TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES: TRADUCCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS DEL LENGUAJE VERBAL AL MATEMÁTICO CON ESTUDIANTES DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

ASESOR DE TESIS:

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

MIEMBROS DEL JURADO:

MG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DRA. PATRICIA CAMARENA GALLARDO

LIMA-PERÚ

2012

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Dedicatoria

A Dios.
Por permitirme llegar a este momento tan especial en mi vida. Por los triunfos y los momentos difíciles que me han enseñado a valorarte cada día más.

A mi querido esposo, Miguel.
Por ese optimismo que siempre me impulsó a seguir adelante y por los días que hizo el papel de padre y madre

A mis hijos.
Por todas las veces que no pudieron tener una madre a tiempo completo.

A Arturo Neira, mi padre.
A quien le debo todo en la vida, le agradezco el cariño, la comprensión, la paciencia y el apoyo que me brindó para culminar mi carrera profesional.

A María Fernández, mi madre.
Por haberme educado y soportar mis errores. Gracias a tus consejos, por el amor que siempre me has brindado, por cultivar e inculcar ese sabio don de la responsabilidad.

A mis Hermanas.
Porque siempre he contado con ellas para todo, gracias a la confianza que siempre nos hemos tenido; por el apoyo y amistad.

A Reina, mi suegra.
Por todo su apoyo y cuidados. Muchas gracias.

Agradecimientos:

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, mi asesora de tesis, por su valiosa y permanente orientación, factor fundamental en la realización de esta investigación.

A la Dra. Patricia Camarena Gallardo, por sus aportes y su tiempo, que hicieron posible el desarrollo de esta investigación.

A la Profesora Cecilia Vidal, por darme la facilidad para realizar dicha investigación en su clase de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

A los profesores que contribuyeron en mi formación académica durante todos estos años en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

RESUMEN

Esta investigación surge a partir de algunas observaciones que se realizaron a los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas al presentar dificultades para traducir, del lenguaje verbal al matemático y viceversa problemas contextualizados en el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. La investigación tiene por objetivo analizar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir, del lenguaje verbal al matemático, problemas contextualizados presentes en el libro texto que utilizan, cuando estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Además de diseñar una propuesta que permita facilitar la traducción, de problemas contextualizados, del lenguaje verbal al matemático y viceversa al estudiar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. La investigación se realizará con alumnos del primer año de Ciencias administrativa. Este tema es relevante en el área de Educación Matemática visto que estudios como los de Rubio (1994), Panizza y Drouhard (2003), Olazábal (2005) y Moreno (2011) señalan que la etapa de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático es fundamental para la modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Así, pretendemos contestar la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera la categorización según la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), permite detectar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir, del lenguaje verbal al matemático y viceversa, problemas contextualizados cuando estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables? Para ello, utilizaremos como referencial teórico la Matemática en el Contexto de las Ciencias de Camarena (1999) y a la categorización de problemas contextualizados de acuerdo con esta teoría y como metodología recurriremos a la metodología propia de la Fase Didáctica. Además, pretendemos elaborar una propuesta didáctica en base a la Matemática en el Contexto de las Ciencias que facilite a los alumnos modelar dichos problemas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Finalmente, se mostrarán algunas conclusiones, contribuciones y recomendaciones

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes 9

1.2 Problemática 15

Pregunta y objetivos 16

CAPÍTULO 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Ecuaciones lineales, soluciones 18
2. Ecuaciones lineales con dos incógnitas 21
3. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
   Operaciones elementales 26
4. Sistemas en forma triangular y escalonada 30
5. Algoritmo de reducción 32
6. Matrices 34
7. Operaciones por filas. Operaciones elementales por filas 35
8. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 36

CAPÍTULO 3: TEORÍA DE LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

3.1 La Matemática en el Contexto de las Ciencias 40

3.2 Metodología de la Investigación 52

CAPÍTULO 4: ETAPA CENTRAL: DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TEXTO

4.1 Descripción y Análisis del texto 56

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 5: DISEÑO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA CATEGORIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS SEGÚN LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

5.1 Elaboración de la Propuesta ……………………………………….. 68

5.2 Puesta a Prueba de la Propuesta …………………………………. 73

5.3 Resultados de la puesta a prueba de la propuesta …………….. 74

5.4 Análisis ……………………………………………………………….. 76

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

6.1 Conclusiones ………………………………………………………. 89

6.2 Contribuciones de la investigación ……………..………………… 90

6.3 Recomendación ………………………………………………….. 92

REFERENCIAS ……………………. ……………………………………. 93

APÉNDICE ………………………………………………………………… 95

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ÍNDICE DE TABLAS, FIGURAS y CUADROS

Tabla I. Ejemplos de modelos matemáticos utilizados en otras Ciencias ….15

Figura 1. Representación gráfica de $2x + y = 4$ ……………………………...22

Figura 2a. Sistema de ecuaciones con una única solución ………………….. 23

Figura 2b. Sistema de ecuaciones sin solución ……………………………….. 24

Figura 2c. Sistema de ecuaciones con infinitas soluciones ………………….. 24

Figura 3. Clasificación de un Sistema de ecuaciones lineales ……………….33

Cuadro 1. Etapas de la Fase Didáctica …………………………………………47

Cuadro 2. Categorías de los problemas contextualizados ……………………48

Cuadro 3. Registros que se utilizará en esta investigación ……..……………51

Cuadro 4. Etapas de la Metodología DIPCING …………………………………52

Cuadro 5. Problema ejemplo 1 ………………………………………………….. 58

Cuadro 6. Problema ejemplo 2 ………………………………………………….. 59

Cuadro 7. Problemas del libro texto de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) ………………………………………………………60

Cuadro 8. Problema 7 de la Unidad N° 5 ………………………………………63

Cuadro 9. Problema 1 de la Unidad N°7 ………………………………………..64

Figura 4. Función Costo ………………………………………………………….65

Cuadro 10. Problema 3 de la Unidad N°7 ………………………………………66

Figura 5. Gráfico de las ecuaciones Costo total e Ingreso ………………….. 69

Figura 6. Gráficos de las ecuaciones Costo total, Ingreso y Utilidad ……….. 70

Figura 7. Gráfico de la ecuación Costo total …………………………………..70

Figura 8. Gráfico de la ecuación Costo total …………………………………..71

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Figura 9. Gráficos de las ecuaciones Costo total, Ingreso y Utilidad ……….. 72

Figura 10. Gráficos de las ecuaciones Costo total e Ingreso …………………73

Tabla II. Resultados de las traducciones literales y con evocación de los paquetes 1, 2 y 3 ……………………………………………………….....75

Cuadro 11. Categorización de los problemas contextualizados …………….. 76

Figura 11. Desarrollo de Katherine ………………………………………………78

Figura 12. Desarrollo de Bruno ……………………………………………….79

Figura 13. Desarrollo de Geraldo ………………………………………………..80

Figura 14. Desarrollo de Erick ……………………………………..………..81

Figura 15. Desarrollo de Billy ………..…………..………………………………82

Figura 16. Desarrollo de Tiffany …………………………………………………84

Figura 17. Desarrollo de Geraldo ………………………………………………...85

Figura 18. Desarrollo de Claudia …………………………………………………86

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 ANTECEDENTES:

A partir de nuestra experiencia como docentes hemos observado que los alumnos del curso de Matemáticas Básicas del primer año de Administración de una universidad privada de Lima, muestran problemas tanto en la modelación de sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos con dos variables como en el análisis de sus soluciones; es decir, cuando se les presenta un problema matemático contextualizado para que elaboren el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo asociado al problema, los alumnos no consiguen llegar a sus soluciones y menos aún analizarlas.

En vista de esta problemática es que buscamos entender dichas dificultades y para ello revisamos algunas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que tratan esta misma problemática o problemáticas afines.

Es así que Panizza y Drouhard (2003), explicitan que los problemas con respecto a Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas, no radican solamente en conocer bien el concepto de solución o el concepto de intersección de rectas sino que también se refiere al conocimiento del tratamiento específico de las escrituras algebraicas, de los gráficos cartesianos, así como de la coordinación entre ambos registros. Asimismo, los autores afirman que la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables en el registro de las escrituras algebraicas corresponde a una intersección de rectas en el registro de los gráficos cartesianos. Se debe aclarar que la resolución del sistema por transformación en un sistema equivalente es la intersección y no las rectas que representan las ecuaciones originales; esto suele plantear problemas serios en la enseñanza.

Un análisis particularmente señalado se inscribe en la relación entre las nociones de denotación y sentido (Drouhard, recuperado de Frege, 1972). En tal planteo, por ejemplo, los enunciados $3x - 5 = 2x - 6$ y $x = -1$ denotan la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

misma relación, en el sentido de equivalencia, la que asigna a la variable el valor verdadero en -1 y falso en cualquier otro número real. Matemáticamente se trata de ecuaciones equivalentes. Es el sentido el que cambia, sin embargo ambos casos denotan el mismo conjunto solución pero lo expresan de manera diferente. Al resolver ecuaciones los alumnos no tienen, en la mayoría de los casos, la noción de que algunas operaciones algebraicas que realizan conservan la notación y otras no. En este caso particular delimitaríamos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes en tanto ambos denoten el mismo conjunto solución aunque lo expresen de manera diferente.

De acuerdo a ello, Panizza y Drouhard (2003) nos advierten acerca de este problema que se presenta cuando las operaciones realizadas no conservan la denotación y para el cual se requiere un análisis que tenga en cuenta condiciones sobre dichas operaciones a fin de dar la solución del problema original. En particular, el significado de la "verificación" de una solución es diferente en uno u otro caso: si las ecuaciones que se obtienen en los sucesivos pasos son equivalentes, la verificación es una manera de controlar que uno hizo bien las cuentas; en cambio, si las ecuaciones no son equivalentes la verificación constituye una parte del proceso de resolución.

Por otro lado, Ochoviet (2009), en su investigación busca proponer el diseño de una secuencia de enseñanza y actividades dirigidas a explorar y aprender el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. De estas investigaciones utiliza algunos de los resultados tales como: resultados referidos a aportes teóricos para interpretar el desarrollo del pensamiento algebraico, resultados referidos a las dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio del álgebra y resultados referidos a puestas en escena de diseño de enseñanza o a la actividad del profesor. Algunas de las conclusiones de esta investigación son, en primer lugar, que se debe enseñar ecuación lineal observando el número infinito de soluciones que tiene y luego estudiar los sistemas de ecuaciones 2x2; en segundo lugar, se debe utilizar el registro gráfico como una representación complementaria de los objetos algebraicos, registro considerado por Duval (2006). Luego de estas consideraciones, de acuerdo con la autora, se puede mostrar otra visión complementaria de un

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

sistema de ecuaciones presentándolos como modelos de situaciones problemáticas que permitan llegar a una respuesta de un problema.

Además, Camarena (1999), preocupada por el bajo nivel en el aprendizaje de las asignaturas de matemáticas en áreas de ingeniería y la falta de motivación por parte de los alumnos al no entender el por qué se estudia las matemáticas, realiza investigaciones que dan alternativas de solución a esta problemática planteando la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) en la cual se reflexiona acerca de la vinculación que debe de existir entre la matemática y las ciencias que la requieren.

Uno de los principios de esta teoría es que el estudiante debe estar capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se verán favorecidas. Las propuestas en las que se basa la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ayuda a que el estudiante construya su propio conocimiento con amarres firmes y duraderos y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades del pensamiento mediante el proceso de resolver eventos (problemas y proyectos) vinculados con los intereses del alumno.

La Teoría de la MCC, según Camarena (1999), contempla cinco fases:

- Fase curricular, en esta fase se considera que el currículo de matemáticas debe ser objetivo, es decir, fundado en bases objetivas y debe vincular la matemáticas con los demás cursos del estudiante.
- Fase didáctica, en esta fase se contempla un proceso metodológico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de problemas contextualizados. Con ello se pretende fomentar el desarrollo de las habilidades para la transferencia del conocimiento. Esta fase posee varias etapas:
    1. Planteamiento del problema de las disciplinas en el contexto o vida cotidiana (problemas reales).
    2. Determinación de las variables y de las constantes del problema.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del mismo.
4. Determinación del modelo matemático.
5. Solución matemática del problema.
6. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.
7. Interpretación de la solución en términos del problema y del área de las disciplinas del contexto.

- Fase epistemológica, en esta fase se detectan los obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1983) que serán usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden enfrentar los obstáculos.

- Fase de formación de profesores, en esta fase se considera que los profesores que van a dictar cursos de matemáticas deben tener conocimiento de los contenidos que van a enseñar y de su vinculación con otras disciplinas, deben tener conocimiento sobre la tecnología electrónica para apoyar el aprendizaje del estudiante y debe tener conocimiento acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
- Fase cognitiva, en esta fase el alumno debe transitar entre los registros algebraicos y registros gráficos para construir y asirse del conocimiento.

Al estudiar cada una de las fases, Camarena (1999) en la fase de formación de profesores detectó deficiencias en los profesores que dictan los cursos de matemáticas, y que su formación no es de matemáticos, constituyendo una de las grandes causas de las deficiencias en los estudiantes en cursos de matemáticas. A partir de ello establece que los docentes de matemáticas en el nivel universitario deben tener: conocimiento sobre los estudios de ingeniería, deben conocer los contenidos a enseñar, deben saber utilizar la tecnología electrónica para apoyar el aprendizaje del estudiante y conocer acerca del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

También, Camarena (1999), resalta que una de las etapas centrales de la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto es la elaboración del modelo matemático y define el término "*modelación matemática*" como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.

Para la construcción del modelo matemático se desarrollan habilidades del pensamiento como: tener conocimiento de una matemática conceptual, el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático, utilizar las heurísticas como estrategias para abordar un problema, transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático, idealizar el problema,

Algunas conclusiones a las que llega la autora son que cuando se utiliza esta teoría es el alumno quien tiende a hacerse responsable de su propio aprendizaje generándose habilidades para la autonomía en el aprendizaje, el proceso del aprendizaje y la enseñanza se centra en el estudiante, el profesor debe realizar investigación educativa que le sirva en su actividad laboral para elevar la calidad de educación porque la docencia y la investigación van de la mano, en las asignaturas de matemáticas se deben plantear problemas enfocados en la carrera que siguen para que vean la aplicación de la misma en su contexto.

Olazábal (2005), en su investigación realizada con alumnos del nivel escolar teniendo como marco teórico a la Matemática en el Contexto de las Ciencias, comparte la apreciación de Mochón (1997, p.42), que para el alumno, el conflicto determinante consiste en hallar el modelo matemático que le permita plantear el problema, entendiendo por modelo matemático la representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas. Es por ello que dentro de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, el modelo matemático constituye la etapa central y éste se refiere a encontrar la representación matemática del problema.

A su vez, la autora observó que el entendimiento del enunciado resulta definitivo para establecer un modelo matemático que conduzca a la solución, y en la mayoría de las ocasiones los profesores deben empezar por explicar lo que se les pide. Esto se debe a que la información y las relaciones en el problema se ofrecen en un sistema semiótico diferente a aquél en el que el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

problema debe resolverse. La autora concluye que el éxito en la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico y por ende, en el planteamiento y resolución del problema, depende en gran medida del conocimiento de los conceptos y modelos que menciona el enunciado y del grado de familiaridad que el alumno tenga con ellos. Además algunos problemas pueden necesitar de una representación gráfica para visualizar las relaciones pertinentes, en donde éstas son fundamentales en el establecimiento del modelo matemático, por lo que en estos casos, esta traducción adicional, la gráfica, aparece como un eslabón entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

En la misma línea de pensamiento, Rubio (1994) estudia el fenómeno del planteamiento y resolución de problemas indica que si modelamos situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo, se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales analice y describa los siguientes elementos matemáticos: la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. La autora afirma que, en el proceso de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, lo cual nos permite elaborar las ecuaciones lineales y plantear así el sistema de ecuaciones lineales no homogéneas. Pero para la autora este proceso no es fácil, pues los alumnos muestran dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones y además los trabajan con problemas contextualizados en la realidad. Por lo tanto, para poder modelar problemas contextualizados mediante Sistemas de Ecuaciones lineales no homogéneos es muy importante la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, ya que, según Camarena (1999), constituye una de las etapas primordiales en este proceso y así poder establecer el modelo matemático.

Los estudios presentados muestran la importancia de investigar la modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, ya que la modelación matemática se ve inmersa en las distintas áreas como medicina, biología, estadística, psicología, etc. A continuación presentaremos algunos modelos utilizados por estas ciencias:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Tabla I. Ejemplos de modelos matemáticos utilizados en otras ciencias.

Para las ciencias de Administración y Economía:

$F = P\,(1+i)^t$, que es utilizado para calcular el interés compuesto y donde:

F: monto acumulado

P: capital invertido

i : interés

t : tiempo

Para la Estadística:

$P = P_0 e^{kt}$, que es utilizado para ver el crecimiento o decrecimiento exponencial de bacterias y/o población y donde:

P_0: población inicial

k: tasa de variación de crecimiento o decrecimiento

t: tiempo

Para la Psicología:

$P(t) = M - Ce^{-kt},\ donde\ k, C, M > 0$, este modelo es utilizado para medir el aprendizaje o desempeño de una persona que aprende una habilidad, donde:

M: valor máximo de desempeño

C : constante positiva

k : tasa de aprendizaje

t : tiempo de entrenamiento

Fuente: Google

Después de todo lo expuesto podemos pensar que para que el alumno pueda llegar al modelo matemático que representa al problema debe llevar a cabo la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

1.2 PROBLEMÁTICA:

Teniendo en cuenta la investigación de Olazábal (2005), se encuentra que en el tema escolar sobre el planteamiento y resolución de problemas matemáticos se ha abordado desde varias perspectivas, pero ahora se realizará este estudio bajo el enfoque de la traducción con alumnos del nivel superior. Esta investigación tiene una necesidad didáctica, pues surge como respuesta a la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

necesidad de dotar de más y mejores herramientas a los alumnos para modelar problemas contextualizados en el contexto de las ciencias, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Se plantea que el alumno se encontrará motivado hacia la matemática porque observaría la utilidad de ésta en su vida ordinaria, tal como lo establece la *Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias*.

Se hace necesario también el análisis cognitivo de los alumnos, la categorización de problemas contextualizados y su estudio pueden dar información acerca del "cómo aprende" el alumno en el proceso de traducción, previo al modelo matemático.

Cabe señalar que los alumnos que ingresan al nivel superior tienen experiencia en desarrollar algunos modelos matemáticos, ya que en la educación secundaria en el Perú se trabajan algunos modelos, como las curvas de crecimiento y decrecimiento. (DCN 2009 p.339)

Una de las razones que justifica esta investigación es que en el Perú no existe una investigación en Enseñanza de las Matemáticas sobre el tema Sistema de Ecuaciones lineales con dos variables utilizando como marco teórico algunos aspectos de la MCC, específicamente la Fase Didáctica que será explicada en el capítulo 3.

1.2.1 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y viendo la importancia que tiene la etapa de la traducción del lenguaje verbal al matemático en el enfoque de la MCC, formulamos la siguiente pregunta.

¿De qué manera la categorización según la MCC, permite detectar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir, del lenguaje verbal al matemático y viceversa, problemas contextualizados cuando estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para poder responder la pregunta anteriormente planteada nos trazaremos los siguientes objetivos:

OBJETIVOS GENERALES:

- Analizar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir del lenguaje verbal al matemático problemas contextualizados presentes en el libro texto, cuando se estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
- Diseñar una propuesta que permita facilitar la traducción de problemas contextualizados, del lenguaje verbal al matemático y viceversa, al estudiar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

✓ Categorizar los problemas contextualizados presentes en el libro texto, referente a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, usando la primera y segunda categoría de la MCC, para después categorizar los problemas del libro texto.

