

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**ANÁLISIS DE SITUACIONES – PROBLEMA PARA LA ENSEÑANZA
DE LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN BÁSICA**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

AUTOR

MANUEL AUGUSTO FRANCISCO MALQUICHAGUA FERNÁNDEZ

ASESORA

AUGUSTA ROSA MARIA OSORIO GONZALES

Octubre, 2019

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo el análisis de las diversas situaciones – problema asociadas a los conceptos fundamentales de la probabilidad presentes en los cuadernos de trabajo propuestos por el Ministerio de Educación para la educación básica en el Perú. El marco teórico adoptado para la investigación es el del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Para la realización de este análisis, fue necesario construir el significado de referencia de la Probabilidad en su sentido fundamental. Para ello, se realizó un estudio de distintas posturas matemáticas y didácticas con el fin de identificar y organizar los elementos presentes en el significado. Una vez establecido el significado de referencia, se realizó una comparación de los elementos del mismo con el significado pretendido según los desempeños presentados en el Currículo Nacional. Para el análisis de las tareas escogidas de los cuadernos de trabajo, se estableció las configuraciones epistémicas de las mismas a fin de identificar los objetos primarios y detectar posibles errores e inconsistencias. El análisis realizado permitió concluir que muchas de las tareas propuestas contribuyen a reforzar sesgos o inducen a errores en la comprensión de la probabilidad. Además, se concluyó que dichas tareas carecen de la profundidad y variedad necesaria para presentar un significado completo a los estudiantes. Esta problemática tiene consecuencias negativas tanto en los estudiantes como en los profesores. Entre las recomendaciones principales de este trabajo, se aconseja la inclusión de situaciones problema que involucren los distintos significados de la probabilidad, así como el diseño de experimentos aleatorios basados en situaciones cotidianas en los que se evidencie la aplicación de los conceptos estudiados.

Palabras clave: Probabilidad, Significado de referencia, Tareas

ABSTRACT

The objective of this research was to analyze a sample of tasks involving the core concepts of probability in workbooks proposed by the ministry of education in Peru for the instruction of elementary and high school students. This investigation followed the theoretical framework proposed by the Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education. To achieve the proposed objectives, it was necessary to establish the referential meaning of the core concepts in probability. In order to do so, it was necessary to gather and review a wide array of historic and mathematical postures about the subject and propose an organization of the elements involved. After establishing the referential meaning, it was compared to the contents of the National Curriculum to find similarities and possible conflicts. For the analysis of the chosen tasks, the epistemic configuration was determined for each of them identifying the primary objects in order to detect inconsistencies or contradictions. After the analysis, it was apparent that several of the proposed tasks contributed to the existence of cognitive bias, such as equiprobability bias, and comprehension errors about probability. Another conclusion was that most of the analyzed tasks lack the depth and variety necessary to transmit the complex meaning of probability. Among the main recommendations, it is advised to include problematic situations in which more than one meaning of probability is involved, as well as real life situations in which the concepts studied are applied in a concrete manner.

Keywords: Probability, Referential meaning, Tasks

AGRADECIMIENTOS

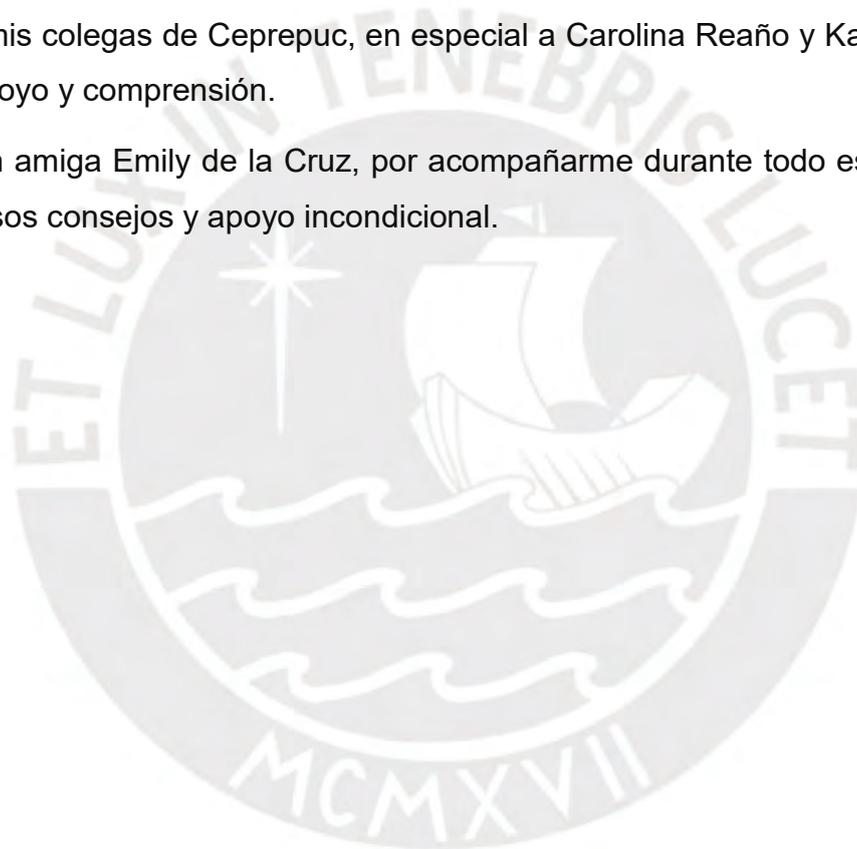
A mi estimada asesora, Augusta Osorio, por su apoyo durante el desarrollo de este trabajo, por sus comentarios y sugerencias.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por compartir sus valiosas experiencias y puntos de vista.

A mi madre, Fanny Fernández, y mi hermano, Mario Malquichagua, por sus ánimos y acompañamiento a lo largo de este proceso.

A todos mis colegas de Ceprepuc, en especial a Carolina Reaño y Karem Robertson por su apoyo y comprensión.

A mi gran amiga Emily de la Cruz, por acompañarme durante todo este camino, por sus valiosos consejos y apoyo incondicional.



ÍNDICE

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA	8
1.1 Investigaciones de referencia.....	8
1.2 Justificación.....	13
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación.....	17
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO.....	18
2.1 Metodología y procedimientos.....	18
2.2 Marco teórico.....	21
CAPÍTULO III: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA	26
3.1 El objeto matemático de estudio	27
3.2 Significado de referencia	29
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO PRETENDIDO DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO	42
CONSIDERACIONES FINALES	80
REFERENCIAS	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tipología básica de Significados	23
Figura 2: Categorías relacionales.....	24
Figura 3: Configuración de objetos.....	26
Figura 4: Clasificación de las situaciones en la realidad.....	31
Figura 5: La situación de incertidumbre.....	33
Figura 6: Espacio muestral y sucesos	38
Figura 7: Clasificación de planteamientos para determinar la probabilidad	41
Figura 8: Primer grado de primaria. Primera tarea. Parte I.....	46
Figura 9: Primer grado de primaria. Primera tarea. Parte II.....	47
Figura 10: Primer grado de primaria. Segunda tarea	49
Figura 11: Segundo grado de primaria. Primera tarea.....	52
Figura 12: Tercer grado de primaria. Primera tarea.....	55
Figura 13: Tercer grado de primaria. Segunda tarea.....	57
Figura 14: Tercer grado de primaria. Tercera tarea.....	59
Figura 15: Tercer grado de primaria. Cuarta tarea	61
Figura 16: Cuarto grado de primaria. Primera tarea	64
Figura 17: Quinto grado de primaria. Primera tarea	66
Figura 18: Quinto grado de primaria. Segunda tarea	68
Figura 19: Sexto grado de primaria. Primera tarea.....	70
Figura 20: Quinto grado de primaria. Tercera tarea.....	73
Figura 21: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte I	74
Figura 22: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte II	75
Figura 23: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte III	76
Figura 24: Segundo grado de secundaria. Primera tarea	77

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Estructura de los niveles de educación primaria y secundario en el Perú	14
Tabla 2: Componentes de la situación de incertidumbre.....	30
Tabla 3: Ejemplos de situaciones de incertidumbre	33
Tabla 4: Clasificación de sucesos	39
Tabla 5: Desempeños	45
Tabla 6: Mejora propuesta para tarea de primer grado de secundaria.....	75
Tabla 7: Propuesta de mejora para pregunta de segunda grado de secundaria.....	77



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, se presentarán las investigaciones que sirvieron como guía base del presente trabajo. Las primeras tratan acerca del estado reciente de la educación estadística; luego, se presentan otras investigaciones relacionadas ya de forma específica con la probabilidad y el conocimiento didáctico - matemático de los profesores sobre el mismo. A continuación, se presenta la justificación y la relevancia del trabajo, para lo cual se describe el estado actual de la enseñanza de la probabilidad en el Perú. Finalmente, se plantea la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos.

1.1 Investigaciones de referencia

La didáctica de la Estadística ha sido abordada por distintos autores desde múltiples perspectivas. Sin embargo, se trata de un campo de estudio relativamente joven dentro del contexto de la Didáctica de las Matemáticas, ya que la mayoría de investigaciones al respecto se empezaron a realizar hacia finales de la década de los 90 a diferencia de otras áreas de la didáctica de las Matemáticas, cuyo desarrollo se inició mucho antes. Como mencionan Cañizares, Batanero, Valecillos y Estepa (2017), actualmente, la enseñanza de la estadística se encuentra presente, de forma generalizada, en los currículos de enseñanza de primaria y secundaria de la mayoría de países. Ello, ha dado lugar a múltiples problemas didácticos que los investigadores buscan responder.

Estos investigadores refieren que, en el contexto iberoamericano, el Grupo de Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la SEIM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) viene realizando y promoviendo la investigación en esta área.

Además, Cañizares *et al.* mencionan que, a pesar de la importancia cada vez mayor, prácticamente no existe formación de profesores en este ámbito específico. Por una parte, los egresados de carreras de Matemáticas no reciben formación en Didáctica de la Estadística. Por otro lado, los egresados de carreras de educación secundaria o educación con mención en Matemáticas reciben únicamente un curso de estadística que suele resultar insuficiente. Además, son pocos los profesores de

primaria que poseen formación básica en Estadística. Esta observación fue hecha en el contexto europeo, pero se trata de una situación que es aún más común en Latinoamérica.

Inzunza y Guzmán (2011) realizaron un estudio exploratorio en un grupo de profesores de secundaria en México sobre la comprensión de los conceptos relacionados con la Probabilidad. Para ello, aplicaron un cuestionario de 17 preguntas a 80 profesores de escuelas secundarias con orientación tecnológica. Del estudio, se concluyó que los profesores no acostumbran usar representaciones, tales como diagramas de árbol, diagramas de Venn o tablas. También, se observó dificultades para manejar el enfoque frecuencial de la Probabilidad. A su vez, al emplear el enfoque clásico, se evidenció que existía un dominio limitado de las técnicas combinatorias.

Batanero y Díaz (2012), en un trabajo de reflexión teórica, analizan las razones por las cuales es necesaria una formación específica para enseñar probabilidad. Al realizar un análisis sobre la naturaleza de la probabilidad, las autoras afirman que es común encontrarse con resultados contra intuitivos en todos los niveles. La probabilidad requiere un mayor nivel de abstracción que la aritmética o la geometría, y es difícil de trabajar con material concreto. Sin embargo, muchas de las ideas básicas relacionadas con la probabilidad, como los conceptos de *azar* y *suerte* son manejados de manera informal por los estudiantes incluso antes de su presentación formal.

En cuanto a la formación de los profesores, enfatizan que se debe tener claro que ellos requieren un entendimiento profundo de las relaciones entre la probabilidad y los distintos tópicos enseñados en la escuela. A diferencia de las matemáticas tradicionales, el conocimiento estocástico es susceptible a interpretaciones diversas y las actividades están más relacionadas a las aplicaciones de los conceptos.

Adicionalmente, Batanero y Díaz sostienen que la formación del profesor debe comprender el conocimiento probabilístico y también el conocimiento profesional sobre la didáctica específica de la estadística. Los conocimientos profesionales implican, por ejemplo, la reflexión epistemológica de los significados de los conceptos que enseñan, así como la capacidad de adaptar estos conceptos según el nivel de los estudiantes a los cuales se dirijan. También, es importante la capacidad

de conocer y predecir las posibles dificultades, errores y obstáculos que pueden presentar los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Hannigan, Gill y Leavy (2013) realizaron un análisis de los conocimientos y las actitudes de los profesores de secundaria hacia la estadística y su enseñanza. Esta investigación fue realizada en Irlanda con profesores de matemáticas de secundaria en formación y también en ejercicio. Los autores mencionan que la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) reportó que existen diversas falsas concepciones y errores respecto a las ideas fundamentales de la Estadística por parte de muchos profesores. A su vez, afirman que, hoy en día, es cada vez más aceptado que las ideas centrales de la estadística no son matemáticas en naturaleza y que, de hecho, la estadística no tiene su origen en la matemática. Una idea fundamental es que el pensamiento estadístico depende profundamente de la interpretación y el juicio crítico.

Adicionalmente, Hannigan et al. manifiestan que el profesor de Estadística suele tener formación matemática y existe una concepción errada entre los estudiantes y profesores de que la Estadística es tan solo un campo particular de la Matemática. Enseñar a los maestros a “pensar estadísticamente” y transmitir esas habilidades a sus estudiantes es un reto importante. La investigación ya mencionada tuvo diversos componentes, tanto cuantitativos como descriptivos. Se trabajó con evaluaciones denominadas CAOS y SATS, que son consideradas herramientas objetivas para medir el conocimiento de los profesores. De forma paralela, también se trabajaron discusiones enfocadas en analizar cuáles deben ser los conocimientos y actitudes de los profesores hacia la Estadística que enseñan en sus respectivas instituciones.

En su disertación doctoral, Ortiz (1999) analiza los significados de los conceptos probabilísticos a partir de las definiciones y propiedades presentadas en distintos libros de texto.

En la presente investigación, se entiende el concepto de “libro de texto” como aquel libro que sirve como guía de enseñanza en el nivel escolar.

Entre los conceptos analizados por Ortiz se encuentran el espacio muestral, experimento aleatorio, clases de sucesos, frecuencia relativa, dependencia e independencia, entre otros. El estudio pretende obtener un conjunto de características esenciales de cada concepto, lo cual permitirá definir el significado de

cada uno. Para ello, realiza una reflexión epistemológica en la que toma elementos de otros autores para afirmar que el concepto de aleatoriedad es punto básico en el aprendizaje de la Probabilidad, la cual muchas veces involucra ideas contradictorias y no intuitivas.

Al comparar los distintos significados presentados en los libros de texto, Ortiz (1999) observa como la terminología varía de forma sutil; por ejemplo, algunos textos mencionan al “azar” como el causante de las situaciones aleatorias, y solo algunos mencionan la repetibilidad como característica de los experimentos aleatorios. También, el autor da importancia al análisis del concepto de espacio muestral y sus operaciones, así como su relación con la definición de suceso, así como las distintas clasificaciones de sucesos que suelen presentar los libros de texto.

A lo largo del tiempo, distintos autores han identificado, analizado y catalogado las dificultades que presentan tanto los alumnos como los profesores relacionadas con la Probabilidad. Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) realizaron una investigación sobre los distintos sesgos y su prevalencia entre los estudiantes del primer y tercer curso de bachillerato. Una de las interrogantes planteadas fue determinar si los conocimientos recibidos en el bachillerato reducían o incrementaban los sesgos. Los principales sesgos trabajados y descritos por los autores son la Heurística de la Representatividad, el Sesgo de Equiprobabilidad y el Enfoque en el resultado aislado.

La Heurística de la Representatividad (Kahneman et al, 1982) hace referencia a la tendencia de estimar la probabilidad de un determinado suceso A dado otro suceso B teniendo en cuenta que tan frecuentemente ocurre que B es representativo de A. Ello conduce a suponer una correlación que no necesariamente existe. Por ejemplo, si en una determinada población, casi todas las enfermeras son mujeres, una persona podría estimar que la probabilidad de que una mujer sea enfermera es muy alta, cuando ello no necesariamente es cierto.

El denominado Sesgo de Equiprobabilidad es la tendencia que tienen las personas a pensar que, en los procesos aleatorios, los posibles resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Este es analizado desde una perspectiva psicológica y matemática por Gauvrit y Morsanyi (2014). Si bien este tema ha sido abordado por la psicología previamente, a menudo no se ha tenido en cuenta la naturaleza

matemática de la problemática; otros autores lo han caracterizado como un error cognitivo, pero podría ser más bien el resultado de una paradoja matemática. Para ello, los autores analizaron las respuestas de un grupo de alumnos ante distintos problemas clásicos sobre probabilidad. Una observación interesante fue que existe una tendencia de las personas a asignar una cierta “uniformidad” a los procesos aleatorios. Finalmente, los autores recomendaron tareas específicas para combatir este sesgo, así como también destacaron la importancia de realizar actividades que puedan inducir una mejor comprensión de los procesos aleatorios y la ley de los grandes números.

El Enfoque en el resultado aislado (Konold, 1995) hace referencia a la tendencia de las personas de estimar la probabilidad de un determinado suceso en base a una o pocas observaciones. Por ejemplo, si a una persona se le dice que existe un 70% de probabilidad de que llueva, y luego no llueve, esta podría pensar que, en consecuencia, la predicción era incorrecta. Este tipo de razonamiento implica una falta de interiorización de la aleatoriedad.

La identificación y la comprensión de los sesgos relacionados a la probabilidad ya trabajados por otros autores permitirán emplearlos como elementos del análisis que se realizará para las tareas seleccionadas en esta investigación.

En su trabajo, Serrano et al (1998) aplicaron un cuestionario de siete ítems y realizaron un análisis de la correlación entre distintas respuestas y cómo ello podía evidenciar la presencia de los distintos sesgos y sus manifestaciones. Una importante conclusión es que las dificultades o conceptos errados de los estudiantes no son solo explicables mediante el estudio de los procesos mentales; es necesario reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos.

Otros sesgos cognitivos asociados a la Probabilidad son, por ejemplo, la “falacia del jugador” y la “recencia positiva”, “la recencia negativa” y el sesgo de representatividad. Estos sesgos han sido mencionados, observados y analizados por distintos autores. (Batanero y Díaz, 2012).

Las referencias presentadas en la parte inicial de la presente investigación tienen por objetivo brindar una perspectiva general de las posturas y avances relacionados con la enseñanza de la probabilidad en distintos ámbitos. Las distintas ideas y

conceptos presentes en estos trabajos permitirán el análisis de las tareas y brindarán herramientas para proponer mejoras en las mismas.

