

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**ESCUELA DE POSGRADO**



**Desarrollo de un sistema de control avanzado para un  
vehículo submarino autónomo tipo planeador con  
actuadores internos**

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Ingeniería de Control y Automatización

AUTOR

ING. Diego Eduardo Quiroz Velasquez

ASESOR

MSc. Francisco Fabian Cuéllar Córdova

**3 de octubre del 2019**

## RESUMEN

En los últimos años, la ingeniería marina ha desarrollado una serie de vehículos submarinos con el fin de observar y caracterizar los ecosistemas marinos ante la creciente demanda por sus recursos como fuente de energía y alimento. Estos vehículos, denominados vehículos submarinos autónomos (AUVs), son capaces de recorrer el ambiente submarino y recolectar información medida por un arreglo de sensores que llevan a bordo. En particular, los planeadores submarinos pueden realizar exploraciones por periodos de tiempos extensos, por lo cual son un gran beneficio para la ingeniería marina. Debido a la naturaleza de dichos vehículos, y la dificultad de transmitir datos de forma inalámbrica en un ambiente submarino, se han desarrollado algoritmos de navegación autónoma empleando varias técnicas de control, mejorando el desempeño de dichos vehículos ante entornos desconocidos y el seguimiento de trayectorias deseadas. Sin embargo, en muchos casos, la investigación se ha enfocado en el desarrollo de algoritmos clásicos empleando modelos simplificados que no consideran, o minimizan los efectos hidrodinámicos sobre la dinámica del vehículo en movimiento.

Es por ello, que se desea desarrollar un algoritmo de control que permita que un planeador submarino permanezca en una trayectoria predefinida considerando los efectos de las fuerzas hidrodinámicas sobre el movimiento. El presente trabajo considera la aplicación de algoritmos avanzados que garanticen la estabilidad del vehículo durante todo su recorrido, en particular en los cambios de planeado descendiente a ascendiente donde los puntos críticos deseados varían según el ángulo de planeado y dirección, así como los limitantes físicos de posición y velocidad para los actuadores internos del vehículo.

Durante el desarrollo de la investigación se obtuvo un modelo del planeador submarino que relacione el estado de los actuadores internos del vehículo con su posición, orientación y velocidad durante el planeado. A partir de ello se desarrolla un total de tres controladores, primero un controlador MIMO (múltiple entrada, múltiple salida) empleando la ley de control proporcional-integrativo debido a la naturaleza intrínseca multivariable del planeador submarino. Segundo, se desarrolló un sistema óptimo basado en un regulador cuadrático lineal, el cual permite optimizar el consumo energético con el fin de extender el tiempo de recorrido. Finalmente se obtuvo un controlador no lineal basado en la técnica backstepping adaptativo, el cual considera la naturaleza desconocida de los parámetros hidrodinámicos para estimar su efecto sobre el vehículo y obtener la señal de control que lo estabiliza. El desempeño de los tres algoritmos es comparado mediante simulaciones, determinando que el algoritmo no lineal basado en backstepping adaptativo presenta un mejor comportamiento.

Finalmente, se procede a implementar un planeador submarino basado en tecnologías de prototipado rápido, para evaluar el funcionamiento del algoritmo desarrollado en un sistema real. Los resultados de las pruebas realizadas demuestran que efectivamente, el sistema de control es capaz de estabilizar el vehículo sin tener conocimiento previo sobre los parámetros hidrodinámicos y la magnitud de su efecto sobre la dinámica del vehículo.

# ÍNDICE

<b>Índice de Figuras</b> .....	iv
<b>Índice de Tablas</b> .....	vii
1. Capítulo 1 .....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Vehículo submarino tipo planeadores.....	2
1.3. Antecedentes .....	5
1.4. Objetivos de la tesis.....	7
1.4.1. Objetivo general.....	7
1.4.2. Objetivos específicos .....	7
2. Análisis del modelo de un vehículo submarino tipo planeador .....	8
2.1. Definición de coordenadas .....	8
2.1.1. Sistema de referencia Inercial.....	8
2.1.2. Sistema de referencia fijo al cuerpo .....	9
2.1.3. Transformación entre sistemas de referencia.....	10
2.2. Cinemática .....	13
2.3. Dinámica .....	15
2.3.1. Modelo del vehículo .....	15
2.3.2. Ecuaciones de movimiento del planeador .....	16
2.3.3. Transformación para Controlar la Aceleración de Masas Puntuales.....	24
2.3.4. Modelo con masas simplificadas y control de aceleración.....	28
2.3.5. Modelado de términos hidrodinámicos .....	29
2.3.6. Modelo Longitudinal .....	31
2.4. Conclusiones preliminares.....	34
3. Diseño del sistema de control del vehículo submarino tipo planeador .....	36
3.1. Sistemas de control de vehículos submarinos .....	36
3.2. Obtención del sistema lineal .....	38
3.2.1. Determinación de los puntos de equilibrio.....	38
3.2.2. Proceso de linealización del sistema.....	41

3.3.	Sistema de Control PI MIMO .....	42
3.3.1.	Método propuesto .....	44
3.3.2.	Proceso de Diseño de controlador PI MIMO .....	46
3.3.3.	Simulación del controlador PI MIMO .....	48
3.4.	Sistema de Control LQR .....	51
3.4.1.	Diseño de controlador óptimo.....	51
3.4.2.	Simulación del controlador óptimo .....	53
3.5.	Sistema de control no lineal, Backstepping Adaptativo .....	56
3.5.1.	Diseño del controlador no-lineal dinámico .....	59
3.5.2.	Ley de Control dinámica.....	63
3.5.3.	Simulación de sistema de control Backstepping Adaptativo .....	64
3.6.	Análisis de simulación de planeado .....	67
3.7.	Comportamiento del vehículo al variar los coeficientes hidrodinámicos. ....	73
3.8.	Conclusiones preliminares.....	76
4.	Implementación del sistema de control y Navegación.....	77
4.1.	Introducción.....	77
4.2.	Estructura y hardware del vehículo submarino .....	77
4.2.1.	Sistema electrónico.....	78
4.2.2.	Sistema mecánico.....	82
4.3.	Implementación de los algoritmos.....	84
4.4.	Resultados .....	87
4.5.	Conclusiones preliminares.....	89
5.	Conclusiones .....	90
6.	Recomendaciones .....	92
	Bibliografía.....	93

## INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1: Representación del movimiento realizado por un planeador submarino. Fuente: Elaboración propia.....	4
Figura 2.1: Sistemas de referencia de un vehículo submarino tipo planeador. Fuente: Elaboración propia.....	9
Figura 2.2: Representación de los movimientos realizados por un vehículo submarino. Fuente: Elaboración propia. ....	10
Figura 2.3: Representación de las rotaciones sobre los ejes principales. Fuente: Elaboración propia.....	11
Figura 2.4: Esquema de vectores del planeador submarino. Fuente: Elaboración propia. ....	14
Figura 2.5: Posición de la distribución de masas internas del planeador submarino. Fuente: Elaboración propia.....	15
Figura 2.6: Esquema de las fuerzas hidrodinámicas de arrastre y sustentación sobre el planeador submarino. Fuente: Elaboración propia.....	32
Figura 2.7: Representación del cambio de variable para regulación de trayectoria	33
Figura 3.1: Recorrido de planeador submarino con controlador convencional basado en PID y equilibrio de masas internas. Fuente: Elaboración propia.....	36
Figura 3.2: Variables de estado del planeador submarino con controlador convencional basado en PID y equilibrio de masas internas. Fuente: Elaboración propia. ....	37
Figura 3.3: Estructura de control del algoritmo PI MIMO. Fuente: Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61].....	43
Figura 3.4: Margen de ganancia (izq) y Margen de fase (der) para banda de Nyquist de sistema con incertidumbre. Fuente: Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61] [61]..	45
Figura 3.5: Parámetros de diseño de controlador $c1s$ Preliminar. Fuente: Elaboración propia.....	47
Figura 3.6: Parámetros de diseño de controlador $c2s$ . Fuente: Elaboración propia. .....	48
Figura 3.7 Recorrido del planeador submarino con controlador PI MIMO. Planeado de $45^\circ$ . Fuente: Elaboración propia.....	49
Figura 3.8 Variables de estado con controlador PI MIMO. Planeado de $45^\circ$ . Fuente: Elaboración propia.....	49
Figura 3.9 Variables de estado con controlador PI MIMO. Planeado de $30^\circ$ . Fuente: Elaboración propia.....	50

Figura 3.10 Recorrido del planeador submarino con controlador PI MIMO. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	51
Figura 3.11: Esquema del controlador basado en algoritmo LQR. Fuente: Elaboración propia.....	53
Figura 3.12: Recorrido del planeador submarino con controlador LQR. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia.....	54
Figura 3.13: Variables de estado con controlador LQR. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia.....	54
Figura 3.14: Variables de estado con controlador LQR. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	55
Figura 3.15: Recorrido del planeador submarino con controlador LQR. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	56
Figura 3.16: Diagrama de bloques del sistema de control basado en Backstepping Adaptativo. Fuente: Elaboración propia .....	58
Figura 3.17: Variables de estado con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia .....	64
Figura 3.18: Recorrido del planeador submarino con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia .....	65
Figura 3.19: Recorrido del planeador submarino con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia .....	65
Figura 3.20: Variables de estado con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia. ....	66
Figura 3.21: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia.....	68
Figura 3.22: Señal de control de los distintos algoritmos para un planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia .....	69
Figura 3.23: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	70
Figura 3.24: Señal de control de los distintos algoritmos para un planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	71
Figura 3.25: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con perturbaciones externas. Fuente: Elaboración propia .....	72
Figura 3.26: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con coeficientes hidrodinámicos distintos. Fuente: Elaboración propia.....	74

Figura 3.27: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con coeficientes hidrodinámicos variables. Fuente: Elaboración propia.....	75
Figura 3.28: Acercamiento al punto de cambio de coeficientes hidrodinámicos en un planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia .....	75
Figura 4.1: Prototipo de planeador submarino implementado. Fuente: Elaboración propia .....	77
Figura 4.2: Representación del prototipo desarrollado. Fuente: Elaboración propia.....	78
Figura 4.3: Esquema de conexiones de los componentes del vehículo submarino tipo planeador. Fuente: Elaboración propia.....	79
Figura 4.4: Micromotor con reductor y transmisión de tornillo sinfín corona. Fuente: Proveedor (pololu.com).....	79
Figura 4.5: Bomba Peristáltica. Fuente: Proveedor (Adafruit.com).....	80
Figura 4.6: Sensor inercial BNO055. Fuente: Proveedor (Adafruit.com) .....	80
Figura 4.7: Encoders magnéticos de cuadratura. Fuente: Proveedor (Pololu.com).....	80
Figura 4.8: Raspberry Pi Zero. Fuente: Proveedor (raspberrypi.org).....	81
Figura 4.9: PWM Bonnet con PCA9685. Fuente: Proveedor (adafruit.com) .....	81
Figura 4.10: Módulo electrónico del planeador submarino. Fuente: Elaboración propia .....	82
Figura 4.11: Regulador de inclinación mediante masa móvil. Fuente: Elaboración propia .....	83
Figura 4.12: Regulador de lastre basado en una bomba peristáltica. Fuente: Elaboración propia.....	83
Figura 4.13: Diagrama de tiempos de ejecución de algoritmo desarrollado. Fuente: Elaboración propia.....	86
Figura 4.14: Movimiento realizado por el planeador submarino con un ángulo de planeado deseado de 30°. Fuente: Elaboración propia.....	87
Figura 4.15: Movimiento realizado por el planeador submarino con un ángulo de planeado deseado de 20°. Fuente: Elaboración propia.....	88

## INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 2.1: <b>Términos y variables empleadas en el control de vehículos marinos</b> .....	9
Tabla 3.1: Valores deseados según ángulo de planeado.....	41
Tabla 3.2: Valores deseados según ángulo de planeado.....	67
Tabla 3.3: Error RMS para angulo de planeado de 45°.....	68
Tabla 3.4: Potencia consumida para angulo de planeado de 45°.....	68
Tabla 3.5: Error RMS para angulo de planeado de 30°.....	70
Tabla 3.6: Potencia consumida para angulo de planeado de 30°.....	70
Tabla 3.7: Error RMS para angulo de planeado de 30° con perturbaciones externas .....	72
Tabla 3.8: Coeficientes hidrodinámicos empleados en simulación.....	73
Tabla 3.9: Error RMS antes coeficientes hidrodinámicos variables.....	73
Tabla 4.1: Protocolos de comunicaciones empleados en el prototipo.....	84
Tabla 4.2: Frecuencia y prioridad de hilo.....	85
Tabla 4.3: Tiempo de ejecución final obtenido por hilo.....	86
Tabla 4.4: Error RMS obtenido en prruebas, ángulo de planeo de 30°.....	88
Tabla 4.5: Error RMS obtenido en prruebas, ángulo de planeo de 20°.....	89



# 1. CAPITULO 1

## 1.1. Introducción

En los últimos años, se ha observado un aumento en la dependencia de la humanidad en los ecosistemas marinos para obtener alimentos [1, 2, 3], energía [4] y otros recursos. Sin embargo, en la mayoría de estas zonas se carece de información efectiva respecto a las características físicas del ecosistema marino y en particular sobre como dichas características se ven afectadas por actividades económicas en el fondo marino y columna de agua, las cuales resultan en destrucción del hábitat y descarga de materiales contaminantes [5, 6], así como efectos relacionados al cambio climático [7, 8]. Esto conlleva a una inadecuada caracterización de los ambientes marinos generando una explotación irresponsable que, mediante la destrucción del ecosistema, contaminación, toma de decisiones y regulaciones inadecuadas pone en peligro la disponibilidad de los recursos para futuras generaciones.

Como respuesta ante esta problemática, la ingeniería marina ha desarrollado vehículos submarinos autónomos (AUVs), los cuales ofrecen la ventaja de poder realizar operaciones submarinas en zonas peligrosas o bajo condiciones ambientales extremas [9]. Estos vehículos emplean actuadores en forma de propulsores y superficies de control como timones para poder desplazarse y seguir trayectorias predefinidas bajo el agua. A su vez, los AUVs transportan una serie de instrumentos científicos que permiten obtener información del ecosistema acuático para posteriormente realizar su caracterización.

Sin embargo, en muchos casos, los AUVs convencionales se ven restringidos por su consumo energético, proveniente del uso constante de propulsores para generar las fuerzas y momentos de movimiento. Debido a esto, en la última década, misiones de exploración y caracterización se han llevado a cabo con AUVs tipo planeadores, los cuales emplean actuadores internos para modificar su flotabilidad y posición del centro de masa, permitiendo que su desplazamiento provenga del uso efectivo de la fuerza de gravedad, empuje del agua y efectos hidrodinámicos. Esta tecnología es atractiva debido a que su bajo consumo de energía le permite operar de forma continua por extensos periodos de tiempo (semanas o meses) y distancias (cientos

de kilómetros) sin depender de una embarcación madre que monitoree su posición y desplazamiento.

A pesar de ello, estos vehículos submarinos presentan diversas dificultades en su control debido a la elevada complejidad de su dinámica generada por los diversos efectos hidrodinámicos no-lineales y perturbaciones externas provenientes de corrientes variantes en el tiempo. Debido a estos factores, es difícil conseguir un desplazamiento efectivo empleando controladores clásicos convencionales (PID) y se requiere de sistemas de control avanzados que puedan garantizar la robustez de su recorrido y reducir el error de seguimiento de una trayectoria predefinida.

## 1.2. Vehículo submarino tipo planeadores

El progreso de vehículos submarinos tipo planeadores se ha visto impulsado principalmente por la necesidad de desarrollar plataformas de observación de bajo costo que puedan desplazarse de forma autónoma y eficiente en el ecosistema marino, recolectando a la par una amplia gama de parámetros. Dichas plataformas de observación son esenciales para la ciencia oceanográfica, la cual depende en gran parte de la recolección de datos científicos de los océanos para caracterizar sus propiedades y obtener un mejor conocimiento sobre su comportamiento. Debido a que la dinámica oceánica presenta una naturaleza distribuida, los datos deben ser recolectados sobre un rango extenso tanto en área como tiempo. En consecuencia, las plataformas de observación deben ser capaces de operar por extensos periodos de tiempo con el fin de poder observar variaciones tanto por el cambio de tiempo como localidad y así obtener una visión más amplia sobre la dinámica del ecosistema marino.

Como herramienta de monitoreo de los océanos, los planeadores submarinos presentan diversas ventajas sobre los métodos existentes de recolección de datos. Estos vehículos son más económicos de usar y ofrecen una mejor calidad de muestreo al permitir tomar datos con una mayor densidad espacial. Además, son más flexibles a los cambios de misión que otras plataformas y pueden operar en grupos de forma coordinada. Otro aspecto significativo de los planeadores submarinos es su capacidad de desplazarse no solo de forma horizontal, sino también en la columna de agua. Esto es importante debido a que las variaciones en las propiedades del agua son más prominentes en la dirección vertical; por lo tanto,

la toma de muestras a lo largo de la columna de agua es una labor sustancial en aplicaciones oceanográficas.

Otros métodos de recolección de datos incluyen el uso de embarcaciones y boyas fijas. Las embarcaciones representan costos elevados de operación, así como una limitada disponibilidad, lo cual implica extensos requisitos logísticos para su uso, mientras las boyas deben estar ancladas por su naturaleza y solo pueden obtener parámetros sobre una sola ubicación. Debido a su diseño y forma de desplazamiento, los vehículos submarinos tipo planeador son capaces de superar estas dificultades.

La visión de los planeadores submarinos empleados como un factor importante en la toma de datos de los océanos fue desarrollada por Henry Stommel [10], la cual fue reconocida al establecer la iniciativa de investigación AOSN (Autonomous Ocean Sampling Network) [11]. Dicha iniciativa fue responsable del desarrollo de tres planeadores submarinos, el *Slocum* [12] desarrollado por Webb Research de Teledyne Marine, el *Spray* [13] desarrollado por el Scripps Institution of Oceanography de la Universidad de San Diego y el *Seaglider* [14], desarrollador en la Universidad de Washington. Rodnick et al [15] describe las características de los tres vehículos, sus consideraciones de diseño, los sensores que llevan, capacidad de comunicación y modo de desplazamiento.

Los planeadores mencionados, al igual que otros desarrollados como prototipos de laboratorio [16, 17, 18] se diferencian principalmente de los AUV convencionales debido a su uso de actuadores internos para generar su desplazamiento. Estos actuadores se encuentran ubicados en el interior de los cascos de los vehículos, estando así aislados del ambiente oceánico y por lo tanto son menos propensos a corrosión y daño que los actuadores externos. Así mismo, estos actuadores preservan la integridad del diseño hidrodinámico del casco, por lo tanto, no incrementan el arrastre del vehículo ni aumentan la dificultad de hermetizar los componentes electrónicos. Además, la fuerza generada por los actuadores internos es independientes del flujo relativo del medio donde se desplace; por lo tanto, permiten que el vehículo opere a velocidades bajas o en ambientes marinos con condiciones severas.

El principio de operación de los planeadores submarinos es relativamente simple, se basan en el concepto de que un cuerpo rígido sumergido en un fluido se hunde, flota o mantiene su posición dependiendo si el cuerpo pesa más, menos o igual que el fluido que desplaza, es decir si posee flotabilidad negativa, positiva o neutra. Además, si el cuerpo rígido presenta superficies tipo alas puede realizar desplazamientos en

el plano horizontal de forma adicional al movimiento vertical generado por su flotabilidad. Así, combinando una serie de desplazamientos de planeo se sumersión e inmersión se puede generar un movimiento neto horizontal tal como se muestra en la Figura 1.1

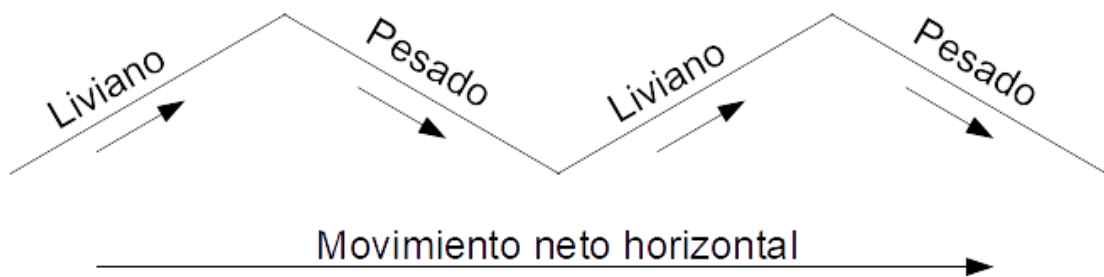


Figura 1.1: Representación del movimiento realizado por un planeador submarino. Fuente: Elaboración propia

Debido a que se requiere que un planeador submarino realice ambos movimientos verticales, estos vehículos deben contener un mecanismo que les permita modificar su flotabilidad, denominado motor de flotabilidad. Los tres vehículos mencionados anteriormente emplean una bomba para desplazar fluidos (agua o aceite) entre un reservorio interno y una membrana externa, modificando su volumen. De esta forma logran variar su densidad con respecto al fluido donde se desplazan efectivamente cambiando su flotabilidad. Del mismo modo, este comportamiento se puede obtener mediante un sistema de lastre, el cual succiona y expulsa el fluido que rodea al vehículo variando el peso de este en vez de su volumen. Debido a que la densidad del planeador depende de ambas variables, modificar el peso y mantener el volumen constante también genera una variación en la densidad que modifica la flotabilidad del planeador según se requiera.

Otra característica principal de los planeadores submarinos es su capacidad de desplazar su centro de masa. Para ello emplean un bloque de baterías u otra masa interna la cual es desplazada hacia la proa o popa del vehículo desplazando así el centro de gravedad hacia la dirección indicada. En consecuencia, este desplazamiento de masas modifica la inclinación del vehículo y su ángulo de planeo modificando la relación entre el movimiento vertical y horizontal en cada etapa de planeado. Por otro lado, si la masa se desplaza hacia babor o estribor, el centro de gravedad se desplaza en la dirección correspondiente y genera un momento de rotación en el planeador. Este movimiento se puede emplear para inducir un cambio

en la inclinación del vehículo, el cual debido a la presencia de alas genera giros de forma similar al movimiento de un vehículo aéreo.

### 1.3. Antecedentes

En años previos, varios trabajos de investigación se han llevado a cabo con el fin de desarrollar sistemas de control para regular la posición, velocidad y trayectoria de vehículos submarinos tipo planeador. La mayoría de los sistemas de control desarrollados, como por ejemplo los mostrados por Bhatta [19] y Noh [20], emplean controladores lineales convencionales (PID), así como reguladores cuadráticos lineales (LQR) como los presentados por Mahmoudian [21] y Leonard [22]. Sin embargo, otras estrategias de control, las cuales consideran efectos dinámicos más complejos empleando técnicas de control no lineal y control avanzado también se han estudiado. Entre ellas se encuentran los controladores de modo deslizante de Yang [23] y Song [24], las redes neuronales por Isa [25] y Dong [26], la lógica difusa descrita por Loc [27] y controladores predictivos basados en modelo por Cooney [28] y Steenson [29].

En [30], los controladores PID desarrollados por Panish se emplean para controlar la inclinación y el giro del vehículo. Debido a la relativa simplicidad de estos controladores, las estrategias de control que los emplean deben de desacoplar los desplazamientos verticales y horizontales tal que estos se consideran independientes. Así, se puede desarrollar controladores PID independientes para controlar el ángulo de ataque y profundidad del vehículo. Sin embargo, la dinámica de los planeadores submarinos es no-lineal y los controladores PID no pueden compensar las fuerzas hidrodinámicas no modeladas y perturbaciones desconocidas. El mismo efecto se puede apreciar en los reguladores lineales presentados por Da Silva [31] y Moon Joo [32]; los cuales, a pesar de obtenerse a partir de un proceso de optimización, consideran la dinámica del planeador submarino como un proceso lineal.

Los controladores de modo deslizante para seguimiento de una trayectoria submarina han sido propuestos por Yang [23], Bessa [33]. Estos controladores son sistemas robustos con baja sensibilidad a perturbaciones externas; sin embargo, también presentan una señal de control altamente oscilatoria alrededor del punto de estabilidad, denominado chattering. Este efecto degenera el comportamiento

dinámico en un planeador y puede llevar a la inestabilidad. Un sistema de control MIMO (múltiples entradas y múltiples salidas) fue presentado por Goheen [34], empleando reguladores lineales. Sin embargo, estos controladores presentan un bajo desempeño al cambiar entre trayectorias descendentes y ascendentes [4].

Nag realizó un estudio comparativo en [35], proponiendo el uso de un controlador difuso adaptativo combinado con un controlador PID para seguir la trayectoria. Sin embargo, el modelo considerado fue SISO (una entrada y una salida), sin considerar las no linealidades del planeador. Una Red Neural recurrente basada en control MPC (control predictivo basado en modelo) para regular el desplazamiento en un plano longitudinal fue propuesto por Shan [36]; sin embargo, se decidió no considerar los efectos de las corrientes de agua.

Debido a las no-linealidades inherentes al sistema y las dificultades en determinar un buen modelo matemático del vehículo, una estrategia de control basada en lógica difusa adaptativa acoplada con compensadores dinámicos fue desarrollada por Loc en [27]. El controlador tiene la ventaja de un proceso de autoconfiguración rápida y las simulaciones presentaron un desempeño satisfactorio; sin embargo, no se investigó el efecto de no-linealidades y perturbaciones externas. Cooney presentó un controlador predictivo basado en modelos para las no-linealidades de un planeador Odyssey y rechazo a perturbaciones en [28]. Sin embargo, durante la implementación se observó un problema de comunicación entre la señal de control obtenida por el controlador y el valor actual de entrada que recibía el vehículo. En [23] Yang abarca los problemas de robustez producidos por no-linealidades y propuso un controlador de modo deslizante adaptativo. Sin embargo, el chattering resultante llevó a la inestabilidad.

Estrategias de control basadas en redes neuronales se han propuesto para solucionar los problemas de robustez debido a los efectos no lineales en los modelos dinámicos. Esto se debe a su habilidad para soportar no-linealidades y adaptarse a condiciones variantes como el caso de corrientes no constantes. En [25], una red neuronal fue propuesta e implementada para controlar la inclinación, velocidad, propulsor, timón y masa deslizante en un AUV. Las variables se pudieron controlar, no obstante, la respuesta del sistema no pudo cumplir los requisitos de tiempo y el sistema fue demasiado complejo para aplicaciones de tiempo real. En [37] Naeem, propuso un algoritmo genético basado en MPC para controlar un autopiloto de un AUV convencional. El algoritmo fue probado en campo en [38] presentando

saturación en el ángulo del timón causando chattering. Además, el algoritmo genético no fue instalado completamente debido a su alto costo computacional.

Se observa que debido a las complejidades dinámicas y no linealidades presentes en el desplazamiento de un vehículo submarino tipo planeador, la problemática relacionada con el diseño de sistemas de control de estos vehículos no ha sido resuelta de forma satisfactoria. Por consiguiente, una solución eficaz para controlar un planeador submarino tal que se recorra una trayectoria predefinida mediante la aplicación de controladores avanzados requiere de un esfuerzo significativo y constituye un desafío para la comunidad científica.

## 1.4. Objetivos de la tesis

### 1.4.1. Objetivo general

El presente trabajo tiene como objetivo general:

- Desarrollo de un sistema de control para un robot AUV (Autonomous Underwater Vehicle) no tripulado tipo planeador a fin de seguir una trayectoria predefinida y optimizar el consumo de energía.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Desarrollar un estudio sobre el estado del arte de los sistemas de control del movimiento autónomo y seguimiento de trayectorias de AUVs tipo planeador.
- Obtener el modelo matemático que caracterice el comportamiento dinámico de un AUV tipo planeador.
- Diseñar un sistema de observadores que permitan estimar de forma adecuada las variables principales del vehículo en su desplazamiento.
- Diseñar un sistema de control avanzado, que permita mejorar la respuesta del vehículo y seguir la trayectoria establecida por la misión.
- Demostrar la eficacia del sistema de control, comparando índices de desempeño y consumo de energía con sistemas de control clásicos basados en PID.

## 2. ANÁLISIS DEL MODELO DE UN VEHÍCULO SUBMARINO TIPO PLANEADOR

En el presente capítulo se desarrolla el modelo dinámico de un vehículo submarino tipo planeador, el cual está compuesto por un cuerpo con alas fijas, un control de lastre y control de una masa móvil interna. El modelo se obtiene a partir del desarrollo en [22] empleando principios de energía, momento y las leyes de Newton, y considera las principales características del vehículo. Entre dichas características se encuentra la configuración y geometría del planeador, las fuerzas de gravedad y empuje hidrodinámico, los efectos de masa e inercia agregada producidos por el movimiento en un fluido denso, fuerzas hidrodinámicas de arrastre y el control de la masa móvil interna y de lastre.

### 2.1. Definición de coordenadas

Para el análisis de vehículo marinos en seis grados de libertad, es recomendable definir dos sistemas de referencia que faciliten la descripción de las variables a emplear. Estos sistemas se definen como un sistema fijo a tierra o inercial y un sistema fijo al cuerpo del vehículo que se desplaza y rota en conjunto con él.

#### 2.1.1. Sistema de referencia Inercial

Para el caso de vehículos marinos, dicho sistema puede ser considerado fijo a la tierra considerando la aceleración de esta despreciable. Los ejes del sistema inercial se ubican tal que los ejes  $x$  e  $y$  generan un plano horizontal perpendicular a la fuerza de la gravedad mientras que el eje  $z$  se ubica en la dirección de la gravedad y es positivo hacia abajo. A su vez, dicho sistema puede ser elegido tal que  $z = 0$  represente la superficie marina de tal forma que la coordenada  $z$  exprese la profundidad a la cual se encuentra el vehículo. En este sistema inercial, se considera a  $i, j, k$  como vectores unitarios de las direcciones  $x, y, z$  respectivamente tal como se muestra en la Figura 2.1. Esta elección de sistema de referencia inercial es consistente con la literatura marina [39] y es análogo al sistema NED (North, East, Down), en donde el eje  $x$  e  $y$  se ubican en las direcciones cardinales de Norte y Este respectivamente.



### 2.1.2. Sistema de referencia fijo al cuerpo

El sistema de referencia adjunto al cuerpo del vehículo  $\{b\} = (x_b, y_b, z_b)$  es un sistema de referencia que se desplaza junto al vehículo. El origen de dicho sistema se selecciona para que coincida con el centro de flotabilidad del vehículo mientras que sus ejes se alinean con los ejes principales del planeador como se muestra en la Figura 2.1.

- $x_b$  – Eje longitudinal positivo en la dirección de la nariz (de popa a proa)
- $y_b$  – Eje transversal en el plano de las alas (hacia estribor)
- $z_b$  – Eje normal (de arriba hacia abajo)

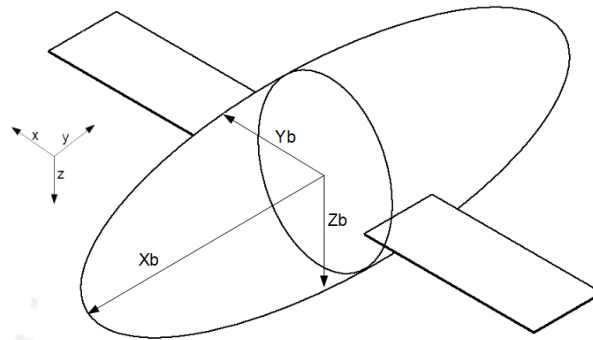


Figura 2.1: Sistemas de referencia de un vehículo submarino tipo planeador. Fuente: Elaboración propia.

Una vez definido el sistema de referencia fijo al cuerpo se describen los términos y variables de la Tabla 2.1, los cuales describen el movimiento en seis grados de libertad de los vehículos marinos. Dichos términos corresponden a un sistema de referencia fijo al vehículo como se muestra en la Figura 2.2.

Tabla 2.1: Términos y variables empleadas en el control de vehículos marinos

<i>DOF</i>		<i>Fuerzas y Momentos</i>	<i>Velocidad lineal y angular</i>	<i>Posición y ángulos</i>
1	Movimiento en dirección x (surge)	$X$	$u$	$x$
2	Movimiento en dirección y (sway)	$Y$	$v$	$y$
3	Movimiento en dirección z (heave)	$Z$	$w$	$z$
4	Rotación sobre eje x (roll)	$K$	$p$	$\phi$
5	Rotación sobre el eje y (pitch)	$M$	$q$	$\theta$
6	Rotación sobre el eje z (yaw)	$N$	$r$	$\psi$

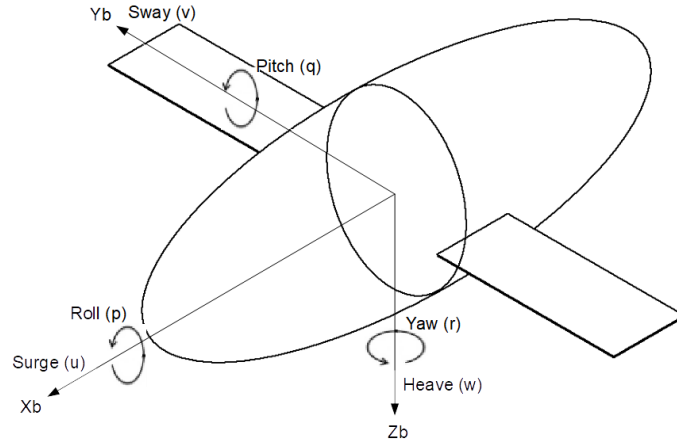


Figura 2.2: Representación de los movimientos realizados por un vehículo submarino. Fuente: Elaboración propia.

La velocidad linear y angular son usualmente expresadas en el sistema de referencia fijo al cuerpo, empleando la siguiente notación vectorial [40].

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.1$$

$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.2$$

En donde  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  describen la velocidad linear y angular respectivamente.

Por otro lado, la posición y orientación del vehículo (expresada en ángulos de Euler) son usualmente expresadas en el sistema de referencia inercial fijo a la tierra o NED.