✓ Identificar las posibles dificultades, que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir, del lenguaje verbal al matemático, problemas contextualizados cuando se estudia sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

✓ Diseñar una propuesta didáctica en base a la categorización de la MCC que induzcan a los estudiantes a traducir problemas contextualizados, del lenguaje verbal al matemático y viceversa, cuando estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Para alcanzar los objetivos tratados, comenzaremos por hacer un estudio del objeto matemático, Sistemas de ecuaciones lineales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El presente capítulo será abordado en base a Lipschutz, S. (1992), en el que presentamos Sistemas de Ecuaciones Lineales.

1. ECUACIONES LINEALES, SOLUCIONES.

Por una *ecuación lineal* con incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ entendemos una ecuación que puede escribirse en la forma convencional:

$$a_1x_1 + a_2x_{2+}a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b$ son constantes. La constante a_k se denomina coeficiente de x_k y b se denomina la constante de la ecuación.

Una *solución* de la ecuación lineal anterior es un conjunto de valores de las incógnitas, digamos $x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3, \dots, x_n = k_n$, o simplemente una n-pla $u = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ de constante con la propiedad de que es cierta la siguiente expresión (obtenida sustituyendo cada x_i por k_i en la ecuación):

$$a_1k_1 + a_2k_{2+}a_3k_3 + \cdots + a_nk_n = b$$

Se dice entonces que este conjunto de valores *satisface* la ecuación.

El conjunto de todas las soluciones se llama *conjunto solución, solución general* o simplemente, la *solución de la ecuación.*

1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita.

Teorema 1: Consideremos la ecuación lineal $ax = b$

i. Si $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$ es solución única de $ax = b$
ii. Si $a = 0$, $b \neq 0$, $ax = b$ no tiene solución.
iii. Si $a = 0$ y $b = 0$, todo escalar k es solución de $ax = b$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Ejemplo 1:

a) Resolver $4x - 1 = x + 6$

Solución:

$$4x - 1 = x + 6$$
$$4x - x = 6 + 1$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3}$$

La solución es única por Teorema 1.i

b) Resolver $2x - 5 - x = x + 3$

Solución:

$$2x - 5 - x = x + 3$$
$$2x - x - x = 3 + 5$$
$$0x = 8$$

La ecuación no tiene solución por l Teorema 1.ii

c) Resolver $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Solución:

$$4 + x - 3 = 2x + 1 - x$$
$$4 - 3 - 1 = 2x - x - x$$
$$0 = 0x$$

Todo escalar $k \in \Re$ es una solución de la ecuación.

1.2 Ecuaciones lineales degeneradas

Una ecuación lineal se dice *degenerada* si tiene la forma

$$ox_1 + ox_2 + ... + ox_n = b$$

Esto es, si cada coeficiente es igual a cero. La solución de tal ecuación se halla como sigue:

Teorema 2. Consideremos la ecuación lineal degenerada $ox_1 + ox_2 + ... + ox_n = b$

i. Si $b \neq 0$, la ecuación no tiene solución.

ii. Si $b = 0$, todo vector $u = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ es una solución.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Ejemplo 2:

Describir la solución de $4y - x - 3y + 3 = 2 + x - 2x + y + 1$

Solución

Reescribiendo el sistema obtenemos: $y - x + 3 = y - x + 3$ o $0x + 0y = 0$

La ecuación es degenerada con constante nula; por tanto, todo vector $u = (a,b) \in \Re^2$ es una solución.

1.3 Ecuaciones lineales no degeneradas. Primera incógnita.

Esta sub-sección trata la solución de una sola ecuación lineal no degenerada con una o más incógnitas, digamos:

$$a_1x_1 + a_2x_{2+}a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Por la primera incógnita en tal ecuación entendemos la primera con coeficiente no nulo. Su posición p en la ecuación es entonces el menor valor entero de j para el cual $a_j \neq 0$. En otras palabras, x_p es la primera incógnita si $a_j = 0$ para $j < p$ pero $a_p \neq 0$

Teorema 3: Consideremos una ecuación lineal no degenerada $a_1x_1 + a_2x_{2+}a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ con primera incógnita x_p

i. Cualquier conjunto de valores de las incógnitas x_j con $j \neq p$ dará una única solución de la ecuación. (Las incógnitas x_j se llaman *variables libres* porque se les puede asignar cualquier valor)
ii. Toda solución de la ecuación se obtiene de i

Ejemplo 3:

a) Hallar las tres soluciones particulares de la ecuación $2x - 4y + z = 8$

   Solución:

   Aquí x es la primera incógnita. De acuerdo con ello, asignamos valores cualesquiera a las variables libres y, z y entonces despejamos x para obtener una solución. Por ejemplo:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

1. Tomemos $y=1$ y $z=1$. La sustitución en la ecuación proporciona

   $$2x-4(1)+1=0 \quad \text{o} \quad 2x-4+1=0 \quad \text{o} \quad 2x=11 \quad \text{o} \quad x=\frac{11}{2}$$

   Entonces $u_{1=}(\frac{11}{2},1,1)$ es una solución.

2. Tomemos $y=1$, $z=0$. La solución proporciona $x=6$. Por consiguiente $u_{2=}(6,1,0)$ es una solución.

3. Tomemos $y=0, z=1$. La sustitución proporciona $x=\frac{7}{2}$. Por tanto, $u_{3=}(\frac{7}{2},0,1)$ es una solución.

b) La solución general de la ecuación anterior, $2x-4y+z=8$, se obtiene como sigue: En primer lugar, asignamos valores arbitrarios (*llamados parámetros*) a las variables libres, digamos $y=a, z=b$. A continuación sustituimos en la ecuación para obtener

$$2x-4(1)+1=0 \quad \text{o} \quad 2x-4+1=0 \quad \text{o} \quad 2x=11 \quad \text{o} \quad x=\frac{11}{2}$$

Entonces

$$x=4+2a-\frac{1}{2}b, y=a, z=b \qquad \text{o} \qquad u=(4+2a-\frac{1}{2}b,a,b)$$

Es la solución general.

2. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Esta sección considera el caso especial de las ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y, esto es, ecuaciones que pueden escribirse en la forma convencional $ax+by=c$, donde a, b y c son números reales. (Supondremos también que la ecuación es no degenerada, esto es, que a y b no son ambos nulos). Cada solución de la ecuación es un par de números reales $u=(k_1,k_2)$ que puede hallarse signando un valor arbitrario a x y despejando y, o viceversa.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Toda solución $u = (k_1, k_2)$ de la ecuación anterior determina un punto en el plano cartesiano $\Re^2$. Como a y b no son ambos nulos, todas las soluciones tales corresponden precisamente a los puntos de una línea recta (de ahí el nombre de "*ecuación lineal*"). Esta línea se denomina el *gráfico* de la ecuación.

Ejemplo 4:

Consideremos la ecuación lineal $2x + y = 4$. Determinar su conjunto solución.

Solución:

Encontramos tres soluciones de la ecuación de la siguiente manera:

Primero escogemos un valor arbitrario para cualquiera de las incógnitas, digamos $x = -2$. Sustituimos $x = -2$ en la ecuación y obtenemos

$$2(-2) + y = 4 \quad \text{o} \quad -4 + y = 4 \quad \text{o} \quad y = 8$$

Entonces $x = -2$, $y = 8$, o sea, el punto (-2,8) en $\Re^2$ es una solución. Ahora hallamos el corte con el eje y, esto es, sustituimos $x = 0$ en la ecuación para obtener $y = 4$. Por consiguiente, el punto (0,4) en l eje y es una solución. A continuación encontramos el corte con el eje x, esto es, sustituimos $y = 0$ en la ecuación para obtener $x = 2$. Por tanto (2,0) en el eje x es una solución.

Para dibujar el gráfico de la ecuación, primero dibujamos las tres soluciones (-2,8), (0,4) y (2,0) en el plano $\Re^2$ como se muestra en la figura 1. Después trazamos la línea L determinada por dos de las soluciones y constatamos que la tercera yace en L también.

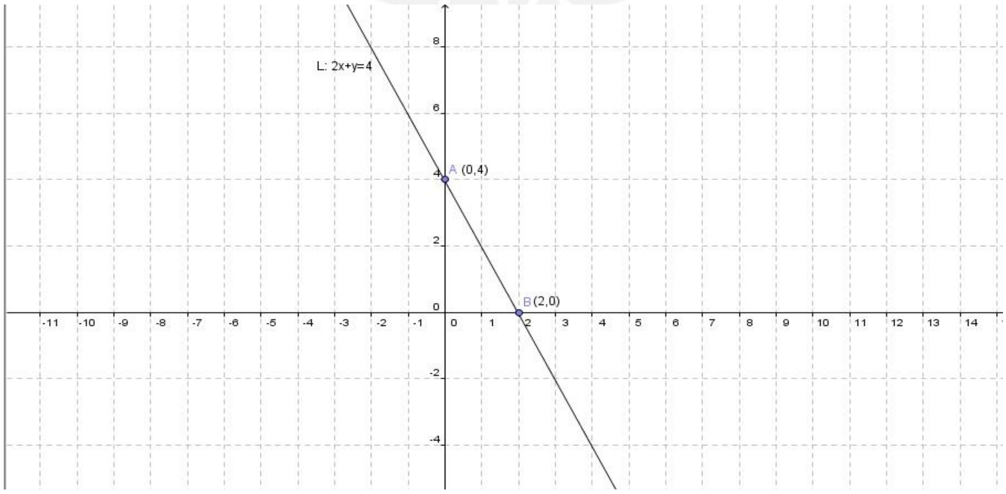


Figura 1. Representación gráfica de $2x + y = 4$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.1 Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Esta sub-sección considera un sistema de dos ecuaciones lineales (no degeneradas) con las dos incógnitas x e y:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

(Por tanto a_1 y b_1 no son simultáneamente nulos, ni tampoco lo son a_2 y b_2). Este sistema simple se trata por separado porque tiene una interpretación geométrica, y porque sus propiedades motivan el caso general.

Un par de números reales $u = (k_1, k_2)$ que satisface ambas ecuaciones se llama una solución simultánea de las ecuaciones dadas, o una solución del sistema de ecuaciones. Existen tres casos, que pueden describirse geométricamente.

i. El sistema tiene exactamente una solución. Aquí los gráficos de las ecuaciones lineales se cortan en un punto, como se muestra en la sgte. figura

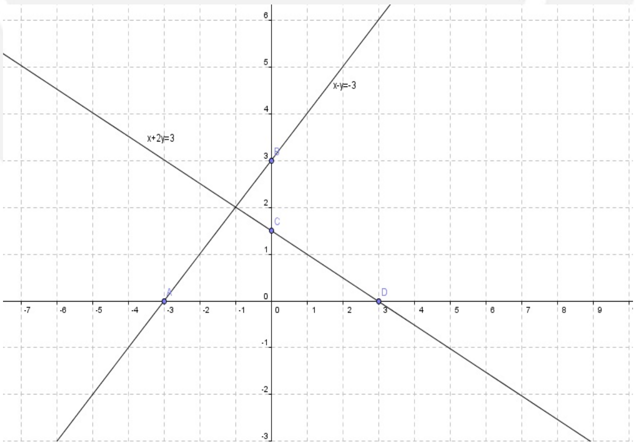


Figura 2.a: Sistema de ecuaciones con una única solución.

ii. El sistema no tiene soluciones. Aquí los gráficos de las ecuaciones lineales son paralelos, como se muestra en la sgte. figura

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

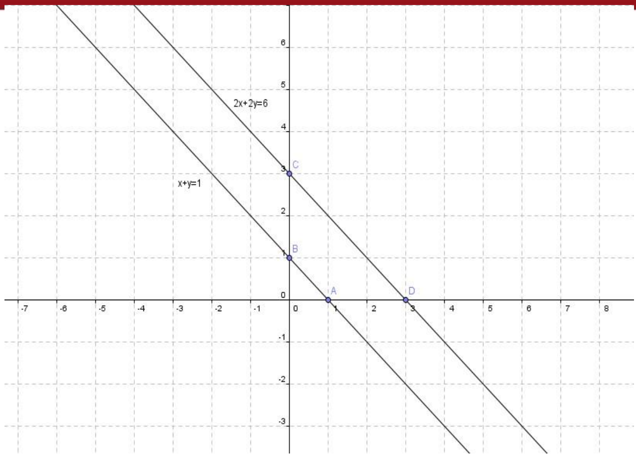


Figura 2.b: Sistema de ecuaciones sin solución

iii. El sistema tiene un número infinito de soluciones. Aquí los gráficos de las ecuaciones lineales coinciden, como se muestra en la sgte. figura

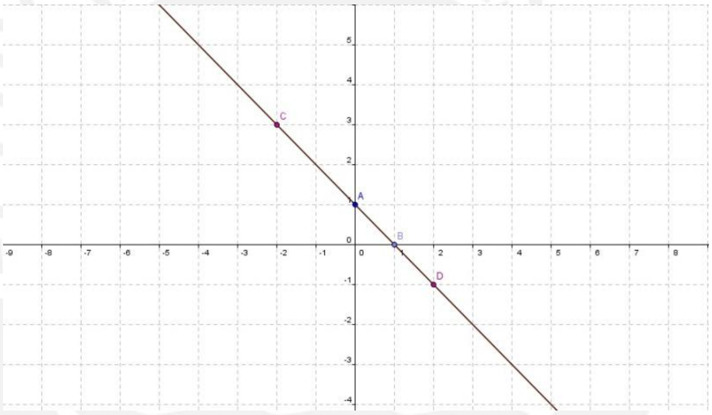


Figura 2.c: Sistema de ecuaciones con infinitas soluciones

Los casos ii y iii sólo pueden ocurrir cuando los coeficientes de x e y en las dos ecuaciones lineales son proporcionales, es decir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = o$$

En concreto, el caso ii y iii ocurre si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \text{o} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Respectivamente. A menos que se establezca o sobrentienda otra cosa, suponemos que se trata con el caso general i.

Nota. La expresión $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, que vale $a_1 b_2 - a_2 b_1$, se denomina *determinante* de orden dos.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

La solución del sistema

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Puede obtenerse por cualquiera de los siguientes métodos:

- Método de Igualación: Este método consiste en despejar en ambas ecuaciones una de las variables (por ejemplo x), para luego igualar los miembros y obtener una ecuación lineal con una variable.
- Método de Sustitución: Este método consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones y sustituir esta expresión en la otra ecuación, con lo cual obtendremos una ecuación lineal con una variable.
- Método de eliminación: Este método consiste en buscar eliminar una incógnita sumando ambas ecuaciones; esto se consigue multiplicando cada ecuación por un número real no nulo de tal manera que los coeficientes de una de las variables sean opuestos y al sumar las ecuaciones, éstas se anulen y se obtenga una ecuación lineal de una variable.

Ejemplo 5:

Determinar el conjunto solución del sgte. sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$$

Solución:

Desarrollaremos el sistema utilizando los tres métodos.

a. Método de igualación:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \ldots (\alpha) \\ 3x - 2y = -7 \ldots (\beta) \end{cases}$$

Despejamos x de (α): $x = \dfrac{8 - 5y}{2} \ldots.(1)$

Despejamos x de (β): $x = \dfrac{-7 + 2y}{3} \ldots.(2)$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Ahora igualamos los valores de x: $\frac{8-5y}{2}=\frac{-7+2y}{3}$, de donde despejando y obtenemos $y=2$, reemplazamos este valor en (1) y obtenemos $x=-1$.

Por lo tanto el conjunto solución es (-1,2)

b. Método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x+5y=8...(\alpha) \\ 3x-2y=-7...(\beta) \end{cases}$$

Despejamos de x de (α): $x=\frac{8-5y}{2}....(1)$

Reemplazamos este valor en (β):

$3(\frac{8-5y}{2})-2y=-7$, de donde $y=2$

Luego reemplazamos este valor en (1) y obtenemos $x=-1$

Por lo tanto el conjunto solución es (-1,2)

c. Método de eliminación:

$$\begin{cases} 2x+5y=8...(\alpha) \\ 3x-2y=-7...(\beta) \end{cases}$$

Elegimos eliminar x:

$$\begin{cases} 2x+5y=8..........por(-3) \\ 3x-2y=-7.......por(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x-15y=-24 \\ 6x-4y=-14 \end{cases}$$

$$-19y=-38$$

$$y=2$$

Reemplazando el valor de $y=2$, encontramos el valor de $x=-1$.

Por lo tanto el conjunto solución es (-1,2)

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. SISTEMAS EQUIVALENTES. OPERACIONES ELEMENTALES.

Esta sección considera un sistema de *m* ecuaciones lineales, digamos $L_1, L_2, L_3, ..., L_m$, con *n* incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ que puede ponerse en la *forma convencional*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

donde las a_{ij}, b_i son constantes.

Una solución (o solución particular) del sistema anterior es un conjunto de valores de las incógnitas, digamos $x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3, \ldots, x_n = k_n$, o una *n*-pla $u = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ de constantes, que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. El conjunto d todas las soluciones tales se denomina el *conjunto solución* o la *solución general* del sistema.

Ejemplo 6:

Considérese el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Determinar si $x_1 = -8, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 2$ es una solución del sistema.

Solución:

Sustituimos en cada ecuación para obtener

i. -8+2(4)-5(1)+4(2)=3 $\rightarrow$ 3=3
ii. 2(-8)+3(4)+1-2(2)= $\rightarrow$ -7=3

Con lo que se concluye que no es una solución del sistema porque no es solución de la segunda ecuación.

3.1 Sistemas equivalentes. Operaciones elementales.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución. Una forma de producir un sistema que sea equivalente a uno dado, con ecuaciones lineales $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m$, es efectuar una sucesión de las siguientes operaciones, llamadas *operaciones elementales:*

$[E_1]$ Intercambiar las ecuaciones i-ésima y j-ésima: $L_i \leftrightarrow L_j$

$[E_2]$ Multiplicar la ecuación i-ésima por un escalar no nulo k: $kL_i \rightarrow L_i, k \neq 0$

$[E_3]$ Sustituir la ecuación i-ésima por ella misma más k veces la j-ésima:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$(kL_j + L_i) \to L_i$.

En la práctica efectuamos $[E_2]$ y $[E_3]$ en un solo paso, o sea, la operación

$[E]$ Sustituir la ecuación i-ésima por k (no nulo) veces ella misma más k la j-ésima: $(kL_j + kL_i) \to L_i, k \neq 0$.

Lo anterior se enuncia formalmente en el siguiente teorema:

Teorema 4: Supongamos que un sistema de ecuaciones lineales $(\#)$ se obtiene de otro $(*)$ mediante una sucesión finita de operaciones elementales. Entonces consta de dos pasos $(\#)$ y $(*)$ tienen el mismo conjunto solución.

Nuestro método para resolver el sistema de ecuaciones lineales $(*)$ consta de dos pasos:

Paso 1. Usar las operaciones elementales anteriores para reducir el sistema a uno equivalente más simple (en forma triangular o escalonada)

Paso 2. Usar la sustitución hacia atrás para hallar la solución del sistema más simple.

