Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado

Caracterización Diferenciable y Holomorfa de Superficies Topológicamente Planas

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Héctor Aquiles Llanos Valencia

Asesor
Jesús Abad Zapata Samanez

Jurado
Liliana Puchuri Medina
Franco Vargas Pallete

Lima - Perú

Junio 2019

Caracterización Diferenciable y Holomorfa de Superficies Topológicamente Planas

Héctor Aquiles Llanos Valencia

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros del Jurado:

Dr. Jesús Abad Zapata Samanez (asesor)

Dra. Liliana Puchuri Medina (presidente)

Dr. Franco Vargas Pallete (miembro)

Lima - Perú

Junio 2019

Resumen

Las superficies (2 - variedad conexa) homeomorfas a un abierto de la esfera S^2, son llamadas superficies topológicamente planas. En esta tesis, caracterizamos a estas superficies y estudiamos la conexión entre estas características.

Es claro que el plano y la esfera son planas. Notemos que una característica que presentan estas dos superficies, es que ambas satisfacen el famoso Teorema de la Curva de Jordan, i.e., el complemento de cualquier curva cerrada simple en el plano o la esfera, tiene exactamente dos componentes conexas. Otra cualidad que se exhibe en estas dos superficies, es que toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto necesariamente es exacta.

Finalmente, describimos la relación que mantienen estas características, además, obtenemos un resultado de rigidez. A saber, una superficie de Riemann homeomorfa a un abierto de S^2 es biholomorfa a una abierto de la esfera de Riemann.

Palabras claves: Variedades suaves. Formas diferenciales. Teorema de la Curva de Jordan. Superficies de Riemann. Funciones holomorfas. Funciones armónicas. El Problema de Dirichlet.

… A mi familia y en especial a mis hijos, con el propósito de departir esta tesis en una ulterior ocasión.

Índice general

Agradecimientos

A mi maestro Jesús Zapata por su ejemplo, enseñanza y compartir conmigo su filosofía sobre la matemática. A los profesores de la Maestría en Matemáticas de la Escuela de Posgrado de la PUCP por impartir en cada clase o plática sus conocimientos, del mismo modo, agradezco a los profesores Liliana Puchuri y Franco Vargas por sus significativas sugerencias.

A mi esposa e hijos, a mis padres y hermanos por su comprensión y apoyo durante el desarrollo de esta empresa.

Introducción

Una superficie (2-variedad conexa) es plana, si topológicamente es un abierto de la esfera S^2. En este trabajo revisamos que la condición de ser plana se codifica a través de las siguientes características:

(i) Una superficie plana satisface el Teorema de la Curva de Jordan, i.e., el complemento de cualquier curva cerrada simple sobre la superficie tiene exactamente dos componentes conexas.

(ii) Toda 1 - forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto sobre una superficie plana necesariamente es exacta.

Un trabajo realizado por Simha [Sim89] nos ofrece una característica más. A saber, una superficie de Riemann plana es biholomorfa a una abierto de la esfera de Riemann.

El objetivo de esta tesis es exhibir la equivalencia entre estas cuatro propiedades. Para ello, desarrollamos elementos de la teoría de 1 - formas diferenciales de clase C^∞, funciones holomorfas, funciones armónicas y de curvas suaves.

A continuación, detallamos el contenido de este trabajo:

En el Capítulo 1 revisamos los conceptos de variedades suaves, aplicaciones suaves, sub-variedades, variedades orientables y con borde, partición de la unidad. Enunciamos el Teorema de Sard y el Teorema de Clasificación de 1 - Variedades.

En el Capítulo 2 desarrollamos teoría de la Cohomología de deRham. Enunciamos la Secuencia de Mayer - Vietoris y presentamos nuestro primer resultado. A saber, cualquier dominio en la esfera S^2 cumple el Teorema de la Curva de Jordan.

En el Capítulo 3 trabajamos con las funciones holomorfas en el plano. Probamos el Teorema de Uniformización de Riemann y generalizamos un resultado presentado en [For12] sobre las familias de funciones schlicht.

En el Capítulo 4 revisamos los conceptos y propiedades de las superficies de Riemann, funciones armónicas. Brindamos un criterio para saber cuando dos anillos son equivalentes de manera holomorfa y resolvemos el Problema de Dirichlet usando el Método de Perron.

En el Capítulo 5 nos dedicamos a estudiar las relaciones entre las caracterisísticas de una superficie plana y presentamos nuestro principal resultado :

Teorema. *Sea X una superficie de Riemann. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *X es plana.*

(ii) *X satisface el teorema de la curva de Jordan, i. e., el complemento de cualquier curva cerrada simple sobre X tiene exactamente dos componentes conexas.*

(iii) *Toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es necesariamente exacta.*

(iv) *X es biholomorfa a un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Además, obtenemos el siguiente teorema de rigidez:

Teorema. *Si una superficie de Riemann es homeomorfa a un abierto de la esfera entonces es biholomorfa a un abierto de la esfera de Riemann.*

Capítulo 1

Variedades Suaves

Una *variedad topológica* de dimensión m es un espacio topológico M el cual es Hausdorff, admite una base enumerable de abiertos y es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Esta última condición significa que en torno de cada punto $p \in M$ podemos obtener un abierto U en M y $\varphi : U \to V$ un homeomorfismo entre U y un abierto V en $\mathbb{R}^m$. Llamamos al par (φ, U) *carta* o sistema local de coordenadas sobre M.

1.1. Variedades suaves

Un *atlas* sobre M es una colección $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de cartas sobre M de modo que la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de M . Decimos que un atlas $\mathcal{A}$ sobre M es de clase C^∞ si cualquier par de cartas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ y (φ_β, U_β) en $\mathcal{A}$ son C^∞- compatibles; es decir, si satisfacen una de las siguientes condiciones:

1. $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$

2. Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ entonces

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ entre los abiertos $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ y $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ en $\mathbb{R}^m$.

Si $\mathcal{A}$ es un atlas de clase C^∞ sobre M entonces la colección

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{(\varphi, U) \mid (\varphi, U) \text{ es } C^\infty - \text{compatible con toda carta en } \mathcal{A}\}$$

es una atlas $C^\infty-$maximal sobre M que contiene al atlas $\mathcal{A}$ y que es el único atlas sobre M con estas propiedades. El atlas $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es llamado *estructura diferenciable* de clase C^∞ sobre M.

Definición 1.1. Una *variedad suave* es un par (M, Σ) donde M es una variedad topológica y Σ es una estructura diferenciable sobre M.

Es preciso mencionar que un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^∞ sobre una variedad topológica M determina de manera única una estructura diferenciable de clase C^∞ sobre M. Por abuso de lenguaje el par $(M, \mathcal{A})$ también será llamado una variedad suave, aunque formalmente nos estemos refiriendo a $(M, \mathcal{M}(\mathcal{A}))$.

Observación 1.2. En este trabajo llamaremos ***superficie*** a una variedad topológica bidimensional conexa.

Ejemplo 1.3. [**La Esfera** S^2]. Sean los puntos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ en S^2. Consideremos las proyecciones estereográficas respecto a estos puntos :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_N : & S^2 \setminus \{N\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (p_1, p_2, p_3) & \mapsto & (\frac{p_1}{1-p_3}, \frac{p_2}{1-p_3}) \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \varphi_S : & S^2 \setminus \{S\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (p_1, p_2, p_3) & \mapsto & (\frac{p_1}{1+p_3}, \frac{p_2}{1+p_3}) \end{array}$$

cuyas inversas respectivamente son:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_N^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \to & S^2 \setminus \{N\} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1^2+x_2^2-1}{1+x_1^2+x_2^2}) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_S^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \to & S^2 \setminus \{S\} \\ & (y_1, y_2) & \mapsto & (\frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2}, \frac{1-y_1^2+y_2^2}{1+y_1^2+y_2^2}) \end{array}$$

Notemos que las aplicaciones de cambio de coordenadas:

$$\begin{array}{rrcc} \varphi_{NS} : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rrcc} \varphi_{SN} : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & (y_1, y_2) & \mapsto & (\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}, \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2}) \end{array}$$

son de clase C^∞. Por consiguiente, la colección

$$\mathcal{A}_{S^2} = \{(\varphi_N, S^2 \setminus \{N\}), (\varphi_N, S^2 \setminus \{S\})\}$$

es un atlas de clase C^∞ sobre S^2. Como los abiertos $S^2 \setminus \{N\}$ y $S^2 \setminus \{S\}$ son conexos con intersección no vacía, se sigue que S^2 es conexo. Por lo tanto, S^2 es una superficie suave.

1.2. Aplicaciones suaves

Sean $(M^m, \mathcal{A})$, $(N^n, \mathcal{B})$ variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación continua. Decimos que f es *suave* si para todo par de cartas $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ y $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tal que $f(U) \subset V$ se tiene que

$$\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es una aplicación de clase C^∞ entre los abiertos $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ y $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$.
Es fácil ver que esta definición no depende de la elección de las cartas sobre M y N, por lo tanto, es posible obtener que la composición de aplicaciones suaves es suave. Decimos que la aplicación $f : M \to N$ es un *difeomorfismo* si f es un homeomorfismo de modo que f y f^{-1} son suaves. Decimos que las variedades M y N son difeomorfas si existe un difeomorfismo $f : M \to N$.

1.3. Espacio tangente a una variedad en un punto

Dado $(M^m, \mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ una variedad suave y $p \in M$. Consideremos el conjunto $\Lambda_p := \{\alpha \in \Lambda \mid p \in U_\alpha\}$ y en $\Lambda_p \times \mathbb{R}^m$ la relación de equivalencia

$$(\alpha, a) \sim_p (\beta, b) \Longleftrightarrow b = d(\varphi_{\alpha\beta})_{\varphi_\alpha(p)}(a)$$

El conjunto de clases de equivalencia

$$T_pM = \Lambda_p \times \mathbb{R}^m / \sim_p$$

es llamado *espacio tangente* a M en p.
Además, T_pM puede ser dotado de una adición y una multiplación por escalares de la siguiente manera:

1. $[\alpha, a] + [\alpha, \tilde{a}] := [\alpha, a + \tilde{a}]$

2. $\lambda[\alpha, a] := [\alpha, \lambda a]$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Luego, T_pM tiene estructura de espacio vectorial cuya base para cada $\alpha \in \Lambda_p$ y cada base $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ es el conjunto

$$\{[\alpha, v_1], [\alpha, v_2], \ldots, [\alpha, v_n]\}$$

1.4. La derivada de una aplicación suave

Sean $(M^m, \mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$, $(N^n, \mathcal{B} = \{(\psi_\beta, V_\beta)\}_{\beta\in\Gamma})$ variedades suaves, $p \in M$ y $f : M \to N$ una aplicación suave. Definimos

$$\begin{array}{rccc} df_p : & T_pM & \to & T_{f(p)}N \\ & [\alpha, a] & \mapsto & [\beta, d(\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}(a)] \end{array}$$

donde $\alpha \in \Lambda_p$ y $\beta \in \Gamma_{f(p)}$ son tales que $f(U_\alpha) \subset V_\beta$. La aplicación df_p está bien definida y es llamada la *derivada* de f en el punto p; además, df_p es lineal.

1.5. Variedades orientables

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y B, B' dos bases ordenadas de V. Diremos que B y B' son equivalentes si la matriz cambio de coordenadas tiene determinante positivo. Esto define un conjunto de clases de equivalencia que solo tiene dos elementos y cada uno de ellos es llamado una *orientación* de V. Cada base ordenada $\{v_1, \ldots, v_m\}$ define una orientación $[v_1, \ldots, v_m]$, que es su clase de equivalencia.

Una *orientación* $\mathcal{O}$ en una variedad suave M^m es una correspondencia que asigna a cada $p \in M$ una orientación $\mathcal{O}_p \in T_pM$ de manera continua, es decir, para cada punto $p \in M$ existe una carta (φ, U) en torno de p tal que

$$[d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)} \cdot e_1, \ldots, d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)} \cdot e_m] = \mathcal{O}_q$$

para todo $q \in U$. Decimos que una variedad suave es *orientable* si existe una orientación $\mathcal{O}$ sobre M. Una variedad *orientada* es el par $(M, \mathcal{O})$.

1.6. Variedades con borde

Recordemos que una aplicación $f : A \to R^n$ definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ es *suave* si admite una extensión $F : U \to \mathbb{R}^n$ suave definida sobre un abierto U que contiene a A. Una aplicación $f : A \to B$ es llamada un *difeomorfismo* suave entre los conjuntos $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ cuando f es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son ambas aplicaciones suaves.

Sean $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ y $\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$.

Con la extensión descrita líneas arriba se tiene que la aplicación cambio de coordenadas es un difeomorfismo, a saber, si $\varphi_\alpha : U_\alpha \to A$ y $\varphi_\beta : U_\beta \to B$ son cartas sobre una variedad suave tal que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ y A, B son abiertos en $\mathbb{H}^m$ o $\mathbb{R}^m$, entonces $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ es un difeomorfismo de clase C^∞. Así conseguimos lo que frecuentemente se llama variedad suave *con borde.*

Sea $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un atlas de clase C^∞ sobre la variedad con borde M^m. Definamos $\partial M := \{p \in M \mid \varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}^m \, \text{para algún} \, \alpha \in \Lambda\}$, se sigue que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial M) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \partial\mathbb{H}^m$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Así, el espacio ∂M con la topología inducida del ambiente, es una variedad sin borde $(m-1)-$dimensional y $\partial\mathcal{A} := \{(\varphi_{\alpha|U_\alpha\cap\partial M}, U_\alpha \cap \partial M)\}$ es un atlas de clase C^∞ sobre ∂M. La variedad suave $(\partial M, \partial\mathcal{A})$ es llamada *borde* de M. Y su complemento $intM := M \setminus \partial M$ es un abierto de M y por lo tanto tiene estructura diferenciable inducida por M. La variedad suave sin borde $(intM, \mathcal{A}_{|intM})$ es llamada *interior* de M.

1.6.1. Orientación inducida en el borde

Sea M^m una variedad suave con borde y $p \in \partial M$. Decimos que $v \in T_pM$ *apunta hacia afuera* de M cuando para alguna carta (φ, U) en torno de p se satisface que $d\varphi_p(v) \notin \mathbb{H}^m$. No es difícil ver que esta definición no depende de la elección de la carta tomada. Sea M^m con $m \geq 2$, una variedad suave con borde y orientada. Sea $\mathcal{O}$ la orientación de M y $p \in \partial M$. Definimos en ∂M la correspondencia $\partial\mathcal{O}$ como $p \mapsto \partial\mathcal{O}_p := [v_1, \ldots, v_{m-1}]$ donde $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ es una base ordenada de $T_p\partial M$ para la cual existe un vector $v \in T_pM$ que apunta hacia afuera de M de modo que $[v, v_1, \ldots, v_{m-1}] = \mathcal{O}_p$. Así pues, $\partial\mathcal{O}$ es una orientanción en ∂M.

Definición 1.4. Sean M^m, N^n variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación suave. Entonces:

1. Decimos que f es una *submersión* en $p \in M$ si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva, de ahí que $m \geq n$.

2. Decimos $p \in M$ es *punto regular* de f si f es submersión en p; caso contrario, decimos que p es *punto singular.*

3. Sea $q \in N$. Decimos que q es *valor regular* de f si todo punto de $f^{-1}(q)$ es regular (pudiendo ser vacío); caso contario, decimos que q es *valor singular.*

Proposición 1.5. *Sea U un abierto en $\mathbb{R}^m$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Si $0 \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de f entonces $f^{-1}(0)$, si no es vacío, es una variedad suave de dimensión $(m-n)$.*

Prueba. Sea $p \in f^{-1}(0)$. Por hipótesis $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva. Tomemos $E \subset \mathbb{R}^m$ subespacio de dimensión n tal que $df_p(E) = \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ de dimensión $(m-n)$ tal que $E \oplus V = \mathbb{R}^m$. Podemos asumir que $E = \mathbb{R}^n$ y $V = \mathbb{R}^{m-n}$. Consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} F: & U \subset \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_{m-n}, f(x)) \end{array}$$

Es fácil ver que $F \in C^\infty(U)$ y $dF_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Luego, por el teorema de la función inversa, existe un abierto $\tilde{U} \subset U$ en torno de p tal que $F(\tilde{U})$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$ y $F_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \to F(\tilde{U})$ es un difeomorfismo de clase C^∞. Consideremos a $W = F(\tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\})$ entonces $F^{-1}_{|W} : W \to f^{-1}(0) \cap \tilde{U}$ es un difeomorfismo de clase C^∞. □

1.7. Subvariedades

Sea M^{n+k} una variedad suave. Un subconjunto $N \subset M$ es una *subvariedad* suave de dimensión n de M, si para cada $p \in N$ existe una carta (φ, U) en torno de p de modo que $\varphi(N \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. La estructura diferenciable sobre N esta generada por el atlas $\mathcal{A}_N = \{(\varphi|_{U\cap N}, U \cap N)\}$.

Proposición 1.6. *Si q es un valor regular de la aplicación suave $f : M^m \to N^n$ entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de dimensión $(m-n)$.*

Prueba. Sea $p \in f^{-1}(q)$. Tomemos cartas (φ, U) en torno de p y (ψ, V) en torno de q tales que $\varphi(p) = 0$ y $\psi(q) = 0$. Luego, $0 \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$. Usando la proposición 1.5 se sigue que $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M de dimensión $(m-n)$. □

Teorema 1.7. *(**Teorema de Sard**). Sea $f : M \to N$ una aplicación suave. Entonces el conjunto de valores singulares de f tiene medida nula en N.*

Prueba. Ver [MW97]. □

Teorema 1.8. ***(Clasificación de 1-variedades)***. *Toda variedad suave conexa 1-dimensional es difeomorfa al círculo S^1 o a algún intervalo de $\mathbb{R}$.*

Prueba. Ver [MW97]. $\square$

1.8. Partición de la unidad

Recordemos que en un variedad suave M^m para cada $p \in M$ existe una carta (φ, U) en torno de p de modo que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = B_3^m$.
Decimos que la colección de subconjutos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M es *localmente finita* si para cada $p \in M$ existe una vecindad V de p de modo que el conjunto

$$\{\alpha \in \Lambda \mid V \cup U_\alpha \neq \emptyset\}$$

es finito.

Proposición 1.9. *Sean M^m una variedad suave y $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ una cobertura abierta de M. Entonces existe una colección $\{(\varphi_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cartas sobre M tales que :*

(i) $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cobertura localmente finita de M que refina a $\mathcal{V}$.

(ii) $\varphi_n(U_n) = B_3^m$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iii) La colección $\{\varphi_n^{-1}(B_1^m)\}$ todavía cubre a M.

Prueba. En M podemos obtener una base $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\overline{B}_n$ es compacto, luego, construimos una secuencia de compactos $K_1 \subset \ldots \subset K_j \subset \ldots$ tal que $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ y $K_j \subset intK_{j+1}$. Sea $K_1 = \overline{B}_1$, tomemos al menor entero $n_1 > 1$ tal que $K_1 \subset B_1 \cup \ldots \cup B_{n_1}$ y definamos al compacto $K_2 := \overline{B_1 \cup \ldots \cup B_{n_1}}$. Nuevamente, elijamos al menor entero $n_2 > n_1$ tal que $K_2 \subset B_1 \cup \ldots \cup B_{n_1} \ldots \cup B_{n_2}$ y definamos al compacto $K_3 := \overline{B_1 \cup \ldots \cup B_{n_2}}$. Supongamos que tenemos los $j-$primeros compactos de la secuencia, tomemos al menor entero $n_j > n_{j-1}$ tal que $K_j \subset B_1 \cup \ldots \cup B_{n_j}$ y definamos al compacto $K_{j+1} := \overline{B_1 \cup \ldots \cup B_{n_j}}$. Para $j \in \mathbb{Z}$, consideremos el compacto $C_j = K_{j+1} \setminus intK_j$ y el abierto $D_j = intK_{j+2} \setminus K_{j-1}$ con $K_j = \emptyset$ para $j \leq 0$, claramente, $C_j \subset D_j$. Luego, para cada C_j podemos encontrar una cantidad finita de cartas $\{(\varphi_j^i, U_j^i)\}_{i=1}^{i_j}$ tal que:

1. U_i^j esta contenido en D_j para cada $i \in \{1, \ldots, i_j\}$ y en V_β para algún $\beta \in \Gamma$.

2. $\varphi_i^j(U_i^j) = B_3^m$.

3. La colección $\{W_i^j\}_{i=1}^{i_j}$ cubre a C_j.

Claramente la colección $\{(\varphi_i^n, U_i^n) \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq i_n\}$ es localmente finita, pues si $p \in M$ entonces existe algún D_n tal que $p \in D_n$. Luego, $p \in C_n$ y como $U_i^j \cap C_n = \emptyset$ para $j \geq n+2$ e $i \in \{1, \ldots, i_j\}$, se sigue D_n tiene intersección no vacía con una cantidad finita de abiertos U_i^j y satisface las condiciones requeridas. $\square$

Definimos el *soporte* de la función continua $f : M \to \mathbb{R}$ como

$$supp(f) := \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

Si $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es una cobertura abierta de M, una *partición de la unidad* subordinada a $\mathcal{V}$ es una colección de funciones suaves $\{\xi_\beta : M \to [0,1]\}_{\beta \in \Gamma}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $supp(\xi_\beta) \subset V_\beta$.