Dicha posición del vehículo se denota por el vector  $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T]^T$ , donde

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.3$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = [\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.4$$

### 2.1.3. Transformación entre sistemas de referencia

La orientación relativa del sistema de referencia fijo al cuerpo en relación con el sistema de referencia inercial se expresa mediante la matriz rotacional  $\mathbf{R}$ . Esta matriz puede ser parametrizada empleando cuaterniones o ángulos de Euler [41, 42], caso en el cual  $\mathbf{R}$  es un elemento del grupo de Lie  $SO(3)$ , el cual representa el grupo ortogonal especial de orden 3. El grupo de Lie  $SO(3)$  [43] se define como el conjunto de matrices  $R$  de orden  $3 \times 3$  tal que

$$SO(3) = \{R | R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, R^T R = I_{3 \times 3} \text{ y } \det(R) = 1\}$$

Además, el grupo de Lie  $SO(3)$  permite definir la operación producto cruz  $c = a \times b$  como

$$c = S(a)b \quad 2.5$$

Donde la transformación  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$  pertenece al álgebra de Lie  $so(3)$  de  $SO(3)$  y es la representación antisimétrica del producto cruz definida como

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Por definición,  $so(3)$  es el espacio tangente de  $SO(3)$  en la identidad y es por lo tanto un espacio vectorial de matrices antisimétricas de  $3 \times 3$  [43, 44]. Considerando estas definiciones y el subgrupo de  $SO(3)$  de un parámetro, se puede obtener las principales matrices de rotación alrededor de los ejes principales  $R_{x,\phi}$ ,  $R_{y,\theta}$ ,  $R_{z,\psi} \in SO(3)$ , cuyo efecto se muestra en la Figura 2.3.

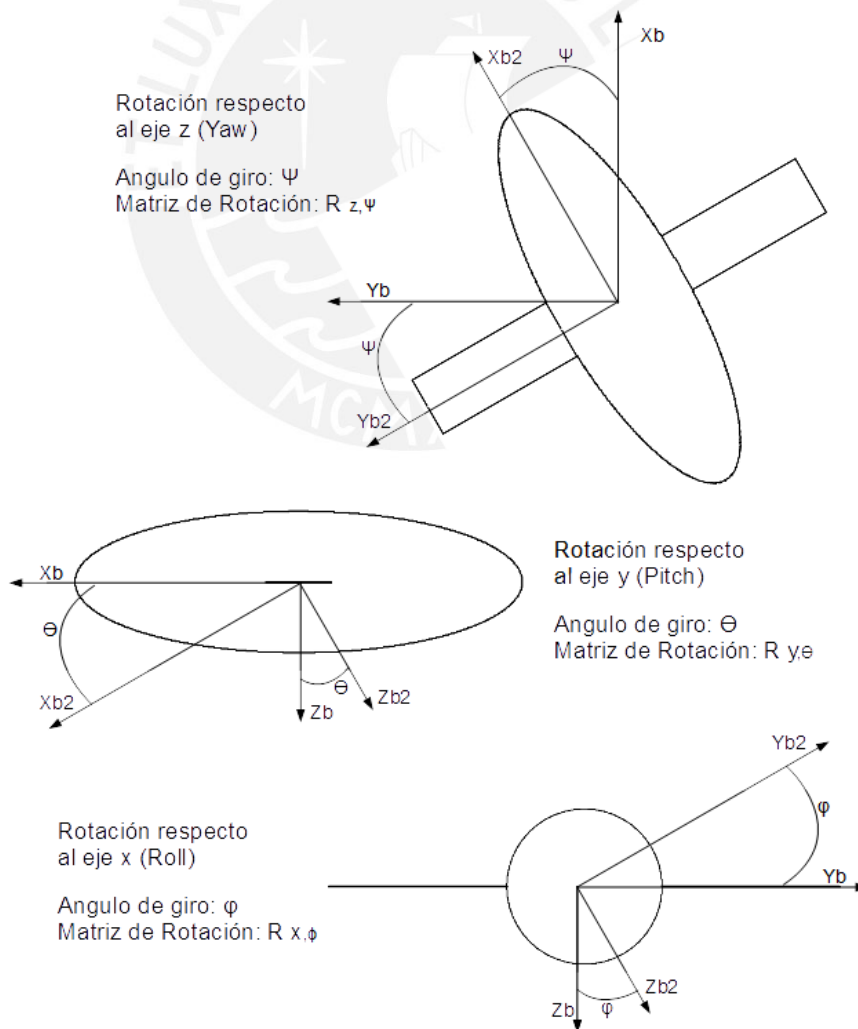


Figura 2.3: Representación de las rotaciones sobre los ejes principales. Fuente: Elaboración propia.

$$\mathbf{R}_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al derivar estas matrices respecto a la identidad, es decir para  $\phi = 0, \theta = 0, \psi = 0$ , tal que  $R_{x,\phi} = R_{y,\theta} = R_{z,\psi} = I_3$  se obtienen las bases de  $so(3)$  [44].

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = S([1,0,0]^T), G_2 = S([0,1,0]^T), G_3 = S([0,0,1]^T)$$

Por lo tanto, un elemento de  $so(3)$  se puede expresar como la combinación lineal de las bases  $G_i, i = 1,2,3$ .

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$a_1 G_1 + a_2 G_2 + a_3 G_3 \in so(3) \quad 2.7$$

De esta forma el álgebra de Lie  $so(3)$  se puede expresar como

$$S(\mathbf{a}) = so(3) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.8$$

La matriz de rotación total  $\mathbf{R}$  desde el sistema de referencia adjunto al cuerpo hacia el sistema de referencia inercial se define como el producto de las matrices de rotación principales  $\mathbf{R}_{x,\phi}, \mathbf{R}_{y,\theta}, \mathbf{R}_{z,\psi} \in SO(3)$  siguiendo el orden de multiplicación  $ZYX$ , convencional en ingeniería marina [40].

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\psi} \times \mathbf{R}_{y,\theta} \times \mathbf{R}_{x,\phi}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad 2.9$$

De esta forma  $\mathbf{R}$  puede ser empleado para transformar la velocidad lineal del vehículo submarino tipo planeador  $\mathbf{u}$  hacia el sistema inercial tal que

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \mathbf{R}\mathbf{u} \quad 2.10$$

Mientras la velocidad angular se puede expresar en  $so(3)$  como [45].

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{R}} \in so(3) \quad 2.11$$

Resolviendo se obtiene

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi & \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi & 0 & -\dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi & \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(\boldsymbol{\omega}) = S([p, q, r]^T) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad 2.12$$

Obteniendo así la matriz de transformación para velocidades angulares

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}_2$$

Donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad 2.13$$

Finalmente, la matriz de transformación desde el sistema de referencia fijo al cuerpo del vehículo hacia el sistema inercial está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad 2.14$$

Donde  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\omega}^T]^T \in \mathbb{R}^6$  describe el vector de velocidad del cuerpo rígido.

## 2.2. Cinemática

Como se describió previamente, la posición del planeador  $\boldsymbol{\eta}_1 = (x, y, z)^T$ , es el vector desde el origen del sistema de referencia inercial hacia el origen del sistema adjunto al cuerpo como se muestra en la Figura 2.4. El vehículo se desplaza con una

velocidad de traslación relativa al sistema de referencia inercial  $\dot{\eta}_1 \in \mathbb{R}^3$  expresado como  $\mathbf{u} = (u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3$  en el sistema adjunto al cuerpo. De forma similar se puede expresar la velocidad angular como  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T \in \mathbb{R}^3$  en el sistema del cuerpo y  $\dot{\eta}_2 \in \mathbb{R}^3$  en el sistema inercial. Esta notación es la estándar empleada para vehículos marinos, sin embargo, al momento de realizar el análisis del modelo, las diversas variables pueden generar confusión; por lo tanto, durante el desarrollo se emplearán las siguientes variables para expresar la velocidad lineal y angular en el sistema de referencia fijo al cuerpo.

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T = \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.15$$

$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T = \boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T \in \mathbb{R}^3 \quad 2.16$$

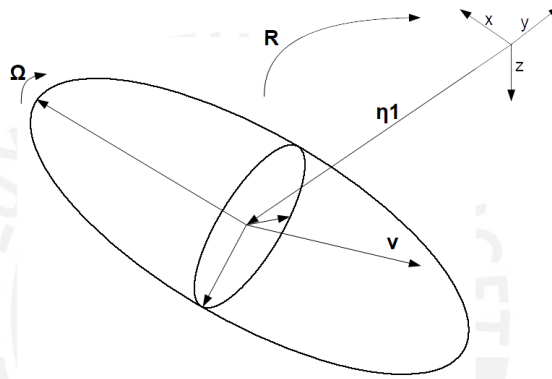


Figura 2.4: Esquema de vectores del planeador submarino.  
Fuente: Elaboración propia.

Se puede apreciar que estas nuevas expresiones son afines a las empleadas en textos de mecánica clásica [46], lo cual permite mejorar la comprensión de los términos y facilita el proceso de derivación y análisis.

De esta forma, la posición de un planeador submarino puede ser completamente descrito por las variables previamente mencionadas

$$(\eta_1, R) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

A su vez, al no imponer ninguna restricción sobre como el vehículo puede desplazarse en el espacio y debido a que  $R$  relaciona los vectores entre los sistemas de referencia, el sistema cinemático del vehículo se puede describir con las siguientes ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= R\mathbf{v} \\ \dot{R} &= R\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad 2.17$$

## 2.3. Dinámica

### 2.3.1. Modelo del vehículo

El planeador submarino se modela como el conjunto de un casco rígido con dos masas internas puntuales, una con posición fija y magnitud variable  $m_l$  y una masa móvil con magnitud fija y posición variable  $m_m$ . La masa fija de valor controlable  $m_l$ , representa el mecanismo de regulación de lastre el cual puede ubicarse desfasado del centro de flotabilidad  $C_b$ . La segunda masa puntual de valor constante  $m_m$  describe un cuerpo rígido que se puede desplazar dentro del vehículo el cual se emplea para regular su orientación en el espacio. Por lo general, los vehículos submarinos emplean un conjunto de baterías montado sobre un mecanismo móvil debido a su gran masa relativa en comparación con otros elementos dentro del vehículo. El casco del vehículo se modela como un cuerpo rígido con masa  $m_c$  uniformemente distribuida y una masa puntual  $m_f$  desfasada del centro de flotabilidad. La masa distribuida  $m_c$  se puede considerar como una masa puntual ubicada en el centro de gravedad  $C_g$  el cual, al tratarse de un cuerpo homogéneo, coincide con el centro de flotabilidad  $C_b$ .

Las posiciones, en el sistema de referencia fijo al cuerpo, de las masas puntuales  $m_f$  y  $m_l$  se representan por los vectores  $\mathbf{r}_f$ ,  $\mathbf{r}_l$  respectivamente mientras el vector  $\mathbf{r}_m(t)$  describe la posición de la masa móvil  $m_m$  en el tiempo  $t$ . Todas las masas puntuales junto a sus respectivos vectores de posición se muestran en la Figura 2.5.

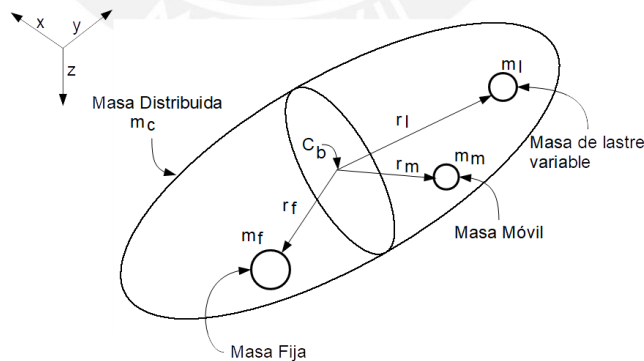


Figura 2.5: Posición de la distribución de masas internas del planeador submarino. Fuente: Elaboración propia.

De esta forma la masa total del vehículo se expresa como

$$m_v = m_s + m_m = m_c + m_f + m_l + m_m \quad 2.18$$

Donde  $m_s$  representa la masa estática del vehículo

$$m_s = m_c + m_f + m_l \quad 2.19$$

### 2.3.2. Ecuaciones de movimiento del planeador

Las ecuaciones de movimiento se derivan según [22], determinando el momento total del sistema vehículo – fluido y posteriormente aplicando las leyes de Newton. Para ello, se denominan las variables  $\mathbf{p}$  y  $\boldsymbol{\pi}$  representando respectivamente el momento lineal y momento angular total del sistema vehículo-fluido respecto al sistema de coordenadas inercial. Asimismo, se definen los términos  $\mathbf{p}_m$ ,  $\mathbf{p}_l$  y  $\mathbf{p}_f$  los cuales representan el momento total de las masas puntuales  $m_m$ ,  $m_l$  y  $m_f$  con respecto al sistema de coordenadas inercial.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^I \mathbf{f}_{ext_i} \\
 \dot{\boldsymbol{\pi}} &= \sum_{i=1}^I (\mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_{ext_i}) + \sum_{j=1}^J \boldsymbol{\tau}_{ext_j} \\
 \dot{\mathbf{p}}_m &= m_m g \mathbf{k} + \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_{int-movil_k} \\
 \dot{\mathbf{p}}_l &= m_l g \mathbf{k} + \sum_{l=1}^L \mathbf{f}_{int-lastre_l} \\
 \dot{\mathbf{p}}_f &= m_f g \mathbf{k} + \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_{int-desfas_m}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde todos los vectores se expresan en referencia al marco de referencia inercial,  $\mathbf{k}$  es el vector unitario en dirección de la gravedad,  $\mathbf{f}_{ext_i}$  es una fuerza externa aplicada al sistema,  $\boldsymbol{\tau}_{ext_i}$  es un torque externo y el vector  $\mathbf{x}_i$  indica el punto de aplicación de la fuerza externa  $\mathbf{f}_{ext_i}$ . En ambos casos, estas fuerzas externas incluyen las fuerzas de gravedad y empuje; sin embargo, la fuerza de gravedad se indica explícitamente en las últimas tres ecuaciones como la única fuerza externa aplicada sobre las masas puntuales. Las fuerzas restantes  $\mathbf{f}_{int}$  representan fuerzas de interacción entre el cuerpo del vehículo y las masas internas. La fuerza  $\mathbf{f}_{int-movil_k}$  se emplea como fuerza de control para determina la posición de la masa móvil  $m_m$  mientras las fuerzas  $\mathbf{f}_{int-lastre_l}$  y  $\mathbf{f}_{int-desfas_m}$  se aplican sobre las masas de lastre  $m_l$  y masa desfasada  $m_f$ . Debido a que estas masas puntuales no pueden desplazarse relativamente al vehículo, las fuerzas internas aplicadas sobre ellas se consideran fuerzas de restricción determinadas por el movimiento del vehículo submarino.

A continuación, se denomina  $\mathbf{P}$  como el momento lineal respecto al sistema de referencia inercial expresado en el sistema de referencia fijo al cuerpo y  $\boldsymbol{\Pi}$  como el



momento angular total sobre el sistema de referencia fijo al cuerpo expresado también en dicho sistema de coordenadas. De esta forma se obtienen las siguientes expresiones empleando la matriz de rotación  $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{R}\mathbf{P} \\ \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{R}\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\eta}_1 \times \mathbf{p} \end{aligned} \quad 2.21$$

De forma análoga se define  $\mathbf{P}_m$  como el momento de la masa móvil expresado en el sistema de referencia fijo al cuerpo mientras que  $\mathbf{P}_l$  y  $\mathbf{P}_w$  representan el momento de la masa puntual de lastre y masa desfasada. Al igual que los momentos anteriores, se puede realizar una rotación empleando la matriz  $\mathbf{R}$  para relacionar su valor con el momento del sistema de referencia inercial.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \mathbf{R}\mathbf{P}_m \\ \mathbf{p}_l &= \mathbf{R}\mathbf{P}_l \\ \mathbf{p}_w &= \mathbf{R}\mathbf{P}_w \end{aligned} \quad 2.22$$

Diferenciando las ecuaciones 2.21 y 2.22 respecto al tiempo y empleando las ecuaciones cinemáticas 2.17 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{P}} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{P}) \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} &= \mathbf{R}(\dot{\boldsymbol{\Pi}} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Pi}) + \mathbf{R}\mathbf{v} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\eta}_1 \times \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}}_m &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{P}}_m + \mathcal{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{P}_m) \\ \dot{\mathbf{p}}_l &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{P}}_l + \mathcal{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{P}_l) \\ \dot{\mathbf{p}}_f &= \mathbf{R}(\dot{\mathbf{P}}_f + \mathcal{S}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{P}_f) \end{aligned} \quad 2.23$$

Reemplazando la razón de cambio de los momentos inerciales definidos en 2.20 por las expresiones determinadas dadas en 2.23 se obtiene las siguientes ecuaciones dinámicas en coordenadas del sistema de referencia fijo al cuerpo.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}^T \sum_{i=1}^I \mathbf{f}_{ext_i} \\ \dot{\boldsymbol{\Pi}} &= \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{v} + \mathbf{R}^T \left( \sum_{i=1}^I (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\eta}_1) \times \mathbf{f}_{ext_i} \right) + \mathbf{R}^T \sum_{j=1}^J \boldsymbol{\tau}_{ext_j} \\ \dot{\mathbf{P}}_m &= \mathbf{P}_m \times \boldsymbol{\Omega} + m_m g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_{int-movil_k} \\ \dot{\mathbf{P}}_l &= \mathbf{P}_l \times \boldsymbol{\Omega} + m_l g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{l=1}^L \mathbf{f}_{int-lastre_l} \\ \dot{\mathbf{P}}_f &= \mathbf{P}_f \times \boldsymbol{\Omega} + m_f g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_{int-desfas_m} \end{aligned} \quad 2.24$$

Donde  $\mathbf{R}^T \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_{int-movil_k}$  es la fuerza interna actuando sobre la masa móvil  $m_m$  expresada en el sistema de referencia fijo al cuerpo.

A continuación, se define

$$\mathbf{u}_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_m \times \boldsymbol{\Omega} + m_m g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_{int-movil_k} \quad 2.25$$

Tal que

$$\dot{\mathbf{P}}_m = \mathbf{u}_m$$

De forma similar se define

$$\mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} u_{l1} \\ u_{l2} \\ u_{l3} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_l \times \boldsymbol{\Omega} + m_l g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{l=1}^L \mathbf{f}_{int-lastre_l} \quad 2.26$$

$$\mathbf{u}_f = \begin{pmatrix} u_{f1} \\ u_{f2} \\ u_{f3} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_f \times \boldsymbol{\Omega} + m_f g(\mathbf{R}^T \mathbf{k}) + \mathbf{R}^T \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_{int-desfas_m} \quad 2.27$$

Tal que

$$\dot{\mathbf{P}}_l = \mathbf{u}_l$$

$$\dot{\mathbf{P}}_f = \mathbf{u}_f$$

Los efectos generados por las fuerzas y torques hidrodinámicos sobre el planeador submarino se encuentran incluidos en las expresiones  $\sum_{i=1}^I \mathbf{f}_{ext_i}$  y  $\sum_{j=1}^J \boldsymbol{\tau}_{ext_j}$ . Debido a que dichas fuerzas dependen de forma explícita en los estados  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$ , las expresiones 2.24-2.27 no se emplearán de forma directa para describir el movimiento del planeador. Dichas ecuaciones se transformarán a un nuevo conjunto de estados que incluyen los términos  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  de esta forma se podrá generar una mejor descripción de los efectos hidrodinámicos. Con el fin de obtener expresiones para  $\mathbf{P}$ ,  $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\mathbf{P}_m$ ,  $\mathbf{P}_l$  y  $\mathbf{P}_f$ , se determina la energía cinética total del sistema vehículo – fluido. Según [47], la energía cinética  $T_s$  de un cuerpo rígido con masa total  $m_c$ , centro de gravedad en la posición  $\mathbf{r}_s$  descrito en el sistema de referencia fijo al cuerpo y matriz de inercias  $\mathbf{J}_c$  está dada por

$$T_c = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\Omega}) \begin{pmatrix} m_c \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_c \mathcal{S}(\mathbf{r}_s) \\ m_c \mathcal{S}(\mathbf{r}_s) & \mathbf{J}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \quad 2.28$$

Donde  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  es la matriz identidad de 3x3

Para obtener la expresión de la energía de la masa móvil  $m_m$ , se debe primero obtener la velocidad absoluta de dicha masa puntual, definida como  $\mathbf{v}_m$ . Debido a que la velocidad relativa de la masa  $m_m$  respecto al sistema de referencia fijo al cuerpo es  $\dot{\mathbf{r}}_m$  se puede determinar

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{r}}_m + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m$$

Por lo tanto, de forma similar a 2.28, la energía cinética de la masa puntual móvil  $T_m$  se determina mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} m_m \|\mathbf{v}_m\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\Omega} \quad \dot{\mathbf{r}}_m) \begin{pmatrix} m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_m S(\mathbf{r}_m) & m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ m_m S(\mathbf{r}_m) & -m_m S(\mathbf{r}_m) S(\mathbf{r}_m) & m_m S(\mathbf{r}_m) \\ m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_m S(\mathbf{r}_m) & m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 2.29$$

El mismo procedimiento se aplica para determinar la energía cinética de las masas puntuales de lastre y desfase donde  $\mathbf{v}_l$  y  $\mathbf{v}_f$  son las velocidades absolutas de ambas partículas.

$$\begin{aligned} T_l &= \frac{1}{2} m_l \|\mathbf{v}_l\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\Omega} \quad \dot{\mathbf{r}}_l) \begin{pmatrix} m_l \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_l S(\mathbf{r}_l) & m_l \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ m_l S(\mathbf{r}_l) & -m_l S(\mathbf{r}_l) S(\mathbf{r}_l) & m_l S(\mathbf{r}_l) \\ m_l \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_l S(\mathbf{r}_l) & m_l \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_l \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 2.30$$

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{1}{2} m_w \|\mathbf{v}_w\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\Omega} \quad \dot{\mathbf{r}}_w) \begin{pmatrix} m_w \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_w S(\mathbf{r}_w) & m_w \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ m_w S(\mathbf{r}_f) & -m_w S(\mathbf{r}_w) S(\mathbf{r}_w) & m_w S(\mathbf{r}_w) \\ m_w \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_w S(\mathbf{r}_w) & m_w \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 2.31$$

Adicionalmente, debe considerarse la energía cinética del fluido que rodea al vehículo el cual es empujado y acelerado por el vehículo en movimiento. Este efecto puede ser ignorado en aplicaciones con robots industriales debido a que la densidad del aire es mucho menor que la densidad de los elementos mecánicos móviles; sin embargo, en aplicaciones subacuáticas, la densidad del agua si es comparable con la densidad de los vehículos [48].

Para poder acelerar el fluido, el vehículo debe de ejercer una fuerza sobre el fluido; por la tercera ley de Newton, el fluido ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre el vehículo. Esta fuerza de reacción, denominada masa hidrodinámica agregada, puede considerarse como una masa virtual añadida al sistema debido a efectos de acelerar y desacelerar el vehículo en un fluido con densidad comparable

al vehículo. Considerando el volumen de agua que rodea al vehículo como incomprensible, irrotacional y sin movimiento en el infinito, cuyo efecto sobre un cuerpo rígido sumergido y en movimiento se representa por una masa agregada  $\mathbf{M}_f$ , e inercia agregada  $\mathbf{J}_f$ , Lamb [49] obtiene una expresión de la energía cinética empleando ecuaciones de Kirchhoff [50]

$$T_f = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\Omega}) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_f & \mathbf{D}_f^T \\ \mathbf{D}_f & \mathbf{J}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \quad 2.32$$

donde  $\mathbf{D}_f$  representa una matriz de acoplamiento de estados, la cual junto a  $\mathbf{M}_f$  y  $\mathbf{J}_f$  dependen de la geometría externa del cuerpo del vehículo y la densidad del fluido en el que se desplaza.

Finalmente, la energía cinética total del sistema vehículo – fluido está dada por

$$T = T_c + T_m + T_l + T_w + T_f$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ \dot{\mathbf{r}}_l \\ \dot{\mathbf{r}}_w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & m_m I_{3x3} & m_l I_{3x3} & m_w I_{3x3} \\ M_{21} & -M_{22} & m_m S(\mathbf{r}_m) & m_l S(\mathbf{r}_l) & m_w S(\mathbf{r}_w) \\ m_m I_{3x3} & -m_m S(\mathbf{r}_m) & m_m I_{3x3} & 0 & 0 \\ m_l I_{3x3} & -m_l S(\mathbf{r}_l) & 0 & m_l I_{3x3} & 0 \\ m_w I_{3x3} & -m_w S(\mathbf{r}_w) & 0 & 0 & m_w I_{3x3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ \dot{\mathbf{r}}_l \\ \dot{\mathbf{r}}_w \end{pmatrix} \quad 2.33$$

Donde

$$\begin{aligned} M_{11} &= (m_s + m_m) I_{3x3} + \mathbf{M}_f \\ M_{12} &= -m_m S(\mathbf{r}_p) - m_l S(\mathbf{r}_l) - m_w S(\mathbf{r}_w) + \mathbf{D}_f^T \\ M_{21} &= m_m S(\mathbf{r}_p) + m_l S(\mathbf{r}_l) + m_w S(\mathbf{r}_w) + \mathbf{D}_f \\ M_{22} &= J_h - m_m S(\mathbf{r}_p) S(\mathbf{r}_p) - m_l S(\mathbf{r}_l) S(\mathbf{r}_l) - m_w S(\mathbf{r}_w) S(\mathbf{r}_w) + J_f \end{aligned}$$

A partir de dicha expresión de energía, se puede calcular los diferentes momentos determinando sus derivadas parciales

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \left( (m_s + m_m) I_{3x3} + \mathbf{M}_f \right) \mathbf{v} + \mathbf{D}_f^T \boldsymbol{\Omega} + m_m (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m) \\ &\quad + m_l (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_l + \dot{\mathbf{r}}_l) + m_w (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_w + \dot{\mathbf{r}}_w) \\ \Pi &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{D}_f \mathbf{v} + (\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_f) \boldsymbol{\Omega} + m_m S(\mathbf{r}_m) (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m) \\ &\quad + m_l S(\mathbf{r}_l) (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_l + \dot{\mathbf{r}}_l) + m_w S(\mathbf{r}_w) (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_w + \dot{\mathbf{r}}_w) \\ P_m &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_m} = m_m (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m) \\ P_l &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_l} = m_l (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_l + \dot{\mathbf{r}}_l) \\ P_w &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_w} = m_w (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_w + \dot{\mathbf{r}}_w) \end{aligned} \quad 2.34$$

Considerando un caso en el cual la geometría del vehículo es un elipsoide con alas montadas simétricamente, se observa que el vehículo presenta tres planos de simetría. Debido a esto las matrices de masa e inercia agregada son diagonales y el termino de acoplamiento cruzado es nulo. Por lo tanto

$$M_f = \text{diag}(m_{f1}, m_{f2}, m_{f3}) \quad 2.35$$

$$J_f = \text{diag}(J_{f1}, J_{f2}, J_{f3}) \quad 2.36$$

$$D_f = D_f^T = 0 \quad 2.37$$

Además, se definen las siguientes matrices para representar la masa e inercia agregada como una masa virtual agregada al casco del vehículo.

$$M = m_c I_{3x3} + M_f \quad 2.38$$

$$J = J_h + J_f \quad 2.39$$

Así las expresiones de los momentos se pueden escribir de forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_l \\ \mathbf{P}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & m_m I_{3x3} & m_l I_{3x3} & m_w I_{3x3} \\ M_{21} & M_{22} & m_m S(r_m) & m_l S(r_l) & m_w S(r_w) \\ m_m I_{3x3} & -m_m S(r_m) & m_m I_{3x3} & 0 & 0 \\ m_l I_{3x3} & -m_l S(r_l) & 0 & m_l I_{3x3} & 0 \\ m_w I_{3x3} & -m_w S(r_w) & 0 & 0 & m_w I_{3x3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ \dot{\mathbf{r}}_l \\ \dot{\mathbf{r}}_w \end{pmatrix} \quad 2.40$$

donde

$$M_{11} = M + (m_m + m_l + m_w) I_{3x3}$$

$$M_{12} = -m_m S(r_p) - m_l S(r_l) - m_w S(r_w)$$

$$M_{21} = m_m S(r_p) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w)$$

$$M_{22} = J - m_m S(r_p) S(r_p) - m_l S(r_l) S(r_l) - m_w S(r_w) S(r_w)$$

Invirtiendo la expresión se obtiene las velocidades del vehículo y masas internas en termino de los momentos totales

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ \dot{\mathbf{r}}_l \\ \dot{\mathbf{r}}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 & -M^{-1} & -M^{-1} & -M^{-1} \\ 0 & J^{-1} & -J^{-1} S(r_m) & -J^{-1} S(r_l) & -J^{-1} S(r_w) \\ -M^{-1} & S(r_m) J^{-1} & M_{33}^{-1} & M_{34}^{-1} & M_{35}^{-1} \\ -M^{-1} & S(r_l) J^{-1} & M_{43}^{-1} & M_{44}^{-1} & M_{45}^{-1} \\ -M^{-1} & S(r_w) J^{-1} & M_{53}^{-1} & M_{54}^{-1} & M_{55}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_l \\ \mathbf{P}_w \end{pmatrix} \quad 2.41$$

Donde

$$\begin{aligned}
M_{33}^{-1} &= M^{-1} - S(r_m)J^{-1}S(r_m) + \frac{1}{m_m}I_{3 \times 3} \\
M_{34}^{-1} &= M^{-1} - S(r_m)J^{-1}S(r_l) \\
M_{35}^{-1} &= M^{-1} - S(r_m)J^{-1}S(r_w) \\
M_{43}^{-1} &= M^{-1} - S(r_l)J^{-1}S(r_m) \\
M_{44}^{-1} &= M^{-1} - S(r_l)J^{-1}S(r_l) + \frac{1}{m_l}I_{3 \times 3} \\
M_{45}^{-1} &= M^{-1} - S(r_l)J^{-1}S(r_w) \\
M_{53}^{-1} &= M^{-1} - S(r_w)J^{-1}S(r_m) \\
M_{54}^{-1} &= M^{-1} - S(r_w)J^{-1}S(r_l) \\
M_{55}^{-1} &= M^{-1} - S(r_w)J^{-1}S(r_w) + \frac{1}{m_w}I_{3 \times 3}
\end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento con las velocidades del vehículo como variables de estado se deriva la ecuación obtenida respecto al tiempo. Esta operación introduce términos relacionados a la velocidad de cambio de la masa de lastre  $\dot{m}_l$ . Este término se entiende como la velocidad de bombeo de un fluido (agua o aceite) empleado para cambiar la densidad del vehículo. Debido a que en un planeador submarino el lastre es bombeado tal que la fuerza o momento generada no afecta de forma significativa la dinámica del sistema, por lo tanto, puede ser eliminado de las ecuaciones.

Dichas fuerzas dependientes del cambio en el lastre se generan debido a la expulsión de masa, la cual genera fuerzas sobre el vehículo. Sin embargo, en los planeadores submarinos la masa de lastre es de magnitudes mucho menor a la masa total del planeador y la razón de cambio de dicha masa es baja. Esto se debe al tipo de actuadores que se emplean y para reducir el consumo energético asociado a desplazar masas a una alta velocidad. Además, el cambio en el lastre solo ocurre en intervalos discretos durante las transiciones de planeados de sumersión a inmersión, por lo tanto  $\dot{m}_l$  es cero durante la mayoría del tiempo de operación del vehículo y no afecta los movimientos estacionarios.

Diferenciando la ecuación de estados se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{r}_m \\ \dot{r}_l \\ \dot{r}_w \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{\Pi} \\ \dot{P}_m \\ \dot{P}_l \\ \dot{P}_w \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(M^{-1}) \begin{pmatrix} P \\ \Pi \\ P_m \\ P_l \\ P_w \end{pmatrix} \quad 2.42$$

Donde

$$\frac{d}{dt}(M^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J^{-1}S(\dot{r}_m) & -J^{-1}S(\dot{r}_l) & -J^{-1}S(\dot{r}_w) \\ 0 & S(\dot{r}_m)J^{-1} & \frac{d}{dt}M_{33}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{34}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{35}^{-1} \\ 0 & S(\dot{r}_l)J^{-1} & \frac{d}{dt}M_{43}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{44}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{45}^{-1} \\ 0 & S(\dot{r}_w)J^{-1} & \frac{d}{dt}M_{53}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{54}^{-1} & \frac{d}{dt}M_{55}^{-1} \end{pmatrix} \quad 2.43$$

Debido a que  $\frac{d}{dt}M^{-1} = 0$  y  $\frac{d}{dt}J^{-1} = 0$ , se obtiene que

$$\frac{d}{dt}M_{33}^{-1} = -S(\dot{r}_m)J^{-1}S(r_m) - S(r_m)J^{-1}S(\dot{r}_m)$$

$$\frac{d}{dt}M_{34}^{-1} = -S(\dot{r}_m)J^{-1}S(r_l) - S(r_m)J^{-1}S(\dot{r}_l)$$

$$\frac{d}{dt}M_{35}^{-1} = -S(\dot{r}_m)J^{-1}S(r_w) - S(r_m)J^{-1}S(\dot{r}_w)$$

$$\frac{d}{dt}M_{43}^{-1} = -S(\dot{r}_l)J^{-1}S(r_m) - S(r_l)J^{-1}S(\dot{r}_m)$$

$$\frac{d}{dt}M_{44}^{-1} = -S(\dot{r}_l)J^{-1}S(r_l) - S(r_l)J^{-1}S(\dot{r}_l)$$

$$\frac{d}{dt}M_{45}^{-1} = -S(\dot{r}_l)J^{-1}S(r_w) - S(r_l)J^{-1}S(\dot{r}_w)$$

$$\frac{d}{dt}M_{53}^{-1} = -S(\dot{r}_w)J^{-1}S(r_m) - S(r_w)J^{-1}S(\dot{r}_m)$$

$$\frac{d}{dt}M_{54}^{-1} = -S(\dot{r}_w)J^{-1}S(r_l) - S(r_w)J^{-1}S(\dot{r}_l)$$

$$\frac{d}{dt}M_{55}^{-1} = -S(\dot{r}_w)J^{-1}S(r_w) - S(r_w)J^{-1}S(\dot{r}_w)$$

Los términos  $\frac{d}{dt}M_{ij}^{-1}$  son generalmente pequeños. Ya que las masas de lastre y peso se encuentran fijadas dentro del planeador, las variables  $\dot{r}_w$  y  $\dot{r}_l$  son nulas.  $\dot{r}_m$  solo presenta un valor durante transiciones de ángulo de planeado, el cual es pequeño debido a la velocidad del actuador, y es cero en estado estacionario. Mientras tanto, los valores de  $J$  son elevados comparados con las distancias de  $r_m$ ,  $r_l$  y  $r_w$ .

Finalmente, reemplazando las ecuaciones obtenidas por las derivadas  $\dot{P}$ ,  $\dot{\Pi}$ ,  $\dot{P}_m$ ,  $\dot{P}_l$ ,  $\dot{P}_w$  y la relación entre los momentos y velocidades del vehículo se obtienen las ecuaciones de movimiento para un planeador submarino desplazándose en un espacio tridimensional.