Ejemplo 7:

Obtener la solución del sgte. Sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 4 \\ 5x + 11y - 21z = -22 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

<u>*Solución:*</u>

Sean:

$$L_1 : x + 2y - 4z = 4$$
$$L_2 : 5x + 11y - 21z = -22$$
$$L_3 : 3x - 2y + 3z = 11$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Paso 1*:* Eliminaremos x de la segunda ecuación mediante la operación $(-5L_1 + L_2) \to L_2$, esto es, multiplicando L_1 por -5 y sumándole a L_2; entonces eliminamos la x de la tercera ecuación efectuando la operación elemental $(-3L_1 + L_3) \to L_3$, es decir, multiplicando L_1 por -3 y sumándole a L_3:

$$\begin{array}{l} -5\times L_1: -5x - 10y + 20z = 20 \\ \underline{L_2: 5x + 11y - 21z = -22} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3\times L_1: -3x - 6y + 12z = 12 \\ \underline{L_3: 3x - 2y + 3z = 11} \end{array}$$

Nueva L_2: $\quad y - z = -2$ $\qquad$ Nueva L_3: $\quad -8y + 15z = 23$

Por tanto, el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{array}{r} x + 2y - 4z = -4 \\ y \ \ - z \ = \ -2 \\ -8y + 15z = 23 \end{array}$$

A continuación eliminamos y de la tercera ecuación aplicando $(8L_2 + L_3) \to L_3$, esto es, multiplicando L_2 por 8 y sumándola a L_3:

$$\begin{array}{r} 8 \times L_2: 8y - 8z = -16 \\ L_3: -8y + 15z = 23 \end{array}$$

Teniendo: nueva L_3: $7z = 7$

Por consiguiente, obtenemos el siguiente sistema triangular equivalente:

$$\begin{array}{r} x + 2y - 4z = -4 \\ y \ - \ z = \ -2 \\ 7z = 7 \end{array}$$

Paso 2: Ahora resolviendo el sistema triangular más simple mediante sustitución hacia atrás. La tercera ecuación da $z = 1$

Ahora sustituimos $z = 1$, en la segunda ecuación : $y \ - z \ = \ -2$ y obtenemos, $y = -1$.

Luego, reemplazamos estos dos valores en $x + 2y - 4z = -4$ y obtendremos: $x = 2$

Entonces $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ o en otras palabras, la terna (2,-1,1) es la única solución del sistema dado.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

4. SISTEMAS EN FORMA TRIANGULAR Y ESCALONADA

Esta sección considera do tipos simples de sistemas de ecuaciones lineales: Sistemas en forma triangular y el caso más general de sistemas en forma escalonada.

4.1 Forma triangular

Un sistema de ecuaciones lineales será en *forma triangular* si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y si x_k es la primera incógnita de la k - ésima ecuación. Por tanto, un sistema de ecuaciones lineales triangular tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1}x_n &= b_{n-1} \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Donde $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq o$

El sistema de ecuaciones lineales triangular anterior tiene una solución única, que puede obtenerse mediante el siguiente procedimiento, conocido como sustitución hacia atrás. Primero resolvemos la última ecuación para la última incógnita, x_n:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Segundo, sustituimos este valor de x_n en la penúltima ecuación y la resolvemos para la penúltima incógnita, x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\left(b_n / a_{nn}\right)}{a_{n-1,n-1}}$$

Tercero sustituimos estos valores de x_n y x_{n-1} en la antepenúltima ecuación y la resolvemos para la antepenúltima incógnita, x_{n-2}:

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \left(a_{n-2,n-1} / a_{n-1,n-1}\right)\left[b_{n-1} - a_{n-1,n}\left(b_n / a_{nn}\right)\right] - \left(a_{n-2,n} / a_{nn}\right)b_n}{a_{n-2,n-2}}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En general, determinamos x_k sustituyendo los valores previamente obtenidos de $x_n, x_{n-1}, ..., x_{k+1}$ en la k -ésima ecuación:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{m=k+1}^{n} a_{km} x_m}{a_{kk}}$$

El proceso finaliza cuando hemos determinado x_1. La solución es única puesto que, en cada paso del algoritmo, el valor de x_k está, por el Teorema 1.i, unívocamente determinado.

Ejemplo 8:

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y - z &= 11 \\ 5y + z &= 2 \\ 3z &= -9 \end{aligned}$$

Como el sistema está en forma triangular, puede resolverse mediante sustitución hacia atrás.

i. La última ecuación proporciona $z = -3$
ii. Sustituimos en la segunda ecuación para obtener $5y - 3 = 2$ ó $y = 1$
iii. Sustituimos $z = -3$ e $y = 1$ en la primera ecuación para obtener $x = 2$

Entonces el vector $u = (2,1,-3)$ es la solución del sistema.

4.2 Forma escalonada. Variables libres.

Un sistema de ecuaciones lineales está en *forma escalonada* si ninguna ecuación es degenerada y la primera incógnita de cada ecuación está a la derecha de la primera incógnita de la ecuación anterior. El paradigma es:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2,j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

Donde $1 < j_2 < ... < j_r$, donde $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, ..., a_{rj_r} \neq 0$. Nótese que $r \leq n$.

Una incógnita x_k en el sistema escalonado anterior se denomina variable libre si x_k no es la primera incógnita de ninguna ecuación, esto es, si

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$x_k \neq x_1, x_k \neq x_{j_2}, ..., x_k \neq x_{j_r}$. El siguiente teorema, describe el conjunto solución de un sistema escalonado.

Teorema 5. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales en forma escalonada. Existen dos casos:

i. $r = n$. Hay tantas ecuaciones como incógnitas. Entonces el sistema tiene solución única

ii. $r < n$. Hay menos ecuaciones que incógnitas. Entonces podemos asignar arbitrariamente valores a las $n - r$ variables libres y obtener una solución del sistema.

5. ALAGORITMO DE REDUCCIÓN

El siguiente algoritmo (a veces llamado reducción por filas) reduce el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

De m ecuaciones lineales con n incógnitas a forma escalonada (posiblemente triangulas), o bien determina que el sistema no tiene solución.

Paso 1. Intercambiar las ecuaciones de forma que x_1 aparezca con un coeficiente no nulo en la primera ecuación; es decir, conseguir que $a_{11} \neq 0$.

Paso 2. Utilizar a_{11} como pivote para eliminar x_1 de todas las ecuaciones excepto de la primera. Esto es, para cada $i > 1$, efectuar la operación

$$[E_3]: -({}^{a_{i1}}\!/\!{}_{a_{11}})L_1 + L_i \rightarrow L_i \qquad \text{o} \qquad [E]: -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i \rightarrow L_i$$

Paso 3. Examinar cada nueva ecuación L:

a) Si L tiene la forma $ox_1 + ox_2 + ... + ox_n = 0$ o si es un múltiplo de otra ecuación, suprimirla del sistema.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

b) Si L tiene la forma $ox_1 + ox_2 + ... + ox_n = b$ con $b \neq 0$, abandonar el algoritmo. El sistema no tiene solución.

Paso 4. Repetir los Pasos 1, 2 y 3 con el subsistema formado por todas las ecuaciones, excluyendo la primera.

Paso 5. Continuar el proceso anterior hasta que el sistema esté en forma escalonada, o hasta que se obtenga una ecuación degenerada en el Paso 3.b

Teorema 6: Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene:

i. Una única solución
ii. Ninguna solución
iii. Un número infinito de soluciones

NOTA: Se dice que un sistema es *compatible* si tiene una o más soluciones [casos i) o iii) en el teorema anterior], y se dice que es *incompatible* si no tiene solución [caso ii) en el teorema anterior]. La Figura 1 ilustra esta situación:

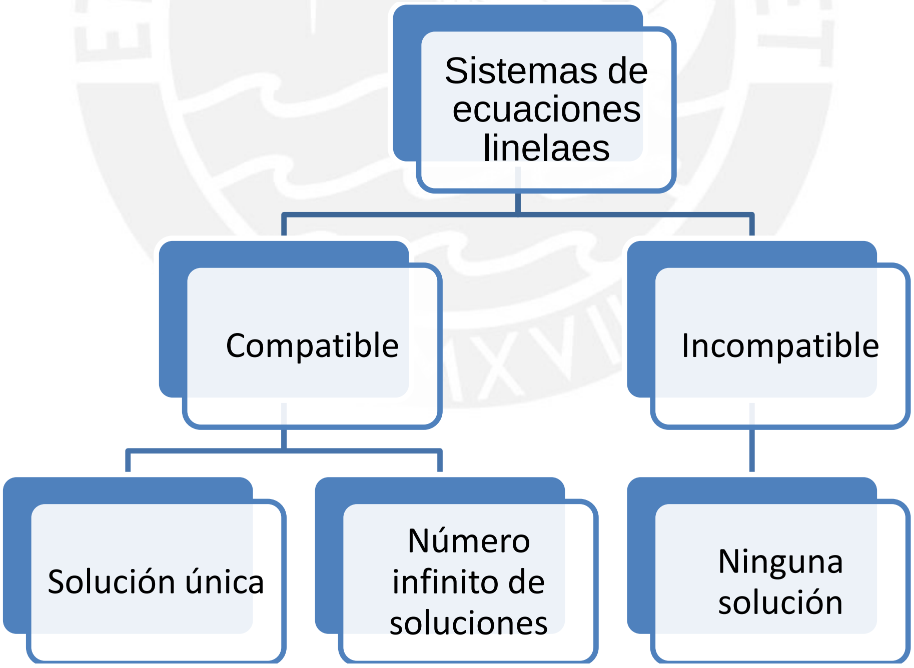


Figura 3. Clasificación de un Sistema de ecuaciones lineales

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

6. MATRICES

Sea *A* una tabla ordenada de números como sigue:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La tabla *A* se denomina matriz. Tal vez se denota por *A*= $(a_{ij}), i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n$ o simplemente *A*=(a_{ij}). Las m n-plas horizontales

$$(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\ (a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}),\ \ldots,\ (a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})$$

son las *filas* de la matriz, y las n m-plas verticales

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

con sus *columnas.* Nótese que el elemento a_{ij}, llamado la entrada ij o la *componente* ij, aparece en la fila i-ésima y en la columna j-ésima. Una matriz con m filas y n columnas se llama matriz m por n, o matriz $m\times n$; el par de números (m,n) se llama su *tamaño.*

Ejemplo 9:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces A es una matriz 2×3. Sus filas son $(1,-3,4)$ y $(0,5,-2)$; sus columnas son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

La primera entrada no nula en una fila R de una matriz A se llama la entrada *principal* no nula de R. Si R no tiene entrada principal no nula, es decir, si toda entrada en R es 0, R se denomina una *fila nula.* Si todas las filas de A son nulas, es decir, si toda entrada en A es 0, A se llama *matriz cero,* denotada pro 0.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

6.1 Matrices escalonadas

Una matriz A se denomina *matriz escalonada,* o se dice que está en *forma escalonada,* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i. Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
ii. Cada entrada principal no nula está a la derecha de la entrada principal no nula de la fila correspondiente.

Esto es, $A=(a_{ij})$ es una matriz escalonada si existen entradas distintas de cero $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ donde $1 < j_2 < \ldots < j_r$

Con la propiedad de que

$$a_{ij}=0 \quad \text{para} \quad i \le r, j < j_i, \quad \text{y para} \quad i > r$$

En este caso $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ son las entradas principales no nulas de A.

7. OPERACIONES POR FILAS. OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS

Se dice que una matriz A es equivalente por filas a otra B, escrito por $A \sim B$, si B puede obtenerse a partir de A mediante una sucesión finita de las siguientes operaciones, llamadas *operaciones elementales entre filas:*

$[E_1]$ Intercambiar las filas i-ésima y j-ésima: $R_i \to R_j$.

$[E_2]$ Multiplicar la fila i-ésima por un escalar no nulo $k: kR_i \to R_i, k \neq 0$

$[E_3]$ Sustituir la fila i-ésima por ella misma más k veces la j-ésima: $k: kR_j + R_i \to R_i$. En la práctica efectuamos $[E_2]$ y $[E_3]$ en un solo paso, es decir, la operación

$[E]$ Sustituir la fila i-ésima por k (no nulo) veces ella misma más la k' la j-ésima: $k' R_j + kR_i \to R_i, k \neq 0$

Sin duda, se puede reconocer la similitud entre las operaciones anteriores y las utilizadas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Algoritmo

Aquí $A=(a_{ij})$ es una matriz arbitraria.

Paso 1. Encontrar la primera columna con una no nula. Supongamos que es la columna j_1.

Paso 2. Intercambiar las filas de forma que aparezca una entrada no nula en la primera fila de la columna j_1, esto es, conseguir que $a_{1j_1} \neq 0$.

Paso 3. Utilizar a_{1j_1} como pivote para obtener cero bajo él; esto es, para cada $i>1$ efectuar la operación entre filas $-a_{ij_1}R_1 + a_{1j_1}R_i \to R_i$ o $-\left({}^{a_{i1}}\!/\!_{a_{11}}\right)R_1 + R_i \to R_i$

Paso 4. Repetir los Pasos 1, 2 y 3 con la sub-matriz formada por todas las filas, excluyendo la primera.

Paso 5. Continuar con el proceso anterior hasta que la matriz quede en forma escalonada.

Teorema 7:

Cualquier matriz A es equivalente por filas a una única matriz en forma canónica por filas (llamada la *forma canónica por filas* de A)

8. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

La matriz ampliada M del sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Obsérvese que cada fila corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, excepto la última, que corresponde a las constantes del sistema. La matriz de coeficientes A del sistema anterior es:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz de coeficientes A puede obtenerse de la ampliada M omitiendo su última columna.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada. Específicamente, reduciéndola a forma escalonada (lo que nos indica que el sistema es compatible) y luego a su forma canónica por filas. La justificación de este proceso proviene de los siguientes hechos:

i. Cualquier operación elemental entre filas en la matriz ampliada M del sistema es equivalente a efectuar la operación correspondiente en el sistema mismo.

ii. El sistema tiene solución si y sólo si la forma escalonada de la matriz ampliada no tiene una fila de la forma $(0,0,...,0,b)$ con $b \neq 0$

iii. En la forma canónica por filas de la matriz ampliada M (excluyendo filas nulas) el coeficiente de cada variable no libre es una entrada principal no nula igual a uno y es la única entrada distinta de cero en su columna; de aquí la solución en forma de variables libres se obtiene simplemente transfiriendo los términos de variable no libre al otro miembro.

Ejemplo 10:

a) El sistema

$$\begin{aligned} x+y-2z+4t&=5 \\ 2x+2y-3z+t&=3 \\ 3x+3y-4z-2t&=1 \end{aligned}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Se resuelve reduciendo su matriz ampliada M a forma escalonada y después a forma canónica por filas como sigue:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-2&4&5\\2&2&-3&1&3\\3&3&-4&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&4&5\\0&0&1&-7&-7\\0&0&2&-14&-14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-10&-9\\0&0&1&-7&-7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Así la solución general en forma de variables libres del sistema es como se indica a continuación:

$$x+y+0z-10t=-9$$
$$z-7t=-7$$

Despejando tenemos:

$$x=-9-y+10t$$

$$z=-7+7t$$

Aquí las variables libres son y y t, y las variables no libres son x y z.

b) El sistema

$$\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3+3x_4&=4\\2x_1+3x_2+3x_3-x_4&=3\\5x_1+7x_2+4x_3+x_4&=5\end{aligned}$$

Se resuelve como sigue. Para empezar, reducimos su matriz ampliada a forma escalonada:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&4\\2&3&3&-1&3\\5&7&4&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&3&4\\0&1&7&-7&-5\\0&2&14&-14&15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&3&4\\0&1&7&-7&-5\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

No hay necesidad de continuar para hallar la forma canónica por filas de la matriz, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema no tiene solución. Específicamente, la tercera fila en la matriz escalonada corresponde a la ecuación degenerada

$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-5$$

que no tiene solución.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

c) El sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ 2x+5y-z&=-4\\ 3x-2y-z&=5 \end{aligned}$$

Se resuelve reduciendo su matriz ampliada a forma escalonada y luego a forma canónica por fila como sigue:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&5&-1&-4\\3&-2&-1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-3&-10\\0&-8&-4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-3&-10\\0&0&-28&-84\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-3&-10\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

De este modo, el sistema tiene la solución única $x=2, y=-1, z=3$ o $u=(2,-1,3)$.

Nótese que la forma escalonada de M ya indicaba que la solución era única, puesto que correspondía a un sistema triangular.

Después de haber presentado al objeto matemático exponemos los aspectos teórico y metodológico de la investigación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS Y SU METODOLOGÍA

La presente investigación está enmarcada en la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) desarrollada por Camarena (1999) que utiliza para analizar algunos conflictos cognitivos de los estudiantes la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (2006). Además de la teoría presentamos la metodología propia de la MCC.

TEORÍA DE LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

Para entender la Teoría, es necesario definir algunos términos desde la teoría MCC:

1. **Lenguaje verbal:** Entendiéndose por lenguaje verbal (registro verbal) a aquel en el cual está formulado el problema dentro de la disciplina de que se trate o de actividades de la vida cotidiana.
2. **Lenguaje Matemático**: Llamamos así a los registros algebraico y gráfico, en la presente investigación.
3. **Matemática contextualizada:** Son los conocimientos matemáticos vinculados a las disciplinas de la carrera de estudio del alumno o problemáticas de la sociedad.
4. **Saber de aplicación**: Un contenido matemático que se va a enseñar en ingeniería sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para su aplicación, este es un “saber de aplicación”.
5. **Saber didáctico**: Se extrae del dominio escolar y luego se inserta en el ámbito de la ingeniería.
6. **Transposición contextualizada:** Modifica un saber a enseñar a un saber de aplicación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

7. **Modelación matemática**: es el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.
8. **Modelo matemático**: Es la representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas.
9. **Matemática conceptual**: Es aquella matemática en donde ya se tiene el concepto y se es capaz de transitar entre los distintos registros de representación del concepto.
10. **Puntos de control de error**: Son absurdos o contradicciones que el alumno encuentra en su procedimiento cuando desarrolla algún problema.

La Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias es una línea de investigación establecida desde hace treinta años en México. La filosofía educativa de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas. Esta teoría contempla cinco fases:

- Fase curricular, en esta fase se considera que el currículo de matemáticas debe ser objetivo, es decir, fundado en bases objetivas y debe vincular la matemáticas con los demás cursos del estudiante. Esta fase se vería reflejada en nuestra investigación en un análisis de la estructura curricular en los cursos de matemáticas sobre el tema Sistemas de ecuaciones lineales y se dictan en la carrera de Administración.
- Fase epistemológica, en esta fase se detectan los obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1983) que serán usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden enfrentar los obstáculos. Para nosotros, esta fase se vería reflejada en un estudio de los obstáculos epistemológicos que tienen los alumnos al estudiar Sistemas de ecuaciones lineales.
- Fase de formación de profesores, en esta fase se considera que los profesores que van a dictar cursos de matemáticas deben tener

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

conocimiento de los contenidos que van a enseñar y de su vinculación con otras disciplinas, deben tener conocimiento sobre la tecnología electrónica para apoyar el aprendizaje del estudiante y debe tener conocimiento acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En nuestra investigación esta fase se reflejaría en un estudio sobre la formación de los docentes en la carrera de Administración.

- Fase cognitiva, en esta fase el alumno debe transitar entre los registros algebraicos y registros gráficos para construir y asirse del conocimiento. En nuestra investigación esta fase se vería reflejada en el análisis de los cambios de registro que el estudiante utiliza para modelar los problemas contextualizados mediante Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en la carrera de Administración
- Fase didáctica.

En nuestro trabajo nos enfocaremos en la fase didáctica, ya que nos interesa elaborar una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje en el modelamiento de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

❖ **FASE DIDÁCTICA**

Esta fase contempla un modelo didáctico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de problemas contextualizados, con ello pretende fomentar el desarrollo de las habilidades para la transferencia el conocimiento, éste incluye tres etapas (Camarena, 2000):

- Presentar la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto en el ambiente de aprendizaje.
- Implantar cursos extracurriculares en donde se llevan a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades meta cognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver problemas, así como actividades para bloquear creencias negativas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Implantar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelvan eventos reales de la industria.