2. La colección $\{supp(\xi_\beta)\}_{\beta \in \Gamma}$ es localmente finita.

3. $\sum\limits_{\beta \in \Gamma} \xi_\beta(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Proposición 1.10. *Sea M^m una variedad suave. Para toda cobertura abierta $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de M existe una partición de la unidad $\{\xi_\beta : M \to [0,1]\}_{\beta \in \Gamma}$ subordinada a la cobertura $\mathcal{V}$.*

Prueba. Sabemos que existe una cobertura $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ localmente finita que refina $\mathcal{V}$ tal que $\varphi_n(U_n) = B_3^m$. Consideremos la función suave $\eta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con $\eta \equiv 1$ en B_1^m y definamos la función $\xi_n : M \to \mathbb{R}$ como

$$\xi_n(p) := \begin{cases} \eta(\varphi_n(p)) & , \text{ si } p \in U_n \\ 0 & , \text{ si } p \in M \setminus U_n \end{cases}$$

que es suave, pues $\xi_n = \eta \circ \varphi_n$ en U_n y $\xi_n = 0$ en $M \setminus supp(\xi_n)$, además,la colección de $\{supp(\xi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finito. Luego, la función $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \xi_n : M \to \mathbb{R}$ esta bien definida, pues si $p \in M$ y V es una vecindad de p entonces $\{n \in \mathbb{N} \mid V \cap U_n \neq \emptyset\}$ es finito. Así, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ es suave, pues localmente es suma de funciones suaves y es positiva para todo $p \in M$. La función suave

$$\phi_n := \frac{\xi_n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n}$$

cumple que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n = 1$ y la colección de soportes $\{supp(\phi_n)\}$ es localmente finito. Definamos la aplicación $f : \mathbb{N} \to \Gamma$ como $f(n) = \beta$ tal que $supp(\phi_n) \subset V_{\beta=f(n)}$. Así, para cada $\beta \in \Gamma$ tenemos que :

1. $\xi_\beta = \sum_{\beta=f(n)} \phi_n$.
2. $supp(\xi_\beta) \subset \overline{\bigcup_{\beta=f(n)} \varphi_n^{-1}(B_2^m)} \subset \bigcup_{\beta=f(n)} \overline{\varphi_n^{-1}(B_2^m)} \subset V_\beta$.
3. La colección de soportes es localmente finita.

Por lo tanto, la colección $\{\xi_\beta : M \to [0,1]\}_{\beta\in\Gamma}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{V}$. $\square$

Capítulo 2

Formas Diferenciales

Sea V un espacio vectorial de dimensión m. Dado $k \geq 0$, una *k-forma alternada* es una función

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k-veces} \to \mathbb{R}$$

que es k-lineal y antisimétrica. El espacio de las k-formas alternadas en V se denota por $\Lambda^k(V)$.

Propiedades 2.1.

1. $\Lambda^k(V)$ es un espacio vectorial.

2. $\Lambda^0(V) := \mathbb{R}$ y $\Lambda^1(V) = V^*$ (espacio dual).

3. $\Lambda^k(V) = \{0\}$, si $k > m$.

Sean $f_1, \ldots, f_k \in \Lambda^1(V)$. Definimos la k-forma *producto exterior* $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k \in \Lambda^k(V)$ como

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) := det(f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}$$

para todo $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.
Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ una base de V entonces su base dual $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_m\}$ es una base de $\Lambda^1(V)$. Sean el multi-índice $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m\}$, $e_I := (e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ y $dx_I := dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Luego, la colección $\{dx_I\}_{|I|=k}$ es una base de $\Lambda^k(V)$, o sea, si $\omega \in \Lambda^k(V)$ entonces $\omega = \sum_I a_I dx_I$ donde $a_I = \omega(e_I)$. En particular $dim\Lambda^k(V) = \binom{m}{k}$.

Proposición 2.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión m. Dado $k, l \geq 0$ existe un operador*

$$\begin{aligned} \wedge : \quad \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) &\rightarrow \Lambda^{k+l}(V) \\ (\omega, \theta) &\mapsto \omega \wedge \theta \end{aligned}$$

que satisface :

(i) $\wedge$ *es bilineal.*

(ii) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega \,, \forall \omega \in \Lambda^k(V) \,, \forall \theta \in \Lambda^l(V)$.

(iii) $\wedge$ *es asociativa.*

Prueba. Sea $\{dx_1, \ldots, dx_m\}$ una base de $\Lambda^1(V)$. Para cada multi-índice $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq m\}$ y $J = \{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leq m\}$ definamos

$$dx_I \wedge dx_J := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

Dados $\omega = \sum_I a_I dx_I$ y $\theta = \sum_J b_J dx_J$ una k-forma y l-forma respectivamente, como los coeficientes a_I , b_J están unívocamente determinados. Definamos el operador

$$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V)$$

como

$$\omega \wedge \theta = \sum_{I,J} a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J$$

el cual satisface las propiedades descritas. $\square$

Sea V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $A : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Dado $\omega \in \Lambda^k(W)$ definimos $A^*\omega \in \Lambda^k(V)$ como

$$A^*\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k) := \omega(Av_1, Av_2, \ldots, Av_k)$$

para todo $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

2.1. Formas diferenciales

Sea M^m una variedad suave. Una *k-forma diferencial* sobre M es una correspondencia ω que asigna a cada punto $p \in M$ una k-forma $\omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$.

$$\omega : p \in M \rightarrow \omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$$

El espacio de las k-formas diferenciales sobre M se denota por $\Omega^k(M)$.

Propiedades 2.3.

1. $\Omega^k(M)$ es un espacio vectorial.
2. $\Omega^0(M) = \{\text{espacio de funciones de } M \text{ sobre } \mathbb{R}\}$.
3. $\Omega^k(M) = 0$, si $k > m$.

Sea M una variedad suave. Dado $k, l \geq 0$ definimos el *producto exterior* de formas diferenciales

$$\begin{array}{rccc} \wedge: & \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) & \to & \Omega^{k+l}(M) \\ & (\omega, \theta) & \mapsto & \omega \wedge \theta \end{array}$$

como

$$(\omega \wedge \theta)_p := \omega_p \wedge \theta_p \in \Lambda^{k+l}(T_pM)$$

Sea $f : M \to N$ una aplicacón suave. Dado $\omega \in \Omega^k(N)$ definimos $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ como

$$(f^*\omega)_p := (df_p)^*\omega_{f(p)}$$

para todo $p \in M$.

Propiedades 2.4. Sean M, N, P variedades suaves, $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones suaves, $\omega \in \Omega^k(N)$ y $\theta \in \Omega^l(N)$. Entonces :

1. f^* es lineal.
2. $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$.
3. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
4. Si f es un difeomorfismo entonces $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ es un isomorfismo y vale que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

2.1.1. Representación local

Sea M^m una variedad suave y (φ, U) una carta en torno de $p \in M$. Luego $\{d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_m\}$ es una base de $\Lambda^1(T_pM)$ donde $d\varphi_i := (d\varphi_p)^*(dx_i)$ para $1 \leq i \leq m$, pues $(d\varphi_p)^* : \Lambda^1(\mathbb{R}^m) \to \Lambda^1(T_pM)$ es un isomorfismo y $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_m\}$

es la base canónica de $\Lambda^1(\mathbb{R}^m)$. Se sigue que $\{d\varphi_I\}_{|I|=k}$ es una base de $\Lambda^k(T_pM)$, o sea, si $\omega \in \Omega^k(M)$ entonces

$$\omega = \sum_I a_I d\varphi_I \,\text{donde}\, \{a_I : U \to \mathbb{R}\}_{|I|=k}$$

y

$$\varphi_*\omega = \sum_I a_I dx_I \,\text{en}\, \varphi(U)$$

Decimos que $\omega \in \Omega^k(M)$ es de clase C^r ($r \geq 0$) si en cualquier representación local de ω se tiene que las funciones $\{a_I\}_{|I|=k}$ son de clase C^r.

Observación 2.5. En este trabajo las k-formas diferenciales son de clase C^∞. En particular, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

2.1.2. Derivada exterior

Sean M^m una variedad suave, $f \in \Omega^0(M)$ y $(\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m), U)$ una carta en torno de $p \in M$ entonces la derivada de f

$$\begin{array}{rccc} d: & \Omega^0(M) & \to & \Omega^1(M) \\ & f & \mapsto & df \end{array}$$

En coordenadas locales

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} d\varphi_i \;, \text{en}\, U$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \;, \text{para todo}\, p \in U$$

A continuación, definimos al operador *derivada exterior*

$$\begin{array}{rccc} d: & \Omega^k(M) & \to & \Omega^{k+1}(M) \\ & \omega & \mapsto & d\omega \end{array}$$

En coordenadas locales

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge d\varphi_I \,\text{en}\, U$$

Afirmación: El operador derivada exterior está bien definido.

En efecto, recordemos que para todo $f : M \to N$ de clase C^∞ y para todo $\omega \in \Omega^0(N)$ se cumple que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$. Luego en U se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_*(\textstyle\sum_I da_I \wedge d\varphi_I) &= \textstyle\sum_I \varphi_*(da_I) \wedge dx_I \\ &= \textstyle\sum_I d(\varphi_* a_I) \wedge dx_I \\ &= d(\textstyle\sum_I \varphi_* a_I dx_I) \\ &= d(\varphi_*\omega)\end{aligned}$$

Consideremos dos cartas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ y (φ_β, U_β) en torno de $p \in M$, entonces

$$\omega = \sum_I a_I^\alpha d\varphi_I^\alpha = \sum_J a_J^\beta d\varphi_J^\beta \,\text{en}\, U_{\alpha\beta}$$

como

$$(\varphi_\alpha)_*(\sum_I da_I^\alpha \wedge d\varphi_I^\alpha) = d((\varphi_\alpha)_*\omega) \,\text{en}\, \varphi_\alpha(U_\alpha)$$

$$(\varphi_\beta)_*(\sum_J da_J^\beta \wedge d\varphi_J^\beta) = d((\varphi_\beta)_*\omega) \,\text{en}\, \varphi_\beta(U_\beta)$$

entonces

$$(\varphi_{\alpha\beta})_*(d(\varphi_\alpha)_*\omega) = d((\varphi_{\alpha\beta})_* \circ (\varphi_\alpha)_*\omega) = d((\varphi_\beta)_*\omega) \text{ en } \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

Por lo tanto

$$\sum_I a_I^\alpha \wedge d\varphi_I^\alpha = \sum_J a_J^\beta \wedge d\varphi_J^\beta \text{ en } U_{\alpha\beta}$$

Propiedades 2.6. Sean M, N variedades suaves, $F : M \to N$ una aplicación suave, $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega^l(M)$ y $\eta \in \Omega^k(N)$. Entonces :

1. d es lineal.
2. $d^2 = 0$.
3. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d\omega$.
4. $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{gr\omega}\omega \wedge d\theta$.
5. $d(F^*\eta) = F^*(d\eta)$.

Teorema 2.7. ***(Teorema de Stokes)****. Sea M^m una variedad suave orientable con borde y $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ con soporte compacto. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Prueba. Ver [Spi70]. □

2.2. Cohomología de deRham

Sea M^m una variedad suave. La siguiente sucesión de homomorfismos

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \to 0$$

es llamada *complejo de deRham*. Esta sucesión es semiexacta, es decir, $d \circ d = 0$. Definimos al espacio de las k-formas diferenciales *cerradas* como

$$Z^k_{dR}(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} = Ker\left(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\right)$$

y las *exactas* como

$$B^k_{dR}(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega = d\alpha\,,\, \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\} = Im\left(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\right)$$

Propiedades 2.8.

1. $B^k_{dR}(M) \subset Z^k_{dR}(M)$.

2. $Z^m_{dR}(M) = \Omega^m(M)$.

3. $Z^0_{dR}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es localmente constante}\}$.

4. $B^0_{dR}(M) := \{0\}$.

Definición 2.9. Llamamos el *k-ésimo grupo de cohomología de deRham* de M al cociente

$$H^k_{dR}(M) := \frac{Z^k_{dR}(M)}{B^k_{dR}(M)}$$

cuyos elementos son las clases de cohomología

$$[\omega] = \{\omega + d\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\}$$

Propiedades 2.10.

1. $H^k_{dR}(M)$ es un espacio vectorial.

2. $H^m_{dR}(M) = \dfrac{\Omega^m(M)}{d(\Omega^{m-1}(M))}$.

3. $H^0_{dR}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es localmente constante}\}$.

4. Si M es conexo entonces $H^0_{dR}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es constante}\} \cong \mathbb{R}$.

Si $M = \bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda$ es la descomposición de M en componentes conexas entonces

$$\begin{array}{ccc} H^k_{dR}(M) & \cong & \prod_{\lambda \in L} H^k_{dR}(M_\lambda) \\ [\omega] & \to & ([\omega_{|M_\lambda}])_{\lambda \in L} \end{array}$$

En particular, $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}^L$.

Sean M, N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación suave. Considerando la propiedad $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ se sigue que $f^*(Z^k_{dR}(N)) \subset Z^k_{dR}(M)$ y $f^*(B^k_{dR}(N)) \subset B^k_{dR}(M)$. Lo cual nos permite definir el *pull-back en cohomología de deRham* como

$$\begin{array}{cccc} f^* : & H^k_{dR}(N) & \to & H^k_{dR}(M) \\ & [\omega] & \mapsto & [f^*\omega] \end{array}$$

Propiedades 2.11. Sean M, N, P variedades suaves, $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones suaves. Entonces :

1. f^* está bien definida y es lineal.

2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3. Si f es un difeomorfismo entonces $f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ es un isomorfismo y vale que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

2.2.1. Invariancia por homotopías

Definición 2.12. Sean M una superficie suave, $\gamma_1 : [0,1] \to M$ y $\gamma_2 : [0,1] \to M$ dos curvas C^1 por partes. Decimos que γ_1 y γ_2 son *homotópicas con extremos fijos* si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que :

$$\begin{array}{ll} H(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) & H(t,0) = \gamma_1(t) \\ H(1,s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) & H(t,1) = \gamma_2(t) \end{array}$$

Proposición 2.13. *Sea M una superficie suave y ω una 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada sobre M. Si γ_1 y γ_2 son dos curvas C^1 por partes sobre M homotópicas con extremos fijos. Entonces*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Prueba. Ver [NR11]. $\square$

Definición 2.14. Sean M, N variedades suaves y $f, g : M \to N$ aplicaciones suaves. Decimos que f y g son $C^\infty-$homotópicas si existe una aplicación suave $H : M \times [0,1] \to N$ tal que :

$$H(p,0) = f(p) \text{ y } H(p,1) = g(p)$$

Escribiendo $H_t(p) := H(p,t)$ podemos ver a la aplicación suave H como una familia de aplicaciones suaves $H_t : M \to N$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Teorema 2.15. ***(Invariancia homotópica)***. *Sean M, N variedades suaves y $f, g : M \to N$ aplicaciones suaves. Si f y g son $C^\infty-$homotópicas entonces las aplicaciones*

$$f^*, g^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$$

son iguales.

Prueba. Ver [FM09]. □

Lema 2.16. *Sean M, N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación continua (propia). Entonces para toda función continua $\varepsilon : M \to (0, +\infty)$ existe una aplicación $g : M \to N$ suave (propia) tal que $d(g(p), f(p)) < \varepsilon(p)$ para todo $p \in M$. Más aún, si f es suave en un subconjunto cerrado $C \subset M$ es posible elegir g de manera que $g_{|C} = f_{|C}$.*

Prueba. Ver [Mil58]. □

Lema 2.17. *Sean M, N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación continua (propia). Entonces existe una función continua $\delta : M \to (0, +\infty)$ tal que toda aplicación $g : M \to N$ suave (propia) que es una $\delta-$aproximación de f necesariamente es (propiamente) homotópica a f.*

Prueba. Ver [Mil58]. □

Proposición 2.18. *Sean M, N variedades suaves y $f, g : M \to N$ aplicaciones suaves. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *Existe una $C^\infty-$homotopía $H : M \times [0,1] \to N$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.*

(*ii*) *Existe una C^0-homotopía $H : M \times [0,1] \to N$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.*

Prueba. Basta probar $(ii) \Longrightarrow (i)$. Definamos la aplicación $\tilde{H} : M \times \mathbb{R} \to N$ como

$$\tilde{H}(p,t) := \begin{cases} f(p) & , \text{ si } \ t \leq 0 \\ H(p,t) & , \text{ si } \ 0 < t < 1 \\ g(p) & , \text{ si } \ t \geq 1 \end{cases}$$

la cual es continua. Por el lema 2.17 existe $L : M \times \mathbb{R} \to N$ suave con

$$|L(p,t) - \tilde{H}(p,t)| < \delta(p,t) \text{ , para todo } (p,t) \in M \times \mathbb{R}$$

Por el lema 2.16 se tiene que $L_{|M\times[0,1]}$ es una $C^{\infty}-$homotopía entre L_0 y L_1. Como f y g son suaves, se sigue que $f \overset{C^{\infty}}{\sim} L_0$ y $g \overset{C^{\infty}}{\sim} L_1$. Luego $f \overset{C^{\infty}}{\sim} g$, por transitividad. $\square$

Proposición 2.19. ***(Invariancia topológica de la cohomología de deRham).*** *Si M y N son variedades suaves homeomorfas entonces*

$$H^k_{dR}(M) \cong H^k_{dR}(N)$$

Prueba. Sea $h : M \to N$ el homeomorfismo. Como $h : M \to N$ y $h^{-1} : N \to M$ son continuas, por el lema 2.17 existen $f : M \to N$ suave tal que $f \overset{C^0}{\sim} h$ y $g : N \to M$ suave tal que $g \overset{C^0}{\sim} h^{-1}$.
Las aplicaciones $f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ y $g^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(N)$ son inversas una de la otra. Como $f \circ g \overset{C^0}{\sim} h \circ h^{-1} = Id_N$ y $g \circ f \overset{C^0}{\sim} h^{-1} \circ h = Id_M$ por la proposición 2.18 se tiene que $f \circ g \overset{C^{\infty}}{\sim} Id_N$ y $g \circ f \overset{C^{\infty}}{\sim} Id_M$. Por el teorema 2.15 se sigue que $f^* \circ g^* = Id_{H^k_{dR}(M)}$ y $g^* \circ f^* = Id_{H^k_{dR}}(N)$. Es decir, $H^k_{dR}(M)$ y $H^k_{dR}(N)$ son isomorfos. $\square$

Motivados por la proposición anterior, definamos el *pull-back de una aplicación continua* en cohomología de deRham.
Sean M, N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación continua. Definimos $f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ como $f^* := g^*$, donde $g : M \to N$ es cualquier aplicación suave homotópica a f, que existe por el lema 2.17. La aplicación f^* esta bien definida, pues si $g_1, g_2 : M \to N$ son aplicaciones suaves homotópicas a f entonces $g_1 \overset{C^0}{\sim} g_2$ y por la proposición 2.18 resulta que $g_1 \overset{C^{\infty}}{\sim} g_2$. Luego por el teorema 2.15, $g_1^* = g_2^*$.

Propiedades 2.20. Sean M, N, P variedades suaves, $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones continuas. Entonces :

1. $f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ es lineal.
2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
3. Si f es un homeomorfismo, entonces $f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ es un isomorfismo y vale que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Definición 2.21. Dos espacios topológicos M e N son *homotópicamente equivalentes*, si existen aplicaciones continuas $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $g \circ f \sim Id_M$ y $f \circ g \sim Id_N$.

Proposición 2.22. *Si M, N son variedades suaves homotópicamente equivalentes entonces*

$$H^k_{dR}(M) \cong H^k_{dR}(N)$$

Prueba. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to M$ dos aplicaciones continuas tales que $g \circ f \sim Id_M$ y $f \circ g \sim Id_N$, entonces $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = Id_{H^k_{dR}(M)}$ y $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = Id_{H^k_{dR}(N)}$. □

Corolario 2.23. *Si M es una variedad suave contráctil (homotópicamante equivalente a un punto) entonces*

$$H^k_{dR}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & , \; si \quad k = 0 \\ 0 & , \; si \quad k \neq 0 \end{cases}$$

2.2.2. La Secuencia de Mayer-Vietoris

Sea M una variedad suave y U, V abiertos en M tal que $U \cup V = M$. Consideremos la siguiente secuencia corta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^k(M) & \xrightarrow{i^*} & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \xrightarrow{-} & \Omega^k(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \omega & \longmapsto & (\omega_{|U}, \omega_{|V}) & & & & \\ & & & & (\omega_U, \omega_V) & \longmapsto & (\omega_U)_{|U \cap V} - (\omega_V)_{|U \cap V} & & \end{array}$$

Afirmación: La secuencia escrita es exacta.
Prueba. Ver [Lim01].

A continuación, definamos la aplicación

$$\delta : H^k_{dR}(U \cap V) \to H^{k+1}_{dR}(M)$$

llamada *homomorfismo de conexión*. Sea $[\omega] \in H^k_{dR}(U \cap V)$ una clase de cohomología y $\omega \in Z^k_{dR}(U \cap V)$ un representante, entonces $\omega = \omega_U - \omega_V$ en $U \cap V$ donde $\omega_U \in \Omega^k(U)$ y $\omega_V \in \Omega^k(V)$. Definimos

$$\delta\omega := \begin{cases} d\omega_U & , \text{ en } \quad U \\ d\omega_V & , \text{ en } \quad V \end{cases}$$

Luego

$$\delta\omega \in Z^{k+1}_{dR}(M)$$

Por lo tanto, $\delta[\omega] := [\delta\omega]$.