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\Omega} \\ \dot{v} \\ \dot{r}_m \\ \dot{r}_l \\ \dot{r}_w \\ \dot{P}_m \\ \dot{P}_l \\ \dot{P}_w \\ \dot{m}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RS(\Omega) \\ Rv \\ J^{-1}\bar{T} \\ M^{-1}\bar{F} \\ \frac{1}{m_m}P_m - v - \Omega \times r_m \\ \frac{1}{m_m}P_l - v - \Omega \times r_l \\ \frac{1}{m_m}P_w - v - \Omega \times r_w \\ u_m \\ u_l \\ u_w \\ u_{bombeo} \end{pmatrix} \quad 2.44$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{T} &= (J\Omega + S(r_m)P_m + S(r_l)P_l + S(r_w)P_w) \times \Omega + (Mv \times v) \\ &\quad + (\Omega \times r_m) \times P_m + (\Omega \times r_l) \times P_l + (\Omega \times r_w) \times P_w \\ &\quad + (m_m S(r_m) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w)) g R^T k + T_{ext} \\ &\quad - (S(r_m)u_m + S(r_l)u_l + S(r_w)u_w) \\ \bar{F} &= (Mv + P_m + P_l + P_w) \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext} - (u_m + u_l + u_w) \end{aligned} \quad 2.45$$

$$F_{ext} = R^T \Sigma f_{ext_i}$$

$$T_{ext} = R^T \Sigma (x_i - \eta_1) \times f_{ext_i} + R^T \Sigma \tau_{ext_j}$$

Donde  $f_{ext_i}$  representa todas las fuerzas externas sobre el vehículo incluyendo las fuerzas de flotación, arrastre y sus asociados momentos hidrodinámicos, mientras  $x_i$  representa el punto en el vehículo donde se aplican dichas fuerzas.

La variable  $u_m$  representa la fuerza de control que se aplica sobre la masa móvil  $m_m$ , las variables restantes  $u_l$  y  $u_w$  expresan las fuerzas internas de restricción sobre las masas de lastre y peso. Las señales de control que se ingresan al sistema están dadas por  $u_m$  y  $u_{bombeo}$ , la cual representa la velocidad de bombeo del fluido que se emplea para modificar la masa de lastre.

### 2.3.3. Transformación para Controlar la Aceleración de Masas

#### Puntuales

Una desventaja del modelo presentado es el requerimiento de determinar las fuerzas de restricción  $u_l$  y  $u_w$  que deben ser aplicadas al sistema con la condición de que dichas masas se encuentran fijas a la estructura. Debido a ello se realiza un procedimiento de cambio de variable para poder transformar el sistema obtenido desde el vector de estados  $x = (R, \eta_1, \Omega, v, r_m, r_l, r_w, P_m, P_l, P_w, \dot{m}_l)^T$  hacia  $z =$



$(R, \eta_1, \Omega, v, r_m, r_l, r_w, \dot{r}_m, \dot{r}_l, \dot{r}_w, \dot{m}_l)^T$ . Esta transformación modifica el vector de entradas desde

$$u = \begin{pmatrix} u_m \\ u_l \\ u_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{P}_m \\ \dot{P}_l \\ \dot{P}_w \end{pmatrix} \quad 2.46$$

Correspondiente a fuerzas que actúan sobre las masas puntuales internas  $m_m, m_l$  y  $m_w$  respectivamente, hacia el vector

$$w = \begin{pmatrix} w_m \\ w_l \\ w_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r}_m \\ \ddot{r}_l \\ \ddot{r}_w \end{pmatrix} \quad 2.47$$

Representando las aceleraciones de las masas puntuales. Así mismo, las variables de estado correspondientes a la posición y momento de las masas puntuales se transforman a la posición y velocidad de dichas masas. Esta transformación es similar a agregar un sistema de amortiguación a las masas puntuales, evitando que estas se muevan en respuesta al desplazamiento del vehículo. Además, debido a que en un planeador submarino dichas masas se desplazan mediante actuadores lineales o mecanismos tipo tornillo sin fin, ejecutar el control mediante la aceleración de dichas masas representa mejor su comportamiento dinámico. Asimismo, se puede fijar las masas puntuales y evitar que se muevan al igualar su velocidad y aceleración correspondiente a cero, hacer esto permite determinar las fuerzas de restricción que mantienen a las masas puntuales fijas. Debido a que esta transformación permite evitar que las masas internas se desplacen en respuesta al movimiento del vehículo, la estabilidad del sistema mejora.

La transformación se obtiene a partir de los estados

$$\begin{pmatrix} P_m \\ P_l \\ P_w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r}_m \\ \dot{r}_l \\ \dot{r}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_m} P_m - v - \Omega \times r_m \\ \frac{1}{m_l} P_l - v - \Omega \times r_l \\ \frac{1}{m_w} P_w - v - \Omega \times r_w \end{pmatrix} \quad 2.48$$

Derivando la ecuación de transformación de estados se obtiene la aceleración de las masas puntuales en términos del nuevo vector de estados  $z$  y de las entradas  $u$ , la cual puede ser expresada como

$$\ddot{r} = F(z) + G(z)u \quad 2.49$$

Donde

$$F(z) = (F_m(z), F_l(z), F_w(z))^T \quad 2.50$$

$$G(z) = \begin{pmatrix} M_{33}^{-1} & M_{34}^{-1} & M_{35}^{-1} \\ M_{43}^{-1} & M_{44}^{-1} & M_{45}^{-1} \\ M_{53}^{-1} & M_{54}^{-1} & M_{55}^{-1} \end{pmatrix} \quad 2.51$$

Como  $G$  se define a partir de propiedades de masa e inercia, las cuales son matrices positiva definidas, se puede demostrar que su determinante siempre es mayor que cero, por lo tanto, existe  $H = G^{-1}(z)$

Los valores de la matriz  $F(z)$  están dados por

$$\begin{aligned} F_m(z) &= -M^{-1}[(Mv + P_m + P_l + P_w) \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_m \\ &\quad -J^{-1}[(J\Omega + S(r_m)P_m + S(r_l)P_l + S(r_w)P_w) \times \Omega + (Mv \times v) + T_{ext}] \\ F_l(z) &= -M^{-1}[(Mv + P_m + P_l + P_w) \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_l \\ &\quad -J^{-1}[(J\Omega + S(r_m)P_m + S(r_l)P_l + S(r_w)P_w) \times \Omega + (Mv \times v) + T_{ext}] \\ F_w(z) &= -M^{-1}[(Mv + P_m + P_l + P_w) \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_w \\ &\quad -J^{-1}[(J\Omega + S(r_m)P_m + S(r_l)P_l + S(r_w)P_w) \times \Omega + (Mv \times v) + T_{ext}] \end{aligned} \quad \begin{matrix} 2. \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

Para realizar la transformación de la ley de control según [50], se procede a establecer la ley de control como

$$u = G^{-1}(z)(-F + \ddot{r}) = G^{-1}(z)(-F + w) \quad 2.53$$

Tal que

$$\begin{pmatrix} u_m \\ u_l \\ u_w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} -F_m + w_m \\ -F_l + w_l \\ -F_w + w_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(-F_m + w_m) + H_{12}(-F_l + w_l) + H_{13}(-F_w + w_w) \\ H_{21}(-F_m + w_m) + H_{22}(-F_l + w_l) + H_{23}(-F_w + w_w) \\ H_{31}(-F_m + w_m) + H_{32}(-F_l + w_l) + H_{33}(-F_w + w_w) \end{pmatrix}$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones de transformación obtenidas y considerando que

$$\begin{aligned} P_m &= m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) \\ P_l &= m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) \\ P_w &= m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w) \end{aligned}$$

Se obtiene las ecuaciones de movimiento de un planeador en un espacio tridimensional con entrada descrita por la aceleración de las masas internas.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\Omega} \\ \dot{v} \\ \dot{r}_m \\ \dot{r}_l \\ \dot{r}_w \\ \ddot{r}_m \\ \ddot{r}_l \\ \ddot{r}_w \\ \dot{m}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RS(\Omega) \\ Rv \\ J^{-1}\bar{T} \\ M^{-1}\bar{F} \\ \dot{r}_m \\ \dot{r}_l \\ \dot{r}_w \\ w_m \\ w_l \\ w_w \\ u_{bombeo} \end{pmatrix} \quad 2.54$$

Donde

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= [J\Omega + S(r_m)m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) + S(r_l)m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) + S(r_w)m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w) \\
&\quad + (\Omega \times r_m) \times (m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) + (\Omega \times r_l) \times (m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) \\
&\quad + (\Omega \times r_w) \times (m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)) + (m_m S(r_m) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w))gR \\
&\quad + T_{ext} - S(r_m)[H_{11}(-\tilde{F}_m + w_m) + H_{12}(-\tilde{F}_l + w_l) + H_{13}(-F_w + w_w)] \\
&\quad - S(r_l)[H_{21}(-F_m + w_m) + H_{22}(-F_l + w_l) + H_{23}(-F_w + w_w)] \\
&\quad - S(r_w)[H_{31}(-F_m + w_m) + H_{32}(-F_l + w_l) + H_{33}(-F_w + w_w)] \\
\bar{F} &= (Mv + m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) + m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) + m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)) \\
&\quad + m_o g R^T k + F_{ext} \\
&\quad - [H_{11}(-F_m + w_m) + H_{12}(-F_l + w_l) + H_{13}(-F_w + w_w)] \\
&\quad - [H_{21}(-F_m + w_m) + H_{22}(-F_l + w_l) + H_{23}(-F_w + w_w)] \\
&\quad - [H_{31}(-F_m + w_m) + H_{32}(-F_l + w_l) + H_{33}(-F_w + w_w)]
\end{aligned} \quad \begin{matrix} 2. \\ 55 \end{matrix}$$

Donde

$$\begin{aligned}
F_{ext} &= R^T \Sigma f_{ext_i} \\
T_{ext} &= R^T \Sigma (x_i - \eta_1) \times f_{ext_i} + R^T \Sigma \tau_{ext_j}
\end{aligned}$$

y  $\tilde{Z}$  representa el estado apropiado definido en z

$$\begin{aligned}
P_m &= m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) \\
P_l &= m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) \\
P_w &= m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_m(z) &= -M^{-1}[Mv + m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) + m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) \\
&\quad + m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)] \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_m \\
&\quad - J^{-1}[[J\Omega + S(r_m)(m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) \\
&\quad + S(r_l)(m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) + S(r_w)(m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w))] \times \Omega \\
&\quad + (\Omega \times r_m) \times (m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) + (Mv \times v) + T_{ext} \\
&\quad + (\Omega \times r_l) \times (m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) \\
&\quad + (\Omega \times r_w) \times (m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)) \\
&\quad + (m_m S(r_m) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w)) g R^T k] \times r_m i \\
F_l(z) &= -M^{-1}[Mv + m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) + m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) \\
&\quad + m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)] \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_l \\
&\quad - J^{-1}[[J\Omega + S(r_m)(m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) \\
&\quad + S(r_l)(m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) \\
&\quad + S(r_w)(m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w))] \times \Omega \\
&\quad + (\Omega \times r_m) \times (m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) + (Mv \times v) + T_{ext} \\
&\quad + (\Omega \times r_l) \times (m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) \\
&\quad + (\Omega \times r_w) \times (m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)) \\
&\quad + (m_m S(r_m) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w)) g R^T k] \times r_l \\
F_w(z) &= -M^{-1}[Mv + m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m) + m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l) \\
&\quad + m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)] \times \Omega + m_o g R^T k + F_{ext}] - \Omega \times \dot{r}_w \\
&\quad - J^{-1}[[J\Omega + S(r_m)(m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) \\
&\quad + S(r_l)(m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) + S(r_w)(m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w))] \times \Omega \\
&\quad + (\Omega \times r_m) \times (m_m(v + \Omega \times r_m + \dot{r}_m)) + (Mv \times v) + T_{ext} \\
&\quad + (\Omega \times r_l) \times (m_l(v + \Omega \times r_l + \dot{r}_l)) \\
&\quad + (\Omega \times r_w) \times (m_w(v + \Omega \times r_w + \dot{r}_w)) \\
&\quad + (m_m S(r_m) + m_l S(r_l) + m_w S(r_w)) g R^T k] \times r_w
\end{aligned} \tag{2.56}$$

### 2.3.4. Modelo con masas simplificadas y control de aceleración

El modelo obtenido en el capítulo anterior considera como variables de estado la posición y la velocidad de las masas internas, la masa deslizante, masa de lastre y la masa desfasada. Debido a la naturaleza de dichas masas cuyas posiciones son fijas dentro de la mayoría de los planeadores submarinos, se puede considerar que  $\dot{r}_l = \dot{r}_w = w_l = w_w = 0$ . Además, si el vehículo se diseña tal forma que su masa fija se distribuya de forma uniforme respecto a su centro de gravedad y la masa de lastre se ubique en el centro de flotabilidad, se puede considerar a  $r_l = r_w = m_w = 0$  con  $m_w$  siendo parte de la masa del casco. Estas simplificaciones generan un modelo del planeador submarino simplificado con control de masa de lastre donde la masa deslizante interna es la única que genera el desplazamiento del centro de gravedad. Sustituyendo los valores de  $r_l = \dot{r}_l = r_w = \dot{r}_w = w_l = w_w = \mathbf{0}$  y  $m_w = 0$  en la

ecuación 2.54 se obtiene el modelo dinámico con masa interna deslizante, masa de lastre fija en el centro de flotabilidad y masa fija distribuida uniformemente

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ \ddot{\mathbf{r}}_m \\ \dot{m}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RS(\Omega) \\ Rv \\ J^{-1}\bar{T}_{ms} \\ M^{-1}\bar{F}_{ms} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \\ w_m \\ u_{bombeo} \end{pmatrix} \quad 2.57$$

Donde  $\bar{T}_{ms}$  y  $\bar{F}_{ms}$  representan las fuerzas y torques sobre el modelo de masas simples

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ms} &= [J\Omega + S(\mathbf{r}_m)(\bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m))] \times \Omega + (M\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\ &+ (\Omega \times \mathbf{r}_m) \times (\bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m)) + \bar{m}S(\mathbf{r}_m)gR^T\mathbf{k} + \mathbf{T}_{ext} \\ &- S(\mathbf{r}_m)[\mathbf{H}_{11}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{m_{ms}} + w_m) + \mathbf{H}_{12}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{l_{ms}})] \\ \bar{F}_{ms} &= [(M + m_l I)\mathbf{v} + \bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m)] \times \Omega + m_0 g R^T \mathbf{k} + \mathbf{F}_{ext} \\ &- [\mathbf{H}_{11}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{m_{ms}} + w_m) + \mathbf{H}_{12}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{l_{ms}})] \\ &- [\mathbf{H}_{21}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{m_{ms}} + w_m) + \mathbf{H}_{22}(-\tilde{\mathbf{Z}}_{l_{ms}})] \end{aligned} \quad 2.58$$

Donde  $\mathbf{F}_{ext}$  y  $\mathbf{T}_{ext}$  son las fuerzas y torque externos definidos previamente y  $\tilde{\mathbf{Z}}_{ms} = (\tilde{\mathbf{Z}}_{p_{ms}}, \tilde{\mathbf{Z}}_{b_{ms}})$  es el resultado de sustituir  $m_w = 0$  y  $\mathbf{r}_l = \dot{\mathbf{r}}_l = \mathbf{r}_w = \dot{\mathbf{r}}_w = \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_w = \mathbf{0}$  en la ecuación 2.56, obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{m_{ms}} &= -M^{-1} \left[ [(M + m_l I)\mathbf{v} + \bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m)] \times \Omega + m_0 g R^T \mathbf{k} + \mathbf{F}_{ext} \right] \\ &- \Omega \times \dot{\mathbf{r}}_m - J^{-1} \left[ (J\Omega + S(\mathbf{r}_m)(\bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m))) \times \Omega \right. \\ &+ (M\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{T}_{ext} + (\Omega \times \mathbf{r}_m) \times (\bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m)) \\ &+ \bar{m}S(\mathbf{r}_m)gR^T\mathbf{k} \left. \right] \times \mathbf{r}_m \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{l_{ms}} &= -M^{-1} \left[ [(M + m_l I)\mathbf{v} + \bar{m}(\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m)] \times \Omega + m_0 g R^T \mathbf{k} + \mathbf{F}_{ext} \right] \\ &- \Omega \times \dot{\mathbf{r}}_m \end{aligned} \quad 2.59$$

### 2.3.5. Modelado de términos hidrodinámicos

Las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el planeador submarino, denominadas  $\mathbf{F}_{ext}$  y  $\mathbf{T}_{ext}$  incluyen las fuerzas y momentos hidrodinámicos. Estas fuerzas y momentos son generados debido al movimiento del planeador dentro del agua y provienen de efectos viscosos presentes en la capa límite entre el vehículo y fluido. Las fuerzas y momentos causados por masas e inercias agregadas se incluyen de forma independiente en el modelo como se mostró en la sección 2.3.2. Los efectos

hidrodinámicos que afectan un cuerpo rígido desplazándose en un fluido son extremadamente complejos; sin embargo, se pueden representar mediante ecuaciones de mediana complejidad que representen de forma significativa dicho efecto.

Los momentos y fuerzas hidrodinámicas se pueden expresar en el marco de referencia adjunto al cuerpo como fuerzas de sustentación, resistencia y fuerza lateral (lift, drag y sideforce) siguiendo la convención estándar aeroespacial [51, 52]. Según este estándar, dichas fuerzas se expresan como

$$F_{hidro} = \begin{pmatrix} -D \\ SF \\ -L \end{pmatrix}, \quad M_{hidro} = \begin{pmatrix} M_{DL_1} \\ M_{DL_2} \\ M_{DL_3} \end{pmatrix}$$

Donde  $L$ ,  $D$ ,  $SF$  representan las fuerzas de sustentación (Lift), resistencia (drag) y fuerza lateral (sideforce), y  $M_{DL_i}$  es el momento ejercido respecto al  $i$ -ésimo eje. Estas fuerzas se suelen representar mediante el uso de coeficientes, los cuales incluyen términos en función de la velocidad del vehículo, aceleración y velocidad de giro [53, 54, 55].

Una representación simple del estado estacionario de las fuerzas hidrodinámicas se puede expresar como

$$F_{hidro} = \begin{pmatrix} -D \\ SF \\ -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_D(\alpha, \beta, Re) \\ \frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_{SF}(\alpha, \beta, Re) \\ -\frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_L(\alpha, \beta, Re) \end{pmatrix} \quad 2.60$$

Los términos  $C_D$ ,  $C_{SF}$ ,  $C_L$  son los coeficientes de las fuerzas hidrodinámicas definidos por el área característica del planeador  $A$ , mientras la presión dinámica se representa por  $\frac{1}{2}\rho V_r^2$ . El valor de los coeficientes hidrodinámicos depende de los ángulos de inclinación del planeador,  $\alpha$  y  $\beta$ , así como  $Re$ , el número de Reynolds del fluido que rodea el vehículo.

Por otro lado, el momento hidrodinámico, aparte de depender de la velocidad del vehículo también agrega amortiguamiento rotacional, el cual debe considerarse. Estos efectos pueden ser modelados como ecuaciones lineales y cuadráticas respecto a la velocidad rotacional  $\Omega$  [48] obteniendo las siguientes expresiones para el momento hidrodinámico

$$\mathbf{M}_{hidro} = \begin{pmatrix} M_{DL_1} \\ M_{DL_2} \\ M_{DL_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_{M_1}(\alpha, \beta, Re) \\ \frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_{M_2}(\alpha, \beta, Re) \\ -\frac{1}{2}\rho V_r^2 AC_{M_3}(\alpha, \beta, Re) \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{\Omega^1}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{K}_{\Omega^2}\boldsymbol{\Omega} \quad 2.61$$

Los términos  $C_{M_1}$ ,  $C_{M_2}$ ,  $C_{M_3}$  son los coeficientes del momento hidrodinámico respecto a los principales ejes del vehículo.  $\mathbf{K}_{\Omega^1}$  y  $\mathbf{K}_{\Omega^2}$  son matrices cuyos valores representan el amortiguamiento rotacional para los términos lineales y cuadráticos respectivos. Estas matrices se pueden modelar como diagonales para simplificar el modelo obtenido [48, 56].

### 2.3.6. Modelo Longitudinal

La mayoría de las misiones de navegación que se asignan a planeadores submarinos implican realizar planeos ascendentes y descendentes verticales, esto implica realizar un planeado en un solo plano. Por lo que el modelo obtenido puede simplificarse limitando el vehículo a un solo plano de movimiento. Este tipo de movimiento se realiza para aumentar la eficiencia del vehículo, reducir el consumo de energía y la naturaleza de las misiones científicas [9, 57]

El modelo obtenido se basa en el modelo simplificado obtenido en la sección 2.4.4, restringiendo las configuraciones de las masas internas, eliminando la masa desfasada y ubicando la masa de lastre en el centro de flotabilidad. Para obtener el modelo, se restringe el movimiento del vehículo a un solo plano vertical,  $i - k$  en coordenadas inerciales y  $e_1 - e_3$  en coordenadas del cuerpo de tal forma que

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_m = \begin{pmatrix} r_{m_1} \\ 0 \\ r_{m_3} \end{pmatrix}, P_m = \begin{pmatrix} P_{m_1} \\ 0 \\ P_{m_3} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Donde  $\theta$  representa el ángulo de inclinación del vehículo submarino. De esta forma las ecuaciones de movimiento para el planeador submarino se convierten en

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta \\
\dot{z} &= -v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta \\
\dot{\theta} &= \Omega_2 \\
\dot{\Omega}_2 &= \frac{1}{J_2} \left( (m_3 - m_1) v_1 v_3 - (r_{m_1} P_{m_1} + r_{m_3} P_{m_3}) \Omega_2 \right. \\
&\quad \left. - \bar{m} g (r_{m_1} \cos \theta + r_{m_3} \sin \theta) + M_{DL} - r_{m_3} u_1 + r_{m_1} u_3 \right) \\
\dot{v}_1 &= \frac{1}{m_1} (-m_3 v_3 \Omega_2 - P_{m_3} \Omega_2 - m_0 g \sin \theta + L \sin \alpha - D \cos \alpha - u_1) \\
\dot{v}_3 &= \frac{1}{m_3} (m_1 v_1 \Omega_2 + P_{m_1} \Omega_2 + m_0 g \cos \theta - L \cos \alpha - D \sin \alpha - u_3) \\
\dot{r}_{m_1} &= \frac{1}{\bar{m}} P_{m_1} - v_1 - r_{m_3} \Omega_2 \\
\dot{r}_{m_3} &= \frac{1}{\bar{m}} P_{m_3} - v_1 - r_{m_1} \Omega_2 \\
\dot{P}_{m_1} &= u_1 \\
\dot{P}_{m_3} &= u_3 \\
\dot{m}_l &= u_4
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Donde  $\alpha$  representa el ángulo de ataque,  $D$  es la fuerza de arrastre,  $L$  la fuerza de sustentación y  $M_{DL}$  el momento viscoso respecto a  $\theta$  tal como se muestra en la Figura 2.6

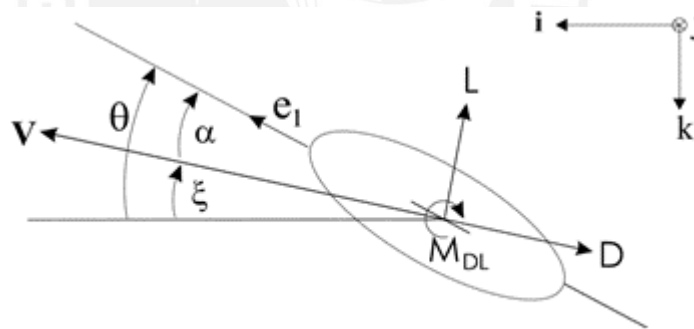


Figura 2.6: Esquema de las fuerzas hidrodinámicas de arrastre y sustentación sobre el planeador submarino.  
Fuente: Elaboración propia.

Estas fuerzas y momento se modelan según las ecuaciones 2.60 y 2.61

$$D = \frac{1}{2} \rho C_D(\alpha) A V^2 \approx (K_{D_0} + K_D \alpha^2) (v_1^2 + v_3^2) \tag{2.63}$$

$$L = \frac{1}{2} \rho C_L(\alpha) A V^2 \approx (K_{L_0} + K_L \alpha) (v_1^2 + v_3^2) \tag{2.64}$$

$$M_{DL} = \frac{1}{2} \rho C_M(\alpha) A V^2 \approx (K_{M_0} + K_M \alpha) (v_1^2 + v_3^2) + K_{\Omega_2^1} \Omega_2 + K_{\Omega_2^2} \Omega_2^2 \tag{2.65}$$



A partir de la Figura 2.6 se observa que el ángulo de planeado  $\xi$  se denota como

$$\xi = \theta - \alpha \quad 2.66$$

Además, se denota la velocidad de planeado  $V$  como

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_3^2} \quad 2.67$$

Estas dos variables se suelen emplear para indicar la ruta deseada por el planeador, por lo que conviene definir un nuevo par de ejes inerciales  $(x', z')$  tal que  $x'$  represente la posición del vehículo a lo largo de la trayectoria deseada. Esto se logra realizando una rotación al sistema de coordenadas inerciales tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi_d & -\sin \xi_d \\ \sin \xi_d & \cos \xi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad 2.68$$

De esta forma  $z'$  representa la distancia perpendicular del vehículo a la trayectoria deseada tal como se muestra en la Figura 2.7

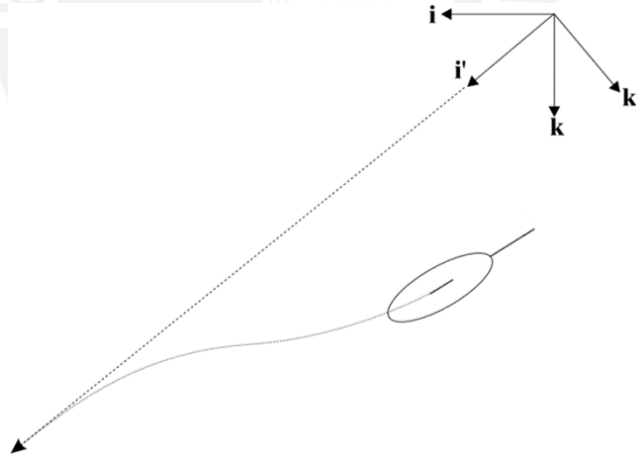


Figura 2.7: Representación del cambio de variable para regulación de trayectoria

La dinámica del estado  $z'$  se obtiene derivando la ecuación 2.68

$$\begin{aligned} \dot{z}' &= \sin \xi_d \dot{x} + \cos \xi_d \dot{z} \\ &= \sin \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) + \cos \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \end{aligned} \quad 2.69$$

El modelo obtenido considera el caso donde la masa interna deslizante se puede mover en todas las direcciones, con dos grados de libertad para el caso de

movimiento en un plano ( $x_b$  y  $z_b$ ). Sin embargo, para el caso planteado, la masa deslizante consta de un mecanismo motor-tornillo sin fin, por lo que solo se puede desplazar en una dirección. Para este caso, el modelo considera el valor de  $r_{m_3}$  fijo ( $\dot{r}_{m_3} = 0$ ) por lo que las nuevas ecuaciones de movimiento para el planeador submarino se reducen a

$$\dot{x}' = \cos \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) - \sin \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \quad 2.70$$

$$\dot{z}' = \sin \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) + \cos \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \quad 2.71$$

$$\dot{\theta} = \Omega_2 \quad 2.72$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{1}{a} \left( (m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m})Y - \bar{m}(m_3 + \bar{m})r_{m_3}X_1 - m_1\bar{m}(m_3 + \bar{m})r_{m_3}w_1 + \bar{m}(m_1 + \bar{m})r_{m_1}X_3 - m_3\bar{m}(m_1 + \bar{m})r_{m_1}\Omega_2 \right) \quad 2.73$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{m_1 + \bar{m}} (X_1 - \bar{m}r_{m_3}\dot{\Omega}_2 - \bar{m}w_1) \quad 2.74$$

$$\dot{v}_3 = \frac{1}{m_3 + \bar{m}} (X_3 + \bar{m}r_{m_1}\dot{\Omega}_2 + \bar{m}\dot{r}_{m_1}\Omega_2) \quad 2.75$$

$$\dot{r}_{m_1} = \dot{r}_{m_1} \quad 2.76$$

$$\dot{r}_{m_1} = w_1 \quad 2.77$$

$$\dot{m}_l = w_4 \quad 2.78$$

Donde

$$a = J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2$$

$$Y = (m_3 - m_1)v_1v_3 - \bar{m}\Omega_2 \left( (v_1 + r_{m_3}\Omega_2 + \dot{r}_{m_1})r_{m_1} + (v_3 - r_{m_1}\Omega_2)r_{m_3} \right) - \bar{m}g(r_{m_1} \cos \theta + r_{m_3} \sin \theta) + M_{DL} \quad 2.79$$

$$X_1 = -\bar{m}(v_3 - r_{m_1}\Omega_2)\Omega_2 - m_3\Omega_2v_3 - m_0g \sin \theta + F_L \sin \alpha - F_D \cos \alpha$$

$$X_3 = \bar{m}(v_1 + r_{m_3}\Omega_2 + \dot{r}_{m_1})\Omega_2 + m_1\Omega_2v_1 + m_0g \cos \theta - F_L \cos \alpha - F_D \sin \alpha$$

## 2.4. Conclusiones preliminares

- Se realizó un análisis del movimiento tridimensional de un vehículo submarino, considerando las masas internas de control como cuerpos independientes cuyo efecto en el vehículo completo se expresa mediante el momento total. Esto se realiza debido a que, al ser actuadores internos, la fuerza de reacción que el vehículo realiza sobre los actuadores también debe ser considerada, por lo tanto, el análisis se puede simplificar empleando el concepto de la conservación del momento total.

- Se observa que, al considerar las señales de control como la razón de cambio del momento total de las masas internas, su movimiento no se encuentra restringido y la determinación de las fuerzas de restricción no es un procedimiento trivial. Por lo tanto, se realiza una transformación de las señales de control hacia aceleraciones de masas puntuales, las cuales pueden emplearse de forma más directa en el diseño de un controlador.
- El modelo obtenido se simplifica reduciendo el movimiento permitido a un solo plano debido a que la mayoría de las misiones de navegación relacionadas al uso de planeadores submarinos no presentan la necesidad de realizar giros tridimensionales. Este procedimiento reduce el número de grados de libertad de seis a tres, con lo cual se puede proceder a diseñar un controlador que permita mantener el vehículo en una trayectoria dada.



### 3. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DEL VEHÍCULO SUBMARINO TIPO PLANEADOR

#### 3.1. Sistemas de control de vehículos submarinos

Se puede observar a partir de las ecuaciones 2.70-2.78 que la dinámica de un vehículo submarino tipo planeador se define por un sistema MIMO subactuado con dos entradas ( $w_1, w_4$ ) y cuatro salidas ( $z', \theta, v_1, v_3$ ), lo cual complica su diseño de control, debido a su naturaleza no-lineal y acoplamiento entre los estados.

Los sistemas de control convencionales emplean una estructura de control simplificada en la que el modelo dinámico se emplea para determinar de forma a priori los puntos de equilibrio del planeador submarino a partir de la ruta de planeo deseada, proceso que se explica en la sección 3.2.1. Principalmente se desea determinar los puntos de equilibrio para la masa interna deslizante y la masa de lastre, tal que se empleen como referencia en lazos de control independientes que regulan dichas variables de estado. Este esquema de control reduce la elevada complejidad de la dinámica del planeador submarino intercambiándola por un desconocimiento sobre la dinámica del vehículo. Sin embargo, al no considerar dicha dinámica, se generan tanto errores de seguimiento de ruta, apreciable en la Figura 3.1 así como un comportamiento no deseado como se muestra en la Figura 3.2. En conjunto, este comportamiento puede perjudicar las misiones de exploración a realizar, al hacer al sistema poco robusto (no considera perturbaciones provenientes de corrientes marinas) y afecta la toma de datos de los diversos instrumentos y su correlación con la ubicación del vehículo (al no mantener una inclinación y velocidad de recorrido constante).

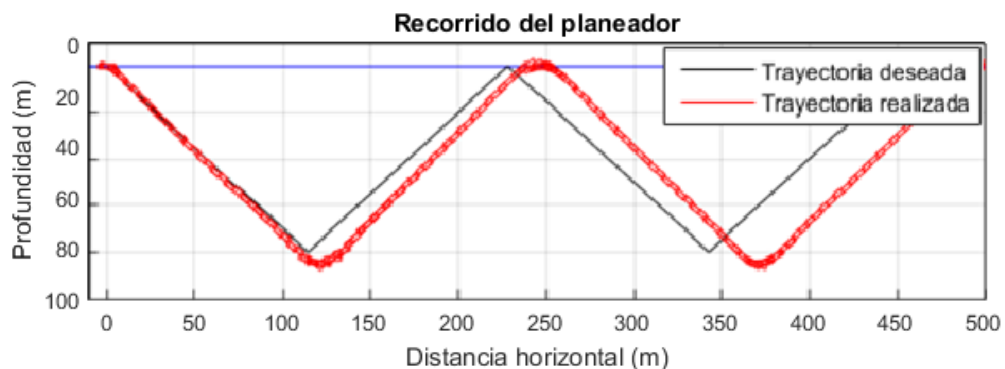


Figura 3.1: Recorrido de planeador submarino con controlador convencional basado en PID y equilibrio de masas internas.  
Fuente: Elaboración propia.

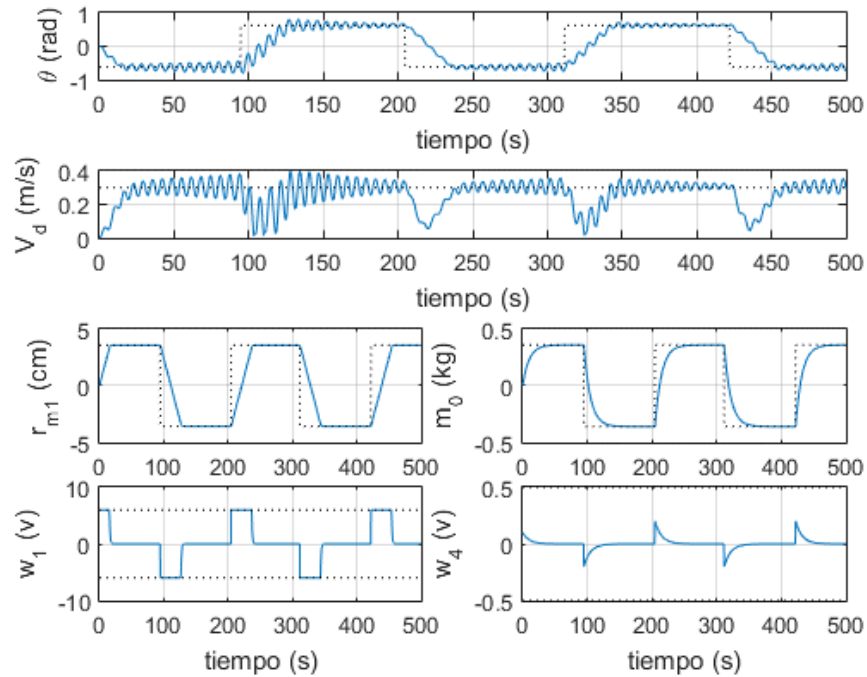


Figura 3.2: Variables de estado del planeador submarino con controlador convencional basado en PID y equilibrio de masas internas. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3.2 se puede observar que un controlador simple para el control de las masas internas del vehículo submarino es capaz de estabilizar dichas masas de forma efectiva; sin embargo, el desempeño global del planeador submarino se ve sometido a un comportamiento oscilatorio para el ángulo de planeado y la velocidad de desplazamiento. Dicho comportamiento se debe a los efectos hidrodinámicos que someten al planeador a fuerzas y momentos que el sistema de control, debido a no existir una retroalimentación de dichos estados, no es capaz de compensar.

Por lo tanto, un sistema de control más robusto, que permita obtener una navegación estable y deseada debe tener en consideración la dinámica total del vehículo, la interrelación entre las variables de estado, las entradas ( $w_1, w_4$ ) y como estas afectan la dinámica de las salidas de inclinación, velocidad y error de rastreo ( $z', \theta, v_1, v_3$ ), así como una retroalimentación de dichos estados con el fin de regular el recorrido del planeador y mantenerlo en la trayectoria deseada ( $z'_d = 0$ ).

Para ello, se plantea el diseño de tres sistemas de control, un controlador PI para sistemas MIMO que considere la interrelación entre cada entrada con cada una de las salidas mediante funciones de transferencia, un controlador LQR que regule de forma efectiva las salidas del planeador, optimizando el consumo de energía de sus actuadores internos y un control no-lineal basado en la técnica de backstepping adaptativo que estime los coeficientes hidrodinámicos y considere el efecto no-lineal sobre la dinámica del vehículo.

Los primeros dos controladores se plantean como una extensión del sistema de control empleado convencionalmente, el cual consiste en controladores PI, un sistema clásico cuyas propiedades han sido estudiadas de forma extensa, independientes para las masas internas del vehículo. El controlador propuesto emplea técnicas de diseño MIMO para expandir las leyes de control utilizadas y permitir que el sistema de control emplee la dinámica completa de la planta, incluyendo el efecto que las masas internas tienen sobre el ángulo de inclinación y la velocidad de planeo. A su vez, el controlador LQR es un regulador cuya naturaleza puede trabajar con sistemas MIMO por lo que su beneficio en el control de un planeador submarino es evidente. Sin embargo, ambos controladores presentan una estructura lineal, por lo que la dinámica del planeador submarino debe ser linealizada con el fin de diseñar ambos controladores. Debido a ello, y los errores de aproximación que una etapa de linealización puede generar en el control, también se plantea el diseño de un controlador no-lineal basado en la técnica de backstepping. De esta forma se puede tener un controlador que considere tanto el acoplamiento de estados como los efectos no-lineales observados en el Capítulo 2. Asimismo, debido a que la técnica de backstepping está basada en estabilidad de Lyapunov, se diseña un controlador dinámico adaptativo que no requiera conocer los parámetros hidrodinámicos del vehículo. Esto se realiza para mejorar el desempeño del controlador ante errores de estimación y medición de dichos parámetros, así como compensar por cambios en el desempeño del planeador a lo largo del tiempo. Adicionalmente, un controlador adaptativo facilitaría la naturaleza modular del vehículo permitiendo variar sus características como longitud, ubicación y tipo de aletas, carga sensorial sin requerir la determinación de un modelo para cada caso.

## 3.2. Obtención del sistema lineal

Para poder realizar el diseño de los controladores lineales MIMO PI y LQR, se requiere un modelo lineal de la planta; es decir que, las ecuaciones dinámicas obtenidas en la sección 2.3.6 deben de linealizarse respecto a puntos de equilibrio según la trayectoria de planeado deseada.

### 3.2.1. Determinación de los puntos de equilibrio

La ruta deseada para el vehículo submarino suele ser un camino recto descrito por un ángulo de planeo deseado  $\xi_d$  y una velocidad de avance  $V_d$ . Los valores de las variables dinámicas en un punto de equilibrio determinado por la ruta de planeado

deseada se identifican por el subíndice “d”. Dichos valores para el modelo longitudinal se obtienen a partir de las ecuaciones dinámicas del vehículo 2.70-2.73 igualando las derivadas de los estados a cero.

$$0 = \sin \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) + \cos \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \quad 3.1$$

$$0 = \frac{1}{J^2} \left( (m_{3d} - m_{1d}) v_{1d} v_{3d} - \bar{m} g (r_{m_{1d}} \cos \theta_d + r_{m_{3d}} \sin \theta_d) + M_{DL_d} \right) \quad 3.2$$

$$0 = \frac{1}{m_{1d} + \bar{m}} (-m_{0d} g \sin \theta_d + F_{L_d} \sin \alpha_d - F_{D_d} \cos \alpha_d) \quad 3.3$$

$$0 = \frac{1}{m_{3d} + \bar{m}} (m_{0d} g \cos \theta_d - F_{L_d} \cos \alpha_d - F_{D_d} \sin \alpha_d) \quad 3.4$$

Donde

$$\begin{aligned} m_{1d} &= m_{b_d} + m_h + m_{f_1} \\ m_{3d} &= m_{b_d} + m_h + m_{f_3} \\ m_{0d} &= m_{b_d} + m_h + \bar{m} - m \end{aligned}$$

Y  $z'_d = \Omega_{2d} = \dot{r}_{m_1} = w_{1d} = w_{4d} = 0$ . Además, se observa que  $x'_d$  no presenta un equilibrio pues representa la dinámica cero del planeador submarino y por lo tanto no es controlable.

Considerando el ángulo de planeado deseado  $\xi_d$ , las ecuaciones 3.3 y 3.4 pueden emplearse para determinar  $\alpha_d$ . Este cálculo se puede hacer debido a que en el equilibrio  $\xi_d$  es una función de la proporción entre las fuerzas de sustentación y resistencia. Por lo general, el valor final de dichas fuerzas depende principalmente de la geometría del vehículo, por lo que para el caso estacionario se pueden considerar invariante con respecto a la velocidad deseada  $V_d$ . Una vez determinado  $\alpha_d$ , se puede calcular

$$\theta_d = \xi_d + \alpha_d, \quad v_{1d} = V_d \cos \alpha_d, \quad v_{2d} = V_d \sin \alpha_d$$

El valor de  $m_{b_d}$  puede determinarse nuevamente empleando las ecuaciones 3.3 y 3.4, mientras que la ecuación 3.2 se emplea para determinar  $r_{m_{1d}}$  a partir del valor fijo  $r_{m_3}$ .

Para determinar  $\alpha_d$ , las ecuaciones 3.3 y 3.4, se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_d & -\sin \theta_d \\ \sin \theta_d & \cos \theta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_{0d} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_d & -\sin \alpha_d \\ \sin \alpha_d & \cos \alpha_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{D_d} \\ F_{L_d} \end{pmatrix}$$

Resolviendo, y empleando las ecuaciones 2.63 y 2.64 para modelar las fuerzas hidrodinámicas, se obtiene

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ m_{0_d} g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_d & \sin \theta_d \\ -\sin \theta_d & \cos \theta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_d & -\sin \alpha_d \\ \sin \alpha_d & \cos \alpha_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{D_d} \\ F_{L_d} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \xi_d & \sin \xi_d \\ -\sin \xi_d & \cos \xi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{D_0} + K_D \alpha_d^2 \\ K_{L_0} + K_L \alpha_d \end{pmatrix} V_d^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La primera ecuación de 3.5, es una función cuadrática, la cual se expresa como

$$\alpha_d^2 + \frac{K_L}{K_D} \tan \xi_d \alpha_d + \frac{1}{K_D} (K_{D_0} + K_{L_0} \tan \xi_d) = 0 \tag{3.6}$$

considerando a  $\xi_d \neq \frac{\pi}{2}$  y  $V_D \neq 0$

La ecuación 3.6 se puede resolver para obtener valores reales de  $\alpha_d$ , siempre y cuando  $\xi_d$  cumpla con la condición

$$\left( \frac{K_L}{K_D} \tan \xi_d \right)^2 - \frac{4}{K_D} (K_{D_0} + K_{L_0} \tan \xi_d) \geq 0 \tag{3.7}$$

Evaluando la condición 3.7 para obtener valores permisibles de  $\xi_d$  en el rango  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
\xi_d &\in \left( \tan^{-1} \left( 2 \frac{K_D}{K_L} \left( \frac{K_{L_0}}{K_L} + \sqrt{\left( \frac{K_{L_0}}{K_L} \right)^2 + \frac{K_{D_0}}{K_D}} \right) \right), \frac{\pi}{2} \right) \\
\xi_d &\in \left( -\frac{\pi}{2}, \tan^{-1} \left( 2 \frac{K_D}{K_L} \left( \frac{K_{L_0}}{K_L} - \sqrt{\left( \frac{K_{L_0}}{K_L} \right)^2 + \frac{K_{D_0}}{K_D}} \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A partir de estas conclusiones se observa que el mínimo ángulo de planeado posible depende de la proporción entre los parámetros hidrodinámicos. Una condición indica el mínimo ángulo de planeado descendiente mientras que la otra condición indica el mínimo ángulo de planeado ascendente.

Resolviendo la ecuación cuadrática 3.6 se obtienen dos valores de  $\alpha_d$ , entre los cuales se selecciona el valor más pequeño. Esto es deseable desde el punto de vista hidrodinámico para obtener un menor valor de fuerza de arrastre.

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \frac{K_L}{K_D} \tan \xi_d \times \left( -1 + \sqrt{1 - 4 \frac{K_D}{K_L^2} \cot \xi_d (K_{D_0} \cot \xi_d + K_{L_0})} \right) \tag{3.9}$$

$m_{b_d}$  se puede obtener a partir de la segunda ecuación resultante en 3.5

$$m_{b_d} = (m - m_h - \bar{m}) + \frac{1}{g} \left( -\sin \xi_d (K_{D_0} + K_D \alpha_d^2) + \cos \xi_d (K_{L_0} + K_L \alpha_d) \right) V_d^2 \tag{3.10}$$

Finalmente, a partir de la ecuación 3.2 se puede calcular el valor deseado para la ubicación de la masa interna deslizante tal que



$$r_{m_{1d}} = -r_{m_3} \tan \theta_d + \frac{1}{\bar{m}g \cos \theta_d} \left( (m_{f_3} - m_{f_1})v_{1d}v_{3d} + (K_{M_0} + K_M \alpha_d)V_d^2 \right) \quad 3.11$$

Considerando que  $\theta_d \neq \pm \frac{\pi}{2}$

Finalmente, para determinar los valores de los puntos de equilibrio se requiere obtener los parámetros geométricos e hidrodinámicos del planeador. Para lo cual se emplearon los parámetros del planeador submarino SLOCUM [58, 59], altamente estudiado. Los parámetros empleados para definir el modelo son:  $m = 11.22 \text{ kg}$ ,  $m_h = 8.22 \text{ kg}$ ,  $\bar{m} = 2 \text{ kg}$ ,  $m_{f_1} = 2 \text{ kg}$ ,  $m_{f_3} = 14 \text{ kg}$ ,  $J_2 = 0.1 \text{ Nm}^2$ ,  $K_{D_0} = 18 \text{ N}\left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2$ ,  $K_D = 109 \text{ N}\left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2$ ,  $K_L = 306 \text{ N}\left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2$ ,  $K_M = 36.5 \text{ Nm}\left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2$ . Se calcularon un total de cuatro trayectorias, con ángulos de planeado ( $\xi = \theta - \alpha$ ) de  $\pm 30^\circ$  y  $\pm 45^\circ$  todos con una velocidad deseada de 0.3 m/s. Los puntos de equilibrio obtenidos para cada trayectoria se muestran en la Tabla 3.1 y se emplean en las secciones siguientes.

Tabla 3.1: Valores deseados según ángulo de planeado

<b>Variable</b>	<b>Descendiente</b>		<b>Ascendiente</b>	
$\xi_d$	-30	-45	30	45
$\theta_d$	-19.84	-35.6	19.84	35.6
$\alpha_d$	10.16	9.4	-10.16	-9.4
$V_d$	0.3	0.3	0.3	0.3
$v_{1d}$	0.2953	0.2959	0.2953	0.2959
$v_{3d}$	0.0529	0.0493	0.0529	0.0493
$r_{m_{1d}}$	0.72	1.42	-0.72	-1.42
$m_{0d}$	0.36	0.36	-0.36	-0.36

### 3.2.2. Proceso de linealización del sistema

A partir de las ecuaciones dinámicas y los puntos de equilibrio obtenidos, se puede linealizar el sistema respecto a un planeado estable con el fin de poder realizar el diseño correspondiente a sistemas lineales. Para ello, se denomina el vector de estados  $z = (z', \theta, \Omega_2, v_1, v_3, r_{m_1}, \dot{r}_{m_1}, m_b)^T$  con vector de entradas  $w = (w_1, w_4)^T$ , donde  $w_1$  es la aceleración de la masa deslizante interna como se describe en la sección 2.3.3. Para determinar el sistema linealizado se define

$$\begin{aligned} \delta z &= z - z_d \\ \delta u &= u - u_d, \quad u_d = 0 \end{aligned} \quad 3.12$$

Por lo que el sistema linealizado está dado por

$$\delta \dot{z} = A\delta z + B\delta u \quad 3.13$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -V_d & 0 & -\sin \alpha_d & \cos \alpha_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & -\frac{mg \cos \theta_d}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & a_{48} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & a_{58} \\ 0 & 0 & -r_{m3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{r_{m3}}{J_2} & 0 \\ -1 & 0 \\ m_{b_d} + m_h + m_{f_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.14

### 3.3. Sistema de Control PI MIMO

Previamente se describió que los sistemas de control tradicional para vehículos submarinos tipo planeadores están basados en controladores PID simples, empleados para controlar la masa deslizante y la masa de lastre hasta sus valores deseados determinados a partir del punto de equilibrio deseado. Aunque este camino llega a estabilizar el planeador a el ángulo de planeado y velocidad deseada, no considera el estado transitorio de las variables de estado del vehículo y como estas afectan a la ruta deseada, por lo que inevitablemente se genera un error en el desplazamiento.

Esto se realiza debido a que en un sistema MIMO, el problema de ajustar los parámetros de los controladores se complica debido a la interacción entre los lazos de control [60]. Para diseñar un controlador PI del sistema MIMO, se emplea el método descrito por Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61], basado en el método gráfico de Fung et al [62] para ajustar los parámetros del controlador a partir de márgenes de ganancia y fase deseados, generando controladores PI robustos y estables. El sistema MIMO del planeador se puede describir mediante su matriz de función de transferencia

$$G(s) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{pmatrix} \quad 3.15$$

El proceso se desea controlar mediante un lazo de retroalimentación unitaria por medio de controladores PI convencionales

$$C(s) = \begin{pmatrix} c_1(s) & 0 \\ 0 & c_2(s) \end{pmatrix} \quad 3.16$$

Donde cada controlador está definido por el algoritmo

$$c_l(s) = k_{pl} + \frac{k_{il}}{s}, \quad l = 1,2 \quad 3.17$$

Obteniendo la estructura de control mostrada en la Figura 3.3

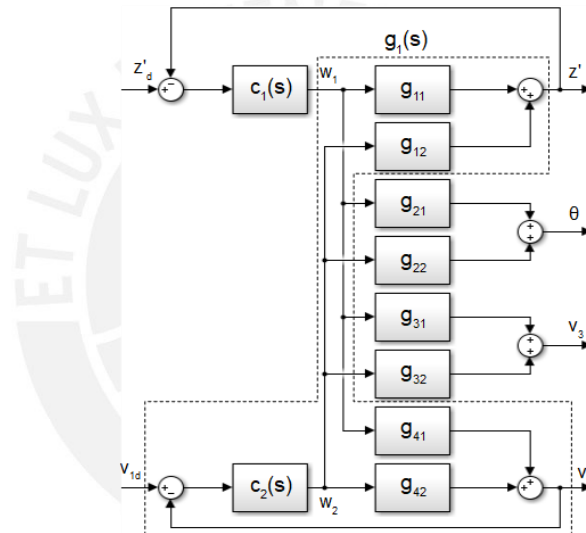


Figura 3.3: Estructura de control del algoritmo PI MIMO.  
Fuente: Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61]

Se puede observar a partir de la Figura 3.3 que

$$\begin{aligned} z' &= y_1 = g_{11}(s)w_1 + g_{12}(s)w_2 \\ \theta &= y_2 = g_{21}(s)w_1 + g_{22}(s)w_2 \\ v_3 &= y_3 = g_{31}(s)w_1 + g_{32}(s)w_2 \\ v_1 &= y_4 = g_{41}(s)w_1 + g_{42}(s)w_2 \end{aligned} \quad 3.18$$

Cuando el segundo lazo de control se cierra, es decir  $w_2 = -c_2(s)v_1$ , la función de transferencia equivalente entre  $z'$  y  $w_1$  esta dada por

$$g_1(s) = g_{11}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{41}(s)c_2(s)}{1 + g_{42}(s)c_2(s)} \quad 3.19$$

De forma similar, la función de transferencia equivalente entre  $v_1$  y  $w_2$  esta dada por

$$g_2(s) = g_{42}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{41}(s)c_1(s)}{1 + g_{11}(s)c_1(s)} \quad 3.20$$

Se desea que cada proceso equivalente cumpla sus propios requisitos de márgenes de ganancia y fase  $(A_{m1}, \phi_{m1})$  y  $(A_{m2}, \phi_{m2})$  respectivamente. Sin embargo, se puede apreciar a partir de 3.19 y 3.20 que, debido a la interacción entre los lazos de control, el proceso de ajustar los parámetros de control para cumplir dichos requisitos se complica. Para el caso del proceso equivalente  $g_1(s)$  en 3.19, el controlador desconocido  $c_2(s)$ , hace que el proceso sea incierto. Así mismo, el controlador desconocido  $c_1(s)$  aparece en 3.20. Para definir dichos controladores, el proceso descrito por Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61] se basa en una estimación inicial de la incertidumbre para diseñar de forma preliminar el controlador  $c_1(s)$ , luego emplea dicho controlador para definir el controlador  $c_2(s)$  para posteriormente ajustar  $c_1(s)$  con el controlador  $c_2(s)$  diseñado.

### 3.3.1. Método propuesto

El método propuesto para el diseño del controlador se basa en la función de transferencia equivalente para la primera salida.

$$g_1(s) = g_{11}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{41}(s)c_2(s)}{1 + g_{42}(s)c_2(s)} \quad 3.21$$

Para poder trabajar con la incertidumbre generada por el controlador desconocido  $c_2(s)$ , se define a dicha incertidumbre como

$$\Delta_1(s) = \frac{g_{42}(s)c_2(s)}{1 + g_{42}(s)c_2(s)}, \quad |\Delta_1(s)| \leq \Delta_1^* \quad 3.22$$

Donde  $\Delta_1^*$  es la máxima magnitud de  $\Delta_1(s)$

Por lo tanto, la función de transferencia equivalente de lazo directo para la primera salida se convierte en

$$g_1(s)c_1(s) = g_{11}(s)c_1(s) - \frac{g_{12}(s)g_{41}(s)c_1(s)}{g_{42}(s)}\Delta_1(s) \quad 3.23$$

Debido a la incertidumbre  $\Delta_1(s)$ , el diagrama de Nyquist de 3.23 se convierte en una banda, formada por un círculo con centro en  $g_{11}(j\omega)c_1(j\omega)$  y radio  $\left| \frac{g_{12}(j\omega)g_{21}(j\omega)c_1(j\omega)}{g_{22}(j\omega)} \Delta_1^* \right|$  [61], tal como se muestra en la Figura 3.4

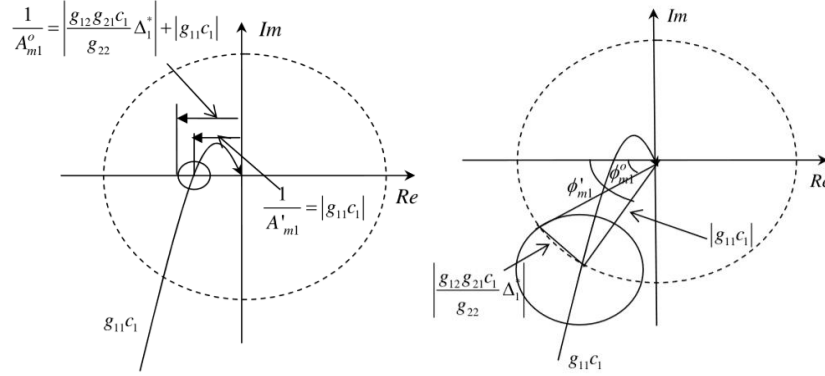


Figura 3.4: Margen de ganancia (izq) y Margen de fase (der) para banda de Nyquist de sistema con incertidumbre. Fuente: Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61] [61]

Para diseñar el controlador preliminar inicial, se considera tal banda de Nyquist y se seleccionan los márgenes de ganancia y fase deseados como  $A_{m1}^0$  ( $A_{m1}^0 < A_{m1}$ ) y  $\phi_{m1}^0$  ( $\phi_{m1}^0 < \phi_{m1}$ ).

De esta forma, los márgenes de ganancia y fase de  $g_{11}(s)c_1(s)$  pueden ser expresados por

$$A'_{m1} = A_{m1}^0 \left( 1 + \frac{|g_{12}(j\omega_{p1})g_{41}(j\omega_{p1})|}{|g_{11}(j\omega_{p1})g_{42}(j\omega_{p1})|} \Delta_1^* \right) \quad 3.24$$

$$\phi'_{m1} = \phi_{m1}^0 + 2 \arcsin \left( \frac{\Delta_1^* |g_{12}(j\omega_{p1})g_{41}(j\omega_{p1})|}{2|g_{11}(j\omega_{p1})g_{42}(j\omega_{p1})|} \right) \quad 3.25$$

Esto implica que el margen de ganancia y fase del sistema con controlador está dado por

$$g_{11}(j\omega_{p1}) \left( k_{p1} - j \frac{k_{i1}}{\omega_{p1}} \right) = -\frac{1}{A'_{m1}}$$

$$g_{11}(j\omega_{g1}) \left( k_{p1} - j \frac{k_{i1}}{\omega_{g1}} \right) = -e^{j\phi'_{m1}}$$

Donde  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{g1}$  son las frecuencias de cruce de ganancia y fase respectivamente.

Se puede observar que las ecuaciones obtenidas son no lineales y complejas con cuatro variables, las cuales se resuelven empleando el método gráfico de Fung et al [62], según el cual las ecuaciones se separan en sus respectivas partes reales e imaginarias

$$k_{p1} = Re\left(-\frac{1}{A'_{m1}g_{11}(j\omega_{p1})}\right) = Re\left(-\frac{e^{j\phi'_{m1}}}{g_{11}(j\omega_{g1})}\right) \quad 3.26$$

$$k_{i1} = -\omega_{p1}Im\left(-\frac{1}{A'_{m1}g_{11}(j\omega_{p1})}\right) = -\omega_{p1}Im\left(-\frac{e^{j\phi'_{m1}}}{g_{11}(j\omega_{g1})}\right) \quad 3.27$$

Debido a que los puntos de cruce de frecuencia  $\omega_p$  y  $\omega_g$  son desconocidos, se definen las siguientes ecuaciones complejas

$$f_{p1}(\omega_{p1}) = Re\left(\frac{-1}{A'_{m1}g_{11}(j\omega_{p1})}\right) - j\omega_{p1}Im\left(\frac{-1}{A'_{m1}g_{11}(j\omega_{p1})}\right), \quad 3.28$$

$$-\frac{\pi}{2} < \angle g_{11}(j\omega_{p1}) < -\pi$$

$$f_{g1}(\omega_{g1}) = Re\left(\frac{-e^{j\phi'_{m1}}}{g_{11}(j\omega_{g1})}\right) - j\omega_{g1}Im\left(\frac{-e^{j\phi'_{m1}}}{g_{11}(j\omega_{g1})}\right), \quad 3.29$$

$$-\frac{\pi}{2} + \phi'_{m1} < \angle g_{11}(j\omega_{g1}) < -\pi + \phi'_{m1}$$

Donde  $A'_{m1}$  y  $\phi'_{m1}$  se calculan de forma independiente según las ecuaciones 3.24 y 3.25 para cada valor de frecuencia. De esta forma, los valores de los parámetros del controlador  $k_{p1}$  y  $k_{i1}$  se obtienen mediante la intersección de las curvas generadas por las ecuaciones 3.28 y 3.29

Finalmente, como explica Qing-Guo Wang y Zhuo-Yun Nie [61], el valor de  $\Delta_1^*$  se estima como

$$\Delta_1^* = \left| \frac{g_{42}(s)c_2(s)}{1 + g_{42}(s)c_2(s)} \right|_{max} \approx \left| \frac{e^{(-\pi+\theta)j}}{1 + e^{(-\pi+\theta)j}} \right| \quad 3.30$$

### 3.3.2. Proceso de Diseño de controlador PI MIMO

Luego de linealizar la planta según lo descrito en la sección 3.2.2, se determinan las funciones de transferencia de la planta según  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , obteniendo el sistema:

$$G(s) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{41} & g_{42} \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \frac{-1.47 \times 10^5}{s^5 + 1104s^4 + 2.15e4s^3 + 1.01e5s^2 + 1.02e6s}$$

$$g_{12} = 0$$

$$g_{41} = \frac{1.176e06}{s^6 + 1100s^5 + 1.73e4s^4 + 1.86e4s^3 + 6.32e5s^2 - 3.93e6s}$$

$$g_{42} = \frac{5.71}{s^2 - 3.84s}$$

Para diseñar el controlador, se desea obtener márgenes de ganancia y fase de 2.5, 60° y de 2.5 y 50° para los lazos de control 1 y 2 respectivamente, según recomendación de márgenes de estabilidad para vehículos submarinos indicados por Fossen [48] y HDW [63]. Como primer paso, para obtener el controlador inicial, se selecciona los márgenes de fase y ganancia de la banda de Nyquist, considerando el requisito de  $(A_{m1}^0 < A_{m1})$  y  $(\phi_{m1}^0 < \phi_{m1})$ .

$$A_{m1}^0 = 2, \quad \phi_{m1}^0 = 30^\circ$$

Se elije un valor de  $\lambda=1.1$  tal que

$$\theta = \lambda\phi_{m2} = 0.9599$$

$$\Delta_1^* \approx \left| \frac{e^{(-\pi+\theta)j}}{1 + e^{(-\pi+\theta)j}} \right| = 1.028$$

Con el valor obtenido de  $\Delta_1^*$  se procede a graficar las curvas de las ecuaciones 3.28 y 3.29. El resultado se muestra en la Figura 3.5 con punto de intersección en (1.23, 0.07) obteniendo como controlador

$$c_1(s) = 1.23 + \frac{0.07}{s}$$

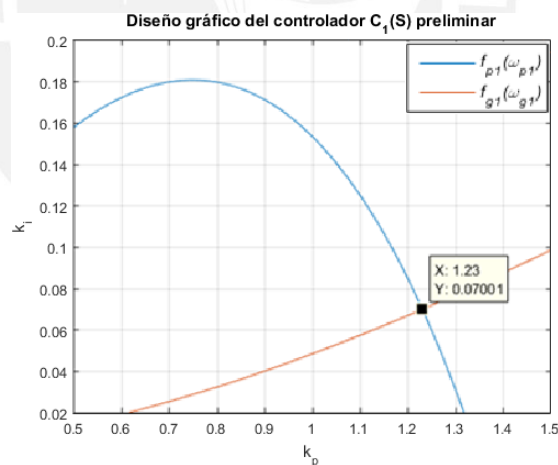


Figura 3.5: Parámetros de diseño de controlador  $c_1(s)$  Preliminar.  
Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenido el controlador preliminar  $c_1(s)$ , se procede a reemplazarlo en la ecuación del proceso equivalente 3.20 con el fin de volver a aplicar el método de Fung et al [62]. De esta forma se procede a diseñar el controlador  $c_2(s)$  a partir del proceso  $g_2(s)$  equivalente. Este proceso resulta en las curvas mostradas en la Figura 3.6 donde se observa un punto de cruce de (0.02, 0.003), con lo cual se obtiene el siguiente controlador PI para el segundo lazo de control

$$c_2(s) = 0.02 + \frac{0.003}{s}$$

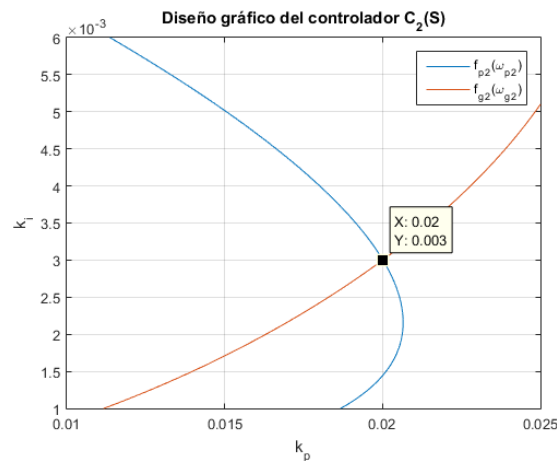


Figura 3.6: Parámetros de diseño de controlador  $c_2(s)$ .  
Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se sustituye el controlador  $c_2(s)$  diseñado en la función de transferencia del proceso equivalente para el primer lazo dada por la ecuación 3.19. De esta forma se puede ajustar el controlador del primer lazo ya que al conocer el controlador 2, no es necesario trabajar con la incertidumbre.

### 3.3.3. Simulación del controlador PI MIMO

Una vez determinados los parámetros de los controladores PI y generando una trayectoria deseada para el planeador submarino compuesta por movimientos descendientes y ascendientes alternantes, se procede a verificar el desempeño del controlador MIMO mediante simulaciones.

Con los puntos de equilibrio de la Tabla 3.1 previamente calculados, se procede a generar el vector de desplazamiento  $z_d$  y realizar simulaciones con el controlador PI MIMO diseñado para una trayectoria con ángulo de planeado de  $45^\circ$ . La Figura 3.7 muestra el recorrido realizado por el planeador, indicando su orientación relativa e inclinación durante el planeado, mientras la Figura 3.8 muestra la dinámica de las variables de estado y las entradas al sistema.

Al observar el recorrido trazado en la Figura 3.7, se puede apreciar que inicialmente el planeador submarino converge a la trayectoria deseada; sin embargo, durante el cambio de trayectoria descendiente a ascendente ocurre un desvío de esta, del cual el planeador no puede recuperarse, generando un comportamiento errático.



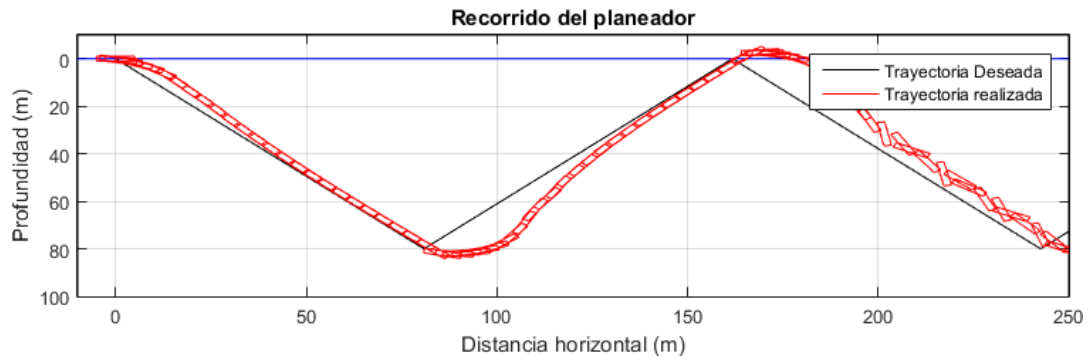


Figura 3.7 Recorrido del planeador submarino con controlador PI MIMO. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia.

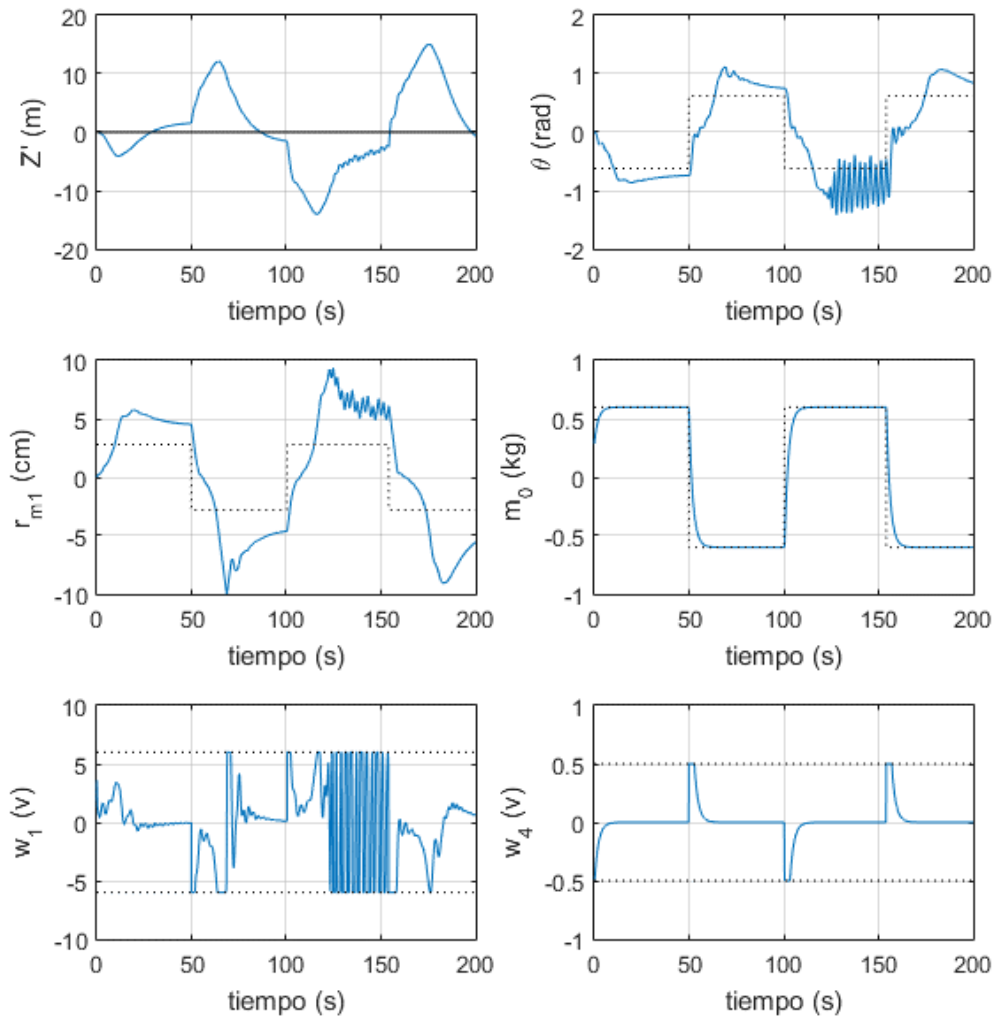


Figura 3.8 Variables de estado con controlador PI MIMO. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia

El mismo comportamiento errático puede apreciarse al visualizar la dinámica de los estados internos y de la variable de control. Durante el recorrido, se observa que tanto la posición de la masa móvil como la inclinación del vehículo no convergen a los puntos deseados. En particular, se puede observar un comportamiento vibratorio durante el segundo descenso generado por la oscilación en la señal de control. Este

comportamiento, se debe a que el vehículo se ubica cerca, pero por encima de la trayectoria deseada, lo cual implica que para converger sobre ella debe desplazar la masa interna hacia delante; sin embargo, se puede observar que la masa interna se encuentra hacia delante del punto de equilibrio, por lo cual requiere retroceder para convergir en el punto de equilibrio requerido. Esto implica que el vehículo se encuentra en un punto de inestabilidad, el cual el controlador diseñado no es capaz de corregir.

Se realizó una segunda simulación considerando una trayectoria deseada con ángulo de planeado igual a  $30^\circ$ . De forma análoga, el recorrido obtenido se muestra en Figura 3.10 mientras las variables de estado se pueden observar en la Figura 3.9. Debido al menor ángulo de ataque de este recorrido, se puede apreciar que el sistema de control puede estabilizar al planeador y hacer que converja a la trayectoria deseada. Sin embargo, la señal de control generada presenta varios cambios repentinos, lo cual conlleva a un desplazamiento brusco e indeseado con cambios drásticos en la inclinación del planeador.

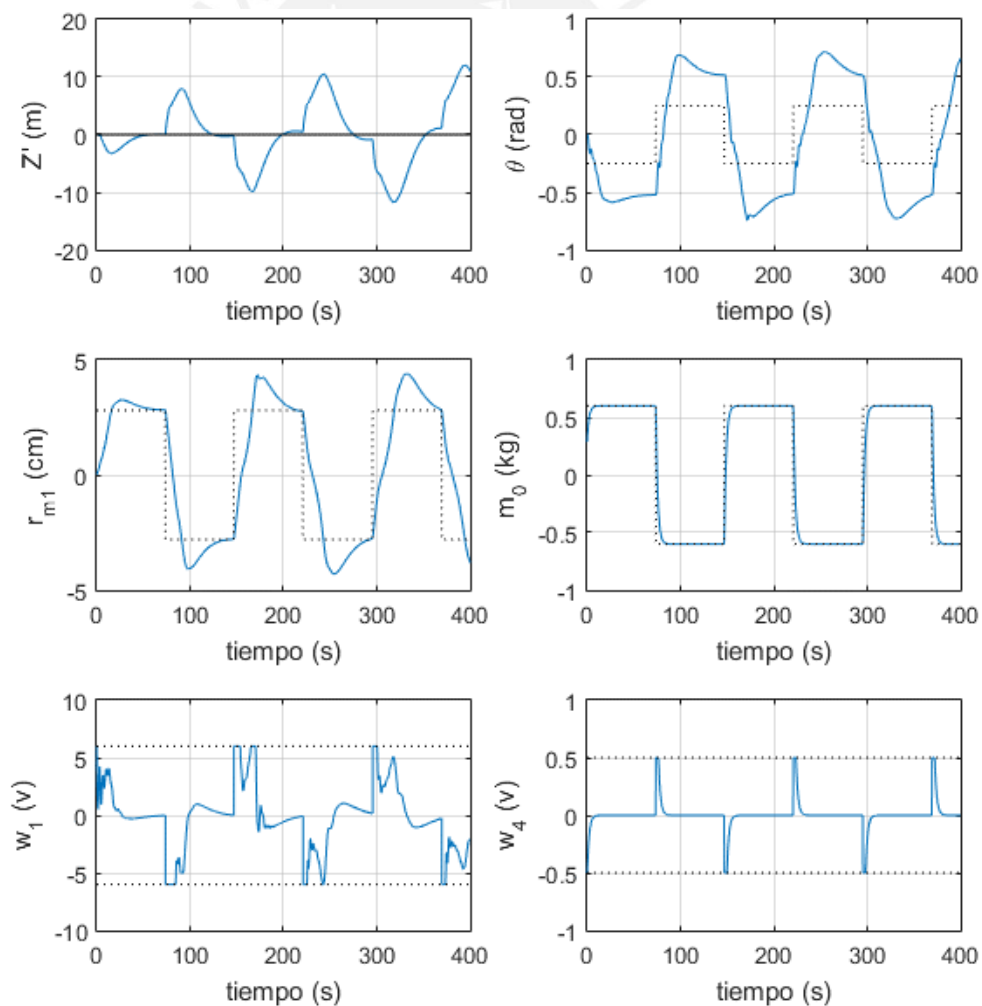


Figura 3.9 Variables de estado con controlador PI MIMO. Planeado de  $30^\circ$ . Fuente: Elaboración propia.

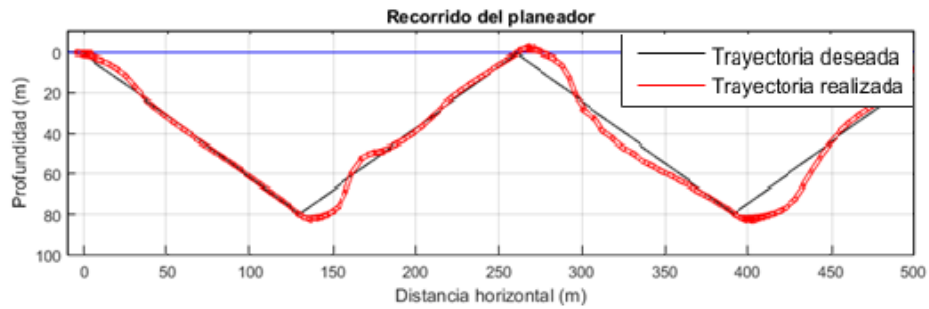


Figura 3.10 Recorrido del planeador submarino con controlador PI MIMO. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia

### 3.4. Sistema de Control LQR

Un controlador LQR (regulador cuadrático lineal) es un método de diseño de un controlador óptimo, el cual produce una ley de control tal que se minimice el valor de una función de costos. Para el caso del controlador LQR, dicha función de costos se define como la suma de los cuadrados de cada uno de los estados y entradas del sistema.

La función de costos a minimizar está dada por

$$J = \int_0^{\infty} \delta z^T Q \delta z + \delta w^T R \delta w dt \quad 3.31$$

Donde  $Q$  y  $R$ , representan matrices de pesos asociados a los estados y entradas de control respectivamente. Las matrices  $Q$  y  $R$  se seleccionan para garantizar una dinámica adecuada y evitar variaciones repentinas en los estados del sistema que excedan sus limitaciones físicas. Para el caso del planeador submarino, se debe tener consideración con la posición de la masa deslizante y valor de masa de lastre, cuyos límites físicos dependen de la carrera del actuador lineal y de la capacidad de almacenamiento de la glándula interna de lastre

#### 3.4.1. Diseño de controlador óptimo

Para el diseño de dicho controlador se emplea el sistema linealizado dado por la ecuación 3.14, el cual tiene la estructura

$$\delta \dot{z} = A \delta z + B \delta w \quad 3.32$$

$$\delta w = -K(z - z_d) \quad 3.33$$

Donde  $K$  es una matriz de ganancias del controlador,  $z$  el vector de estados con valores deseados  $z_d$  y  $w$  las variables de control.

Como primer paso, se debe verificar la controlabilidad del sistema, para lo cual se analiza que la matriz de controlabilidad sea de rango completo

$$C_0 = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B \ A^6B \ A^7B \ A^8B] \quad 3.34$$

$$\text{rank}(C_0) = 9$$

Por lo que el sistema es controlable.

Para obtener la matriz de ganancias, se debe encontrar el valor de la matriz  $K$  que minimice la función de costo dada por la ecuación 3.31. Esta matriz se puede calcular mediante la siguiente ecuación

$$K = R^{-1}B^T P \quad 3.35$$

Donde  $P$  es la solución a la ecuación de Riccati, dada por

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad 3.36$$

La cual se resuelve empleando MATLAB

Para el diseño del controlador se emplearon las siguientes matrices  $Q$  y  $R$ , donde se establece igual peso a las variables con mayor efecto sobre la dinámica del vehículo:  $z', \theta, v_1, v_3, r_{m_1}, m_0$ .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.37$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obteniendo la matriz de pesos  $K$

$$K = \begin{pmatrix} 3.15 & -0.95 & -0.25 & 0.42 & -1.98 & 14.48 & 0.14 & 0 & -0.2 \\ 0.27 & 69 & 3.06 & -12.39 & 3.59 & -5.99 & -0.05 & 0 & 7.48 \end{pmatrix} \quad 3.38$$

Para confirmar que la matriz de ganancia  $K$  sea apropiada a emplear, se deben verificar los valores propios en lazo cerrado del planeador submarino con la ley de control y verificar que estos se encuentren en el semiplano izquierdo

$$A_{cl} = A - BK \quad 3.39$$

Cuyos valores propios son

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = -982.33 & \lambda_2 = -118.61 & \lambda_3 = -31.93 \\ \lambda_4 = -1.11 + j7.24 & \lambda_5 = -1.11 - j7.24 & \lambda_6 = -0.26 + j0.26 \\ \lambda_7 = -0.26 - j0.26 & \lambda_8 = -3.59 + j0.73 & \lambda_9 = -3.59 - j0.73 \end{array} \quad 3.40$$

Con lo cual se corrobora que las ganancias obtenidas para la ley de control son adecuadas y se diseña el controlador LQR de acuerdo al esquema mostrado en la Figura 3.11.

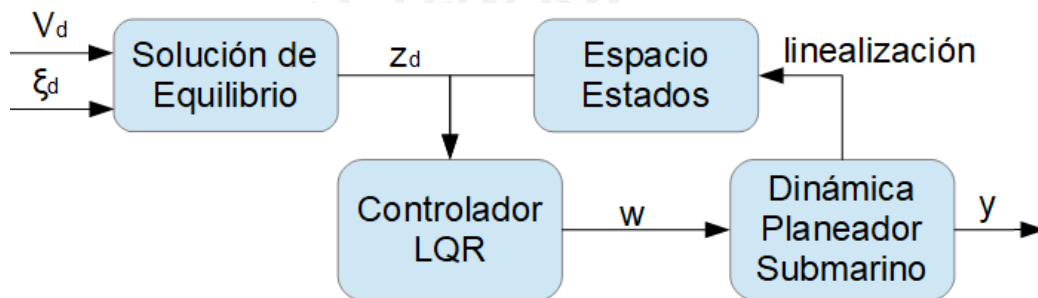


Figura 3.11: Esquema del controlador basado en algoritmo LQR.  
Fuente: Elaboración propia.

### 3.4.2. Simulación del controlador óptimo

Una vez diseñada la ley de control y empleando como referencia la trayectoria deseada para el planeador submarino, se procede a verificar su desempeño mediante simulaciones.

Con los puntos de equilibrio de la Tabla 3.1 previamente calculados, se procede a generar el vector  $z_d$  y realizar simulaciones con el controlador LQR (regulador cuadrático lineal) diseñado para una trayectoria con ángulo de planeado de  $45^\circ$ . La Figura 3.12 muestra el recorrido realizado por el planeador indicando su orientación e inclinación mientras la Figura 3.13 muestra la dinámica de las variables de estado y las entradas al sistema.

Al observar la Figura 3.12, se puede apreciar que el algoritmo de control LQR genera un planeado uniforme y simétrico, manteniendo el vehículo en la trayectoria deseada y con un buen comportamiento durante los cambios de dirección de trayectoria. De

igual forma, la Figura 3.13 muestra que tanto la posición de la masa móvil como la inclinación del planeador convergen a sus valores deseados con un sobre impulso de 34% y 21% respectivamente. La señal de control presenta un comportamiento aceptable y sin oscilaciones, manteniendo en buen estado el actuador.

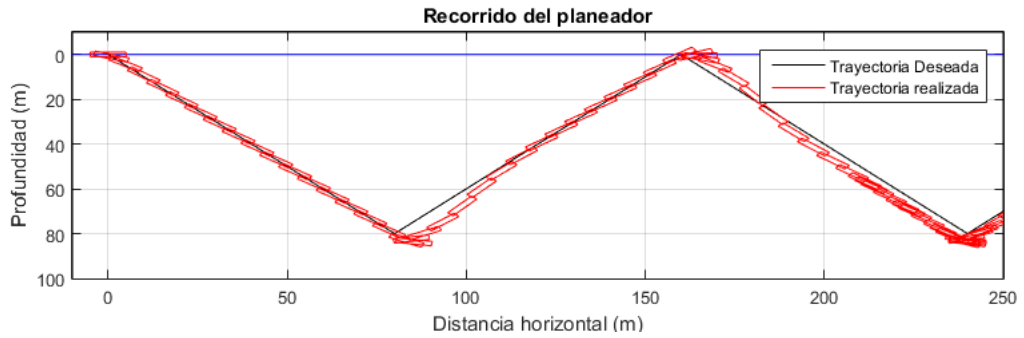


Figura 3.12: Recorrido del planeador submarino con controlador LQR. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia

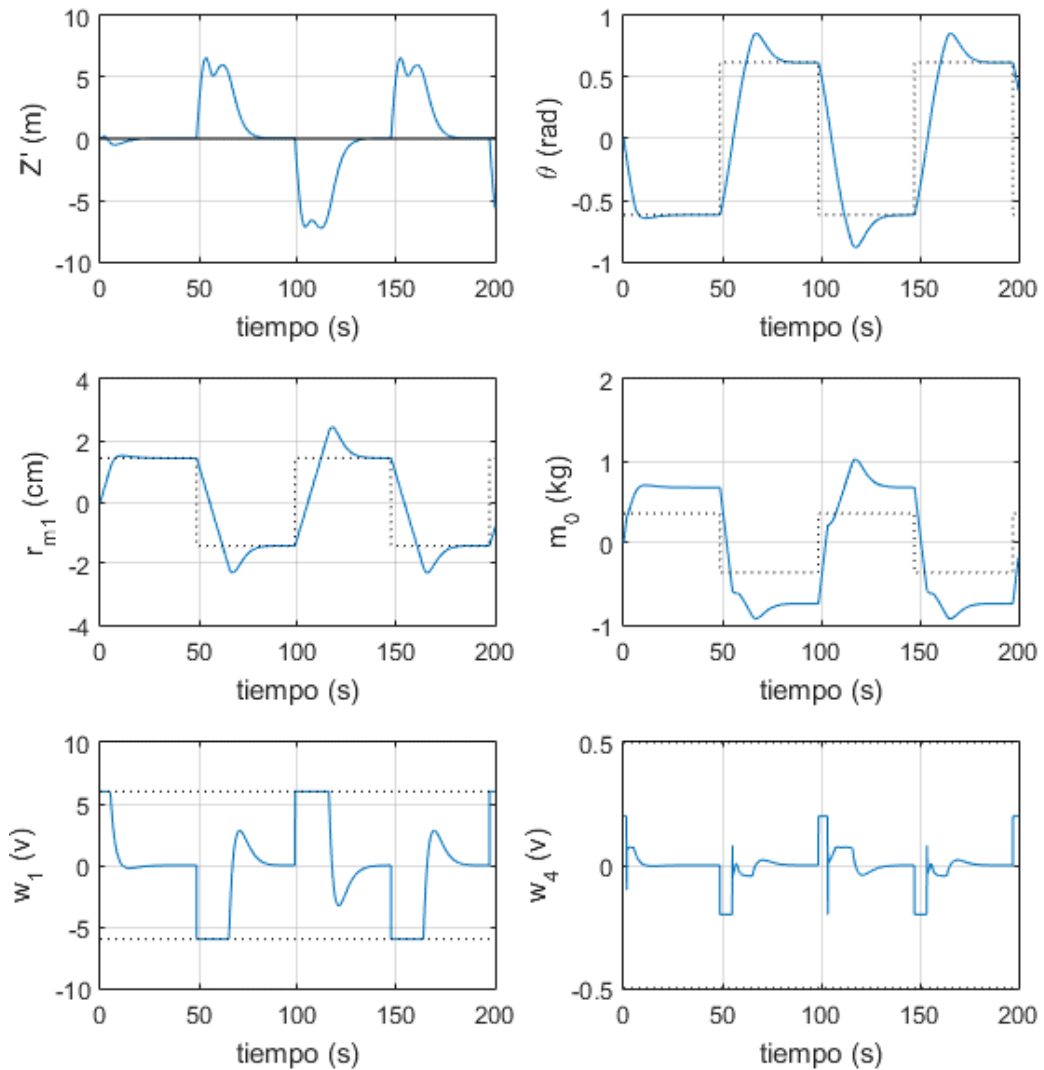


Figura 3.13: Variables de estado con controlador LQR. Planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia

Se realizó una segunda simulación del recorrido del planeador submarino con una trayectoria deseada con ángulo de planeado igual a  $30^\circ$ . El recorrido obtenido se muestra en la Figura 3.15 mientras las variables de estado se aprecian en la Figura 3.14. En esta simulación, se puede observar que el controlador LQR es capaz de mantener estable el planeador submarino durante todo el recorrido, solo desviándose de la trayectoria deseada durante los cambios de planeado. Sin embargo, dicha desviación se corrige rápidamente. La señal de control es estable y permite que tanto la posición de la masa móvil como la masa de lastre se estabilizan en sus valores deseados.

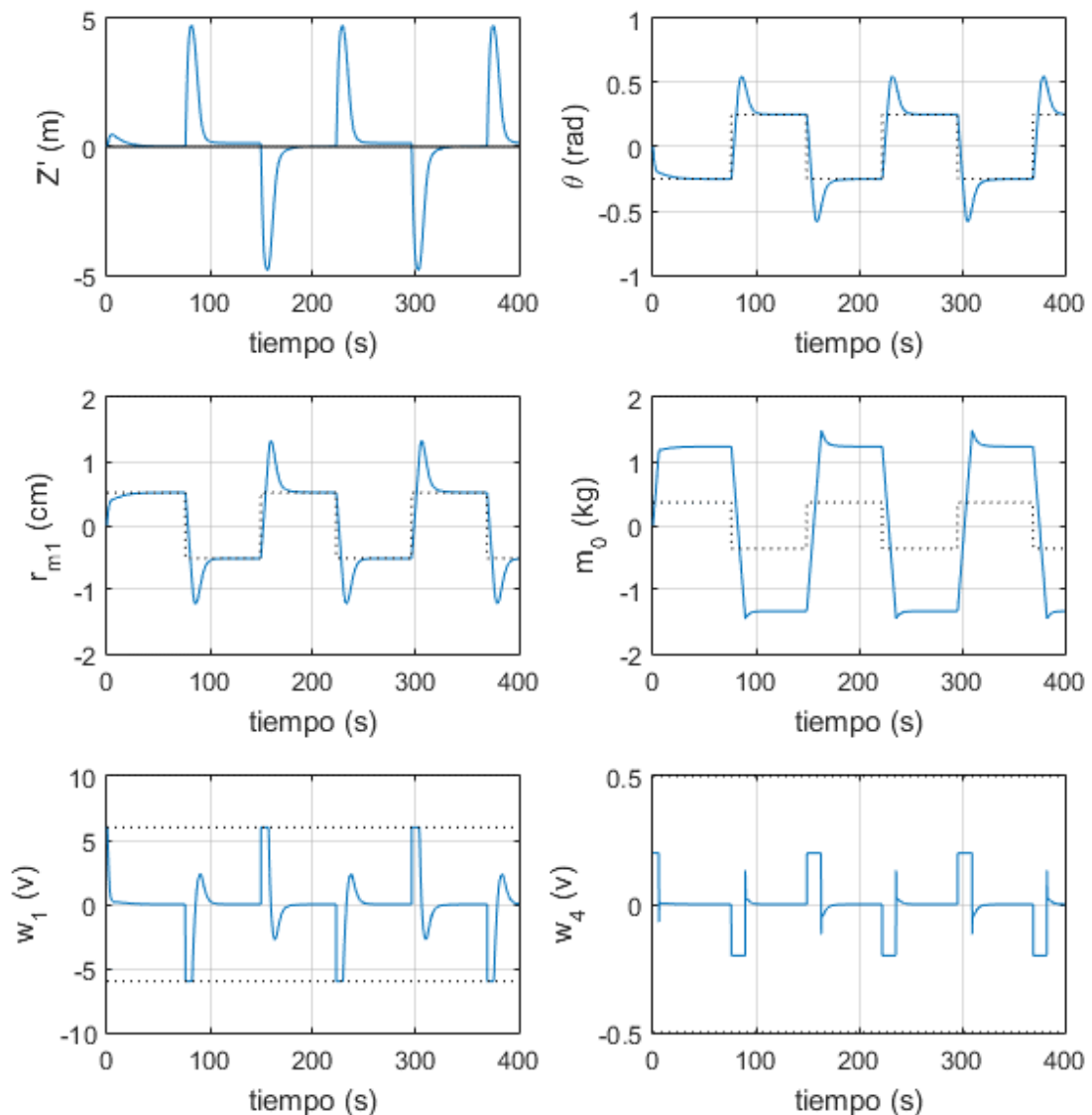


Figura 3.14: Variables de estado con controlador LQR. Planeado de  $30^\circ$ . Fuente: Elaboración propia

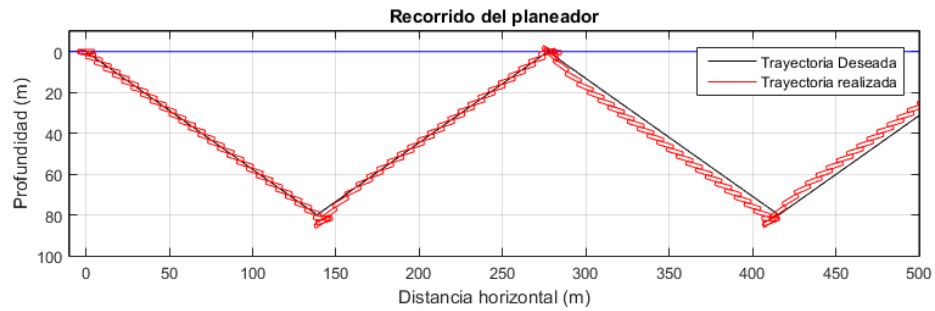


Figura 3.15: Recorrido del planeador submarino con controlador LQR. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia

### 3.5. Sistema de control no lineal, Backstepping Adaptativo

Como se describió previamente, la principal desventaja de los controladores empleados en el control de planeadores submarinos es que se emplean controladores lineales; es decir, los controladores emplean como modelo de la planta un sistema linealizado alrededor de puntos de equilibrio. Debido a la aproximación que se realiza con el sistema durante la etapa de linealización, el controlador tiene dificultades para controlar de forma precisa la dinámica compleja y acoplada de un planeador submarino; por ello se plantea el uso de un controlador no-lineal basado en la técnica de backstepping.

Una segunda desventaja de un controlador convencional es que el modelo empleado durante su diseño (sea lineal o no-lineal) emplea como parámetros los efectos hidrodinámicos, los cuales, como se describió en la sección 2.3.5, se simplifican debido a su alta complejidad. Además, se requiere una identificación adecuada de los parámetros hidrodinámicos para mejor aproximar el modelo a la dinámica real del vehículo, la cual se lleva a cabo mediante una serie de pruebas complejas derivadas de estudios aerodinámicos [64]. Debido a ello y errores de estimación y ejecución, se puede apreciar que los términos hidrodinámicos y en sí sus efectos sobre la dinámica del vehículo representan una incertidumbre con términos desconocidos. Asimismo, los coeficientes hidrodinámicos pueden cambiar con variaciones en la velocidad, tipo de maniobras realizadas y circunstancias ambientales [65] así como degradación del vehículo y sus actuadores, y modificación de aletas, longitud y carga sensorial debido a la naturaleza modular de los vehículos.

Ello conlleva a diseñar un controlador adaptativo mediante el cual se puede estabilizar y controlar el vehículo sin necesidad de conocer el valor real de los



coeficientes hidrodinámicos y de las fuerzas que estos generan sobre el vehículo. Además, al ser un método basado en la estabilidad de Lyapunov, se puede emplear en conjunto con un controlador no-lineal basado en backstepping.

El diseño del controlador se realiza a partir de las ecuaciones dinámicas no-lineales del planeador submarino

$$\begin{aligned}
\dot{x}' &= \cos \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) - \sin \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \\
\dot{z}' &= \sin \xi_d (v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta) + \cos \xi_d (-v_1 \sin \theta + v_3 \cos \theta) \\
\dot{\theta} &= \Omega_2 \\
\dot{\Omega}_2 &= \frac{1}{a} \left( (m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m})Y - \bar{m}(m_3 + \bar{m})r_{m_3}X_1 - m_1\bar{m}(m_3 + \bar{m})r_{m_3}w_1 \right. \\
&\quad \left. + \bar{m}(m_1 + \bar{m})r_{m_1}X_3 - m_3\bar{m}(m_1 + \bar{m})r_{m_1}\Omega_2 \right) \\
\dot{v}_1 &= \frac{1}{m_1 + \bar{m}} (X_1 - \bar{m}r_{m_3}\dot{\Omega}_2 - \bar{m}w_1) \\
\dot{v}_3 &= \frac{1}{m_3 + \bar{m}} (X_3 + \bar{m}r_{m_1}\dot{\Omega}_2 + \bar{m}\dot{r}_{m_1}\Omega_2) \\
\dot{r}_{m_1} &= \dot{r}_{m_1} \\
\dot{m}_1 &= w_1 \\
\dot{m}_l &= w_4
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
a &= J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2 \\
Y &= (m_3 - m_1)v_1v_3 - \bar{m}\Omega_2 \left( (v_1 + r_{m_3}\Omega_2 + \dot{r}_{m_1})r_{m_1} + (v_3 - r_{m_1}\Omega_2)r_{m_3} \right) \\
&\quad - \bar{m}g(r_{m_1} \cos \theta + r_{m_3} \sin \theta) + M_{DL} \\
X_1 &= -\bar{m}(v_3 - r_{m_1}\Omega_2)\Omega_2 - m_3\Omega_2v_3 - m_0g \sin \theta + F_L \sin \alpha - F_D \cos \alpha \\
X_3 &= \bar{m}(v_1 + r_{m_3}\Omega_2 + \dot{r}_{m_1})\Omega_2 + m_1\Omega_2v_1 + m_0g \cos \theta - F_L \cos \alpha - F_D \sin \alpha
\end{aligned}$$

Se puede observar que algunas de las variables en las ecuaciones dinámicas son infinitesimales como  $\dot{r}_{m_1}$  y  $\dot{\Omega}_2$ , por lo que su efecto en la dinámica del vehículo es extremadamente limitado. De esta forma, dichos términos se pueden eliminar, reescribiendo el sistema como

$$\dot{\theta} = \Omega_2 \quad 3.41$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{1}{a_1} \left( (m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m})Y_1 - \bar{m}(m_3 + \bar{m})r_{m_3}X_{11} + \bar{m}(m_1 + \bar{m})r_{m_1}X_{31} \right) \quad 3.42$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{m_1 + \bar{m}} (X_{11} - \bar{m}r_{m_3}\dot{\Omega}_2) \quad 3.43$$

$$\dot{v}_3 = \frac{1}{m_3 + \bar{m}} (X_{31} + \bar{m}r_{m_1}\dot{\Omega}_2 + \bar{m}\dot{r}_{m_1}\Omega_2) \quad 3.44$$

$$\dot{r}_{m_1} = w_1 \quad 3.45$$

Donde  $w_1$  es la entrada al sistema y

$$\begin{aligned}
a_1 &= J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2 \\
Y &= (m_3 - m_1)v_1v_3 - \bar{m}g(r_{m_1} \cos \theta + r_{m_3} \sin \theta) + M_{DL} \\
X_1 &= -m_0g \sin \theta + F_L \sin \alpha - F_D \cos \alpha \\
X_3 &= +m_0g \cos \theta - F_L \cos \alpha - F_D \sin \alpha
\end{aligned}$$

Además, para reducir el número de salidas, se trabajará solo con el ángulo de inclinación debido a que este tiene un mayor efecto sobre el desempeño del vehículo, mientras que la masa de lastre se controlará mediante un controlador independiente debido a que su efecto sobre las salidas es mínimo, obteniendo el esquema de control mostrado en la Figura 3.16. Debido a esto, los componentes de velocidad de pueden considerar como desconocidos en el modelo, convirtiendo el modelo MIMO a una representación SISO definido por el vector de estados

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (\theta, \Omega_2, r_{m_1})^T$$

Representado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= A + B \sin x_1 + Cx_2 + Mx_3 + Nx_3 \cos x_1 \\
\dot{x}_3 &= u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

3.46

Donde

$$\begin{aligned}
B &= \frac{(m_3 + \bar{m})(m_0 - m_1 - \bar{m})\bar{m}gr_{m_3}}{J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2} \\
C &= \frac{(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m})K_{w_2^1}}{J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2} \\
N &= \frac{(m_1 + \bar{m})(m_0 - m_3 - \bar{m})\bar{m}g}{J_2(m_1 + \bar{m})(m_3 + \bar{m}) + \bar{m}m_1(m_3 + \bar{m})r_{m_3}^2 + \bar{m}m_3(m_1 + \bar{m})r_{m_1}^2}
\end{aligned}$$

Mientras A y M son parámetros relacionados a la velocidad y los efectos hidrodinámicos desconocidos.

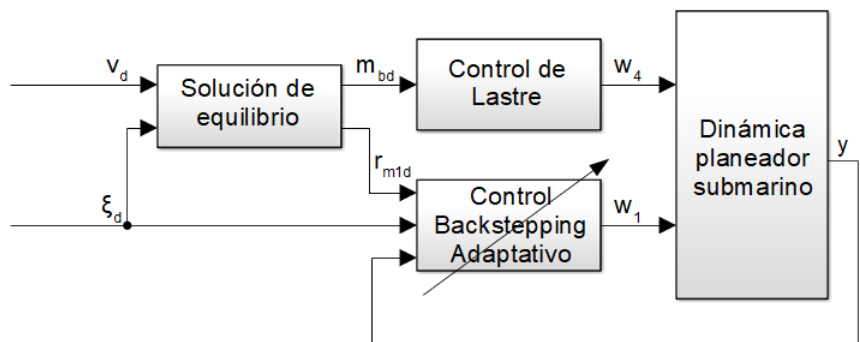


Figura 3.16: Diagrama de bloques del sistema de control basado en Backstepping Adaptativo. Fuente: Elaboración propia

### 3.5.1. Diseño del controlador no-lineal dinámico

El diseño de un controlador según la técnica de backstepping se realiza de forma recursiva, obteniendo una función de Lyapunov que garantice la estabilidad y obtener el algoritmo de control de forma simultánea.

- Primer paso

Para el diseño del controlador se empieza definiendo el error de rastreo de la salida del sistema como

$$z_1 = x_1 - \theta_d \quad 3.47$$

De esta forma, empleando la ecuación 3.46 el error de rastreo está dado por

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 \quad 3.48$$

Donde  $x_2$  se considera como variable de control. A partir de ello, se define una variable de control virtual  $\alpha_1$  para la ecuación 3.48 donde  $z_2$  representa la diferencia entre la variable de control actual y la virtual

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad 3.49$$

De esta forma se puede reescribir la ecuación 3.48 en términos de la nueva variable de estado.

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 \quad 3.50$$

En este paso se requiere diseñar la ley de control  $\alpha_1$  que consiga estabilizar el error de rastreo tal que  $z_1 \rightarrow 0$ . Para ello se define la siguiente ecuación de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad 3.51$$

Cuya derivada está dada por

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1(z_2 + \alpha_1) = z_1 \alpha_1 + z_1 z_2 \quad 3.52$$

A partir de ello se puede seleccionar una ley de control  $\alpha_1$  adecuada que establezca el sistema de primer orden  $z_1$

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 \quad 3.53$$

$$\dot{\alpha}_1 = -c_1 x_2 \quad 3.54$$

Donde  $c_1$  es una constante positiva. De esta forma la derivada de  $V_1$  está dada por

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad 3.55$$

Donde se observa que, si  $z_2 = 0$ ,  $\dot{V}_1$  es negativa por lo que se garantiza que  $z_1$  converja asintóticamente a cero.

- Segundo Paso

Para el segundo paso, se requiere que la variable virtual diseñada en el paso anterior converja a la variable real, es decir que el error  $z_2$  converja a cero. Para ello se deriva la dinámica del error a partir de la ecuación 3.49.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &= A + B \sin x_1 + C x_2 + (M + N \cos x_1) x_3 + c_1 x_2 \end{aligned} \quad 3.56$$

En donde  $x_3$  se emplea como variable de control. Se define una variable de control virtual  $\alpha_2$ , cuyo error está dado por

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad 3.57$$

De esta forma, la ecuación 3.56 se convierte en

$$\dot{z}_2 = A + B \sin x_1 + C x_2 + (M + N \cos x_1)(z_3 + \alpha_2) + c_1 x_2 \quad 3.58$$

Como se desconoce el valor de los parámetros  $A$  y  $M$ , este trabajo se realiza mediante un controlador adaptativo el cual consiste en una ley de control y una ley de actualización para obtener un estimado del valor de  $A$  y  $M$ . Para ello, se definen los siguientes errores de estimación

$$\tilde{A}_1 = A - \hat{A}_1 \quad 3.59$$

$$\tilde{M}_1 = M - \hat{M}_1 \quad 3.60$$

Donde  $\hat{A}_1$  y  $\hat{M}_1$  representan la primera estimación de  $A$  y  $M$  respectivamente. De esta forma se puede definir una función de Lyapunov para el segundo sistema, la cual se extiende por el error de estimación tal que

$$V_2 = \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{A}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{M}_1^2$$

Cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= z_2\dot{z}_2 - \tilde{A}_1\dot{\hat{A}}_1 - \tilde{M}_1\dot{\hat{M}}_1 \\ &= z_2(A + B \sin x_1 + (C + c_1)x_2 + (M + N \cos x_1)(z_3 + \alpha_2)) \\ &\quad - \tilde{A}_1\dot{\hat{A}}_1 - \tilde{M}_1\dot{\hat{M}}_1 \\ &= z_2(\hat{A}_1 + B \sin x_1 + (C + c_1)x_2 + (\tilde{M}_1 + N \cos x_1)(z_3 + \alpha_2)) \\ &\quad - \tilde{A}_1(\dot{\hat{A}}_1 - z_2) - \tilde{M}_1(\dot{\hat{M}}_1 - z_2x_3)\end{aligned}\tag{3.61}$$

A partir de la cual se puede calcular la ley de control virtual

$$\alpha_2 = \frac{-\hat{A}_1 - B \sin x_1 - (C + c_1)x_2 - c_2z_2 + z_3}{\tilde{M}_1 + N \cos x_1} - z_3\tag{3.62}$$

Donde  $c_2$  es una constante positiva.

De la ecuación 3.61, también se obtiene la ley de actualización de los estimados de  $\hat{A}_1$  y  $\hat{M}_1$

$$\dot{\hat{A}}_1 = z_2\tag{3.63}$$

$$\dot{\hat{M}}_1 = z_2x_3\tag{3.64}$$

Empleando las leyes obtenidas en 3.62, 3.63 y 3.64 y reemplazando en 3.61, la ecuación de Lyapunov resultante es

$$\dot{V}_2 = -c_2z_2^2 + z_2z_3\tag{3.65}$$

- Tercer Paso

Para el tercer paso, se requiere que la variable virtual  $\alpha_2$  converja a la variable real  $x_3$ , es decir que el error  $z_3$  converja a cero. Para ello se deriva la dinámica del error a partir de la ecuación 3.57.

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 = u - \dot{\alpha}_2 \\ &= (\dot{\hat{M}}_1 + N \cos x_1)u + \hat{A}_1 + x_2(B \cos x_1 - c_1(C + c_1)) + \\ &\quad (C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2z_2 + \tilde{A}_1 + \tilde{M}_1x_3) + (\dot{\hat{M}}_1 - Nx_2 \sin x_1)x_3\end{aligned}\tag{3.66}$$

En donde aparece la variable de control real  $u$ . Sin embargo, también se observa que aparecen los términos  $\tilde{A}_1$  y  $\tilde{M}_1$ , los cuales, según las ecuaciones 3.59 y 3.60,

dependen de los parámetros desconocidos  $A$  y  $M$ , por lo que no se pueden emplear para derivar la ley de control. Para poder eliminar dichos errores se definen nuevos valores de estimación de los parámetros desconocidos

$$\tilde{A}_2 = A - \hat{A}_2 \quad 3.67$$

$$\tilde{M}_2 = M - \hat{M}_2 \quad 3.68$$

Donde  $\hat{A}_2$  y  $\hat{M}_2$  representan la segunda estimación de  $A$  y  $M$  respectivamente. Con estas nuevas definiciones la derivada del error  $z_3$  queda definida como

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 = u - \dot{\alpha}_2 \\ &= \left( \dot{\hat{M}}_1 + N \cos x_1 \right) u + \dot{\hat{A}}_1 + x_2 (B \cos x_1 - c_1 (C + c_1)) + \\ &\quad (C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2 z_2 + \tilde{A}_2 + \hat{A}_2 - \hat{A}_1 + (\tilde{M}_2 + \hat{M}_2 - \hat{M}_1)x_3) + \left( \dot{\hat{M}}_1 - N x_2 \sin x_1 \right) x_3 \end{aligned}$$

De esta forma se puede definir una función de Lyapunov para el tercer sistema, la cual se extiende por el cuadrado del segundo error de estimación tal que

$$V_3 = \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} \tilde{A}_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{M}_2^2$$

Cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= z_3 \dot{z}_3 - \tilde{A}_2 \dot{\hat{A}}_2 - \tilde{M}_2 \dot{\hat{M}}_2 \\ &= z_3 \left[ \left( \dot{\hat{M}}_1 + N \cos x_1 \right) u + \dot{\hat{A}}_1 + x_2 (B \cos x_1 - c_1 (C + c_1)) + \right. \\ &\quad \left. (C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2 z_2 + \tilde{A}_2 + \hat{A}_2 - \hat{A}_1 + (\tilde{M}_2 + \hat{M}_2 - \hat{M}_1)x_3) + \right. \\ &\quad \left. \left( \dot{\hat{M}}_1 - N x_2 \sin x_1 \right) x_3 \right] - \tilde{A}_2 \dot{\hat{A}}_2 - \tilde{M}_2 \dot{\hat{M}}_2 \\ &= z_3 \left[ \left( \dot{\hat{M}}_1 + N \cos x_1 \right) u + \dot{\hat{A}}_1 + x_2 (B \cos x_1 - c_1 (C + c_1)) + \right. \\ &\quad \left. (C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2 z_2 + (\hat{A}_2 - \hat{A}_1) + (\hat{M}_2 - \hat{M}_1)x_3) + \right. \\ &\quad \left. \left( \dot{\hat{M}}_1 - N x_2 \sin x_1 \right) x_3 \right] - \tilde{A}_2 \left( \dot{\hat{A}}_2 - z_3 (C + c_1 + c_2) \right) - \\ &\quad \tilde{M}_2 \left( \dot{\hat{M}}_2 - z_3 (C + c_1 + c_2) x_3 \right) \end{aligned} \quad 3.69$$

A partir de la cual se puede calcular la ley de control

$$u = \frac{u_1 + u_2}{\hat{M}_1 + N \cos x_1} \quad 3.70$$

Donde

$$u_1 = -(C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2 z_2 + (\hat{A}_2 - \hat{A}_1) + (\hat{M}_2 - \hat{M}_1)x_3) \quad 3.71$$

$$u_2 = -\dot{\hat{A}}_1 - x_2 (B \cos x_1 - c_1 (C + c_1)) - c_3 z_3 - \left( \dot{\hat{M}}_1 - N x_2 \sin x_1 \right) x_3 \quad 3.72$$

Donde  $c_3$  es una constante positiva.

De la ecuación 3.69, también se obtiene la ley de actualización de los estimados de  $\hat{A}_2$  y  $\hat{M}_2$

$$\dot{\hat{A}}_2 = z_3(C + c_1 + c_2) \quad 3.73$$

$$\dot{\hat{M}}_2 = z_3(C + c_1 + c_2)x_3 \quad 3.74$$

Empleando las leyes obtenidas en 3.70, 3.73 y 3.74 y reemplazando en 3.693.61 , la ecuación de Lyapunov resultante es

$$\dot{V}_3 = -c_2 z_3^2 \quad 3.75$$

Por lo cual, según el criterio de estabilidad de Lyapunov, se garantiza la estabilidad asintótica de  $z_3$  y por consecuencia  $z_2$  y  $z_1$ .

### 3.5.2.Ley de Control dinámica

Finalmente, el problema con parámetros desconocidos se resuelve empleando el controlador dinámico y no-lineal diseñado cuyas ecuaciones están dadas por

$$u = \frac{u_1 + u_2}{\hat{M}_1 + N \cos x_1} \quad 3.76$$

Donde

$$u_1 = -(C + c_1 + c_2)(z_3 - c_2 z_2 + (\hat{A}_2 - \hat{A}_1) + (\hat{M}_2 - \hat{M}_1)x_3) \quad 3.77$$

$$u_2 = -\dot{\hat{A}}_1 - x_2(B \cos x_1 - c_1(C + c_1)) - c_3 z_3 - (\dot{\hat{M}}_1 - N x_2 \sin x_1)x_3 \quad 3.78$$

Con dinámica interna definida por

$$\dot{\hat{A}}_1 = z_2 \quad 3.79$$

$$\dot{\hat{M}}_1 = z_2 x_3 \quad 3.80$$

$$\dot{\hat{A}}_2 = z_3(C + c_1 + c_2) \quad 3.81$$

$$\dot{\hat{M}}_2 = z_3(C + c_1 + c_2)x_3 \quad 3.82$$

El esquema total del controlador diseñado se muestra en la Figura 3.16 en donde el bloque de solución de equilibrio emplea las ecuaciones descritas en la sección 3.2.1 para determinar los valores deseados de los estados internos del vehículo. Posteriormente los controladores de lastre y el control no-lineal se encargan de generar las señales de control de forma independiente

### 3.5.3. Simulación de sistema de control Backstepping Adaptativo

Teniendo la trayectoria de referencia por la cual se desea que el planeador submarino se transporte, se puede verificar el desempeño de la técnica de control planteada.

Con dichos puntos de equilibrio, se procede a simular el recorrido del planeador con el controlador basado en Backstepping Adaptativo. La trayectoria recorrida por el planeador submarino y a su inclinación relativa se muestran en la Figura 3.18 junto con la trayectoria deseada para un ángulo de planeado de  $45^\circ$ . Mientras la Figura 3.17 muestra las variables de estado y las variables de control para dicho recorrido.

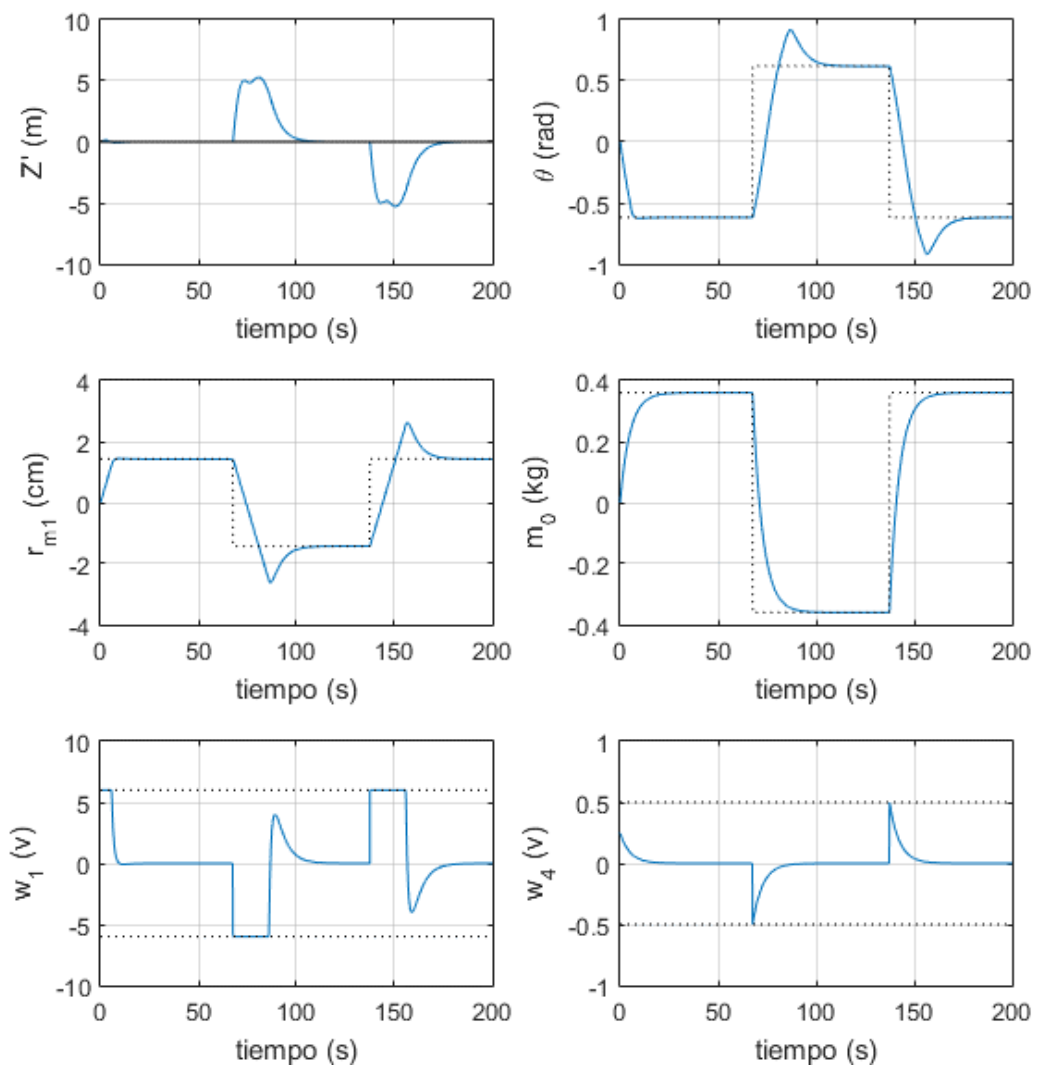


Figura 3.17: Variables de estado con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de  $45^\circ$ . Fuente: Elaboración propia



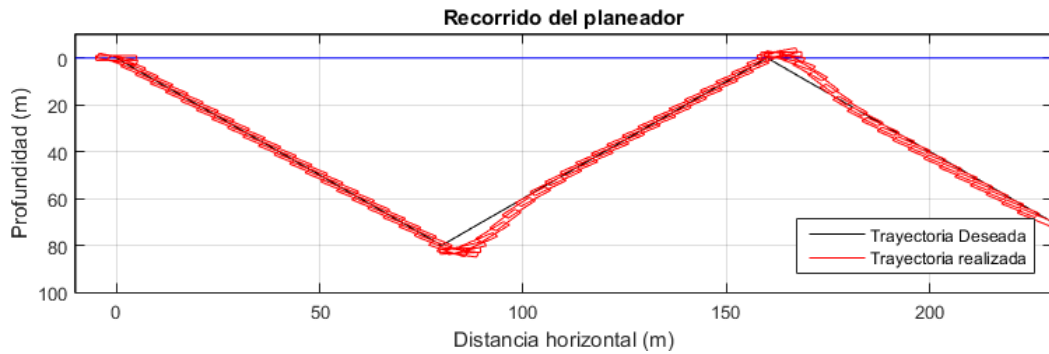


Figura 3.18: Recorrido del planeador submarino con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de  $45^\circ$ .  
Fuente: Elaboración propia

Al observar el recorrido realizado de la Figura 3.18, se puede apreciar que el algoritmo de control adaptativo mantiene al planeador submarino en la trayectoria deseada, estabilizando la masa móvil y la masa de lastre en los puntos deseados con un sobre impulso de 41% y 24% respectivamente. Adicionalmente, la señal de control generada no presenta oscilaciones o comportamiento no deseado.

Se realizó una segunda simulación del recorrido del planeador submarino con una trayectoria deseada con ángulo de planeado igual a  $30^\circ$ . La dinámica de las variables de estado se muestra en la Figura 3.20 mientras el recorrido obtenido se puede apreciar en la Figura 3.19. De igual forma que en el caso previo, se puede apreciar que el controlador diseñado con la técnica de backstepping adaptativo estabiliza el vehículo y lo mantiene en la trayectoria deseada incluso al ser diseñado sin conocimiento previo de las variables hidrodinámicas.

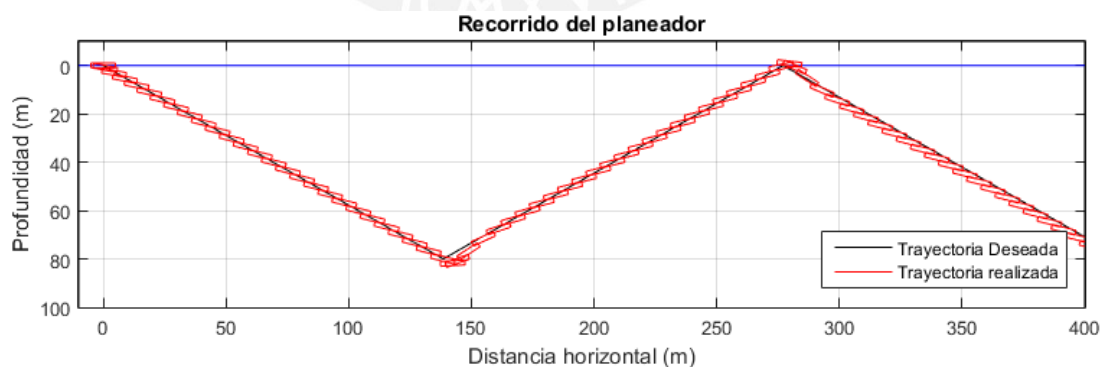


Figura 3.19: Recorrido del planeador submarino con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de  $30^\circ$ .  
Fuente: Elaboración propia

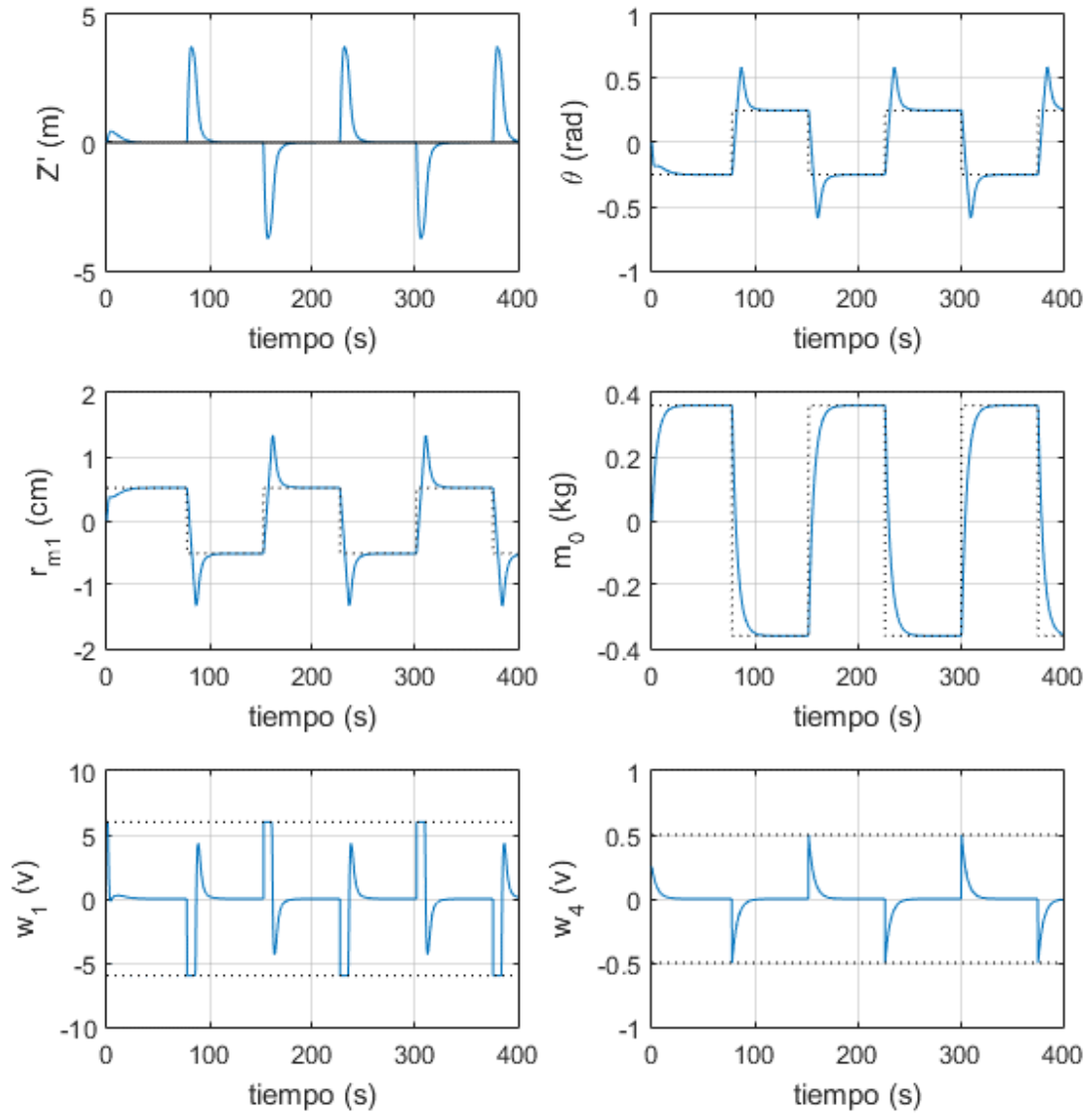


Figura 3.20: Variables de estado con controlador basado en Backstepping Adaptativo. Planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia.

### 3.6. Análisis de simulación de planeado

A continuación, se muestran los resultados recopilados de las simulaciones realizadas con cada algoritmo de control, el controlador PI MIMO, el controlador óptimo LQR y el controlador por Backstepping Adaptativo.

Las condiciones iniciales empleadas son el reposo horizontal del planeador.

$$x = 0, z = 0, z' = 0, \theta = 0, \Omega_2 = 0, v_1 = 0, v_3 = 0, r_{m1} = 0, \dot{r}_{m1} = 0, m_n = 0$$

Mientras que las condiciones finales, cuyos valores son mostrados en la Tabla 3.2 están definidos en función del ángulo de planeado y si el movimiento requerido es ascendente o descendente. Las variables no descritas tienen un valor final deseado de cero.

Tabla 3.2: Valores deseados según ángulo de planeado

<b>Variable</b>	<b>Descendente</b>		<b>Ascendente</b>	
$\xi_d$	-30	-45	30	45
$\theta_d$	-19.84	-35.6	19.84	35.6
$\alpha_d$	10.16	9.4	-10.16	-9.4
$V_d$	0.3	0.3	0.3	0.3
$v_{1d}$	0.2953	0.2959	0.2953	0.2959
$v_{3d}$	0.0529	0.0493	0.0529	0.0493
$r_{m1d}$	0.72	1.42	-0.72	-1.42

- Recorrido con 45° de ángulo de planeado

El recorrido del vehículo y su desviación de la trayectoria deseada para cada algoritmo desarrollado se muestra en la Figura 3.21. Se puede apreciar que los tres algoritmos pueden controlar el planeador submarino y mantenerlo en la trayectoria deseada; sin embargo, el desempeño del controlador PI es bajo, presentando una desviación elevada de la trayectoria deseada generada por el comportamiento durante los cambios de planeado descendiente a ascendente. Tanto el controlador LQR y el controlador Backstepping Adaptativo presentan un buen comportamiento durante los cambios de planeado, convergiendo a la trayectoria deseada; sin embargo, se observa que el controlador Backstepping Adaptativo converge a la trayectoria deseada más rápido reduciendo el tiempo de activación del actuador en 9%. El error RMS de cada una de las trayectorias se muestra en la Tabla 3.3 de

donde se puede observar el mismo resultado; el algoritmo de control Backstepping Adaptativo es el que presenta menor desviación de la trayectoria deseada, mientras el algoritmo LQR presenta un error RMS 50% mayor. Por otro lado, el algoritmo PI MIMO es el que presenta el mayor error, siendo este más de tres veces el error del algoritmo Backstepping Adaptativo.

Tabla 3.3: Error RMS para angulo de planeado de 45°

<b>Algoritmo</b>	<b>CBA</b>	<b>LQR</b>	<b>PI MIMO</b>
<i>Error RMS</i>	2.09	3.15	6.93

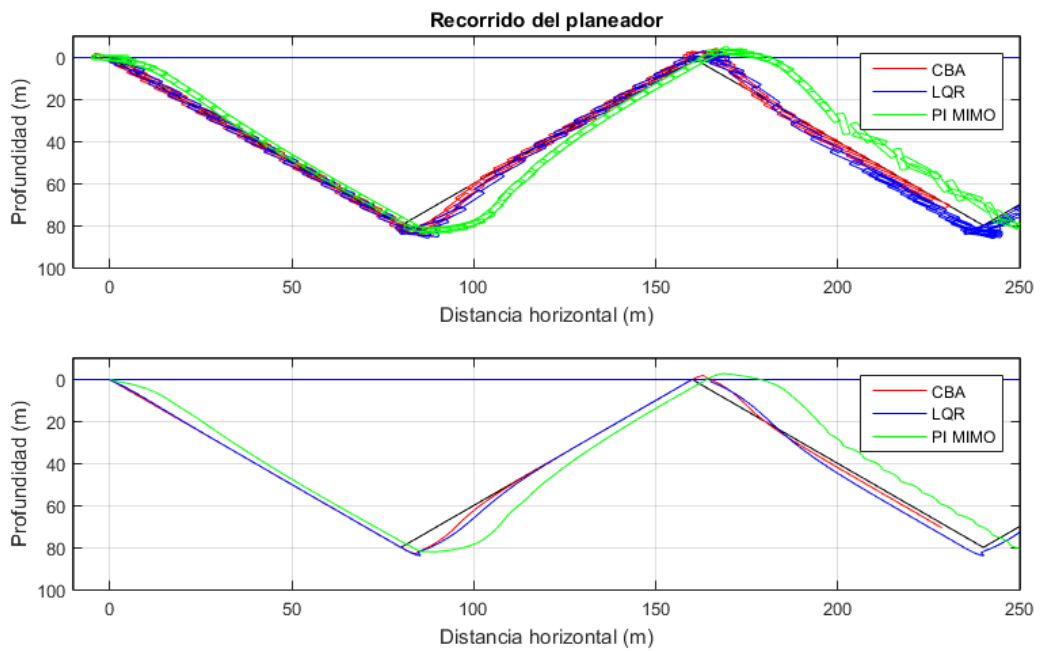


Figura 3.21: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia

Para comparar el desempeño y consumo energético de los algoritmos, las señales de control para los tres algoritmos se muestran a continuación en la Figura 3.22, mientras la potencia eléctrica consumida durante la simulación de tabula en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Potencia consumida para angulo de planeado de 45°

<b>Algoritmo</b>	<b>CBA</b>	<b>LQR</b>	<b>PI MIMO</b>
<i>Potencia consumida</i>	2.31 W	2.15 W	5.27 W

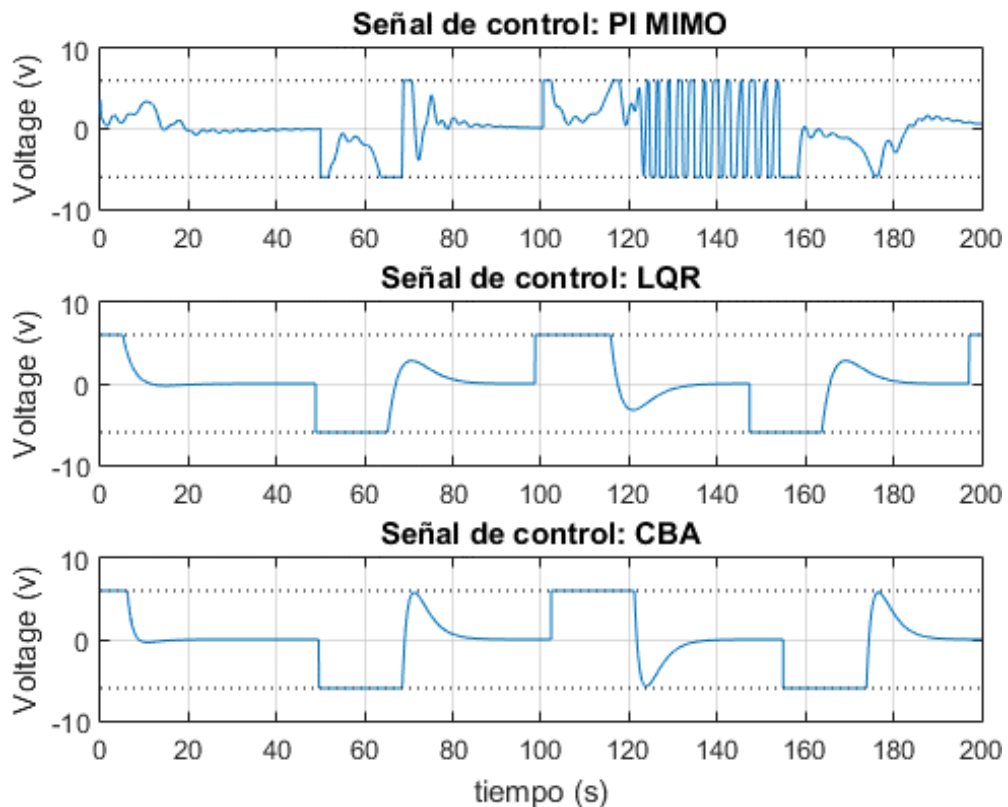


Figura 3.22: Señal de control de los distintos algoritmos para un planeado de 45°. Fuente: Elaboración propia

A partir de las señales de control, se puede observar que el algoritmo óptimo LQR y el Backstepping Adaptativo presentan comportamientos similares; sin embargo, el Backstepping Adaptativo genera señales con valor más elevado. Esto genera que el vehículo corrija su trayectoria y converja a la trayectoria deseada con mayor velocidad; sin embargo, también conlleva a un consumo energético 7% mayor. Por otro lado, la señal de control del algoritmo PI MIMO presenta oscilaciones y comportamiento altamente no deseado, explicando el comportamiento errático del vehículo, en particular durante los cambios de ángulo de planeado. A su vez, este comportamiento conlleva un elevado consumo energético, resultando en un incremento de 145% en comparación con el algoritmo de control óptimo, así como desgaste del actuador producido por el movimiento oscilatorio

- Recorrido con 30° de ángulo de planeado

Mediante las simulaciones con un ángulo de planeado de 30° se puede observar un comportamiento similar, los tres algoritmos de control son capaces de mantener el vehículo estable sobre la trayectoria deseada; sin embargo, el que presenta un mejor desempeño es el algoritmo Backstepping Adaptativo. Además, se puede observar que todos los algoritmos tienen una mejora y presentan una menor desviación sobre

la trayectoria deseada, en particular durante los cambios de planeo descendente a ascendente y viceversa. Esto se debe a que durante el cambio de planeos la variación del ángulo deseado es menor, siendo en este caso un giro de  $60^\circ$  mientras en el caso previo fue de  $90^\circ$ . Esto también influye sobre el ángulo de ataque,  $\alpha$ , y en particular la inclinación del vehículo,  $\theta$ . Observando los valores de la Tabla 3.2, durante el planeado de  $30^\circ$   $\theta$  realiza un cambio de  $39.7^\circ$  mientras que durante el caso previo requiere de una variación de  $71.2^\circ$ , una diferencia significativa del 80%.

Tabla 3.5: Error RMS para ángulo de planeado de  $30^\circ$

<b>Algoritmo</b>	<b>CBA</b>	<b>LQR</b>	<b>PI MIMO</b>
<i>Error RMS</i>	1.0973	1.5531	5.4320

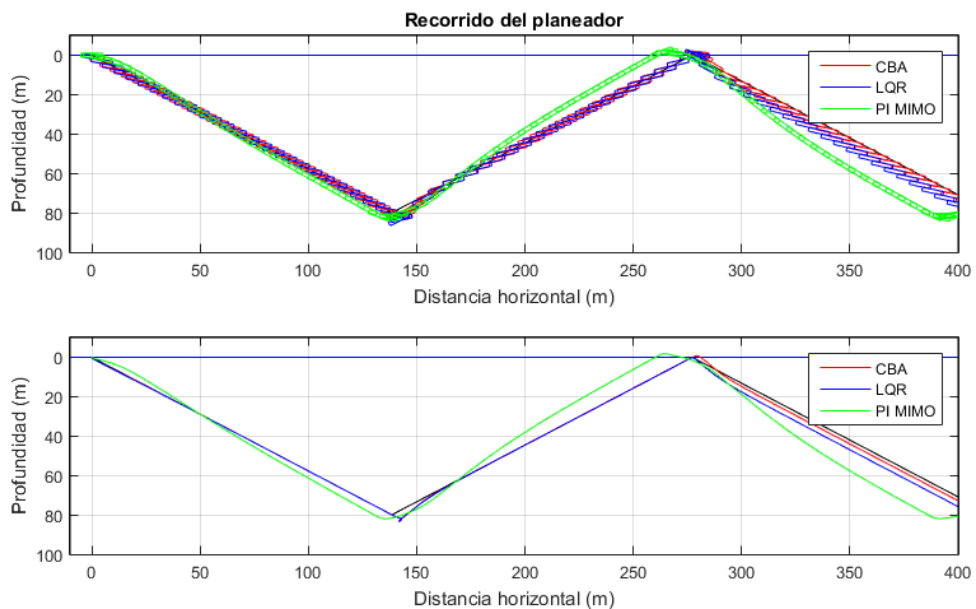


Figura 3.23: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de  $30^\circ$ .

Fuente: Elaboración propia

Las señales de control para los tres algoritmos se muestran a continuación en la Figura 3.24, mientras la potencia eléctrica consumida durante la simulación de muestra en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Potencia consumida para ángulo de planeado de  $30^\circ$

<b>Algoritmo</b>	<b>CBA</b>	<b>LQR</b>	<b>PI MIMO</b>
<i>Potencia consumida</i>	1.72 W	1.59 W	3.47 W

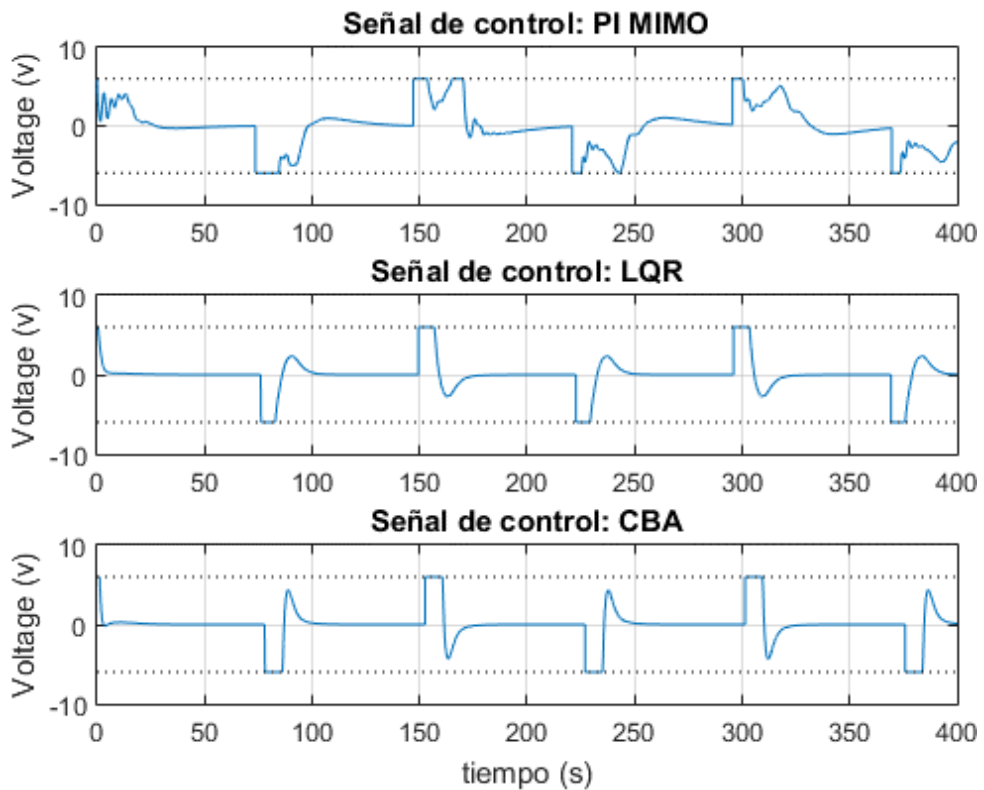


Figura 3.24: Señal de control de los distintos algoritmos para un planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que las señales de control del algoritmo óptimo LQR y el Backstepping Adaptativo presentan señales de control similares, esto corrobora lo observado en el comportamiento del vehículo bajo dichos esquemas de control. El algoritmo Backstepping Adaptativo presenta unas señales un poco más elevadas durante los cambios de dirección, lo cual ayuda al vehículo a llegar más rápido a la trayectoria deseada, sin embargo, esto genera un consumo mayor de energía resultando en un incremento del 8%. Por otro lado, la señal de control del algoritmo PI MIMO presenta oscilaciones y saltos bruscos, lo cual genera el comportamiento errático observado en el vehículo. A su vez, este comportamiento conlleva un elevado consumo energético, resultando en un incremento de 118% en comparación con el algoritmo de control óptimo.

- Recorrido con 30° de ángulo de planeado y perturbaciones externas

Se realizó una simulación sometiendo los vehículos y sus controladores a perturbaciones externas proveniente del ambiente marino, principalmente olas y corrientes. Para modelar el oleaje se expresó la siguiente expresión para representar la posición del oleaje y su efecto sobre el vehículo, donde se expresa como una

función senoidal con un componente amortiguador relacionado con la profundidad del vehículo. Esto implica que el efecto de oleaje es más notorio en la superficie [39].

$$y(t) = A * e^{-z} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right)$$

Donde

A: Amplitud

z: profundidad

$\lambda$ : longitud de onda

Para la simulación, se emplearon olas con amplitud de 20 cm y longitud de onda de 120 metros [66, 67]. El resultado obtenido para los tres controladores desarrollados se muestra en la Figura 3.25, donde se puede apreciar que los tres controladores mantienen el vehículo estable; sin embargo, el controlador PI MIMO presenta un error elevado generado por el oleaje al retornar a la superficie. Debido a ello, el vehículo no es capaz de mantenerse en la trayectoria deseada y eleva el error RMS en 575% como se muestra en la Tabla 3.7. Se observa que tanto el controlador LQR como el Backstepping Adaptativo son robustos ante perturbaciones externas, sin embargo, el controlador Backstepping Adaptativo presenta un mejor rechazo del efecto de las olas superficiales y retorna a la trayectoria deseada en un tiempo menor.

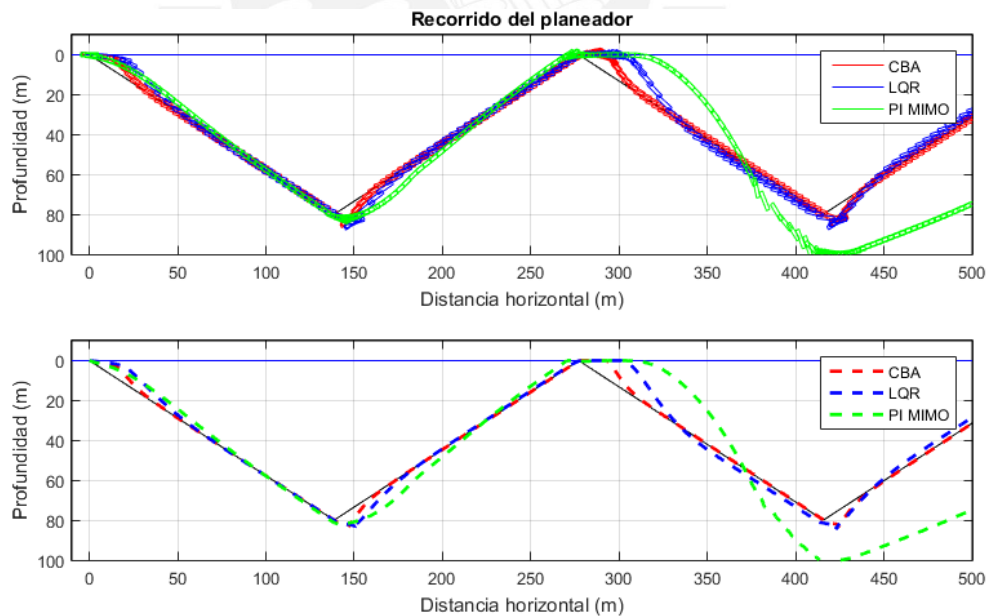


Figura 3.25: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con perturbaciones externas. Fuente: Elaboración propia

Tabla 3.7: Error RMS para ángulo de planeado de 30° con perturbaciones externas

Algoritmo	CBA	LQR	PI MIMO
Error RMS	2.243	4.431	31.263



### 3.7. Comportamiento del vehículo al variar los coeficientes hidrodinámicos.

Uno de los beneficios de emplear un algoritmo adaptativo es la capacidad de considerar los coeficientes hidrodinámicos y sus efectos sobre el planeador submarino como incertidumbres, tal que la ley de control no depende de dichos valores para estabilizar el vehículo. Los coeficientes hidrodinámicos se consideran como valores desconocidos, que el algoritmo estima, con el fin de poder estabilizar y controlar el vehículo y hacer que converja hacia los puntos críticos deseados. Por ello, se realizan simulaciones variando los coeficientes hidrodinámicos tal que estos difieren del modelo empleado durante el diseño del controlador. Los valores se variaron de forma aleatoria con un valor máximo de variación de  $\pm 15\%$ . Los valores empleados durante la simulación se muestran en la Tabla 3.8

Tabla 3.8: Coeficientes hidrodinámicos empleados en simulación

<b>Coeficiente</b>	$K_{D0}$	$K_D$	$K_L$	$K_M$
<i>Valor modelo</i>	18	109	306	36.5
<i>Valor real</i>	15.44	100.23	277	41.5
<i>Variación</i>	14%	8%	9%	13%

El resultado de la simulación para cada algoritmo de control se muestra en la Figura 3.26, mientras el error RMS del recorrido respecto a la trayectoria deseada se tabula en la Tabla 3.9.

Tabla 3.9: Error RMS antes coeficientes hidrodinámicos variables

<b>Algoritmo</b>	<b>CBA</b>	<b>LQR</b>	<b>PI MIMO</b>
<i>Error RMS</i>	1.1514	3.1611	28.0865

A partir de ello, se puede observar que el comportamiento del controlador PI MIMO empeora drásticamente durante los cambios de ángulo. Durante el primer ascenso se desvía en gran medida de la trayectoria, generando un sobreesfuerzo durante el segundo descenso que genera la pérdida del control. Antes de esta pérdida, el error RMS de la trayectoria aumentó en 417% respecto a las simulaciones previas en donde los coeficientes hidrodinámicos empleados fueron iguales a los empleados en el modelo. En el caso del controlador óptimo LQR, se observa que el controlador mantiene la estabilidad sobre el vehículo; sin embargo, durante los cambios de

ángulo de planeado ocurre comportamientos no deseados que causan que el vehículo se estabilice en un punto de equilibrio no deseado y se desvíe de la trayectoria deseada. Mientras tanto, el controlador Backstepping Adaptativo mantiene un correcto desempeño, manteniendo el vehículo en la trayectoria deseada con un pequeño aumento del error RMS de 4%.

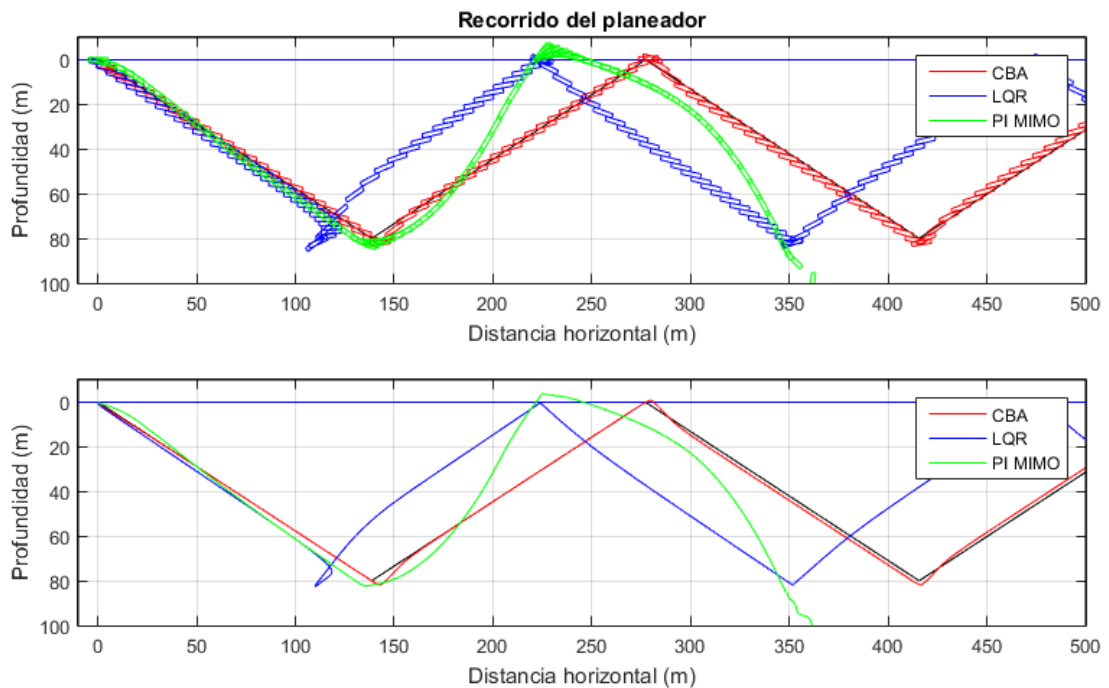


Figura 3.26: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con coeficientes hidrodinámicos distintos. Fuente: Elaboración propia

Un segundo beneficio del controlador adaptativo es su capacidad de estabilizar el sistema ante cambios no previstos en él. Estos cambios pueden corresponder a una degradación en los actuadores, componentes y materiales del vehículo, así como variación en los coeficientes hidrodinámicos durante el recorrido del planeador debido a variaciones en la velocidad, tipo de maniobras realizadas o circunstancias ambientales [65]. Para comparar el comportamiento del controlador se desarrolló una simulación donde dichos coeficientes hidrodinámicos se varían en  $\pm 5\%$  durante el recorrido.

El resultado de la simulación se muestra en la Figura 3.27Figura 3.26 donde el círculo rojo marca el punto de variación de los coeficientes hidrodinámicos y se puede apreciar el desempeño global de los algoritmos desarrollados mientras la Figura 3.28 muestra un acercamiento al punto de variación de los coeficientes hidrodinámicos para apreciar la capacidad correctiva de cada controlador. Se puede apreciar que

mientras los tres controladores mantienen la estabilidad del planeador submarino, el controlador Backstepping Adaptativo puede retornar el vehículo hacia la trayectoria deseada. Por otro lado, el controlador LQR genera un error de trayectoria junto a un aumento en el sobreimpulso durante los cambios de ángulo de planeado, mientras el controlador PI MIMO, presenta un error de traque mayor e incluso un ligero comportamiento oscilante durante el planeado descendente. Este comportamiento corrobora estudios realizados de sensibilidad de los coeficientes hidrodinámicos donde se concluye que pequeñas variaciones en los coeficientes no afectan la estabilidad del sistema, pueden tener un efecto en el comportamiento transitorio [65, 68].

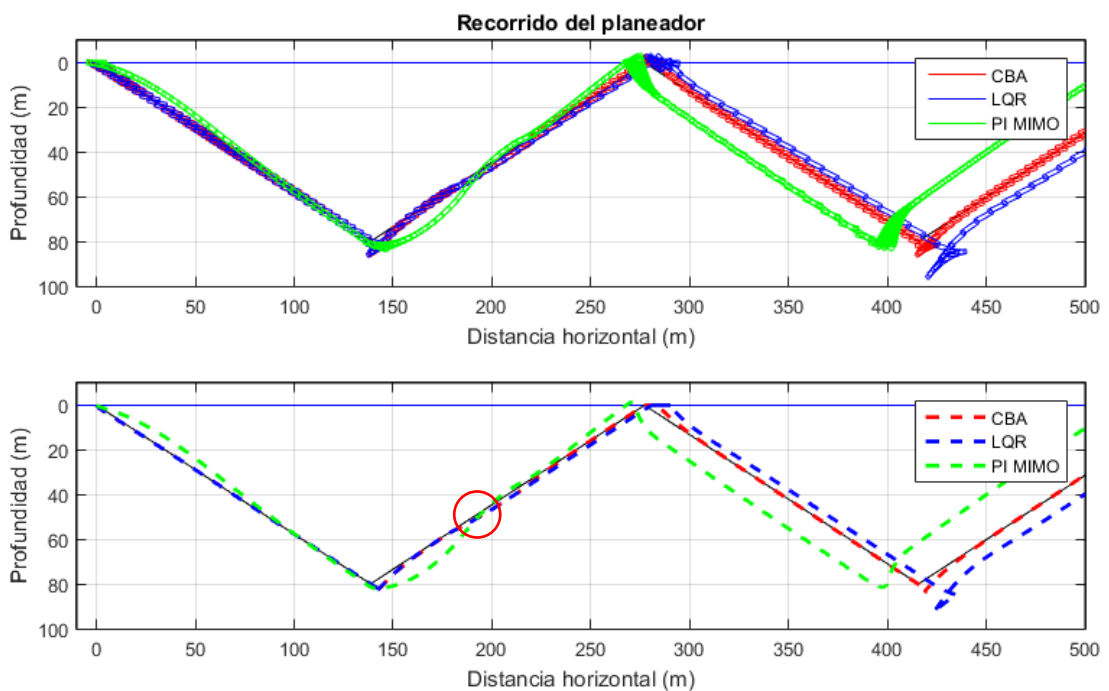


Figura 3.27: Recorrido del planeador submarino según distintos algoritmos de control para un planeado de 30° con coeficientes hidrodinámicos variables. Fuente: Elaboración propia

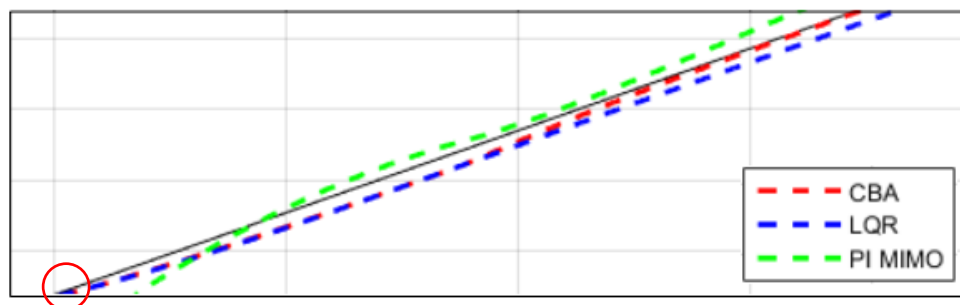


Figura 3.28: Acercamiento al punto de cambio de coeficientes hidrodinámicos en un planeado de 30°. Fuente: Elaboración propia

### 3.8. Conclusiones preliminares

- Se logró obtener tres controladores distintos para un vehículo planeador submarino que consideren algunos aspectos de su comportamiento no-lineal y sean capaces de mantener el vehículo dentro de una trayectoria deseada con un error RMS entre 2m y 7m para un planeado de 45° y de 1m a 5.5m para un planeado de 30°.
- Las señales de control obtenidas por los controladores lineales estabilizan y convergen el desplazamiento del vehículo hacia la trayectoria deseada, manteniendo un consumo mínimo de energía menor a 6W, incluso cuando las señales de control se aplican sobre una dinámica no lineal. Esto implica que el sistema presenta una región de atracción extensa que permite que el vehículo se estabilice en los puntos críticos deseados.
- Se observa a partir de las simulaciones realizadas que los sistemas de control desarrollados permiten realizar tanto planeados descendientes como ascendientes a diferentes ángulos de planeado, a un máximo de 45°, con un buen rendimiento.
- Las técnicas de control lineales son dependientes de un buen modelado, inclusive de factores altamente no-lineales como los coeficientes hidrodinámicos; sin embargo, generan un error de trayectoria en el caso del controlador LQR e incluso inestabilidad en el controlador PI MIMO si estos coeficientes difieren altamente de los valores reales. Por otro lado, la técnica de control basada en Backstepping Adaptativo permite controlar el vehículo sin tener conocimiento de dichos coeficientes.
- Se determina que el sistema de control más eficiente es el controlador óptimo LQR; sin embargo, dicho controlador requiere de un buen conocimiento de los parámetros hidrodinámicos para asegurar que el vehículo converja a la trayectoria deseada, ya que al variar estos en 5% o 15%, se genera un error de trayectoria de 8m y 25m respectivamente.
- Por otro lado, el controlador Backstepping Adaptativo es capaz de mantener el vehículo en la trayectoria deseada bajo diferentes condiciones con un consumo energético mínimo de 1.72W, incluso ante variaciones en los coeficientes hidrodinámicos generados por degradación de los componentes del AUV. por lo que se observa que presenta el mejor desempeño de los algoritmos desarrollados.

## 4. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL Y NAVEGACIÓN

### 4.1. Introducción

En el presente capítulo se describe la implementación del sistema de navegación y control basado en la técnica del Backstepping Adaptativo sobre un vehículo planeador submarino real, tal que se pueda verificar el desempeño del algoritmo desarrollado. Dicho controlador se seleccionó debido a que en el capítulo previo se determinó que dicho controlador presenta un mejor desempeño. El vehículo implementado, mostrado en la Figura 4.1, es un prototipo desarrollado a base de tecnologías de prototipado rápido el cual cuenta con sensores, actuadores y tarjetas electrónicas requeridas para desplegar los algoritmos desarrollados.

A continuación, se presenta una breve descripción del hardware, indicando los distintos módulos del vehículo submarino, así como su importancia dentro del sistema e interacción entre cada uno de los módulos.

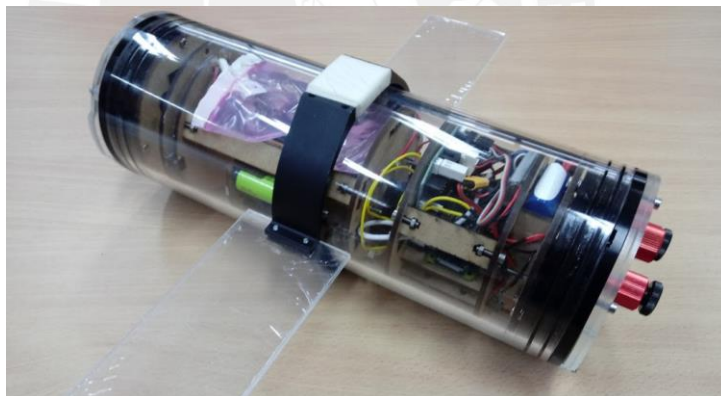


Figura 4.1: Prototipo de planeador submarino implementado.  
Fuente: Elaboración propia

### 4.2. Estructura y hardware del vehículo submarino

En la Figura 4.2 se presenta un esquema del vehículo submarino desarrollado indicando sus tres módulos principales: módulo electrónico, regulador de inclinación y regulador de lastre. Todos los módulos están diseñados en base a MDF (medium-density fibreboard), trabajado mediante corte láser para las piezas principales mediante corte láser y empleando impresión 3D para obtener geometrías complejas requeridas para ensamblar el prototipo y posicionar los componentes electrónicos.

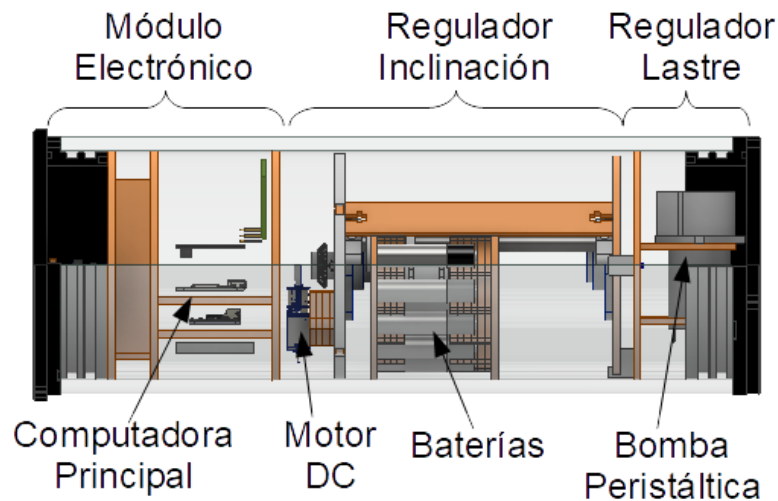


Figura 4.2: Representación del prototipo desarrollado. Fuente: Elaboración propia

El módulo electrónico consiste en las principales tarjetas requeridas para el correcto funcionamiento del vehículo, entre ellas la computadora principal, reguladores de energía y los drivers de los actuadores. El regulador de inclinación contiene principalmente un bloque de baterías, el cual se puede desplazar de forma longitudinal mediante un mecanismo de desplazamiento lineal. De esta forma se puede regular la posición del centro de masa del vehículo y variar el ángulo de inclinación. Finalmente, el regulador de lastre consiste en una bomba peristáltica, la cual permite el ingreso y egreso controlado de agua hacia reservorios ubicados en el interior del vehículo. Esto permite regular el peso total del planeador submarino y, por ende, variar su densidad. Todos los módulos se encuentran ubicados dentro de un compartimento hermético de acrílico, el cual permite que el sistema se sumerja protegiendo los dispositivos electrónicos del agua.

#### 4.2.1. Sistema electrónico

La arquitectura de hardware, mostrando la conexión e interrelación de los diferentes componentes se puede apreciar en la Figura 4.3. Dicha arquitectura, se divide en tres subsistemas: energía, potencia y control. El módulo de energía contiene las baterías del vehículo y dispositivos relacionados que le permiten regular y distribuir la energía eléctrica a los módulos restantes. El módulo de potencia contiene los actuadores del vehículo en conjunto con sus respectivos controladores que permiten regular su potencia de forma segura. Finalmente, el módulo de control contiene la computadora principal, accesorios y sensores que permiten determinar las señales de control que serán enviadas a los actuadores.

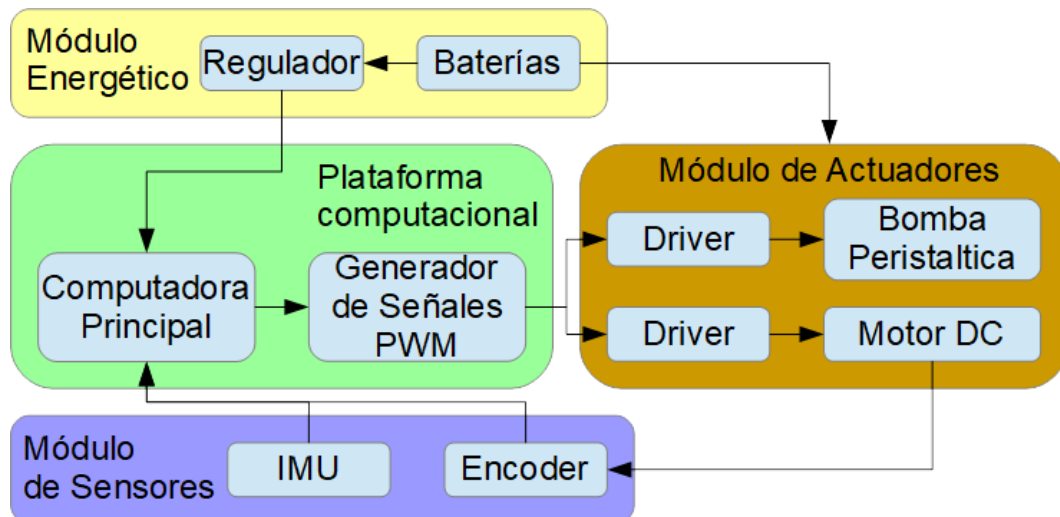


Figura 4.3: Esquema de conexiones de los componentes del vehículo submarino tipo planeador. Fuente: Elaboración propia

- Actuadores

#### **Motor DC**

El motorreductor, mostrado en la Figura 4.4, acciona el actuador lineal que desplaza el bloque de baterías en el regulador de inclinación. Para ello emplea una transmisión tipo corona-tornillo sinfín con reducción 1:20 en conjunto con una caja reductora de 1:75, proporcionando una reducción total de 1500:1 proporcionando un torque máximo de 2.2 Nm



Figura 4.4: Micromotor con reductor y transmisión de tornillo sinfín corona. Fuente: Proveedor (pololu.com)

#### **Bomba peristáltica**

Con el fin de regular el flujo de agua que ingresa hacia el vehículo, se emplea una bomba peristáltica, mostrada en la Figura 4.5. Este actuador está formado por un motorreductor el cual contiene una serie de rodillos en forma de trébol que presionan sobre una manguera, ejerciendo una fuerza que empuja el fluido a una tasa máxima de 100mL/min. Debido a esto, el actuador no entra en contacto con el agua, lo cual facilita en mantener la hermeticidad durante la operación del vehículo y permite regular el flujo de agua mediante la velocidad de giro del motor.



Figura 4.5: Bomba Peristáltica. Fuente: Proveedor (Adafruit.com)

- Sensores

### IMU

Para la navegación del vehículo se requiere identificar el estado actual en el que se encuentra, tanto posición y orientación. Para ello se emplea el sensor inercial BNO055 mostrado en la Figura 4.6, el cual contiene tres diferentes sensores (acelerómetro, giroscopio y magnetómetro). El dispositivo presenta un integrado que realiza la fusión de los sensores mencionados para determinar la orientación global del submarino, simplificando la implementación al no requerir un observador externo.



Figura 4.6: Sensor inercial BNO055. Fuente: Proveedor (Adafruit.com)

### Encoder

Debido al uso de motores de corriente continua como actuadores para los reguladores de inclinación y lastre, se emplean encoders de cuadratura para determinar la posición y velocidad de giro de los motores. Los encoders empleados, mostrados en la Figura 4.7, son dispositivos magnéticos que generan dos ondas cuadradas cuya frecuencia de pulsos aumenta con la velocidad de giro del motor, mientras el desfase entre las dos ondas permite determinar el sentido de giro.



Figura 4.7: Encoders magnéticos de cuadratura. Fuente: Proveedor (Pololu.com)



- Controlador

### **Raspberry Pi Zero**

El vehículo emplea como controlador principal una Raspberry Pi Zero, la cual se muestra en la Figura 4.8. Este dispositivo es una computadora embebida con un procesador de 1GHz y 512 MB RAM, lo cual se proporciona gran capacidad computacional para ejecutar de forma adecuada el algoritmo de control. La Raspberry ejecuta un sistema operativo, Raspbian, basado en Linux, lo cual permite su fácil programación en distintos lenguajes de programación como C y Python. Cuenta con diversos periféricos, así como pines de entrada y salida digitales que le permiten conectarse con diversos dispositivos electrónicos, sensores y actuadores de forma sencilla.



Figura 4.8: Raspberry Pi Zero. Fuente: Proveedor (raspberrypi.org)

### **Generador de señales PWM**

Se emplea un generador de señales PWM basado en el integrado PCA 9685, mostrado en la Figura 4.9, para garantizar la sincronización y estabilidad de dichas señales. De esta forma se puede garantizar que los tiempos de ejecución de las señales se cumplan sin tener que considerar la latencia del sistema operativo ejecutado por la Raspberry Pi, obteniendo un mejor desempeño de los actuadores,

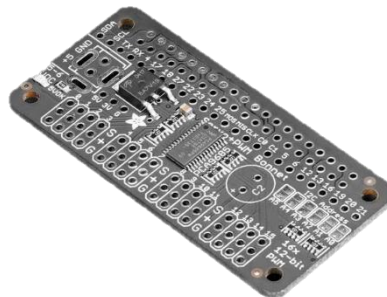


Figura 4.9: PWM Bonnet con PCA9685. Fuente: Proveedor (adafruit.com)

#### 4.2.2. Sistema mecánico

- Modulo electrónico

El módulo electrónico, tal como se muestra en la Figura 4.10, consta de una estructura de MDF dividida en niveles horizontales donde se ubican los principales componentes electrónicos. La estructura contiene una serie de orificios que permiten el paso de cables permitiendo la interconexión de los dispositivos, además sirve para encapsular los componentes y protegerlos de golpes. El sensor inercial se ubica en el punto más alejado del vehículo para reducir el efecto de interferencia electromagnética generada por los componentes electrónicos y actuadores sobre el magnetómetro.

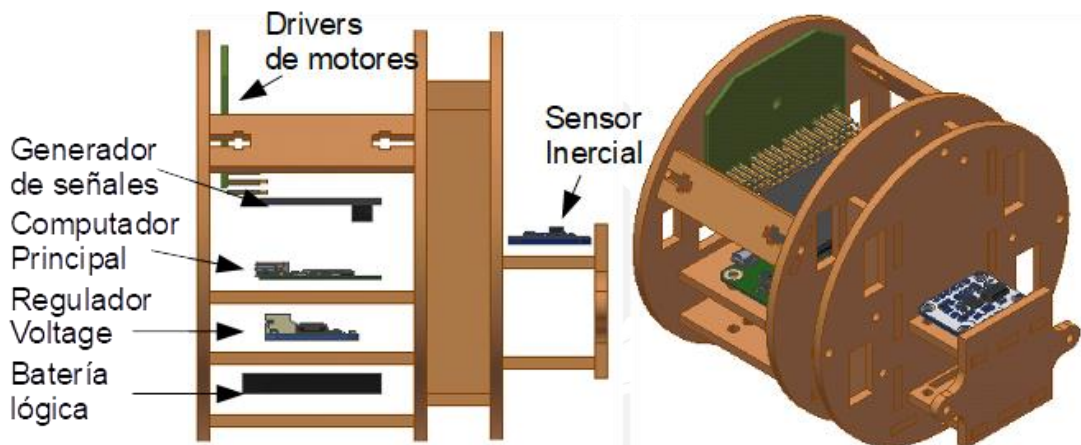


Figura 4.10: Módulo electrónico del planeador submarino.  
Fuente: Elaboración propia

- Regulador de inclinación

El regulador de inclinación, cuyos principales componentes se muestran en la Figura 4.11, se puede considerar como un actuador lineal compuesto por un motor DC y tornillo sinfín, el cual regula la posición de una masa móvil. Debido a las restricciones energéticas, de peso y espacio, la masa móvil está compuesta principalmente por las baterías del planeador submarino. Estas se encuentran montadas en un arreglo en forma de semi-circunferencia, lo cual permite su fácil acceso para su reemplazo y recarga en caso se requiera, mientras el centro de dicha estructura cuenta con barras de acero que funcionan como contrapeso, aumentando el peso de la masa móvil y así permitiendo que su desplazamiento afecte de forma significativa la posición del centro de masa del vehículo total.

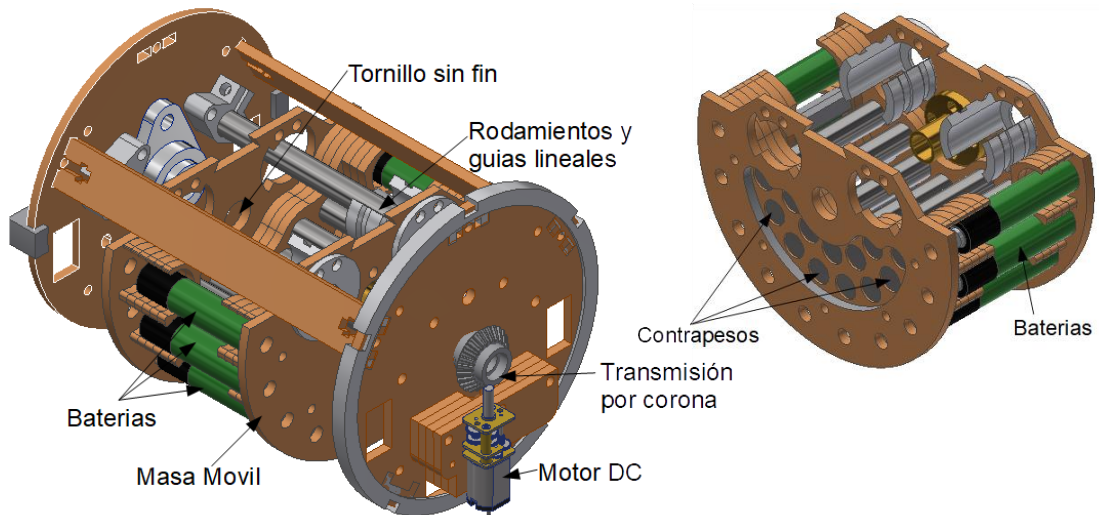


Figura 4.11: Regulador de inclinación mediante masa móvil.  
Fuente: Elaboración propia

- Regulador de Lastre

El sistema de regulación de lastre está compuesto por la bomba peristáltica, sus mangueras y el reservorio interno de agua. En conjunto, estos componentes permiten regular el ingreso de agua al interior del vehículo afectando así su peso total. La Figura 4.12 muestra el soporte de la bomba peristáltica ubicado en uno de los extremos del vehículo. La apertura mostrada permite el libre ingreso de las mangueras hacia el reservorio interno de agua, mientras el otro extremo se posiciona hacia el exterior con un sistema de sellado impermeable, permitiendo así regular el ingreso y salida del agua. Además, el soporte se diseñó rígido para resistir las oscilaciones mecánicas generadas por la bomba peristáltica.

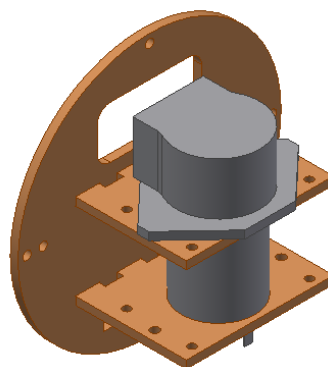


Figura 4.12: Regulador de lastre basado en una bomba peristáltica. Fuente: Elaboración propia

### 4.3. Implementación de los algoritmos

Como se describió en la sección previa, la Raspberry Pi Zero actúa como computadora principal del planeador submarino, es decir, el programa que se ejecuta debe poder recibir las señales de los sensores y a partir de dichos valores determinar las señales que debe enviarse a los actuadores para mantener el vehículo sobre la trayectoria deseada. Para ello, es primordial que la Raspberry Pi se comunique con cada componente electrónico mediante los protocolos de comunicación requeridos por cada uno. La Tabla 4.1 indica dichos protocolos en conjunto con la cantidad de pines digitales requeridos para establecer la comunicación.

Tabla 4.1: Protocolos de comunicaciones empleados en el prototipo

<b>Dispositivo</b>	<b>Comunicación</b>	<b>Cantidad de pines</b>
<i>Generador de señales</i>	I2C	2
<i>Sensor Inercial</i>	I2C	2
<i>Encoder</i>	Entrada digital	2

La comunicación con el generador de señales y el sensor inercial se realiza mediante la lectura y escritura de registros internos de cada uno de los circuitos integrados. La dirección del registro y el tipo de dato a leer se realiza según lo indicado en la hoja de datos de cada componente. Por otro lado, el estado del encoder se puede determinar mediante la lectura directa de pines de entrada digital y un contador interno que va almacenando la cantidad de pulsos detectados.

La Raspberry Pi contiene librerías que permiten emplear fácilmente los pines digitales, tanto como entradas y salidas digitales independientes o empleando puertos estándar como I2C. Particularmente, existen librerías en C que se pueden emplear denominadas *WiringPi* y *WiringPiI2C*. Es importante trabajar en C para además poder emplear la librería *Pthread*, la cual permite generar hilos de trabajo en paralelo con prioridad configurable y baja latencia, permitiendo así cumplir los tiempos de ejecución requeridos para el muestreo y generación de señales.

El programa desarrollado consta de cuatro hilos, cuyo pseudocódigo se muestra en el Algoritmo 1 y cuya función y frecuencia de ejecución se detalla en la Tabla 4.2. La prioridad y la frecuencia de ejecución se configuraron según la importancia de la tarea a ejecutar y el tiempo de muestreo empleado en las simulaciones. Se observa que el hilo *threadEnc* presenta la mayor prioridad y frecuencia de ejecución, mediante la cual se garantiza la correcta lectura de los encoders y se evita perder pulsos.

---

**Algoritmo 1: Pseudocódigo de las funciones desarrolladas por cada hilo en el AUV**


---

<b>threadEncoder (Freq=10000)</b> $A_k \leftarrow \text{leerEstadoPin}(\text{canalA})$ $B_k \leftarrow \text{leerEstadoPin}(\text{canalB})$ $\text{code} \leftarrow A_{k-1}, B_{k-1}, A_k, B_k$ $\text{pulsos} \leftarrow \text{pulsos} + \text{inc}[\text{code}]$ $A_{k-1} \leftarrow A_k$ $B_{k-1} \leftarrow B_k$	<b>threadPWM (Freq=1000)</b> $\text{motor}_1.\text{pwm} \leftarrow \text{Volt2PWM}(\text{abs}(w_1))$ $\text{motor}_2.\text{pwm} \leftarrow \text{Volt2PWM}(\text{abs}(w_4))$ $\text{motor}_1.\text{dir} \leftarrow (\text{sign}(w_1))$ $\text{motor}_2.\text{dir} \leftarrow (\text{sign}(w_4))$ $\text{Bonnet.send} \leftarrow \text{I2C}(\text{motor}_1)$ $\text{Bonnet.send} \leftarrow \text{I2C}(\text{motor}_2)$
<b>threadCtrl (Freq=1000)</b> $\theta \leftarrow \text{readPitch}(\text{IMU})$ $\text{Om2} \leftarrow \text{readPitchSpeed}(\text{IMU})$ $\text{rp1} \leftarrow \text{pulses2dist}(\text{pulsos})$ $w_1 \leftarrow \text{CBA}(\theta, \text{Om2}, \text{rp1})$ $w_4 \leftarrow \text{PI}()$ $\text{updateAdaptive}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{M}_1, \hat{M}_2)$	<b>threadDpt (Freq=10)</b> $\text{dpt} \leftarrow \text{leerProfundidad}()$ if $\text{dpt} > \text{targetdpt}$ then $\text{updateSetPoints}()$

---

Tabla 4.2: Frecuencia y prioridad de hilo

<b>Hilo</b>	<b>Función</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Prioridad</b>
<i>threadEnc</i>	Lee el estado de los encoders y actualiza el contador interno	10 KHz	90
<i>threadCtrl</i>	Genera las señales de control a partir de los valores obtenidos por los sensores	1 KHz	70
<i>threadPwm</i>	Se comunica con el generador de señales para actualizar el ancho de pulso de las señales y mover los motores	1 KHz	80
<i>threadDpt</i>	Determina la profundidad del planeador y varía entre planeados descendentes y ascendentes	10 Hz	50

El hilo *threadCtrl* es el responsable de ejecutar el algoritmo de control basado en Backstepping Adaptativo. Obtiene los valores de las variables de estado  $\theta$ ,  $\Omega_2$  y  $R_{m1}$ , a partir de los sensores y emplea dichos datos en conjunto con las constantes inerciales del planeador submarino para determinar las señales de control empleando las ecuaciones 3.76 - 3.78. Los valores de dichas señales se proceden a restringir entre los voltajes máximos y mínimos permitidos por los actuadores. Además, el hilo contiene un lazo dinámico interno que emplea para actualizar la estimación de las constantes  $A$  y  $M$ , a partir de las ecuaciones 3.79 - 3.82.

El hilo *threadPwm* emplea los valores de las señales de control generados por el hilo previo para determinar el sentido de giro de los motores, así como calcular y actualizar el valor del registro interno del generador de señales que regula el ancho de pulso de la señal PWM. Este hilo se ejecuta de forma concurrente con el hilo de control, permitiendo así accionar los motores según el resultado del algoritmo empleado.

Finalmente, el hilo *threadDpt* realiza la lectura del sensor de profundidad, la cual emplea para determinar y limitar la profundidad máxima de planeado. A su vez, el hilo varía los valores deseados según el punto de equilibrio correspondiente a los planeados descendentes y ascendentes.

El tiempo de ejecución de cada hilo fue medido empleando el reloj interno de la Raspberry Pi Zero para determinar las instrucciones con mayor latencia y modificarlas según se requiera para garantizar que el código completo se pueda ejecutar de forma adecuada. En particular se observó tiempos elevados durante la ejecución del hilo *threadPwm*, debido a la necesidad de establecer comunicación con el generador de señales PWM. Para reducirlos, se incrementó la velocidad de comunicación de I2C y se realizó la transferencia de información mediante registros directos, eliminando las latencias de la librería WiringPiI2C. La Tabla 4.4 muestra los tiempos de ejecución finales obtenidos para cada hilo mientras la Figura 4.13 presenta un diagrama de ejecución mostrando la secuencia de activación de cada hilo.

Tabla 4.3: Tiempo de ejecución final obtenido por hilo

Hilo	Tiempo de ejecución	Frecuencia
<i>threadEnc</i>	8 ns	10 KHz
<i>threadCtrl</i>	72 ns	1 KHz
<i>threadPwm</i>	525 ns	1 KHz
<i>threadDpt</i>	19 ns	10 Hz

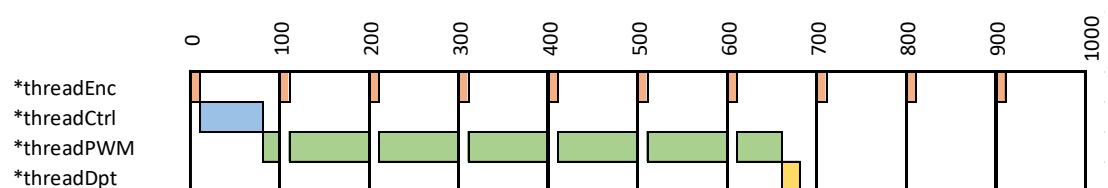


Figura 4.13: Diagrama de tiempos de ejecución de algoritmo desarrollado. Fuente: Elaboración propia

Finalmente, con el objetivo de validar el desempeño del algoritmo de control para regular el ángulo de ataque del vehículo submarino, los datos obtenidos por los sensores y la señal de control generada se almacenan como texto en un archivo CSV. Este archivo es posteriormente procesado para extraer los datos y visualizar el movimiento realizado.

#### 4.4. Resultados

Se realizaron un total de seis pruebas con el prototipo desarrollado, tres para un ángulo de planeado de  $30^\circ$  y otros tres para un ángulo de planeado de  $20^\circ$ . Los datos recolectados por los sensores de navegación se almacenan en archivos durante cada una de las pruebas realizadas, permitiendo así procesarlos y obtener imágenes de los movimientos realizados. La Figura 4.14 muestra el desempeño del planeador submarino durante planeados descendentes y ascendentes de  $30^\circ$ . Debido al espacio disponible en la zona de trabajo, las pruebas se limitaron a regular el ángulo de ataque, la variable principal para establecer una trayectoria submarina.

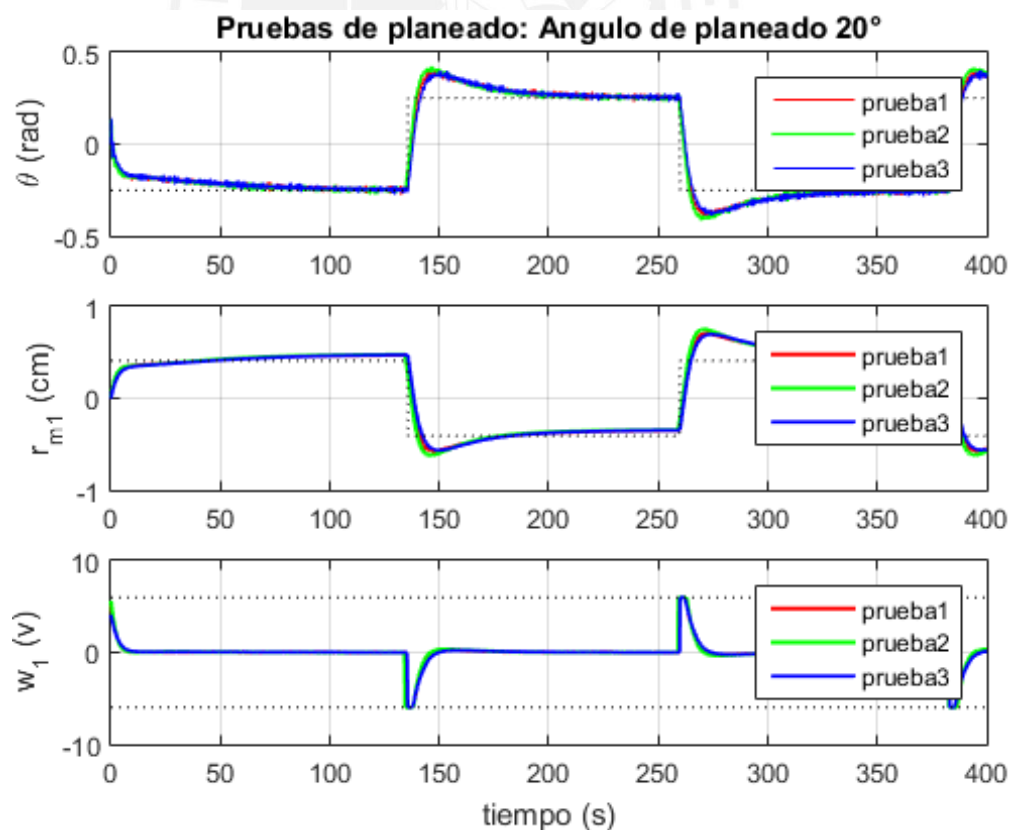


Figura 4.14: Movimiento realizado por el planeador submarino con un ángulo de planeado deseado de  $30^\circ$ . Fuente: Elaboración propia

A partir de la Figura 4.14, se puede observar que la posición de la masa móvil converge de forma satisfactoria sobre la posición deseada, logrando estabilizar el ángulo de inclinación del vehículo con un sobre impulso generado al momento de hacer el cambio de planeado descendente a ascendente y viceversa. El error RMS de cada movimiento se calcula y tabula en la Tabla 4.4, donde se observa que incluso por las variaciones en cada recorrido, generadas por ruido en las señales de los sensores y perturbaciones causadas por el movimiento del agua, el algoritmo desarrollado mantiene el vehículo en la posición deseada.

Tabla 4.4: Error RMS obtenido en pruebas, ángulo de planeo de 30°

<b>Prueba</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<i>Error RMS</i>	4.6946	4.8923	4.7312

El movimiento realizado por el planeador submarino durante las pruebas realizadas con un ángulo de planeado de 20° se muestran en la Figura 4.15, donde se puede observar que, al igual que las pruebas anteriores, el vehículo converge a la orientación deseada.

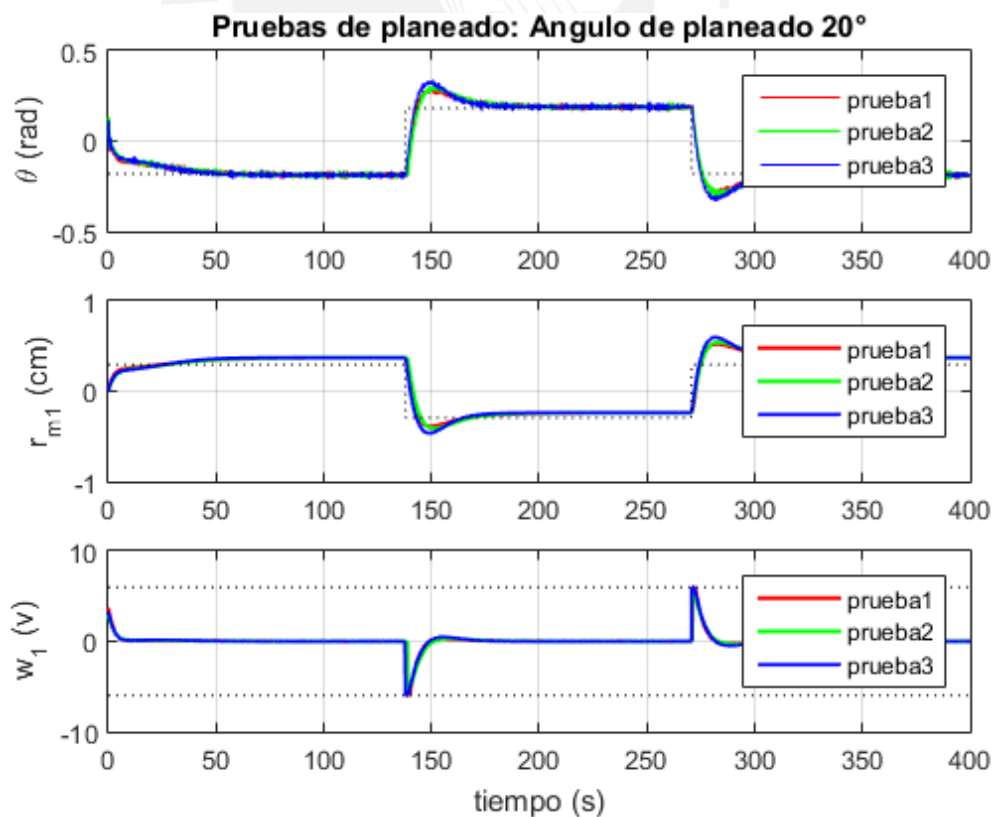


Figura 4.15: Movimiento realizado por el planeador submarino con un ángulo de planeado deseado de 20°. Fuente: Elaboración propia



Se puede apreciar que, al igual que las simulaciones realizadas, un ángulo de planeado menor resulta en un mejor comportamiento durante los cambios del ángulo del planeado. Esto se puede explicar debido al ángulo de ataque, ya que para un ángulo de planeado de 20°, el ángulo de ataque es mayor. Esto resulta en un vehículo que desciende con un menor ángulo  $\theta$  (10.42 vs -19.84), requiriendo una variación de inclinación más suave. El error RMS de los movimientos realizados se puede observar en la Tabla 4.5, donde se observa que el error se mantiene bajo durante toda la prueba.

Tabla 4.5: Error RMS obtenido en pruebas, ángulo de planeo de 20°

<b>Prueba</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<i>Error RMS</i>	3.2267	3.4711	3.5993

#### 4.5. Conclusiones preliminares

- Se logró diseñar e implementar un prototipo de vehículo autónomo submarino tipo planeador que permita la verificación de un sistema de control empleando actuadores internos que varíen la masa total y la ubicación del centro de masa del vehículo.
- Al emplear un sensor inercial con la capacidad de realizar fusión de sensores elimina la necesidad de implementar un observador y reduce la carga operacional sobre la computadora principal, la cual se encuentra con una carga operacional del 70% para la ejecución del algoritmo.
- El mayor tiempo de procesamiento del algoritmo se emplea para la comunicación I2C con el generador de señales PWM (525 ns, o 75% del tiempo de procesamiento total). Esto se debe a que cada línea del generador requiere escribir un total de ocho registros, pruebas realizadas empleando el modo rápido de I2C ofrecido por la raspberry pi zero, generaron errores de comunicación causados por la impedancia de las líneas, por lo que se optó por usar el modo lento de 100 kbps.
- El controlador backstepping adaptativo desarrollado y empleado durante las pruebas de control del ángulo de ataque, es capaz de estabilizar el ángulo de inclinación del vehículo en un tiempo de aproximadamente 65 segundos con un sobreimpulso del 25% para un ángulo de ataque de 30° y un tiempo de establecimiento de 50 segundos con un sobreimpulso del 10% para un ángulo de ataque de 20°.

## 5. CONCLUSIONES

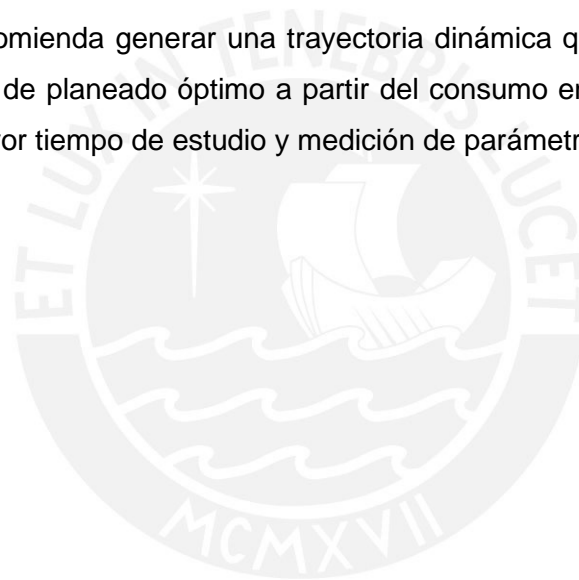
- Se logró diseñar un controlador para un vehículo planeador submarino que regule la inclinación y densidad del vehículo con el fin de seguir una trayectoria de planeado predefinida con bajo error RMS de 4.7 para desplazamientos con ángulos de planeo de  $30^\circ$  y 3.43 para ángulos de planeo de  $20^\circ$ . Asimismo, reduce el consumo energético de los actuadores en un 50%, logrando recorrer mayores distancias con la misma carga energética.
- Se desarrolló un estudio sobre el estado del arte de los sistemas de control previamente desarrollados para vehículos submarinos tipo planeador, observando las metodologías aplicadas y sus resultados. Se logró determinar que debido a la complejidad dinámica y no linealidades presentes en el desplazamiento del vehículo, la problemática de control no ha sido resuelta, generando errores de desplazamiento que acumulados en el tiempo de duración de las inspecciones (orden de días o semanas) pueden crecer a kilómetros, drásticamente afectando la calidad de los datos recolectados.
- A partir de los estudios realizados y análisis de las fuerzas y momentos que afectan el vehículo se obtuvo un modelo matemático que representa la dinámica tridimensional de un vehículo submarino tipo planeador con actuadores internos, el cual considera los efectos no-lineales asociados a su movimiento y de los coeficientes hidrodinámicos. Dicho modelo se redujo a un movimiento en un solo plano para reducir la cantidad de variables empleadas y se empleó posteriormente en la etapa del diseño del controlador.
- Se observó que un sensor inercial tipo AHRS (Attitude Heading Reference System) que internamente implemente un filtro de Kalman para filtrar la señal de los sensores y realice fusión de sensores retornando de forma directa la orientación absoluta del sensor y velocidad de desplazamiento, reduce la carga operación sobre el controlador y simplifica el proceso de diseño e implementación al no requerir un observador externo.
- Se diseñó un controlador avanzado empleando la técnica de Backstepping Adaptativo que permite controlar el vehículo sin conocimiento previo de los coeficientes hidrodinámicos y su efecto sobre la dinámica del vehículo

durante el movimiento. La adaptabilidad de dicho algoritmo es capaz de compensar cambios en los parámetros hidrodinámicos de un 5% de forma efectiva, aumentando el error RMS en 5.35% y retornando a la trayectoria en 83 segundos. Asimismo, el controlador garantiza la estabilidad del vehículo sin requerir una identificación previa de los coeficientes hidrodinámicos. Esto facilita su implementación y reduce la necesidad de realizar pruebas complejas de identificación, así como, aumenta la adaptabilidad del vehículo al permitir la modificación de su longitud, tipo y número de aletas y su carga sensorial sin requerir determinar su efecto sobre los coeficientes hidrodinámicos.

- Se implementó un prototipo que permite verificar el desempeño real del algoritmo de control desarrollado teniendo en consideración los efectos de distribución de masa y densidad variable que generan los movimientos principales del vehículo submarino. Además, se observó la latencia de los algoritmos, y optimizó el código implementado para garantizar la correcta ejecución del algoritmo en tiempo real, llegando a consumir 69.6% de la capacidad de procesamiento de una Raspberry Pi Zero.
- Se verificó mediante simulaciones y pruebas con el prototipo desarrollado la eficacia del sistema de control, comparándolo con sistemas de control basados en PID, logrando reducir el error en 75%, y aumentando la eficiencia energética en 50% en comparación con un controlador convencional.
- Se verificó el efecto de la variación de los coeficientes hidrodinámicos sobre el controlador Backstepping Adaptativo desarrollado, demostrando su capacidad de estabilizar el vehículo ante parámetros desconocidos. Se contrastó este comportamiento con la inestabilidad generada por un controlador basado en PID.

## 6. RECOMENDACIONES

- Se recomienda validar el algoritmo desarrollado a mayores profundidades con el fin de obtener índices de desempeño relacionados al seguimiento de ruta, en particular ante la presencia de corrientes marinas y la capacidad real del controlador de rechazar perturbaciones y generar acciones correctivas.
- Se recomienda ampliar el algoritmo de control a partir del modelo tridimensional obtenido para controlar la rotación del vehículo y seguir trayectorias tridimensionales que permitan realizar estudios de ecosistemas marinos en áreas de estudio.
- Se recomienda generar una trayectoria dinámica que permita determinar el ángulo de planeado óptimo a partir del consumo energético para garantizar un mayor tiempo de estudio y medición de parámetros oceánicos.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] FAO, «Food and Agriculture Organization of the UN, High-level expert forum on 'How to feed the world in 2050',» FAO, Rome, 2009.
- [2] FAO, «The State of World Fisheries and Aquaculture.,» FAO, Rome, 2010.
- [3] Ministerio de Producción del Peru - PRODUCE, «ANUARIO ESTADÍSTICO PESQUERO Y ACUÍCOLA 2016,» Lima, 2018.
- [4] M. A. Shields, D. K. Woolf, E. P. Grist, S. A. Kerr, A. Jackson, R. E. Harris, M. C. Bell, R. Beharie, A. Want, E. Osausi, S. W. Gibb y J. Side, «Marine Renewable Energy: The ecological implications of altering the hydrodynamic of the marine environment,» *Ocean & Coastal Management*, vol. 54, nº 1, pp. 2-9, 2011.
- [5] D. A. Roberts, E. L. Johnston y N. A. Knott, «Impacts of desalination plant discharges on the marine environment: A critical review of published studies.,» *Water Research*, vol. 44, nº 18, pp. 5117-5128, 2010.
- [6] M. J. Kennish y P. L. Lutz, *Practical Handbook of Estuarine and Marine Pollution*, Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [7] G. Merino, M. Barange, J. L. Blanchard, J. Harles, R. Holmes, I. Allen, E. H. Allison, M. C. Badjeck, N. K. Dulvy, J. Holt, S. Jennings, C. Mullon y L. D. Rodwell, «Can marine fisheries and aquaculture meet fish demand from a growing human population in a changing climate?,» *Global Environmental Change*, vol. 22, p. 795–806, 2012.
- [8] B. P. Harvey, D. Gwynn-Jones y P. J. Moore, «Meta-analysis reveals complex marine biological responses to the interactive effects of ocean acidification and warming,» *Ecology and Evolution*, vol. 3, nº 4, pp. 1016-1030, 2013.
- [9] R. B. Wynn, V. A. Huvenne, T. P. Le Bas, B. J. Murton, D. P. Connelly, B. J. Bett, H. A. Ruhl, K. J. Morris, J. Peakall, D. R. Parsons, E. J. Sumner, S. E. Darby, R. M. Dorrell y J. E. Hunt, «Autonomous Underwater Vehicles (AUVs): Their past, present and future contributions to the advancement of marine geoscience,» *Marine Geology*, vol. 352, pp. 451-468, 2014.
- [10] H. Stommel, «The Slocum mission,» *Oceanography*, vol. 2, nº 1, pp. 22-25, 1989.
- [11] T. Curtin, J. G. Bellingham, J. Catipovic y D. Webb, «Autonomous ocean sampling networks,» *Oceanography*, vol. 6, nº 3, pp. 86-94, 1993.
- [12] D. C. Webb, P. J. Simonetti y C. P. Jones, «SLOCUM: An underwater glider propelled by environmental energy,» *IEEE Journal of oceanic engineering*, vol. 26, nº 4, pp. 447-452, 2001.
- [13] J. Sherman, R. E. Davis, W. B. Owens y J. Valdes, «The Autonomous Underwater Glider "Spray",» *IEEE JOURNAL OF OCEANIC ENGINEERING*, vol. 26, nº 4, pp. 437-446, 2001.

- [14] C. C. Eriksen, J. Osse, R. D. Light, T. Wen, T. W. Lehman, P. L. Sabin, J. W. Ballard y A. M. Chiodi, «Seaglider: A Long-Range Autonomous Underwater Vehicle for Oceanographic Research,» *IEEE JOURNAL OF OCEANIC ENGINEERING*, vol. 26, nº 4, pp. 424-436, 2001.
- [15] D. L. Rudnick, R. E. Davis, C. C. Eriksen, D. M. Fratantoni y M. J. Perry, «Underwater gliders for ocean research,» *Marine Technology Society Journal*, vol. 38, nº 1, pp. 48-59, 2004.
- [16] A. Wolek, J. Burns, C. Woolsey, J. Quenzer, L. Techy y K. Morgansen, «A Maneuverable, Pneumatic Underwater Glider,» *2012 Oceans*, 2012.
- [17] M. B. Loc, H.-S. Choi, J.-M. Seo, S.-H. Baek y J.-Y. Kim, «Development and Control of a New AUV Platform,» *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 12, nº 4, pp. 886-894, 2014.
- [18] C. L. Nickell, *Modular Modification of a Buoyant AUV for Low-Speed Operation*, 2005.
- [19] P. Bhatta y N. E. Leonard, «Stabilization and coordination of underwater gliders,» *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2081-2086, 2002.
- [20] M. M. Noh, M. R. Arshad y R. M. Mokhtar, «Depth and pitch control of USM underwater glider: performance comparison PID vs LQR,» *Indian Journal of Geo-Marine Sciences*, vol. 40, pp. 200-206, 2011.
- [21] N. Mahmoudian y C. Woolsey, «Underwater glider motion control,» *Decision and Control*, pp. 552-557, 2008.
- [22] N. E. Leonard y J. G. Graver, «Model-Based Feedback Control of Autonomous Underwater Gliders,» *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 26, nº 4, pp. 633-645, 2001.
- [23] H. Yang y J. Ma, «Sliding mode tracking control of an autonomous,» *International Conference on Computer Application and System Modeling*, pp. 555-558, 2010.
- [24] F. Song y S. M. Smith, «Combine Sliding Mode Control and Fuzzy Logic Control for Autonomous Underwater Vehicles,» *Advanced Fuzzy Logic Technologies in Industrial Applications*, pp. 191-205, 2006.
- [25] K. Isa y M. Arshad, «Neural Network Control of Buoyancy-Driven Autonomous Underwater Glider,» *Recent Advances in Robotics and Automation*, pp. 15-35, 2013.
- [26] E. Dong, S. Guo, X. Lin, X. Li y Y. Wang, «A neural network based self-tuning PID controller of an autonomous underwater vehicle,» *International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 898-903, 2012.
- [27] M. B. Loc, H.-S. Choi, J.-Y. Kim, Y. H. Kim y R. I. Murakami, «Design of Fuzzy PD Depth Controller for an AUV,» 2013.

- [28] L. A. Cooney, «Dynamic response and maneuvering strategies of a hybrid autonomous underwater vehicle in hovering,» 2009.
- [29] L. V. Steenson, S. Turnock, A. Phillips, M. E. Furlong, C. Harris y E. Rogers, «Model predictive control of a hybrid autonomous underwater glider with experimental verification,» *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment*, 2014.
- [30] R. Panish, «Dynamic control capabilities and developments of the Bluefin robotics AUV fleet,» *Proceedings of the International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology*, pp. 23-26, 2009.
- [31] R. da Silva Tchilian, E. Rafikova, S. A. Gafurov y M. Rafikov, «Optimal control of an underwater glider vehicle,» *Dynamics and Vibroacoustics of Machines*, pp. 732-740, 2017.
- [32] M. G. Joo y Z. Qu, «An Autonomous Underwater Vehicle as an Underwater Glider and Its Depth Control,» *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 13, nº 5, pp. 1212-1220, 2015.
- [33] W. M. Bessa, M. S. Dutra y E. Kreuzer, «Depth control of remotely operated underwater vehicles using an adaptive fuzzy sliding mode controller,» *Robotics and Automation Systems*, vol. 56, pp. 670-677, 2008.
- [34] K. R. Goheen y E. R. Jefferys, «Multivariable self-tuning autopilots for autonomous and remotely operated underwater vehicles,» *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 15, pp. 144-151, 1990.
- [35] A. Nag, S. S. Patel y S. Akbar, «Fuzzy logic based depth control of an autonomous underwater vehicle,» *International Multi-Conference on Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing*, pp. 117-123, 2013.
- [36] Y. Shan, Z. Yan y J. Wang, «Model predictive control of underwater gliders based on a one-layer recurrent neural network,» *Sixth International Conference on Advanced Computational Intelligence*, pp. 328-333, 2013.
- [37] W. Naeem, «Model predictive control of an autonomous underwater vehicle,» *Proceedings of UKACC 2002 Postgraduate Symposium*, pp. 19-23, 2002.
- [38] W. Naeem, R. Sutton, J. Chudley, F. R. Dalglish y S. Tetlow, «A genetic algorithm-based model predictive control autopilot design and its implementation in an autonomous underwater vehicle,» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment*, vol. 21, nº 8, pp. 175-188, 2004.
- [39] M. R. Dhanak y N. I. Xiros, *Handbook of Ocean Engineering*, London: Springer, 2016.
- [40] T. I. Fossen, *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*, John Wiley & Sons, 2011.

- [41] T. I. Fossen, *Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*, Trondheim: Marine Cybernetics, 2002.
- [42] G. Antonelli, *Underwater robots-motion and force control of vehicle-manipulator systems.*, Berlin: Springer, 2006.
- [43] J. Gallier, «Basics of Classical Lie Groups: The Exponential Map, Lie Groups, and Lie Algebras,» de *Geometric Methods and Applications*, New York City, Springer, 2001, pp. 367-414.
- [44] E. Eade, «Lie Groups for 2D and 3D Transformations,» 20 Mayo 2017. [En línea]. Available: <https://docs.google.com/viewer?url=http%3A%2F%2Fethaneade.com%2Fie.pdf>. [Último acceso: 14 Abril 2018].
- [45] D. D. Holm, *Geometric Mechanics: Part II: Rotating, Translating and Rolling*, London: Imperial College Press, 2011.
- [46] A. V. Igorevich, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 2013.
- [47] N. E. Leonard, «Stability of a bottom-heavy underwater vehicle,» *Automatica*, vol. 33, nº 3, pp. 331-346, 1997.
- [48] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, New York: Wiley, 1994.
- [49] H. Lamb, *Hydrodynamics*, New York: Cambridge university press, 1975.
- [50] G. Kirchhoff, «Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit,» *Crelle's Journal*, pp. 237-273, 1869.
- [51] E. B. *Dynamics of Flight*, New York y Londres: John Wiley and Sons, 1959.
- [52] B. L. Stevens y F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, New York: Wiley, 1992.
- [53] S. F. Hoerner y H. V. Borst, *Fluid Dynamics Drag*, Midland Park, NJ: Mrs. Liselotte, 1965.
- [54] S. F. Hoerner y H. V. Borst, *Fluid Dynamics Lift*, Midland Park, NJ: Mrs. Liselotte, 1985.
- [55] J. Roskan, *Methods for Estimating Stability and Control Derivatives of Conventional Subsonic Airplanes*, Lawrence, KS, 1971.
- [56] S. Sagatun, *Modelling and Control of Underwater Vehicles: A Lagrangian Approach*, Norway: Norwegian Institute of Technology (NTH), 1992.
- [57] J. Yuh, G. Marani y D. Blidberg, «Applications of marine robotic vehicles,» *Intelligent service robotics*, vol. 4, pp. 221-231, 2011.
- [58] J. G. Graver, R. Bachmayer, N. E. Leonard y D. M. Fratantoni, «Underwater glider model parameter identification,» *Proc. 13th Int. Symp. on Unmanned Untethered Submersible Technology (UUST)*, vol. 1, pp. 12-13, 2003.



- [59] R. Grasso, D. Cecchi, M. Cococcioni, C. Trees, M. Rixen, A. Alvarez y C. Strode, «Model based decision support for underwater glider operation monitoring,» *OCEANS*, pp. 1-8, 2010.
- [60] S. M. H. a. K. J. Å. Boyd, «MIMO PID tuning via iterated LMI restriction,» *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, nº 8, pp. 1718-1731, 2016.
- [61] Q.-G. Wang y Z.-Y. Nie, «PID Control for MIMO Processes,» de *PID Control in the Third Millenium*, London, Springer, 2012, pp. 177-204.
- [62] H.-W. Fung, Q.-G. Wang y T.-H. Lee, «PI tuning in terms of gain and phase margins,» *Automatica*, vol. 34, nº 9, pp. 1145-1149, 1998.
- [63] HDW, «Manoeuvrability of Submarines,» *Howaldts werke-Deutsche Werft AG Report*, 2002.
- [64] D. A. Jones, D. B. Clarke, I. B. Brayshaw, J. L. Barillon y B. Anderson, «The calculation of hydrodynamic coefficients for underwater vehicles,» *DEFENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY ORGANIZATION*, 2002.
- [65] M. Abolvafaie, H. R. Koofgar y M. Malekzadeh, «CLASSIFICATION OF HYDRODYNAMIC COEFFICIENTS OF AUTONOMOUS UNDERWATER VEHICLES BASED ON SENSITIVITY ANALYSES IN STANDARD MANEUVERS,» *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 26, nº 1, pp. 1-10, 2018.
- [66] Florida Center for Instructional Technology, *Waves in the Ocean*, Florida: College of Education, University of South Florida, 2005.
- [67] The SWAMP Group, *Ocean Wave Modeling*, Springer US, 1985.
- [68] D. Perrault, N. Bose, S. O'Young y C. D. Williams, «Sensitivity of AUV response to variations in,» *Ocean Engineering*, vol. 30, pp. 779-811, 2003.