PRIMERA ETAPA DE LA FASE DIDÁCTICA:

En esta etapa se cuenta con la estrategia didáctica denominada la Matemática en Contexto la cual consiste en presentar al estudiante una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de su futura profesión en estudio, en actividades de la vida cotidiana y en actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas o proyectos. La Matemática en Contexto contempla los siguientes pasos que se desarrollan en el ambiente de aprendizaje.

1. Planteamiento del problema de las disciplinas el contexto o vida cotidiana (problemas reales).
2. Determinación de las variables y de las constantes del problema.
3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del mismo.
4. Determinación del modelo matemático.
5. Solución matemática del problema.
6. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.
7. Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.
8. Presentar una matemática descontextualizada.

Cabe hacer mención que la traducción del lenguaje natural al matemático es indispensable en el paso cuatro, mientras que la traducción del lenguaje matemático al natura es requerida en el paso siete. Por otro lado, de los pasos mencionados se tienen dos observaciones, una referida a la planeación didáctica y otra a la modelación matemática.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

***Observación* 1**

Es importante destacar que los puntos 3 y 8 requieren de una planeación didáctica, en donde el docente diseñe actividades didácticas guiadas por los siguientes por los siguientes elementos:

- ✓ Tránsito entre los diferentes registros de representación.
- ✓ Tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa.
- ✓ Construcción de modelos matemáticos.
- ✓ Resolución de problemas contextualizados.
- ✓ Argumentación, habilidad de conjeturar y partir de supuestos.
- ✓ Búsqueda de analogías.
- ✓ Identificación de nociones previas.
- ✓ Identificación de obstáculos.
- ✓ El conocimiento se presenta en espiral.
- ✓ Uso de la tecnología electrónica.

***Observación* 2**

Camarena (2002), afirma que una de las etapas centrales de la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto es la elaboración del modelo matemático. La autora, define el término "*modelación matemática",* como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.

El proceso cognitivo consta de tres momentos, los indicadores de la modelación matemática:

1. Identificar variables y constantes del problema.
2. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema.
3. Validar la "relación matemática" que modela al problema, para lo cual hay que regresar y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Cabe mencionar que el modelo matemático no es único, hay varias representaciones matemáticas que describen el mismo problema, es por ello que necesita validación. Así como el modelo matemático no es único, tampoco la forma de abordarlo matemáticamente es única.

Según Camarena (2005), para llevar a cabo la modelación matemática es necesario poseer elementos cognitivos tales como: enfoques de los temas y conceptos matemáticos del área del contexto, la transposición contextualizada, el manejo conceptual de la matemática descontextualizada; y habilidades del pensamiento como: tener conocimiento de una matemática conceptual, el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático, utilizar las heurísticas como estrategias para abordar un problema, transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático, idealizar el problema. La autora propone una categorización y clasificación de los modelos matemáticos en las ciencias administrativas.

Para la modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales, tomaremos en cuenta la clasificación y categorización de los problemas de acuerdo a la presencia del contexto y la traducción requerida, realizada por Olazábal (2005) para la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

SEGUNDA ETAPA DE LA FASE DIDÁCTICA

En esta etapa se instrumenta un curso extracurricular. Se formula a partir de la necesidad de abordar problemas concretos en el aula. Cuando se usan como una herramienta la resolución de problemas, afloran los elementos de la resolución de problemas, como son las heurísticas, las habilidades del pensamiento, la meta cognición y las creencias.

Camarena (2005) menciona que al resolver problemas está presente la metacognición, que es aquella parte del individuo que le hace ser consciente de su propio conocimiento, de saber si tiene o no todos los elementos cognitivos cuando resuelve un problema. La metacognición es el elemento que se encarga de que el individuo se pregunte a sí mismo si va por buen camino o no, es decir busca indicadores como contradicciones o incongruencias que le

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

permitan ver si va bien o no; en la teoría a estos indicadores se les denominará “puntos de control de error”.

Las habilidades del pensamiento ayudan al entendimiento de las ciencias y a su vez las ciencias ayudan a desarrollar las habilidades del pensamiento en el individuo que las estudia.

TERCERA ETAPA DE LA FASE DIDÁCTICA

Esta etapa es la culminación del proceso didáctico de la Matemática en el Contexto, en ella se instrumenta un taller integral e interdisciplinario con el objeto de resolver eventos reales de la industria.
Para la implementación de esta etapa se requiere de un grupo interdisciplinario de profesores que se comprometan con el proyecto.

A manera de síntesis, presentamos un cuadro resumen de lo expuesto:

FASE DIDÁCTICA	
ETAPAS	CARACTERÍSTICAS
PRIMERA ETAPA: Presentación de la estrategia didáctica.	- Planteamiento del problema de las disciplinas el contexto o vida cotidiana (problemas reales). - Determinación de las variables y de las constantes del problema. - Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del mismo. - Determinación del modelo matemático. - Solución matemática del problema. - Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto. - Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

	- Presentar una matemática descontextualizada.
SEGUNDA ETAPA: Implantar cursos extracurriculares en donde se llevan a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, heurística y metacognitiva para resolver un problema.	- Se formula a partir de la necesidad de abordar problemas concretos en el aula. - Los elementos utilizados en la resolución de problemas son: las heurísticas, habilidades de pensamiento, metacognitiva y las creencias. - La metacognición es la aquella parte del individuo que le hace ser consciente de su propi conocimiento. - Desarrollan habilidades de pensamiento tales como: la observación, la identificación, la clasificación, la comparación, la inducción, la creatividad, el razonamiento, la contextualización, la modelación matemática, la resolución de problemas, etc.
TERCERA ETAPA: Implementar un taller integral interdisciplinario en los últimos semestres de estudio.	- En esta etapa se ven reflejadas las acciones de la transferencia del conocimiento fomentadas en las etapas anteriores. - Requiere de un grupo interdisciplinario de profesores que se comprometan en el proyecto. - En la elaboración del proyecto deben participar alumnos egresados en las ciencias de física y matemáticas.

Cuadro 1: Etapas de la Fase Didáctica
Fuente: Propia

Nosotros utilizaremos la clasificación y categorización de Olazábal (2005), ya que es uno los referentes en nuestra investigación que nos ayudará a realizar la categorización de problemas contextualizados en el curso de Matemática en

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

el primer año de Ciencias Administrativas y luego elaborar nuestra propuesta didáctica basada en dicha categorización.

En cuanto a la clasificación de los modelos matemáticos se tienen (Camarena, 2002):

- Modelos de primera generación, cuando describen problemas primarios que no requieren expresiones matemáticas previamente elaboradas, en esta clasificación se identifican problemas de las ciencias básicas.
- Modelos de segunda generación, cuando requieren hacer uso de expresiones matemáticas ya elaboradas, como los modelos de primera generación, además, el área cognitiva que representan son las ciencias básicas de la Ingeniería (en nuestro caso: Administración).
- Modelos de tercera generación, los que resultan de construcciones de modelos segunda generación (ciencias de especialización).
- Modelos de cuarta generación, cuando representan a la ingeniería aplicada.

En cuanto a la categorización, Olazábal (2005), se basó en la relación entre los enunciados de los problemas (en lenguaje natural, ya existente y específicamente relevante en la estructura cognoscitiva del individuo) y el lenguaje matemático, hasta llegar al establecimiento del modelo matemático necesario para la resolución del problema con el fin de facilitar la tarea de la traducción haciéndola más significativa para el que la lleve a cabo. A continuación les presentamos la categorización:

PRIMERA CATEGORÍA: Problemas con enunciado literal	Son problemas cuyo enunciado expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

	Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno. Ejemplo de Olazábal (2005, p.36): Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades.
SEGUNDA CATEGORÍA: Problemas con enunciado evocador	Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta. El modelo evocado sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema. Ejemplo de Olazábal (2005, p.38): Las dimensiones de una caja rectangular son 6cm, 8cm y 12cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad.
	Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático a través, ni de los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que expresa literalmente, ni de los que

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TERCERA CATEGORÍA: Problemas con enunciado complejo	evoca, sino que se necesita que el individuo que está resolviendo el problema, conozca un modelo que se adapte a las condiciones del mismo y lo sepa aplicar adecuadamente. Así el modelo no surge ni literalmente ni por evocación del enunciado, sino que surge de la estructura cognoscitiva del individuo. En esta categoría también hay evocación, pero con la diferencia de que es el individuo el que evoca y no es el problema. Ejemplo de Olazábal (2005, p.40): Una viga de madera tiene sección rectangular de altura h y anchura w. Su resistencia S es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se pueda cortar en un tronco de 24 pulgadas de diámetro?

Cuadro 2: Categorías de los problemas contextualizados
Fuente: Olazábal, 2005

Cabe mencionar que en nuestra investigación se desarrollará sólo la primera etapa de esta Fase, ya que se trabajará con alumnos que han culminado su primer año de estudios, por este motivo se utilizará la primera y segunda categoría de los problemas contextualizados haciendo uso de los Modelos de primera y segunda generación.

Además, en nuestra investigación se hacen conversiones del registro verbal al algebraico y del registro algebraico al gráfico, tratadas conforme a la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas.

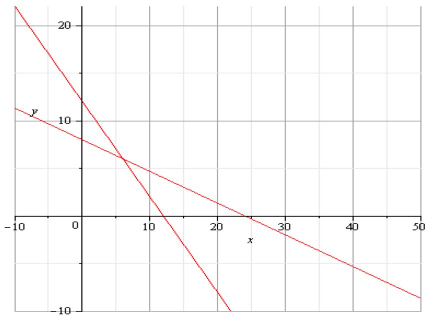
Duval (2006) afirma que los sistemas semióticos permiten que se cumplan tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar tras significaciones relativas a aquello que es representado.

Para que una representación funcione verdaderamente como representación, debe cumplir las siguientes condiciones: que disponga de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso… y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo.

Es decir, no puede haber aprehensión conceptual de un objeto matemático sin algún representante de éste; el alumno debe ser capaz de hacer una representación semiótica del objeto matemático en estudio. Como nuestra investigación se basa en la modelación de sistemas de ecuaciones no homogéneos, se pueden identificar diferentes Registros de Representaciones Semióticas como: Registro Verbal, Registro Algebraico y Registro Gráfico. Por ejemplo tenemos el siguiente problema:

<table>
<tr><th>Registro Verbal</th><th>Registro Algebraico</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr>
<td>Un fabricante produce modelos I y II de lámparas. Durante la producción se requiere del uso de dos máquinas A y B. El número de horas necesarias para la producción de una lámpara está indicado en la siguiente tabla:
<table>
<tr><th></th><th>Máquina A</th><th>Máquina B</th></tr>
<tr><td>Modelo I</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Modelo II</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día, ¿cuántas lámparas de cada modelo se producen al día?</td>
<td>$\begin{cases} x + 3y = 24 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Cuadro 3: Registros que se utilizarán en esta investigación
Fuente: Propia

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

En la Primera Etapa de la Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, se debe elaborar la estrategia didáctica y para ello, según la Observación 1(ver pág.43), se necesita plantear actividades donde los alumnos transiten en los diferentes registros y además transiten del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Además, se ha verificado a través de la Matemática en el Contexto de las Ciencias que el estudiante logra conocimientos estructurados y no fraccionados, logrando con ello estructuras mentales articuladas (Camarena, 1999). La Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ayuda a que el estudiante construya su propio conocimiento con amarres firmes, duraderos y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades del pensamiento mediante el proceso de resolver eventos (problemas y proyectos) vinculados con los intereses del alumno (Camarena, 2003).

Asimismo, se ha determinado que el factor motivación en el estudiante se encuentra altamente estimulado a través de la Matemática en el Contexto de las Ciencias y su desempeño académico como futuro profesional se incrementa, es decir, la transferencia del conocimiento se puede establecer sin tantos tropiezos (Camarena, 2000).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Como es de nuestro interés enfocarnos en la Fase Didáctica de la MCC, utilizaremos la siguiente metodología:

- Identificar los problemas contextualizados relacionados con Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables presentes en el libro texto, usando la Etapa Central de la metodología de diseño de los Programas de estudios de las Ciencias básicas en Ingeniería- DIPCING

Etapas	Contenido
CENTRAL	Hacer un análisis de los contenidos de cada área básica, tanto explícitos como implícitos, en los cursos específicos de la ingeniería. En nuestra investigación,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

	el análisis del contenido Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables se hará con base en el libro texto de la carrera de Administración de la UPC.
PRECEDENTE	Detectar el nivel de conocimientos de cada área básica que tienen los alumnos a su ingreso a la carrera. En nuestra investigación no se desarrollará la etapa precedente. Sin embargo esta etapa se desarrollaría en la toma de un examen previo al curso para ver los conocimientos previos de los alumnos al ingresar a la carrera de Administración sobre el tema de Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
CONSECUENTE	Efectuar una encuesta a los ingenieros en ejercicio, sobre el uso que tienen las ciencias básicas en su labor profesional. En nuestra investigación no se desarrollará esta etapa, Sin embargo esta etapa se desarrollaría realizando una encuesta a los Administradores en ejercicio, sobre el uso que tienen los Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en su labor profesional.

Cuadro 4: Etapas de la Metodología DIPCING
Fuente: Adaptado de Camarena,1984

Dado que en esta investigación se desea elaborar una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en la traducción, del lenguaje verbal al matemático, de problemas contextualizados en las ciencias mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, dentro del ámbito universitario, particularmente de los problemas a los que comúnmente se enfrenta el alumno de la facultad de Ciencias Administrativas en su primer año de estudios se analizará el libro texto que utilizan los estudiantes. Camarena (2002) nos dice que en el análisis de textos se detecta ciertos elementos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias.

El libro de texto que se analizará en esta investigación es el libro de texto que se utiliza en el primer curso de matemática que llevan los alumnos de Ciencias Administrativas. De los problemas que este libro ofrece, se escogen aquellos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

que constituyen problemas de la vida real o problemas de otras ciencias, especialmente de Administración y Economía, que tiene relación con nuestro objeto matemático: Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

- Diseñar la propuesta a partir de la Fase I del modelo Didáctico, es decir la Estrategia Didáctica de la Matemática en Contexto (ver p. 45), donde se incluya el uso de las Representaciones Semióticas de Duval (2006).

A partir del análisis de textos, se realizará una selección de problemas que se ajusta a la categorización de la MCC.

Luego se diseñará una actividad que consistirá en resolver problemas organizados de acuerdo con las categorías de la MCC y hacer uso de diferentes registros para resolver un sistema de ecuaciones.

- Analizar el proceso de resolución de los problemas contextualizados por los estudiantes, correlacionando con cada categoría.

Se analizarán los resultados de la actividad anterior a la luz de la Matemática en el Contexto de las Ciencias para retroalimentar la propuesta.

Cabe mencionar, que nuestra investigación se realizará en la Universidad de Ciencias Aplicadas (UPC) con nueve alumnos de segundo semestre de Ciencias Administrativas que han llevado y aprobado el primer curso de matemáticas que se dicta en el primer semestre. Para la recolección de datos utilizaremos los siguientes instrumentos:

- **Libro de texto:** Libro específico que se usa en la UPC para el primer curso de matemática de la carrera de Administración.
- **Fichas de observación semi-estructurada:** Esta observación se realizará en el aula. Estas fichas de observaciones deben ser redactadas inmediatamente después de la observación en la clase. Ellas nos permitirán no olvidar los detalles que surgen durante la observación. En esta fichas se fijará el objetivo, qué es lo que se debe observar. Esta observación la realizarán tres observadores en donde se observará a nueve alumnos en los tres encuentros programados.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- **Video de aula virtual:** Se colgará un video en el aula virtual para motivar a los alumnos y propiciar el estudio del objeto matemático (sistemas de ecuaciones).

En el capítulo siguiente desarrollaremos la etapa central de la metodología DIPCING que corresponde al análisis de texto que en nuestro caso será el análisis del libro texto que se utiliza en la UPC.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

CAPITULO 4

ETAPA CENTRAL: DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TEXTO

En primer lugar describiremos el libro texto que utilizan los alumnos del primer año de Ciencias Administrativas. Este libro texto fue elaborado por los profesores del curso, el cual consta de siete unidades. A continuación describiremos los temas que se trabajan en cada unidad:

- Unidad N°01. PRINCIPIOS LÓGICOS
    - Proposiciones. Valor de verdad.
    - Tablas de verdad y proposiciones equivalentes.
- Unidad N°02. CONJUNTOS NUMÉRICOS
    - Números reales. Operaciones básicas.
    - Números racionales. Operaciones básicas.
    - Resolución de problemas.
- Unidad N°03. RAZONES Y PROPORCIONES. PORCENTAJES
    - Razones y proporciones.
    - Porcentajes.
    - Aplicaciones económicas de porcentajes.
- Unidad N°04. FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA
    - Expresiones algebraicas.
    - Polinomios. Operaciones con polinomios. Valor numérico.
    - Productos notables. Reducción de polinomios.
    - División de polinomios. Método clásico y regla de Ruffini.
    - Factorización de polinomios.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

- Unidad N°05. ECUACIONES
    - Teoría de ecuaciones.
    - Resolución de ecuaciones de primer grado.
    - Resolución de ecuaciones de segundo grado.
    - Expresiones racionales.
    - Resolución de ecuaciones racionales reducibles a lineales o cuadráticas en una variable. Modelación.
    - Resolución de ecuaciones polinómicas.
    - Resolución de ecuaciones racionales.
- Unidad N°06. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES
    - Intervalos de números reales. Notación.
    - Valores admisibles y solución de una inecuación.
    - Resolución de inecuaciones de primer grado.
    - Sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
    - Análisis de enunciados.
    - Aplicaciones en el contexto administrativo y económico con sistema de inecuaciones lineales.
- Unidad N°07. PLANO CARTESIANO. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES
    - Plano cartesiano.
    - Sistema de ecuaciones lineales.
    - **Modelación de los sistemas de ecuaciones lineales aplicadas al campo económico y administrativo**.

Para nuestro trabajo de investigación creemos que es pertinente analizar en el libro de texto las Unidades N° 05 y 07, ya que en la primera se trabaja modelación de problemas contextualizados mediante ecuaciones y en la segunda se trabaja modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En segundo lugar, haremos una descripción en forma más detallada de las Unidades N°05 y 07, ya que en estas unidades se encuentra nuestro tema de investigación y nuestro objeto matemático. En estas unidades, haremos un análisis examinando los enunciados de los problemas desde un punto de vista lingüístico y matemático con el fin de encontrar una relación entre éstos. Para ello nos apoyaremos en la caracterización de los modelos matemáticos de acuerdo con Olazábal (2005, p.23).

Por el nivel en el que se ubica esta investigación, los modelos matemáticos estudiados son de primera generación, es decir, de las ciencias básicas e incluso están relacionados con la vida diaria de los alumnos; esto es basado en el interés de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. De este modo los objetos, situaciones, fenómenos y problemas que aparecen en esta investigación no necesariamente pertenecen a las Ciencias Administrativas, sino que también se toman en cuenta conceptos de otras áreas del conocimiento. Para el análisis sólo consideraremos problemas matemáticos contextualizados sin expresiones algebraicas, como lo establece la teoría Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Olazábal (2005), también hace referencia a que se debería resaltar el hecho de que en algunos problemas matemáticos la traducción se lleva a cabo a través de un modelo intermedio de representación no necesariamente matemático, por ejemplo:

Imagina que estás viendo “el equipo A” en la televisión. En la primera escena, ves a un ladrón escapando de un banco cargando una bolsa en el hombro y te dicen que ha robado un millón de dólares en billetes de a dólar. ¿Será posible? Un alumno empezó a resolverlo representando el problema en términos de volumen (si un millón de billetes podrían caber en una bolsa), después lo representó en términos de peso (cuánto pesan un millón de billetes de un dólar) y llegó a la conclusión de que aún en billetes de 10 dólares, la bolsa sería demasiado grande y demasiado pesada para cargarla una sola persona.

