. Sea $X = (X^1, X^2, X^3) : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión espacial. Denotemos H y Ψ_i (i=1,2) la función curvatura media de M y la aplicación de Gauss de M en $\mathbb{C}$, definido como en la sección (2.1), respectivamente. Entonces:

1. Sobre $\Psi_1^{-1}(\mathbb{C})$, se cumple

$$\begin{aligned} H\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1 + \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}, \\ H\frac{\partial X^2}{\partial z} &= i\frac{1 - \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}, \\ H\frac{\partial X^3}{\partial z} &= -2\frac{\Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

2. Sobre $\Psi_2^{-1}(\mathbb{C})$, se cumple

$$\begin{aligned} H\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1+\Psi_2^2}{(1-|\Psi_2|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_2}{\partial z}, \\ H\frac{\partial X^2}{\partial z} &= -i\frac{1-\Psi_2^2}{(1-|\Psi_2|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_2}{\partial z}, \\ H\frac{\partial X^3}{\partial z} &= 2\frac{\Psi_2}{(1-|\Psi_2|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_2}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Demostración. Veamos la parte (1). Tomando la conjugada a la ecuación (2.29). Se obtiene

$$\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} = \frac{H}{2}(1-|\Psi_1|^2)^2\frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z}. \tag{2.40}$$

Sobre $\Psi_1^{-1}(\mathbb{C})$, la ecuación (2.22) lo reemplazamos en la ecuación (2.23), para obtener la siguiente igualdad.

$$\frac{1}{\Psi_1^2}\frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial z} = \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z}. \tag{2.41}$$

Esté último lo reemplazamos en (2.40), obtenemos

$$\Psi_1^2\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} = \frac{H}{2}(1-|\Psi_1|^2)^2\frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial z}. \tag{2.42}$$

Sumando (2.42) y (2.40),

$$(1+\Psi_1^2)\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} = H(1-|\Psi_1|^2)^2\frac{\partial X^1}{\partial z}.$$

De igual forma restando (2.42) de (2.40), obtenemos

$$(1-\Psi_1^2)\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} = -iH(1-|\Psi_1|^2)^2\frac{\partial X^2}{\partial z}.$$

Dado que $1-|\Psi_1^2| \neq 0$, se sigue las fórmulas

$$H\frac{\partial X^1}{\partial z} = \frac{1+\Psi_1^2}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}, \tag{2.43}$$

$$H\frac{\partial X^2}{\partial z} = i\frac{1-\Psi_1^2}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}. \tag{2.44}$$

Ahora de (2.23) tenemos

$$H\frac{\partial X^3}{\partial z} = -\Psi_1 H\frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z}. \tag{2.45}$$

Se sigue entonces de (2.40) y (2.45), la siguiente igualdad

$$H\frac{\partial X^3}{\partial z} = -2\frac{\Psi_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}, \tag{2.46}$$

para $1-|\Psi_1|^2 \neq 0$.

La segunda parte puede ser probado de una manera similar, o se puede derivar de la parte (1) por medio de la relación $\Psi_1\Psi_2 = -1$, lo cual es válido sobre $\Psi_1^{-1}(\mathbb{C}) \cap \Psi_2^{-1}(\mathbb{C})$. $\square$

La contraparte euclidiana del teorema (2.2), a saber, la fórmula de representación correspondiente para superficies en espacios euclideanos tridimensionales fue probado por Kenmotsu [6].

Si llevamos a cabo el mismo argumento utilizando las ecuaciones (2.30), (2.32) en vez de (2.29), (2.31); entonces obtenemos la siguiente fórmula de representación en términos de Ψ y ϕ, sobre $\Psi_1^{-1}(\mathbb{C})$, se cumple

$$\begin{aligned} \overline{\phi}\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1+\Psi_1^2}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}}, \\ \overline{\phi}\frac{\partial X^2}{\partial z} &= i\frac{1-\Psi_1^2}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}}, \\ \overline{\phi}\frac{\partial X^3}{\partial z} &= -2\frac{\Psi_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Sobre $\Psi_2^{-1}(\mathbb{C})$, también se consiguen expresiones similares.

Ahora, sea M una superficie espacial inmersa en $\mathbb{L}^3$ por $X = (X^1, X^2, X^3) : M \to \mathbb{L}^3$.

Asumiendo que $\phi \neq 0$, definimos:

$$F = \frac{1}{\overline{\phi}(1-|\Psi_1|^2)^2}\overline{\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right)}.$$

Entonces de la ecuación (2.47) se sigue que

$$\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}, \frac{\partial X^2}{\partial z}, \frac{\partial X^3}{\partial z}\right) = \big(F(1+\Psi_1^2), iF(1-\Psi_1^2), -2F\Psi_1\big). \tag{2.48}$$

En consecuencia,

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - i\frac{\partial X^2}{\partial z}\right). \tag{2.49}$$

2.4. Condición de integrabilidad

En esta sección mostraremos que la aplicación de Gauss Ψ de una superficie espacial arbitraria M en $\mathbb{L}^3$ satisface una ecuación diferencial parcial no lineal de orden 2 en Ψ y H. La ecuación que obtendremos resultará ser la condición de integrabilidad del sistema de EDP que aparece en el teorema (2.2).

Primero probaremos dos hechos importantes necesarios para la demostración:

Lema 2.4.1. Si $X = (X^1, X^2, X^3) : M \to \mathbb{L}^3$ es una inmersión espacial, entonces

$$\frac{\partial^2\left(X^1 + iX^2\right)}{\partial z \partial \overline{z}} = \lambda^2 H \frac{\Psi_1}{1-|\Psi_1|^2} \tag{2.50}$$

$$\frac{-2\overline{\Psi}_1}{1-|\Psi_1|^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\overline{z}} = (1-|\Psi_1|^2)\Big[H\frac{\partial X^3}{\partial z}+\phi\frac{\partial X^3}{\partial\overline{z}}\Big]\frac{\partial\Psi_1}{\partial\overline{z}}+\frac{\lambda^2H^2}{2}(1-|\Psi_1|^2)\Psi_1 \qquad (2.51)$$

Demostración. Empecemos probando el primer ítem, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial\overline{z}}+i\frac{\partial X^2}{\partial\overline{z}}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X^1}{\partial\xi^1}+i\frac{\partial X^1}{\partial\xi^2}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial X^2}{\partial\xi^1}+i\frac{\partial X^2}{\partial\xi^2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^1}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right)\left[\frac{\partial X^1}{\partial\xi^1}+i\frac{\partial X^1}{\partial\xi^2}+i\frac{\partial X^2}{\partial\xi^1}-\frac{\partial X^2}{\partial\xi^2}\right].
\end{aligned}$$

Reduciendo la expresión anterior conseguimos:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial\overline{z}}+i\frac{\partial X^2}{\partial\overline{z}}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^1\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^2\partial\xi^2}+i\left(\frac{\partial^2 X^2}{\partial\xi^1\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 X^2}{\partial\xi^2\partial\xi^2}\right)\right]. \qquad (2.52)$$