1.2 Justificación

Previamente, se ha hecho referencia a distintas investigaciones que evidencian la importancia de la educación estadística en la actualidad. Además, se puede apreciar cómo diversos investigadores han trabajado sobre las dificultades que alumnos y profesores presentan al enseñar o aprender conceptos relacionados con la Probabilidad.

Como mencionan Batanero, Burrill y Reading (2011), la Estadística se vuelve cada día más importante para los ciudadanos de todos los niveles, ya que cada vez se dispone de más datos para la toma de decisiones. Por ello, es importante reconocer la importancia de la enseñanza de la Estadística y cómo su enfoque debe cambiar del cálculo hacia la inferencia. Como menciona el autor, ello implica una reconceptualización, no solo de los métodos de la enseñanza, sino de sus fundamentos.

Diversos autores han manifestado que la naturaleza de la Estadística, y de la Probabilidad especialmente, resulta fundamentalmente distinta a la del resto de las Matemáticas. La escasa formación en este tema de la mayoría de los docentes genera que los conceptos estadísticos los “incomoden” debido a que su visión de las Matemáticas suele ser determinista (Batanero, 2009).

Es por ello que los contenidos relacionados a la estadística y la probabilidad suelen relegarse al final de los diversos cursos escolares y a menudo son cubiertos de manera superficial o incluso sacrificados, tal como afirma Osorio (2013).

La labor docente de los profesores que enseñan Estadística en la educación básica, a menudo como parte de un curso general de Matemáticas, está fuertemente influenciada por creencias, percepciones y sesgos que son resultado de la propia formación en esta área, la cual, en muchos casos, se remonta a su propia escolaridad. Por ello, como mencionan Batanero, Burrill y Reading (2011), es frecuente que los docentes se basen excesivamente en los libros de texto escolares que emplean en su actividad cotidiana como sustento teórico. De hecho, en el Perú, la probabilidad no necesariamente formó parte importante de la formación escolar de muchos de los docentes de mayor edad. Como mencionan Bazán y Aparicio (2008),

reci3n el Curr3culo Nacional del a3o 2005 presenta a la Estadística como elemento transversal a todos los ciclos que conforman la educaci3n b3sica.

Como menciona Rodr3guez (2004), a pesar de que la cantidad de investigaciones en did3ctica de la estadística se ha incrementado en los a3os recientes, estas siguen siendo escasas con respecto a las m3ltiples investigaciones sobre la did3ctica de otros campos de las matem3ticas como, por ejemplo, el 3lgebra y la geometr3a. M3s a3n, dentro de las investigaciones en did3ctica de la estadística, aquellas realizadas sobre la probabilidad son a3n m3s escasas. Ello est3 relacionado al hecho de que, como menciona la autora, en la actualidad persisten las controversias filos3ficas sobre la interpretaci3n de los conceptos b3sicos relacionados con la probabilidad y la aleatoriedad, entre otros, mientras que ello no ocurre con otras ramas de las matem3ticas como la geometr3a o el 3lgebra.

Ya que este trabajo se realiza en el Per3, es necesario conocer la estructura de la educaci3n b3sica en este pa3s, as3 como el rol que en ella juegan la estadística y la probabilidad.

En el Per3, la educaci3n b3sica regular est3 organizada en tres niveles: inicial, primario y secundario. A su vez, estos niveles est3n clasificados en siete ciclos. En la siguiente tabla, se muestran los ciclos y grados correspondientes a los niveles primario y secundario.

Nivel	Ciclo	Grado	Edades
Primario	III	Primero	6 a 8 a3os
		Segundo	
	IV	Tercero	8 a 10 a3os
		Cuarto	
	V	Quinto	10 a 12 a3os
		Sexto	
Secundario	VI	Primero	12 a 14 a3os
		Segundo	
	VII	Tercero	14 a 16 a3os
		Cuarto	
		Quinto	

Tabla 1: Estructura de los niveles de educaci3n primario y secundario en el Per3

En este trabajo, las tareas que ser3n analizadas se tomar3n de los libros de texto correspondientes a toda la etapa escolar, especialmente el nivel primario, ya que es en esta etapa que se trabaja los conceptos fundamentales relacionados con la

probabilidad. El Currículo Nacional propuesto por el MINEDU en el año 2017, clasifica el aprendizaje de los estudiantes mediante competencias. La competencia correspondiente al pensamiento estadístico se denomina “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”. A su vez, esta competencia implica las siguientes capacidades:

- Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas
- Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos
- Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos
- Sustenta conclusiones o decisiones con base en información obtenida

En los estándares de aprendizaje, resulta relevante analizar qué niveles de desarrollo de competencia están relacionados con la Probabilidad en los niveles 3, 4, 5, 6 y 7. Según lo estipulado en el Currículo Nacional, se puede identificar lo siguiente:

- Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta. (Nivel 3)
- Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable menos probable, justifica su respuesta. (Nivel 4)
- Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. (Nivel 5)
- Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento. (Nivel 5)
- Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral. (Nivel 6)
- Interpreta que los sucesos seguros, probables e imposibles se asocian a los valores de probabilidad entre 0 y 1. (Nivel 6)
- Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica. (Nivel 6)
- Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad y determina su espacio muestral. (Nivel 7)

- Interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación. (Nivel 7)
- Justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades. (Nivel 7)

Al observar los contenidos propuestos en el Currículo Nacional, se puede afirmar que se maneja de forma casi exclusiva el planteamiento clásico para el cálculo de la probabilidad. Sin embargo, como menciona Batanero (2005), existen hasta seis significados para la Probabilidad. En el presente trabajo, como parte del significado de referencia de la Probabilidad en su sentido fundamental, se hará referencia a los significados clásico, frecuencial y subjetivo. Al respecto, el Currículo Nacional presenta el significado clásico de forma explícita y existen indicios de que ciertas tareas presentes en los libros de texto buscan despertar el significado frecuencial en los estudiantes, aunque ello no se menciona en el mismo.

Adicionalmente, en las diversas carreras universitarias del medio peruano, la Estadística se encuentra relegada con respecto a otros contenidos matemáticos. En la mayoría de casos, el primer curso de Estadística en el nivel superior está programado hacia el tercer año de estudio a pesar de que varios conceptos estadísticos se encuentran involucrados en otras áreas del saber que se estudian desde el principio de una carrera universitaria, tales como la Física o la Química.

Todo ello lleva a plantear la importancia de cambios sustanciales en la educación estadística a nivel escolar en el Perú. Para ello, la formación de docentes es clave y requiere de un modelo del conocimiento que deben poseer. Este modelo debe procurar acercarse a los estándares internacionales de la educación estadística como, por ejemplo, el GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) en Estados Unidos.

Por ello, como menciona Batanero (2009), “el cambio de la enseñanza de la estadística en las escuelas e institutos dependerá de qué tanto se pueda convencer a los profesores de que la estadística es uno de los temas más interesantes y útiles para sus estudiantes y que todos ellos tienen capacidad para adquirir algunos conceptos elementales”.

Batanero también menciona que existen muy pocas investigaciones acerca del conocimiento profesional que debe tener el profesor para enseñar estadística.

Además, afirma que este conocimiento está correlacionado con su conocimiento estadístico, que a menudo suele ser deficiente.

Osorio (2013), quien trabajó en el contexto peruano, analizó el proceso de instrucción asociado a la introducción de concepto de Probabilidad en la educación superior. Entre sus recomendaciones, se puede destacar la necesidad de redefinir los instrumentos empleados en la enseñanza de la probabilidad. Ello implica formular procedimientos y argumentos distintos, así como replantear el lenguaje que se emplea en las situaciones propuestas a los estudiantes.

En el contexto latinoamericano, y especialmente en el Perú, recién están surgiendo investigaciones que aborden este tema y que, en el futuro, permitirán el diseño de actividades de formación de profesores, así como también sirvan de sustento teórico para el diseño de libros de texto. Un antecedente cercano es la ya mencionada investigación de Vásquez y Alsina (2015), que sienta las bases para trabajos como el que aquí se presenta.

Por lo anteriormente descrito, se puede considerar que resulta necesaria la existencia de una propuesta teórica que organice el significado de referencia de la probabilidad en la educación básica con el fin de determinar cuál debe ser el conocimiento didáctico-matemático del docente de educación básica para enseñar Probabilidad. Para ello, se realizará la propuesta de un significado de referencia y un análisis de las tareas presentadas en los libros de texto empleando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Ante las necesidades previamente expuestas, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué errores o inconsistencias presentan las tareas propuestas en los cuadernos de trabajo elaborados por el MINDEU en el año 2017 para la educación básica regular en el Perú en relación con el desarrollo del pensamiento estocástico y en concordancia con el significado de referencia asociado a la Probabilidad?

Con el fin de responder a esta pregunta, se plantea los siguientes objetivos:

Objetivo general

- Identificar errores e inconsistencias en las tareas propuestas en los cuadernos de trabajo del MINEDU del año 2017 sobre Probabilidad teniendo en cuenta el significado de referencia propuesto para los conceptos básicos asociados a la Probabilidad

Objetivos específicos

- Organizar el significado de referencia asociado a los conceptos básicos de la Probabilidad
- Establecer las conexiones entre el significado de referencia propuesto y el significado de referencia pretendido según los desempeños presentes en el Currículo Nacional
- Realizar un análisis didáctico de las tareas propuestas en los cuadernos de trabajo del MINEDU con el fin de identificar errores e inconsistencias.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, se presentará la metodología que se empleará en la investigación, así como los pasos que serán realizados a fin de responder a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos específicos propuestos.

También, se presentará el marco teórico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática, que se empleará para la realización del análisis de las situaciones – problema elegidas. Debe mencionarse que hay poco consenso entre los investigadores acerca de cuál debe ser el marco teórico específico para la enseñanza de la Probabilidad, por lo cual el significado de referencia propuesto se basará en trabajos previos de otros autores, pero también en ideas propias de la presente investigación.

2.1 Metodología y procedimientos

Ante la necesidad de establecer una metodología para esta investigación, es importante reconocer, en primer lugar, que su naturaleza es cualitativa, en el sentido que establece Martínez (2006). Se entiende que la metodología de una investigación es la ruta que permitirá alcanzar los objetivos planteados. De manera general, la metodología cualitativa pretende brindar una perspectiva en la que se considera al

objeto de estudio, denominado unidad de análisis, como un todo integrado, de manera que se pueda comprender su naturaleza en un sentido holístico.

Adicionalmente, como menciona López (2009), en la investigación cualitativa, el investigador es considerado el “instrumento de medida”, ya que toda la información involucrada en la misma será filtrada de forma subjetiva de acuerdo al propio criterio de quien la realiza. Es por ello que el investigador debe desarrollar lo que el autor llama “subjetividad disciplinada”. A diferencia de otras clases de investigaciones, la investigación cualitativa no pretende confirmar o descartar hipótesis, sino plantear nuevas preguntas y sentar las bases de nuevas teorías. Además, el mismo autor menciona que no existen reglas de procedimiento definidas; estas deben ser determinadas por el investigador según la naturaleza del trabajo que realice. Esta clase de investigaciones se caracterizan por su flexibilidad, adaptabilidad y capacidad de evolucionar de forma recursiva en el tiempo.

Sin embargo, se debe mencionar que este y otros trabajos en el área de educación matemática poseen características que los diferencian claramente de otras investigaciones cualitativas. La mayoría de definiciones, metodologías y técnicas propuestas por los autores en este campo han surgido para hacer frente a cuestionamientos relacionados con las ciencias sociales y el estudio de los grupos humanos, por lo cual el lenguaje y el enfoque que presentan parece ser más propicio para disciplinas como la antropología, la sociología, la psicología, entre otras.

La metodología cualitativa explicada por autores como Taylor, Bogdan y De Vault (2015) confiere gran importancia a dos aspectos: la observación y la recolección de datos. Sin embargo, como ya se mencionó, este trabajo pretende plantear una propuesta teórica y, por ello, se debe explicitar que no se realizará una recolección de datos ni tampoco observaciones directas de fenómenos.

En este sentido, se debe reflexionar sobre aquello que la mayoría de autores denominan “datos”. En esta investigación, se trabajará bajo el supuesto de que los libros y los artículos que serán revisados y analizados con el fin de alcanzar los objetivos propuestos no son datos en el sentido que expresan Taylor et al, sino documentos que forman parte de una estructura más grande del conocimiento. Los conceptos e ideas recolectados permitirán realizar una reconstrucción epistémica en la que se empleen las herramientas teóricas que proporciona el EOS con el fin de

realizar una reflexión profunda y, posteriormente, una propuesta que permita cumplir con los objetivos previamente trazados.

Está claro que existe una necesidad de investigaciones de corte experimental en el campo de la enseñanza de la probabilidad, pero las mismas requieren de un esquema conceptual previo para el análisis, que estará constituido principalmente por el significado de referencia relativo a los conceptos fundamentales de la Probabilidad. De esta manera, se establece que este trabajo tiene como uno de sus objetivos la organización del significado de referencia, según lo definido por el EOS, que sirva de guía y sustento para futuras investigaciones y actividades de formación de profesores.

Adicionalmente, como herramienta para la reconstrucción de los significados de referencia institucionales, se recurrirá, de forma parcial, al método denominado Análisis del Contenido, en el sentido explicado por López (2009). Este autor destaca que existe una gran cantidad de fuentes a la disposición del investigador y que ello genera que el estudio riguroso y metódico de los documentos escritos sea un componente crucial de las investigaciones que se realizan en la actualidad.

Dentro del análisis del contenido, se ha considerado como relevante para esta investigación la importancia que se le otorga a la inferencia ya que, empleando el lenguaje propio del EOS, se pretende construir, a partir de distintas fuentes, estructuras y modelos. Ello implica realizar una labor de cierta forma hermenéutica, como menciona López (2009).

Finalmente, para el análisis de las tareas que sean seleccionadas, una acción fundamental será el establecimiento de las configuraciones epistémicas de cada una y la identificación de los objetos primarios según lo propuesto por Font y Godino (2007).

En base a lo expuesto, la presente investigación estará enmarcada en una metodología eminentemente cualitativa. Para poder alcanzar los objetivos que han sido propuestos, se propone seguir los siguientes pasos:

- Revisar las distintas posturas históricas y matemáticas relacionadas con los conceptos fundamentales de la probabilidad

- Revisar las distintas investigaciones realizadas acerca de la didáctica de la probabilidad y los conflictos y sesgos que surgen durante la enseñanza de la misma.
- Revisar el Currículo Nacional vigente en el Perú (2017) a fin de identificar la propuesta de enseñanza para la Probabilidad.
- Organizar el significado de referencia para la probabilidad en la educación básica siguiendo los lineamientos teóricos propuestos por el EOS.
- Identificar los tipos de tareas que se propone a los estudiantes en los cuadernos de trabajo del MINEDU para alcanzar el entendimiento de la probabilidad.
- Seleccionar algunas tareas sobre Probabilidad que se consideren significativas y proponer sus configuraciones epistémicas teniendo en cuenta el significado de referencia establecido
- Realizar el análisis didáctico de cada tarea teniendo en cuenta la clasificación de objetos primarios propuesta por el EOS, que involucra las situaciones, las definiciones, los conceptos, el lenguaje, las propiedades y los procedimientos asociados a cada tarea.
- Realizar propuestas de mejora para la elaboración de tareas relacionadas con la probabilidad

2.2 Marco teórico

En este trabajo, se adoptará como postura teórica el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Este enfoque ha sido desarrollado a lo largo de las tres últimas décadas en España, principalmente en la Universidad de Granada. Sus fundamentos teóricos son detallados en distintos trabajos, entre los que destaca el artículo denominado “Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” presentado por Godino, Batanero y Font (2007).

Este enfoque tiene por objetivo analizar la actividad matemática en su totalidad como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para lo cual recoge los aportes de otras disciplinas como la psicología, la filosofía, entre otras. Adicionalmente, el enfoque pretende reflexionar acerca de la naturaleza de los contenidos matemáticos y cómo estos evolucionan y se desarrollan como parte de instituciones definidas.

Godino et al (2007) mencionan que el desarrollo del EOS se puede descomponer en tres etapas: inicialmente, su interés estuvo en desarrollar las nociones de “significados institucionales y personales” para un determinado objeto matemático, con lo cual se buscó dirigir la atención en el conocimiento matemático institucionalizado, pero sin olvidar la perspectiva del sujeto al que se pretende enseñar; en una segunda etapa, el grupo de investigadores se propuso elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados y completos. Una de las conclusiones importantes en esta etapa es que se debe estudiar de forma más amplia las interacciones entre las ideas matemáticas, el lenguaje y las situaciones-problema. Finalmente, en la tercera etapa, la propuesta consiste en proponer seis dimensiones en el proceso de instrucción matemática. Además, estas dimensiones generan facetas del conocimiento matemático, que posteriormente dan lugar al Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, que es una herramienta importante para estructurar la propuesta que se pretende realizar en el presente trabajo.

Para comprender el EOS y establecer su utilidad para lograr los objetivos previamente planteados, es importante hacer referencia a las herramientas teóricas que este propone, especialmente aquellas que serán utilizadas en el presente trabajo.

En primer lugar, Godino et al. (2007) definen como *práctica matemática* a toda actividad realizada por un individuo con el fin de resolver problemas matemáticos, validarlos, comunicar soluciones, así como realizar generalizaciones relativas a otros problemas o contextos. Algunas de estas prácticas son relativas a una persona específica, y otras son aceptadas y compartidas dentro de una institución determinada. A su vez, los autores definen una institución como un conjunto de individuos involucrados en la resolución de ciertas situaciones – problema en un contexto compartido de prácticas sociales y reglas.

De esta manera, el “significado” de un objeto matemático involucra directamente al sistema de prácticas que pone en juego un individuo ante una situación – problema. Estas prácticas pueden ser de naturaleza operativa o discursiva. El EOS propone una tipología básica de significados, los cuales se muestran en la siguiente figura:



Figura 1: Tipología básica de Significados

Fuente: Godino et al (2007, p.6)

En el presente trabajo, uno de los objetivos planteados involucra la reconstrucción del significado institucional de referencia para la Probabilidad en su sentido fundamental. Godino et al definen el significado de referencia como “el sistema de prácticas que se usa para elaborar el significado pretendido”. Considerando que el significado pretendido es aquel que ha sido planificado en el proceso de estudio, los autores mencionan que el significado de referencia debe ser global y abarcar la totalidad del objeto matemático, por lo cual su construcción requiere de un estudio de naturaleza histórica y epistemológica que involucre el origen y la evolución del mismo, así como también la variedad de contextos en los que este objeto sea puesto en juego.