Cuadro 5: Problema ejemplo 1
Fuente: Olazábal (2005, p.24)

En el proceso del análisis, se observaron ciertas peculiaridades en la relación entre el lenguaje natural y el algebraico, por ejemplo, en nuestro lenguaje hay varias formas de referirse a un elemento matemático.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

- "÷" este símbolo es utilizado cuando se enuncia: entre, el cociente, la división, etc.
- "+" este símbolo es utilizado cuando se enuncia: más, se aumenta, se añade, se hace mayor por, excede, etc.
- "×" este símbolo es utilizado cuando se enuncia: por, se multiplica, se hace tantas veces, etc.
- "2()" esta expresión es utilizado cuando se enuncia: el doble de, dos veces, etc.
- "*a*=***k****b*" esta expresión es utilizado cuando se enuncia: *a* es directamente proporcional a *b*, la razón entre *a* y *b* es constante, etc.

Cuadro 6. Problema ejemplo 2
Fuente: Olazábal (2005, p.24)

Por otro lado, en el campo de las matemáticas existen palabras que se traducen en forma diferente cuando se aplican en otras ciencias, constituyéndose una transposición contextualizada, como se define en la Matemática en el contexto de las Ciencias (Camarena, 2000b.) Por ejemplo en matemáticas la palabra "por" se traduce como una multiplicación; sin embargo en Física y en Economía, se traduce como una división:

- Velocidad igual a 25 kilómetros por hora: $v = 25km/h$
- Costo mensual por mes : $\$/mes$

Otro ejemplo es la palabra "ganar", que en matemática se traduce como un aumento (es decir una suma), en los fenómenos químicos de óxido –reducción, la ganancia de electrones se traduce como una disminución del número de oxidación.

A continuación detallaremos los problemas contextualizados utilizados para modelarlos mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, tomados del libro guía de trabajo analizado. Se considerarán dos columnas, una columna para enunciar los problemas de la Unidad N°05 y la otra columna será para enunciar los problemas de la Unidad N°07, en los cuales sombrearemos los problemas que analizaremos, de color amarillo en la Unidad 05 y de color verde en la Unidad 07,y que además están relacionados con nuestro objeto matemático.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

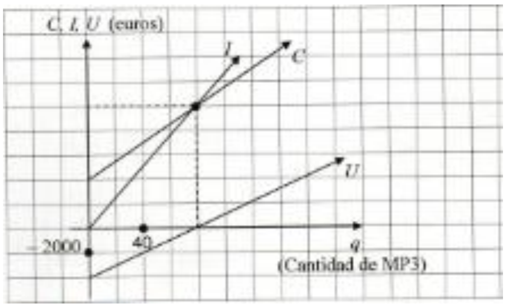
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

UNIDAD N° 05	UNIDAD N° 07
1. Alberto entra a trabajar en una empresa en el mes de enero, el administrador le ha prometido que cada mes del presente año ganará 300 soles más que el mes anterior. Si su sueldo acumulado hasta el mes de abril fue de 6500 soles, ¿cuánto ganó en el mes de marzo?	1. Al taller de carpintería “Komodoy” le cuesta hacer cada carpeta S/ 25, 00, los gastos fijos son de S/ 3000,00 mensuales. Si cada carpeta se vende a S/ 125,00. a) Determine la ecuación del costo total, ingreso y utilidad. b) Grafique la Utilidad, Costo total e Ingreso en un mismo plano empleando las escalas adecuadas. c) ¿A Cuánto asciende el V.M.P? d) ¿En qué punto se establece el equilibrio? e) ¿Cuántas carpetas debe producir y vender el taller de carpintería “Komodoy” para obtener una ganancia de S/ 2000,00?
2. El administrador de una farmacia le ha prometido a Juan Buendía, que cada mes del próximo año ganará 20 soles más que el mes anterior. Si en el cuarto mes (abril) gana siete veces lo que ganó en el primer mes, ¿cuánto ganó en el mes de febrero?	2. El dueño de una fábrica de chompas de lana de alpaca, determina que el costo unitario por la fabricación de cada chompa es de $ 60,00. Si los costos fijos de la fábrica ascienden a $ 3500 al mes y el precio de venta unitario es de $ 110,00. a) Determine la ecuación del ingreso, costo total y de la utilidad. b) Las gráficas de la Utilidad, Costo total e Ingreso en un mismo plano

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

UNIDAD N° 05	UNIDAD N° 07
3. Un gran empresario repartió una cierta cantidad de dinero entre sus mejores empleados: Juan, Pedro, Pablo y Lucas. Si Juan recibe la mitad, Pablo la tercera parte, Pedro la novena parte y Lucas los \$60 000 restantes. ¿Cuánto recibió Pedro?	3. A partir de la gráfica mostrada, determine el precio de venta de cada MP3, el costo fijo, el volumen mínimo de producción y el punto de equilibrio. Interprete. 
4. En una clase de 33 estudiantes recaudaron S/. 11 600,00 para ayudar a los damnificados de la intensa ola de frío, que azota varias localidades del sur del país. Si cada hombre colaboró con S/. 300 y cada mujer con S/. 400, ¿cuánto dinero en total recaudaron las mujeres?	4. **DEPRECIACIÓN:** El valor V (en \$) de un auto después de t años de adquirido está dado por: **V=12000-**800t a) Trace la gráfica correspondiente. b) ¿Qué sucede con el valor del auto cuando aumente el tiempo? c) ¿Cuál es su valor al cabo de 3 años?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

UNIDAD N° 05	UNIDAD N° 07
5. Tres personas deciden compartir por igual el costo de un velero; sin embargo, se encuentra que si se asocia otra persona, el costo del velero para cada uno de los tres socios reduciría en $ 3 000,00. ¿Cuál es el costo del velero?	**5. CUENTA TELEFÓNICA:** La cuenta de una familia C **(en soles)** de acuerdo a los minutos consumidos t está dada por: C=60+0,10t a) Trace la gráfica correspondiente b) ¿Qué sucede con el valor de la cuenta al aumentar el número de minutos consumidos? c) ¿Qué interpretación tiene el número 0,10?
6. Entre 10 personas deciden pagar, en partes iguales, una deuda pero resulta que 4 de ellas solo pueden pagar la mitad de lo que les corresponde, obligando, de esta manera, a que cada una de las demás añadiese a su cuota inicial S/. 4 ¿A cuánto asciende la deuda total?	
7. Su empresa decide contratar el servicio de internet. Una compañía que brinda acceso a Internet tiene dos planes de pago. El primer plan cuesta S/. 100 por cargo fijo y S/0.20 por hora y el segundo plan cuesta S/. 150 por cargo fijo y S/	

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

0.10 por hora. a) Exprese la ecuación del costo para cada plan. b) ¿En qué caso conviene cada plan?	

Cuadro 7. Problemas del libro texto de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC)

De estos problemas enunciados vamos a escoger para nuestro análisis sólo a aquellos problemas de la Unidad N° 05 que se puedan modelar mediante ecuaciones lineales con dos variables, para luego relacionarlos con los problemas de la Unidad N°07 en los cuales se modelará problemas contextualizados mediante sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

- Análisis de los problemas de la Unidad N° 05

7. Su empresa decide contratar el servicio de internet. Una compañía que brinda acceso a Internet tiene dos planes de pago. El primer plan cuesta S/. 100 por cargo fijo y S/0.20 por hora y el segundo plan cuesta S/. 150 por cargo fijo y S/ 0.10 por hora.

a) Exprese la ecuación del costo para cada plan.

b) ¿En qué caso conviene cada plan?

Cuadro 8. Problema 7 de la Unidad N°5
Fuente: Nivelación de Matemática, p.126

Este problema muestra un enunciado cercano a la realidad del alumno, donde el alumno puede relacionarlo y hacer la traducción del lenguaje natural al algebraico pues da las situaciones (plan A, plan B y x horas), y los datos (pagos fijos y los pagos adicionales en cada plan). Por ejemplo, se espera que el alumno relacione a los cargos fijos como pagos fijos para cada plan: plan A paga S/.100 y plan B paga S/.150, y los pagos adicionales con los cargos por hora en cada plan: plan A paga S/. 0,20 por hora y plan B paga S/.0,30 por hora. Así el modelo que plantea este problema será:

Plan A: $100+0{,}20x$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Plan B: $150+0{,}10x$

Una observación que podemos hacer es con respecto a la redacción: cuando se quiere presentar al alumno problemas contextualizados, más aún en un contexto real, también se deben otorgar datos reales para que no origine confusión en los alumnos cuando quieren entenderlo; es así, que el pago fijo se hace por cierta cantidad de horas y el pago adicional, es por cada hora excedente a mi promoción del plan que he elegido. De esta manera estamos ubicando al alumno en una situación real y podrá modelar el problema contextualizado dado.

Por otro lado, con respecto a la segunda pregunta, consideramos que el alumno tendrá mucha confusión para entender lo que se le está pidiendo ya que para responderla, él tendrá que graficar las rectas cambiando de registros (del registro algebraico al registro gráfico), tema que hasta la Unidad N° 05 no ha sido tratado.

Según la categorización propuesta por Olazábal (2005, p.36) este problema, por el enunciado que presenta, se ubica en la Primera Categoría ya que nos brinda los datos suficientes para modelarlo.

- Análisis de los problemas de la Unidad N° 07

1. Al taller de carpintería "Komodoy" le cuesta hacer cada carpeta S/ 25, 00, los gastos fijos son de S/ 3000,00 mensuales. Si cada carpeta se vende a S/ 125,00.

a) Determine la ecuación del costo total, ingreso y utilidad.

b) Grafique la Utilidad, Costo total e Ingreso en un mismo plano empleando las escalas adecuadas.

c) ¿A Cuánto asciende el V.M.P?

d) ¿En qué punto se establece el equilibrio?

e) ¿Cuántas carpetas debe producir y vender el taller de carpintería "Komodoy" para obtener una ganancia de S/ 2000,00?

Cuadro 9. Problema 1 de la Unidad N°7
Fuente: Nivelación de Matemática, p.214

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En este caso el problema evoca modelos matemáticos conocidos, como son:

$$C_T(q) = Costos\ fijos + Costos\ variables\ \rightarrow Función\ Costo\ total$$
$$I(q) = Precio\ de\ venta\ \times cantidad\ \ \rightarrow\ \ Función\ Ingreso$$
$$U(q) = I(q) - C_T(q)\ \rightarrow\ \ Función\ Utilidad,$$

donde q es la cantidad producida y vendida.

Los datos que el enunciado ofrece son: costos fijos= 3000, costos variables= 25, precio de venta= 125. Con estos datos el alumno puede plantear en términos algebraicos las ecuaciones pedidas en la parte a) son:

$$C_T(q) = 3000 + 25q$$
$$I(q) = 125q$$
$$U(q) = 100q - 3000$$

Para la parte b), los alumnos tendrán que hallar los puntos de intersección con los ejes y luego se graficará cada recta. Esto implica el cambio de registros (del registro algebraico al registro gráfico). Por ejemplo, para graficar la Función Costo:

q	C_T
0	3000
-120	0

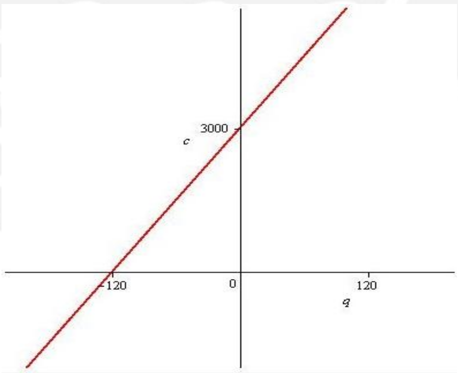


Figura 4: Función costo
Fuente: Propia

Para la parte c) y d), se formará el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = C_T(q) = 3000 + 25q \\ y = I(q) = 125q \end{cases}$$, este sistema se resolverá con cualquier método que el alumno use para hallar q y $f(q)$.

En la parte e), se reemplazará $U(q) = 2000$ y se hallará el valor de q

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

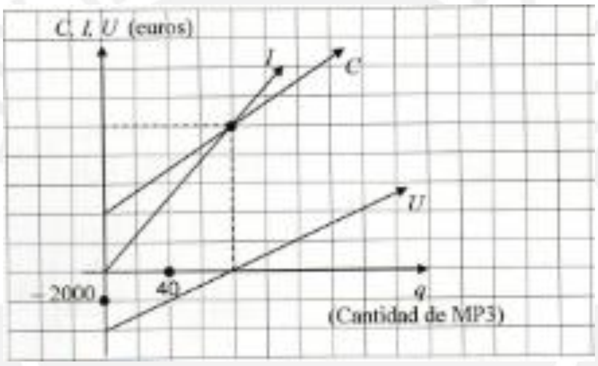
TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Según la categorización de Olazábal (2005, p.37), este problema corresponde a la Segunda Categoría, ya que es un problema en el cual se debe evocar las fórmulas de las funciones: costo, ingreso y utilidad; que no las presentan en forma directa. Las funciones evocadas sirven de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema.

El problema 2, tiene la misma estructura del problema anterior y además involucra los mismos modelos matemáticos.

3. A partir de la gráfica mostrada, determine el precio de venta de cada MP3, el costo fijo, el volumen mínimo de producción y el punto de equilibrio. Interprete.



Cuadro 10. Problema 3 de la Unidad N°7
Fuente: Nivelación de Matemática, p.215

Este problema no será analizado desde el punto de vista de Olazábal (2005) porque nuestro foco de análisis son los problemas en los que se involucre su modelación mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, y en este problema sólo se puede modelar la función ingreso, el resto de determinaciones se puede hacer a partir del análisis e interpretación a partir del gráfico. Para que aquí se pueda modelar, se tiene que pasar del registro gráfico al algebraico, lo cual implica entrar en temas como rectas y pendiente; temas que se han visto en la última unidad del curso. Este tipo de problemas nos ayudarán a determinar si los alumnos llegan a manejar cambios de registros.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Con respecto a los problemas 4 y 5, no se analizarán estos problemas ya que presentan expresiones algebraicas y de acuerdo a nuestro Marco teórico no califican dentro de los problemas contextualizados que involucran una traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa.

Sintetizando nuestro análisis basándonos en nuestro marco teórico:

Una de las sugerencias es con respecto a la estructura del cuaderno de trabajo ya que consideramos que la Unidad N° 07 debe estar inmediatamente después de la Unidad N°05 para que los alumnos relacionen los temas y vean la continuidad de los mismos.

Por otro lado, en la Unidad N° 05 sólo hay un problema que puede ser modelado mediante ecuaciones lineales con dos variables y que además guarda relación con los problemas utilizados en la Unidad N° 07; por lo cual creemos que es pertinente usar más problemas contextualizados que puedan ser modelados mediante ecuaciones lineales con dos variables para que luego, en la Unidad N° 07, de modo que puedan ser la base en la modelación mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Además, en la Unidad N° 07, el tercer tema enseñado es: “Modelación de los Sistemas de ecuaciones Lineales aplicados al campo económico y administrativo”, sugerimos que el nombre de este tema sea: “Modelación de problemas aplicados al campo económico y administrativo, mediante sistemas de ecuaciones” y se deberían incluir sólo problemas en los cuales se pida modelar y no problemas que ya estén modelados mediante expresiones algebraicas dadas.

En el siguiente capítulo se categorizará los problemas contextualizados del libro de texto que se utiliza en el primer curso de matemática para Administradores de la UPC y después se diseñará una propuesta didáctica que nos permita detectar las dificultades que los alumnos presentan al modelar problemas contextualizados en base a la categorización de la MCC.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

CAPÍTULO 5

DISEÑO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA CATEGORIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS SEGÚN LA MCC.

5.1 ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA

Nuestra investigación se realizará con alumnos que acaban de finalizar el primer curso de matemática en la carrera de Administración, es por ello que sólo se trabajará los modelos matemáticos de primera y segunda generación en las dos primeras categorías. Los modelos de tercera y cuarta generación y además los problemas de la tercera categoría no se trabajarán en esta oportunidad, sin embargo se podrían usarse a partir del sexto ciclo de estudios, donde los alumnos ya utilizan modelos económicos y administrativos.

Se escogieron problemas contextualizados variados, presentes en el libro texto que utilizan en la carrera de Administración, pero también problemas matemáticos de situaciones cotidianas.

Los problemas seleccionados son los siguientes:

Problemas con enunciado literal y modelo de primera generación:

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.
2. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
3. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Problemas con enunciado evocador y modelo de segunda generación:

1. Al taller de carpintería "Creaciones Miguelito" le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa se vende a S/100.
   a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.
   b) Graficar el costo total y el ingreso.
2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.
3. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

Otros problemas:

1. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total e Ingreso. Halle las ecuaciones del Costo total e Ingreso.

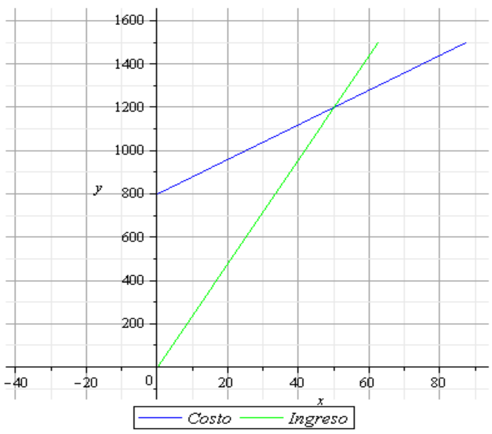


Figura 5. Gráfico de las ecuaciones Costo total e Ingreso
Fuente: Propia

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total, Ingreso y Utilidad. Halle las ecuaciones del Costo total, Ingreso y Utilidad

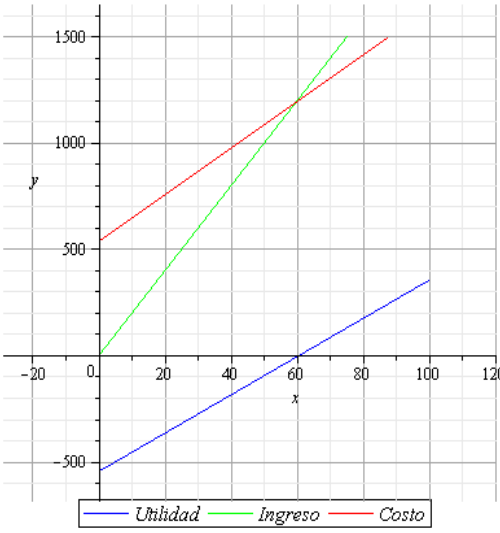


Figura 6. Gráfico de las ecuaciones Costo total, Ingreso y Utilidad
Fuente: Propia

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total de la producción de un determinado artículo, si dicho artículo se vende a $8 cada uno:
    a) Determinado la ecuación del costo total.
    b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso.