De la ecuación (2.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^1\partial\xi^1} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial\xi^1}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^2}\frac{\partial X^1}{\partial\xi^2}+\lambda^2h_{11}e_3^1,\\
\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^2\partial\xi^2} &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^1}\frac{\partial X^1}{\partial\xi^1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi^2}\frac{\partial X^1}{\partial\xi^2}+\lambda^2h_{22}e_3^1,
\end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones se tiene

$$\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^1\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 X^1}{\partial\xi^2\partial\xi^2} = \lambda^2\left(h_{11}+h_{22}\right)e_3^1.$$

Análogamente obtenemos para X^2

$$\frac{\partial^2 X^2}{\partial\xi^1\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 X^2}{\partial\xi^2\partial\xi^2} = \lambda^2\left(h_{11}+h_{22}\right)e_3^2.$$

Luego reemplazando estas últimas expresiones en (2.52) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial\overline{z}}+i\frac{\partial X^2}{\partial\overline{z}}\right) &= \frac{1}{4}\left[\lambda^2\left(h_{11}+h_{22}\right)e_3^1+i\lambda^2\left(h_{11}+h_{22}\right)e_3^2\right]\\
&= \frac{\left(h_{11}+h_{22}\right)}{2}\frac{\lambda^2}{2}\left(e_3^1+ie_3^2\right)\\
&= H\lambda^2\frac{\left(e_3^1+ie_3^2\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Como $e_3^1+ie_3^2 = \Psi_1\left(1-e_3^3\right) = \Psi_1\dfrac{2}{1-|\Psi_1|^2}$, entonces

$$\frac{e_3^1+ie_3^2}{2} = \frac{\Psi_1}{1-|\Psi_1|^2}$$

así obtenemos

$$\frac{\partial^2 (X^1 + iX^2)}{\partial z \partial \overline{z}} = H\lambda^2 \frac{\Psi_1}{1 - |\Psi_1|^2}.$$

Ahora queda demostrar la segunda parte del lema. En efecto, contamos con los siguientes hechos:

- Tenemos la tercera ecuación de (2.38),

$$H\frac{\partial X^3}{\partial z} = \frac{-2\Psi_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}. \tag{2.53}$$

- También tomando el conjugado de la tercera ecuación en (2.47),

$$\phi\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} = \frac{-2\overline{\Psi}_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}.$$

- En (2.37), elevamos al cuadrado, para obtener

$$\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}\right|^2 = \frac{\lambda^2 H^2}{4}(1-\Psi_1^2)^2 \tag{2.54}$$

  Pero está última igualdad es equivalente a

$$\frac{-2\Psi_1}{(1-|\Psi_1|^2)}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = -\frac{\lambda^2 H^2}{2}(1-|\Psi_1|^2)\Psi_1. \tag{2.55}$$

Luego sumando (2.53) y (2.55) conseguimos:

$$H\frac{\partial X^3}{\partial z} + \phi\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} = \frac{-2\Psi_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} + \frac{-2\overline{\Psi}_1}{(1-|\Psi_1|^2)^2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}. \tag{2.56}$$

Luego multiplicando a (2.56) por $(1-|\Psi_1|^2)$ y $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}$ llegamos a,

$$(1-|\Psi_1|^2)[H\frac{\partial X^3}{\partial z} + \phi\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}]\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = -\frac{\lambda^2 H^2}{2}(1-|\Psi_1|^2)\Psi_1 - \frac{2\overline{\Psi}_1}{(1-|\Psi_1|^2)}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}.$$

Finalmente pasando $-\frac{\lambda^2 H^2}{2}(1-|\Psi_1|^2)\Psi_1$ al otro lado de la igualdad conseguimos lo deseado.

□

Teorema 2.3. Sea $X : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión espacial. Entonces la función curvatura media H de M y la aplicación de Gauss Ψ de M en $\mathbb{C}$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$H\Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}\Big) = \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}. \tag{2.57}$$

Demostración. Probaremos (2.57) para Ψ_1. Para hacer esto, podemos considerar el caso donde $H \neq 0$. De hecho, si $H(p) = 0$ en $p \in \Psi_1^{-1}(\mathbb{C})$, entonces $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}(p) = 0$ gracias a la ecuación (2.34); y de aquí que (2.57) se cumple.

Por otro lado, de (2.27) y (2.29) tenemos

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = 2H \frac{1}{(1-e_3^3)^2} \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \overline{z}}. \tag{2.58}$$

Asimismo, como ya hemos verificado (2.50)

$$\frac{\partial^2 (X^1 + iX^2)}{\partial z \partial \overline{z}} = \lambda^2 H \frac{\Psi_1}{1 - |\Psi_1|^2},$$

diferenciando (2.58) con respecto a z y aplicando (2.6) y (2.50), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} + (1 - |\Psi_1|^2) \left[H \frac{\partial X^3}{\partial z} + \phi \frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} \right] \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} + \frac{\lambda^2 H^2}{2} (1 - |\Psi_1|^2) \Psi_1. \tag{2.59}$$

Sustituyendo la igualdad (2.51) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{2\overline{\Psi}_1}{1 - |\Psi_1|^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}}. \tag{2.60}$$

Por lo tanto hemos probado (2.57) para Ψ_1.

Se tiene similar ecuación para Ψ_2 por un argumento similar. □

La ecuación (2.57) no depende de la métrica sobre M, solo depende de la estructura compleja sobre M.

Por otra parte ver anexo, para concluir lo siguiente.

Corolario 2.1. La curvatura media de una superficie espacial M en $\mathbb{L}^3$ es una constante no nula si y solo si la aplicación de Gauss Ψ no holomorfa de M es una aplicación armónica en H.

En lo que sigue, sea M una superficie de Riemann, y $\mathbb{H}$ denota, como antes, la seudoesfera en $\mathbb{L}^3$ con la métrica inducida de curvatura media Gaussiana negativa constante y con estructura compleja natural definida en la sección (2.1).

Sean $H : M \to \mathbb{R}$ no nula y $G : M \to \mathbb{H}$, dos funciones diferenciables, definimos los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1}{H} \frac{1 + \Psi_k^2}{(1 - |\Psi_k|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}, \\
\frac{\partial X^2}{\partial z} &= (-1)^{k-1} \frac{i}{H} \frac{1 - \Psi_k^2}{(1 - |\Psi_k|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} \qquad \text{sobre} \quad \Psi_k^{-1}(\mathbb{C}) \\
\frac{\partial X^3}{\partial z} &= (-1)^k \frac{2}{H} \frac{\Psi_k}{(1 - |\Psi_k|^2)^2} \frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Donde Ψ_k denota la composición $\Psi_k = \psi_k \circ G$ de G y la aplicación estereográfica ψ_k definido por (2.10), para $k = 1, 2$. Se debe notar que teniendo la relación $\Psi_1 \cdot \Psi_2 = -1$, los lados derechos de (2.61) para $k = 1, 2$ son compatibles sobre $\Psi_1^{-1}(\mathbb{C}) \cap \Psi_2^{-1}(\mathbb{C})$. De aquí que las ecuaciones de (2.61) definen un sistema global definido sobre M.