Un segundo conjunto de definiciones importantes para el EOS es el que comprende los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas. Para el EOS, la emergencia de estos objetos es un proceso complejo para el cual se debe considerar al menos dos niveles. En el primer nivel, se presentan aquellos elementos que son observables en un texto matemático tales como problemas, proposiciones, definiciones, entre otros. Por otro lado, en el segundo nivel, se presenta una categoría que “emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior” (Godino et al, 2007, p. 6). Estas definiciones y las relaciones que se producen entre ellas pueden observarse en la figura que se muestra a continuación:

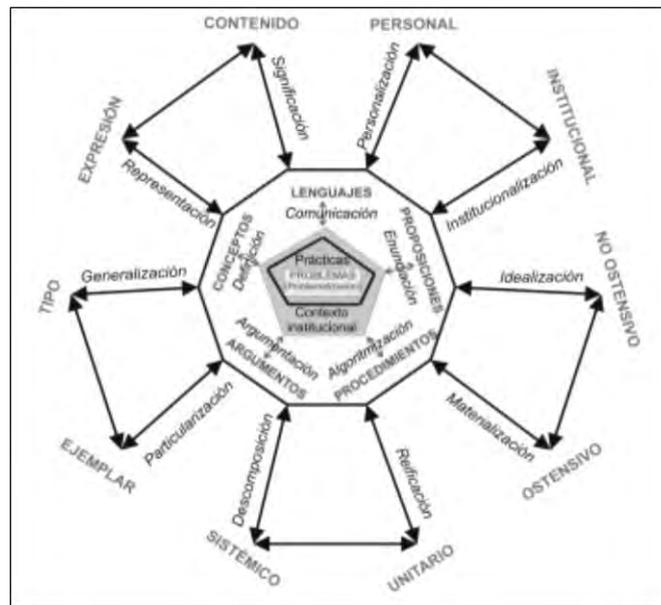


Figura 2: Categorías relacionales.

Fuente: Godino et al. (2007, p.10)

En el primer nivel, aparecen los denominados *objetos matemáticos primarios*:

- *Elementos lingüísticos*
- *Situaciones – problemas*
- *Conceptos – definiciones*
- *Proposiciones*
- *Procedimientos*
- *Argumentos*

Estos seis objetos, mencionados por Godino et al. (2007), serán empleados para la construcción del significado de referencia asociado a la Probabilidad. Los autores también mencionan que esta clasificación supone una ampliación respecto de la dicotomía tradicional que únicamente comprendía objetos conceptuales y procedimentales.

En el segundo nivel, aparecen las denominadas *dimensiones duales*:

- *Personal – institucional*: un objeto se considera institucional si es compartido por los miembros de una determinada institución, mientras que lo objetos personales son relativos al pensamiento y/o acciones que realiza un individuo en una situación problemática.

- *Ostensivo – no ostensivo*: un objeto se considera ostensivo si posee el atributo de ser público, lo que quiere decir que es susceptible de ser mostrado a otra persona. Por el contrario, se considera no ostensivos a aquellos objetos que, adicionalmente, pueden ser imaginados o pensados.
- *Expresión – contenido*: en una función semiótica, se distingue dos elementos, que son el antecedente, considerado como la expresión significantes, y el consecuente, que es el significado atribuido por una persona o institución.
- *Extensivo – intensivo*: esta dimensión involucra el proceso de generalización, en el que se diferencia entre casos particulares y clases de mayor generalidad.
- *Unitario – sistémico*: esta dimensión diferencia entre objetos que funcionan como entidades unitarias, y otros que se presentan como sistemas. Con el transcurrir del aprendizaje de una persona, un objeto sistémico se convierte eventualmente en primario.

Para realizar el análisis didáctico de un proceso de instrucción, el EOS propone cinco niveles, mencionados por Font, Planas y Godino (2010), que son los siguientes:

Nivel 1 – Identificación de prácticas matemáticas

Nivel 2 – Identificación de objetos y procesos matemáticos

Nivel 3 – Descripción de interacciones en torno a conflictos

Nivel 4 – Identificación normas

Nivel 5 – Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción

En el presente trabajo, el análisis didáctico de las tareas seleccionadas de los cuadernos de trabajo estará enfocado particularmente en el nivel 1, dado que se realizará una descripción de las prácticas matemáticas correspondientes a las tareas; en el nivel 2, ya que se tomará en consideración los objetos y procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea por parte del estudiante; y también el nivel 5, puesto que se realizará una valoración de la idoneidad de estas tareas como parte del proceso de instrucción y se presentará propuestas de mejora.

En este trabajo, resulta prioritario abordar de forma central las configuraciones epistémicas.

Para el nivel 2 de análisis, de acuerdo con la metodología descrita por Font et al. (2010), resulta fundamental la construcción de la configuración de objetos y procesos o configuración epistémica. Godino et al. (2007) mencionan que una configuración epistémica es relativa a una tarea matemática y comprende los procedimientos, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones necesarias para su solución. Como se puede notar, esta configuración está íntimamente ligada a los significados de referencia y a los objetos primarios descritos previamente. La siguiente tabla muestra los elementos que la componen:

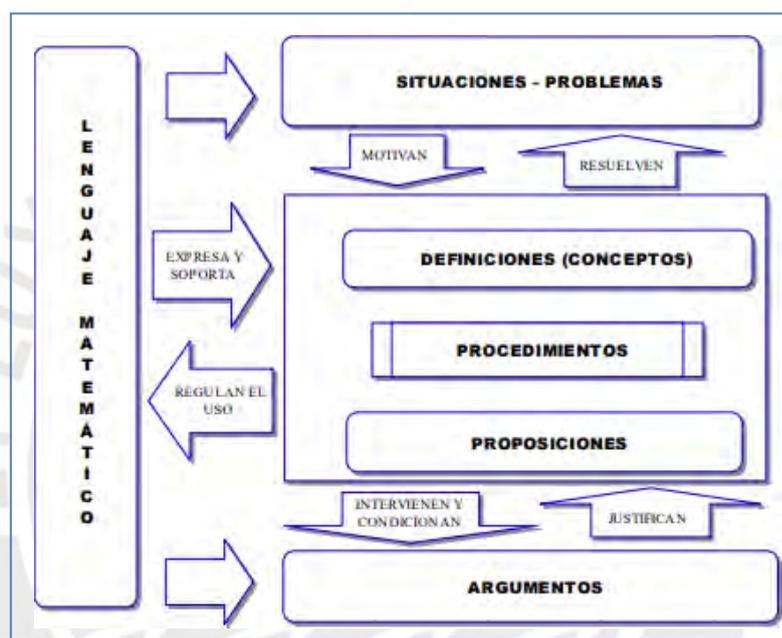


Figura 3: Configuración de objetos

Fuente: Godino et al (2010, p.8)

CAPÍTULO III: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA

En este capítulo, se realizará una breve reseña del desarrollo histórico de la probabilidad, así como su definición matemática. Luego, se presentará el significado de referencia que se empleará para el análisis y se describirán sus elementos y su organización.

3.1 El objeto matemático de estudio

El concepto de probabilidad ha atravesado un largo y complejo desarrollo histórico y, con frecuencia, ha generado diversos cuestionamientos de índole epistemológica y filosófica. Muchos de los cuestionamientos y dificultades asociados a este concepto en la actualidad han sido influenciadas por este desarrollo.

El rol que se suele dar a los juegos de azar en la enseñanza de la probabilidad en la educación básica regular no es casual, ya que los juegos de azar y la idea de una “voluntad divina” fueron fundamentales en el surgimiento de los primeros conceptos, tal como señalan Borovcnik y Kapadia (2014). De hecho, los mismos autores mencionan que el astrágalo, precursor del dado de seis caras empleado en la actualidad, era utilizado para responder preguntas en ceremonias religiosas en la antigua Grecia. Más adelante, los dados eran reconocidos como un método “justo” para tomar decisiones.

En la actualidad, la millonaria industria de los juegos de azar es un importante campo de aplicación de la Probabilidad.

El análisis combinatorio como herramienta para el cálculo de probabilidades teóricas no surge sino hasta el siglo XVI, época que se podría considerar bastante reciente teniendo en cuenta que, por citar un ejemplo, la geometría plana fue axiomatizada por Euclides hace más de 2300 años. Tal como recuentan Borovcnik y Kapadia (2014), en el siglo XVII, matemáticos como Pierre de Fermat y Blaise Pascal intercambiaron ideas sobre diversos problemas matemáticos relacionados con juegos y apuestas. En este punto de la historia, aún no estaba del todo claro el concepto de *espacio muestral*.

En cuanto al aspecto matemático de la Probabilidad, es necesario hacer referencia a la teoría de la medida y el álgebra de sucesos. Para ello, se tomará como base la estructura propuesta por Grimmett y Stirzaker (2001).

Para definir formalmente la probabilidad, es necesario proporcionar primero la definición de sigma – álgebra (σ -álgebra). Dado un conjunto no vacío Ω , como es el caso del espacio muestral de un experimento aleatorio, se afirma que una colección de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra representada por \mathcal{F} si se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- El conjunto vacío ϕ es un elemento de todo \mathcal{F} .
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

Debe mencionarse que, de esta forma, los elementos de \mathcal{F} serán los subconjuntos de Ω y, cuando Ω sea el espacio muestral de una situación de incertidumbre, se denominan eventos o sucesos.

Definición matemática de probabilidad

Para un espacio muestral no vacío Ω , si \mathcal{F} es una σ -álgebra de Ω , se define la probabilidad P como una función de la siguiente forma:

$$P: \begin{aligned} \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow P(A) \end{aligned}$$

Así, la función P hace corresponder a cada suceso A un número real $P(A)$ llamado *probabilidad* de A . Los autores enuncian las siguientes propiedades:

- Para todo $A \in \mathcal{F}$, se cumple que $P(A) \geq 0$.
- $P(\phi) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $A_1; A_2; \dots \in \mathcal{F}$ de modo que $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$, entonces:

$$P \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

De esta manera, la probabilidad mide la ocurrencia de un determinado suceso siempre que este suceso sea un subconjunto del conjunto potencia $\mathcal{P}(\Omega)$ del espacio muestral Ω asociado a un determinado experimento aleatorio. El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio.

En esta definición, se debe destacar que no es importante *cómo* se asigna la probabilidad de un determinado suceso. Mientras los axiomas presentados se cumplan, es posible calcular o estimar la probabilidad de distintas maneras, tal como se presentará más adelante.

3.2 Significado de referencia

A continuación, se presentará el significado de referencia correspondiente a los conceptos fundamentales de la probabilidad en la educación básica. Este significado ha sido organizado y construido como una propuesta que involucra elementos trabajados por otros autores, principalmente Batanero y Borovcnik (2016), Ortiz de Haro (1999) y Osorio (2013), así como también aportes propios surgidos durante la elaboración del presente trabajo.

Se debe mencionar que no todos los conceptos presentados a continuación figuran de forma explícita en el Currículo Nacional (2017). Además, no existe un consenso absoluto sobre la clasificación de situaciones, sucesos o los métodos para calcular probabilidades debido a que, tal como lo menciona Ortiz de Haro (1999), en muchos casos no se trata de definiciones de naturaleza matemática.

El significado de referencia que se presentará es, por lo tanto, parcialmente, una propuesta, pero también una recopilación de definiciones generalmente aceptadas y trabajadas por otros autores como Ortiz de Haro (1999) y Batanero (2005). Además, se debe mencionar que los siguientes elementos se encuentran enlazados y no siempre pueden ser ordenados de forma lineal. Finalmente, el orden en el que se organizan estas ideas no coincide necesariamente con el orden que se emplea habitualmente en la enseñanza en la etapa escolar.

El significado de referencia asociado a los conceptos fundamentales de la probabilidad se puede descomponer en cuatro elementos que, a su vez, involucran varias definiciones y conceptos propios. Estas ideas se presentan a continuación:

- La situación de incertidumbre
- El espacio muestral
- Sucesos y clasificación de sucesos
- La idea de probabilidad

La situación de incertidumbre

El punto de partida para el estudio de la probabilidad es la *situación de incertidumbre*. Esta es una idea que no suele presentarse en los libros de texto. Se puede decir que una situación de incertidumbre es aquella situación en la que un

individuo no tiene la seguridad de qué ocurrirá. Podría afirmarse que la mayor parte de las situaciones que se producen durante la existencia humana es una situación de incertidumbre. A modo de ejemplo, se puede nombrar las siguientes situaciones:

- a) Miguel toma un taxi hacia su trabajo y no sabe si llegará a tiempo o no.
- b) Claudia va a rendir un examen y no sabe qué nota obtendrá.
- c) Una persona le pregunta su edad a un desconocido y no sabe cuál será la respuesta.
- d) Juan se pregunta cuál será la selección campeona del próximo mundial de fútbol.
- e) Adriana extrae tres naipes de una baraja típica de 52 y no sabe si obtendrá alguna espada.

También, es importante mencionar que toda situación de incertidumbre está compuesta por una acción o hecho y una observación acerca del resultado. Para los ejemplos recién mencionados, se puede realizar la siguiente descomposición:

Ejemplo	Acción o hecho	Observación
a)	Que Miguel tome un taxi hacia su trabajo.	Si Miguel llega a tiempo o no
b)	Que Claudia rinda el examen	La nota que obtenga Claudia
c)	Preguntar a un desconocido por su edad	La respuesta del desconocido
d)	Que se juegue el próximo mundial de fútbol	El nombre de la selección campeona
e)	Que Adriana extraiga tres naipes de una baraja típica	Si Adriana obtiene alguna espada o no

Tabla 2: Componentes de la situación de incertidumbre

Elaboración propia

Las situaciones de incertidumbre existen en contraposición a las *situaciones determinadas y conocidas*, que son aquellas en las que toda la información es conocida y para las cuales no existe incertidumbre. Esta clase de situaciones no forman parte del campo de estudio de la estocástica y no serán consideradas como

parte del significado de referencia de la misma. A continuación, se presenta un esquema de la clasificación de las situaciones que se le pueden presentar a una persona en su vida cotidiana.

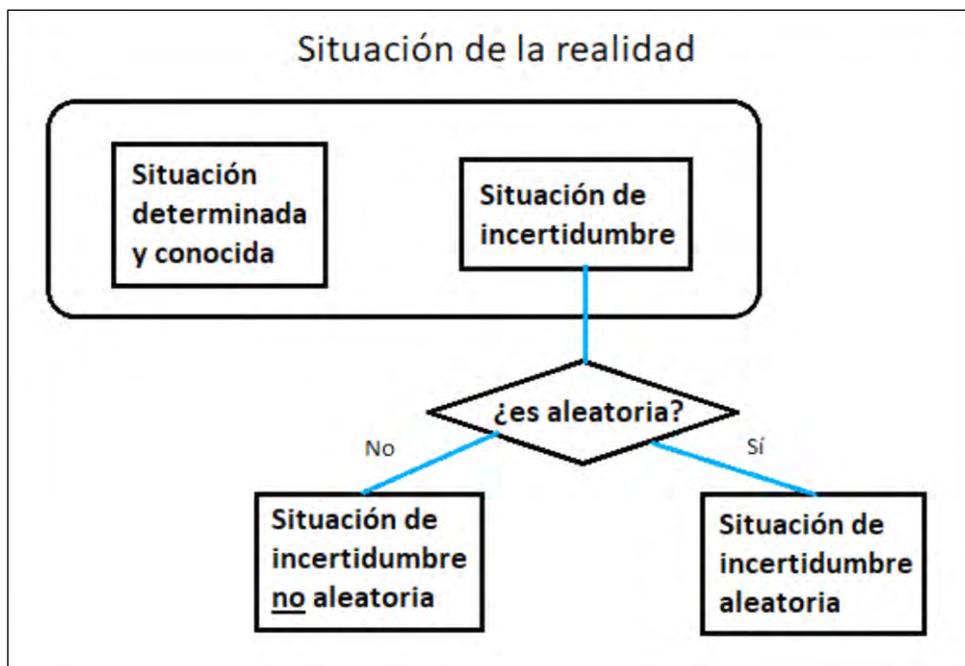


Figura 4: Clasificación de las situaciones en la realidad

Elaboración propia

Para comprender la clasificación presentada, es necesario definir qué se entiende por *aleatorio*. A pesar de que existen diversas definiciones por tratarse de un concepto cuyo significado ha sido motivo de cuestionamientos filosóficos a lo largo de la historia, tal como Batanero, Green y Serrano (1998) afirman de forma categórica: “el concepto de aleatoriedad es el punto básico en el estudio de la probabilidad”. Para esta investigación, se adoptará la siguiente postura:

- Aleatorio: una situación se considera aleatoria cuando su propia naturaleza implica que varios resultados son posibles y resulta imposible conocer con certeza cuál de los resultados ocurrirá al realizar una acción u observación.

La idea de qué situaciones pueden ser consideradas aleatorias suele ser difusa para profesores y estudiantes. En ocasiones, se le suele denominar como *aquello que está determinado por el azar o la suerte*. Sin embargo, debe quedar claro para los docentes que determinar si una situación es o no aleatoria siempre será, hasta cierto

punto, subjetivo y debe haber cierta flexibilidad en la discusión de estas ideas en las clases.

En la mayoría de los casos, la enseñanza de la probabilidad empieza con la definición de “situaciones” determinísticas y aleatorias. Esta diferenciación supone un primer obstáculo epistemológico para el estudiante, ya que ambas categorías son por naturaleza subjetivas y, además, son atributos de la situación de incertidumbre misma.

El hecho de realizar una separación entre las situaciones de incertidumbre aleatorias y las no aleatorias permite que la descripción de la situación también incluya el conocimiento o desconocimiento del observador como posible causa de la incertidumbre.

Por ello, es importante notar que la incertidumbre no implica necesariamente aleatoriedad. La incertidumbre puede atribuirse al *desconocimiento por parte del observador* o a la *aleatoriedad de la situación misma*. Por ejemplo, en el caso de una persona que pregunta a otra su edad en un determinado momento, existe una única respuesta que ya se encuentra previamente determinada, y por ende no es aleatoria, pero que resulta incierta para quien realiza la pregunta. A esta clase de situaciones, se les dará el nombre de *situaciones de incertidumbre no aleatorias*.