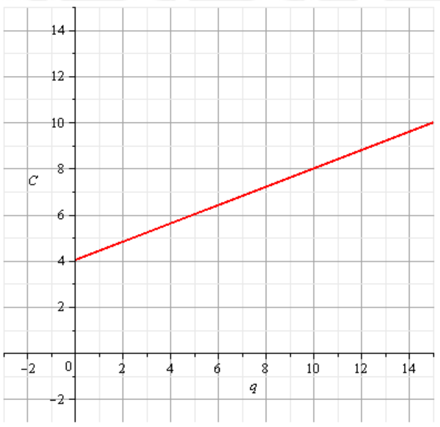


Figura 7. Gráfico de la ecuación Costo total
Fuente: Ejercicios propuestos del libro texto,p.218

Esta prueba se aplicó a un grupo de treinta y dos estudiantes, de ellos se escogieron sólo a aquellos estudiantes que habían llevado un curso previo de Matemática. Luego se dividió al grupo en tres subgrupos y a cada subgrupo se

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

le entregó un paquete diferente de problemas, sin embargo los problemas considerados en los tres paquetes fueron seleccionados del libro texto que utilizan los estudiantes en el primer ciclo de la carrera de Administración. Cada paquete incluye un problema de las dos primeras categorías y además un problema que nos permita identificar si realmente hubo un aprendizaje que les permita hacer uso del cambio de registros, del registro gráfico al registro algebraico. Los tres problemas están relacionados con el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables Estos problemas se le presentan ordenados según las mismas categorías. A continuación se mostrarán los tres paquetes:

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.
2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.
3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total de la producción de un determinado artículo, si dicho artículo se vende a $8 cada uno:

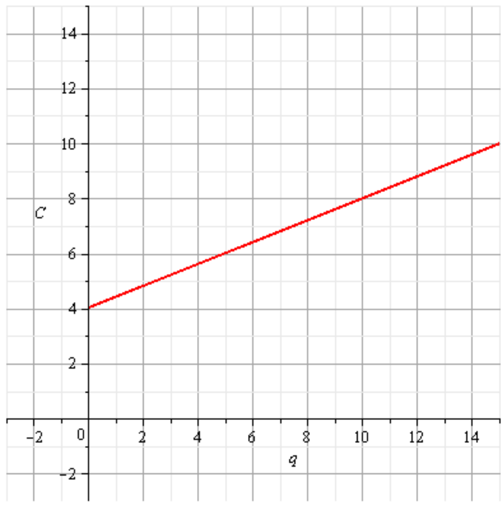


Figura 8. Gráfico de la ecuación Costo total
Fuente: Ejercicios propuestos del libro texto, p.218

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

a) Determinar la ecuación del costo total.

b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso.

Paquete 2

1. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
2. Al taller de carpintería “Creaciones Miguelito” le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa cuesta S/100.
   a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.
   b) Graficar el costo total y el ingreso.

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total, Ingreso y Utilidad. Halle las ecuaciones del Costo total, Ingreso y Utilidad

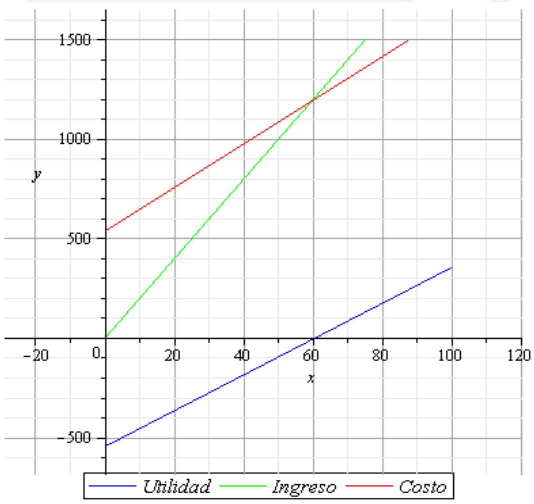


Figura 9. Gráfico de las ecuaciones Costo total, Ingreso y Utilidad
Fuente: Versión propia

Paquete 3

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.
2. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.
b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total e Ingreso. Halle las ecuaciones del Costo total e Ingreso.

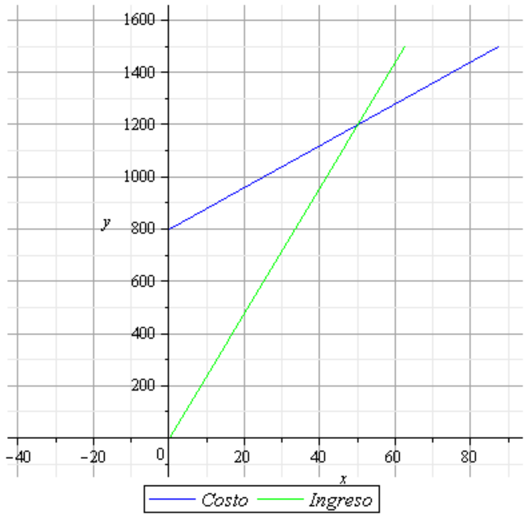


Figura 10. Gráfico de las ecuaciones Costo total e Ingreso
Fuente: Versión propia

5.2 PUESTA A PRUEBA DE LA PROPUESTA

Esta prueba se aplicó a un grupo de treinta y dos estudiantes, de ellos se escogieron sólo a aquellos estudiantes que habían llevado un curso previo de Matemática. Se dividió al grupo al azar en tres partes y a cada subgrupo se le entregó un paquete diferente de problemas para evitar que los alumnos puedan conversar entre ellos y esto ocasione la pérdida de algunos puntos importantes para nuestro análisis. (Ver apéndice)

Del grupo de treinta y dos estudiantes sólo se escogieron a nueve de ellos que cumplían con el requisito de haber llevado el curso previo de Matemática.

La autora aplicó la puesta a prueba de la propuesta en una hora normal de clase en la cual no se permitió que los estudiantes consultaran ningún material. Se les invitó a que hicieran su mejor esfuerzo por resolver los problemas, ya que al no repercutir en sus notas, se corría el riesgo de que desistieran de la labor cuando la dificultad les exigiera mayor empeño, como ocurre frecuentemente en matemática.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

5.3 RESULTADOS DE LA PUESTA A PRUEBA DE LA PROPUESTA

En los problemas de ENUNCIADO LITERAL que se escogieron, las traducciones esperadas corresponden a relaciones algebraicas entre conceptos de las ciencias o de la vida cotidiana.

Paquete 1

"… dos números tales que su suma sea 42" ($x+y=42$)

"… y su diferencia sea 6" ($x-y=6$)

Paquete 2

"Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos…" ($x+y=10\,000$)

"… al mayor le da $2 000 más que al primero …" ($x=2000+y$)

Paquete 3

"… al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor …" ($x+2=5y$)

"… el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad" ($x-6=y$)

En los problemas de ENUNCIADO EVOCADOR, las traducciones esperadas son:

Paquete 1

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Paquete 2

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$

Paquete 3

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Estos problemas en donde se pretende que el alumno realice el cambio de registros, del registro gráfico al registro algebraico, nos permitirán analizar si el alumno puede realizar dichos cambios de registros. En los tres paquetes se escogieron problemas adecuados, tomando en cuenta el nivel de estudios de los estudiantes y además el ciclo en el que se encuentran, de su carrera de Administración. Estas características se deben tener en cuenta, ya que los tres tipos de traducción dependen de ellas porque:

- la traducción literal presupone el conocimiento del vocabulario matemático y su consiguiente representación tanto en el lenguaje natural como en el matemático.
- la traducción con evocación exige la comprensión de los conceptos involucrados.
- la traducción compleja necesita de los dos anteriores y de una estructura cognoscitiva preparada para realizar la tarea.

En la siguiente tabla se mostrarán los resultados de la propuesta cuando se puso a prueba, para cada traducción se la asigna "uno" al estudiante que realiza la traducción que se espera, y "cero" al que no logra hacer dicha traducción. Nos permitimos evaluar también la resolución de los problemas por considerarlo un indicador del buen entendimiento y planteamiento de los problemas matemáticos.

Tabla II. Resultados de las traducciones literales y con evocación de los paquetes 1, 2 y 3

TRADUCCIÓN							
	LITERAL Y MODELO DE PRIMERA GENERACIÓN			**CON EVOCACIÓN Y MODELO DE SEGUNDA GENERACIÓN**			
PAQUETE 1	$x+y=42$	$x-y=6$	**Resol.**	C_T	I	U	**Resol**
Tiffany	1	1	1	1	1	1	0
Fernando	1	1	1	0	1	0	0
Bruno	1	1	1	0	0	0	0
Katherine	1	1	1	0	1	0	0
4	4	4	4	1	3	1	0

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PAQUETE 2	*x+y=10000*	*x-y=2000*	Resol	C_T	I	Resol	
Erick	1	1	1	1	1	0	
Geraldo	1	0	0	0	1	0	
2	2	1	1	1	2	0	
PAQUETE 3	*x+2=5y*	*x-6=y*	Resol	C_T	I	U	Resol
Claudia	1	1	1	0	0	0	0
Billy	1	1	1	0	1	0	0
Pilar	1	1	1	0	0	0	0
3	3	3	3	0	1	0	0

5.4 ANÁLISIS

Antes de hacer el análisis, les mostraremos una tabla en la que se muestra la categorización de la MCC y que fue detallada en el capítulo 3. Además recordaremos que sólo se trabajarán los modelos matemáticos de primera y segunda generación en las dos primeras categorías. Los modelos de tercera y cuarta generación y además los problemas de la tercera categoría no se trabajarán porque nuestro grupo está conformado por alumnos del primer ciclo de la carrera de Administración.

PRIMERA CATEGORÍA: Problemas con enunciado literal	Son problemas cuyo enunciado expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado. Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno.
SEGUNDA CATEGORÍA: Problemas con enunciado evocador	Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

	forma indirecta. El modelo evocado sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema.
TERCERA CATEGORÍA: Problemas con enunciado complejo	Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático a través, ni de los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que expresa literalmente, ni de los que evoca, sino que se necesita que el individuo está resolviendo el problema, conozca un modelo que se adapte a las condiciones del mismo y lo sepa aplicar adecuadamente. Así el modelo no surge ni literalmente ni por evocación del enunciado, sino que surge de la estructura cognoscitiva del individuo. En esta categoría también hay evocación, pero con la diferencia de que es el individuo el que evoca y no es el problema.

Cuadro 11. Categorización de los problemas contextualizados
Fuente: Adaptado de Olazábal, 2005

PRIMERA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO LITERAL Y MODELO DE PRIMERA GENERACIÓN

Se observó que en los tres paquetes, ver apéndice, la traducción correspondientes a las relaciones algebraicas o a la vida cotidiana, ejercitados desde años anteriores, con la cual los estudiantes ya están familiarizados, es realizada por la mayoría de ellos.

De estas traducciones, los paquetes 1 y 3 tuvieron mayor éxito. Esto se debe a que la traducción que se pedía es recurrente en los problemas de Álgebra que se trabajan desde la Secundaria y tiene que ver con la Matemática más que con otras ciencias. Además estos problemas implicaban traducción literal de relaciones algebraicas entre conceptos de otras ciencias, de la vida cotidiana o de la matemática elemental. Por ejemplo, en el paquete 1, se les pedía "… dos números tales que su suma sea 42 …"

En el paquete 2, la traducción del problema también tiene que ver con la matemática elemental pero la dificultad que presentó uno de los estudiantes es la mala traducción de la segunda parte del problema que se les decía "… Al mayor le da $2 000 más que al primero …" y se esperaba que el estudiante

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

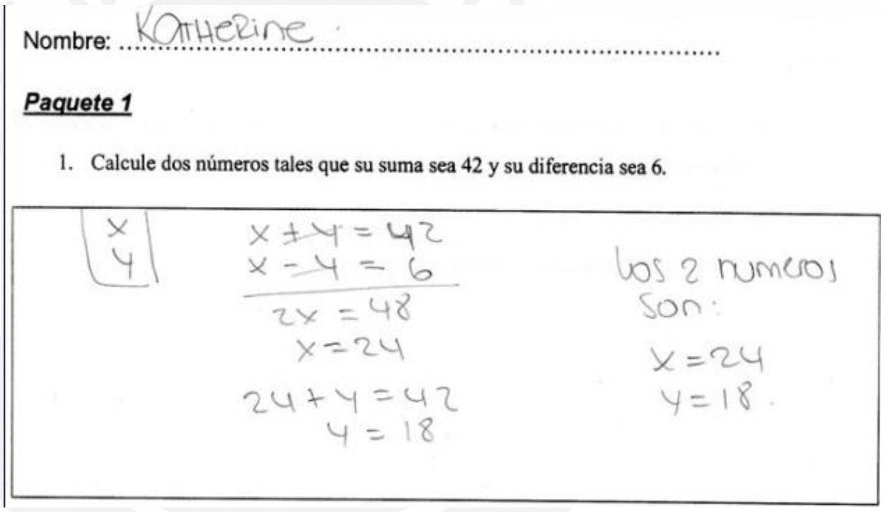
hiciera la siguiente traducción: $x+2000=y$, en cambio el otro estudiante hizo la traducción, diferente a la que se esperaba, pero correctamente sin embargo no pudo llegar a la respuesta por un error en el cálculo aritmético.

Los problemas que se propusieron en esta categoría, tuvieron como objetivo que sea modelado haciendo uso de sistemas de ecuaciones de dos variables y se desarrolle con cualquiera de estos métodos: igualación, eliminación o sustitución; para dar la respuesta a la pregunta que se le plantea. Analizaremos las respuestas de uno o dos alumnos por paquete.

PAQUETE 1

En este paquete analizaremos el desarrollo de los alumnos Katherine y Bruno porque consideramos interesante sus desarrollos frente al problema propuesto.

- Desarrollo de Katherine


Nombre: KATHERINE

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

x
y

$x+y=42$
$x-y=6$
$2x=48$
$x=24$
$24+y=42$
$y=18$

los 2 numeros son:
$x=24$
$y=18$

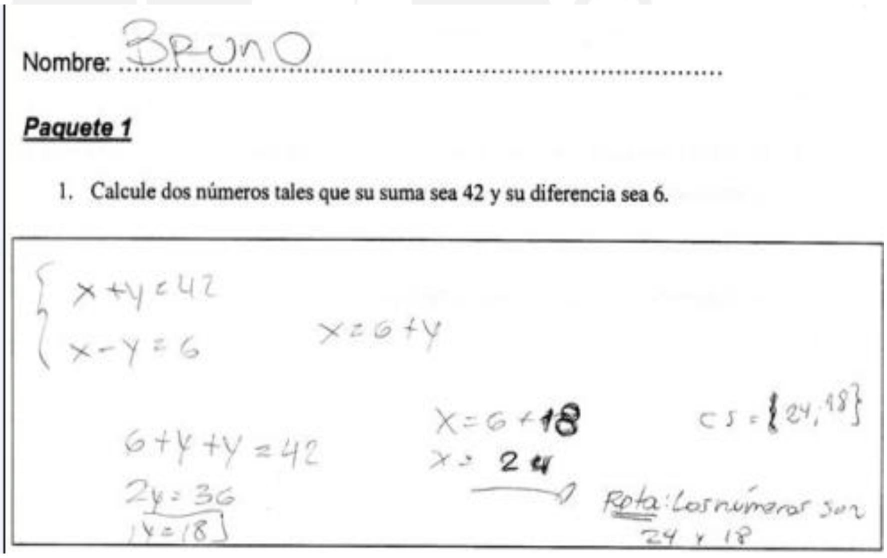
Figura 11. Desarrollo de Katherine
Ver apéndice

La alumna usó dos variables x e y, planteó las ecuaciones que se le pedía en el enunciado y pudo hallar dichos números. Para resolver el sistema que planteó, usó el método de eliminación. De acuerdo con nuestra teoría, en la Fase Didáctica, se debe tener en cuenta que para la modelación matemática se debe: identificar variables y constantes del problema, establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema y validar la “relación matemática” que modela al problema, para lo cual hay que regresar y verificar que involucre a

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

todos los datos, variables y conceptos del problema. Katherine no completó toda la Fase didáctica porque no logró definir sus variables ni validó la relación matemática que modelaba al problema. Ella sólo logró establecer la relación entre las variables, es decir logró hacer la conversión del lenguaje verbal al matemático, ya que ella expresa: $x+y=42$ y $x-y=6$ lo que nos indica que hace un tránsito del lenguaje natural al matemático. Aunque solamente nos interesa la traducción del lenguaje natural al matemático, se observa que no hay consciencia o interés por parte de la alumna para verificar si es correcta o tiene sentido la solución encontrada, lo que identifica que no se estableció la traducción del lenguaje matemático al natural.

- Desarrollo de Bruno



Nombre: Bruno

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

$$\begin{cases} x+y=42 \\ x-y=6 \end{cases} \qquad x=6+y$$

$6+y+y=42$

$2y=36$

$y=18$

$x=6+18$

$x=24$

$C.S=\{24;18\}$

Rpta: Los números son 24 y 18

Figura 12. Desarrollo de Bruno
Fuente. Ver apéndice

El alumno usó dos variables x e y, planteó las ecuaciones que se le pedía en el anunciado y pudo hallar dichos números. Para resolver el sistema que planteó, usó el método sustitución. De acuerdo con nuestra teoría, en la Fase Didáctica: Bruno no identificó sus variables ni tampoco validó la relación matemática que modela al problema sin embargo estableció las relaciones entres las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

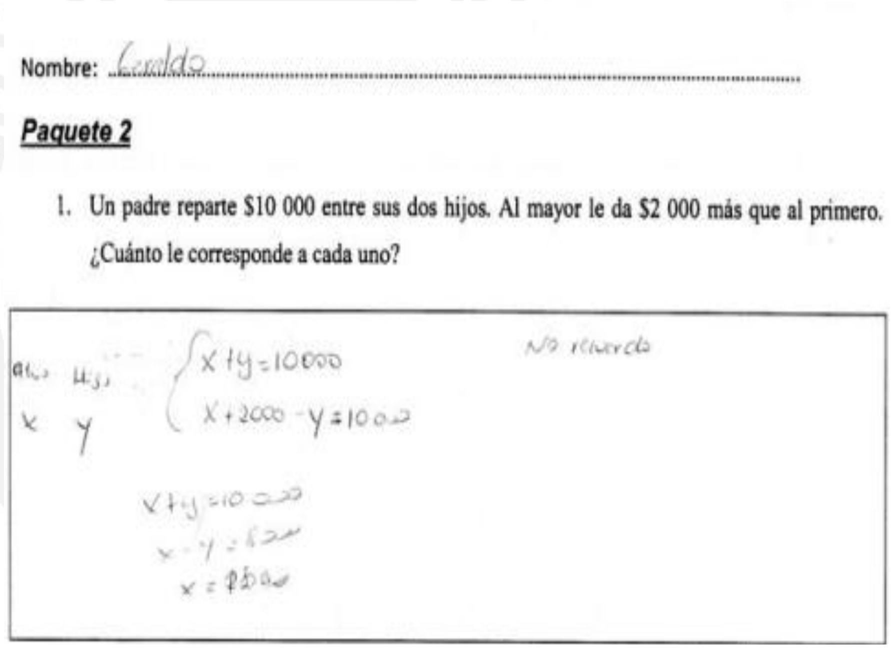
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

variables y las constantes pues en su desarrollo construyó $x+y=42$ y $x-y=6$ lo cual nos indica que logró hacer la conversión del lenguaje verbal al matemático, sin embargo, él tampoco verificó, ni interpretó sus datos en función del problema, lo que impide verificar la traducción del lenguaje matemático al lenguaje natural.

PAQUETE 2

En este paquete analizaremos el desarrollo de los alumnos Geraldo y Erick porque consideramos interesante sus desarrollos frente al problema propuesto.