Con esto, estamos preparado para probar la siguiente.

Proposición 2.6. La ecuación $\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}} = H\Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}\Big)$ es la condición de integrabilidad del sistema (2.61).

Demostración. Basado en la ecuación (2.61), definimos,

$$P = \Big(f_k(1+\Psi_k^2), (-1)^{k-1} i f_k(1-\Psi_k^2), (-1)^k 2 f_k \Psi_k\Big), \tag{2.62}$$

donde

$$f_k = \frac{1}{H(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} \quad \text{con} \quad k = 1, 2.$$

Asumiendo que H y Ψ_k satisfacen (2.57), mostraremos que (2.61) es un sistema integrable. Para hacer esto, es suficiente ver que $\frac{\partial P}{\partial \overline{z}} \in \mathbb{R}^3$, pues esto es equivalente a la condición de integrabilidad de (2.61).

En efecto.

Tomando conjugada a (2.57) conseguimos

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} = H\Big(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{2\Psi_k}{1-|\Psi_k|^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}\Big). \tag{2.63}$$

Por otra lado

$$\frac{\partial |\Psi_k|^2}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial(\Psi_k \overline{\Psi}_k)}{\partial \overline{z}} = \Psi_k \frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}} + \overline{\Psi}_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}}. \tag{2.64}$$

Las componentes de P son:

$P_1 = H^{-1}\frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}, \qquad P_2 = (-1)^{k-1} i H^{-1}\frac{(1-\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} \qquad$ y

$P_3 = 2(-1)^{k-1} H^{-1}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}$.

Y sus derivadas con respecto a $\overline{z}$, son:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \overline{z}} = \underbrace{-H^{-2}\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}}_{(I)} + \underbrace{H^{-1}\frac{\partial\Big(\frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\Big)}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}}_{(II)} + \underbrace{H^{-1}\frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial^2 \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z} \partial z}}_{(III)}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \overline{z}} = (-1)^{k-1} i\Big\{ - H^{-2}\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\frac{(1-\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} + H^{-1}\frac{\partial (1-\Psi_k^2)}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} + H^{-1}\frac{(1-\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial^2 \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}\partial z}\Big\}$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \overline{z}} = 2(-1)^{k-1}\Big\{ - H^{-2}\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z} + H^{-1}\frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \Big(\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\Big)}{\partial \overline{z}} + \frac{H^{-1}\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial^2 \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}\partial z}\Big\}$$

Luego si reemplazamos (2.63) en (I) este será igual a:

$$(I) = -H^{-1}\frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial^2 \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}\partial z} - H^{-1} 2\Psi_k \frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^3}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}.$$

Por otra lado desarrollando la derivada en (II) en cual usamos (2.64), tendremos:

$$(II) = -H^{-1}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}\frac{2(\Psi_k+\overline{\Psi}_k)}{(1-|\Psi_k|^2)^3}\frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}} + 2\Psi_k H^{-1}\frac{(1+\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^3}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}$$

Luego sumando (I), (II) y (III) llegamos a,

$$\frac{\partial P_1}{\partial \overline{z}} = H^{-1}\frac{2(\Psi_k + \overline{\Psi}_k)}{(1-|\Psi_k|^2)^3}\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z}\frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}} = H\lambda^2\Big(\frac{Re\Psi_k}{1-|\Psi_k|^2}\Big), \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{2}{H(1-|\Psi_k|^2)}\Big|\frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}}\Big|$$

El cual viene a ser la primera componente de $\frac{\partial P}{\partial \overline{z}}$.

De forma similar calculamos las otras dos componentes, es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial \overline{z}} = \frac{H}{2}\lambda^2\Big(\frac{2Re\Psi_k}{1-|\Psi_k|^2}, (-1)^{k-1}\frac{2Im\Psi_k}{1-|\Psi_k|^2}, (-1)^k\frac{1+|\Psi_k|^2}{1-|\Psi_k|^2}\Big), \tag{2.65}$$

donde $\lambda = \frac{2}{H(1-|\Psi_k|^2)}\big|\frac{\partial \Psi_k}{\partial \overline{z}}\big|$.

□

2.5. Superficies espaciales con curvatura media conocida

Probaremos ahora una forma recíproca del teorema (2.2). A saber, resolviendo el sistema EDP (2.61), construiremos una superficie espacial M en $\mathbb{L}^3$ con curvatura media no nula H y aplicación de Gauss G. Para ser precisos, vamos a probar el siguiente:

Teorema 2.4. Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa, $H : M \to \mathbb{R}$ una función real diferenciable no nula sobre M, y $G : M \to \mathbb{H}$ una aplicación diferenciable no holomorfa de M en la seudoesfera unitaria $\mathbb{H}$ en $\mathbb{L}^3$. Denotemos por Ψ_k la composición $\psi_k \circ G$, de G y la aplicación estereográfica ψ_k definido por (2.10), con $k = 1, 2$.

Si H y Ψ_k satisfacen la ecuación diferencial (2.57), entonces existe una inmersión espacial $X : M \to \mathbb{L}^3$ tal que:

1. La curvatura media de M es H, y la aplicación de Gauss de M está dada por G.

2. La inmersión $X = (X^1, X^2, X^3)$ está dada explicitamente como

$$
\begin{aligned}
X^1(z) &= 2Re\int_a^z \frac{1}{H}\frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}dz + c^1, \\
X^2(z) &= 2Re\int_a^z (-1)^{k-1}\frac{i}{H}\frac{1-\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}dz + c^2, \\
X^3(z) &= 2Re\int_a^z (-1)^{k}\frac{2}{H}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}dz + c^3.
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

donde $z \in \Psi_k^{-1}(\mathbb{C})$, $c = (c^1, c^2, c^3) \in \mathbb{R}^3$, y la integral está siendo tomada a lo largo de un camino arbitrario desde un punto fijo hacia al punto z.

Demostración. Apartir de G, H y Ψ_k, dadas en la hipótesis, podemos definir un sistema de EDPs como en (2.61). Luego la solución real de este sistema está dado por

$$X(z) = 2Re\int_a^z Pdz + c, \tag{2.67}$$

donde P es definido por (2.62)

Por otro lado como M es simplemente conexo, entonces en la aplicación dada por (2.67), está bien definida pues no depende del camino que une a con z.

Ahora demostremos que X es una inmersión tipo espacio. Para ello verificamos los siguientes hechos:

X satisface las ecuaciones

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = 0, \tag{2.68}$$

donde $\lambda = 2[H(1-|\Psi_k|^2)]^{-1}|\partial\Psi_k/\partial\overline{z}|$.

En efecto, como

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \frac{\partial X^1}{\partial z}.\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial X^2}{\partial z}.\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial z}.\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}},$$

y debido a que X es real, entonces se cumple $\frac{\partial X^k}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial X^k}{\partial z}}$.

De (2.61) se tiene.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X^1}{\partial z}.\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} &= \left(\frac{1}{H}\frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)\overline{\left(\frac{1}{H}\frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)} \\
&= \frac{1}{H^2}\frac{|1+\Psi_k^2|^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}\left|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right|^2.
\end{aligned}
$$

De manera análoga en el segundo sumando también tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^2}{\partial z}.\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} &= \left(\frac{(-1)^{k-1}i}{H}\frac{(1-\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)\overline{\left(\frac{(-1)^{k-1}i}{H}\frac{(1-\Psi_k^2)}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)}\\ &= \frac{1}{H^2}\frac{|1-\Psi_k^2|^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}|^2.\end{aligned}$$

Finalmente para el tercer sumando obtenemos

$$\begin{aligned}-\frac{\partial X^3}{\partial z}.\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} &= -\left(\frac{2(-1)^k}{H}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)\overline{\left(\frac{2(-1)^k}{H}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right)}\\ &= -\frac{4}{H^2}\frac{|\Psi_k|^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}|^2.\end{aligned}$$

Sumando estas últimas tres expresiones obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial X}{\partial z},\frac{\partial X}{\partial \overline{z}}\right\rangle &= \frac{1}{H^2(1-|\Psi_k|^2)^4}|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}|^2\left((1+|\Psi_k|^2)^2+(1-|\Psi_k|^2)^2-4|\Psi_k|^2\right)\\ &= \frac{2(1-|\Psi_k|^2)^2}{H^2(1-|\Psi_k|^2)^4}|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}|^2\\ &= \frac{2}{H^2(1-|\Psi_k|^2)^2}|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}|^2\\ &= \frac{\lambda^2}{2},\end{aligned}$$

donde $\lambda = \frac{2}{H(1-|\Psi_k|^2)}\left|\frac{\partial\Psi_k}{\partial\overline{z}}\right|$ y $\left|\frac{\partial\Psi_k}{\partial\overline{z}}\right| = \left|\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z}\right|$, siendo $\frac{\partial\Psi_k}{\partial\overline{z}} \neq 0$, pues en ninguna parte este es holomorfo.

De la misma manera:

$$\left\langle\frac{\partial X}{\partial z},\frac{\partial X}{\partial z}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial X}{\partial \overline{z}},\frac{\partial X}{\partial \overline{z}}\right\rangle = 0.$$

Basta probar una de ellas, pues la otra se expresa en función de la primera. De (2.61),

$$\frac{\partial X^1}{\partial z}.\frac{\partial X^1}{\partial z} = \frac{1}{H^2}\frac{(1+\Psi_k^2)^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}(\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z})^2.$$

Para el segundo sumando,

$$\frac{\partial X^2}{\partial z}.\frac{\partial X^2}{\partial z} = \frac{-1}{H^2}\frac{(1-\Psi_k^2)^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}(\frac{\partial\overline{\Psi}_k}{\partial z})^2,$$

mientras para el tercer sumando,

$$-\frac{\partial X^3}{\partial z}.\frac{\partial X^3}{\partial z} = -\frac{4}{H^2}\frac{(\Psi_k)^2}{(1-|\Psi_k|^2)^4}(\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z})^2.$$

Luego sumando las tres expresiones anteriores llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle &= \frac{1}{H^2(1-|\Psi_k|^2)^4}(\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z})^2 \left((1+\Psi_k^2)^2 + (-1)(1-\Psi_k^2)^2 - 4\Psi_k^2\right) \\ &= \frac{1}{H^2(1-|\Psi_k|^2)^4}(\frac{\partial \overline{\Psi}_k}{\partial z})^2 \left(4\Psi_k^2 - 4\Psi_k^2\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Con respecto a $\langle \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \rangle$, tenemos que

$$\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}}.\frac{\partial X^1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}}.\frac{\partial X^2}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}}.\frac{\partial X^3}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}.\frac{\partial X^1}{\partial z} + \frac{\partial X^2}{\partial z}.\frac{\partial X^2}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial z}.\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)}.$$

Así, debido a lo probado anteriormente se tiene

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = 0.$$

Es una inmersión y además es espacial pues la métrica en M, inducida por X es,

$$g = \lambda^2|dz|^2 = \left[\frac{2}{H(1-|\Psi|^2)}\left|\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}\right|\right]^2 |dz|^2.$$

Usando las ecuaciones (2.61), (2.25) y (2.10), vamos a verificar que la aplicación de Gauss de M coincide con G y la curvatura media de M está dada por H.

Sea $\tilde{G}$ la aplicación de Gauss de M en $\mathbb{L}^3$, dada por la inmersión X y definimos

$$\tilde{\Psi}_k = \psi_k \circ \tilde{G}$$

Demostremos que $\Psi_k = \tilde{\Psi}_k$. Si esto sucede y debido a que ψ_k es biyectiva, esto implicaría que $\tilde{G} = G$.

Tenemos, que $\tilde{\Psi}_k$ verifica las ecuaciones (2.61), es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1}{\tilde{H}}\frac{1+\tilde{\Psi}_k^2}{(1-|\tilde{\Psi}_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z} \\ \frac{\partial X^2}{\partial z} &= (-1)^{k-1}\frac{i}{\tilde{H}}\frac{1-\tilde{\Psi}_k^2}{(1-|\tilde{\Psi}_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z} \qquad \text{sobre} \quad \tilde{\Psi}_k^{-1}(\mathbb{C}) \\ \frac{\partial X^3}{\partial z} &= (-1)^k\frac{2}{\tilde{H}}\frac{\tilde{\Psi}_k}{(1-|\tilde{\Psi}_k|^2)^2}\frac{\partial \overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z}.\end{aligned}$$

También, se tiene por (2.61):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1}{H}\frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z}, \\
\frac{\partial X^2}{\partial z} &= (-1)^{k-1}\frac{i}{H}\frac{1-\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z} \qquad\qquad \text{sobre} \quad \Psi_k^{-1}(\mathbb{C}) \\
\frac{\partial X^3}{\partial z} &= (-1)^{k}\frac{2}{H}\frac{\Psi_k}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\tilde{\Psi}_k}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Igualando los sistemas anteriores obtenemos.

$$\frac{\tilde{\Psi}_k}{\Psi_k} = \frac{1+\tilde{\Psi}_k^2}{1+\Psi_k^2} = \frac{1-\tilde{\Psi}_k^2}{1-\Psi_k^2}$$

Así obtenemos $\tilde{\Psi}_k = \pm\Psi_k$, en el caso usemos $\tilde{\Psi}_k = -\Psi_k$, $\tilde{\Psi}_k$ es nula.

Lo cual implica

$$\tilde{\Psi}_k = \Psi_k.$$

Ahora veamos que H es la curvatura media.

Sabiendo que $\tilde{\Psi}_k = \Psi_k$ y por la primera ecuación de (2.38), $\tilde{H}$ satisface,

$$\tilde{H}\frac{\partial X^1}{\partial z} = \frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_k|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_i}{\partial z},$$

$$\tilde{H} = \frac{1+\Psi_k^2}{(1-|\Psi_i|^2)^2}\frac{\partial\overline{\Psi}_i}{\partial z}\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^{-1}.$$

Reemplazando la primera ecuación de (2.61) se obtiene,

$$\tilde{H} = H,$$

es decir, H es la curvatura media.

□

En el teorema (2.4), si solo asumimos que $G : M \to \mathbb{H}$ es una aplicación suave, la cual satisface la condición de integrabilidad (2.57), con H dada, entonces la aplicación $X : M \to \mathbb{L}^3$ dado por (2.67), en general, no es una inmersión espacial, sino que puede tener singularidades en $\partial\Psi_k/\partial\overline{z} = 0$.

Corolario 2.2. Sea $X : M \to \mathbb{L}^3$ una inmersión espacial dada por el teorema (2.4). Entonces se cumple.

1. La métrica inducida g sobre M está dada por

$$g = \left[\frac{2}{H(1-|\Psi|^2)}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}}\right|\right]^2|dz|^2.$$

2. La curvatura Gaussiana K de M está dada por

$$K = H^2\left[\left|\frac{\Psi_z}{\Psi_{\overline{z}}}\right|^2 - 1\right].$$

Demostración. La parte (1) ya está probada. Para la parte (2), esta resulta del teorema (2.1):

$$H\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \phi\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}}.$$

Despejando ϕ y tomando el módulo al cuadrado, conseguimos

$$|\phi|^2 = \left|H\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial z}}{\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}}}\right|^2$$

y utilizando la ecuación (**??**),

obtenemos:

$$K = -H^2 + |\phi|^2,$$

$$K = H^2\left[\left|\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial z}}{\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}}}\right|^2 - 1\right].$$

□

Como en el caso de superficies mínimas en espacios euclideanos tridimensionales, se prueba que dos superficies espaciales maximales no congruentes pueden tener la misma aplicación de Gauss. Sin embargo, para superficies espaciales con curvatura media no nula tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Proposición 2.7. Sean X, $\tilde{X}$ dos inmersiones espaciales como en el teorema (2.4) de una superficie de Riemann simplemente conexa M en $\mathbb{L}^3$ con función de curvatura media no nula H, $\tilde{H}$ y las aplicaciones de Gauss G, $\tilde{G}$, respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe un difeomorfismo holomorfo φ sobre M y una isometría τ preservando orientación de $\mathbb{L}^3$ tal que para $z \in M$ se tiene

$$\tau \circ X(z) = \tilde{X} \circ \varphi(z). \tag{2.69}$$

2. Existe un difeomorfismo holomorfo φ sobre M y una isometría σ preservando orientación de $\mathbb{H}$ tal que para $z \in M$ se tiene

$$\sigma \circ G(z) = \tilde{G} \circ \varphi(z), \quad \text{y} \quad H(z) = \tilde{H} \circ \varphi(z). \tag{2.70}$$

Demostración. Veamos que el enunciado (1) implique (2). Haciendo $w = \varphi(z)$, $\tau \circ X = T$ y como $\varphi(z) = r(z) + is(z) = (r(\xi^1, \xi^2), s(\xi^1, \xi^2))$ luego diferenciando la ecuación (2.69), tenemos por regla de la cadena.

$$\tau_*\frac{\partial X}{\partial z}(z) = \frac{\partial(\tilde{X} \circ \varphi)}{\partial z}(z) = \frac{\partial\tilde{X}}{\partial w}.\varphi'(z),$$

Afirmamos que:

$$\tau_* \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}} . \overline{\varphi'(z)}, \qquad para\ z \in M.$$

En efecto:

Derivando $(\tilde{X} \circ \varphi)$ con respecto a ξ^1 y ξ^2 tendremos respectivamente:

$$\frac{\partial(\tilde{X} \circ \varphi)}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi^1},$$

$$\frac{\partial(\tilde{X} \circ \varphi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi^2}.$$

Dado que $\varphi(z)$ es holomorfa, se cumple:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi^1} = \frac{\partial s}{\partial \xi^2} \qquad y \qquad \frac{\partial s}{\partial \xi^1} = -\frac{\partial r}{\partial \xi^2}.$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial T}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi^1} + i(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi^2}) \\
&= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}(\frac{\partial r}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial r}{\partial \xi^2}) + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}(\frac{\partial s}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial s}{\partial \xi^2}) \\
&= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}(\frac{\partial r}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial r}{\partial \xi^2}) + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}(\frac{-\partial r}{\partial \xi^2} + i\frac{\partial r}{\partial \xi^1}) \\
&= (\frac{\partial \tilde{X}}{\partial r} + i\frac{\partial \tilde{X}}{\partial s})(\frac{\partial r}{\partial \xi^1} - i\frac{\partial s}{\partial \xi^1}).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\frac{\partial T}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial T}{\partial \xi^2}) &= \frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial r} + i\frac{\partial \tilde{X}}{\partial s})\overline{(\frac{\partial r}{\partial \xi^1} + i\frac{\partial s}{\partial \xi^1})} \\
\frac{\partial T}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}}(w).\overline{\varphi'(z)}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

$$\tau_* \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}} . \overline{\varphi'(z)}, \qquad para\ z \in M.$$

Para las inmersiones X, $\tilde{X}$ tenemos.

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{X}}{\partial v}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial v} \right\rangle = \hat{\lambda},$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = \lambda.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \tilde{X}}{\partial w}\varphi'(z), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}}\overline{\varphi'(z)} \right\rangle &= \mid \varphi'(z) \mid^2 \left\langle \frac{\partial \tilde{X}}{\partial w}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}} \right\rangle \\ &= \mid \varphi'(z) \mid^2 \frac{\hat{\lambda}^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\left\langle \tau_* \frac{\partial X}{\partial z}, \tau_* \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \overline{z}} \right\rangle = \frac{\lambda^2}{2}. \tag{2.72}$$

Como (2.71) y (2.72) son iguales, encontramos que:

$$\lambda = \hat{\lambda} \mid \varphi'(z) \mid$$

Denotando por (e_k)(respec. $(\tilde{e}_k)$), $k = 1, 2, 3$, con base Lorentziano adaptado a X (resp. $\tilde{X}$) en $\mathbb{L}^3$.

Considerando $w = u + iv$, las coordenadas de $\tilde{X}$.

$$\begin{aligned}(\tilde{e}_1 + i\tilde{e}_2)(\varphi(z)) &= \frac{1}{\hat{\lambda}}(\tilde{X}_u + i\tilde{X}_v)(\varphi(z)) \\ &= \frac{2}{\hat{\lambda}}(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \overline{w}})(\varphi(z)) \\ &= \frac{2}{\hat{\lambda}}\tau_* \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}\overline{\varphi'(z)}^{-1} \\ &= \frac{2|\varphi'(z)|}{\lambda}\tau_* \frac{\partial X}{\partial \overline{z}}\overline{\varphi'(z)}^{-1}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$(\tilde{e}_1 + i\tilde{e}_2)(\varphi(z)) = |\varphi'(z)| \cdot \overline{\varphi'(z)}^{-1}\tau_*(e_1 + ie_2)(z).$$

y su respectivo conjugado.

$$(\tilde{e}_1 - i\tilde{e}_2)(\varphi(z)) = |\varphi'(z)| \cdot \varphi'(z)^{-1}\tau_*(e_1 - ie_2)(z).$$

Escribiendo $\tilde{e}_3$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}2\tilde{e}_3(\varphi(z)) &= i(\tilde{e}_1 + i\tilde{e}_2)(\varphi(z)) \times (\tilde{e}_1 - i\tilde{e}_2)(\varphi(z)) \\ &= \Big(i\tau_*(e_1 + ie_2)(z) \times \tau_*(e_1 - ie_2)(z)\Big)\end{aligned}$$

Usando el hecho que τ es una isometríca que preserva orientación, tenemos:

$$\begin{aligned}2\tilde{e}_3(\varphi(z)) &= \tau_*\Big(i(e_1 + ie_2)(z) \times (e_1 - ie_2)(z)\Big) \\ &= 2\tau_*(e_3(z)),\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\tilde{e}_3(\varphi(z)) \quad = \quad \tau_*(e_3(z)),$$

Estableciendo $\sigma = \tau_*$, obtenemos una isometría preservando orientación σ de $\mathbb{H}$ tal que

$$\tilde{G} \circ \varphi(z) = \sigma \circ G(z) \quad \text{para} \quad z \in M$$

Ahora diferenciando $\tilde{e}_3(\varphi(z)) = \tau_*(e_3(z))$, tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{e}_3(\varphi(z))}{\partial w}\varphi'(z) = \tau_* \frac{\partial e_3(z)}{\partial z},$$

sustituyendo lo anterior en (2.6), se llega a $\tilde{H}(\varphi(z)) = H(z)$ para $z \in M$, por lo tanto se cumple (2.70).

De regreso, veamos que (2) implica (1). Denotamos también por σ la extensión de σ a una isometría preservando orientación de $\mathbb{L}^3$.

Para mostrar (2.69), hacemos $\widehat{X} = \sigma \circ X$ sigue siendo una imersión espacial, y su aplicación de Gauss es $\widehat{G}(z) = \sigma \circ G(z)$, puesto que σ preserva orientación y por hipótesis tenemos, $\widehat{G}(z) = \tilde{G}(\varphi(z))$, y su representante es, $\widehat{\Psi}(z) = \tilde{\Psi}(\varphi(z))$, entonces para $\widehat{X}$, $\tilde{X}$ en (2.61) y $H(z) = \tilde{H}(\varphi(z))$ llegamos a:

$$\frac{\partial\Big(\widehat{X}^k(z) - \tilde{X}^k(\varphi(z))\Big)}{\partial z} = 0, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto, $\widehat{X}(z) = \tilde{X}(\varphi(z)) + c$ para algún $c \in \mathbb{R}^3$.

Esto implica que $\sigma \circ X(z) = \tilde{X}(\varphi(z)) + c$, la composición de isometrías es una isometría $\tau = L_{-c} \circ \sigma$ de $\mathbb{L}^3$ y que preserva la orientación, así:

$$\tau \circ X(z) = \tilde{X} \circ \varphi(z) \quad \text{para} \quad z \in M$$

$\square$

En el caso que H sea constante real no nula en el teorema (2.4), la condición de integrabilidad (2.57) es equivalente a que G sea armónica. Consecuentemente, dada una constante real no nula H y una aplicación armónica nunca holomorfa G de una superficie de Riemann simplemente conexa M en $\mathbb{H}$, podemos construir por (2.66), una inmersión espacial $X : M \to \mathbb{L}^3$ con curvatura media constante H y una aplicación de Gauss G conocida.

Desde este punto de vista, exhibiremos algunos ejemplos de superficies espaciales con curvatura media constante en $\mathbb{L}^3$.

Ejemplo 2.1. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Tomemos $H = -1$, y definamos $\Psi_1 : D \to \mathbb{C}$ por $\Psi_1(z) = -\overline{z}$. Entonces Ψ_1 satisface (2.57), y la inmersión espacial X definida por (2.66) está dado por

$$X(z) = \left(\frac{2Re(z)}{1 - |z|^2}, -\frac{2Im(z)}{1 - |z|^2}, \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}\right).$$

En efecto. Tenemos: $\frac{\partial\Psi_1}{\partial\overline{z}}=-1$, $\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z\partial\overline{z}}=0$, $\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}=0$, por lo tanto Ψ_1 satisface la ecuación (2.57).
Luego por el teorema (2.4), existe una inmersión espacial $X : M \to \mathbb{L}^3$. Para encontar $X=(X^1,X^2,X^3)$ tal que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1+\overline{z}^2}{(1-|z|^2)^2}\\ \frac{\partial X^2}{\partial z} &= i\frac{1-\overline{z}^2}{(1-|z|^2)^2}\\ \frac{\partial X^3}{\partial z} &= \frac{2\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}.\end{aligned}$$

Dicho sistema de ecuaciones es equivalente a resolver:

$$X^1(z) = 2Re\int^z \frac{1+\overline{w}^2}{(1-|w|^2)^2}dw + c^1, \tag{2.73}$$

$$X^2(z) = 2Re\int^z i\frac{1-\overline{w}^2}{(1-|w|^2)^2}dw + c^2, \tag{2.74}$$

$$X^3(z) = 2Re\int^z \frac{2\overline{w}}{(1-|w|^2)^2}dw + c^3, \tag{2.75}$$

donde $c=(c^1,c^2,c^3)\in\mathbb{R}^3$.

Recordando la integración en $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)]dt\\ &\quad +i\int_a^b [u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t)]dt\end{aligned}$$

donde $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ y $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, con $t\in[a;b]$.

Eligiendo el camino $\gamma(t)=(x(t),y(t))=(tcos\theta, tsen\theta)$, con $t\in[0;r]$.

Luego se tiene

$$\frac{\partial X^1}{\partial z}=\frac{1+\overline{z}^2}{(1-|z|^2)^2}=\frac{1+x^2-y^2}{(1-(x^2+y^2))^2}+i\frac{-2xy}{(1-(x^2+y^2))^2}.$$

Además: $x'(t)=cos\theta$, $y'(t)=sen\theta$.

Reemplazando en la integral se obtiene

$$\begin{aligned}
X^1(z) &= 2\int_0^r \frac{(1+t^2(cos^2\theta - sen^2\theta)).cos\theta}{(1-t^2)^2} - \frac{(-2t^2cos\theta sen\theta).sen\theta}{(1-t^2)^2}dt + c^1 \\
&= 2\int_0^r \frac{cos\theta + t^2cos\theta(cos^2\theta + sen^2\theta)}{(1-t^2)^2}dt + c^1 \\
&= 2cos\theta\int_0^r \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}dt + c^1 \\
&= \frac{2rcos\theta}{1-r^2} + c^1.
\end{aligned}$$

Tomando $c^1 = 0$, entonces tenemos

$$X^1(z) = \frac{2Re(z)}{1-|z|^2}.$$

Para resolver (2.74) elegimos el mismo camino $\gamma(t) = (tcos\theta, tsen\theta)$, $t \in [0;r]$. Así tenemos

$$\frac{\partial X^2}{\partial z} = i\frac{1-\overline{z}^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{-2xy}{(1-(x^2+y^2))^2} + i\frac{1-x^2+y^2}{(1-(x^2+y^2))^2}.$$

Luego se tiene la integral,

$$\begin{aligned}
X^2(z) &= 2\int_0^r \frac{-sen\theta - t^2sen\theta(cos^2\theta + sen^2\theta)}{(1-t^2)^2}dt + c^2 \\
&= -2\int_0^r \frac{sen\theta(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt + c^2 \\
&= \frac{-2rsen\theta}{1-r^2} + c^2 \\
&= \frac{-2Im(z)}{1-|z|^2} + c^2
\end{aligned}$$

Tomando $c^2 = 0$, obtenemos

$$X^2(z) = \frac{-2Im(z)}{1-|z|^2}.$$

Para (2.75) tomamos el mismo camino. Luego tenemos

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} = \frac{2\overline{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{2x}{(1-(x^2+y^2))^2} + i\frac{-2y}{(1-(x^2+y^2))^2}.$$

De esta manera la integral queda definida por:

$$\begin{aligned}
X^3(z) &= 2\int_0^r \frac{2tcos\theta.cos\theta}{(1-t^2)^2} - \frac{-2tsen\theta.sen\theta}{(1-t^2)^2}dt + c^3 \\
&= 2\int_0^r \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt + c^3 \\
&= \frac{1+r^2}{1-r^2} - 1 + c^3,
\end{aligned}$$

Tomando $c^3 = 1$, obtenemos:

$$X^3(z) \quad = \quad \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Por lo tanto:

$$X(z) = \left(\frac{2Re(z)}{1-|z|^2}, -\frac{2Im(z)}{1-|z|^2}, \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\right).$$

Es decir,

$$X(u,v) = \left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}, -\frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right).$$

Esta es la inmersión espacial estándar del hiperboloide o la hoja superior de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{L}^3$.

Ejemplo 2.2. Tomemos $H = -1/2$, y definamos $\Psi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$\Psi_1(z) = \frac{e^{z+\overline{z}}-1}{e^{z+\overline{z}}+1}.$$

Veamos que Ψ satisface (2.57), luego como es la inmersión espacial X.

Tenemos

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \overline{z}} = \frac{2e^{z+\overline{z}}}{(e^{z+\overline{z}}+1)^2}, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{2e^{z+\overline{z}}}{(e^{z+\overline{z}}+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{2e^{z+\overline{z}}[1-e^{z+\overline{z}}]}{(e^{z+\overline{z}}+1)^3}$$

Por otra parte vemos que

$$\Psi_1 = \overline{\Psi}_1.$$

Esto quiere decir, que Ψ_1 es real, y

$$\frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2} = \frac{2(\frac{e^{z+\overline{z}}-1}{e^{z+\overline{z}}+1})}{1-(\frac{e^{z+\overline{z}}-1}{e^{z+\overline{z}}+1})^2} = \frac{2[(e^{z+\overline{z}})^2-1]}{4e^{z+\overline{z}}},$$

Entonces multiplicando por las expresión $\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}$ obtenemos

$$\frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}} = \frac{2[(e^{z+\overline{z}})^2-1]}{4e^{z+\overline{z}}}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}},$$

resultando

$$\frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}} = \frac{2e^{z+\overline{z}}[e^{z+\overline{z}}-1]}{(e^{z+\overline{z}}+1)^3} = -\frac{2e^{z+\overline{z}}[1-e^{z+\overline{z}}]}{(e^{z+\overline{z}}+1)^3}.$$

Luego reemplazamos lo anterior y datos del enunciado en la ecuación:

$$H\Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{2\overline{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}\Big) = \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}.$$

Obteniendo:

$$0=(-\frac{1}{2})\Big(\frac{2e^{z+\overline{z}}[1-e^{z+\overline{z}}]}{(e^{z+\overline{z}}+1)^3}+(-\frac{2e^{z+\overline{z}}[1-e^{z+\overline{z}}]}{(e^{z+\overline{z}}+1)^3})\Big)=(0)\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}}=0.$$

Entonces satisface (2.57), luego por el teorema (2.4), existe una inmersión espacial $X : M\to\mathbb{L}^3$, talque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^1}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\frac{(e^{2(z+\overline{z})}+1)}{e^{z+\overline{z}}},\\
\frac{\partial X^2}{\partial z} &= -i\\
\frac{\partial X^3}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{(e^{2(z+\overline{z})}-1)}{e^{z+\overline{z}}}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$X^1(z) = 2Re\int^z \frac{-1}{2}\frac{(e^{2(w+\overline{w})}+1)}{e^{w+\overline{w}}}dw+c^1, \tag{2.76}$$

$$X^2(z) = 2Re\int^z -idw+c^2, \tag{2.77}$$

$$X^3(z) = 2Re\int^z \frac{1}{2}\frac{(e^{2(w+\overline{w})}-1)}{e^{w+\overline{w}}}dw+c^3. \tag{2.78}$$

Elegimos el camino $\gamma(t)=(x(t),y(t))=(tcos\theta,tsen\theta)$, con $t\in[0;r]$, donde $x'(t)=cos\theta$ y $y'(t)=sen\theta$.

Entonces.

$$\frac{\partial X^1}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{(e^{4x}+1)}{e^{2x}}+i(0).$$

Además, usaremos la identidad.

$$\int\frac{(e^{4x}+1)}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+c.$$

Luego

$$\begin{aligned}
X^1(z) &= 2\int_0^r -\frac{1}{2}\frac{\left(e^{4tcos\theta}+1\right).cos\theta}{e^{2tcos\theta}}dt\\
&= -\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{2x}\right)\\
&= -\frac{1}{2}(e^{z+\overline{z}}-e^{-(z+\overline{z})}).
\end{aligned}$$

Para resolver (2.77) tenemos:

$$\frac{\partial X^2}{\partial z}=0+i(-1).$$

Elegimos el mismo camino $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (tcos\theta, tsen\theta)$, con $t \in [0; r]$.

Luego

$$\begin{aligned} X^2(z) &= 2\int_0^r 1.sen\theta dt \\ &= 2rsen\theta \\ &= 2y \\ &= i(\overline{z} - z). \end{aligned}$$

Para resolver (2.78) usando el mismo camino $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (tcos\theta, tsen\theta)$, $t \in [0; r]$

La tercera función integrando está dada por:

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{(e^{4x} - 1)}{e^{2x}} + i(0),$$

y, usaremos la siguiente identidad.

$$\int \frac{(e^{4x} - 1)}{e^{2x}} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c.$$

Luego:

$$\begin{aligned} X^3(z) &= 2\int_0^r \frac{1}{2}\frac{\left(e^{4tcos\theta} - 1\right).cos\theta}{e^{2tcos\theta}} dt \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{z+\overline{z}} + e^{-(z+\overline{z})}). \end{aligned}$$

Por tanto, la inmersión espacial X esta dada por:

$$X(z) = \left(-\frac{1}{2}(e^{z+\overline{z}} - e^{-(z+\overline{z})}), i(\overline{z} - z), \frac{1}{2}(e^{z+\overline{z}} + e^{-(z+\overline{z})}).\right)$$

Es decir,

$$X(u, v) = (-senh(2u), 2v, cosh(2u)).$$

Esta es la inmersión estándar del cilindro hiperbólico. La superficie es definida por $(x^3)^2 - (x^1)^2 = 1$, con $x^3 > 0$ en $\mathbb{L}^3$.

Apéndice A

Anexos

A.1. Aplicaciones armónicas

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas, tales que M y N son compactos, orientables, conexas y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. La *energía* de f, se define por:

$$E(f) = \int_M \|\nabla f\|^2 dA,$$

donde $\|\nabla f\|^2(p) = \sum_{i=1}^n \|df(e_i)\|^2$, con $\{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormal de T_pM. El campo de tensión de la aplicación f viene dado por $\tau(f)(p) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} df(E_i)$, donde E_i es un campo ortonormal local paralelo en p.

Definición A.1. Una aplicación entre dos variedades riemannianas $f : M \to N$ es **armónica** si $\tau(f) = 0$.

De forma local, con (X, U) parametrizado en $p \in M$, (Y, V) parametrizado en $f(p) \in N$ y $f(x_1, ..., x_m) = (f^1(x_1, ..., x_m), ..., f^n(x_1, ..., x_m))$, se tiene

$$\tau^\gamma = \triangle f^\gamma + \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} f_j^\alpha f_i^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g^{ij}$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \dim N$.

donde:

- $f_j^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}$ es la derivada parcial.
- g^{ij} es la entrada ij de la matriz inversa del tensor métrico.
- $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(f(z))$ los símbolos de Christoffel de M.

Ahora para el caso de dos dimensiones:

El laplaciano asociado viene dado por,

$$\triangle = \lambda^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) = 4\lambda^{-2} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Luego $\tau(f)^\gamma$ en coordenadas complejas:

$$\tau(f)^\gamma = \triangle f^\gamma + 4\lambda^{-2}\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z}$$

como, $\triangle f^\gamma = 4\lambda^{-2}\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial\overline{z}\partial z}$

así,

$$\tau(f)^\gamma = 4\lambda^{-2}\left(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z}\right)$$

El campo de tensión $\tau(f)$ se anula cuando los $\tau(f)^\gamma$ se anulan, esto es,

$$\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z} = 0$$

es decir, f es **armónica**.

Proposición A.1. Sea una aplicación $f : M \to \mathbb{H}$ de clase C^2, siendo $\mathbb{H}$ el espacio Hiperbólico. Luego la aplicación f es armónica si y solamente si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}} + \frac{2\overline{f}}{1-|f|^2}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Demostración. En efecto: Como $\mathbb{H}$ es una variedad con tensor métrico (g_{ij}) y los coeficientes se expresa como,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-|z|^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, con los g_{ij} encontrados, obtenemos los símbolos de Christoffel de $\mathbb{H}$.

$\Gamma^1_{11} = \frac{2x}{1-|z|^2}$ $\Gamma^1_{12} = \frac{2y}{1-|z|^2}$ $\Gamma^1_{21} = \frac{2y}{1-|z|^2}$ $\Gamma^1_{22} = \frac{-2x}{1-|z|^2}$

$\Gamma^2_{12} = \frac{2x}{1-|z|^2}$ $\Gamma^2_{21} = \frac{2x}{1-|z|^2}$ $\Gamma^2_{11} = \frac{-2y}{1-|z|^2}$ $\Gamma^2_{22} = \frac{2y}{1-|z|^2}$

Luego de

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z} = 0$$

Esto es, si $f = (f^1, f^2) = f^1 + if^2$,

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z} + i\left[\frac{\partial^2 f^2}{\partial\overline{z}\partial z} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f^\beta}{\partial z}\right] = 0$$

Luego reemplazando los símbolos de Christoffel de $\mathbb{H}$, igualando y agrupando convenientemente obtendremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{2\overline{f}}{1-|f|^2}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

$\square$

Observación A.1.1. Se demuestra que $\mathbb{H} = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1\}$ es difeomorfa a $\mathbb{D} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$ y este es difeomorfo a $\mathbb{H}^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$.

Conclusiones

Dado una aplicación diferenciable G de una superficie de Riemann simplemente conexa M sobre la pseudoesfera $\mathbb{H}$ que satisface la condición de integrabilidad y la funciones diferenciables no nulas H en M, podemos construir explícitamente una inmersión espacial de M en $\mathbb{L}^3$, tal que la curvatura media de M es H y la aplicación de Gauss de M está dado por G. Esto permite, en particular, producir una riqueza de superficies espaciales de curvatura media constante en $\mathbb{L}^3$, y más aún, relacionar la geometría de esta superficie a la teoría de aplicaciones armónicas a través de la aplicación de Gauss.

Bibliografía

[1] Akutagawa. K. and Nishikawa. S. (1988). *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3 - space.* Tôhoku Math. J. 42(1990), 67-82.

[2] B. O'Neill (1983). *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press.

[3] Biezuner, R. j., (2017) *Notas de Clases - Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana.* Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. Recuperado de $http://www.mat.ufmg.br/\backsim rodney/$

[4] Figueroa. C., (2009) *Introducción a las Aplicaciones Armónicas.* Pro Mathematica, 23. 45-46 (2009), 113-125. ISSN 1012-3938.

[5] Jost. J. (2011). *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Universitext, Springer, Sixth Edition.

[6] Kenmotsu. K (1979). *Weierstrass formula for sufaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., 245 , 89-99.

[7] Do Carmo, M. P., (1988) *Geometria Riemanniana.* Impa, 2^a. *Edicão.*

[8] Kobayashi. O (1983). *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space* L^3, Tokyo J. Math., 6 , 297-309.

[9] Kobayashi. O (1984). *Maximal surfaces with conelike singularities*, J. Math. Soc. Japan, 36 , 609-617.

[10] Milnor. T. K. (1983). *Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space*, Trans. Amer. Math. Soc., 280 , 161-185.

[11] Run. E. and Vilms J. (1970). *The tension field of the Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc., 149 ,569-573.

[12] Mezzerra C., (2014) *Geometría Lorentziana y singularidades.* (Tesis). Universidad de la Republica de Montevideo, Uruguay.

[13] Núñez Ortiz J., (2015) *Superficies en el espacio de Minkowski con vector de curvatura media afín*(Tesis). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[14] Obando. P. (2011) *Variedades Riemannianas de cohomogeneidad uno en el espacio Educlideano.* (Tesis). Pontificia Universidad Católica del Perú.