Afirmación: $[\delta\omega]$ solo depende de ω.

En efecto, si $\omega = \tilde{\omega}_U - \tilde{\omega}_V$ en $U \cap V$ donde $\tilde{\omega}_U \in \Omega^k(U)$ y $\tilde{\omega}_V \in \Omega^k(V)$, entonces $\omega_U - \tilde{\omega}_U = \omega_U - \tilde{\omega}_U$ en $U \cap V$. Luego, definimos $\theta \in \Omega^k(M)$ de clase C^∞ como

$$\theta := \begin{cases} \omega_U - \tilde{\omega}_U & , \text{ en } \quad U \\ \omega_V - \tilde{\omega}_V & , \text{ en } \quad V \end{cases}$$

entonces $\tilde{\omega}_U = \omega_U + \theta$ y $\tilde{\omega}_V = \omega_V + \theta$. Así

$$\delta_{\tilde{\omega}_U, \tilde{\omega}_V}\omega = \delta\omega + d\theta \text{ , en } M$$

Por lo tanto, $[\delta_{\tilde{\omega}_U, \tilde{\omega}_V}\omega] = [\delta\omega]$

Afirmación: $[\delta\omega]$ solo depende de $[\omega]$.

En efecto, consideremos al representante $\omega + d\theta$ con $\theta \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$ entonces

$$\omega + d\theta = (\omega_U + d\theta_U) - (\omega_V + d\theta_V) \text{ , en } U \cap V$$

$$\delta(\omega + d\theta) = \begin{cases} d(\omega_U + d\theta_U) & , \text{ en } \quad U \\ d(\omega_V + d\theta_V) & , \text{ en } \quad V \end{cases}$$

Luego, $[\delta(\omega + d\theta)] = [\delta\omega]$. Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \delta : & H^k_{dR}(U \cap V) & \to & H^{k+1}_{dR}(M) \\ & [\omega] & \mapsto & [\delta\omega] \end{array}$$

está bien definida y es lineal.

Teorema 2.24. ***(La Secuencia Larga Exacta de Mayer-Vietoris)***. *Sea M^m una variedad suave y U, V abiertos en M con $U \cup V = M$, entonces la siguiente secuencia larga*

$$\begin{tikzcd}
 & H^m_{dR}(M) \arrow[r, "i^*"] & H^m_{dR}(U) \oplus H^m_{dR}(V) \arrow[r, "-"] & H^m_{dR}(U \cap V) \arrow[r] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[ull, "\delta"] & \\
 & H^1_{dR}(M) \arrow[r, "i^*"] & H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V) \arrow[r, "-"] & H^1_{dR}(U \cap V) \arrow[ull, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & H^0_{dR}(M) \arrow[r, "i^*"] & H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \arrow[r, "-"] & H^0_{dR}(U \cap V) \arrow[ull, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

es exacta.

Prueba. Ver [MT97]. □

2.2.3. Cohomología reducida

Sea M^m una variedad suave. Recordemos que $H^0_{dR}(M)$ es el espacio de funciones localmente constante sobre M. Sea C una componente conexa de M y consideremos las funciones constantes sobre M dadas por la restricción de las funciones localmente constantes sobre M en C. Definamos

$$\overline{H}^0_{dR}(M) := \frac{\{\text{funciones localmente constante sobre M}\}}{\{\text{funciones constantes sobre M}\}}$$

Propiedades 2.25.

1. $dim\overline{H}^0_{dR}(M) = dim H^0_{dR}(M) - 1$.

2. M es conexo $\iff \overline{H}^0_{dR}(M) = \{0\}$.

Si $f : M \to N$ es una aplicación suave entonces el pull-back $f^* : \overline{H}^0_{dR}(N) \to \overline{H}^0_{dR}(M)$ está bien definido. Sea $M = U \cup V$. Consideremos la secuencia

$$0 \longrightarrow \overline{H}^0_{dR}(M) \xrightarrow{i^*} \overline{H}^0_{dR}(U) \oplus \overline{H}^0_{dR}(V) \xrightarrow{-} \overline{H}^0_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1_{dR}(M) \longrightarrow \cdots$$

Afirmación: i^* es inyectiva.
En efecto, sea $[f] \in \overline{H}^0_{dR}(M)$ tal $[f] \in ker\ i^*$. Entonces $f_{|U} = c_U$ y $f_{|V} = c_V$, como $U \cap V \neq \emptyset$ se sigue que $c_U = c_V = c$. Por lo tanto, $f = c$.

Afirmación: $Im\ i^* = Ker\,-$.

En efecto. $Im\ i^* \subset Ker\,-$, pues $- \circ i^* = 0$. Por otro lado, sean $[f_U] \in \overline{H}^0_{dR}(U)$ y $[f_V] \in \overline{H}^0_{dR}(V)$ tal que $f_U - f_V = c$ en $U \cap V$.Luego $c = c - 0$ con $c \in U$ y $0 \in V$, se sigue que $f_U - c = f_V - 0$ en $U \cap V$. Definimos

$$f := \begin{cases} f_U - c & , \text{ en } \quad U \\ f_V & , \text{ en } \quad V \end{cases}$$

Consideremos $[f] \in \overline{H}^0_{dR}(M)$ tal que $[f_{|U}] = [f_U]$ y $[f_{|V}] = [f_V]$. Por lo tanto, $Ker \subset Im\ i^*$.

Afirmación: $Im\ - = ker\,\delta$.

En efecto. $Ker\,\delta \subset Im\ -$. Sea $[f_{UV}] \in \overline{H}^0(U \cap V)$ tal que $\delta f_{UV} = dg$ con $g \in C^\infty(M)$, además, $f_{UV} = \tilde{f}_U - \tilde{f}_V$ donde $[\tilde{f}_U] \in \overline{H}^0_{dR}(U)$ y $[\tilde{f}_V] \in \overline{H}^0_{dR}(V)$. Luego, $d(\tilde{f}_U - g) = 0$ en U y $d(\tilde{f}_V - g) = 0$ en V. Definimos

$$\begin{aligned} f_U &:= \tilde{f}_U - g \quad , \text{ en } \quad U \\ f_V &:= \tilde{f}_V - g \quad , \text{ en } \quad V \end{aligned}$$

Luego, $[f_U] \in \overline{H}^0_{dR}(U)$ y $[f_V] \in \overline{H}^0_{dR}(V)$. Por lo tanto la secuencia de Mayer-Vietoris con esta simplificación de cohomología en dimensión cero está bien definida y es exacta.

Ejemplo 2.26. [**Cohomología de la esfera** S^2]. Consideremos en S^2 los abiertos $U = S^2 \setminus \{N\}$ y $V = S^2 \setminus \{S\}$. Se sigue que $S^2 = U \cup V$; además, U y V son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ y $U \cap V$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Por la invariancia topológica de la cohomología de deRham se tiene que $H^0_{dR}(S^2) \cong H^0_{dR}(U) \cong H^0_{dR}(V) \cong H^0_{dR}(U \cap V) \cong H^1_{dR}(U \cap V) \cong \mathbb{R}$, $H^1_{dR}(U) \cong H^1_{dR}(V) \cong H^2_{dR}(U) \cong H^2_{dR}(V) = 0$. Usando la secuencia de Mayer-Vietoris tenemos que :

$$H^k_{dR}(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ si } \quad k = 0, 2 \\ 0 & , \text{ si } \quad k = 1 \end{cases}$$

2.3. Dualidad de Alexander

Teorema 2.27. *(**Dualidad de Alexander**). Si C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^m$ homeomorfos entonces*

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_1) \cong H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_2)$$

para todo $k \geq 0$.

Prueba. Sea el homeomorfismo $h : C_1 \to C_2$.

Afirmación: Existe un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tal que $H(x,0) = (0, h(x))$ para todo $x \in C_1$.

En efecto, como $h : C_1 \to C_2$ es continua y $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ su extensión continua, posible por Tietze [1]. Definimos el homeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de modo que $\Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \phi(x_1))$. Como $h^{-1} : C_2 \to C_1$ es continua y $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ su extensión continua. Definimos el homeomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tal que $\Psi(y_1, y_2) = (y_1 + \psi(y_2), y_2)$. Finalmente definimos $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ como

$$H := \Psi^{-1} \circ \Phi$$

el cual es un homeomorfismo y satisface lo deseado. Con ello se concluye que $\mathbb{R}^{2m} \setminus C_1 \times \{0\}$ y $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\} \times C_2$ son homeomorfos.

Afirmación: Si $C \subset \mathbb{R}^m$ es cerrado entonces los conjuntos $U = \mathbb{R}^{m+1} \setminus C \times [0, +\infty)$ y $V = \mathbb{R}^{m+1} \setminus C \times (-\infty, 0]$ son contráctiles.

En efecto, consideremos la aplicación continua

$$\begin{array}{rccl} F: & U \times [0,1] & \to & U \\ & ((x,y),t) & \mapsto & \begin{cases} (x, (1-t)y) & , \text{ si } \ y > 0 \\ (x,y) & , \text{ si } \ y \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

el punto $(0,-1) \in U$ y la aplicación continua

$$\begin{array}{rccl} G: & U \times [0,1] & \to & U \\ & ((x,y),t) & \mapsto & \begin{cases} (1-t)(x,0) + t(0,-1) & , \text{ si } \ y > 0 \\ (1-t)(x,y) + t(0,-1) & , \text{ si } \ y \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

[1] Sea $C \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto cerrado y $f : C \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $g_{|C} = f$

Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} H: \ U\times[0,1] & \to & U \\ ((x,y),t) & \mapsto & \begin{cases} F((x,y),2t) & , \text{ si } \ 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ G((x,y),2t-1) & , \text{ si } \ \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases} \end{array}$$

vemos que H es continua, $H_0 = Id_U$ y $H_1 = C_{(0,-1)}$. Por lo tanto, U es contráctil.
Consideremos el homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi: \ \mathbb{R}^{m+1} & \to & \mathbb{R}^{m+1} \\ (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$$

el cual cumple que $\phi(U) = V$. Por lo tanto, V es contráctil.
Asimismo se tiene que

$$\begin{array}{rl} U\cup V = & \mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\} \\ U\cap V = & \mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\mathbb{R} = (\mathbb{R}^m\setminus C)\times\mathbb{R}\sim(\mathbb{R}^m\setminus C) \end{array}$$

Afirmación: Si $C\subset\mathbb{R}^m$ es cerrado entonces se satisface lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} H^k_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C) & \cong & H^{k+1}_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\}) \quad ,k>0 \\ \overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C) & \cong & H^1_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\}) \end{array}$$

En efecto, usemos la secuencia de Mayer-Vietoris.
Para $k>0$. Como U y V son contráctiles se tiene que $H^k_{dR}(U)\cong H^k_{dR}(V)=0$ y

$$0 \xrightarrow{-} H^k_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\}) \xrightarrow{i^*} 0$$

Por lo tanto, $H^k_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C)\cong H^{k+1}_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\})$
Para $k=0$. Como U y V son conexos se tiene que $\overline{H}^0_{dR}(U)\cong\overline{H}^0_{dr}(V)=0$ y

$$0 \xrightarrow{-} \overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C) \xrightarrow{\delta} H^1_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\}) \xrightarrow{i^*} 0$$

Por consiguiente, $\overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C)\cong H^1_{dR}(\mathbb{R}^{m+1}\setminus C\times\{0\})$
Ya estamos listos para culminar la prueba, pues para $k>0$ tenemos que

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m\setminus C_1)\cong H^{k+m}_{dR}(\mathbb{R}^{2m}\setminus C_1\times\{0\})$$

Como $\mathbb{R}^{2m}\setminus C_1\times\{0\}$ y $\mathbb{R}^{2m}\setminus\{0\}\times C_2$ son homeomorfos, por la proposición 2.19 se tiene que

$$H^{k+m}_{dR}(\mathbb{R}^{2m}\setminus C_1\times\{0\})\cong H^{k+m}_{dR}(\mathbb{R}^{2m}\setminus\{0\}\times C_2)$$

Así

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_1) \cong H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_2)$$

Para $k = 0$, tenemos que

$$\overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_1) \cong H^1_{dR}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus C_1 \times \{0\}) \cong H^1_{dR}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \times C_2) \cong \overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_2)$$

Como $\overline{H}^0_{dR}(M) \oplus \mathbb{R} \simeq H^0_{dR}(M)$ para cualquier variedad M, entonces

$$H^0_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_1) \cong H^0_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_2)$$

Por lo tanto,

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_1) \cong H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus C_2)$$

para todo $k \geq 0$. □

Teorema 2.28. ***(Dualidad de Alexander en** S^m**).*** *Si C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados en S^m homeomorfos entonces*

$$H^k_{dR}(S^m \setminus C_1) \cong H^k_{dR}(S^m \setminus C_2)$$

para todo $k \geq 0$.

Prueba. Sea el homeomorfismo $h : C_1 \to C_2$ tal que $p_2 = h(p_1)$ con $p_1 \in C_1$. Para $i = 1, 2$. Sea $\pi_i : S^m \setminus \{p_i\} \to R^m$ la proyección estereográfica respecto a p_i. Como $C_i \setminus \{p_i\} = C_i \cap (S^m \setminus \{p_i\})$ es cerrado en S^m entonces $\pi_i(C_i \setminus \{p_i\})$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$. Luego, $\pi_2 \circ h \circ \pi_1^{-1} : \pi_1(C_1 \setminus \{p_1\}) \to \pi_2(C_2 \setminus \{p_2\})$ es un homemorfismo. Por el teorema 2.27 se tiene que

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus \pi_1(C_1 \setminus \{p_1\})) \cong H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus \pi_2(C_2 \setminus \{p_2\}))$$

Como $\pi_i : S^m \setminus \{p_i\} \to \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo entonces los conjuntos $S^m \setminus C_i$ y $\mathbb{R}^m \setminus \pi_i(C_i - \{p_i\})$ son homeomorfos. Así

$$H^k_{dR}(S^m \setminus C_i) \cong H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus \pi_i(C_i \setminus \{p_i\}))$$

Por lo tanto,

$$H^k_{dR}(S^m \setminus C_1) \cong H^k_{dR}(S^m \setminus C_2)$$

para todo $k \geq 0$. □

2.4. El Teorema de la Curva de Jordan en dominios de la esfera S^2

Definición 2.29. Sea X una superficie suave y $\gamma : [0,1] \to X$ una curva. Decimos que γ es *cerrada* si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Decimos que γ es *simple* si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si y solo si $t_1 = t_2$ o $\{t_1, t_2\} = \{0, 1\}$.

Denotemos al espacio de curvas cerradas simples sobre X definidas en el intervalo $I = [0,1]$ por $C_{\circlearrowleft}(I, X)$ y las definidas en $S^1 \subset \mathbb{C}$ por $C(S^1, X)$.
Afirmación: Existe una correspondencia natural entre $C_{\circlearrowleft}(I, X)$ y $C(S^1, X)$.
En efecto, sea $\gamma \in C_{\circlearrowleft}(I, X)$ y definamos $\overline{\gamma} \in C(S^1, X)$ como $\overline{\gamma}(z) := \gamma(t)$ donde $t \in I$ tal que $e^{2\pi i t} = z$.
La correspondencia es:

$$
\begin{array}{ccc}
\{C_{\circlearrowleft}(I, X)\} & \longleftrightarrow & \{C(S^1, X)\} \\
 & & \\
\gamma & \longmapsto & \overline{\gamma}(z) := \gamma(t) \\
\overline{\alpha}(t) := \alpha(e^{2\pi i t}) & \longleftarrow\!\shortmid & \alpha
\end{array}
$$

La aplicación $\overline{\gamma}$ está bien definida. Consideremos la aplicación $\varphi : I \to S^1$ definida como $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ entonces $\overline{\gamma}$ es continua, pues si C es una curva cerrada simple en X entonces $\overline{\gamma}^{-1}(C) = \varphi(\gamma^{-1}(C))$ es cerrado en S^1. Como $\overline{\gamma}$ es continua biyectiva , S^1 es compacto y X es Hausdorff entonces $\overline{\gamma}$ es un homeomorfismo entre S^1 y $tr\gamma$.

Proposición 2.30. ***(Teorema de la Curva de Jordan)****. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus tr\gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Prueba. Como $tr\,\gamma$ y $S^1 \subset \mathbb{C}$ son homeomorfos. Por el teorema 2.27 se sigue que

$$H^0_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus tr\gamma) \cong H^0_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) \cong \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}^2 \setminus tr\gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas. $\square$

Proposición 2.31. ***(Teorema de la Curva de Jordan en*** S^2*). Sea* $\gamma : [0,1] \to S^2$ *una curva cerrada simple. Entonces* $S^2 \setminus tr\gamma$ *tiene exactamente dos componentes conexas.*

Prueba. Como $tr\gamma$ y $S^1 \times \{0\} \subset S^2$ son homeomorfos. Por el teorema 2.28 se tiene que

$$H^0_{dR}(S^2 \setminus tr\gamma) \cong H^0_{dR}(S^2 \setminus S^1 \times \{0\}) \cong \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, $S^2 \setminus tr\gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas. $\square$

Proposición 2.32. ***(Teorema de la Curva de Jordan para dominios en*** $\mathbb{R}^2$*). Sea* U *un abierto conexo en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\gamma : [0,1] \to U$ *una curva cerrada simple. Entonces* $U \setminus tr\gamma$ *tiene exactamente dos componentes conexas.*

Prueba. Consideremos el abierto $V = \mathbb{R}^2 \setminus tr\gamma$ entonces $U \cup V = \mathbb{R}^2$ y $U \cap V = U \setminus tr\gamma$. Por Mayer-Vietoris tenemos la secuencia

$$0 \to \overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^2) \to \overline{H}^0_{dR}(U) \oplus \overline{H}^0_{dR}(V) \to \overline{H}^0_{dR}(U \cap V) \to H^1_{dR}(\mathbb{R}^2)$$

Como $\overline{H}^0_{dR}(\mathbb{R}^2) \cong \overline{H}^0_{dR}(U) \cong H^1_{dR}(\mathbb{R}^2) = 0$ y $\overline{H}^0_{dR}(V) \cong \mathbb{R}$, por el teorema 2.30. Luego $\overline{H}^0_{dR}(U \setminus tr\gamma) \cong \mathbb{R}$. Por lo tanto, $U \setminus tr\gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas. $\square$

Capítulo 3

Análisis Complejo

3.1. Funciones holomorfas

Sea U un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua. Decimos que f es *derivable* en $z_0 \in U$, si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

El valor de este límite es denotado por $f'(z_0)$. Decimos que f es *holomorfa* en U, si f es derivable en todo $z \in U$. El espacio de funciones holomorfas en U se denota por $\mathcal{O}(U)$. Además, si $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$ se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Definamos los operadores :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ , \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Es claro que $f \in \mathcal{O}(U)$ si y solo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$. Más aún, $f' \equiv \dfrac{\partial f}{\partial z}$ y la 1-forma diferencial $f dz$ es cerrada.

Teorema 3.1. *(**Casorati - Weierstrass**). Sea U un abierto en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Las siguientes afirmaciones respecto a una función $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ son equivalentes:*

(i) El punto z_0 es una singularidad esencial de f.

(ii) Para toda vecindad $V \subset U$ de z_0, la imágen $f(U \setminus \{z_0\})$ es densa en $\mathbb{C}$.

(*iii*) *Existe una secuencia* z_n *en* $U \setminus \{z_0\}$ *con* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ *tal que* $f(z_n)$ *no tiene límite en* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Prueba. Ver [Rem12]. □

Teorema 3.2. *(**Teorema Integral de Cauchy**). Sea* $f \in \mathcal{O}(U)$ *y* D *un disco tal que* $\overline{D} \subset U$. *Entonces para todo* $z_0 \in D$ *vale que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

Prueba. Ver [Ahl53]. □

Sea $D = D(p, r)$. Entonces para todo $z \in D$ se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p) - (z - p)} d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-p}{\zeta-p}\right)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} \cdot \left(1 + \frac{z-p}{\zeta-p} + \left(\frac{z-p}{\zeta-p}\right)^2 + \dots\right) d\zeta \text{ , pues } |\frac{z-p}{\zeta-p}| < 1 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^2}(z-p) d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^3}(z-p)^2 d\zeta + \dots \end{aligned}$$

Luego

$$f(z) = c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

con $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta$. Derivando $n-$veces y evaluando en $z = p$, se sigue que $c_n = \frac{f^n(p)}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$f^n(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta$$

Además, la integral $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta$, para $n \geq 0$ no depende del radio de D.

Definición 3.3. Sea la secuencia de funciones $f_n : X \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ con $k, l \in \mathbb{N}$.

1. Decimos que la secuencia f_n *converge uniformemente* si existe una función $f : X \to \mathbb{R}^l$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \,,\, x \in X \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2. Decimos que la secuencia f_n *converge uniformemente en compactos* de X si existe una función $f : X \to \mathbb{R}^l$ tal que para todo compacto $K \subset X$ la secuencia $f_{n|K}$ converge uniformemente, i.e., dados $K \subset X$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \,,\, x \in K \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Cabe mencionar que si la secuencia $f_n \in \mathcal{O}(U)$ converge uniformemente en compactos de U a $f : U \to \mathbb{C}$ entonces $f \in \mathcal{O}(U)$ y f_n' converge uniformemente en compactos de U a f'.

Definición 3.4. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones de $X \subset \mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^l$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *uniformemente acotado* si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $x \in X$.

Teorema 3.5. *(**Teorema de Montel**). Sea U un abierto en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de U. Entonces toda secuencia de funciones en $\mathcal{F}$ posee alguna subsecuencia que converge uniformemente en compactos de U.*

Prueba. Ver [Rem13]. □

Proposición 3.6. *(**Hurwitz**). Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y f_n una secuencia de funciones en $\mathcal{O}(U)$ que converge uniformemente en compactos de U a una función no constante $f \in \mathcal{O}(U)$. Entonces para todo $z \in U$ existe un índice $n_z \in \mathbb{N}$ y una secuencia z_n tal que $z_n \to z$ y $fv_n(z_n) = f(z)$, para $n \geq n_z$.*

Prueba. Ver [Rem13]. □

Corolario 3.7. *(**Hurwitz**). Sea U un domino en $\mathbb{C}$ y f_n una secuencia de funciones en $\mathcal{O}(U)$ que converge uniformemente en compactos de U a una función no constante $f \in \mathcal{O}(U)$. Si todos los f_n son inyectivas entonces f es inyectiva.*

Prueba. Fijemos $z_0 \in U$. La secuencia de funciones $f_n - f_n(z_0)$ no se anula en $U \setminus \{z_0\}$. Entonces la función no constante $f - f(z_0)$ no se anula en $U \setminus \{z_0\}$; es decir, $f(z) \neq f(z_0)$, para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$. Por lo tanto, f es inyectiva. □

3.2. Uniformización de Riemann en el plano

Lema 3.8. *(**Lema de Schwarz**). Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$. Más aún, si $|f'(0)| = 1$ o $|f(z) = |z|$ para algún $z \neq 0$, entonces $f(z) = cz$ con c constante y $|c| = 1$.*

Prueba. Ver [Ahl53]. □

Recordemos que si $f \in \mathcal{O}(U)$ inyectiva entonces $f : U \to f(U)$ es un biholomorfismo.

Proposición 3.9. ***(Koebe)***. *Sea U un dominio en $\mathbb{D}$, $U \neq \mathbb{D}$ con $0 \in U$. Supongamos que para cualquier $f : U \to \mathbb{D}$ holomorfa sin ceros en U, existe $g : U \to \mathbb{D}$ holomorfa tal que $g^2 = f$. Entonces existe $\kappa : U \to \mathbb{D}$ holomorfa inyectiva tal que $\kappa(0) = 0$ y $|z| < |\kappa(z)|$, para todo $z \in U \setminus \{0\}$.*

Prueba. Tomemos $a \in \mathbb{D} \setminus U$ y la función $z \to \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ sobre U. Luego, por hipótesis existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g^2(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, además, se sigue que g es inyectiva y $g(U) \subset \mathbb{D}$. Consideremos la función $h(z) := \dfrac{z-g(0)}{1-\overline{g(0)}z}$, para todo $z \in g(U)$. Luego, la función $h \circ g : U \to \mathbb{D}$ es holomorfa inyectiva, $(h \circ g)(0) = 0$ y $(h \circ g)(U) \subset \mathbb{D}$.
Consideremos las funciones $s(z) = z^2$ sobre $\mathbb{D}$ y $H := f^{-1} \circ s \circ h^{-1} : (h \circ g)(U) \to U$ que no es inyectiva, además, $H(0) = 0$ y $H = (h \circ g)^{-1}$ en $(h \circ g)(U)$. Luego, por el lema de Schwarz se tiene que $|H(\zeta)| < |\zeta|$, para todo $\zeta \in (h \circ g)(U) \setminus \{0\}$. Considerando $\zeta = (h \circ g)(z)$ tenemos que

$$|z| < |(h \circ g)(z)| \text{ , para todo } z \in U \setminus \{0\}$$

□

Sea $\overline{D} = \overline{D}(a, r)$ en $\mathbb{C}$ entonces la función $f : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \to \mathbb{D}$ definida como $f(z) := \dfrac{r}{z-a}$ es holomorfa inyectiva.

Teorema 3.10. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ con la siguiente propiedad : "dada cualquier $f \in \mathcal{O}(U)$ sin ceros en U, existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g^2 = f$ ". Si $U \neq \mathbb{C}$ entonces U es biholomorfo a $\mathbb{D}$.*

Prueba. Tomemos $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Como la función $z \to z-a$ no tiene ceros sobre U, por hipótesis, existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g^2(z) = z-a$, además, g es inyectiva y si $\zeta \in g(U)$ entonces $-\zeta \notin g(U)$; caso contrario, existen $z_1, z_2 \in U$ tal que $g(z_1) = -g(z_2) = w$, luego $z_1 = z_2$. Lo cual implica que $w = 0$. Absurdo, pues $0 \notin g(U)$.
Más aún, si $\zeta_0 \in g(U)$ y $r > 0$ tal que $D(\zeta_0, r) \subset g(U)$ entonces $D(-\zeta_0, r) \cap g(U) = \emptyset$; caso contrario, sea $w \in D(-\zeta_0, r) \cap g(U)$ entonces $-w \in D(\zeta_0, r)$. Absurdo, pues si $w \in g(U)$ entonces $-w \notin g(U)$. Luego, considerando $0 < r' < r$ se tiene que $g(U) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}(-\zeta_0, r')$. Así, la función $h : U \to \mathbb{D}$ definida como $h(z) = \dfrac{r'}{g(z)+\zeta_0}$ es holomorfa inyectiva.

Tomemos $z_0 \in U$, $0 < \varepsilon < \dfrac{r'}{2}$ y consideremos la función holomorfa inyectiva $\sigma : U \to \mathbb{D}$ definida como $\sigma(z) = \varepsilon(h(z) - h(z_0))$, es claro que $0 = \sigma(z_0) \in \sigma(U)$. Además, si la función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\sigma(U))$ no tiene ceros en $\sigma(U)$ entonces $\tilde{f} \circ \sigma \in \mathcal{O}(U)$ no tiene ceros en U. Luego, por hipótesis existe $\phi \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\phi^2 = \tilde{f} \circ \sigma$, lo cual implica que $(\phi \circ \sigma^{-1})^2 = \tilde{f}$.

Consideremos a la familia

$$\mathcal{F} = \{f : \sigma(U) \to \mathbb{D} \mid f \text{ es holomorfa inyectiva}\,,\ f(0) = 0\}$$

Por la proposición 3.9 se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Fijemos $z_0 \in \sigma(U) \setminus \{0\}$ y consideremos $\mu = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f(p)|$, entonces $0 < \mu \leq 1$.

Afirmación: Existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $|f(z_0)| = \mu$.

En efecto, sea la secuencia $f_n \subset \mathcal{F}$ tal que $|f_n(z_0)| \to \mu$. Como $|f_n(z)| < 1$, para todo $z \in \sigma(U)$, por el teorema de Montel existe una subsecuencia f_{n_k} que converge uniformemente en compactos de $\sigma(U)$ a $f \in \mathcal{O}(\sigma(U))$. Como $f(0) = 0$ y $|f(z_0)| = \mu$, entonces f es no constante y por Hurwitz se concluye que f es inyectiva. Además, $f(\sigma(U)) \subset \mathbb{D}$; pues si $f(\sigma(U)) \subset \overline{\mathbb{D}}$ entonces existiría $q \in \sigma(U)$ tal que $|f(q)| = 1$ y por el principio del máximo f sería constante. Luego, $f \in \mathcal{F}$.

Afirmación: $f : \sigma(U) \to \mathbb{D}$ es un biholomorfismo.

Basta mostrar que f es sobreyectiva. Supongamos lo contrario. Como $0 \in f(\sigma(U))$ y $f(\sigma(U)) \neq \mathbb{D}$ por la proposición 3.9 existe $\kappa \in \mathcal{O}(f(\sigma(U)))$ tal que $|\kappa(z)| > |z|$ para todo $z \in f(\sigma(U)) \setminus \{0\}$. Si consideramos la función $F = \kappa \circ f : \sigma(U) \to \mathbb{D}$ entonces $F \in \mathcal{F}$ y $|F(z_0)| = |\kappa(f(z_0))| > |f(z_0)| = \mu$. Absurdo. Por lo tanto, U y $\mathbb{D}$ son biholomorfos. $\square$

Definición 3.11. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $\gamma : [0, 1] \to U$ una curva cerrada con extremo en $a \in U$. Decimos que γ es *homotópicamente nula* en U si γ es homotópica a la curva constante a. Decimos que U es *simplemente conexo* si toda curva cerrada es homotópicamente nula en U.

Definición 3.12. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$. Llamamos *cadena* en U a cualquier suma formal

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$$

donde γ_i con $i \in \{1, \ldots n\}$ son curvas en U.

Decimos que las cadenas C^1 por partes Γ_1 y Γ_2 son *equivalentes* si

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

para toda función f continua sobre $tr\,\Gamma_1 \cup tr\,\Gamma_2$. Cuando las cadenas son equivalentes, denotaremos la suma de ellas de como un múltiplo de una de ellas. Con estas observaciones, una cadena en U se puede escribir, en general, como :

$$\Gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_n\gamma_n$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y γ_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ son curvas en U. Además, una cadena será llamada *ciclo* si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son curvas cerradas.

Definición 3.13. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y Γ un ciclo C^1 por partes.Decimos que Γ es *homológicamente nula* en U si $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ para todo $f \in \mathcal{O}(U)$. Decimos que U *homológicamente simplemente conexo* si todo ciclo C^1 por partes es homológicamente nula en U.

Lema 3.14. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $\gamma : [0,1] \to U$ una curva cerrada C^1 por partes. Si γ es homotópicamente nula en U entonces γ es homológicamente nula en U.*

Prueba. Sea $\gamma : [0,1] \to U$ una curva cerrada C^1 por partes con extremo en $a \in U$. Luego

$$\int_\gamma f dz = \int_a f dz = 0$$

para todo $f \in \mathcal{O}(U)$. □

Teorema 3.15. *(**Uniformización de Riemann en el plano**). Sea U un dominio en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada en U es exacta.

(ii) U es homológicamente simplemente conexo.

(iii) Toda $f \in \mathcal{O}(U)$ tiene primitiva.

(iv) Para toda $f \in \mathcal{O}(U)$ sin ceros, existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g^2 = f$.

(v) Si $U \neq \mathbb{C}$ entonces U es biholomorfo a $\mathbb{D}$.

(vi) U es homeomorfo a $\mathbb{C}$.

(vii) U es simplemente conexo.

Prueba. $(i) \implies (ii)$. Sea $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ cerrada entonces es exacta, pues $\omega = Re\,\omega + i\,Im\,\omega$ donde $Re\,\omega, Im\,\omega \in \Omega^1(U)$. Como $Re\,\omega$ y $Im\,\omega$ son cerradas, por hipótesis existen $Re\,\alpha, Im\,\alpha \in \Omega^0(U)$ tal que $Re\,\omega = d(Re\,\alpha)$ y $Im\,\omega = d(Im\,\alpha)$. Por lo tanto, existe $\alpha \in \Omega^0(U, \mathbb{C})$ tal que $\omega = d\alpha$.

Sea $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$ cualquier ciclo C^1 por partes en U y $f \in \mathcal{O}(U)$ entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\alpha = 0$$

Por lo tanto, U es homológicamente simplemente conexo.

$(ii) \implies (iii)$. Sea $\gamma : [0, 1] \to U$ una curva cerrada C^1 por partes y $f \in \mathcal{O}(U)$. Fijemos $z_0 \in U$ y definamos

$$\begin{array}{rrcl} F: & U & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta \end{array}$$

donde γ_z es una curva C^1 por partes en U que conecta z_0 con z.

Afirmación: F está bien definida.

En efecto. Sea $\tilde{\gamma}_z$ otra curva C^1 por partes en U que conecta z_0 con z. Entonces

$$\int_{\gamma_z * \tilde{\gamma}_z^{-1}} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta)d\zeta$$

Afirmación: $F'(z) = f(z)$.

En efecto, dado $h \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeño tal que $[z, z+h] \subset U$. Luego, $\gamma_z * [z, z+h]$ es una curva C^1 por partes que conecta z_0 con $(z+h) \in U$. Entonces

$$F(z+h) = \int_{\gamma_z * [z,z+h]} f(\zeta)d\zeta = F(z) + \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

Luego

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

Definamos

$$E := \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \left(f(\zeta) - f(z)\right) d\zeta \right|$$

Si tomamos $|\zeta - z| < \delta$ entonces $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Así $E < \dfrac{1}{|h|}|h|\varepsilon = \varepsilon$. Por lo tanto, $F'(z) = f(z)$.

$(iii) \implies (iv)$. Sea $f \in \mathcal{O}(U)$ sin ceros, entonces $\dfrac{f'}{f} \in \mathcal{O}(U)$. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{O}(U)$ tal que $F' = \dfrac{f'}{f}$. Entonces

$$\begin{aligned} F'f - f' &= 0 \\ (F'f - f')e^F &= 0 \\ (\frac{e^F}{f})' &= 0 \end{aligned}$$

Como U es conexo, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{e^F}{f} = c$, más aún, $c \neq 0$ pues $e^F \neq 0$. Entonces existe $d \in \mathbb{C}$ tal que $\dfrac{1}{c} = e^d$ y así tenemos que $f(z) = e^{F(z)+d}$ donde $(F + d) \in \mathcal{O}(U)$. Si denotamos por $\tilde{g}(z) = F(z) + d$ y definimos

$$g := exp(\frac{\tilde{g}}{2})$$

se tiene que $f = g^2$.

$(iv) \implies (v)$. Como $U \neq \mathbb{C}$. Por teorema 3.10 resulta que U y $\mathbb{D}$ son biholomorfos.

$(v) \implies (vi)$. Si $U = \mathbb{C}$, obvio. Si $U \neq \mathbb{C}$ entonces U es biholomorfo a $\mathbb{D}$. En particular, U es homeomorfo a $\mathbb{C}$.

$(vi) \implies (vii)$. Como U es homeomorfo a $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ es simplemente conexo. Se sigue que U es simplemente conexo.

$(vii) \implies (i)$. Consideremos la curva $\gamma : [0, 1] \to U \subset \mathbb{R}^2$ cerrada C^1 por partes y la 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$ cerrada. Entonces

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Fijemos $x_0 \in U$ y definamos la función $f : U \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

donde γ_x es una curva C^1 por partes en U que conecta x_0 con $x = (x_1, x_2)$.

Afirmación: $df = \omega$.

En efecto, $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ con $\{a_i : U \to \mathbb{R}\}_{i=1,2}$. Basta mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$.

Notemos que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}_{|t=0}(f(x + te_i) - f(x)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{[x,x+te_i]} \omega$$

Definamos la curva $s \mapsto x + se_i$ con $0 \leq s \leq t$, en U. Luego

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_0^t \omega(x+se_i)\cdot e_i ds = \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_0^t a_i(x+se_i) ds = a_i(x)$$

Por lo tanto, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 = \omega$. □

3.3. Funciones schlicht

Consideremos a la familia de funciones *schlicht*

$$\mathscr{S} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid f \text{ es inyectiva}, \ f(0) = 0 \text{ y } f'(0) = 1\}$$

Teorema 3.16. *Toda secuencia de funciones f_n de la familia $\mathscr{S}$ posee una subsecuencia que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ a una función f que pertenece a la misma familia.*

Prueba. Ver [For12]. □

Proposición 3.17. *Sea D un disco arbitrario en $\mathbb{C}$, $p \in D$ y las constantes $c \geq 0$, $m, M > 0$. Entonces toda secuencia de funciones f_n de la familia*

$$\mathcal{F}_{p,c,m,M} = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid f \textit{ es inyectiva}, \ |f(p)| \leq c \textit{ y } m \leq |f'(p)| \leq M\}$$

posee una subsecuencia que converge uniformemente en compactos de D a una función $f \in \mathcal{F}_{p,c,m,M}$.

Prueba. Desarrollemos la prueba en tres casos.
Caso 1. $D = \mathbb{D}$, $p = 0$
Sea f_n una secuencia en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ con f_n es inyectiva, $|f_n(0)| \leq c$ y $m \leq |f'(0)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la secuencia $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ dada por

$$g_n = \frac{f_n - f_n(0)}{f_n'(0)}$$

Luego, g_n es inyectiva, $g_n(0) = 0$ y $g_n'(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sean los subíndices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tales que

$$g_{n_k} \longrightarrow g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}), g \text{ es inyectiva}, g(0) = 0 \text{ y } g'(0) = 1$$

En tal sentido

$$f_{n_k}(0) \longrightarrow \alpha\,,\ |\alpha| \leq c$$

$$f'_{n_k}(0) \longrightarrow \beta\,,\; m \leq |\beta| \leq M$$

Luego

$$f_{n_k} = f'_{n_k}(0) g_{n_k} + f_{n_k} \longrightarrow f = \beta g + \alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

donde

$$f \text{ es inyectiva}\,,\; |f(0)| \leq c \text{ y } m \leq |f'(0)| \leq M.$$

Caso 2. $D = \mathbb{D}$

Sea f_n una secuencia en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ tal que f_n es inyectiva, $|f_n(p)| \leq c$ y $m \leq |f'_n(p)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la secuencia g_n en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ dada por

$$g_n(z) = f_n\left(\frac{z+p}{1+\overline{p}z}\right)$$

Entonces g_n es inyectiva, $|g_n(0)| \leq c$ y $m(1-|p|^2) \leq |g'_n(0)| \leq M(1-|p|^2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por el caso 1, g_n posee una subsecuencia g_{n_k} que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ a g, con g inyectiva, $|g(0)| \leq c$ y $m(1-|p|^2) \leq |g'(0)| \leq M(1-|p|^2)$.
Luego

$$f_{n_k}(z) = g_{n_k}\left(\frac{z-p}{1-\overline{p}z}\right) \longrightarrow f(z) = g\left(\frac{z-p}{1-\overline{p}z}\right) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

donde

$$f \text{ es inyectiva}, |f(p)| \leq c \text{ y } m \leq |f'(p)| \leq M.$$

Caso 3. $D = D(a,r)$

Sea f_n una secuencia en $\mathcal{O}(D)$ tal que f_n es inyectiva, $|f_n(p)| \leq c$ y $m \leq |f'_n(p)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Tomemos $q = \dfrac{p-a}{r}$, $|q| < 1$ y consideremos la secuencia g_n en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ dada por

$$g_n(z) = f_n(rz + a)$$

Luego, g_n es inyectiva, $|g_n(q)| \leq c$ y $mr \leq |g'_n(q)| \leq Mr$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por el caso 2, g_n posee una subsecuencia g_{n_k} que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ a g, con g inyectiva, $|g(q)| \leq c$ y $mr \leq |g'(q)| \leq Mr$.
Por consiguiente

$$f_{n_k}(z) = g_{n_k}\left(\frac{z-a}{r}\right) \longrightarrow f(z) = g\left(\frac{z-a}{r}\right) \in \mathcal{O}(D)$$

donde

$$f \text{ es inyectiva}, |f(p)| \leq c \text{ y } m \leq |f'(p)| \leq M$$

$\square$

Corolario 3.18. *Sea* $f \in \mathcal{F}_{p,c,m,M}$ *y un punto* $q \in D, q \neq p$ *entonces existen constantes* $c_q \geq 0$ *,* $m_q, M_q > 0$ *tales que*

$$|f(q)| \leq c_q \text{ y } m_q \leq |f'(q)| \leq M_q$$

Prueba. Usando la fórmula integral de Cauchy en el punto q se obtienen las constantes c_q y M_q. Por otro lado, supongamos que no existe la constante $m_q > 0$ y consideremos la secuencia $f_n \in \mathcal{F}_{p,c,m,M}$ tal que $|f_n'(q)| < \dfrac{1}{n}$. Como f_n posee una subsecuencia f_{n_k} que converge uniformemente en compactos de D a f. Se sigue que $f'(q) = 0$. Absurdo, pues f es inyectiva. □

Proposición 3.19. *Sea* U *un abierto conexo en* $\mathbb{C}$*,* $p \in U$ *y las constantes* $c \geq 0$*,* $m, M > 0$*. Entonces toda secuencia de funciones* f_n *de la familia*

$$\{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ es inyectiva}, |f(p)| \leq c \text{ y } m \leq |f'(p)| \leq M\}$$

posee un subsecuencia que converge uniformemente en compactos de U *a una función* f *que pertenece a la misma familia.*

Prueba. Dado $q \in U$, basta probar que dada una secuencia f_n de la familia o una subsecuencia de ella, es acotada en un disco en torno de q. Tomamos $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_\nu$ discos en U tales que $p \in D_0$, $q \in D_\nu$ y $p_j \in D_{j-1} \cap D_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, \nu\}$.

En D_0 se tiene la secuencia $f_{n|D_0} \in \mathcal{F}_{p,c,m,M}$, por la proposición 3.17, existe una subsecuencia $f_{n_k} \longrightarrow f \in \mathcal{O}(D_0)$ y por el corolario 3.18 existen constantes $c_1 \geq 0, m_1, M_1 > 0$ tales que $|f(p_1)| \leq c_1$ y $m_1 \leq |f'(p_1)| \leq M_1$.

En D_1 se tiene la secuencia $f_{n_k|D_1} \in \mathcal{F}_{p_1,c_1,m_1,M_1}$; por la proposición 3.17, existe una subsecuencia $f_{n_{k'}} \longrightarrow f \in \mathcal{O}(D_1)$ y por el corolario 3.18 existen constantes $c_2 \geq 0, m_2, M_2 > 0$ tales que $|f(p_2)| \leq c_2$ y $m_2 \leq |f'(p_2)| \leq M_2$.

Ejecutando este proceso $\nu - 1$ veces se obtienen las constantes $c_{\nu+1} \geq 0$, $m_{\nu+1}, M_{\nu+1} > 0$ tales que $|f(q)| \leq c_{\nu+1}$ y $m_{\nu+1} \leq |f'(q)| \leq M_{\nu+1}$. □

Corolario 3.20. *(**Koebe**). Sea U un abierto conexo en $\mathbb{C}$, $p \in G$. Entonces toda secuencia de funciones f_n de la familia*

$$\{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ es inyectiva}, f(p) = 0, f'(p) = 1\}$$

posee un subsecuencia que converge uniformemente en compactos de U a una función f que pertenece a la misma familia.

Prueba. Consideramos $c = 0$, $m = M = 1$, entonces $f'(p) = \alpha$ donde $|\alpha| = 1$. En este caso, la correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f \in \mathcal{O}(U) & | & f \text{ es inyectiva} \\ |f(p)| = 0 & , & |f'(p)| = 1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} f \in \mathcal{O}(U) & | & f \text{ es inyectiva} \\ f(p) = 0 & , & f'(p) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & \overline{f} = \dfrac{f}{\alpha} \\ \overline{f} = \alpha f & \longleftarrow & f \end{array}$$

lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes a un elemento de la misma familia, por Hurtwiz. $\square$

Capítulo 4

Superficies de Riemann

4.1. Superficies de Riemann

Sea X una variedad topológica bidimensional y $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ un atlas sobre X. Decimos que el atlas $\mathcal{A}$ sobre X es *complejo* si cualquier par de cartas (ϕ_α, U_α) y (ϕ_β, U_β) en $\mathcal{A}$ son *holomorficamente* compatibles; es decir, si satisfacen una de las siguientes condiciones:

1. $U_{\alpha\beta} = \emptyset$

2. Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ entonces

$$\phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

   es un biholomorfismo entre los abiertos $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ y $\phi_\beta(U_{\alpha\beta})$ en $\mathbb{C}$.

La colección $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ formada por las cartas que son holomorficamente compatibles con toda carta en $\mathcal{A}$ es un atlas complejo maximal sobre X. Llamado *estructura compleja* sobre X.

Definición 4.1. Una *superficie de Riemann* es un par (X, Σ) donde X es una variedad topológica bidimensional conexa y Σ es una estructura compleja.

En particular, una superficie de Riemann es suave. Decimos que una aplicación continua entre superficies de Riemann es *holomorfa* si su representación local es holomorfa. Decimos que una aplicación entre superficies de Riemann es un *biholomorfismo* si es un homeomorfismo tal que la aplicación de ida como la de vuelta son holomorfas. Decimos que dos superfices de Riemann son *biholomorfas* si existe un biholomorfismo entre ellas.

Ejemplo 4.2. [**La Esfera de Riemann** $\overline{\mathbb{C}}$]. Sea el espacio $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La topología en $\overline{\mathbb{C}}$ viene dada por los abiertos usuales en $\mathbb{C}$ o los conjuntos de la forma $U \cup \{\infty\}$ con $U \subset \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \setminus U$ es compacto. Consideremos las cartas $(\phi_1, \mathbb{C})$ donde $\phi_1 = Id$ y $(\phi_2, \mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$ definida como

$$\phi_2(z) = \begin{cases} 1/z & , \text{ si } z \neq \infty \\ 0 & , \text{ si } z = \infty \end{cases}$$

Veamos que las aplicaciones de cambio de coordenadas

$$\begin{array}{rccc} \phi_{12} = \phi_{21}: & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & 1/z \end{array}$$

son biholomorfismos. En consecuencia, la colección

$$\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{C}}} = \{(\phi_1, \mathbb{C}), (\phi_2, \mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$$

es un atlas complejo sobre $\overline{\mathbb{C}}$, además, los abiertos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ son conexos con intersección no vacía. Por lo tanto, $\overline{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.

Además, las superficies $\overline{\mathbb{C}}$ y S^2 son homeomorfas mediante la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} h: \overline{\mathbb{C}} & \to & S^2 \\ z & \mapsto & \begin{cases} \left(\dfrac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \dfrac{2Im(z)}{|z|^2+1)}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & , \text{ si } z \neq \infty \\ (0,0,1) & , \text{ si } z = \infty \end{cases} \end{array}$$

cuya inversa es:

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}: \quad S^2 & \to & \overline{\mathbb{C}} \\ (p_1, p_2, p_3) & \mapsto & \begin{cases} \left(\dfrac{p_1}{1-p_3} + i\dfrac{p_2}{1-p_3} \right) & , \text{ si } (p_1,p_2,p_3) \neq (0,0,1) \\ \infty & , \text{ si } (p_1,p_2,p_3) = (0,0,1) \end{cases} \end{array}$$

Más aún, son difeomorfos. Consideremos las proyecciones estereográficas respecto a los puntos $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$ de la siguiente manera:

$$\varphi_N(p_1,p_2,p_3) = \left(\frac{p_1}{1-p_3} + i\frac{p_2}{1-p_3} \right) \text{ y } \overline{\varphi}_S(p_1,p_2,p_3) = \left(\frac{p_1}{1+p_3} - i\frac{p_2}{1+p_3} \right)$$

Definamos la aplicación $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to S^2$ tal que identifica el abierto $\phi_1^{-1}(\mathbb{C})$ con $\varphi_N^{-1}(\mathbb{C})$ y el abierto $\phi_2^{-1}(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$ con $\overline{\varphi}_S^{-1}(\mathbb{C})$. La aplicación Φ está bien definida, pues

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_S^{-1}(z_2) = \varphi_N^{-1}(z_1) &\iff z_2 = \overline{\varphi}_S \circ \varphi_N^{-1}(z_1) \\ &\iff z_2 = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z_1) \\ &\iff \phi_2^{-1}(z_2) = \phi_1^{-1}(z_1) \end{aligned}$$

Además, Φ es suave, pues localmente se tiene que $\varphi_N \circ \Phi \circ \phi_1^{-1} = \overline{\varphi}_S \circ \Phi \circ \phi_2^{-1} : z \to z$ sobre $\mathbb{C}$ y $\varphi_N \circ \Phi \circ \phi_2^{-1} = \overline{\varphi}_S \circ \Phi \circ \phi_1^{-1} : z \to \dfrac{1}{z}$ sobre $\mathbb{C}^*$ son funciones suaves.

Ejemplo 4.3. El **Semiplano Hiperbólico** $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid im\, z > 0\}$ y el **Disco Unitario** $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ son biholomorfos mediante las aplicaciones :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longleftrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & w = \dfrac{z-i}{z+i} \\ w = i\dfrac{1+z}{1-z} & \leftarrow\!\shortmid & z \end{array}$$

Claramente $\overline{\mathbb{C}}$ no es biholomorfo a $\mathbb{C}$ ni a $\mathbb{D}$, pues topológicamente son diferentes por un criterio de compacidad. Además, $\mathbb{C}$ no es biholomorfo a $\mathbb{D}$; caso contrario existiría $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorfa, entera, acotada y no constante, contradiciendo el teorema de Liouville.

Proposición 4.4. ***(Comportamiento local de las aplicaciones holomorfas).*** *Sean X, Y superficies de Riemann y $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante, $p \in X$ e $q = f(p) \in Y$. Entonces existen un entero $k \geq 1$, cartas $\phi : U \to V$ en torno de p con $\phi(p) = 0$ y $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ en torno de q con $\psi(q) = 0$ tales que:*

(i) $f(U) \subset \tilde{U}$.

(ii) $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \to \tilde{V}$ *es de la forma* $z \mapsto z^k$.

Prueba. Ver [For12]. □

Corolario 4.5. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa no constante entonces f es una aplicación abierta.*

Prueba. Sea $p \in X$. Tomemos las cartas (ϕ, U) en torno de p y (ψ, V) en torno de $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$. Por la proposición 4.4 la representación local de f es una función abierta. Por lo tanto, f es una aplicación abierta. □

Corolario 4.6. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa inyectiva entonces $f : X \to f(X)$ es un biholomorfismo.*

Prueba. Como f es inyectiva y por la proposición 4.4 se tiene que $k = 1$ en la representación local de f. Por lo tanto, la aplicación $f^{-1} : f(X) \to X$ es holomorfa. □

Teorema 4.7. *Toda superficie suave orientable posee estructura de superficie de Riemann.*

Prueba. Ver [Rey89]. $\square$

Definición 4.8. Sea X una superficie de Riemann, $\omega \in \Omega^1(X)$ y (ϕ, U) una carta en torno de $p \in X$. Definimos el operador *conjugación* $*$ que asigna a $\omega = ad\phi_1 + bd\phi_2$ la 1-forma diferencial $*\omega - bd\phi_1 + ad\phi_2$. Es claro que $*\omega \in \Omega^1(X)$, pues fijando una orientación en X definamos $R_{\frac{\pi}{2}} \cdot v := iv$ para todo $v \in T_pX$. Por lo tanto, $*\omega_p = -\omega_p \cdot (R_{\frac{\pi}{2}}) \in \Lambda^1(T_pX)$.

Propiedades 4.9. Sean X una superficie de Riemann, $\omega, \theta \in \Omega^1(X)$, $f \in C^\infty(X)$ y (ϕ, U) una carta. Entonces :

1. $*(\omega + \theta) = *\omega + *\theta$
2. $*(f\omega) = f(*\omega)$.
3. $**\omega = *(*\omega) = -\omega$.
4. Si $\omega = ad\phi_1 + bd\phi_2$ y $\theta = \tilde{a}d\phi_1 + \tilde{b}d\phi_2$ entonces $\omega * \theta = \theta * \omega = (a\tilde{a} + b\tilde{b})d\phi_1 \wedge d\phi_2$
5. $\omega \wedge *\omega = (a^2 + b^2)\, d\phi_1 \wedge d\phi_2$
6. $*(df) = (*d)f$, donde $*d = -\dfrac{\partial}{\partial \phi_2}\, d\phi_1 + \dfrac{\partial}{\partial \phi_1}\, d\phi_2$.

4.2. Funciones armónicas

Definamos al siguiente operador

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Definición 4.10. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Decimos que u es *armónica* si $\Delta u \equiv 0$.

Notemos que si $f \in \mathcal{O}(U)$ entonces $Re\, f$ e $Im\, f$ son funciones armónicas. Además, la función $u : U \to \mathbb{R}$ es armónica si y solo si $\dfrac{\partial u}{\partial z} \in \mathcal{O}(U)$.

Proposición 4.11. *Sea U un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $Re\, f = u$.*

Prueba. Definamos la función $F : U \to \mathbb{C}$ como $F = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Se sigue que $F \in \mathcal{O}(U)$. Como U es simplemente conexo, por el teorema de uniformización, existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g' = F$. Entonces

$$\frac{\partial Re\, g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Im\, g}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Además, $\dfrac{\partial Im\, g}{\partial x} = -\dfrac{\partial Re\, g}{\partial y}$. Luego, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $Re\, g = u + c$. Consideremos la función $f = g - c$ entonces $Re\, f = u$ □

Definición 4.12. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(U)$. Decimos que $u = Re\, f$ y $v = Im\, f$ son *armónicas conjugadas.*

Proposición 4.13. *Sea U un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$. Entonces cualquier función armónica $u : U \to \mathbb{R}$ tiene armónica conjugada $v : U \to \mathbb{R}$.*

Prueba. Tomemos un disco $D = D(z_0, r) \subset U$ y definamos

$$v(z) := \int_\gamma *du\,,\ z \in D$$

donde γ es una curva C^1 por partes que conecta z_0 con $z \in D$. La 1-forma $*du$ es cerrada, pues u es armónica. Por lo tanto, v está bien definida ya que no depende del camino. Además, v es de clase C^1 y se cumple

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Por lo tanto, la función $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$.
Consideremos otro disco $\tilde{D}$ otro disco contenido en U tal que $D \cap \tilde{D} \neq \emptyset$ y sea $\tilde{f}$ una función holomorfa en $\tilde{D}$ construida como en el proceso anterior. Podemos elegir $\tilde{f}$ tal que $f = \tilde{f}$ en $D \cap \tilde{D}$ entonces $f \in \mathcal{O}(D \cup \tilde{D})$. Luego, $f \in \mathcal{O}(U)$ e $Im\, f$ es la armónica conjugada de u. □

Proposición 4.14. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(*i*) *u tiene armónica conjugada.*

(*ii*) *$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ tiene primitiva en U.*

(*iii*) *$\int_\gamma *du = 0$, para toda curva γ cerrada C^1 por partes en U.*

Prueba. $(i) \implies (ii)$. Sea $v : U \to \mathbb{R}$ la armónica conjugada de u y consideremos $f = u+iv \in \mathcal{O}(U)$ y usando las ecuaciones de Cauchy-Rieman se sigue que $f' = 2\dfrac{\partial u}{\partial z}$.
$(ii) \implies (i)$. Tomemos $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $f' = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ entonces $\dfrac{\partial Re\, g}{\partial x} + i\dfrac{\partial Im\, g}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Nuevamente, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue que $Im\, g$ es la armónica conjugada de u.
$(ii) \iff (iii)$. Notemos que $\int_\gamma \dfrac{\partial u}{\partial z} dz = \dfrac{i}{2}\int_\gamma *du$ donde γ es una curva cerrada C^1 por partes. Usando el teorema de uniformización de Riemann en el plano,se obtiene la equivalencia. □

Lema 4.15. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que u satisface*

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$$

para todo $z \in U$ y todo disco $\overline{D}(z, r) \subset U$. Entonces u satisface el principio del máximo: " Si existe $z_0 \in U$ tal que $u(z) \leq u(z_0)$ para todo $z \in U$ entonces u es constante".

Prueba. Supongamos que $z_0 \in U$ es el punto máximo de u. Notemos que para todo disco $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ se tiene

$$u(z_0 + re^{i\theta}) \leq u(z_0)$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0)d\theta$$

Si existiera $z = z_0 + re^{i\theta_0}$ tal que $u(z) < u(z_0)$ y $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta < u(z_0)$$

lo cual es absurdo. Luego , la función u tiene que ser constante en $\overline{D}(z_0, r)$, para todo $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Sea $A = \{z \in U \mid u(z) = u(z_0)\}$. A es cerrado en U y por lo descrito arriba A es abierto. Luego $A = U$. □

Definición 4.16. Sea U un dominio en $\mathbb{C}$. Decimos que la función $u : U \to \mathbb{R}$ *tiene la propiedad del valor medio* si para todo disco $\overline{D}(z, r) \subset U, r > 0$ se cumple

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$$

Proposición 4.17. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces u tiene la propiedad del valor medio.*

Prueba. Fijemos $z_0 \in U$ tal que $D(z_0, r+\varepsilon) \subset U$. Como u es armónica entonces existe una función holomorfa f en $(z_0, r+\varepsilon)$ tal que $Re\, f = u$. Tomemos el disco $D = D(z_0, r)$ y por el teorema integral de Cauchy se obtiene lo requerido. $\square$

Teorema 4.18. *(**Fórmula de Poisson**). Si $u : \overline{D} = \overline{D}_r \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{D}$ y armónica en D entonces*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

para todo $z \in D$.

Prueba. Ver [Ahl53]. $\square$

Corolario 4.19. *(**Extensión armónica**). Si $u_0 : \partial D_r \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces existe una única función $u : \overline{D}_r \to \mathbb{R}$ tal que u es armónica en D_r y $u \equiv u_0$ en ∂D_r.*

Prueba. Definamos a la función $u : D_r \to \mathbb{R}$ como $z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(re^{i\theta}) \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$ que es armónica en D_r y se extiende continuamente a ∂D_r como u_0. $\square$

Proposición 4.20. *Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ un función que tiene la propiedad del valor medio. Entonces u es armónica.*

Prueba. Como u satisface la propiedad de la media en U. Fijemos $z_0 \in U$ y un disco $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r) \subset U$. Por extensión armónica, existe v continua en $\overline{D}$, armónica en D tal que $v_{|\partial D} = u_{|\partial D}$. Definamos la función $w = u - v : \overline{D} \to \mathbb{R}$, entonces w es continua en $\overline{D}$, satisface la propiedad de la media en D y $w_{|\partial D} \equiv 0$. Si $w \neq 0$ entonces w tiene punto máximo o mínimo en D y por lema 4.15 se sigue que w es constante, es decir, $w = 0$. Luego, $u = v$ en D y u es de clase C^∞ y armónica en D. $\square$

4.2.1. Anillos

Consideremos los anillos del tipo $A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ con $0 < r < R$.

Proposición 4.21. *Dos anillos $A(r_1, R_1)$ y $A(r_2, R_2)$ son biholomorfos si y solo si* $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

Prueba. ($\Longleftarrow$). Tomemos $\lambda = \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1}$, entonces la función $f : A(r_1, R_1) \to A(r_2, R_2)$ definida como $z \mapsto \lambda z$ es un biholomorfismo.

($\Longrightarrow$). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $r_1 = r_2 = 1$. Por lo tanto, consideremos los anillos $A_1 = A(1, R_1)$, $A_2 = A(1, R_2)$ y al biholomorfismo $f : A_1 \to A_2$. Tomemos el círculo C centrado en el origen con radio $r = \sqrt{R_2}$ y al compacto $f^{-1}(C)$. Luego, para algún $\varepsilon > 0$ se tiene que $A(1, 1+\varepsilon) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$ y $f(A(1, 1+\varepsilon)) \cap C = \emptyset$. Considerando $V = f(A(1, 1+\varepsilon))$, se tiene que $V \subset A(1, r)$ o $V \subset A(r, R_2)$, para este último componemos f con la función $z \mapsto \frac{R_2}{z}$.

Consideremos el caso $V \subset A(1, r)$. Sea z_n una secuencia en A_1 tal que $1 < |z_n| < 1+\varepsilon$ y $|z_n| \to 1$ entonces $f(z_n) \in V$ y $\lim_{n\to\infty} f(z_n) \notin A_2$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = 1$. Analogamente, sea z_n una secuencia con iguales condiciones tal que $|z_n| \to R_1$ entonces $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = R_2$.

Tomemos $\alpha = \frac{logR_2}{logR_1}$ y definamos la función $u : A_1 \to \mathbb{R}$ como

$$u(z) = log|f(z)|^2 - \alpha\, log|z|^2$$

Como $\frac{\partial}{\partial z}(log|f|^2) = \frac{f'}{f}$, se sigue que $\frac{\partial u}{\partial z}(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z}$ es holomorfa en A_1.

En consecuencia u es armónica en A_1. Más aún, puede extenderse a $\overline{A_1}$ con $u \equiv 0$ en ∂A_1. Como una función armónica no constante no tiene máximo ni mínimo, se sigue que $u = 0$ en A_1. En particular

$$0 = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z}$$

Definamos la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A_1$ como $\gamma(t) = \sqrt{R_1}\, e^{it}$. Entonces

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\alpha}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Entonces α es un entero positivo. Por otro lado, la función $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^\alpha}, z \in A_1$, cumple que $g'(z) = 0$. Entonces $f(z) = cz^\alpha$ donde c es una constante distinta de cero. Como f es inyectiva, se sigue que $\alpha = 1$ y con ello $R_1 = R_2$. $\square$

Definición 4.22. Sea X una superficie de Riemann y $u : X \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Decimos que u es *armónica* si para todo $p \in X$ existe una carta holomorfa (ϕ, U) en torno de p de modo que $u \circ \phi^{-1}$ es armónica en $\phi(U) \subset \mathbb{C}$. Claramente, la definición no depende de la carta.

Definición 4.23. Sea X una superficie de Riemann y (ϕ, U) un carta en torno de $p \in M$. Entonces :

1. Sea $f \in C^2(X)$. Definamos el operador $\Delta = d * d$ en coordenadas locales como

$$\Delta f = d * d\, f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \phi_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \phi_2}\right) d\phi_1 \wedge d\phi_2$$

   Claramente, $\Delta f = 0$ si y solo si f es armónica.

2. Decimos que $\omega \in \Omega^1(X)$ de clase C^1 es *armónica* si $d\omega = 0$ y $d * \omega = 0$.

Proposición 4.24. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \Omega^1(X)$ de clase C^1. Entonces ω es armónica si y solo si para cualquier carta (ϕ, U) sobre X existe una función armónica f tal que $\omega = df$ en U.*

Prueba. ($\Longrightarrow$). Como ω es armónica entonces $d\omega = d * \omega = 0$. Se sigue que ω es localmente exacta, así pues, consideremos un abierto conexo U tal que $\omega = df$ con $f \in C^2(U)$. Notemos que $d * \omega = d * d\, f = 0$ en U. Por lo tanto, f es armónica en U. ($\Longleftarrow$). Como $\omega = df$ en U con f armónica entonces ω es cerrada, pues es localmente exacta. Además, $d * \omega = d * d\, f = 0$. Por lo tanto, ω es armónica. $\square$

4.3. El Problema de Dirichlet

Sea X una superficie de Riemann y U un abierto conexo en X con $\partial X \neq \emptyset$ y $f : \partial U \to \mathbb{R}$ una función continua. Una *solución del Problema de Dirichlet* en U es una función $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$, continua en $\overline{U}$, armónica en U y tal que $u_{|\partial U} \equiv f$. Para la solución del Problema de Dirichlet necesitamos la noción de funciones subarmónicas.

Definición 4.25. Sea X una superficie de Riemann y $u : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que u es *subarmónica* si para todo abierto conexo $U \subset X$ y toda función armónica $v : U \to \mathbb{R}$, la diferencia $v - u$, o es constante o no tiene máximo. Claramente, esta noción es local.

Ademas, si u_1, u_2 son funciones subarmónicas en X y $c > 0$ una constante, entonces $u_1 + c \cdot u_2$ y $\max(u_1, u_2)$ son subarmónicas.

Definición 4.26. Decimos que un dominio D en la superficie de Riemann X es un *disco conforme* si existe una carta holomorfa (ϕ, U) en X tal que $D = \phi^{-1}(D(a,r))$ donde $\overline{D}(a,r) \subset \phi(U)$.

Proposición 4.27. *Sean X una superficie de Riemann, $u : X \to \mathbb{R}$ una función continua y D un disco conforme en X. Entonces existe una única función continua $u_D : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

(*i*) $u_{D|X\setminus D} = u_{|X\setminus D}$.

(*ii*) *u_D es armónica en D.*

Prueba. Sea la carta holomorfa (ϕ, U) y el disco conforme $D = \phi(D_r)$ con $\overline{D}_r \subset \phi(U)$. Luego, $u \circ \phi^{-1}_{|\partial D_r} : \partial D_r \to \mathbb{R}$ es continua y existe v armónica en D_r tal que $v_{|\partial D_r} \equiv u \circ \phi^{-1}_{|\partial D_r}$. Basta definir la función

$$u_D = \begin{cases} \phi^{-1} \circ v & , \text{ en } D \\ u & , \text{ en } X \setminus D \end{cases}$$

□

Proposición 4.28. *Sea X una superficie de Riemann y $u : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(*i*) *u es subarmónica.*

(*ii*) *Para todo disco conforme $D \subset X$ se tiene que $u \leq u_D$.*

(*iii*) *Para todo disco conforme $D \subset X$ y $\phi : U \to \mathbb{C}$ carta local tal que $\phi(D) = D(z_0, R)$, entonces*

$$u \circ \phi^{-1}(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ \phi^{-1}(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

Prueba. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Notemos que $u - u_D \equiv 0$ en $X \backslash D$ y $u - u_D$ es subarmónica en D. Como no puede tener máximo, se sigue que $u - u_D \leq 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Obvio.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Sea v una función armónica en un abierto conexo $U \subset X$. Queremos probar que si $u - v$ tiene máximo en U entonces $u - v$ es constante en U. Sea $z_0 \in U$ tal que $u(z) \leq u(z_0)$ para todo $z \in U$. Fijemos un disco conforme (ϕ, D) tal que $\phi(D) = D(0, R)$ y $\phi(z_0) = 0$. Sean $u_1 = u \circ \phi^{-1}$ y $v_1 = v \circ \phi^{-1}$. Luego

$$u_1(0) - v_1(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_1 - v_1)(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

Por otro lado, si 0 es el punto máximo de $u_1 - v_1$ entonces

$$u_1(0) - v_1(0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_1 - v_1)(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

Si $u_1 - v_1$ no fuese constante en $D(0, R)$, por el lema 4.15 obtendríamos una contradicción para algún $0 < r \leq R$. $\square$

Definición 4.29. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{F} \subset C^0(X, \mathbb{R})$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una *Familia de Perron* de funciones, si:

1. Todas las funciones de $\mathcal{F}$ son subarmónicas.
2. Si $u, v \in \mathcal{F}$ entonces $\max(u, v) \in \mathcal{F}$ y existe $w \in \mathcal{F}$ tal que $w \leq \max(u, v)$.
3. Si $u \in \mathcal{F}$ y D un disco conforme en X entonces $u_D \in \mathcal{F}$.

Teorema 4.30. ***(Teorema de Perron)****. Sean $\mathcal{F}$ una familia de Perron de funciones en la superficie de Riemann X. Definamos la función $u : X \to \mathbb{R}$ como $u(p) = \sup\{v(p) \mid v \in \mathcal{F}\}$. Si $u(p) < +\infty$, para todo $p \in X$ entonces u es armónica.*

Prueba. Primero probaremos lo siguiente :
Afirmación: Dado un disco conforme D con centro en $p \in X$, existe una secuencia u_n en $\mathcal{F}$ tal que $u(p) = \lim_{n \to \infty} u_n(p)$ y u_n es armónica en D , para todo $n \geq 1$.
En efecto, sea $p \in D$ y elijamos una secuencia v_n en $\mathcal{F}$ tal que $\lim_{n \to \infty} v_n(p) = u(p)$. La secuencia u_n será construida por inducción en n. Sea $u_1 = v_{1,D}$ y supongamos que tenemos $u_1, \ldots, u_n$ tal que $u_1 \leq \ldots \leq u_n$ en $\overline{D}$ y $u_1, \ldots, u_n$ son armónicas en D. Definamos $w_{n+1} = \max\{u_1, \ldots, u_n, v_{n+1}\}$ y $u_{n+1} = w_{n+1,D}$ y notemos que :

1. $u_n \leq w_{n+1}$ entonces $u_n \leq w_{n+1} \leq w_{n+1,D} = u_{n+1}$; más aún, u_{n+1} es armónica en D.

2. $u(p) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(p) \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n(p) \leq \sup\{w(p) \mid w \in \mathcal{F}\} = u(p)$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(p) = u(p)$.

Luego, definamos la función $v^D : D \to \mathbb{R}$ como $v^D(q) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(q)$. Entonces $v^D(q) \leq u(q)$, para todo $q \in X$.

Sean $p \in X$, D un disco conforme con centro en p y u_n una secuencia en $\mathcal{F}$ tal que u_n es armónica en D y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(p) = u(p) < +\infty$. Para ver que u es armónica en D vamos a probar que $u = v^D$ en D. Como sabemos, por Harnack v^D es armónica en D, además, $v^D(q) \leq u(q)$ para todo $q \in D$.

Afirmación: Si $v^D \neq u$ entonces existe una función $w : X \to \mathbb{R}$ tal que w es armónica en D, $v^D \leq w \leq u$ en D, $w(p) = v^D(p)$ y $w(q) > v^D(q)$ para algún $q \in D$.

En efecto, supongamos que existe $q \in \overline{D}$ tal que $v^D(q) < u(q)$. En este caso, existe una función w_q en $\mathcal{F}$ tal que $v^D(q) < w_q(q) \leq u(q)$. Consideremos la secuencia $w_n = \max(u_n, w_q)_D \in \mathcal{F}$, la cual no es decreciente y satisface $w_n(p) = v^D(p) = u(p)$, $w_n(q) > v(q)$ y w_n es armónica en D. Basta tomar $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

Se sigue que $v^D = u$ en D. Caso contrario la función $w - v^D$ seria armónica y no negativa en D, teniendo un punto mínimo en p y $w \neq v^D$. Absurdo. $\square$

Sean U un abierto conexo en la superficie de Riemann X tal que $\partial U \neq \emptyset$ y $f : \partial U \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Consideremos la familia de funciones

$$\mathcal{F} := \{u : \overline{U} \to \mathbb{R} \,|\, u \,\text{es continua en}\, \overline{U}\,,\, \text{subarmónica en}\, U\,,\, u \leq f \,\text{en}\, \partial U \,\text{y}\, u \leq \sup_{\partial U}(f)\}$$

y definamos la familia

$$\mathcal{F}_f := \{u_{|U} \mid u \in \mathcal{F}\}$$

Proposición 4.31. *La familia $\mathcal{F}_f$ es una familia de Perron y la función $u_f(p) := \sup\{u(p) \,|\, u \in \mathcal{F}\}$ definida en $\overline{U}$ es armónica en U.*

Prueba. Se tiene que $\mathcal{F}_f \neq \emptyset$, pues la función $\inf_{\partial U}(f) \in \mathcal{F}_f$. Es fácil ver que si $u, v \in \mathcal{F}_f$ entonces $\max(u, v) \in \mathcal{F}_f$. Si $D \subset U$ es un disco conforme y $u \in \mathcal{F}_f$ entonces $u_{|U \setminus D} \equiv u_{D|U \setminus D}$, lo cual implica que u_D es continua en $\overline{U}$, subarmónica en

U y $u_D \leq f$ en ∂U. Falta verificar que $u_D \leq \sup_{\partial U}(f)$, en efecto

$$\begin{array}{lll} \text{si } p \in U \setminus D & \text{entonces} & u_D \leq \sup_{\partial U}(f) \\ \text{si } p \in D & \text{entonces} & u(p) \leq \sup_{\partial U}(u_D) = \sup_{\partial U}(u) \leq \sup_{\partial U}(f) \end{array}$$

Por otro lado, $u_f(p) \leq \sup_{\partial U}(f) < +\infty$ y por el teorema de Perron, se sigue que u_f es armónica en U. □

Definición 4.32. Sea U un abierto conexo en la superficie de Riemann X con $\partial U \neq \emptyset$. Decimos que $p \in \partial U$ es *regular* para el Problema de Dirichlet si para toda función continua y acotada $f : \partial U \to \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{\substack{q \to p \\ q \in U}} u_f(q) = f(p)$. Decimos que ∂U es *regular* si todos los puntos de ∂U son regulares. En este caso, para toda función continua y acotada $f : \partial U \to \mathbb{R}$, el Problema de Dirichlet con condición de contorno f tiene solución.

Definición 4.33. Sea U un abierto en la superficie de Riemann X con $\partial U \neq \emptyset$. Decimos que $p \in \partial U$ admite una *barrera* si existen una vecindad V de $p \in X$ y una función continua $v : \overline{V \cap U} \to \mathbb{R}$, subarmónica en $U \cap V$ tal que $v(p) = 0$ y $v < 0$ en $\overline{U \cap V} \setminus \{p\}$.

Lema 4.34. *Dado $m \leq c \in \mathbb{R}$, existe una función continua $v : \overline{U} \to \mathbb{R}$ y una vecindad $V \subset V_1$ de p tal que:*

(*i*) *v es subarmónica en U.*

(*ii*) *$v(p) = c$, $v \leq c$ en $\overline{U} \cap V$ y $v \equiv m$ en $\overline{U} \setminus V$. En particular, $m \leq v \leq c$ en $\overline{U}$.*

Prueba. Sea $\alpha : \overline{V_2 \cap U} \to \mathbb{R}$ una barrera en p. Si $V = V_1 \cap V_2$ entonces $\alpha_1 := \alpha_{|\overline{V \cap U}}$ es una barrera en p. Reduciendo V (si es necesario), podemos suponer que $\overline{V} \subset V_1$ y que $\overline{V}$ es compacto. Como $\alpha_1 < 0$ en el compacto $\overline{U} \cap \partial V$ entonces $a := \inf\{|\alpha_1(q)| \mid q \in \overline{U} \cap \partial V\} > 0$. Considerando $d > m - c \leq 0$ y $\beta = d \cdot \dfrac{\alpha_1}{a}$, tenemos que:

(*i*) β es una barrera en p.

(*ii*) $\beta < m - c \leq 0$ en $\overline{U} \cap \partial V$.

Sea $v = \max(\beta + c, m)$ en $\overline{U} \cap V$ y $v \equiv m$ en $\overline{U} \setminus V$. Como $\beta + c < m$ en $\overline{U} \cap V$ se sigue que $v \equiv m$ en $\overline{U} \cap \partial V$. Luego, v es continua en $\overline{U}$ y subarmónica en U. Por otro lado, $v_{|\overline{U} \cap V} \equiv m$, $v = \max(\beta + c, m) \leq \max(c, m) = c$ en $\overline{U} \cap V$ y $v(p) = \max(\beta(p) + c, m) = \max(c, m) = c$. □

Proposición 4.35. *Si un punto $p \in \partial U$ admite una barrera en p entonces es regular. Más aún, si $\overline{U}$ es compacto entonces:*

(i) ∂U es regular si y solamente si todos los puntos de ∂U admiten barrera.

(ii) Si ∂U es regular y $f : \partial U \to \mathbb{R}$ continua y acotada entonces u_f es la única solución del Problema de Dirichlet con condición de contorno f.

Prueba. Supongamos que existe una barrera en $p \in \partial U$. Sea $f : \partial U \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Recordemos que $u_f(q) = \sup\{u(q) \mid u \in \mathcal{F}_f\}$ donde

$$\mathcal{F}_f := \{u_{|U} \mid u \,\text{es continua en}\, \overline{U}\,,\, \text{subarmónica en}\, U\,,\; u \leq f \,\text{en}\, \partial U \,\text{y}\, u \leq \sup_{\partial U}(f)\}$$

Queremos probar que $\lim\limits_{\substack{q \to p \\ q \in U}} u_f(q) = f(p)$

Dado $\varepsilon > 0$. Como f es continua en p, existe una vecindad V de p en X tal que $f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$ para todo $x \in V \cap \partial U$. Como f es acotada en ∂U, supongamos que $k = \inf_{\partial U}(f) \leq f \leq \sup_{\partial U}(f) = K$.

Usando el lema 4.34 con $m = k - \varepsilon$ y $c = f(p) - \varepsilon$, obtenemos una función continua $v : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua, subarmónica en U tal que $v(p) = f(p) - \varepsilon$, $v \leq f(p) - \varepsilon$ en $\overline{U} \cap V$ y $v \equiv k - \varepsilon$ en $\overline{U} \setminus V$.

Afirmación: $v_{|U} \in \mathcal{F}_f$.

En efecto, v es continua en $\overline{U}$ y subarmónica en U. Basta verificar que $v \leq f$ en ∂U y que $v \leq K$ en $\overline{U}$.

Se verifica que $v \leq f$ en ∂U, pues

$$\begin{aligned} &\text{si}\, q \in \partial U \cap V \quad \text{entonces} \quad v(q) \leq f(p) - \varepsilon < f(q) \\ &\text{si}\, q \in \partial U \setminus V \quad \text{entonces} \quad v(q) = k - \varepsilon < f(q) \end{aligned}$$

y que $v \leq K$ en $\overline{U}$, pues

$$\begin{aligned} &\text{si}\, q \in \overline{U} \cap V \quad \text{entonces} \quad v(q) \leq f(p) - \varepsilon < K \\ &\text{si}\, q \in \overline{U} \setminus V \quad \text{entonces} \quad v(q) = k - \varepsilon < K \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_{|U} \in \mathcal{F}_f$. Esto último implica que $u_f(q) \geq v(q)$ en U. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$f(p) - \varepsilon = v(p) = \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} v(q) \leq \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \inf u_f(q) \implies f(p) \leq \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \inf u_f(q)$$

Aplicando el lema 4.34 con $m = -K$ y $c = -f(p)$, obtenemos una función continua $w : \overline{U} \to \mathbb{R}$, subarmónica en U tal que $w(p) = -f(p) \quad , \quad w \leq -f(p)$ en $\overline{U} \cap V$ y $w \equiv -K$ en $\overline{U} \setminus V$.

Afirmación: $u_f + w \leq \varepsilon$ en $U \cap V$.

En efecto, basta verificar que para toda $u \in \mathcal{F}_f$ se tiene que $u + w \leq \varepsilon$ en $\overline{U} \cap V$. Primero verifiquemos que $u + w \leq \varepsilon$ en $\partial(U \cap V) = (\partial U \cap V) \cup (U \cap \partial V)$.

$$q \in \partial U \cap V \implies \begin{array}{c} u(q) \leq f(q) \\ w(q) \leq -f(p) \end{array} \implies u(q) + w(q) \leq f(q) - f(p) < \varepsilon$$

$$q \in U \cap \partial V \implies \begin{array}{c} u(q) \leq K \\ w(q) = -K \end{array} \implies u(q) + w(q) \leq K - K = 0 < \varepsilon$$

Por lo tanto, $u + w < \varepsilon$ en $\partial(U \cap V)$. Como $u + w$ es subarmónica en $U \cap V$ se sigue que $u + w < \varepsilon$ en $U \cap V$, caso contrario, $u + w$ tendría un punto máximo en $U \cap V$. En consecuencia, $u_f + w \leq \varepsilon$ en $U \cap V$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \sup u_f(q) \leq \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} (\varepsilon - w(q)) = \varepsilon + f(p) \implies \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \sup u_f(q) \leq f(p)$$

Finalmente,

$$f(p) \leq \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \inf u_f(q) \leq \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} \sup u_f(q) \leq f(p) \implies \lim_{\substack{q \to p \\ q \in U}} u_f(q) = f(p)$$

Prueba de (i). Basta probar la condición suficiente. Sea $p \in \partial U$ y (ϕ, U) una carta en torno de p. Fijemos un disco conforme D en U tal que $\phi(D) = \mathbb{D}$. Definamos la función $f : \partial U \to \mathbb{R}$ como

$$f(q) = \begin{cases} -\min(|\phi(q)|, 1/2) & , \text{ si } q \in \partial U \cap D \\ -1/2 & , \text{ si } q \in \partial U \setminus D \end{cases}$$

Se sigue que f es continua y acotada en ∂U.

Sea $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una solución para el problema de Dirichlet con condición de contorno f.

Afirmación: h es una barrera en p.

En efecto, h es continua en $\overline{U}$, armónica en U y $h_{|\partial U} \equiv f$. Además, $h(p) = 0$,$h(q) = f(q) < 0$, si $q \in \partial U \setminus \{p\}$. Falta mostrar que $h(q) < 0$, si $q \in \overline{U} \setminus \{p\}$. Como p no es punto aislado de ∂U, pues $\overline{U}$ es compacto. Se sigue que f es no constante y en consecuencia, h es no constante.

Basta mostrar lo siguiente: Sea $q_0 \in \overline{U}$ tal que $h(q) \leq h(q_0)$ para todo $q \in \overline{U}$ entonces $h(q_0) = 0$ y $q_0 = p$.

Por un lado, si $h(q_0) < 0$ entonces $h(p) < 0$. Absurdo. Si $h(q_0) > 0$ entonces $q_0 \in U$ y h tendría máximo en U, luego, h es constante. Absurdo. Por lo tanto, $h(q_0) = 0$. Por otro lado, si $q_0 \neq p$ entonces $q_0 \in U$ y h tendría máximo en U. Absurdo. Por lo tanto, $q_0 = p$.

Prueba de (ii): Sea $f : \partial U \to \mathbb{R}$ continua acotada y $u_f, v : \overline{U} \to \mathbb{R}$ dos soluciones del problema de Dirichlet con condición de contorno f. Definamos $w := u_f - v$, continua en $\overline{U}$, armónica en U y $w_{|\partial U} \equiv 0$. Se sigue que $w \equiv 0$, caso contrario w tendría máximo o mínimo en U. Absurdo. Por lo tanto, $u_f \equiv v$. $\square$

Para el enunciado recíproco de la proposición 4.35 no es necesario que $\overline{U}$ sea compacto. Por otro lado, el problema que un punto tenga barrera es local, así pues, veamos el siguiente criterio para que un punto admita barrera.

Proposición 4.36. *(**Condición del disco externo**). Sea U un abierto en $\mathbb{C}$. Si $a \in \partial U$ pertenece a un disco cerrado $\overline{D}(m; r)$ contenido en el complemento de U entonces U admite una barrera en a.*

Prueba. Sea $c = \dfrac{a+m}{2}$ entonces $u(z) = log(\dfrac{r}{2}) - log|z - c|$ define una barrera en a. Por lo tanto, a es un punto regular. $\square$

Capítulo 5

Caracterización de Superficies Planas

Una superficie suave X es *topológicamente plana* (de aquí en adelante, plana) si es homeomorfa a un abierto de la esfera S^2.
En esta sección nos ocuparemos en probar el siguiente teorema:

Teorema 5.1. ***(Caracterización holomorfa de superficies planas)****. Sea X una superficie de Riemann. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *X es plana.*

(ii) *X satisface el teorema de la curva de Jordan, i. e., el complemento de cualquier curva cerrada simple sobre X tiene exactamente dos componentes conexas.*

(iii) *Toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es necesariamente exacta.*

(iv) *X es biholomorfa a un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Prueba. Ejecutaremos la demostración conduciendonos por la siguiente secuencia:

$$\begin{tikzcd}
& (i) \arrow[dl] \arrow[d] & \\
(ii) \arrow[r] & (iii) \arrow[r] & (iv) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$\square$

5.1. De la condición topológica al Teorema de la Curva de Jordan

Proposición 5.2. *Sea X una superficie topológica que satisface el Teorema de la Curva de Jordan. Entonces cualquier superficie Y homeomorfa a X cumple el teorema de la curva de Jordan.*

Prueba. Sea $\gamma : [0,1] \to X$ una curva cerrada simple. Luego $X \setminus tr\gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas, pues X cumple el Teorema de la Curva de Jordan. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces $h \circ \gamma : [0,1] \to Y$ es una curva cerrada simple. Más aún, $Y \setminus tr(h \circ \gamma)$ tiene exactamente dos componentes conexas, pues $X \setminus tr(\gamma)$ y $Y \setminus tr(h \circ \gamma)$ son homeomorfos. $\square$

Teorema 5.3. *Si X es una superficie plana entonces X satisface el Teorema de la Curva de Jordan.*

Prueba. Por la proposiciones 2.30, 2.31 y 2.32 sabemos que la esfera S^2 y cualquier abierto conexo U en $\mathbb{R}^2$ satisface el Teorema de la Curva de Jordan. Como X es homemorfo a un abierto de S^2 entonces X satisface el Teorema de la Curva de Jordan. $\square$

5.2. De la condición topológica a la propiedad cohomológica

Proposición 5.4. *Si X es la esfera S^2 o un dominio en $\mathbb{R}^2$ entonces toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X necesariamente es exacta.*

Prueba. Si $X = S^2$ entonces el soporte de toda 1-forma diferencial es compacto y $H^1_{dR}(X) = 0$. Por lo tanto, toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es exacta. Si X es un abierto conexo U de $\mathbb{R}^2$ y ω una 1-forma diferencial C^∞ cerrada con soporte compacta en U.
Definamos la 1-forma diferencial $\tilde{\omega}$ en $\mathbb{R}^2$ como

$$\tilde{\omega} := \begin{cases} \omega & , \text{ en } \; U \\ 0 & , \text{ en } \; \mathbb{R}^2 \setminus U \end{cases}$$

la cual es cerrada y de clase C^∞, pues $\tilde{\omega} = \omega$ es C^∞ en U y $\tilde{\omega} = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus supp(\omega)$. Como $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ entonces existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tilde{\omega} = df$. Luego $\omega = \tilde{\omega}_{|U} = (df)_{|U} = d(f_{|U})$. Por lo tanto, ω es exacta. □

Teorema 5.5. *Si X es una superficie plana entonces toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X necesariamente es exacta.*

Prueba. Por un lado, si X es homeomorfo a S^2 entonces el soporte de toda 1-forma diferencial es compacto y por la invariancia topológica de la cohomológia de deRham se sigue que toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es exacta. Por otro lado, sea h el homeomorfismo del abierto U en $\mathbb{R}^2$ sobre X. Como h y h^{-1} son continuas propias, existen $f : U \to X$ y $g : X \to U$ aplicaciones C^∞ propias tales que $f \sim h$ y $g \sim h^{-1}$; así, $g \circ f \sim Id_U$ y $f \circ g \sim Id_X$. Si ω es una 1- forma diferencial C^∞ cerrada con soporte compacta en X entonces $f^*\omega$ es 1-forma diferencial C^∞ cerrada con soporte compacto en U; además, existe $\alpha \in C^\infty(U)$ tal que $f^*\omega = d\alpha$. Luego, $(f \circ g)^*\omega = g^*(d\alpha) = d(\alpha \circ g)$ y tomando su clase de cohomología $[(f \circ g)^*\omega] = 0$. Por lo tanto, ω es exacta, pues por invariancia homotópica se sigue que $[\omega] = 0$. □

5.3. Del Teorema de la Curva de Jordan a la propiedad cohomológica

Definición 5.6. Sea X una superficie suave y $\gamma : [0,1] \to X$ una curva.

1. Sea $t \in (0,1)$, decimos que γ es *suave en* t si para alguna vecindad de t, γ es una aplicación suave con $\gamma'(t) \neq 0$.

2. Decimos que γ es *suave en* 0 si γ se extiende a una curva sobre X que está definida en el intervalo $[-\varepsilon, 1]$, para algún $\varepsilon > 0$. Análogamente, decimos que γ es *suave en* 1 si γ se extiende a una curva sobre X que está definida en el intervalo $[0, 1+\varepsilon]$, para algún $\varepsilon > 0$.

3. Si γ una curva cerrada. Decimos que γ es *suave en* 0 (o en 1) si para alguna vecindad de $1 = e^{2\pi i 0} = e^{2\pi i 1} \in S^1 \subset \mathbb{C}$, la curva asociada $\overline{\gamma} : S^1 \to X$ es suave con $\overline{\gamma}'(1) \neq 0$.

4. Decimos que γ es una curva cerrada suave si es una curva suave en t, para todo $t \in (0,1)$ y es suave en 0.

Proposición 5.7. *Sea X una superficie suave orientable que satisface el teorema de la curva de Jordan. Entonces*

$$\int_\gamma \omega = 0$$

para toda 1-forma diferencial ω de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X y toda curva cerrada simple suave γ en X.

Prueba. Sea $\gamma : [0,1] \to X$ una curva cerrada simple suave. Como $X \setminus tr\gamma$ tiene dos componentes conexas X_1 y X_2 con $\partial X_1 = \partial X_2 = \gamma$, orientemos la curva γ positivamente con respecto a X_1. Sea ω una 1-forma diferencial C^∞ cerrada con soporte compacto en X, por Stokes se sigue que

$$\int_\gamma \omega = \int_{X_1} d\omega = 0$$

□

Sea $\gamma : [0,1] \to X$ una curva cerrada simple suave por partes y sea $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ una partición del intervalo $[0,1]$ tal que $\gamma_{|[t_{j-1}, t_j]}$ es suave para cada

$j \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos a la constante $c > 0$ tal que $2c < \min\limits_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1})$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, consideremos las curvas $\gamma_j = \gamma_{|(t_j - c, t_j + c)}$ y los intervalos cerrados $[t_j - (c - \varepsilon), t_j - \varepsilon]$ y $[t_j + \varepsilon, t_j + (c - \varepsilon)]$, para algún $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño). En particular, las curvas $\gamma_j : (t_j - c, t_j + c) \to X$ son aplicaciones continuas y por los lemas 2.16 y 2.17 existe una aplicación suave $\Gamma_j : (t_j - c, t_j + c) \to X$ homotópica a γ_j tal que $\Gamma_j = \gamma_j$ en $[t_j - (c - \varepsilon), t_j - \varepsilon]$ y $[t_j + \varepsilon, t_j + (c - \varepsilon)]$. Definamos la curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to X$ como

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t) & , \text{ si } \quad t \in [0,1] \setminus \cup_{j=1}^{n-1} [t_j - (c-\varepsilon), t_j + (c - \varepsilon)] \\ \Gamma_j(t) & , \text{ si } \quad t \in [t_j - (c - \varepsilon), t_j + (c - \varepsilon)] \text{, para algún } j \in \{1, \ldots, n-1\} \end{cases}$$

Es fácil ver que $\tilde{\gamma}$ es una curva cerrada simple suave y homotópica a γ. Además, usando la proposición 2.13 podemos extender la proposición 5.7 a curvas cerradas simples suaves por partes.

Lema 5.8. *Sea X una superficie suave. Si p y q son dos puntos distintos en X entonces existe una curva simple suave sobre X que conecta p con q.*

Prueba. Tomemos la colección de cartas $\{(\varphi_n, U_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre X tal que $\{U_n\}$ es una cobertura localmente finita y $\varphi_n(U_n) = D_3$. Como X es conexo por caminos entonces existe una curva $\alpha : [0, 1] \to X$ que conecta p con q. Además, al ser $tr\,\alpha$ un compacto entonces la cobertura abierta

$$tr\,\alpha \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$$

admite un número de Lebesgue $\delta > 0$, i.e., cada subconjunto $C \subset tr\,\gamma$ con $\operatorname{diam}(C) < \delta$ está contenido en U_i, para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Por otro lado, al ser $\alpha : [0, 1] \to X$ uniformemente continua, existe $\tau > 0$ tal que para cualquier $t\,,\, t' \in [0, 1]$ con $|t - t'| < \tau$ se tiene que $d(\alpha(t), \alpha(t')) < \dfrac{\delta}{2}$.

Luego, tomemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande ($\dfrac{1}{m} < \tau$) y dividamos $[0, 1]$ en partes iguales $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1\}$. Se sigue que $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset D_{\frac{\delta}{2}}(\alpha(t_j))$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\operatorname{diam}(\alpha([t_{j-1}, t_j])) < \delta$ entonces $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{i_j}$, donde $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Definamos las curvas $\alpha_j : [t_{j-1}, t_j] \to U_{i_j}$ como

$$t \;\mapsto\; \varphi_{i_j}^{-1}\left((1 - t)\, \varphi_{i_j}(\alpha(t_{j-1})) + t\, \varphi_{i_j}(\alpha(t_j))\right)$$

Finalmente, definamos la curva $\gamma : [0,1] \to X$ como $\gamma(t) = \alpha_j(t)$, si $t \in [t_{j-1}, t_j]$, para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$. Claramente, γ es una curva simple suave por partes y por lo escrito líneas arriba, se sigue que existe una curva $\Gamma : [0,1] \to X$ simple suave homotópica a γ e igual a ella en cerrados en torno de t_j, para $j \in \{1, \ldots, m\}$. □

Sea X una superficie suave orientable y $\gamma : [0,1] \to X$ una curva suave por partes. Decimos que el punto $p = \gamma(t)$ es un *punto múltiple* si existe $s \in [0,1]$ tal que $s \neq t$ y $\gamma(s) = \gamma(t)$. Más aún, si $p \in tr\,\gamma$ es un punto múltiple entonces existe una cantidad finita $\{s_1, \ldots, s_n\} \in [0,1]$ tales que $\gamma(s_1) = \ldots = \gamma(s_n) = p$, pues de no ser finita podemos considerar una secuencia $s_n \in [0,1]$ tal que $\gamma(s_n) = p$, la cual posee una subsecuencia s_{n_k} que converge a $c \in [0,1]$. Luego, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma(s_{n_k}) = \gamma(c)$. Por lo tanto, $\gamma'(c) = 0$. Absurdo, pues γ es suave por partes.

Proposición 5.9. *Sea X una superficie suave orientable. Si $\gamma : [0,1] \to X$ es una curva cerrada suave por partes y ω una 1-forma de clase C^∞ cerrada sobre X. Entonces existe una cantidad finita de curvas cerradas simples suaves por partes $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$ tales que*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\gamma_i} \omega$$

Prueba. Desarrollaremos la prueba en dos casos.

Caso 1. γ tiene finitos puntos múltiples.

En ese caso existe una cantidad finita $0 \leq t_1 < \ldots < t_l \leq 1$ tal que para cada t_i existe al menos un t_k con $k \neq i$ que cumple $\gamma(t_k) = \gamma(t_i)$. Luego, identifiquemos a todos los pares $t_i < t_k$ tal que $\gamma(t_k) = \gamma(t_i)$ y denotemos por t_j, t_h al par t_i, t_k (en ese orden) tal que la diferencia $t_k - t_i$ sea la más pequeña.

Si $a_1 = t_j$ y $b_1 = t_h$ entonces $\gamma(a_1) = \gamma(b_1)$ y $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ con $a_1 \leq t < s \leq b_1$. Luego, definamos la curva $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$, la cual es cerrada simple suave por partes. Además, denotemos por Γ_1 a la curva cerrada suave por partes que resulta de remover la $tr\,\gamma_1$ de la $tr\,\gamma$ y definámosla como

$$\Gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma(t) & , \text{ si } \quad t \in [\,0\,,\, a_1\,] \\ \gamma(t - a_1 + b_1) & , \text{ si } \quad t \in [\,a_1\,,\, 1 - b_1 + a_1\,] \end{cases}$$

Luego

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega$$

Ejecutando este proceso una cantidad finita de veces, se obtiene que :

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\gamma_i} \omega$$

Caso 2. γ tiene infinitos puntos múltiples.

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cobertura localmente finita de X con U_n discos coordenados. Como $tr\,\gamma$ es compacto entonces existe una cantidad finita U_j de abiertos que cubren a $tr\,\gamma$. Luego, podemos encontrar un entero m tal que cada curva $\gamma_k : [c_{k-1}, c_k] \to X$ con $c_k = \dfrac{k}{m}$, para $k \in \{1, \ldots, m\}$ que pertenece a $U_{j(k)}$. Así pues, $\gamma = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m$. Además, como los $U_{j(k)}$ son discos se sigue que $\omega = df_{j(k)}$ en $U_{j(k)}$.

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_k} \omega = f_{j(k)}(\gamma(c_k)) - f_{j(k)}(\gamma(c_{k-1}))$$

Notemos que $\int_{\gamma_k} \omega$ esta determinado por los puntos $\gamma(c_{k-1})$ y $\gamma(c_k)$ de γ_k. O sea, el valor de $\int_{\gamma_k} \omega$ no varia si reemplazamos la curva γ_k por una curva simple $\tilde{\gamma}_k$ que conecta $\gamma(c_{k-1})$ con $\gamma(c_k)$ en $U_{j(k)}$. Se sigue que $\int_{\gamma_k} \omega = \int_{\tilde{\gamma}_k} \omega$.

Elijamos curvas simples suaves por partes $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_k$ en ese orden tal que $\tilde{\gamma}_k$ intersecta a $\tilde{\gamma}_1 * \ldots * \tilde{\gamma}_{k-1}$ en una cantidad finita de puntos. Luego, la curva $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 * \ldots \tilde{\gamma}_m$ es cerrada suave por partes con una cantidad finita de puntos múltiples. Además, se cumple que $\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$. □

Proposición 5.10. *Sea X una superficie suave y ω una 1-forma diferencial de clase C^∞ sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *ω es exacta.*

(ii) *$\int_\gamma \omega = 0$, para cualquier curva γ cerrada suave por partes en X.*

(iii) *$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, para cualquier par de curvas suaves por partes γ_1 y γ_2 con los mismos extremos fijos.*

Prueba. $(i) \implies (ii)$. Sea $\alpha : [0,1] \to X$ una curva suave. Por hipótesis, existe $f \in C^\infty(X)$ tal que $\omega = df$. En consecuencia

$$\int_\alpha df = \int_0^1 \alpha^*(df) = \int_0^1 d(f\circ\alpha) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\alpha(t))dt = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

Tomemos una partición $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ de $[0,1]$ tal que para $j \in \{1, \ldots, n\}$ la curva $\gamma_j = \gamma_{|[t_j, t_{j-1}]}$ es suave. Se sigue que :

$$\int_{\gamma_j} df = f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))$$

para $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por otro lado, $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \ldots * \gamma_n$ entonces

$$\int_\gamma df = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} df$$

Por lo tanto,

$$\int_\gamma df = \sum_{j=1}^{n} [\, f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))\,] = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Tomemos la curva cerrada suave por partes $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2^{-1}$. Luego

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Fijemos $p \in X$ y sea x cualquier punto en X. Por el lema 5.8 existe una curva γ_x suave por partes que conecta p con x. Definamos la aplicación

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

la cual está bien definida, por hipótesis.

Afirmación: $f \in C^\infty(X)$.

Prueba: Dado $q \in X$. Tomemos una disco coordenado (φ, D) en torno de q tal que $\varphi(q) = 0$. Para cada $x \in D$, definamos la curva suave $\sigma : [0,1] \to D$ como $\sigma(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(x))$. Así, localmente se tiene que :

$$f(x) = \int_{\gamma_q * \sigma} \omega = \int_{\gamma_q} \omega + \int_\sigma \omega = f(q) + \int_\sigma \omega$$

Recordemos que localmente $\omega = a_1 d\varphi_1 + a_2 d\varphi_2$ donde $\{a_1, a_2 : D \to \mathbb{R}\}$ son aplicaciones suaves. Si denotamos $\varphi(x) = (x_1, x_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2) &= (f \circ \varphi^{-1})(0) + \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_0^1 (a_i \circ \varphi^{-1})\,(tx_1, tx_2)\,\dfrac{d}{dt}(tx_i)\,dt \\ &= (f \circ \varphi^{-1})(0) + \textstyle\sum_{i=1}^{2} x_i \int_0^1 (a_i \circ \varphi^{-1})\,(tx_1, tx_2)\,dt \end{aligned}$$

Así, f es diferenciable en 0. En consecuencia, f es suave en D. Además, al ser q un punto arbitrario, se sigue que f es suave en X.

Afirmación: $\omega = df$.

Prueba: Sea $\alpha : [0,1] \to X$ cualquier curva suave por partes y sea $\gamma_{\alpha(0)}$ una curva suave por partes que conecta p con $\alpha(0)$. Luego

$$f(\alpha(1)) = \int_{\gamma_{\alpha(0)} * \alpha} \omega = f(\alpha(0)) + \int_\alpha \omega$$

Entonces

$$\int_\alpha \omega = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = \int_\alpha df$$

Por lo tanto, $\int_\alpha \omega - df = 0$, para cualquier curva α suave por partes. Lo cual implica que $\omega = df$. □

Teorema 5.11. *Si X es una superficie suave orientable que satisface el teorema de la curva de Jordan entonces toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es exacta.*

Prueba. Sea ω 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X y $\gamma : [0,1] \to X$ una curva cerrada suave por partes en X. Luego, existe una cantidad finita de curvas cerradas simples suaves por partes γ_i tal que

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \omega$$

Además, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que γ_i es homotópico con extremos fijos a una curva cerrada simple suave C_i. Por proposicón 2.13 se sigue que $\int_{\gamma_i} \omega = \int_{C_i} \omega$. Luego, tenemos que

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \omega = 0$$

pues X cumple el Teorema de la Curva de Jordan. Por lo tanto, ω es exacta. □

5.4. Teorema de Uniformización de Koebe

Una superficie suave orientable X es cohomológicamente plana (de aquí en adelante, plana) si toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es exacta.

Lema 5.12. *Sea X una superficie suave y orientable.*

(i) Si X es simplemente conexo entonces X es plana.

(ii) Si X es plana entonces todo dominio en X es plana.

Prueba. (i) Sea γ una curva cerrada C^1 por partes sobre X y ω una 1-forma cerrada con soporte compacto en X. Por las proposiciones 2.13 y 5.10, se sigue que ω es exacta. (ii) Basta emular el inicio de la prueba de la proposición 5.4. $\square$

Teorema 5.13. ***(Teorema del Anillo)**. Sea X una superficie plana compacta y Δ la unión disjunta de dos discos cerrados en X. Entonces, para cualquier estructura de superficie de Riemann en un vecindad de $\overline{X \setminus \Delta}$ se cumple que $X \setminus \Delta$ es biholomorfo al anillo $A(1, R)$, con $R > 1$.*

Probaremos este teorema en el marco donde Δ está contenido en un disco conforme (ϕ, D) sobre la superficie de Riemann X. Sean p y q dos puntos distintos en D. Para cualquier $\varepsilon \geq 0$ (suficientemente pequeño), consideremos $P_\varepsilon = \{|z - p| \leq \varepsilon\}$ y $Q_\varepsilon = \{|z - q| \leq \varepsilon\}$. Tomemos $X_\varepsilon = X \setminus (P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon)$ con orientación $\mathcal{O}$ tal que $d\phi_1 \wedge d\phi_2 > 0$ y orientemos la curva $C = \{|z - p| = r\}$, con $r > \varepsilon$ (próximo a ε) tal que $\int_C \tilde{\theta} = 1$, donde $\tilde{\theta}(z) = \dfrac{1}{2\pi} Im \left(\dfrac{d\phi}{z - q} - \dfrac{d\phi}{z - p} \right)$ sobre $D \cap X_0$.

Lema 5.14. *Toda 1-forma diferencial ω de clase C^∞ cerrada sobre X_ε con $\int_C \omega = 0$ necesariamente es exacta.*

Prueba. En torno de ∂P_ε, tomemos un dominio V_p que es un anillo que contiene a C como el círculo del medio. Limitando ω a V_p se sigue que $\int_\gamma \omega = 0$, para cualquier curva γ cerrada C^1 por partes en V_p, pues $\int_C \omega = 0$. Luego, ω es exacta en V_p y existe $f \in C^\infty(V_p)$ tal que $\omega_{|V_p} = df$. Consideremos la función suave $\eta : V_p \to \mathbb{R}$ tal que $\eta = 1$ en el anillo limitado por ∂P_ε y $\partial P_\varepsilon + \delta$ con $\delta > 0$ (suficientemente pequeño) y definamos la función $F : X \setminus P_\varepsilon \to \mathbb{R}$ como $F = \eta f$ en V_p y $F = 0$ fuera del anillo limitado por ∂P_ε y $\partial V_p - \delta$.

Análogamente, en torno de ∂Q_ε, tomemos un dominio V_q que es un anillo y la curva $C' = \{|z-q| = r\}$. Consideremos los discos cerrados $\overline{C} = \{|z-p| \leq r\}$ y $\overline{C}' = \{|z-q| \leq r\}$ y por Stokes se sigue que $\int_{C'} \omega = 0$. Luego , existe $g \in C^\infty(V_q)$ tal que $\omega_{|V_q} = dg$. Consideremos la función suave $\lambda : V_q \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda = 1$ en el anillo limitado por ∂Q_ε y $\partial Q_\varepsilon + \delta$ y definamos la función $G : X \setminus Q_\varepsilon \to \mathbb{R}$ como $G = \lambda g$ en V_q y $G = 0$ fuera del anillo limitado por ∂Q_ε y $\partial V_q - \delta$.

Tomemos la 1-forma diferencial $\tilde{\omega}$ sobre X como

$$\tilde{\omega} := \begin{cases} \omega - dF - dG & , \text{ en } \ X_\varepsilon \\ 0 & , \text{ en } \ X \setminus X_\varepsilon \end{cases}$$

que es de clase C^∞ cerrada y con soporte compacto en X, pues $\tilde{\omega}$ se anula en vecindades de ∂X_ε. Como X es plana existe $h \in C^\infty(X)$ tal que $dh = \tilde{\omega}$. Por lo tanto, $\omega = d(h_{|X_\varepsilon})$ es exacta. $\square$

Lema 5.15. *Existe una 1-forma diferencial θ de clase C^∞ cerrada sobre X_0 tal que $\int_C \theta = 1$ y $\int_\gamma \theta \in \mathbb{Z}$, para cualquier curva γ cerrada C^1 por partes en X_0.*

Prueba. Sea (ϕ, D_R) el disco conforme de radio R, entonces los puntos p y q están contenidos en el disco D_r , para algún $r \in (0, R)$. Como

$$\int_{|z| = \frac{R+r}{2}} \tilde{\theta} = 0$$

entonces existe $f \in C^\infty(A(r, R))$ tal que $\tilde{\theta} = df$. Consideremos la función suave $\eta : A(r, R) \to \mathbb{R}$ con $\eta = 1$ en $D_{\frac{R+r}{2}}$ y definamos la 1-forma diferencial θ sobre X_0 como

$$\theta := \begin{cases} \tilde{\theta} & , \text{ en } \ D_{\frac{R+r}{2}} \setminus \{p, q\} \\ d(\eta f) & , \text{ en } \ X \setminus \overline{D}_r \end{cases}$$

que es de clase C^∞ cerrada y claramente satisface lo requerido. $\square$

Lema 5.16. *Para toda 1-forma diferencial ω de clase C^∞ cerrada sobre X_ε. Si $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ entonces $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z}$, para cualquier curva γ cerrada C^1 por partes en X_ε.*

Prueba. Tomemos la 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada $\tilde{\omega} = \omega - (\int_C \omega)\theta$. Como $\int_C \tilde{\omega} = 0$ entonces $\tilde{\omega}$ es exacta en X_ε. Luego $\int_\gamma \tilde{\omega} = 0$, para cualquier curva γ cerrada C^1 por partes en X_ε. Por lo tanto, $\int_\gamma \omega = (\int_C \omega)(\int_\gamma \theta) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Prueba del teorema 5.13. Como ∂X_ε es regular entonces el problema de Dirichlet tiene solución para X_ε, es decir, existe u_1 continua en $\overline{X}_\varepsilon$ y armónica en X_ε tal que $u_1 = 1$ en ∂P_ε y $h_1 = 0$ en ∂Q_ε.

Para $\lambda > 0$, definamos $u := \lambda u_1$. Notemos que $u = \lambda$ en ∂P_ε y $u = 0$ en ∂Q_ε. Además

$$d(u \cdot *du) = du \wedge *du + u \cdot d * du = du \wedge *du$$

pues $d * du = 0$. Por Stokes y convergencia monótona se sigue:

$$\lim_{t\to 0} \int_{X_{\varepsilon+t}} du \wedge *du = \lim_{t\to 0} \int_{\partial X_{\varepsilon+t}} u \cdot *du = \lambda \int_C *du > 0$$

pues a tráves del disco conforme (ϕ, D) se tiene:

$$\int_D du \wedge *du = \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial \phi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \phi_2}\right)^2 d\phi_1 \wedge d\phi_2 > 0$$

Como u es armónica no constante, esta desigualdad se mantiene para toda carta sobre X_ε. Por lo tanto, $\int_C *du > 0$. Si decretemos $\int_C *du = 1$ entonces la función u es única.

Fijando $z_0 \in X_\varepsilon$

$$f(z) = \exp\left\{2\pi \left(\int_{z_0}^{z} (du + i * du)\right) + 2\pi\, u(z_0)\right\}$$

define una función holomorfa bien definida, con $|f| = e^{2\pi u}$. Notemos que

$$\lim_{z\to\partial Q_\varepsilon} |f(z)| = 1 \text{ y } \lim_{z\to\partial P_\varepsilon} |f(z)| = R := e^{2\pi\lambda}$$

Afirmación: f es propia.

En efecto, cualquier compacto K en $A(1, R)$ está contenido en un subanillo, así pues, podemos asumir que $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ con $1 < r_1 < r_2 < R$. Sea $\eta > 0$ tal que $1 + \eta < r_1$ y $r_2 < R - \eta$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| \leq 1 + \eta$ con z en una vecindad V_q que es el anillo limitado por ∂Q_ε y $\partial Q_\varepsilon + \delta$; y $|f(z)| \geq R - \eta$ con z en una vecindad V_p que es el anillo limitado por ∂P_ε y $\partial P_\varepsilon + \delta$.

Afirmación: f es sobreyectiva.

En torno de p, tomemos el anillo $A(p; \varepsilon - t, \dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon - t})$, para algún $t > 0$ (suficientemente pequeño) y consideremos la función $R(z) = p + \dfrac{\varepsilon^2}{\overline{z} - \overline{p}}$. Es fácil ver que $R(\partial P_\varepsilon) = \partial P_\varepsilon$ y que el anillo $A(p; \varepsilon, \dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon - t})$ se aplica en el anillo $A(p; \varepsilon - t, \varepsilon)$. Realizando este proceso para q, podemos extender la función f de manera holomorfa a una vecindad de $\overline{X}_\varepsilon$. Notemos que $f(\overline{X}_\varepsilon)$ es cerrado, pues f es cerrado. Luego

$$\partial f(X_\varepsilon) \subset f(\partial X_\varepsilon) \subset \partial A$$

pues f es abierto. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Con estas afirmaciones se tiene que f es un cubrimiento ramificado.

Afirmación: f es inyectiva.

Basta mostrar que este cubrimiento solo tiene una rama. Como

$$\overline{f}(z) = \exp\left\{2\pi\left(\int_{z_0}^{z}(du - i * du)\right) + 2\pi\, u(z_0)\right\}$$

entonces

$$df = 2\pi f \cdot (du + i * du) \text{ y } d\overline{f} = 2\pi\overline{f} \cdot (du - i * du)$$

Además

$$df \wedge d\overline{f} = -2\, i \cdot 4\pi^2 \cdot |f|^2 \cdot du \wedge *du$$

Luego

$$\frac{i}{2}\, df \wedge d\overline{f} = 4\,\pi^2\, e^{4\pi u}\, du \wedge *du = \pi\, d(e^{4\pi u}) \wedge *du = \pi\, d(e^{4\pi u} \cdot *du)$$

pues $d * du = 0$. Nuevamente, por Stokes y convergencia monótona se sigue:

$$\lim_{t\to 0} \frac{i}{2} \int_{X_{\varepsilon+t}} df \wedge d\overline{f} = \lim_{t\to 0} \pi \int_{\partial X_{\varepsilon+t}} e^{4\pi u} \cdot *du = \pi\left(e^{4\pi\lambda}\int_C *du + \int_{C'} *du\right)$$

Por Stokes se tiene que $\int_C *du + \int_{C'} *du = 0$ entonces $\int_C *du = -\int_{C'} *du = 1$.

En consecuencia

$$\frac{i}{2}\int_{X_\varepsilon} df \wedge d\overline{f} = \pi(R^2 - 1)$$

Localmente tenemos que $df \wedge d\overline{f} = |f'|^2\, d\phi \wedge d\overline{\phi} = -2\,\pi|f'|^2\, d\phi_1 \wedge d\phi_2$ y usando las proposiciones 1.9 y 1.10, se concluye que :

$$\frac{i}{2}\int_{X_\varepsilon} df \wedge d\overline{f} > 0$$

O sea, $R > 1$. Finalmente

$$\int_{X_\varepsilon} df \wedge d\overline{f} = \int_{A(1,R)} dz \wedge d\overline{z}$$

Por lo tanto, f es inyectiva y con ello, X_ε y $A(1, R)$ son biholomorfos. $\square$

Lema 5.17. ***(Del Encaje Creciente)***. *Supongamos que una superficie de Riemann X es una unión creciente de abiertos conexos X_n y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n : X_n \to \mathbb{C}$ función holomorfa inyectiva. Entonces existe $f : X \to \mathbb{C}$ holomorfa inyectiva.*

Prueba. Fijemos $p \in X_1$ y tomemos una carta holomorfa (ϕ, U) en torno de p. A través de una suma y producto de constantes obtenemos que $f_n(p) = 0$ y $\frac{\partial f_n}{\partial \phi}(p) = 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $f_{m \geq n} \circ f_n^{-1} : f_n(X_n) \to \mathbb{C}$ posee una subsecuencia que converge uniformemente en compactos de $f_n(X_n)$ a una función holomorfa inyectiva, por corolario 3.20. De este modo, en $f_1(X_1)$ la secuencia $f_{m\geq 1} \circ f_1^{-1}$ posee una subsecuencia $f_{m_k} \circ f_1^{-1}$ convergente, en $f_2(X_2)$ consideremos la secuencia $f_{m_k \geq 2} \circ f_2^{-1}$ la cual posee una subsecuencia $f_{m_{k''}} \circ f_2^{-1}$ convergente. Así sucesivamente, obtenemos las sucesiones $\ldots \subset f_{m_{k^n}} \subset \ldots \subset f_{m_{k''}} \subset f_{m_k}$. Por el proceso de la diagonal existe una subsucesión (f_m) común a todas las sucesiones halladas; además, $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por lo tanto, $f := \lim\limits_{m\in\mathbb{N}} f_m : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa inyectiva. $\square$

Proposición 5.18. *Si X una superficie de Riemann no compacta entonces X es una unión de creciente de de abiertos conexos X_n, relativamente compactos, con borde suave que cumplen $\overline{X}_n \subset X_{n+1}$.*

Prueba. Tomemos la colección de cartas $\{(\phi_n, U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre X tal que $\{U_n\}$ es una cobertura localmente finita y $\phi_n(U_n) = D_3$. Definamos $f_n := \xi \circ \varphi_n : X \to \mathbb{R}$, donde ξ es una función bump. Así pues, f_n son C^∞ con soporte compacto en U_n y $\{f_n \leq 1\}$ aún cubre a X. Por último, definimos la función $f := \sum n f_n$ la cual es C^∞ propia y no negativa.

Por Sard, elijo r_1 valor regular de f tal que $r_1 > 1$, tomamos al compacto $K_1 = \{f \leq r_1\}$ y de no ser conexo construimos al compacto conexo $\tilde{K}_1$ uniendo las componentes conexas de K_1 por caminos; luego, elijo s_1 valor regular de f tal que $s_1 > r_1\, ,\, \max\limits_{p\in\tilde{K}_1}\{f(p)\}$. Por lo tanto, definimos a X_1 como la componente conexa de $\{f < s_1\}$ que contiene a $\tilde{K}_1$.

Igualmente, elijo r_2 valor regular de f tal que $r_2 > 2\, ,\, s_1$, tomamos al compacto $K_2 = \{f \leq r_2\}$ y construimos al compacto conexo $\tilde{K}_2$ de forma análoga a $\tilde{K}_1$, luego, elijo s_2 valor regular de f tal que $s_2 > r_2\, ,\, \max\limits_{p\in\tilde{K}_2}\{f(p)\}$. Así pues, definimos X_2 como la componente conexa de $\{f < s_2\}$ que contiene a $\tilde{K}_2$.

Así sucesivamente construimos los abiertos conexos X_n que satisfacen la condiciones descritas líneas arriba, pues, $\{f \leq n\} \subset K_n \subset \tilde{K}_n \subset X_n$. $\square$

Lema 5.19. *Sea X un espacio métrico localmente compacto, Y un esapcio métrico y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto tal que*

(i) *$f_{|K}$ es inyectiva.*

(ii) *Cada $p \in K$ tiene una vecindad V_p tal que $f_{|V_p}$ es inyectiva.*

Entonces existe una vecindad V que contiene a K tal que $f_{|V}$ es inyectiva.

Prueba. Por contradicción. Supongamos que no existe V, entonces por cada $\varepsilon_n > 0$ podemos encontrar x_n, y_n distintos tal que $d(x_n, K)$, $d(y_n, K) < \varepsilon_n$ y $f(x_n) = f(y_n)$. Como X es localmente compacto y K es compacto, existe $\delta > 0$ tal que el conjunto $L = \{x \in X \mid d(x, K) \leq \delta\}$ es compacto. Luego, para $\varepsilon_n \leq \delta$ se tiene que x_n, $y_n \in L$. Tomando subsecuencias x_{n_k} e y_{n_k} tal que $x_{n_k} \to x$ e $y_{n_k} \to y$. Se sigue que $x, y \in K$ y $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, si $x \neq y$ se contradice el ítem (i) y si $x = y = p$ se contradice el ítem (ii). $\square$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\overline{X}_n$ es compacto y ∂X_n tiene una cantidad finita de componentes conexas. Sea $\partial X_n = \cup_{j=1}^{\nu_n} C_j$ la unión disjunta del borde de X_n en sus componentes conexas. Por el teorema de clasificación de 1-variedades suaves cada C_j es difeomorfo a S^1 y extendamos este resultado a una aplicación suave $g_j : V_j \to S^1$, donde V_j es una vecindad de C_j. Además, existe $f_j : W_j \to \mathbb{R}$ aplicación suave, donde W_j es una vecindad de C_j tal que

(i) $C_j = \{p \in W_j \mid f_j(p) = 0\}$.

(ii) $W_j \cap X_n = \{p \in W_j \mid f_j(p) < 0\}$.

(iii) $df_j \neq 0$, en C_j.

Consideremos la aplicación $\varphi_j = (g_j, f_j) : V_j \cap W_j \to S^1 \times \mathbb{R}$. Notemos que esta aplicación tiene matriz Jacobiana no singular en todo punto de C_j. Por el teorema de la Función Inversa y el lema 5.19, existe $\varepsilon > 0$ y $V_j' \subset V_j \cap W_j$ vecindad de C_j tal que $\varphi_j : V_j' \to S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ es un difeomorfismo. Si vemos a $S^1 \times (-\varepsilon_n, \varepsilon)$ dentro de S^2, se sigue por el Teorema del Anillo que $S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ es biholomorfo a $A(1, R_j)$.

Recordemos que los anillos $A(1, R_j)$ y $A(\frac{1}{r_j}, r_j)$ son biholomorfos siempre que $R_j = r_j^2$. Así, tenemos el biholomorfismo

$$\Phi_j : A(\frac{1}{r_j}, r_j) \to \varphi_j^{-1}(S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon))$$

Más aún, podemos asumir que $f_j^{-1}(-\varepsilon) \longleftrightarrow \{|z| = r_j\}$ y $f_j^{-1}(\varepsilon) \longleftrightarrow \{|z| = \frac{1}{r_j}\}$, caso contrario, componemos el biholomorfismo con la función $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Definamos la inclusión Ψ_j del anillo $A(\frac{1}{r_j}, r_j)$ en el disco D_{r_j} como $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & A(\frac{1}{r_j}, r_j) & \to & A(\frac{1}{r_j}, r_j) \\ & z & \to & 1/z \end{array}$$

Así, obtenemos la suma conexa $Y_n = X_n \# \cup_{j=1}^{\nu_n} D_{r_j}$ definida como

$$Y_n = [X_n \setminus \cup_{j=1}^{\nu_n} \Phi_j(A(\frac{1}{r_j}, r_j))] \cup_{\Psi_j \alpha \Phi_j^{-1}} [\cup_{j=1}^{\nu_n} D_{r_j} \setminus \Psi(A(\frac{1}{r_j}, r_j))]$$

identificando $\Phi_j(A(\frac{1}{r_j}, r_j))$ con $\Psi_j(\alpha(A(\frac{1}{r_j}, r_j)))$ para cada $j \in \{1, \ldots, \nu_n\}$.

Se sigue que Y_n es una superficie de Riemann compacta y la inclusión natural de X_n en Y_n es un biholomorfismo de X_n sobre $Y_n \setminus \cup_{j=1}^{\nu_n} \overline{D}_{\frac{1}{r_j}}$.

Lema 5.20. *Sean X una superficie suave orientable y (φ, D_R) un disco coordenado sobre X e $Y = X \setminus \overline{D}_r$, $0 < r < R$. Entonces Y es plana si y solo si X es plana.*

Prueba. ($\Longleftarrow$). Como X es plana e Y es un dominio de X entonces Y es plana.
($\Longrightarrow$). Sea ω 1- forma diferencial C^∞ cerrada con soporte compacto en X. Por otro lado, en D_R existe $f \in C^\infty(D_R)$ tal que $\omega = df$ en D_R. Consideremos la función suave $\eta : D_R \to \mathbb{R}$ tal que $\eta = 1$ en D_s, para algún $s \in (r, R)$ y definamos la 1-forma diferencial $\tilde{\omega} = \omega - d(\eta f)$, la cual es de clase C^∞ cerrada y con soporte compacto en Y. Luego, existe $g \in C^\infty(Y)$ tal que $\tilde{\omega}_{|Y} = dg$, pues Y es plana.
Por otro lado, $\tilde{\omega} = dg = 0$ en $A(r, s)$, o sea, g es constante. Tomemos $g = 0$ en ese dominio y definamos en X la aplicación

$$\tilde{g} := \begin{cases} g & , \text{ en } \quad Y \\ 0 & , \text{ en } \quad X \setminus Y \end{cases}$$

que es de clase C^∞, pues $\tilde{g} = g$ es C^∞ en Y e $\tilde{g} = 0$ en $X \setminus supp(g)$. Se sigue que $\omega = \tilde{\omega} + d(\eta f) = d(\tilde{g} + \eta f)$. Por lo tanto, X es plana. $\square$

Teorema 5.21. *Si X es una superficie de Riemann plana entonces X es biholomorfa a un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Prueba. Si X es **compacto** tomemos el disco conforme (ϕ, D) en X y los puntos $p, q \in D$. Para $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño), se tiene que X_ε es biholomorfo al anillo $A(1, R)$, por el Teorema del Anillo. Luego, $X \setminus \{p, q\} = \cup X_\varepsilon$ es biholomorfo a un abierto conexo de $\mathbb{C}$, por el lema del Encaje Creciente.
Por Casorati - Weierstrass, los puntos p, q no son singularidades esenciales. Así, podemos extender esta función holomorficamente a la aplicación $F : X \to \overline{\mathbb{C}}$.
Afirmación: F es inyectiva.
En efecto, caso contario existen $z, \zeta \in X$ tal que $F(z) = F(\zeta)$. Sean V_z y V_ζ vecindades en torno de z y ζ respectivamente tal que $F(V_z) = F(V_\zeta)$. Luego, si quitamos los puntos p y q de esta vecindades, contradecimos la inyectividad de la función original. Por lo tanto, F es inyectiva.
Afirmación: F es sobreyectiva.
En efecto, $F(X)$ es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$. Además, se tiene que F es propia, pues X es compacto. Se sigue que F es un apliación cerrada. Por lo tanto, F es sobreyectiva. En consecuencia, X y $\overline{\mathbb{C}}$ son biholomorfos.
Si X es **no compacto** entonces $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con X_n abierto conexo, relativamente compacto, con borde suave y $\overline{X}_n \subset X_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que X_n es biholomorfo a un abierto de una superficie de Riemann compacta Y_n. Se sigue que Y_n es plana, pues X_n es plana. Luego, Y_n y $\overline{\mathbb{C}}$ son biholomorfos. Entonces X_n es biholomorfo a un abierto en $\mathbb{C}$. Finalmente, por el lema de Encaje Creciente, se tiene que X es biholomorfo a un dominio en $\mathbb{C}$. $\square$

5.5. Resultados del teorema 5.1

Del teorema se desprenden los siguientes resultados:

Corolario 5.22. *Si X es una superficie de Riemann homeomorfa a un abierto de S^2 entonces X es biholomorfa a un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Prueba. Inmediato. $\square$

Corolario 5.23. *(**Teorema de Uniformización de Riemann**). Si X es una superficie de Riemann simplemente conexa entonces X es biholomorfa a una y solo una de las siguientes tres:*

(*i*) *La esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$*

(*ii*) *El plano complejo $\mathbb{C}$*

(*iii*) *El disco unitario $\mathbb{D}$*

Prueba. Como X es simplemente conexa es plana, por lema 5.12. Por el teorema de caracterización de superficies planas, se tiene que X es biholomorfo a $\overline{\mathbb{C}}$ o a un abierto de $\mathbb{C}$. Si fuera el segundo caso, por el teorema de uniformización de Riemann en el plano se sigue que X es biholomorfo a $\mathbb{C}$ o a $\mathbb{D}$. $\square$

Corolario 5.24. *(**Caracterización diferenciable de superficies planas**). Sea X una superficie suave orientable. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(*i*) *X es plana.*

(*ii*) *X satisface el teorema de la curva de Jordan.*

(*iii*) *Toda 1-forma diferencial de clase C^∞ cerrada con soporte compacto en X es necesariamente exacta.*

(*iv*) *X es difeomorfa a un abierto de S^2.*

Prueba. Basta demostrar $(iii) \Longrightarrow (iv)$. Como X es orientable, posee estructura de superficie de Riemann. Por el teorema de caracterización de superficies de Riemann planas, X es biholomorfo a un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$. En particular, X es difeomorfo a un abierto de S^2. $\square$

Bibliografía

[Ahl53] L. Ahlfors. *Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* McGraw - Hill, 1953.

[FM09] A. Fomenko and A. Mishchenko. *A short course in differential geometry and topology.* Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[For12] O. Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81. Springer Science & Business Media, 2012.

[Lim01] E. Lima. *Introducción a la cohomología de DeRham*, volume 18. Pontificia Universidade Catolica del Peru, 2001.

[Mil58] J. Milnor. *Differential Topology.* 1958.

[MT97] I. Madsen and J. Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge University Press, 1997.

[MW97] J. Milnor and D. Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton university press, 1997.

[NR11] T. Napier and M. Ramachandran. *An introduction to Riemann surfaces.* Springer Science & Business Media, 2011.

[Rem12] R. Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122. Springer Science & Business Media, 2012.

[Rem13] R. Remmert. *Classical topics in complex function theory*, volume 172. Springer Science & Business Media, 2013.

[Rey89] E. Reyssat. Quelques aspects des surfaces de riemann. *Progress in mathematics Boston, Mass.*, 1989.

[Sim89] RR Simha. The uniformisation theorem for planar riemann surfaces. *Archiv der Mathematik*, 53(6):599–603, 1989.

[Spi70] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry.* Publish or perish, 1970.