- Desarrollo de Geraldo


Nombre: Geraldo

Paquete 2

1. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

x y

$x+y=10000$
$x+2000-y=10000$

No recuerdo

$x+y=10000$
[illegible]
[illegible]

Figura 13. Desarrollo de Geraldo
Fuente. Ver apéndice

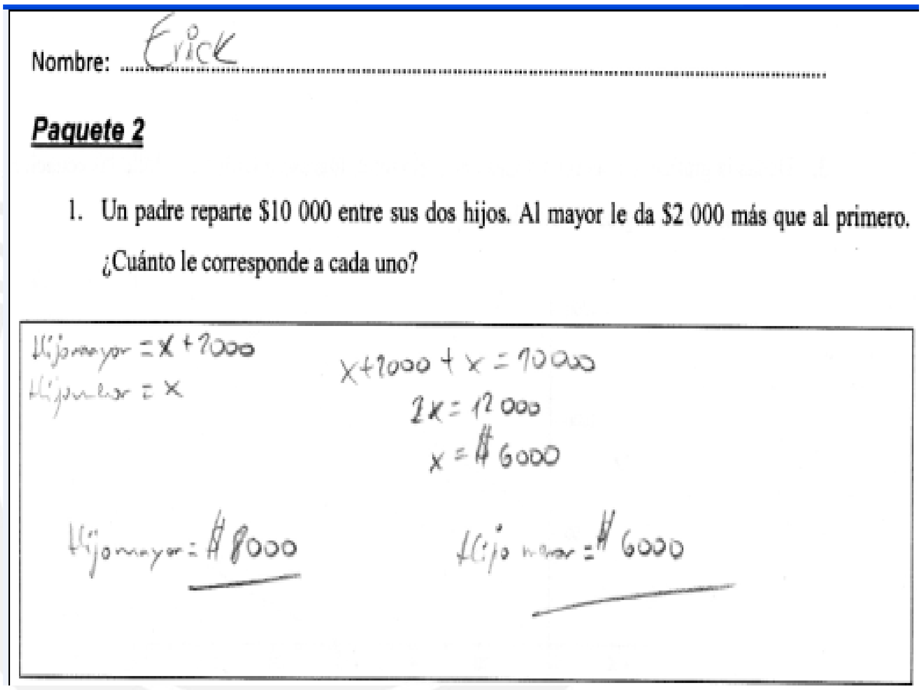
Geraldo hizo la traducción de la primera ecuación: $x+y=10000$, pero no hizo la traducción de la segunda parte ya que no interpretó bien el enunciado. Él no logró completar las etapas que se deben seguir, según la Fase didáctica, para llegar a establecer el modelo matemático asociado al problema contextualizado dado. Sin embargo hizo el intento por definir primero sus variables que de acuerdo a nuestra teoría y nuestro análisis, tiene mucha

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

validez ya que no pudo lograr todo el proceso pero sí sabía lo primero que tenía que hacer: nombrar sus variables. Creemos que él no pudo hacer la traducción del lenguaje verbal al matemático porque no pudo entender el enunciado, que es un aspecto definitivo para establecer el modelo matemático. También llama la atención que escribe "no recuerdo", en vez de recurrir al razonamiento.

- Desarrollo de Erick



Nombre: Erick

Paquete 2

1. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Hijo mayor = x + 2000
Hijo menor = x

x+2000 + x = 10000
2x = 12 000
x = $ 6000

Hijo mayor = $ 8000
Hijo menor = $ 6000

Figura 14. Desarrollo de Erick
Fuente. Ver apéndice

Erick logró completar dos etapas de la Fase didáctica, la primera se da cuando identificó sus variables y constantes esto se refleja cuando él escribe: hijo mayor= x+2000 e hijo menor=x, luego estableció la relación matemática entre éstas: x+2000+x=10000 y resolvió esta ecuación. ÉL se olvidó de la última etapa de esta Fase que era la de validar la relación matemática que había establecido, esto se ve reflejado cuando da las respuestas equivocadas debido a un error algebraico. Podemos decir que Erick entendió el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

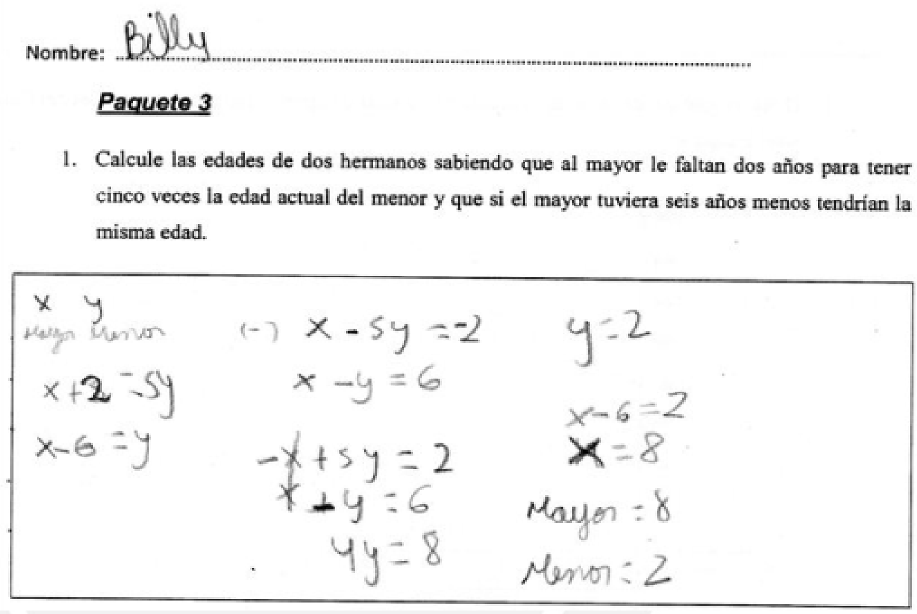
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

enunciado del problema planteado y esto le permitió establecer el modelo matemático asociado.

PAQUETE 3

En este paquete analizaremos el trabajo del alumno Billy porque consideramos interesante su desarrollo frente al problema propuesto.

- Desarrollo de Billy



Nombre: Billy

Paquete 3

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

x y
Mayor Menor
$x+2=5y$
$x-6=y$

$(-)\ x-5y=-2$
$x-y=6$

$-x+5y=2$
$x-y=6$
$4y=8$

$y=2$
$x-6=2$
$x=8$
Mayor: 8
Menor: 2

Figura 15. Desarrollo de Billy
Fuente. Ver apéndice

Billy modeló el problema haciendo uso de las variables x e y, planteó las ecuaciones que se le pedía en el anunciado y pudo hallar dichos números. Para resolver el sistema que planteó, usó el método de eliminación. De acuerdo con nuestra teoría, en la Fase Didáctica, Billy primero identificó las variables: x mayor e y menor, luego estableció la relación matemática entre las variables y las constantes al escribir: x+2=5y y x-6=y y resolvió el sistema hallando los valores pedidos pero no validó la relación matemática que modelaba al problema, ni verificó la validez de sus resultados, con lo cual habría tenido que traducir del lenguaje matemático al lenguaje natural.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

En los tres paquetes se ha podido observar que ninguno de los estudiantes hace la validación de la relación matemática que modela el problema, ni interpreta la solución encontrada, es decir, no verifican los resultados en términos del problema, y en consecuencia no transitan del lenguaje matemático al lenguaje natural.

SEGUNDA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO EVOCADOR Y MODELO DE SEGUNDA GENERACIÓN

Se observó que en los tres paquetes, la traducción correspondiente a modelos matemáticos relacionados a su carrera, se les hizo más complicada la traducción ya que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de problemas y fueron vistos por primera vez en su primer ciclo.
En los tres paquetes, el problema 2 exige traducciones con evocación de un sólo tipo de modelo matemático y tuvieron como objetivo evocar los siguientes modelos matemáticos de primera generación:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

El modelo matemático que tuvo un mayor porcentaje de traducción de problemas contextualizados que evocan fue el de la función Ingreso y en ningún paquete los estudiantes graficaron, es decir hacer el conversión del registro algebraico al gráfico. Nosotros analizaremos el desarrollo utilizado por un alumno por paquete ya que los problemas evocan un sólo modelo matemático.

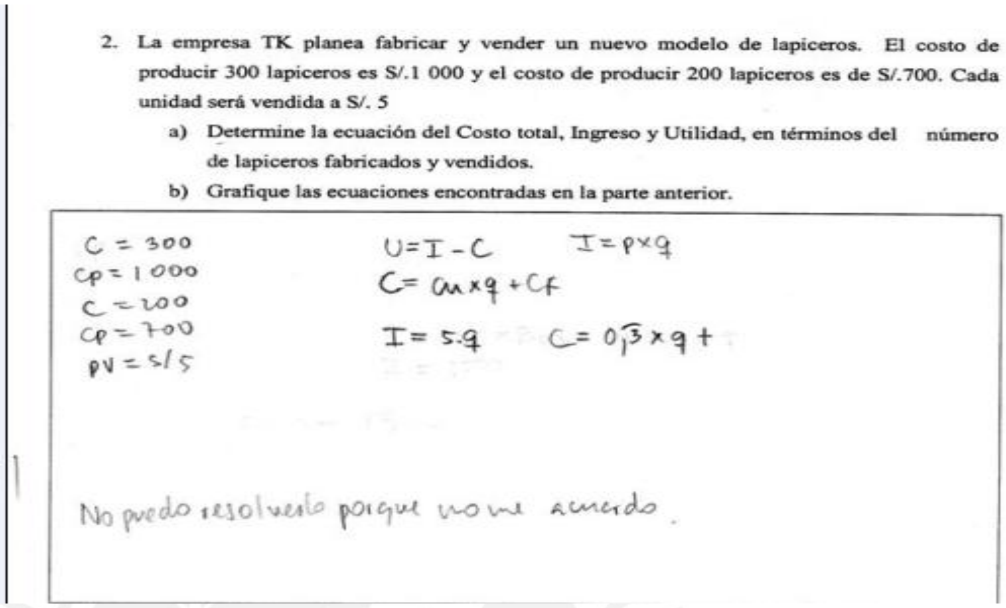
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

PAQUETE 1

▪ Desarrollo de Tiffany:


2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

C = 300
Cp = 1 000
C = 200
Cp = 700
pV = S/5

U = I − C   I = p×q
C = a×q + Cf
I = 5.q   C = 0,3 × q +

No puedo resolverlo porque no me acuerdo.

Figura 16. Desarrollo de Tiffany
Fuente. Ver apéndice

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Y además esperábamos que hicieran el conversión del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte a).

Tiffany, no pudo reconocer que en el problema no se le indicaba costo fijo ni costo por unidad y que los datos proporcionados eran puntos de paso de la función costo porque en su desarrollo muestra un tratamiento en el registro algebraico equivocado, se esperaba que pudiera hallar dicha función ya que se le enseñó a determinar la ecuación de una recta utilizando dos puntos de paso. Sin embargo, recordó los modelos matemáticos que estaban en juego y logró modelar la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

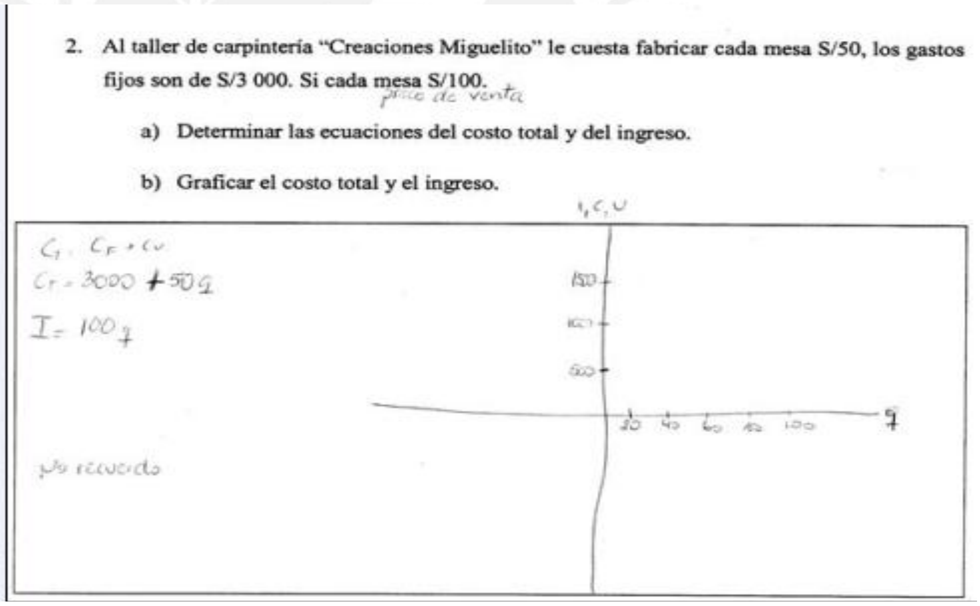
función ingreso. Tampoco realizó la gráfica que se le pedía ya que no tenía las funciones para que las graficara.

De acuerdo con nuestra teoría, en la fase didáctica, Tiffany no pudo traducir el problema contextualizado, del lenguaje verbal al algebraico, pues no logró: ni identificar las variables, ni establecer una relación entre las variables.

Ella colocó como un comentario: "*No puedo resolverlo porque no me acuerdo",* observándose la forma frecuente de proceder de los estudiantes, recurrir al recuerdo en vez del razonamiento.

PAQUETE 2

- Desarrollo de Geraldo


2. Al taller de carpintería "Creaciones Miguelito" le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa S/100.

precio de venta

a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.

b) Graficar el costo total y el ingreso.

$C_T = C_F + C_V$

$C_T = 3000 + 50q$

$I = 100q$

no recuerdo

Figura 17. Desarrollo de Geraldo
Fuente. Ver apéndice

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$

Y además esperábamos que hicieran el cambio del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

hacían la parte (a). Describiremos el desarrollo que Geraldo realizó:

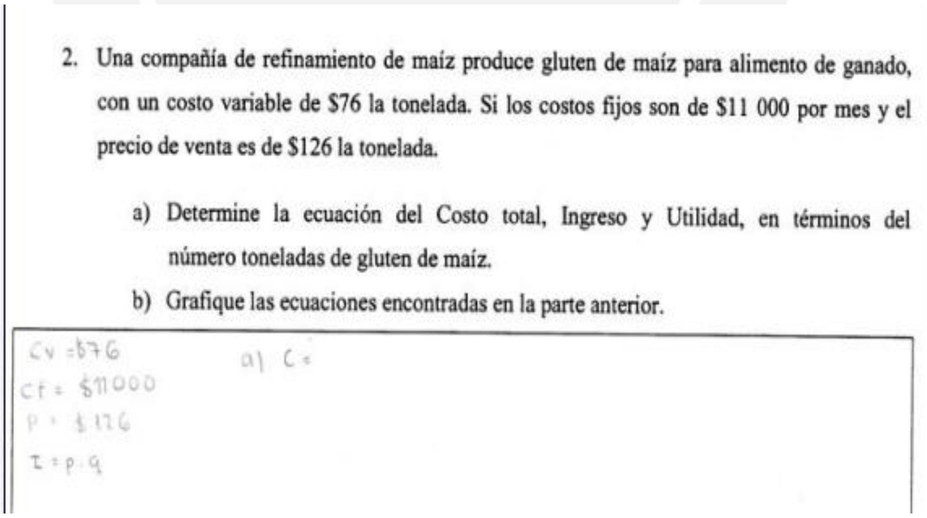
En la parte (a) se observa que el estudiante identificó lo que debería evocar y se ve reflejado en la función costo e ingreso que modela en su desarrollo, sin embargo, no identifica las constantes ni las variables. Por lo tanto no realizó la traducción correctamente lo que indica que no concluyó con la fase didáctica.

ÉL no completó la parte (b) porque sólo muestra la intención de graficar el plano pero no graficó las funciones encontradas en la parte (a). Geraldo comentó: *"No recuerdo"*

Geraldo no pudo hacer la conversión del lenguaje algebraico al gráfico.

PAQUETE 3

- Desarrollo de Claudia



2. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.

   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

Cv = $76 a) C =
Ct = $11000
P = $126
I = p.q

Figura 18. Desarrollo de Claudia
Fuente. Ver apéndice

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Y además esperábamos que hicieran el cambio del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte (a).

Claudia, en la parte (a) logra identificar cada uno de los datos del problema pero no puede relacionarlos para que luego realice la traducción final al modelo representativo del problema. No pudo concluir la fase didáctica de nuestra teoría.

En la parte (b), no graficó las funciones que se le pedían porque no las encontró en la parte (a).

En los tres problemas que se escogieron para esta categoría, la traducción toma un papel clave en el entendimiento, planteamiento y resolución de los mismos. En los tres paquetes se requería evocar los siguientes modelos:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Desde el momento en que se eligieron estos problemas para la puesta a prueba de la categorización se hizo en un campo delimitado de la matemática: Matemática Básica.

En nuestra investigación confirmamos que los problemas de esta categoría requieren de la comprensión de los conceptos: función costo total, función ingreso y función utilidad. Estimamos que su resolución refuerza su conocimiento, ya que cuando el estudiante utiliza las fórmulas entendiendo las leyes a las que representa, les está dando sentido verdadero de modelo matemático y no de “recetas” algebraicas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Con respecto a los otros problemas:

Se presentaron los problemas en el lenguaje gráfico para que los estudiantes hicieran la conversión al lenguaje algebraico; es decir, dadas las gráficas de las funciones costo, ingreso y utilidad se esperaba que los estudiantes pudieran determinar las ecuaciones de cada función pedida pero no lograron hacer dicha conversión, lo que nos indica de acuerdo con Duval, que no hubo un aprendizaje ya que los estudiantes no hicieron los cambios de registros de ida y regreso.

Hemos podido constatar que la traducción es una condición necesaria más no suficiente para la resolución de los problemas contextualizados y que el número de estudiantes que entienden y plantean los problemas contextualizados descienden según aumente la categoría. También podríamos decir que el conocimiento de las ciencias en las cuales se contextualizan los problemas juega un papel importante en el éxito de la traducción del lenguaje verbal al matemático.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

6.1 CONCLUSIONES

- Con respecto a las lecturas que revisamos en los antecedentes como las de Panizza y Drouhard (2003),Ochoviet (2009), Camarena (1999), Olazábal (2005) y Rubio (1994); estas nos ayudaron a centrar el estudio y así elaborar la pregunta de investigación. Además de guiarnos para escoger como marco teórico a la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

- La metodología de la MCC para la Fase Didáctica me dio las herramientas necesarias para seguir unos pasos coherentes y plantear la propuesta didáctica que luego es analizada a partir de los resultados obtenidos.

- En cuanto al problema de investigación formulado en este trabajo ¿De qué manera la categorización según la MCC, permite detectar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir, del lenguaje verbal al matemático y viceversa, problemas contextualizados cuando estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos variables? Se pudo responder cuando se hizo el diseño de la propuesta y analicé los resultados de ella. En estos análisis se pudo detectar que los estudiantes presentan dificultades para llevar a cabo la traducción de los problemas contextualizados del lenguaje verbal al lenguaje matemático y viceversa, sobre todo cuando los problemas contextualizados son con enunciado evocador y modelos de segunda generación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- En cuanto a los objetivos se puede decir que éstos fueron logrados ya que se diseñó una propuesta didáctica en base a la categorización de la MCC tomando problemas contextualizados presentes en el libro texto referentes a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, esta propuesta fue evaluada y nos permitió detectar las dificultades que los estudiantes presentan para traducir, del lenguaje verbal al matemático, problemas contextualizados.

- Con respecto a la propuesta didáctica elaborada, ésta tuvo en cuenta la categorización de traducción de la MCC utilizándose la primera y segunda categoría ya que estaba dirigida a estudiantes del primer año de la carrera de Ciencias Administrativas y para ello se seleccionó problemas contextualizados que se encontraban en su libro texto. Esta propuesta tuvo como objetivo que los estudiantes lograran traducir, del lenguaje verbal al algebraico, problemas contextualizados; sin embargo este objetivo no se logró ya que los estudiantes no lograron modelar lo problemas contextualizados con enunciado evocador. También se puedo observar en este análisis que los alumnos no validan la relación matemática que modela al problema, ni verifican o interpretan los resultados.

6.2 CONTRIBUCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

- Entre los resultados importantes se tiene que el números de estudiantes que entienden y traducen del lenguaje natural al matemático, los problemas contextualizados, descienden según aumenta la categoría.