A continuación, se delimitará cada concepto. Debe notarse que ninguna de estas definiciones es de naturaleza matemática y que no todos los autores emplean la misma clasificación. Ello está relacionado con el carácter subjetivo de muchas de las ideas del pensamiento estocástico y, también, con la poca importancia que históricamente han tenido los conceptos previos al espacio muestral en el estudio de la probabilidad. Para este trabajo, se tomará la siguiente clasificación para el análisis.

- Situación de incertidumbre no aleatoria: es aquella en la cual la incertidumbre proviene del desconocimiento del resultado de alguna acción que *ya ocurrió*, o del desconocimiento de cierta información que es de naturaleza determinada.
- Situación de incertidumbre aleatoria: es aquella situación para la cual se pueden producir *varios* resultados, pero que *aún no ocurre* y, por lo tanto, es imposible conocer que pasará hasta que la situación se produzca.

Ejemplos de situaciones de incertidumbre no aleatorias	Ejemplos de situaciones de incertidumbre aleatorias
Una persona le pregunta a un desconocido su edad.	Una persona se pregunta quién ganará la próxima Copa Libertadores.
Una persona le pregunta a un desconocido cuál es su color favorito.	Una persona se pregunta qué plato elegirá su novia cuando vayan a cenar esta noche.

Tabla 3: Ejemplos de situaciones de incertidumbre

Elaboración propia

En este punto, es importante notar, como menciona Ortiz de Haro (1999), que la vasta mayoría de libros de texto, escolares y no escolares, toman como punto de partida del estudio de la probabilidad el concepto de *experimento aleatorio*. Sin embargo, como se puede observar, se necesita una conexión clara entre los conceptos de *situación de incertidumbre* y *experimento aleatorio*. Según la clasificación presentada, el segundo está contenido dentro del primero, pero se debe delimitar claramente sus características.

A continuación, se presenta una ampliación de los conceptos ya mencionados para poder situar la idea de experimento aleatorio dentro de esta clasificación.

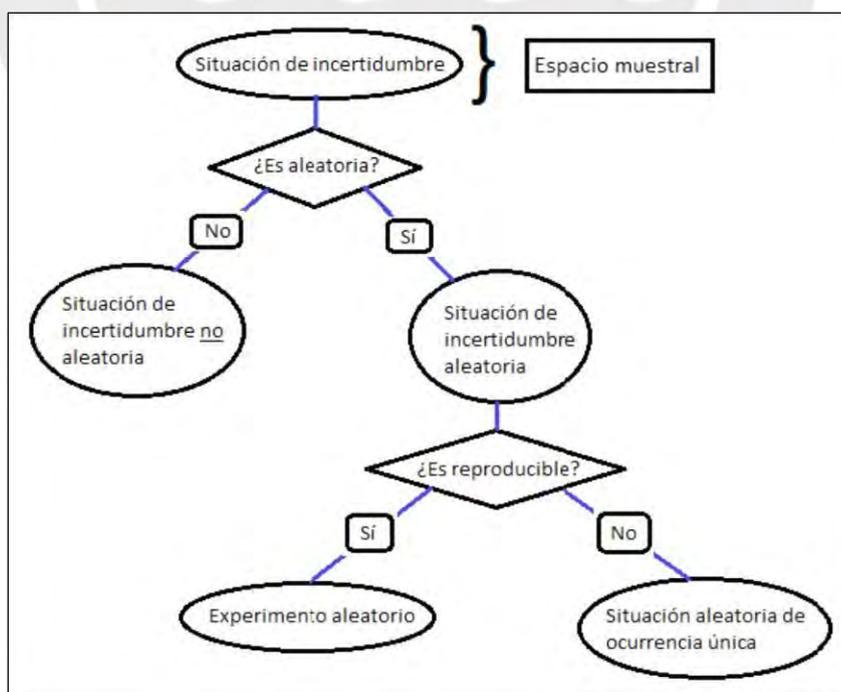


Figura 5: La situación de incertidumbre

Elaboración propia

Como se observa en la figura, se define un experimento aleatorio como una situación de incertidumbre que es *reproducible* (Osorio, 2012). En este caso, se entiende que una situación es reproducible cuando la acción y la correspondiente observación de la misma pueden ser realizadas varias veces en condiciones que se pueden considerar constantes. Esta definición también es subjetiva pues implica considerar experimentos ideales ya que, estrictamente, nada en la realidad es totalmente reproducible pues todo experimento ocurre en un determinado fragmento único del tiempo que no se repetirá jamás.

Es habitual que el cálculo de probabilidades se limite a los llamados experimentos aleatorios. Sin embargo, en toda situación de incertidumbre, es posible hablar de probabilidad. Por ejemplo, se puede preguntar por probabilidades en los cinco ejemplos propuestos al principio, tal como se muestra a continuación:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que Miguel llegue a tiempo a su trabajo en un día cualquiera?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que Claudia obtenga 16 en su examen?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el desconocido responda: 21 años?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que Alemania gane el próximo mundial de fútbol?
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que Adriana obtenga al menos una espada al extraer tres naipes de una baraja típica?

En todos los casos es posible realizar preguntas sobre probabilidad a pesar de que no siempre es posible *calcular* el valor de esa probabilidad. El enfoque típico del profesor de la educación básica suele estar en el cálculo ya que, como menciona Stohl (2005), la incertidumbre y la imposibilidad de responder a una pregunta sin cálculos matemáticos suele incomodar al profesor y generar inseguridad. La autora también afirma que los profesores a menudo asumen que el propósito de la enseñanza de la probabilidad es calcular probabilidades sin pensar en las aplicaciones de estos resultados al mundo real. Por su parte, en Currículo Nacional (2017) solo menciona el cálculo de probabilidades en experimentos aleatorios sin hacer referencia a las aplicaciones de las mismas.

Por lo tanto, una primera observación es que los elementos que conforman el significado de referencia de la probabilidad no son exclusivos de los experimentos

aleatorios, como podrían hacer creer muchos libros de texto, sino que pueden asociarse a cualquier situación de incertidumbre.

Adicionalmente, se debe destacar la categoría denominada *situaciones de incertidumbre de ocurrencia única*. Esta clase de situaciones son aquellas que solo se producirán una única vez en condiciones particulares. Para esta clase de situaciones, tiene sentido trabajar la *probabilidad subjetiva*, tal como se trabajará más adelante en este capítulo.

El espacio muestral

Tradicionalmente, un primer concepto importante para introducir la probabilidad es el concepto de *espacio muestral*. La definición típica de los libros de texto es *el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio*.

Sin embargo, la definición de espacio muestral en este trabajo será más amplia.

- Espacio muestral: es el conjunto conformado por todas las posibilidades asociadas a una situación de incertidumbre. En el caso de un experimento aleatorio, se suele llamar *resultados* a las posibilidades. La idea de resultado está asociada a la repetibilidad del experimento.

Está claro que una definición de esta naturaleza estará notablemente influenciada por la forma exacta como se *enuncia* la situación de incertidumbre. De esta manera, cobran importancia los elementos denominados *contexto*, *restricciones* y *condiciones* mencionados por Osorio (2012).

En este sentido, el contexto de una situación de incertidumbre comprende las características asociadas al mundo real que pertenecen a la descripción de la misma. Por otro lado, las restricciones y condiciones son aquellas particularidades de la situación, que pueden ser explícitas o implícitas, que afectarán directamente qué es *posible* y qué no lo es en una situación particular.

Es valioso notar en este punto que el lenguaje tiene una influencia poderosa en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad de una forma mucho más notoria que para otras ideas matemáticas. Por ello, los elementos presentados tendrán una naturaleza subjetiva, ya que son relativos a la persona que analiza la situación – problema presentada.

De este modo, una misma situación de incertidumbre podría tener distintas restricciones y/o condiciones para distintas personas, así como también dos personas podrían proponer espacios muestrales sustancialmente distintos para una misma situación de incertidumbre. Por ejemplo, si se le pide a un niño de 6 años que proponga el espacio muestral para la situación “observar qué ha traído Juan en su lonchera” este será distinto al que propondrá una persona adulta.

Como menciona Ortiz de Haro (1999), en muchos casos se suele trabajar el espacio muestral olvidando el experimento que lo generó. Esto puede ser muy problemático para la enseñanza ya que, como el autor menciona, “el espacio muestral de un experimento dependerá de las condiciones supuestas para el mismo”.

El mismo autor menciona que, para construir un modelo probabilístico, es necesario describir claramente todos sus posibles resultados. Esta definición de espacio muestral estuvo relacionada históricamente a la noción de equiprobabilidad debido a su relación con los juegos de azar ya que, en los juegos de naipes o dados es necesario organizar todos los resultados posibles a fin de conocer cuántos escenarios son favorables o desfavorables bajo ciertas condiciones. Sin embargo, la constitución del espacio muestral puede llevar a conflictos y confusiones que son frecuentes en el aprendizaje de la probabilidad.

Un claro ejemplo es la determinación del espacio muestral del experimento “lanzar dos dados de seis caras y observar la suma de los resultados obtenidos” (al lanzar un dado, se le llama resultado al número que muestra la cara superior del mismo). En este caso, hay tres formas típicas como una persona podría enunciar el espacio muestral:

$$\Omega_1 = \{ (1;1) ; (1;2) ; (1;3) ; (1;4) ; (1;5) ; (1;6) ; (2;1) ; (2;2) ; (2;3) ; (2;4) ; (2;5) ; (2;6) ; (3;1) ; (3;2) ; (3;3) ; (3;4) ; (3;5) ; (3;6) ; (4;1) ; (4;2) ; (4;3) ; (4;4) ; (4;5) ; (4;6) ; (5;1) ; (5;2) ; (5;3) ; (5;4) ; (5;5) ; (5;6) ; (6;1) ; (6;2) ; (6;3) ; (6;4) ; (6;5) ; (6;6) \}$$

$$\Omega_2 = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 \}$$

$$\Omega_3 = \{ (1;1) ; (1;2) ; (1;3) ; (1;4) ; (1;5) ; (1;6) ; (2;2) ; (2;3) ; (2;4) ; (2;5) ; (2;6) ; (3;3) ; (3;4) ; (3;5) ; (3;6) ; (4;4) ; (4;5) ; (4;6) ; (5;5) ; (5;6) ; (6;6) \}$$

En el caso de Ω_1 , se trata de un espacio muestral equiprobable en el que cada elemento es un par ordenado que representa los resultados obtenidos en cada dado.

Por otro lado, Ω_2 es un espacio muestral no equiprobable en el que cada elemento representa la suma de los resultados obtenidos en ambos dados. Finalmente, Ω_3 resulta interesante porque considera los resultados de ambos dados, pero si tener en cuenta el *orden*, por lo que este espacio muestral tampoco sería equiprobable.

Es natural que exista confusión y que se considere como equiprobables a los elementos de Ω_3 . Este error incluso fue cometido por matemáticos como D'Alembert en el siglo 18 (Székely, citado por Ortiz de Haro, 1999). Este es un conflicto comúnmente experimentado por los estudiantes que se inician en el estudio de la probabilidad.

A pesar de las distintas formas de enunciar un espacio muestral, se debe notar que ninguno de ellos es correcto o incorrecto *per se*. La aplicación que se haga del mismo determinará si una persona tiene una comprensión adecuada de las ideas involucradas. A menudo ocurre que los docentes proponen tareas a sus estudiantes en las cuales deben construir el espacio muestral para una determinada situación, y deberían estar preparados para aceptar una variedad de respuestas distintas.

Sucesos y clasificación de sucesos

Para definir las distintas clases de sucesos, es necesario diferenciar entre el espacio muestral y el *conjunto potencia del espacio muestral*. Esta diferenciación es la que genera más conflictos entre los docentes.

El conjunto potencia del espacio muestral $\mathcal{P}(\Omega)$ está conformado por todos los subconjuntos del mismo y, como tal, incluye al conjunto vacío ϕ y al mismo conjunto Ω .

Los elementos del espacio muestral son denominados *sucesos elementales*. A menudo, los sucesos elementales también son llamados *posibilidades* o *resultados* (en el caso de los experimentos aleatorios). Los subconjuntos del espacio muestral (que también son elementos del conjunto potencia), formados por dos o más sucesos elementales, son denominados *sucesos compuestos* o simplemente *sucesos*. Algunos libros de texto emplean la palabra evento en vez de suceso.

La siguiente figura muestra un esquema de la relación entre el espacio muestral, su conjunto potencia, los sucesos y su clasificación.

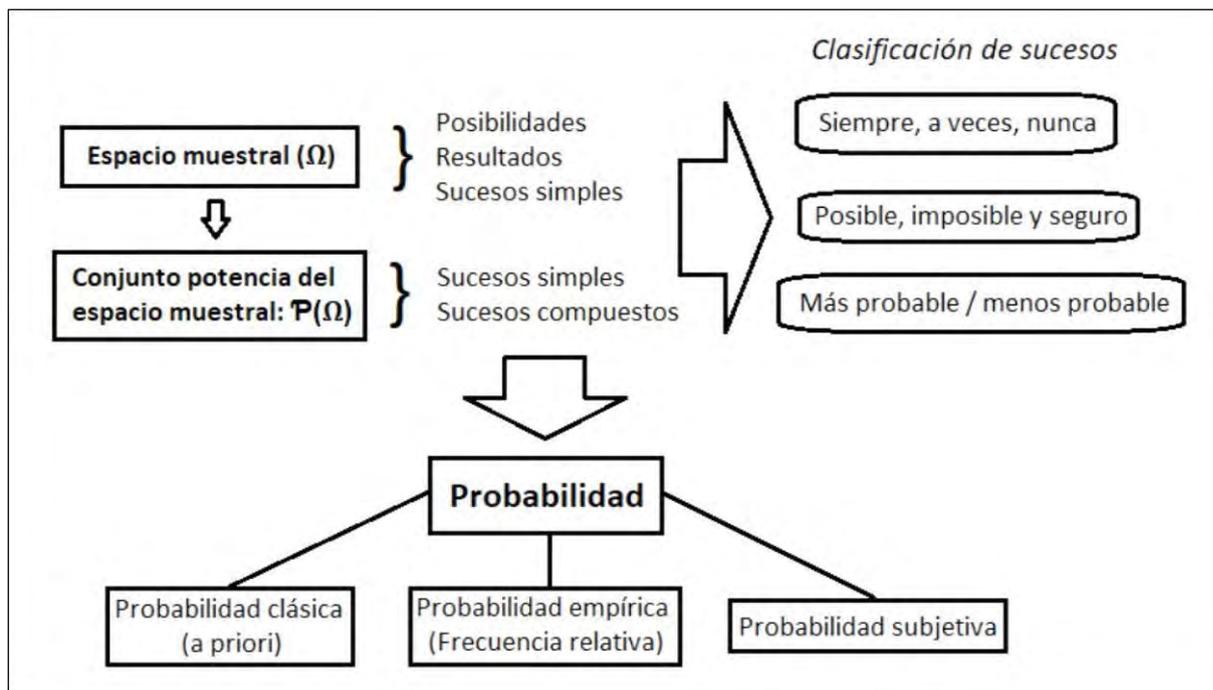


Figura 6: Espacio muestral y sucesos

Elaboración propia

Como se puede observar, los elementos del espacio muestral pueden ser llamados simultáneamente sucesos elementales, sucesos simples, resultados o posibilidades según la perspectiva trabajada. A su vez, el conjunto potencia contiene todos los sucesos posibles, ya sean simples o compuestos.

La idea de probabilidad

Es en este punto que se define la idea de *probabilidad* de la siguiente forma:

- Probabilidad: es la medida de la ocurrencia de un suceso. La probabilidad se expresa como un número real comprendido en el intervalo $[0;1]$.

En una situación de incertidumbre, los distintos sucesos que pueden ocurrir pueden ser clasificados de distintas maneras. En los libros de texto escolares, en concordancia con el Currículo Nacional (2017), se observa las siguientes categorías generales de clasificación de sucesos:

- Siempre, a veces y nunca
- Suceso seguro, suceso posible y suceso imposible
- Más probable y menos probable

En la siguiente tabla, se muestra la clasificación de los sucesos según su probabilidad de ocurrencia.

Tipo de suceso	Relación con el espacio muestral	Probabilidad
A = suceso seguro	$A = \Omega$	$P(A) = 1$
B = suceso posible	$B \subset \Omega$	$0 < P(B) < 1$
C = suceso imposible	$C \notin \Omega$	$P(C) = 0$

Tabla 4: Clasificación de sucesos

Elaboración propia

Se debe tener claro que la clasificación de sucesos, el concepto del espacio muestral y la probabilidad como número son trabajados con los estudiantes en distintos momentos a lo largo de la formación escolar. Por ejemplo, según el Currículo Nacional actual del Perú, la clasificación siempre, a veces y nunca (sobre la ocurrencia de un suceso) se trabaja en segundo grado de primaria, mientras que el espacio muestral como conjunto recién se presenta en primer grado de secundaria.

En la actualidad, diversos autores coinciden que la probabilidad comprende tres significados claramente distinguibles pero que, al mismo tiempo, son todos necesarios para comprender de forma completa el concepto de probabilidad. Como menciona Steinbring (Citado por Stohl, 2005), la dificultad que afronta el profesor al enseñar probabilidad radica en que su naturaleza no puede ser comprendida apropiadamente solo con un significado.

Batanero y Borovcnik (2016) afirman que el concepto de Probabilidad es multifacético. Por lo tanto, la enseñanza de la probabilidad debe involucrar múltiples enfoques. En la actualidad, se consideran tres enfoques asociados a tres significados. Los tres significados son los siguientes:

- **Significado clásico, también llamado *a priori* o de Laplace**

Este es el significado de la probabilidad comúnmente asociado a los juegos de azar y el más prevalente en el Currículo Nacional del Perú. Este significado implica trabajar con experimentos “ideales” en los cuales el espacio muestral

pueda ser descrito como equiprobable. En las situaciones en las que es posible aplicar el método clásico, la probabilidad de un suceso A se obtiene de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos en los que ocurre } A}{\text{Número total de casos}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Cuando se emplea esta definición, cada *caso* es un suceso elemental de un espacio muestral equiprobable.

- **Significado frecuencial o de frecuencias relativas**

Este significado refiere al hecho de estimar la probabilidad de un determinado suceso como la razón con la que este ocurre en un determinado número de experimentos o ensayos. La variabilidad de la estimación se reduce conforme se incrementa el número de ensayos. Teóricamente, se podría obtener la probabilidad real de ocurrencia del suceso cuando el número de experimentos tiende a ser infinito.

En este caso, se considera que la probabilidad “verdadera” existe, pero no es posible determinarla de forma exacta. Por ello, la probabilidad de ocurrencia de un suceso A se estima de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{Número de ensayos en los que ocurre } A}{\text{Número total de ensayos}}$$

El significado frecuencial de la probabilidad está directamente conectado con la Ley de los Grandes Números.

- **Significado subjetivo**

A pesar de que no suele enseñarse este significado en la escuela de forma explícita, es quizás el enfoque de la probabilidad que cuenta con más aplicaciones en el mundo real. Es frecuente que, para tomar decisiones en áreas tales como la ingeniería, la economía y la administración, se recurra a la determinación de probabilidades estimadas por expertos o basadas en un consenso general de personas. Este significado resulta especialmente útil cuando se trata de situaciones que ocurrirán una única vez. Las tasas de pago involucradas en las apuestas deportivas son un claro ejemplo de una probabilidad subjetiva implícita para la determinación de las mismas.

De acuerdo a los tres significados y a la clasificación presentada previamente, se puede asociar cada significado a un tipo planteamiento o metodología de trabajo según el esquema presentado a continuación:

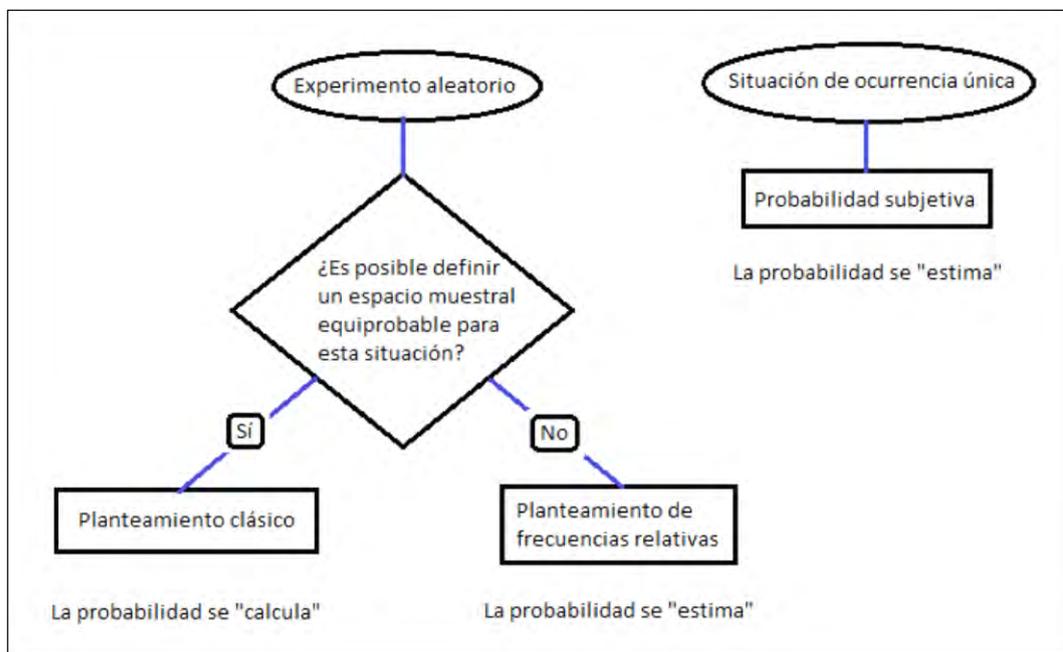


Figura 7: Clasificación de planteamientos para determinar la probabilidad

Elaboración propia

En este punto, se debe resaltar la importancia de la diferenciación entre el “cálculo” de probabilidades y la “estimación” de probabilidades. Debe quedar claro, tanto para el docente como para el estudiante, que la probabilidad verdadera de ocurrencia de un suceso solo puede ser calculada en casos en los cuales se cumplen condiciones *ideales* como puede ser el lanzamiento de dados, monedas o sorteos. En la gran mayoría de situaciones de la vida cotidiana, solo es posible realizar estimaciones de la probabilidad.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO PRETENDIDO DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO

En este capítulo, se presentará el análisis de los desempeños presentados en el Programa Curricular con el fin de identificar qué parte o partes del significado de referencia establecido en el capítulo previo forma parte del mismo.

En vista de que los cuadernos de trabajo propuestos por el MINEDU son los libros de texto más representativos y de uso más difundido en el Perú, serán tomados para seleccionar las tareas que serán analizadas. Se debe mencionar que otros libros de texto empleados en la educación básica en el Perú presentan tareas bastantes similares sobre probabilidad, por lo que se puede afirmar que las tareas analizadas en este capítulo son representativas.

En la actualidad, el currículo nacional trabaja el pensamiento estocástico de los estudiantes durante toda la etapa escolar, desde el primer grado de primaria hasta el quinto grado de secundaria (MINEDU, 2017). Sin embargo, en base al significado de referencia establecido en el capítulo previo, el análisis abordará la etapa comprendida desde el primer grado de primaria hasta el segundo año de secundaria. En los años finales de la educación básica, se aborda temas como la independencia de sucesos y la probabilidad condicional. Estos últimos temas son considerados más avanzados y, para este trabajo, no forman parte del significado de referencia de la probabilidad, ya que se ha decidido considerar únicamente los elementos básicos de la misma.

Los Programas Curriculares de educación primaria y secundaria del Ministerio de Educación del Perú (2017) presentan una clasificación de los desempeños esperados para cada grado de la educación básica. A continuación, se muestra los desempeños correspondientes a cada grado, así como su relación con el significado de referencia establecido en el capítulo anterior.

Grado	Desempeños	Elementos del significado de
Grado	Desempeños	Elementos del significado de referencia
Primer grado de primaria	Expresa la ocurrencia de acontecimientos cotidianos usando las nociones “siempre”, “a veces” y “nunca”.	Clasificación de sucesos
Segundo grado de primaria	Expresa la ocurrencia de acontecimientos cotidianos usando las nociones “posible” e “imposible”.	Clasificación de sucesos
Tercer grado de primaria	Expresa la ocurrencia de acontecimientos cotidianos usando las nociones “seguro”, “posible” e “imposible”. Predice la ocurrencia de un acontecimiento o suceso cotidiano. Así también, explica sus decisiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.	Clasificación de sucesos
Cuarto grado de primaria	Expresa todos los posibles resultados de la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones “seguro”, “más probable” y “menos probable”.	Clasificación de sucesos
Quinto grado de primaria	Predice que la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que otro. Así también, explica sus decisiones y conclusiones a partir de la información obtenida con base en el análisis de datos.	Idea de probabilidad

		referencia
Sexto grado de primaria	<p>Determina todos los posibles resultados de una situación aleatoria a través de su probabilidad como fracción.</p> <p>Expresa todos los posibles resultados de una situación aleatoria en forma oral usando las nociones “más probables” o “menos probables”, y numéricamente.</p> <p>Selecciona y emplea procedimientos y recursos como el recuento, el diagrama, las tablas de frecuencia u otros, para determinar los casos favorables a un suceso y su probabilidad como fracción.</p> <p>Predice la ocurrencia de sucesos a partir del análisis de los resultados de una situación aleatoria</p>	<p>Espacio muestral</p> <p>Clasificación de sucesos</p> <p>Idea de probabilidad</p> <p>Planteamiento clásico</p>
Primer grado de secundaria	<p>Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.</p> <p>Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.</p> <p>Selecciona y emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.</p> <p>Plantea afirmaciones o conclusiones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos</p>	<p>Espacio muestral</p> <p>Clasificación de sucesos</p> <p>Idea de probabilidad</p> <p>Planteamiento clásico</p> <p>Planteamiento frecuencial</p>

Grado	Desempeños	Elementos del significado de referencia
Segundo grado de secundaria	<p>Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es seguro, probable o imposible de suceder.</p> <p>Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad para caracterizar como segura o imposible la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.</p> <p>Selecciona y emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.</p> <p>Plantea afirmaciones o conclusiones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos</p>	<p>Espacio muestral</p> <p>Clasificación de sucesos</p> <p>Idea de probabilidad</p> <p>Planteamiento clásico</p> <p>Planteamiento frecuencial</p>

Tabla 5: Desempeños

Adaptado de Programa Curricular (MINEDU, 2017)

A continuación, se presentará las tareas escogidas de los cuadernos de trabajo propuestos por el MINEDU a los estudiantes de educación básica con el fin de analizar, a través de las configuraciones epistémicas de cada una, su relación con los desempeños asociados a grado y también con el significado de referencia propuesto.

Las tareas han sido escogidas por ser representativas de desempeños específicos. Para algunas de ellas, se presentará la configuración epistémica y el análisis de los

objetos matemáticos primarios. Otras serán presentadas con el fin de explicitar errores o inconsistencias presentes en las mismas.

El objetivo de este análisis es identificar posibles errores o inconsistencias que podrían generar conflictos, tanto en el estudiante como en el docente, especialmente considerando que, por su formación, estos libros de texto constituyen el principal referente teórico para los profesores.

Tareas elegidas del cuaderno de trabajo de primer grado de primaria

En el primer grado de primaria, se trabaja únicamente un tema, denominado “*Siempre, a veces o nunca*”. Este tema pretende desarrollar las primeras nociones relacionadas con la clasificación de sucesos tal como lo indican los desempeños asociados al grado en el programa curricular. A continuación, se muestra una tarea compuesta por dos partes que aparecen de forma conjunta en el cuaderno de trabajo de primer grado.

- Situación – problema:

1. Jugamos con un dado.

- **Formen** un equipo de 3 estudiantes y **consigan** un dado.
- Por turnos, cada uno **lanza** el dado y **anota** en su tabla los puntos que salen en el dado.
- Se juegan 4 rondas.
- Gana el que obtenga más puntaje.



	Ronda 1	Ronda 2	Ronda 3	Ronda 4	Puntaje total
Puntos del dado					

Figura 8: Primer grado de primaria. Primera tarea. Parte I

Fuente: Cuaderno de trabajo. Primer Grado. Ministerio de Educación (2017)

2. Marca con una X según lo que sucede en el juego con el dado.

Suceso	Nunca	Siempre	A veces
Lanzar el dado y que salga 6.			
Lanzar el dado y que salga 0.			
Lanzar el dado y que salga un número.			
Lanzar el dado y que salga 1.			

Figura 9: Primer grado de primaria. Primera tarea. Parte II

Fuente: Cuaderno de trabajo. Primer Grado. Ministerio de Educación (2017)

Configuración epistémica:

- Elementos lingüísticos:
 - Siempre, a veces y nunca: se espera que estas palabras formen parte del vocabulario de un niño de 6 o 7 años.
 - Suceso
 - Sucede: en la figura 10, se pide responder sobre *lo que sucede en el juego con el dado*.
 - Tabla: en la figura 10, se presenta una tabla para que los estudiantes marquen la alternativa escogida.
- Definiciones:
 - Siempre sucede: es aquel suceso que se produjo cada vez que se realizó la acción (en este caso, lanzar el dado).
 - A veces sucede: es aquel suceso que se produjo algunas de las veces que se realizó la acción.
 - Nunca sucede: es aquel suceso que no puede producirse al realizarse la acción.
- Propositiones
 - Lanzar el dado y que salga 6
 - Lanzar el dado y que salga 0
 - Lanzar el dado y que salga un número
 - Lanzar el dado y que salga 1
- Procedimientos / Procesos:

- Lanzar los dados
- Identificar todos los posibles resultados al lanzar los dados
- Argumentos:
 - Los estudiantes pueden argumentar, para el suceso “lanzar el dado y que salga 6”, que *a veces* se obtiene el número 6 porque es *una* posibilidad entre *varias*. Por su parte, para el suceso “lanzar el dado y que salga 0”, pueden argumentar que nunca se obtiene el número 0 porque el 0 no figura en ninguna de las caras del dado. A su vez, para el suceso “lanzar el dado y que salga un número” pueden argumentar que *siempre* que se lance el dado se obtendrá un número, puesto que todas las caras muestran un número que, en este caso, se representa por una cantidad determinada de puntos. De manera similar, para el suceso “lanzar el dado y que salga 1”, se espera que argumenten que el número 1 es una posibilidad y se obtiene *a veces*.

Análisis:

La tarea presentada en la figura 10 presenta a los estudiantes las primeras nociones intuitivas acerca de la clasificación de sucesos. Se espera que ellos puedan diferenciar entre aquello que ocurre *siempre*, aquello que ocurre *a veces* y aquello que *nunca* ocurre basados en la actividad de lanzar un dado.

El significado de las palabras siempre, a veces y nunca suele ser el mismo en este contexto que el que se asocia cotidianamente; sin embargo, para niños de esta edad, las palabras *siempre* y *nunca* no tienen el significado absoluto que tienen para un estudiante de mayor edad. Para un niño pequeño, aquello que ocurre muy a menudo ocurre *siempre* y aquello que ocurre muy rara vez *nunca* ocurre.

Sin embargo, en esta tarea, los alumnos responden a las preguntas *después* de haber realizado la experiencia concreta con los dados. Podría ocurrir que, cuando los estudiantes realicen la experiencia, no obtengan ningún 6 en los dados y escriban que el suceso no ocurre nunca. Podría no quedar claro para el docente si la intención de la tarea es solo registrar y responder sobre lo ocurrido concretamente en la experiencia reciente con el dado o sobre aquello que es *posible* para este experimento.

En las tareas presentadas, los estudiantes podrían realizar dos procesos mentales distintos, pero válidos. Algunos estudiantes responderán a las preguntas según la experiencia concreta que hayan tenido con los cuatro lanzamientos de los dados, mientras que otros, quizás aquellos que hayan jugado antes con dados, tengan claro cuáles son todos los posibles resultados al lanzar un dado y respondan con respecto a todos los resultados posibles.

El uso de conjugaciones en tiempo presente al preguntar sobre *lo que sucede en el juego con el dado* podría resultar confuso ya que no se enfatiza si se pregunta por lo que ya ocurrió en el experimento o sobre lo que puede ocurrir. En el primer caso, sería mejor preguntar por lo que *sucedió en el juego con el dado* y, en el segundo, por lo que *puede suceder en el juego con el dado*.

Por otro lado, la tabla mostrada en la figura 9 pide a los estudiantes calcular el puntaje total. Este resultado no está relacionado con los conceptos que se desea presentar, sino que se trata de una forma de generar interés en la actividad a modo de competencia. Ello podría suponer un problema, ya que el profesor podría pensar que el puntaje total representa alguna idea relevante. Es recomendable evitar incluir en las situaciones – problema preguntas que distraigan la atención de las ideas que realmente se desea trabajar.

En el mismo cuaderno de trabajo, se puede observar otra tarea propuesta para estudiantes de primer grado que, a primera vista, parece más apropiada:

Configuración epistémica – Segunda tarea – Primer grado de primaria

3. Al girar la ruleta, ¿qué sucede siempre, a veces o nunca? **Une** cada ruleta con su cartel.

<p>Que salga un oso.</p> 	<p>Que salga una pelota.</p> 	<p>Que salga un trompo.</p> 
<p>Siempre sucede</p>	<p>Nunca sucede</p>	<p>A veces sucede</p>

Figura 10: Primer grado de primaria. Segunda tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Primer grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Siempre
 - A veces
 - Nunca
 - Sucede
- Definiciones:
 - Siempre sucede: es aquel suceso que se produjo cada vez que se realizó la acción (en este caso, lanzar el dado).
 - A veces sucede: es aquel suceso que se produjo algunas de las veces que se realizó la acción.
 - Nunca sucede: es aquel suceso que no puede producirse al realizarse la acción.
- Procedimientos / Procesos:
 - Para cada ruleta, verificar cuántas de las casillas corresponden al elemento mencionado (oso, pelota o trompo)
 - Determinar el elemento mencionado se obtiene nunca, a veces o siempre al girar la ruleta.
- Propositiones
 - Nunca sucede que salga un oso.
 - A veces sucede que sale una pelota.
 - Siempre sucede que sale un trompo.
- Argumentos:
 - En la primera ruleta, no hay ningún oso, por lo que nunca sucederá que salga un oso al girar la ruleta.
 - En la segunda ruleta, hay dos pelotas, pero también hay osos y trompos, por lo que a veces sucederá que salga una pelota al girar la ruleta.
 - En la tercera ruleta, solo hay trompos, por lo que siempre sucederá que salga un trompo al girar la ruleta.

Análisis:

En este caso, el estudiante no realizará el experimento, sino que tendrá que predecir qué *puede* y qué *no puede* ocurrir. Para ello, debe identificar que cualquiera de los resultados de la ruleta es posible sin necesidad de efectuar ninguna acción.

Aunque no se explicita el uso de las palabras *posible* e *imposible*, el estudiante debería ir formando las nociones de estos conceptos, pues son dos definiciones importantes para el trabajo futuro. Por su parte, el profesor debe reconocer que las situaciones presentadas en esta etapa pretenden sentar las bases para presentar conceptos como el experimento aleatorio y el espacio muestral.

Se puede concluir que, en efecto, las dos situaciones – problema analizadas para este grado contribuyen a lograr los desempeños propuestos para el grado, pero no queda del todo claro si los significados de siempre, a veces y nunca presentados están referidos a la *frecuencia* con la que cierto suceso ha ocurrido o a la *posibilidad* de que el suceso ocurra.

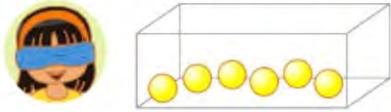
Tareas elegidas del cuaderno de trabajo de segundo grado de primaria

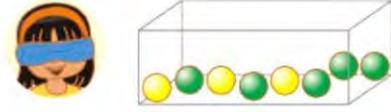
En el segundo grado de primaria, siguiendo con los desempeños propuestos en el programa curricular, se amplía las ideas trabajadas el año previo y ya se introduce los conceptos de *posible* e *imposible*. Las situaciones presentadas para ello son similares a las empleadas para *siempre*, *a veces* y *nunca*. A continuación, se muestra una tarea presentada en el cuaderno de trabajo correspondiente a este grado.

Configuración epistémica:

- Situación – problema:

1. Urpi y sus amigos juegan a sacar bolitas de la caja con los ojos vendados. **Observen y completen.**

 Es _____ que
saque una bolita verde, porque _____.

 Es _____ que
saque una bolita amarilla, porque _____.

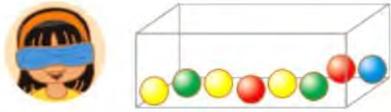
 Es _____ que
saque una bolita roja, porque _____.

Figura 11: Segundo grado de primaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Segundo grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Posible
 - Imposible
- Definiciones:
 - Posible: es aquel resultado que forma parte del conjunto de posibilidades al realizar una acción enmarcada en una situación de incertidumbre. Se debe notar que aún no se habla de suceso posible, sino únicamente de un resultado que es posible bajo las condiciones de la situación de incertidumbre.
 - Imposible: es aquel resultado que no forma parte del conjunto de posibilidades al realizar una acción enmarcada en una situación de incertidumbre. Se debe notar que aún no se habla de suceso imposible, sino únicamente de un resultado no posible bajo las condiciones de la situación de incertidumbre.
- Procedimientos / Procesos:
 - Verificar si hay bolitas del color mencionado en cada urna para responder si es posible o imposible que se saque una bolita de ese color.

- Proposiciones
 - Es posible que saque una bolita verde / amarilla / roja.
 - Es imposible que saque una bolita verde / amarilla / roja.
- Argumentos:
 - Para la primera urna, por ejemplo, se espera que el estudiante responda que es *imposible* sacar una bolita verde ya que no hay bolitas verdes en la urna. Para la segunda urna, se espera que responda que es *posible* sacar una bolita verde ya que sí hay algunas bolitas de este color en la urna. Para la tercera urna, se espera que responda que es *posible* sacar una bolita verde ya que sí hay algunas bolitas de este color en la urna.

Análisis:

Las palabras *posible* e *imposible* suelen formar parte del vocabulario de un niño de segundo grado, pero es probable que aún no hayan adquirido el significado absoluto que tienen para una persona de mayor edad. Un niño de esta edad puede considerar que algo es imposible solo porque nunca ha ocurrido en su entorno.

Se puede afirmar que la situación – problema presentada en la figura 11 se alinea a los desempeños propuestos en el programa curricular. Sin embargo, es necesario mencionar que la acción de extraer una bolita de la primera urna no corresponde a una situación de incertidumbre puesto que hay una única posibilidad.

A diferencia de los significados de siempre, a veces y nunca, los significados de posible e imposible son mucho más categóricos y, aparentemente, no dan lugar a ambigüedades. Al relacionar estas definiciones de forma paralela, el profesor podría encontrar dificultades ante preguntas como las siguientes:

- En una situación de incertidumbre o experimento, ¿el hecho de que un suceso nunca haya ocurrido implica que este suceso es imposible?
- En una situación de incertidumbre o experimento, ¿podría ser que un suceso sea posible a pesar de que nunca haya ocurrido?

Mientras las concepciones de siempre, a veces y nunca pueden estar relacionadas a experiencias concretas, las nociones de posible e imposible son ideas abstractas que requieren que el estudiante se sitúe en el universo de todo lo posible. Al tratarse

de niños que aún no desarrollan por completo el pensamiento abstracto, el profesor debe ser consciente de todo lo que implica la construcción de estos significados.

Por otro lado, las situaciones presentadas en este nivel son concretas, como el ejemplo de las bolitas en la urna, por lo que las nociones de posible e imposible, en este nivel, permanecen enlazadas a las de siempre, a veces y nunca. Se espera que más adelante se expanda el significado de posible e imposible.

Tareas elegidas del cuaderno de trabajo de tercer grado de primaria

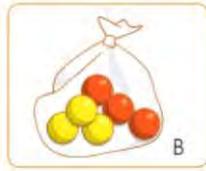
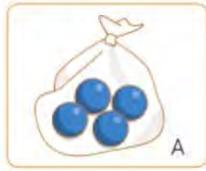
En el tercer grado de primaria, se introducen más conceptos relacionados con la probabilidad. Esta vez, el cuaderno de trabajo presenta dos capítulos distintos que tratan sobre el tema. Es en este grado que se introduce la probabilidad como concepto, por lo que se presentarán cuatro tareas para el análisis.

En el primer capítulo, se define el concepto de *suceso* y se clasifica en tres categorías: *suceso seguro*, *suceso posible* y *suceso imposible*. Adicionalmente, se realiza preguntas sobre qué suceso tiene *más o menos posibilidades de ocurrir*, a pesar de que se debería preguntar por cuál suceso tiene mayor o menor *probabilidad* de ocurrencia. Resulta interesante notar que, en un primer momento, no se emplea las palabras *probabilidad*, *más probable* o *menos probable*.

Configuración epistémica – Primera tarea – Tercer grado de primaria

- Situación – problema:

4. Lola armó varias bolsas oscuras con canicas de colores. **Imagina** que extraes una canica. Luego **completa** las expresiones.



- Extraer una canica azul de la bolsa A es un suceso _____.
- Extraer una canica roja de la bolsa B es un suceso _____.
- Extraer una canica morada de cualquier bolsa es un suceso _____.
- Extraer una canica _____ de la bolsa _____ es un suceso seguro.
- Extraer una canica _____ de la bolsa _____ es un suceso _____.

Figura 12: Tercer grado de primaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Tercer grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Imaginar
 - Suceso
 - Extraer
- Definiciones:
 - Suceso posible: es cualquier suceso que *puede* ocurrir al realizar el experimento. Formalmente, un suceso posible es cualquier subconjunto no vacío del espacio muestral del experimento o situación de incertidumbre.
 - Suceso imposible: es un suceso que *no puede* ocurrir a realizar el experimento, ya que incluye al menos un resultado que no pertenece al espacio muestral del experimento o situación de incertidumbre.
 - Suceso seguro: es un suceso que ocurrirá siempre que se realice el experimento. Existe un único suceso seguro, aunque puede ser expresado de muchas formas. Se entiende que el suceso *seguro* también es *posible*, aunque ello podría no estar claro para el profesor a partir de esta tarea, ya que las tres clases de sucesos se presentan a un mismo nivel y ello podría inducir a pensar que se trata de conceptos disjuntos.
- Proposiciones
 - Extraer una canica azul de la bolsa A es un suceso seguro.

- Extraer una canica roja de la bolsa B es un suceso posible.
- Procedimientos / Procesos:
 - Se espera que los estudiantes verifiquen si hay bolitas del color mencionado en cada bolsa para responder si es posible, imposible o seguro que se extraiga una bolita de ese color.
- Argumentos:
 - Para el suceso “extraer una canica azul de la bolsa A”, por ejemplo, se espera que el estudiante responda que es *seguro* extraer una canica azul ya que todas las canicas de la bolsa son azules.
 - Para el suceso “extraer una canica roja de la bolsa B”, se espera que el estudiante responda que es *posible* extraer una canica roja de la bolsa ya que esta contiene canicas de dos colores: rojas y amarillas.
 - Para el suceso “extraer una canica morada de cualquier bolsa”, se espera que responda que es *imposible* sacar una bolita morada ya que ninguna de las bolsas contiene canicas de este color.

Análisis – Primera tarea – Tercer grado de primaria

La tarea presentada en la figura 12 pide a los estudiantes imaginar. Ello implica realizar predicciones en el campo de todo lo posible para la situación propuesta.

A partir de este grado, se incorpora la palabra *suceso* de forma explícita, aunque ya ha sido usada esporádicamente en los grados previos.

Resulta interesante notar que, al igual que en otras tareas, se emplea verbos en infinitivo, lo cual se suele asociar más a una acción que a un suceso. Este aspecto del lenguaje se mencionará más detalladamente en el capítulo final.

Se puede afirmar que la tarea propuesta en la figura 13 está alineada a los desempeños propuestos por el Programa Curricular, ya que los estudiantes deben clasificar distintos sucesos propuestos. Sin embargo, se puede notar algunas posibles fuentes de conflictos:

- En este caso, la situación de incertidumbre, que cumple las condiciones para ser un experimento aleatorio, está expresada como “Imagina que extraes una canica”. Sería recomendable explicitar que la canica se extrae *al azar* o *sin mirar*, ya que la aleatoriedad depende de ello. Se menciona que es una bolsa

oscura, pero es recomendable que se enfatice la aleatoriedad puesto que es la condición fundamental para que se trate de una situación de incertidumbre.

- En esta y otras tareas propuestas, los sucesos están expresados como acciones. Ello puede resultar confuso para estudiantes y docentes. En realidad, la acción corresponde al experimento aleatorio, mientras que los sucesos corresponden a los resultados del mismo. Por ejemplo, en este caso, el experimento podría ser “extraer una canica de la bolsa” y el suceso podría ser “que la canica extraída sea roja”. La diferencia es sutil, pero si el docente no reconoce estas diferencias pueden generarse más confusiones en el futuro.

A continuación, se presenta una segunda tarea correspondiente al tercer grado de primaria.

Configuración epistémica – Segunda tarea – Tercer grado de primaria

- Situación – problema:

5. Las niñas y los niños jugaron con la ruleta de frutas. Cada uno la giró una vez y esperó que la ruleta se detenga con la flecha apuntando en una de las frutas. Manuel dijo que se detendría en la manzana, Paco dijo que se detendría en el plátano y Paola dijo que en el limón.

¿Quién tiene más posibilidades de acertar?
¿Por qué? _____



Figura 13: Tercer grado de primaria. Segunda tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Tercer grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Posibilidades
- Definiciones:
 - Probabilidad: si bien este concepto no se menciona explícitamente, está claro que la tarea pretende que los estudiantes comparen la probabilidad de que la flecha se detenga en cada una de las frutas.

- Procedimientos / Procesos:
 - Se espera que los estudiantes cuenten cuántas veces aparece cada fruta en la ruleta y determinen que la que aparece más veces tiene mayor probabilidad de ser aquella en la cual se detenga la flecha. Ya que hay tres manzanas, dos limones y un plátano, Manuel tiene mayor probabilidad de acertar.
- Propositiones:
 - Es más probable que la flecha de la ruleta apunte a una manzana.
 - Es menos probable que la flecha de la ruleta apunte a un plátano que a un limón.
- Argumentos:
 - Se espera que los estudiantes argumenten que, en esta situación de incertidumbre, que cumple con las condiciones para ser considerada un experimento aleatorio, a pesar de que el resultado de la acción de hacer girar la ruleta es aleatorio, es *más probable* que la flecha de la ruleta apunte a una manzana porque esta fruta aparece más veces que las demás.

Análisis – Segunda tarea – Tercer grado de primaria

En la tarea presentada en la figura 13, se pregunta “¿Quién tiene más *posibilidades* de acertar?” cuando, en realidad, sería correcto preguntar “¿Quién tiene más *probabilidades* de acertar?”. Todo indica que la intención en este cuaderno de trabajo es no presentar la palabra probabilidad aún, ya que esta se presenta en el otro capítulo del mismo dedicado a la probabilidad. Sin embargo, tampoco ha empleado la palabra *posibilidad* hasta ese momento. Este uso del lenguaje podría generar confusiones más adelante ya que, para esta tarea, las posibilidades son tres: manzana, limón y plátano, solo que una de ellas (la manzana) es más probable.

También en esta tarea, se observa que los estudiantes ya deben cuantificar de cierta forma la probabilidad, a pesar de que aún no se le da ese nombre, ya que deberán comparar la cantidad de posibilidades o resultados asociados a cada fruta. Se puede interpretar que, con esta tarea, se busca que surja en los estudiantes el significado clásico de la probabilidad a pesar de que aún no se realiza cálculo de probabilidades.

Como se mencionó, en el segundo capítulo relacionado con probabilidad del mismo cuaderno de trabajo, se observa que ya se emplea los términos más probable y menos probable como se muestra a continuación:

Configuración epistémica – Tercera tarea – Tercer grado de primaria

- Situación – problema:

1. Paola y Paco experimentan con los sucesos probables. Ellos colocan en una bolsa 5 fichas rojas, 2 fichas azules y una verde. Es el turno de Paola, y va a sacar una ficha sin mirar.



¿Qué color de ficha es más probable que saque Paola? _____
 ¿Por qué? _____

a. **Completen.**

- Paola puede sacar de la bolsa fichas de color _____.
- Hay más fichas de color _____; entonces, es más probable sacar una ficha de color _____.
- Hay menos fichas de color _____; entonces, es menos probable sacar una ficha de color _____.

b. **Respondan.**

- ¿Qué es más probable, sacar una ficha azul o una verde? _____
 ¿Por qué? _____
- ¿Es posible que salga una ficha amarilla? _____ ¿Por qué? _____

Figura 14: Tercer grado de primaria. Tercera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Tercer grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Experimentar
 - Sucesos probables
 - Más probable
 - Menos probable
 - Posible

- Definiciones:
 - Más probable: comparación entre las probabilidades de dos sucesos. Un suceso es más probable que otro si la probabilidad de que ocurra es mayor.
 - Menos probable: comparación entre las probabilidades de dos sucesos. Un suceso es menos probable que otro si la probabilidad de que ocurra es menor.
- Procedimientos / Procesos:
 - Se espera que los estudiantes comparen las cantidades de fichas de cada color que hay en la bolsa para identificar de qué color es más o menos probable que sea la ficha que se extraiga aleatoriamente.
- Proposiciones:
 - Hay más fichas rojas; entonces, es más probable que la ficha extraída sea roja.
 - Hay menos fichas verdes; entonces, es menos probable que la ficha extraída sea verde.
 - Es imposible que se extraiga una ficha amarilla.
- Argumentos:
 - La bolsa contiene cinco fichas rojas, dos fichas azules y solo una verde, por lo que es más probable que se extraiga una ficha roja. De la misma manera, por ejemplo, es menos probable que se extraiga una ficha verde que una azul.
 - Es imposible que se extraiga una ficha amarilla porque ninguna de las fichas es amarilla.

Análisis – Tercera tarea – Tercer grado de primaria

Es interesante notar que, al principio de esta tarea, se afirma que “Paola y Paco experimentan con los sucesos probables”. Parece ser una oración confusa, pues no existe el concepto “suceso probable”, sino que existen sucesos *más probables* y *menos probables*. Por lo demás, la tarea parece apropiada y acorde a los desempeños correspondientes al tercer grado de primaria.

Finalmente, también dentro de las tareas propuestas en el cuaderno de trabajo de tercer grado, se observa la siguiente situación – problema:

Configuración epistémica – Cuarta tarea – Tercer grado de primaria

- Situación – problema:

3. **Experimenten** con la probabilidad.

¿Qué necesitamos?

- Un dado con dos caras pintadas de rojo, tres caras pintadas con color amarillo y una cara pintada con color azul.

¿Cómo lo hacemos?

- Cada participante **elige** un color para jugar: rojo, amarillo o azul.
- Por turnos, cada participante **lanza** el dado y **pinta** en la tira de cuadraditos un casillero, de acuerdo al color que obtiene.
- Si sale el color elegido, gana un punto y lo anota en la tabla. Si no, anota 0.
- Se juegan cuatro rondas y gana quien consigue más puntos al término del juego.



Casilleros para colorear cada jugada:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

a. **Completen** la tabla con el puntaje de cada jugador.

Jugador	Color elegido	Puntaje			Total

b. **Respondan.**

- ¿Qué color salió más veces? _____
- ¿Por qué creen que salió más veces ese color? _____
- Si vuelven a jugar, ¿qué color elegirían para ganar? _____
- ¿Por qué? _____

Figura 15: Tercer grado de primaria. Cuarta tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Tercer grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Experimentar
 - Probabilidad
 - Tabla de puntaje

- Definiciones:
 - Experimento:
 - Resultado:
 - Variabilidad:
- Procedimientos / Procesos:
 - Se espera que los estudiantes realicen predicciones *antes* de realizar el experimento (aunque la tarea no lo pide) y luego las contrasten con los resultados obtenidos.
- Proposiciones:
 - Es más probable que gane el estudiante que eligió el color amarillo.
 - Es menos probable que gane el estudiante que eligió el color azul
- Argumentos:
 - Ya que el dado tiene más caras pintadas de amarillo que de cualquier otro color, lo más probable es que gane aquel que eligió el color amarillo.
 - Ya que el dado tiene solo una cara pintada de color azul, es poco probable que gane aquel que eligió el color azul.

Análisis – Cuarta tarea – Tercer grado de primaria

Esta última situación – problema debe ser analizada con cuidado. Las definiciones presentadas en la configuración epistémica, experimento, resultado y variabilidad, no aparecen de forma explícita en la situación – problema, pero se encuentran involucradas y el docente debería hacer mención de ellas al trabajar esta tarea con los estudiantes.

En esta tarea, cuando los alumnos realicen el experimento, es altamente probable que el color que obtengan más veces es el amarillo, ya que tres caras del dado están pintadas de este color, dos están pintadas de color rojo, y solo una está pintada de color azul.

Sin embargo, al tratarse de un trabajo experimental, es posible que, para algunos estudiantes, el color que salga más veces sea el rojo o, incluso, el azul. Esta clase de fenómenos podrían generar confusiones entre los estudiantes si el docente no tiene claros los elementos que están involucrados.

Diversos investigadores como, por ejemplo, Batanero y Díaz (2012) afirman que, en esta clase de situaciones, el docente suele dar respuestas como “se debe al azar” o “es mala suerte”. El docente debería estar preparado para mencionar que, a pesar de que cierto resultado es *más probable*, existen varios resultados *posibles*. Por ello, no todos los estudiantes obtendrán los mismos resultados necesariamente.

Las explicaciones correctas sobre por qué el resultado de un experimento resulta distinto al esperado tienen que ver con conceptos como la variabilidad de los resultados, que se presentarán más adelante en la formación del estudiante. Sin embargo, es posible que el docente empiece a introducir estas ideas en esta etapa.

Independientemente de cuál sea el color que salga más veces, se espera que de todos modos los estudiantes identifiquen que la estrategia ganadora es elegir el color amarillo.

También, esta última tarea podría permitir al docente trabajar con los estudiantes el concepto de experimento, ya que la experiencia propuesta se puede repetir bajo condiciones similares fácilmente y es sencillo que los estudiantes observen que los resultados no siempre serán los mismos.

En general, las tareas propuestas para los estudiantes de tercer grado se encuentran alineadas a los desempeños del Programa Curricular. Sin embargo, es necesario realizar ajustes para que las tareas realmente contribuyan a afianzar en los estudiantes las ideas presentadas sobre probabilidad.

Tarea elegida del cuaderno de trabajo de cuarto grado de primaria

Configuración epistémica

- Situación problema:

2. Por el aniversario del colegio, se organizó una kermés con muchos juegos. Miguel fue con sus padres y compró un boleto para participar en el juego del cuy. ¿Qué color de casita debe elegir Miguel para tener más probabilidad de ganar?



a. **Completen.** El cuy puede entrar a una casita de color _____

b. **Respondan.**

- ¿Qué es menos probable que ocurra, que el cuy entre en una casita roja o en una amarilla? ¿Por qué? _____
- ¿Qué es más probable, que el cuy entre en una casita verde o en una roja? ¿Por qué? _____

Miguel debe elegir _____

Figura 16: Cuarto grado de primaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Cuarto grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Probabilidad
 - Más y menos probable: se emplea estos términos para comparar la probabilidad de distintos sucesos posibles en un mismo *experimento*.
- Definiciones:
 - Probabilidad: medida de la ocurrencia de un determinado suceso. En este caso, la tarea hace referencia a la probabilidad de que el cuy entre a una casita de un color determinado.

- Más probable: comparación entre las probabilidades de dos sucesos. Un suceso es más probable que otro si la probabilidad de que ocurra es mayor.
- Menos probable: comparación entre las probabilidades de dos sucesos. Un suceso es menos probable que otro si la probabilidad de que ocurra es menor.
- Procedimientos / Procesos:
 - Los estudiantes deberán contar cuantas casitas hay de cada color.
 - Los estudiantes deberán comparar las cantidades de casitas de cada color para determinar qué color de casita es más probable que elija el cuy.
- Propositiones:
 - Es más probable que el cuy elija una casita de color verde.
 - Es menos probable que el cuy elija una casita de color amarillo.
- Argumentos:
 - Se espera que los estudiantes argumenten que es más probable que el cuy elija una casita del color más abundante (verde) y es menos probable que elija una casita del color menos abundante (amarillo).

Análisis:

En esta tarea, se usa por primera vez la palabra probabilidad al preguntar ¿qué color de casita debe elegir Miguel para tener más probabilidad de ganar?

Además, la tarea presenta una particularidad que se debe comentar. En el juego del cuy, lo habitual es que cada persona que participa compre un boleto para una de las casitas disponibles. En este juego, no se apuesta por un color de casita, sino por una casita *específica*.

Si bien es más probable que el cuy entre a una casita verde (hay siete casitas verdes, seis rojas y dos amarillas), el hecho de elegir una casita verde *no* hace que sea más probable ganar, ya que cada casita tiene la misma probabilidad de ser la ganadora, independientemente del color. Cuando, al final, se pregunta “Miguel debe elegir_”, todo indica que se espera que los estudiantes respondan que debería elegir una casita verde.

Ello implica que se estaría incurriendo en una falacia si se afirma que Miguel debe elegir algún color en particular. Es muy importante que el docente sea consciente de ello, dado que es muy posible que algún estudiante haga notar en la clase que el color no importa y se genere un debate que el docente debe poder manejar.

Tareas elegidas del cuaderno de trabajo de quinto grado de primaria

Configuración epistémica – Primera tarea – Quinto grado de primaria

- Situación – problema:

2. Los padres de un bebé no deciden aún los dos nombres que le pondrán. A la mamá le gustan Camila y Sandra, y el papá quiere cualquiera de los nombres anteriores, pero acompañado de Marcela. Para decidirse, escriben los nombres en papelitos, que ponen en una caja, para sacar dos al azar. ¿Cuántos de los resultados son favorables para lo que desea el papá?

a. **Representa** los posibles dos nombres en un diagrama de árbol.

b. **Analiza** el diagrama de árbol y **responde**.

- ¿Cuántos nombres se obtienen? _____
- ¿Cuántos resultados son acordes con lo que desea el papá? _____

Para el papá son favorables _____.

Figura 17: Quinto grado de primaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Quinto grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Resultado favorable: hasta el momento, las tareas habían empleado la palabra *suceso* para referirse a los resultados de una situación de incertidumbre. Suceso y resultado deberían tener el mismo significado para el estudiante, por lo que es importante que el profesor también reconozca esta equivalencia. Sin embargo, formalmente, ambos términos son distintos. Solo los sucesos simples pueden ser resultados, pero ya que al estudiante no ha enfrentado sucesos

compuestos, no podrá diferenciarlos en esta etapa. Además, se dirá que un resultado es *favorable* cuando satisface alguna condición mencionada en el contexto de la situación – problema.

- Diagrama de árbol: permite listar todos los diferentes resultados de un experimento aleatorio de forma visual empleando líneas para que el diagrama comprenda todas las combinaciones posibles.
- Espacio muestral: será presentado mediante la notación de conjuntos.
- Definiciones:
 - Resultado: es un suceso simple conformado por un único elemento del espacio muestral.
- Procedimientos / Procesos:
 - Elaboración del diagrama de árbol: se espera que los estudiantes razonen de la siguiente forma: si la caja contiene tres papelitos, existen tres posibles nombres para el primer papelito que se extraiga y, para el segundo, son posibles los dos nombres restantes.
 - Construcción del espacio muestral: A partir de las posibilidades identificadas en el diagrama de árbol, se elabora el espacio muestral:

$$\Omega = \{(Camila Sandra); (Camila Marcela); (Sandra Camila); (Sandra Marcela); (Marcela Camila); (Marcela Sandra)\}$$

De esta forma, se obtiene seis nombres distintos, ya que se considera el orden de los mismos. En este caso, habría cuatro resultados favorables para el papá.

Análisis:

En la tarea presentada en la figura 17, se observa por primera vez en este nivel la técnica del diagrama de árbol. Esta es una técnica que los alumnos emplearán a menudo para poder visualizar todas las posibilidades.

Mediante esta técnica, se espera que los estudiantes construyan el espacio muestral correspondiente a la situación propuesta. Se debe mencionar que la construcción del espacio muestral de un experimento aleatorio no es un desempeño que se presente de forma explícita en el Programa Curricular a pesar de que es parte fundamental de la construcción del significado pretendido e implementado de la probabilidad en los estudiantes.

El enunciado de la tarea dice “Para decidirse, escriben los nombres en papelitos, que ponen en una caja para sacar dos al azar”. Sin embargo, no queda claro cuál es el método de extracción ni la forma de componer cada elemento del espacio muestral, ni si el orden de los nombres importa. Por ello, será fundamental que el profesor tenga claro cómo se realiza el experimento y cómo se forman los elementos del espacio muestral a fin de que la actividad se realice de la forma pretendida.

A continuación, se presenta otra situación – problema del cuaderno de trabajo de quinto grado:

Configuración epistémica – Segunda tarea – Quinto grado de primaria

2. Carola y Gloria son hermanas. Hoy, después de la cena, no se ponían de acuerdo sobre a quién le tocaba lavar los platos, así que decidieron lanzar un dado y dejarlo a la suerte. ¿Quién tiene más probabilidad de lavar los platos?



a. **Escribe** el conjunto de resultados posibles que se pueden obtener al lanzar un dado.

b. **Identifica y encierra** con una línea azul los resultados favorables a Carola y con una roja los favorables a Gloria.

c. **Completa** la tabla.

Conjunto de resultados posibles



	Carola	Gloria
Resultados favorables		
Resultados posibles		

Tiene más probabilidad _____.

Figura 18: Quinto grado de primaria. Segunda tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Quinto grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos
 - Se emplea la expresión “dejarlo a la suerte” para referir al hecho de tomar una decisión mediante un sorteo de naturaleza aleatoria.
 - Probabilidad
 - Resultados posibles
 - Resultados favorables
- Conceptos y definiciones:

- Resultado posible: es un elemento del espacio muestral asociado al experimento.
- Resultado favorable: los resultados favorables conforman un suceso particular ya que cumplen con una determinada condición propuesta en una situación – problema. En este caso, por ejemplo, los resultados favorables para Carola son aquellos en los que Gloria deberá lavar los platos.
- Probabilidad: a partir de este punto, los estudiantes entenderán la probabilidad como un número que representa la ocurrencia de un suceso y se calcula dividiendo el número de resultados favorables a ese suceso entre el número de resultados posibles, siempre que todos estos resultados sean equiprobables.
- Procedimientos:
 - Los estudiantes identificarán cuáles son los resultados favorables a cada suceso. Si se obtiene 1 o 2 en el dado, Carola lavará los platos; si se obtiene 3,4,5 o 6 en el dado, Gloria los lavará.
 - Cálculo de la probabilidad de que cada persona lave los platos: en este caso, los estudiantes no calcularán la probabilidad como fracción, sino que dirán que es más probable aquel suceso que tenga más resultados favorables.
 - Comparación entre el número de resultados favorables a cada persona
- Propositiones
 - Es más probable que sea Gloria quien lave los platos.
- Argumentos:
 - Se espera que los estudiantes argumenten que es más probable que sea Gloria quien lave los platos a pesar de que no es posible predecir quién lo hará, ya que se tomará la decisión mediante el lanzamiento aleatorio de un dado.

Análisis:

En esta tarea, resulta interesante notar que se pregunta por “quién tiene más probabilidad” sin presentar la probabilidad aún como un número. Hasta este grado, el cuaderno de trabajo solo menciona que el suceso más probable es aquel que tiene más resultados favorables.

Tarea elegida del cuaderno de trabajo de sexto grado de primaria

Recién en sexto grado de primaria, se calcula la probabilidad como un número, específicamente, como una fracción, tal como se muestra en la siguiente tarea:

Configuración epistémica:

- Situación – problema:

1. En una reunión de confraternidad entre los vecinos de un distrito se observó que asistieron 22 varones y 33 mujeres. Al final, como reconocimiento a la participación de los vecinos en la mejora de su distrito, se realizó un sorteo de premios, para el cual se depositaron en un ánfora papelitos con los nombres de cada asistente. Si se extrae sin mirar un papelito del ánfora, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer se lleve el premio?



a. **Comenten**, ¿se trata de un problema de aleatoriedad? ¿Por qué?

b. **Completen y calculen** la probabilidad.

- Experimento: extraer _____
- Suceso A: que una mujer _____
- Número de casos favorables al suceso A: _____
- Número de casos totales: _____
- Probabilidad de A: $P(A) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Si es posible, simplifica.



La probabilidad de que una mujer se lleve el premio es _____.

c. **Calculen y respondan**. ¿Cuál es la probabilidad de que un varón resulte ganador en el sorteo?

La probabilidad de que un varón resulte ganador es _____.

Figura 19: Sexto grado de primaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Sexto grado. Ministerio de Educación (2017)

- Elementos lingüísticos:
 - Sorteo
 - Aleatoriedad
 - Experimento
 - Suceso

- Casos: mientras que, en otros problemas, se ha empleado el término *resultados* favorables, esta vez se emplea el término *casos* favorables. Todo parece indicar que ambas palabras son equivalentes, pero ello podría generar confusión entre el profesor y/o los estudiantes.
- Conceptos y definiciones:
 - Experimento: es una acción con varios resultados posibles y que es repetible en el tiempo. En este caso, extraer un papelito del ánfora sin mirar.
 - Suceso: es un subconjunto del espacio muestral. En este caso, está conformado por todos los resultados en los que el papelito extraído corresponde a una mujer.
 - Casos favorables: resultados favorables
 - Casos totales: número de elementos del espacio muestral
 - Probabilidad
- Procedimientos:
 - Se espera que los estudiantes identifiquen que se trata de un sorteo equiprobable en el que hay 55 resultados posibles. De esos 55 resultados posibles, 33 corresponden al suceso “que una mujer se lleve el premio”.
 - Los estudiantes deberán calcular la probabilidad de ese suceso mediante el método clásico dividiendo 33 entre 55.
- Propositiones y propiedades:
 - La probabilidad de que una mujer resulte ganadora del sorteo sería:

$$P(A) = \frac{33}{55} = \frac{3}{5}$$

- Los estudiantes pueden emplear la propiedad $P(A') = 1 - P(A)$ para determinar la probabilidad de que un varón resulte ganador del sorteo. De esta forma:

$$P(A') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Análisis:

se pregunta a los estudiantes: ¿se trata de un problema de aleatoriedad? Esta es una pregunta que requiere que se haya discutido en clase acerca del significado del

término *aleatoriedad*. Al tratarse de un concepto abstracto, este puede generar confusión entre los estudiantes o incluso en el profesor. Se puede afirmar que es aleatorio aquello cuyo resultado es impredecible y cuya impredecibilidad es causada por la propia naturaleza.

Esta tarea resume de forma clara todo lo trabajado en primaria por los estudiantes. Se inicia con la pregunta “¿se trata de un problema de aleatoriedad?” y la respuesta sería que sí debido a que hay un sorteo cuyo resultado es incierto. A continuación, deben identificar cuál es el experimento y analizar los casos favorables a un suceso dado (que una mujer se lleve el premio). Luego, empleando la definición clásica, deben calcular la probabilidad. Finalmente, se pide calcular la probabilidad de que un varón se lleve el premio, para lo cual podrían calcular el complemento de la probabilidad hallada previamente

En general, el tratamiento de la Probabilidad en Primaria según lo observado en los cuadernos de trabajo propuestos por el Ministerio de Educación del Perú presenta a los estudiantes un panorama general de los elementos fundamentales de la Probabilidad. Es notorio el uso casi exclusivo de problemas de ruletas, dados, fichas, bolitas y similares.

Adicionalmente, se puede constatar la ausencia de situaciones en las que los estudiantes deban formular experimentos identificando condiciones y restricciones para construir espacios muestrales. Esta es una característica que también fue observada por Ortiz de Haro (1999) en su investigación sobre los significados de conceptos probabilísticos en los libros de texto.

El principal significado de la probabilidad presente en los cuadernos de trabajo de primaria es el clásico. En algunas tareas, como las mostradas en las figuras 8 y 15 se presentan actividades en las que los estudiantes deben realizar un determinado experimento y registrar los resultados obtenidos. Estas tareas podrían servir para introducir también el significado frecuencial, pero se trata de situaciones que se ajustan al enfoque clásico por su naturaleza equiprobable. El significado subjetivo no se presenta ni emerge en ninguna de las tareas propuestas.

Una deficiencia importante presente en los cuadernos de trabajo analizados es que la probabilidad termina siendo mostrada a los estudiantes como un conocimiento que se aplica a situaciones muy concretas y sencillas relacionadas a juegos y no

parece tener mayor utilidad en la vida cotidiana, a pesar de las múltiples aplicaciones que realmente tiene en la toma de decisiones de todo tipo: en la organización del tiempo de cada persona, al realizar compras, al planificar actividades, en la administración, la economía y la ingeniería, entre otros.

Al finalizar el sexto grado de primaria, los conceptos básicos de la probabilidad contemplados en el significado de referencia establecido en este trabajo ya han sido cubiertos en su totalidad. A continuación, se presentará algunas tareas que presentan errores típicos que pueden ser fuente de conflictos en estudiantes y alumnos. Para estas tareas, no se elaborará la configuración epistémica.

En ciertos problemas, se comete el error de no mencionar el experimento al preguntar sobre la probabilidad de un determinado suceso. Este fenómeno se suele replicar en niveles superiores. La siguiente tarea presenta el inconveniente mencionado:

4. Con motivo del cumpleaños de Patty, su mamá hace los preparativos para realizar una fiesta, y colocó en la piñata algunos juguetes. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un peluche?

a. **Anota** las cantidades de cada juguete y **resuelve**.

La probabilidad es _____.

b. **Responde**.

• ¿Cuál es la probabilidad de sacar una muñeca?	• ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un carrito?
---	--



Figura 20: Quinto grado de primaria. Tercera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Quinto grado. Ministerio de Educación (2017)

Como se puede observar, en ningún momento se dice de forma explícita cuál es el experimento. Todo parece indicar que el experimento es “se toma un juguete al azar de la piñata”; sin embargo, preguntas como *¿cuál es la probabilidad de sacar un peluche?* o *¿cuál es la probabilidad de no sacar un carrito?* carecen de sentido por sí solas debido a que no está claro cuántos juguetes tomará Patty de la piñata. Si el experimento es “se toma dos juguetes al azar de la piñata”, la respuesta sería muy diferente. Por ello, resulta mucho más apropiado acompañar a la pregunta con el

experimento de la siguiente forma: “Si se toma un juguete al azar de la piñata, ¿cuál es la probabilidad de que no sea un carrito?”

A pesar de que los conceptos fundamentales son trabajados en primaria, es necesario también analizar cómo son empleados en secundaria para identificar si surgen contradicciones o inconsistencias y si se encuentran alineados a los desempeños propuestos en el Programa Curricular.

A continuación, se muestra una tarea correspondiente al primer grado de secundaria:

2. Mariposas de exportación (Problemas de traducción compleja)

Los principales países que solicitan mariposas tanto vivas como para artesanías son: Estados Unidos, Bélgica y Francia, en muchas ocasiones con fines artesanales, para elaborar decoraciones en lámparas y cuadros. La industria de la comercialización de mariposas en el país es una de las más rentables y ha tomado auge en los últimos años.

Bajo estas condiciones un grupo de exportación de mariposas tiene en su taller las siguientes 4 mariposas:

<p>Mariposa 1</p>  <p>Figura 56.1</p>	<p>Mariposa 2</p>  <p>Figura 56.2</p>
<p>Mariposa 3</p>  <p>Figura 56.3</p>	<p>Mariposa 4</p>  <p>Figura 56.4</p>

Figura 21: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte I

Fuente: Cuaderno de trabajo. Matemática 1. Secundaria. Norma (2017)

En el momento de realizar los envíos a cada país se establecen las siguientes condiciones:

- Se envía a cada país **solo** dos estuches; en cada uno de ellos van **dos mariposas de distinta especie**.
- En las 4 mariposas enviadas, **tres** deben ser de distinta especie.
- **Todos** los países reciben la mariposa amarilla.
- Estados Unidos **solo** puede recibir **una** mariposa roja/negra, pero **no** va al lado de la amarilla.
- Francia **no** recibe mariposas azules/negras.

En el momento de empacar las mariposas un empleado nuevo se da cuenta de que le es confuso seguir las reglas; sin embargo, después de estudiar la situación, se da cuenta de que al plantear el espacio muestral de las parejas de distintas mariposas puede realizar el envío sin inconvenientes.

- ¿Cómo está compuesto cada envío?

Figura 22: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte II

Fuente: Cuaderno de trabajo. Matemática 1. Secundaria. Norma (2017)

En esta tarea, se emplea el término “espacio muestral” como una forma de escribir todas las alternativas que se tiene para realizar una actividad de clasificación de mariposas a pesar de que no se trata propiamente de una situación de incertidumbre.

También es notorio en esta situación – problema que las condiciones se encuentran redactadas en presente y ello dificulta la lectura. A continuación, se presenta una tabla comparativa, así como con una redacción mejorada propuesta

Texto original	Texto mejorado propuesto
Se envía a cada país solo dos estuches...	Se deberá enviar a cada país solo dos estuches...
Todos los países reciben una mariposa amarilla.	Todos los países deben recibir una mariposa amarilla.
Estados unidos solo puede recibir una mariposa roja / negra, pero no va al lado de la amarilla.	Estados unidos solo puede recibir una mariposa roja o negra, pero no deberá ir al lado de una amarilla.
Francia no recibe mariposas azules/negras	Francia no deberá recibir mariposas azules o negras.

Tabla 6: Mejora propuesta para tarea de primer grado de secundaria

Elaboración propia

Si bien se trata de diferencias pequeñas en la redacción, el impacto en la comprensión de la situación – problema por parte de los estudiantes puede ser notable.

1. Mariposas locales (Problemas de traducción simple)

Las mariposas son sin lugar a duda, los insectos más hermosos que existen. Desde la antigüedad han tenido un gran valor para la humanidad. Sobre ellas existen mitos y leyendas, han sido inmortalizadas en el arte, la literatura, la publicidad y hacen parte de la herencia natural. En los ecosistemas son indicadores de calidad del medioambiente. En el Perú se encuentran diversas especies en varias de las regiones. Algunos de ellos se presentan en la tabla 58.1:

	Parque nacional de Manu	Parque nacional Tambopata	Costa peruana	Machu Picchu	Total
Cantidad de especies de mariposas	1300	1200	400	300	3200

Tabla 58.1

Al encontrar una mariposa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de una región determinada?

- Probabilidad de que provenga del Parque Nacional de Manu:

- Probabilidad de que provenga del Parque Nacional Tambopata:

Figura 23: Primer grado de secundaria. Primera tarea. Parte III

Fuente: Cuaderno de trabajo. Matemática 1. Secundaria. Norma (2017)

Es esta tarea, parece que la intención del texto es que los estudiantes empleen el planteamiento empírico para responder a la pregunta “Al encontrar una mariposa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de una región determinada?”

Sin embargo, la única información que conocen los estudiantes es la cantidad de especies que existen en cada región y ello no brinda información acerca de cuántas mariposas de cada especie existen realmente. Podría ser que una región tenga muchas especies, pero pocas mariposas; así como también una región que tenga pocas especies y muchas mariposas. En ese caso, al encontrar una mariposa, sería más probable que pertenezca a la primera región y no a la segunda.

Por otro lado, la situación de incertidumbre parece ser “encontrar una mariposa y verificar de que región proviene”, pero se esperaría que ello esté influenciado por el lugar donde se encuentre la mariposa. La tarea no menciona nada al respecto.

Por lo antes mencionado, resulta imposible dar una respuesta coherente a las preguntas de esta tarea, ya que carece de información suficiente para responder.

Como se puede observar, el problema con esta y la mayoría de tareas presentadas en los libros de texto es que generan en el estudiante la idea de que toda probabilidad puede ser calculada con el método clásico y que todas las situaciones son equiprobables. Ello es una muestra del sesgo de equiprobabilidad en concordancia con lo descrito por Gauvrit y Morsanyi (2014).

A continuación, se muestra una tarea tomada de un libro de segundo grado de secundaria:

Situación C

Ana, Liz y Rosa salen de compras. Cada una lleva tarjeta de crédito y efectivo. Al momento de pagar, ¿cuál es la probabilidad de que una de ellas pague en efectivo?

Figura 24: Segundo grado de secundaria. Primera tarea.

Fuente: Cuaderno de trabajo. Matemática 2. Secundaria. Norma (2017)

La situación mostrada ilustra uno de los clásicos problemas que suelen presentar los profesores de la educación básica y corresponde al sesgo de equiprobabilidad ya mencionado antes en este trabajo. La persona que propuso esta situación asumió, erróneamente, que las probabilidades de pagar con tarjeta de crédito o en efectivo son las mismas, es decir $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Ello es incorrecto y la pregunta, tal cual está planteada no se podría responder.

Este tipo de situaciones, más bien, serían apropiadas para emplear la probabilidad de frecuencias relativas como se propone a continuación:

Ana, Liz y Rosa salen de compras. A continuación, se muestra como realizaron sus pagos en sus últimas 20 compras:

Medio de pago	Ana	Liz	Rosa
En efectivo	16	10	15
Con tarjeta de crédito	4	10	5

Tabla 7: Propuesta de mejora para pregunta de segunda grado de secundaria

Si cada una de ellas realiza una compra, ¿cuál es la probabilidad de que solo una de ellas pague en efectivo?

Si bien este problema es considerablemente más difícil que el anterior y quizás no sea adecuado para alumno de segundo año de secundaria, emplea el significado apropiado de la probabilidad para el contexto propuesto. El docente debería ser capaz de identificar estas situaciones y realizar ajustes o proponer situaciones según convenga.

Se puede observar que, en el primer y el segundo grado de la educación secundaria, no se introduce conceptos nuevos relacionados con la probabilidad, sino que se expande aquellos que ya se había trabajado en primaria. El principal significado asociado a la probabilidad es el clásico y este se emplean incluso cuando no resulta apropiado. Por su parte, hay indicios de la aplicación del planteamiento empírico, pero las tareas no permiten que el profesor explicita cuando su uso es apropiado

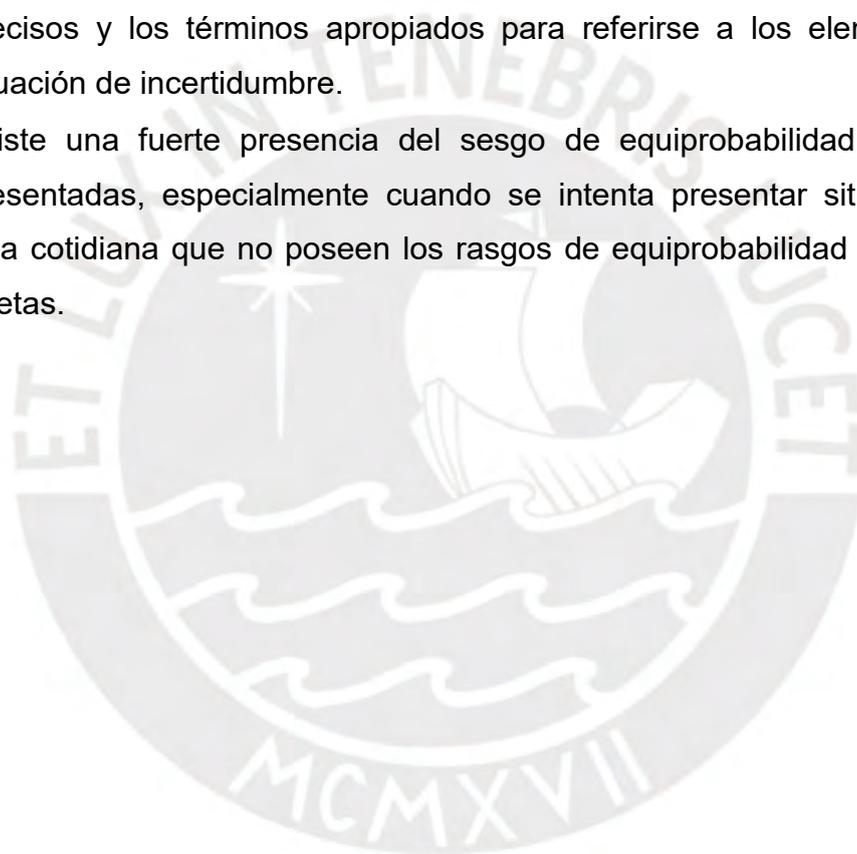
Hay un intento de desligarse de los problemas típicos de dados, ruletas y bolitas, pero no se logra proponer problemas adecuados sin recurrir a estos medios ya que, al enfrentar situaciones más variadas de la vida cotidiana, se hace evidente la necesidad de movilizar todos los significados de la probabilidad.

A partir de la elaboración de las configuraciones epistémicas y el posterior análisis de las tareas seleccionadas, es posible extraer las siguientes conclusiones:

- En las tareas de los cuadernos de trabajo analizadas, se evidencia que no hay una distinción clara entre el significado clásico y el significado de frecuencias relativas de la probabilidad. Algunas de las tareas contribuyen a generar confusión entre la probabilidad obtenida experimentalmente y aquella que se puede obtener de modo teórico mediante el planteamiento clásico.
- Las tareas de los cuadernos de trabajo no presentan a los estudiantes situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana en la que ellos mismos deban identificar cuáles son las posibilidades de acuerdo a determinadas condiciones y/o restricciones, ya que las situaciones siempre están definidas y no permiten que el estudiante construya espacios muestrales diversos que le permitan comprender la amplitud de los conceptos trabajados.
- En las tareas presentes en los cuadernos de trabajo, existe un empleo inadecuado de las situaciones experimentales para trabajar la probabilidad.

La mayoría de ellas se realizan con datos y provocan contradicciones al estimar la probabilidad de forma frecuencial.

- Las tareas analizadas no presentan a los estudiantes situaciones en las que la probabilidad de un determinado suceso deba ser estimada de forma subjetiva. Es posible que, para la mayoría de profesores, la estimación subjetiva no sea un método válido para trabajar con probabilidades.
- En las situaciones presentadas en los cuadernos de trabajo analizados, no se presta suficiente atención a la redacción de los enunciados. Existe un descuido al emplear los tiempos verbales adecuados, los cuantificadores precisos y los términos apropiados para referirse a los elementos de una situación de incertidumbre.
- Existe una fuerte presencia del sesgo de equiprobabilidad en las tareas presentadas, especialmente cuando se intenta presentar situaciones de la vida cotidiana que no poseen los rasgos de equiprobabilidad de los dados o ruletas.



CONSIDERACIONES FINALES

Con respecto al primer objetivo específico, a lo largo de esta investigación fue posible establecer una propuesta organizada y estructurada para el significado de referencia de los conceptos fundamentales de la Probabilidad.

Se espera que esta propuesta u otras similares permita que los investigadores y docentes empleen una terminología común para referirse a los elementos básicos de la probabilidad y que esta pueda ser empleada de forma generalizada en los libros de texto de manera que se reduzcan las confusiones y ambigüedades que, a menudo experimentan profesores y estudiantes al trabajar las ideas básicas relacionadas con las situaciones de incertidumbre y la probabilidad.

Con respecto al segundo objetivo específico, se realizó una revisión de los elementos de la Probabilidad presentes en el Currículo Nacional del Perú, así como su presencia en los desempeños de los Programas Curriculares de primaria y secundaria con el fin de establecer la relación de los mismos con las tareas presentadas en los cuadernos de trabajo del MINEDU, así como también con el significado de referencia propuesto.

Al respecto, se concluyó que la descripción de las competencias relacionadas con la probabilidad en el Currículo Nacional, así como los desempeños presentado en el Programa Curricular están presentados de forma muy general y no comprenden todos los aspectos considerados fundamentales para la educación estocástica a nivel mundial en la actualidad.

Con respecto al tercer objetivo específico, se seleccionó diversas tareas presentes en los cuadernos de trabajo, algunas porque presentaban conceptos importantes por primera vez y otras porque presentaban errores o imprecisiones resaltantes. Se elaboró las configuraciones epistémicas para las tareas más significativas y se realizó un análisis didáctico, emperando las herramientas del EOS, de las tareas seleccionadas.

Al realizar este análisis, fue posible identificar diversas formas en las que las actividades presentadas en estos libros de texto contribuyen a que las concepciones erradas y sesgos, que otros investigadores ya han identificado tanto en profesores como en estudiantes, continúen siendo reforzados y perpetuados en el tiempo.

El cumplimiento de los objetivos específicos propuestos permite afirmar que fue posible cumplir el objetivo general y responder la pregunta de investigación planteada de la siguiente forma:

Las tareas presentes en los cuadernos de trabajo propuestos por el MINDEU para la educación básica regular en el Perú presentan ciertos errores o imprecisiones con relación al significado de la Probabilidad y son insuficientes para el desarrollo del pensamiento estocástico. La forma como están diseñadas las tareas inducen al docente a tener una visión limitada de la probabilidad, así como también refuerzan el sesgo de equiprobabilidad.

Es por ello que esta investigación realiza las siguientes recomendaciones y propuestas de mejora para que los docentes de la educación básica sean capaces de desarrollar el pensamiento estocástico en los estudiantes a su cargo:

- Las tareas propuestas en los cuadernos del trabajo deben incluir la presentación de situaciones de la vida cotidiana en las que los estudiantes deban analizar situaciones de incertidumbre, determinar las posibilidades o resultados posibles y elegir un planteamiento adecuado para estimar la probabilidad de los sucesos involucrados, tal como sugiere Osorio (2013).
- Las actividades de formación de profesores en Probabilidad deben enfatizar las diferencias entre los diversos significados y métodos de cálculo o estimación de probabilidades con el fin de que los profesores tengan herramientas para decidir en qué casos tiene sentido obtener probabilidades de forma empírica y en qué casos, de forma teórica. La importancia de esta diferenciación ya fue notada previamente por Batanero et al. (2011) y Hannigan et al. (2013).
- La revisión de diversos libros de texto para el nivel primario y el nivel secundario evidenció que muchas de las ideas y la nomenclatura trabajadas hasta sexto grado de primaria son abandonadas al iniciar el nivel secundario. De hecho, los conceptos parecen estar más claros en el nivel primario, mientras que varias tareas del nivel secundario presentan inconsistencias importantes. Se sugiere que los programas curriculares de primaria y secundaria estén integrados y posean una visión y lenguaje comunes.

- La redacción de los enunciados de las tareas propuestas debe ser revisada con sumo cuidado teniendo en cuenta los elementos lingüísticos involucrados y los tiempos verbales empleados. Esta labor debe ser realizada por especialistas que dominen tanto el contenido matemático – estadístico como la estructura del lenguaje.
- El significado subjetivo de la probabilidad debe ser un elemento importante que forme parte de la formación de profesores y que debe ser incluido en los libros de texto escolares.
- Es importante establecer guías y criterios para la creación de situaciones – problema sobre probabilidad que involucren todo el significado de referencia establecido. Estos deben tener en cuenta elementos como el lenguaje y el contexto de las situaciones

Durante la elaboración del presente trabajo, surgieron las siguientes reflexiones que pueden servir como base para futuras investigaciones:

- La clasificación de situaciones de incertidumbre propuesta en este trabajo puede ser útil en la formación de profesores, ya que es más completa y pretende una clasificación más fina en contraposición a la postura tradicional. Ello podría ser corroborado por un estudio con profesores en el que se implemente secuencias didácticas que trabajen el significado propuesto.
- Se debe continuar reflexionado sobre la relación entre la clasificación de sucesos *siempre*, *a veces* y *nunca*, y *posible*, *imposible* y *seguro*. Según el análisis realizado, la primera clasificación hace referencia a la frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso, mientras que la segunda está relacionada con la pertenencia o no de un suceso elemental al espacio muestral.

Adicionalmente, se presenta las siguientes preguntas abiertas surgidas durante la elaboración de esta investigación:

- ¿Qué tan importantes son la conjugación y el tiempo de los verbos que se emplean al describir una situación de incertidumbre o al realizar una pregunta sobre probabilidad?

- ¿Es pertinente realizar tareas experimentales para trabajar situaciones de incertidumbre cuya naturaleza es equiprobable?
- ¿De qué forma se puede incorporar el significado subjetivo de la probabilidad en la educación básica?

REFERENCIAS

- Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.
- Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study, 14*. Springer Science & Business Media.
- Batanero, C., y Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3 (1), 3-13.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas do II Encontro de probabilidades e estatística na escola*, 7-21.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3).
- Batanero, C., Green, D. R., y Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.
- Bazán, J.L. y Aparicio, Ana (2008). Una revisión de la estadística y la probabilidad en la estructura curricular peruana. *ArlsTAS. Revista de los educadores del Colegio Bertolt Brecht*.
- Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. *In Probabilistic Thinking* (pp. 7-34). Springer, Dordrecht.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Vallecillos, A., y Estepa, A. (2017). Una década de investigaciones del grupo de estadística, probabilidad y combinatoria de la SEIEM. *Tarbiya, revista de Investigación e Innovación Educativa*, (38).

- Font, V., y Godino, J. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje*, 33 (1), 89-105.
- Gauvrit, N., y Morsanyi, K. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Advances in cognitive psychology*, 10 (4), 119.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.
- Godino, J. D. y Pino-Fan, L. R. (2014) Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Grimmett, G., y Stirzaker, D. (2001). *Probability and random processes*. Oxford university press.
- Hannigan, A., Gill, O., y Leavy, A. M. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teacher's conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427-449.
- Inzunza Cazares, S., y Guzmán Reyes, M. C. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática*, 23 (1), 63-95.
- Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge university press
- Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of statistics education*, 3 (1).
- López Noguero, F. (2009). El análisis de contenido como método de investigación.
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología*, 9, 123-146.
- Norma (2017). *Matemática 1*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C
- Norma (2017). *Matemática 2*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C

- Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto de bachillerato* (Disertación doctoral, Universidad de Granada).
- Osorio, A. R. (2013). Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior.
- Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 1 : cuaderno de trabajo para primer grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 2 : cuaderno de trabajo para segundo grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 3 : cuaderno de trabajo para tercer grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 4 : cuaderno de trabajo para cuarto grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 5 : cuaderno de trabajo para quinto grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Perú, Ministerio de Educación (2017). *Matemática 6 : cuaderno de trabajo para sexto grado de Educación Primaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe>
- Rodríguez, M. (2004). Dificultades en el significado y la comprensión de conceptos estadísticos elementales y de probabilidad. *Revista premisa de la SOAREM* (Sociedad Argentina de Educación Matemática), 6(22), 13-22.

- Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10 (1), 7-25.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. *Exploring probability in school* (345-366). Springer, Boston, MA.
- Taylor, S. J., Bogdan, R., y De Vault, M. (2015). *Introduction to qualitative research methods: A guidebook and resource*. John Wiley & Sons.
- Vásquez Ortiz, C., y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (7).
- Vásquez Ortiz, C., y Alsina, Á. (2017). Una aproximación ontosemiótica al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad.