- También pudimos constatar, como lo establece la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, que el conocimiento del contexto juega un papel primordial para el éxito de la resolución de eventos contextualizados.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

- La teoría fue pertinente en nuestra investigación porque su estructura, a pesar de estar enfocada a la ingeniería, nos ayudó a evaluar el aspecto didáctico en el área de las ciencias Administrativas siendo un aporte de nuestra investigación a la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

- Se ha identificado que las categorías de traducción del lenguaje natural al matemático (problemas con enunciado literal y evocador), así como los modelos de primera y segunda generación son aplicables a las Ciencias Administrativas, constituyéndose en otro aporte a la Teoría de la Matemática en el Contexto d las Ciencias.

- En cuanto al análisis del libro, se pudo observar que la organización que presenta no es la más adecuada ya que la Unidad 05: *Ecuaciones* y la Unidad 07: *Plano cartesiano. Interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones,* se encuentran separadas por la Unidad 06: *Resolución de Inecuaciones.* Esta separación origina en los estudiantes ciertos obstáculos didácticos, pues ellos relacionan la Unidad 07 con la Unidad 06, y esto les impide que desarrollen de una forma adecuada un sistema de ecuaciones. Los ejercicios presentes en la Unidad 05 y 07, se encuentran desligados uno de otros; consideramos que deberían haber más ejercicios que se puedan relacionar entre estas dos unidades ya que para modelar problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones, primero debieron saber modelar problemas contextualizados mediante ecuaciones. También consideramos que la Unidad 07, no debería ser tratado en este primer curso porque al estudiante se le enseña a graficar una ecuación de dos variables pero no se le enseña el objeto matemático que está detrás de este tema: *Funciones.* Esto trae como consecuencia en esta unidad, que cuando se le pide al estudiante graficar el sistema de ecuaciones, éste no sepa ubicar en el plano el nombre a las coordenadas, es decir no puede identificar variable dependiente y variable independiente, al no ser enfocadas desde esta perspectiva,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ocasionan un obstáculo didáctico en los estudiantes para hacer el cambio de registros (traducción del lenguaje verbal al algebraico y del algebraico al gráfico). Con este análisis se contribuye a la mejora del texto de Ciencias Administrativas de la UPC.

6.3 RECOMENDACIÓN

- Este trabajo fue enfocado desde la Fase Didáctica de la MCC, pero sólo fue estudiada en su primera etapa porque nuestra investigación fue realizada con alumnos del primer ciclo de Ciencias Administrativas. Esta investigación puede ser extendida en un estudio con alumnos de los últimos ciclos de la carrera Ciencias Administrativas y además se podría extender a las tres etapas de la Fase Didáctica para poder analizar el desenvolvimiento de este profesional en el desarrollo de su campo laboral.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

REFERENCIAS.

Camarena, P. (2002). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los Modelos Matemáticos. Memorias del 3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México.

Camarena, P. (2000) La Matemática en el Contexto de las Ciencias: Modelo Didáctico. Documento de trabajo de la Red Internacional de Investigación MaCoCiencias. Capítulo: “Fase Didáctica” del libro: “La Matemática en el Contexto de las Ciencias”, en prensa.

Camarena G. Patricia (2000). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería.* México: Editorial ESIME-IPN.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.

Lipschutz, S. (1992). Álgebra Lineal. México: Litográfica Ingramex

Mochón, S. (1997). Modelos matemáticos para todos los niveles. En: Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 1997. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Panizza, M (2005). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones. Extraído el 15 de enero de 2012 de http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Panizza M.; Drouhard, J-Ph. (2003). Consideraciones teóricas acerca de la enseñanza de la Matemática. En La evaluación en la enseñanza. Un proyecto para las áreas de lengua y matemática, Palou de Maté, Carmen; De Pascuale, Rita; Herrera Marta; Pastor, Liliana. Buenos Aires: GEEMA .(Grupo Editor Multimedial), Argentina.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Ochoviet, T. (2009). Sobre el concepto de solución en un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Instituto Politécnico Nacional, México.

Olazábal, A. (2005). Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto. Instituto Politécnico Nacional, México.

Rubio, G (1994). Modelos didácticos para resolver problemas verbales-aritméticos-algebraicos. Instituto Politécnico Nacional, México .

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

APÉNDICE

Nombre: BRUNO

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

$\begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 6 \end{cases}$ $x = 6 + y$

$6 + y + y = 42$ $x = 6 + 18$ $cs = \{24; 18\}$

$2y = 36$ $x = 24$

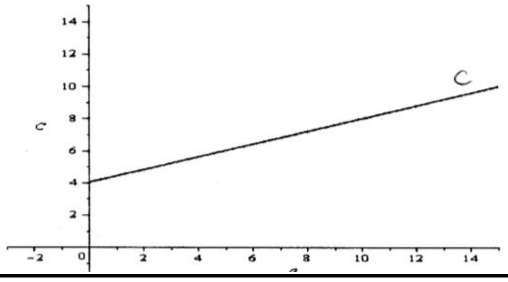
$y = 18$ Rpta: Los números son 24 y 18

2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

300 = S/.1000
200 = S/.700
1 = S/.5

a) Costo total = S/.1700 b)
Ingreso = 500 x 5
= S/.2500
Utilidad = 2500 − 1700
= 800

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total (miles $) de la producción de un determinado artículo. si dicho artículo se vende a $8 cada uno:
   a) Determinado la ecuación del costo total.
   b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: Fernando

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

$$\begin{cases} a + b = 42 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

$2a = 48$

$a = 24$

∴ a y b

24 y 18

2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

~~Rec~~

$C_v = 1000 \rightarrow q = 300$

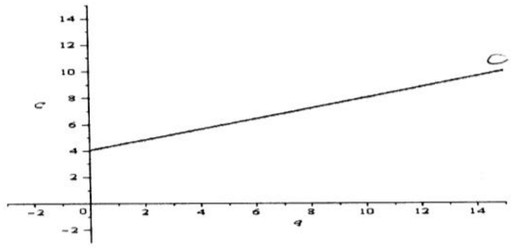
$C_v = 700 \rightarrow q = 200$

$P_v = 5$

$U = P_v . q - (C_u q +$

$= 5q - ($

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total (miles $) de la producción de un determinado artículo. si dicho artículo se vende a $8 cada uno:
   a) Determinado la ecuación del costo total.
   b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso



$P_v = 8$

$CT = C_u . q + P_v$

$= 10000 . 14 + 8$

$= 140000 + 8$

$= 140008$

⇒ La 1 es sólo por razonamiento.

⇒ La 2 no me acuerdo la formula

⇒ La 3 no sé.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: KATHERINE

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

| x | y |

$x + y = 42$
$x - y = 6$
$2x = 48$
$x = 24$
$24 + y = 42$
$y = 18$

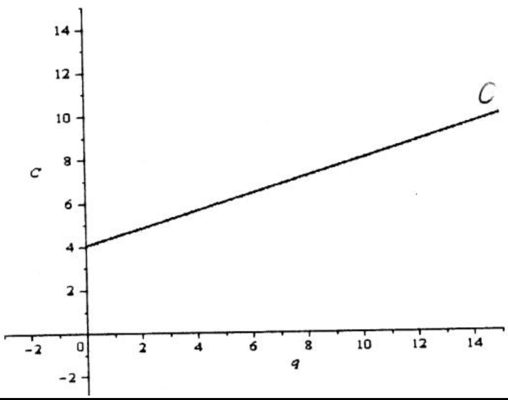
los 2 numeros son:
$x = 24$
$y = 18$

2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

300 = 1000
200 = 700
C/U = 5

2) Ingreso = P.q

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total (miles $) de la producción de un determinado artículo. si dicho artículo se vende a $8 cada uno:
   a) Determinado la ecuación del costo total.
   b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso (nose) → no lo hemos llevado



2) CT = Cu

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: Tiffany..

Paquete 1 Nivelación

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

$a+b=42$
$6+b+b=42$
$6+2b=42$
$2b=36$
$b=18$

$a-b=6$
$a=6+b$
$a=6+18$
$a=24$

2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

$C=300$
$cp=1000$
$C=200$
$cp=700$
$pv=S/5$

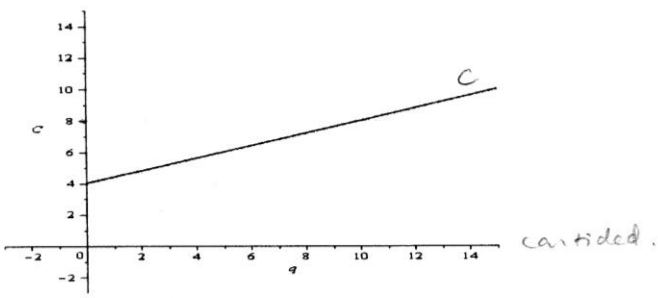
$U=I-C$ $\quad I=p\times q$
$C=cu\times q+Cf$
$I=5.q$ $\quad C=0,\overline{3}\times q+$

No puedo resolverlo porque no me acuerdo.

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total (miles $) de la producción de un determinado artículo. si dicho artículo se vende a $8 cada uno:

   a) Determinado la ecuación del costo total.

   b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: BRUNO

Paquete 1

1. Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6.

$$\begin{cases} x+y=42 \\ x-y=6 \end{cases} \qquad x=6+y$$

$6+y+y=42$

$2y=36$

$y=18$

$x=6+18$

$x=24$

$CS=\{24;18\}$

Rpta: Los números son 24 y 18

2. La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

300 = S/.1000

200 = S/.700

1 = S/.5

a) Costo total = S/.1700

Ingreso = 500 x 5

= S/.2500

Utilidad = 2500 − 1700

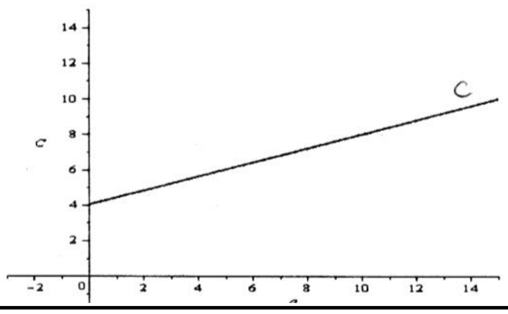
= 800

b)

3. El gráfico mostrado representa la ecuación costo total (miles $) de la producción de un determinado artículo. si dicho artículo se vende a $8 cada uno:

   a) Determinado la ecuación del costo total.

   b) Determinar y graficar la ecuación del ingreso



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: Erick

Paquete 2

1. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Hijo mayor = x + 2000
Hijo menor = x

x + 2000 + x = 10000
2x = 12 000
x = $ 6000

Hijo mayor = $ 8000   Hijo menor = $ 6000

2. Al taller de carpintería "Creaciones Miguelito" le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa S/100.

   a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.

   b) Graficar el costo total y el ingreso.

$C_v = 50$
$C_F = 3000$
$p = 100$

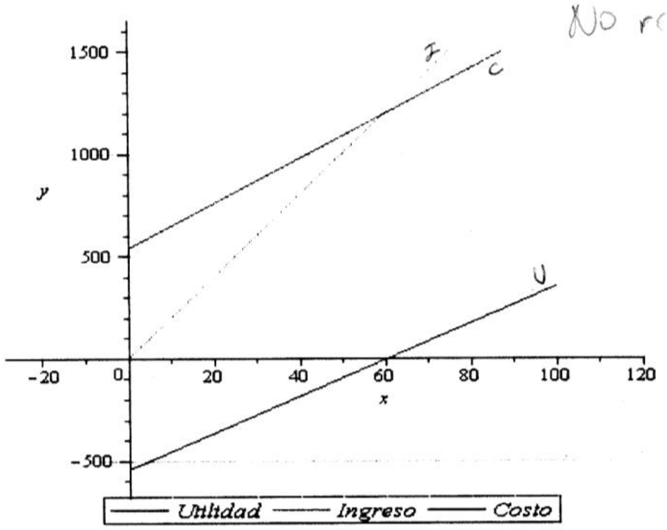
$C_T = (C_v \cdot q) + C_F$

$I = p \cdot q$
$I = 100q$

No recuerdo la ecuación de costo total.

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total, Ingreso y Utilidad. Halle las ecuaciones del Costo total, Ingreso y Utilidad

No recuerdo.



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Nombre: Geraldo

Paquete 2

1. Un padre reparte $10 000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2 000 más que al primero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Hijo Hijo
x y

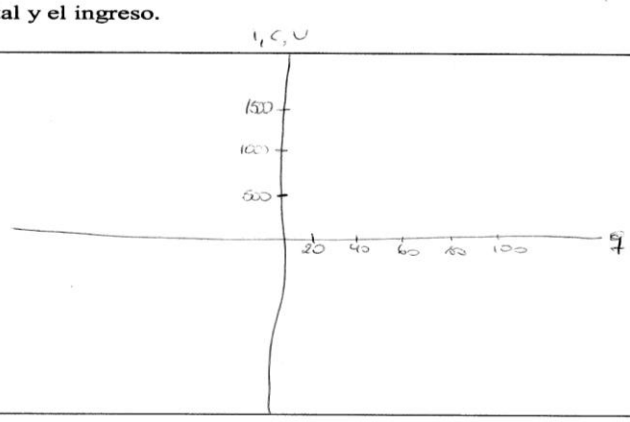
$$\begin{cases} x + y = 10000 \\ x + 2000 - y = 10000 \end{cases}$$

No recuerdo

$x + y = 10000$
$x - y = 8000$
$x = 8000$

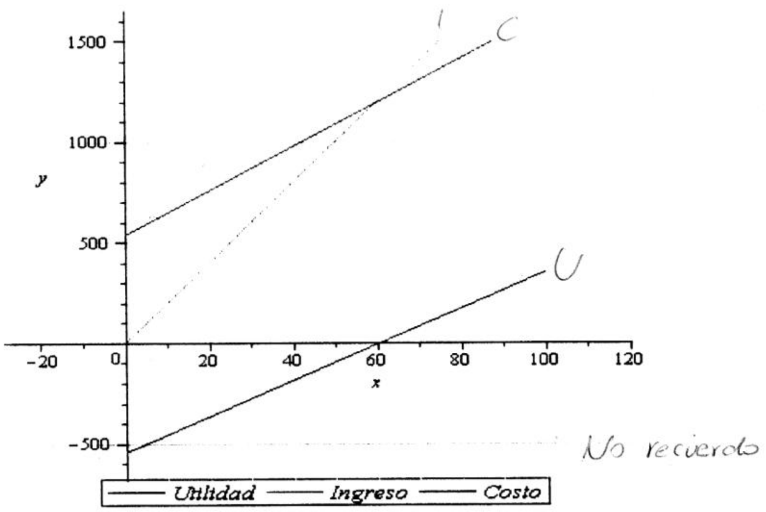
2. Al taller de carpintería "Creaciones Miguelito" le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa S/100.
precio de venta
   a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.
   b) Graficar el costo total y el ingreso.

$C_T = C_F + C_V$
$C_T = 3000 + 50q$
$I = 100q$



No recuerdo

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total, Ingreso y Utilidad. Halle las ecuaciones del Costo total, Ingreso y Utilidad



No recuerdo

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: Billy

Paquete 3

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

x y
mayor menor

$x+2=5y$

$x-6=y$

(−) $x-5y=-2$

$x-y=6$

$-\cancel{x}+5y=2$

$\cancel{x}-y=6$

$4y=8$

$y=2$

$x-6=2$

$x=8$

Mayor: 8

Menor: 2

2. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.

   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

no recuerdo las formulas

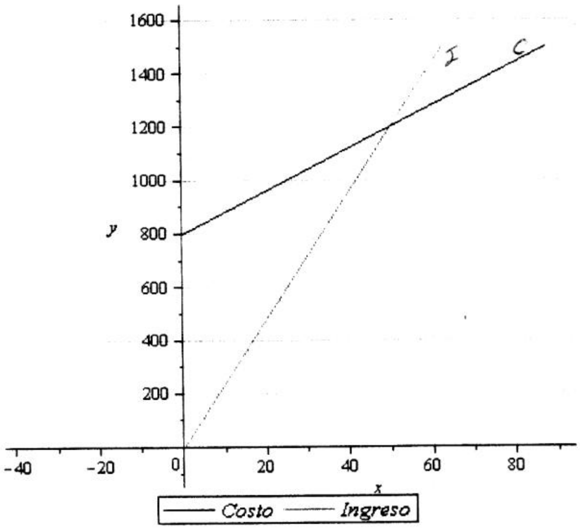
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

nó recuerdo

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total e Ingreso. Halle las ecuaciones del Costo total e Ingreso.



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

(CAU)

Nombre: claudia (Nivelación de mate) 3

Paquete 3

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

Mayor: x
Menor: y

$2 + x = 5y$

$x - 6 = y$

$2 + x = 5(x - 6)$

$2 + x = 5x - 30$

$32 = 4x$

$\frac{32}{4} = x$

$x = 8$

$8 - 6 = y$

$2 = y$

Mayor = 8
Menor = 2

2. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.

   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

Cv = $76
Cf = $11000
P = $126
I = p.q

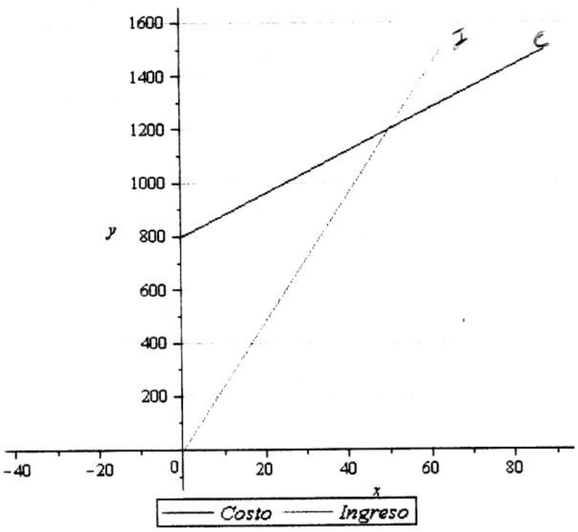
a) C =

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

No lo hemos hecho en clase.

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total e Ingreso. Halle las ecuaciones del Costo total e Ingreso.



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Nombre: Pilar .... CAU

Paquete 3

1. Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

Mayor = 8 años
Menor = 2 años

Mayor - 5 menor
6 -
$8+2 = 5y$
$\frac{10}{5} = 5y$
$2 = y$

$x+2 = 5y$
$x-6 = y$
$x+2 = 5(x-6)$
$x+2 = 5x-30$
$30+2 = 5x - x$
$32 = 4x$
$8 = x$

2. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

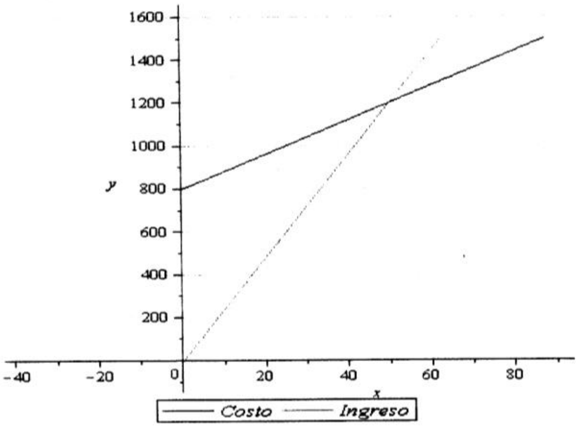
   a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.
   b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

costo variable $76 +
costo F = 11 000 mes
P = 126

CV =

C =

3. Dadas la gráfica de las ecuaciones del costo total e Ingreso. Halle las ecuaciones del Costo total e Ingreso.



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis