PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA RELACIONADA A LAS CONCEPCIONES DE FRACCIÓN QUE SE PRESENTA EN EL TEXTO ESCOLAR MATEMÁTICA QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

MILAGROS EDITH CARRILLO YALÁN

ASESOR DE TESIS:

DRA. JESUS VICTORIA FLORES SALAZAR

MIEMBROS DEL JURADO:

MG. ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DRA. JESUS VICTORIA FLORES SALAZAR

DRA. MARIA JOSE FERREIRA DA SILVA

LIMA - PERÚ

2012

Dedicatoria:

A mis queridos padres y esposo, por todo el apoyo que me han brindado.

Agradecimientos:

A Dios, por las personas que puso en mi camino.

A la Directora de la Maestría, Mg. Rosa Cecilia Gaita, por su apoyo constante en la realización de esta tesis.

A mi asesora de tesis, Dra. Jesús Victoria Flores, por su orientación y dedicación.

A los profesores que contribuyeron en mi formación académica durante todos estos años en la PUCP.

RESUMEN

El punto de partida de esta investigación ha sido la gran dificultad que muestran los alumnos en la compresión de las fracciones. Esta dificultad, presente tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, se observa principalmente en los niveles básicos de educación. Para identificar uno de los posibles factores que influyen en tal problema se analizó la organización matemática (OM) relacionada con las concepciones de fracción presentes en el texto escolar Matemática Quinto grado de Educación Primaria, el cual tiene la relevancia de ser distribuido por el Ministerio de Educación del Perú a todas las escuelas públicas del país. El mencionado texto, en la parte correspondiente al tema de fracciones, enfatiza en la concepción de parte–todo utilizando, principalmente, la técnica del doble conteo de las partes. Por tanto, el análisis se fundamenta en el estudio de las OM vinculadas a las concepciones de fracción en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como producto de un proceso de estudio. Esta teoría supone que toda actividad humana, regularmente realizada, puede describirse como un modelo único que se resume con la palabra praxeología. Esta palabra se deriva de los términos praxis y logos. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, a los tipos de problemas o tareas que se estudian y a las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que justifica a la tecnología (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

La presente investigación se ha estructurado de la siguiente manera: En el capitulo1, se presenta el problema de investigación, la presentación de la problemática, los antecedentes, la justificación del estudio, la formulación del problema y los objetivos de la investigación.

En el capítulo 2, se presenta la diferencia entre las terminologías fracción, números fraccionarios y números racionales. En el capítulo 3, se presenta un estudio de la génesis de las fracciones, es decir el desenvolvimiento histórico.

En el capítulo 4, se presenta el marco teórico, las organizaciones matemáticas (OM) y las concepciones de fracción.

En el capítulo 5, se presenta la metodología de la investigación; la selección del texto escolar Matemática Quinto grado de Educación Primaria; se explica su relevancia y los criterios para el análisis del texto escolar en base a los objetivos propuestos; el análisis por secciones de la unidad 4 “la división de un todo en partes iguales” del citado libro escolar y se presentan los resultados obtenidos.

Finalmente en el capítulo 6 se presenta las consideraciones finales y las sugerencias para futuras investigaciones.

INDICE

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1:

PROBLEMÁTICA

1.1 PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Uno de los conceptos centrales de mayor dificultad para su comprensión en las matemáticas escolares es el de las fracciones, ello se manifiesta en numerosas investigaciones, como por ejemplo, Perera y Valdemoros (2007) citado en Flores (2010) quienes reconocen a las fracciones como uno de los contenidos de las matemáticas que presenta dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación. Fandiño (2005) citado en Flores (2010) también reconoce que la noción de fracción y la operatividad correspondiente son los contenidos más estudiados desde el inicio de la investigación en Matemática Educativa debido a que representa una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de nivel primaria de todo el mundo.

En consecuencia, un primer cuestionamiento sería: ¿Cuáles son los obstáculos generados en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones?

Silva (2005) y Perera et al. (2007) coinciden en que las dificultades para su aprendizaje se deben a las diversas concepciones que admite este objeto matemático; entre los cuales, tenemos: parte-todo, cociente, razón operador y medida.

Debido a esta diversidad de concepciones, sería lógico preguntarnos: ¿Es necesario el dominio de todas ellas? La respuesta es afirmativa, ya que existen situaciones problemáticas que pueden ser resueltas por algunas de estas concepciones pero no por otras.

Jahn y otros (1996 citado en Silva, 2005) sostienen que la introducción de los números fraccionarios en los 4to, 5to y 6to grados de educación primaria se realiza con la técnica del doble conteo de las partes en superficies totalmente divididas en partes congruentes. Ello conduce al niño a entender las fracciones, como si fuesen dos números naturales que se colocan uno encima y el otro debajo de una línea. Aunque el enfoque con figuras divididas convenientemente permite representar exitosamente una parte pintada de la figura con un número fraccionario, esta representación podría conducir al fracaso cuando el objeto representado se escape de ese patrón.

Observemos, por ejemplo, la figura1. El alumno podría asociar la representación figural de la izquierda con la fracción $\frac{2}{8}$ pero podría incurrir en el error de asociar la de la derecha con $\frac{1}{7}$.

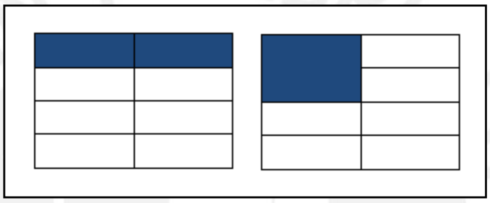


Figura 1: Representación figural de las fracciones

Fuente: Silva (2005)

En Didáctica de la Matemática, el análisis de textos o manuales escolares se considera una vía eficaz y útil para identificar la existencia de los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de conceptos matemáticos, los cuales se originan debido a la naturaleza de éstos o por la forma en que fueron concebidos con anterioridad (Bachellard,1976).

La pertinencia de este análisis está justificada sobre todo porque los libros de texto continúan siendo el principal documento curricular utilizado por el profesorado para enseñar matemáticas en el aula, al tiempo que son generadores potenciales de inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos (Gómez, 2009). Este peligro es confirmado por Vargas (2001) quien considera que los libros de texto no sólo pueden facilitar sino también dificultar o, inclusive, impedir el aprendizaje escolar.

1.2 ANTECEDENTES

Entre las investigaciones realizadas con respecto al concepto de fracción se encuentran las de Ríos (2006) y Silva (2005), quienes han estudiado, respectivamente, las dificultades que presentan, en relación a este tema, tanto alumnos como profesores.

Ríos (2006) describe las siguientes dificultades:

1. Presentación de la definición de la fracción bajo la interpretación parte-todo con representación figural mediante figuras geométricas, tales como el círculo y el rectángulo. El tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no se considera el caso discreto. La fracción impropia es trabajada bajo la concepción de parte-todo, no se le encuentra significado al hecho de que van a tomar más partes de las que se ha dividido la unidad. El número mixto en la mayoría de los casos no es tratado.

2. Se realiza la clasificación de las fracciones, donde se observa que la misma no explicita un criterio para ser realizada. Se habla de fracciones propias e impropias. Sin embargo, la unitaria, nula, entera y decimal no tienen un criterio bien definido.

3. Se define las fracciones equivalentes como aquellas que su representación gráfica es la misma o su cociente es el mismo. Esta es asociada al algoritmo de la división.

4. Se trabajan los procesos de simplificación y amplificación de forma algorítmica, es decir, no se les da una interpretación grafica en los niveles iniciales.

5. Para ordenar fracciones generalmente estas son trasformadas a decimales equivalentes y sobre estos últimos se hace la ordenación. En pocos casos se trabaja su representación grafica en la recta real, es decir no se trabaja la representación del concepto de medida.

6. No se establecen diferencias entre las fracciones y los números racionales.

En la misma investigación se afirma que estas dificultades en el aprendizaje de las fracciones se deben a las diversas concepciones que admite este objeto matemático, entre los cuales tenemos: parte-todo, cociente, razón, operador y medida y a la falta del dominio de todos éstos por parte del docente, originándose así un obstáculo para la comprensión de las fracciones, tanto en el alumno como en el propio docente.

En esa misma línea, Silva (2005) realiza estudios sobre el concepto de números fraccionarios en un grupo de profesores, su aprendizaje y las dificultades de los alumnos del 5to grado de primaria al tratar el tema, afirmando que los profesores construyen organizaciones matemáticas para números fraccionarios muy rígidas con tipos de tareas que asocian, sobre todo, la concepción parte-todo en contextos de superficies, usando la técnica de doble conteo de las partes y, con menos incidencia, las otras concepciones tratadas por Behr y otros (1983): medida, cociente, razón y operador.

Para superar los problemas en la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios, la autora sostiene, en la misma Investigación, la necesidad de elaborar una organización matemática que considere las demás concepciones de números fraccionarios y las relaciones entre aquellas. Así, las concepciones de medida, cociente y razón, se deben asociar directamente con las concepciones de parte-todo y operador permitiendo la construcción del conocimiento de medida, distribución y comparación (ver figura2) relacionado a los números fraccionarios para, finalmente, enlazar estos últimos, facilitando así la construcción del campo de los números racionales.

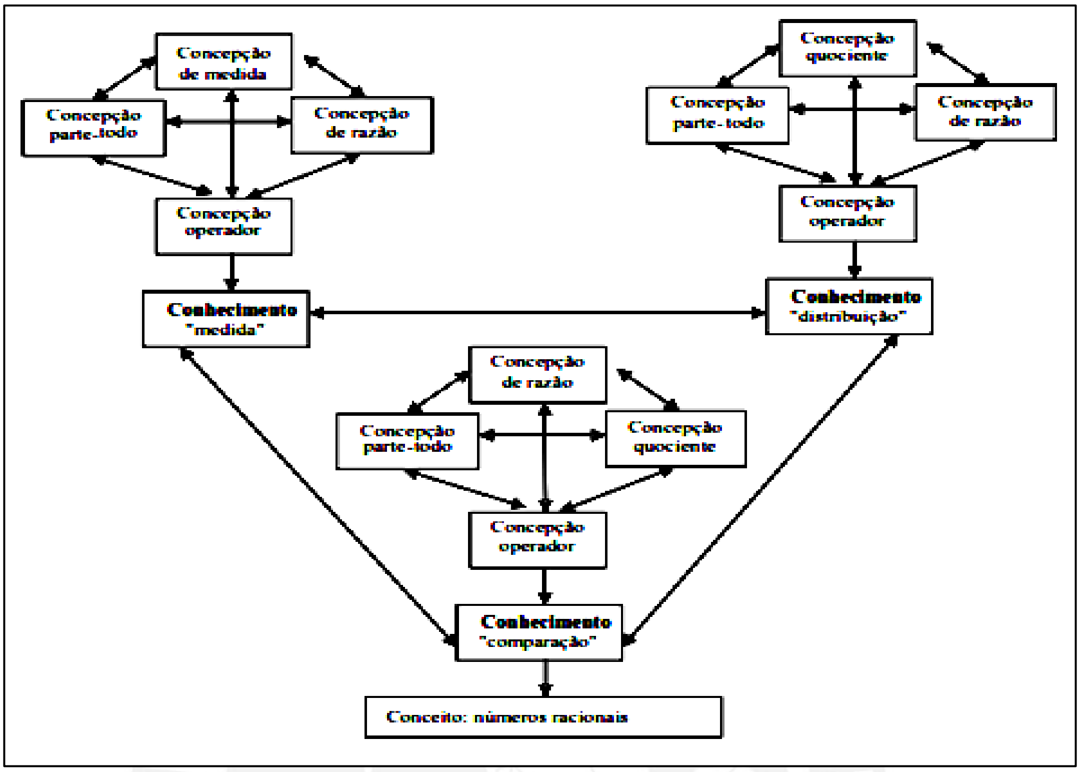


Figura 2: Esquema del concepto de números racionales

Fuente: Silva (2005)

1.3 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El contexto actual de nuestra sociedad exige una educación de calidad. Lo cual compromete, especialmente, a aquellos que se desempeñan en el ámbito educativo. Sin embargo, la realidad nos muestra que existen dificultades en el dominio de conceptos matemáticos básicos y fundamentales. Tales dificultades podrían agudizarse si los textos de consulta empleados en las aulas presentan limitaciones especialmente de tipo conceptual.

Investigaciones en Enseñanza de la Matemática como la de Ramírez (2006) y Piscoya (2002) observan esta problemática. Así, el primero de ellos manifiesta que el problema parte de la situación académica de los estudiantes de la carrera de Educación Primaria, pues son estos estudiantes, carentes de conocimiento en la resolución de problemas matemáticos, los primeros en graduarse como docentes y los primeros en enseñar al niño del V ciclo (4to y 5to grado) a matematizar la realidad para conocerla y dominarla. En la Investigación de Piscoya (2002) el autor realiza una reflexión y manifiesta que, muchos profesores de educación primaria no llegan a dominar los conceptos básicos y las estrategias para enfrentar con éxito la resolución de problemas matemáticos.

A partir de las investigaciones previamente revisadas, se puede afirmar que se presentan dificultades en el aprendizaje de las fracciones, particularmente, en lo relacionado a las concepciones de fracción: parte-todo, cociente, razón operador y medida.

Para esta investigación, realizaremos un análisis de cómo se presentan las concepciones de fracción en el texto de Matemática Quinto Grado de Educación Primaria, analizando la Organización Matemática que convive en una institución.

1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las dificultades para el aprendizaje de las fracciones, podrían estar vinculadas a la manera como los textos escolares abordan la enseñanza de la fracción, más aún, si en dichos textos se omiten algunas concepciones y, además, la organización matemática no guarda relación con éstas.

Esta investigación tiene como punto de partida la siguiente pregunta:

¿Cuál es la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria?

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo General

- Analizar la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.

Objetivos específicos

- Identificar las concepciones de fracción que se encuentran en el texto de Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.
- Identificar los tipos de tareas y técnicas relacionadas a las concepciones de fracción que se encuentran en el texto de Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.
- Determinar la coherencia entre las representaciones y las concepciones de fracción que se encuentran en el texto de Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.

CAPÍTULO 2:

FRACCIÓN, NÚMEROS FRACCIONARIOS Y NÚMEROS RACIONALES

En la investigación de Silva (2005), la autora realiza una reflexión sobre el uso de los términos: fracción, números fraccionarios y números racionales manifestando lo siguiente:

Según Rouche (1998) el término fracción es una representación simbólica: “un número encima y un número debajo”

De acuerdo a Caraca (1984) los enteros son racionales pero no son números fraccionarios, aunque se presenten éstos en el estudio de los números racionales escritos de la forma a/b, tal hecho es claro cuando se presenta la siguiente clasificación para los números reales:

$$\text{Números reales}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \\ \text{Irracionales}\end{cases}$$

Davis y Hersch (1985) identifican a la fracción racional cuando define a los números racionales como: “Cualquier número que sea la razón de dos enteros: 1/1, -6/7, 21/102”.

D´Augustine (1976) define a los números fraccionarios como cociente de dos números naturales de modo que el divisor sea diferente de cero, esto es, un número fraccionario es cualquier número que puede ser escrito en forma de a/b , donde a y b son N y b $\neq 0$. Una fracción puede ser definida como un símbolo o un nombre para designar un número fraccionario y además dos fracciones designan un mismo número fraccionario.

Alphonse (1995) asocia la fracción a un operador de fraccionamiento pues afirma que las fracciones no son números, aunque, en contextos, son operaciones de medida.

Según Ciscar y García (1998) la idea de fracción es apropiada a situaciones en que está implicada la relación parte-todo, esta relación es una de las posibles interpretaciones de fracción. Por otro lado, también podemos representar, mediante una fracción, situaciones en que está implícita una relación parte-parte o todo-todo que nos lleva a la interpretación de fracción como razón. Todavía existen otras interpretaciones de fracciones como: operador y cociente de dos números.

Por otro lado, Hébert (1980) describe a la fracción como un símbolo de la forma a/b, donde a y b son números naturales, siendo b diferente de cero. Además señala que toda fracción por ejemplo 3/5, es igual a una infinidad de otras fracciones, 6/10, 9/15,…Esta clase de fracciones todas iguales entre sí, es lo que se llama número racional y para representar tal número se escoge cualquiera de las fracciones de la clase (fracciones iguales) que la define, por ejemplo, la fracción que es irreductible. Así 3/5 es una fracción; pero se podrá considerar a 3/5 como representante del número racional definido por la clase de fracciones iguales: 3/5, 6/10, 9/15,-15/-25, -12/-20. Toda operación, igual o desigual, en la que figure un número racional, aparecerá bajo la forma de la expresión correspondiente de las fracciones que le representen. Si entre las fracciones iguales de una clase que define un número racional, se encuentra una (que será necesariamente la irreductible) cuyo denominador sea 1, se identifica el número racional con el entero natural igual al numerador de la fracción cuyo denominador es 1. Por ejemplo, el número racional definido por la clase 5/1, 10/2, 15/3, 20/4,… se identifica con el entero natural 5, o el número racional 5. El número racional definido por la clase 0/1, 0/2, 0/3,…se identifica con el 0. Que es un número racional 0. Los enteros naturales forman así parte del conjunto de los números racionales.

La investigación de Elguero (2008) señala que en los textos de nivel universitario Algebra I de Armando Rojo, se describe en un lenguaje menos formal la definición de los números racionales (Q):

El punto de partida del concepto de número es la teoría de los números naturales y sus operaciones. La introducción del cero y de los enteros negativos es la primera ampliación del concepto de número y es generada por la necesidad de destruir el obstáculo aritmético de la sustracción en el sistema de los naturales. De esta manera emergen los números enteros (Z) los cuales gozan de las mismas leyes formales para la adición y la multiplicación que las mismas operaciones en los números naturales. Sin embargo, Z plantea también restricciones para operar. Una de ellas es para efectuar la división a:b entre dos números enteros cuando a no es múltiplo de b, situación que se plantea en el marco algebraico al resolver una ecuación de la forma bx=a, con b distinto de cero. Por ello, la necesidad de ampliar el dominio numérico existente e incorporar nuevos símbolos para dar validez general a la propiedad existencial de la división. Los nuevos números emergen como cocientes de números enteros a y b utilizando el símbolo a/b, para notarlos, sujeto a la regla que b.(a/b)=a, es decir, a/b es por definición solución de la ecuación b.x=a. De esta manera, los números racionales son por definición cocientes. Cada uno de tales cocientes recibe el nombre de fracción. El autor señala, que es posible asociar a cada fracción a/b una familia de fracciones [a/b], integrada por fracciones que representan al mismo número. Si m/n es una fracción de la familia [a/b] se verifica la igualdad a.n=b.m.

Las fracciones y las respectivas familias que representan verifican las siguientes propiedades:

- Cada fracción a/b pertenece a su propia familia [a/b]
- Si una fracción pertenece a la familia de otra, entonces ambas son de la misma familia.
- Cada fracción pertenece a un número racional y sólo a uno. Estas propiedades reflejan el carácter reflexivo, simétrico y transitivo de la relación de igualdad definida entre dos pares de números enteros. Cada familia de fracciones define un número racional y una fracción representante de dicha familia.

De acuerdo con Rojo (2001, citado en Elguero 2008), la construcción anterior de Q a partir del sistema números naturales puede escribirse en un lenguaje equivalente como sigue: Sea Z*=Z-{0} y ZxZ*= {(a;b) / a$\in$ Z y b$\in$ Z*}. Se define en ZxZ* la siguiente relación R: (a;b)~(c;d) $\Leftrightarrow$ a.d=b.c.

Esta relación verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, de manera que es una relación de equivalencia. Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia, esta relación produce una partición en el conjunto ZxZ*. La clase de equivalencia de un elemento genérico (a,b) es.

$$K_{(a;b)}=\{(x,y) \in ZxZ^*/(x,y) \sim (a;b)\}$$

Donde,

$$(x,y) \sim (a;b) \Rightarrow b.x=a.y$$

En la partición de ZxZ* el conjunto de índices está dado por la totalidad de pares (a;b) de elementos coprimos, tales que p$\in$Z y q$\in$ Z* ,

Se define: Número racional es toda clase de equivalencia determinada por la relación de equivalencia definida en ZxZ*

Conjunto de los números racionales es el cociente de ZxZ* por la relación de equivalencia:

$$Q=\frac{Z \times Z^*}{\sim}$$

Además, el símbolo a/b denota un número racional, es decir una clase de equivalencia K(a,b) de acuerdo con la definición del conjunto de índices.

Se definen la adición y la multiplicación en ZxZ* como se muestra a continuación, de la siguiente manera de modo que sean compatibles con la relación de equivalencia definida en dicho conjunto y prolonguen a la vez las respectivas operaciones en Z:

$$(a,b)+(c,d) = (ad+bc , bd)$$
$$(a,b). (c,d) = (ac, bd)$$

Si se define una correspondencia entre Z y Q tal que a cada entero "a" le asocie el racional k(a;1), es posible identificar a Z como un subconjunto de Q y a cada elemento de Z con un elemento de Q. Esto significa los números enteros son los racionales de la forma k(a; 1) donde a es un entero positivo, negativo o cero.

Desde un punto de vista estrictamente lógico, según el autor, estas construcciones implican una gran complejidad. Los números racionales se identifican con clases de equivalencia de pares ordenados de enteros (familias de fracciones en otro lenguaje) cuyos infinitos elementos son a su vez una colección infinita de números racionales. Esta construcción de Q emerge en la historia de la matemática en un contexto de justificación del saber en términos puramente aritméticos, genera una concepción abstracta de tales números totalmente alejada de las problemáticas del mundo real que le dieron origen.

El proceso de ampliación del dominio de los naturales al de los racionales implica la creación de nuevos números expresados a través de símbolos abstractos. Pero la creación de estos objetos matemáticos es el resultado de un proceso constructivo a lo largo de la historia que ha transitado por distintas etapas, las cuales representan distintas maneras de pensarlos. Recién al final del siglo XVIII e inicio del XIX aparece la representación fraccionaria legitimada como un número.

Maza (1999, citado en Ríos 2006), señala que la fracción es aparentemente una pareja de números enteros, por tal razón históricamente se le había denominado número roto o quebrado, pero seguía siendo un número, no dos.

Courant (1954, citado en Elguero 2008), señala que el proceso de legitimación de estos números ha sido lento y ello se explica por la inherente tendencia del hombre hacia lo concreto, representado por los números naturales; sólo en el ámbito de lo abstracto puede crearse un sistema satisfactorio de la Aritmética.

Silva (2005), utiliza el término de fracción como una representación, es decir, una expresión que se escribe con numerador y denominador; un número racional, todo aquello que puede ser escrito en forma fraccionaria con numerador y denominador entero y también puede ser escrito en forma decimal (otra representación); así mismo, el número fraccionario es todo aquello que puede ser representado en forma de fracción (inclusive irracional o complejo).

Es así que, después de presentar los puntos de vista de diferentes autores y para efectos de esta investigación, la fracción es una representación, es decir, una expresión que se escribe con numerador y denominador racional o irracional. Sin embargo, teniendo en cuenta que el texto a ser analizado es de 5to grado de Educación Primaria, sólo se encontrará representaciones de la forma:

$$\frac{a}{b}.\ \text{donde}\ \ a \in \mathrm{N}, \mathrm{b} \in \mathrm{N}\ \text{y}\ \mathrm{b} \neq 0.\ \text{Asumiendo}\ \ \text{que}\ \mathrm{N} = \{0; 1; 2; 3; 4...\}$$

CAPÍTULO 3:

ESTUDIO DE LA GÉNESIS DE LAS FRACCIONES

En esta parte de la investigación abordaremos un breve estudio de la génesis de las fracciones, con el objetivo de identificar como surgen las concepciones relacionados con tal saber.

Para ello, Sfard (1991 citado en Mora, 2006) considera fundamental diferenciar el término “concepto” del término “concepción”. La palabra “concepto” (reemplazada por “noción”), será mencionada cuando una idea matemática esté considerada en su forma “oficial”. El grupo total de representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto será llamada concepción.

Esta precisión diferencia el conocimiento matemático, que se comparte socialmente y que es objeto de transformaciones para ubicarlo como un saber escolar que será el objeto de enseñanza, de aquel conocimiento subjetivo que los alumnos asocian al conocimiento oficial.

Así pues, el concepto matemático que se posee es una concepción, tal concepción, es la que “vive” en la mente y dependerá de las experiencias que han permitido establecer cierta relación personal con todo aquello, que desde la perspectiva del sujeto, se relaciona con el concepto. Es de suponer que esta concepción está sujeta a cambios, dependiendo de las diferentes y continuas interacciones entre el sujeto y las situaciones asociadas al concepto matemático.

3.1 DESENVOLVIMIENTO HISTORICO

La necesidad de medir, dividir y distribuir la riqueza material de las sociedades impulsó el nacimiento de los primeros sistemas numéricos. No se tiene con exactitud los datos y fechas en que fueron descubiertos los números cardinales, sin embargo, los documentos más antiguos muestran la presencia de este concepto en China, india, Mesopotamia y Egipto, juntamente con las primeras notaciones de fracciones.

Desarrollaremos tres momentos importantes de la historia en que las que fracciones fueron consideradas: Edad antigua, Edad media, Edad Moderna.

- **EDAD ANTIGUA**

EGIPTO

Aunque el sistema de numeración de los egipcios era la base 10, desarrollaron un sistema de representación fraccionaria y toda una aritmética para calcular con tales números. De ese modo, los números 1/2, 1/3, 1/4 y 2/3 tenían símbolos especiales, inicialmente se colocaba una pequeña elipse (que significa parte), encima del símbolo de un numero natural utilizado como denominador, con el tiempo, la elipse se transformo en un punto. Por ejemplo, 1/5 seria representado por $\dot{5}$

Para los egipcios, no existía un símbolo para el número 2/5, por ejemplo, para representarlo utilizaban la suma 1/3 + 1/15, lo que obligaba a desarrollo de una técnica para calcularlo.

La técnica consiste en lo siguiente:

1.- Encontrar la suma de fracciones unitarias que sea igual a $\frac{19}{20}$

2.- En dichas fracciones unitarias, el numerador será siempre 1 y el denominador será el cociente de la división de 20 entre 19, más uno. Si en alguna de esas divisiones no hay resto, entonces es que hemos llegado a una fracción unitaria y por lo tanto hemos terminado.

Así:

$$P=\frac{19}{20}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 19 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad Q=1 \longrightarrow \text{la primera fracción unitaria es } \frac{1}{2}$$

$$\frac{19}{20}-\frac{1}{2}=\frac{19}{20}-\frac{10}{20}=\frac{9}{20}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 9 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad Q=2 \longrightarrow \text{la Segunda fracción unitaria es } \frac{1}{3}$$

$$\frac{9}{20} - \frac{1}{3} = \frac{27}{60} - \frac{20}{60} = \frac{7}{60}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \hline 4 & 8 \end{array} \quad Q=8 \longrightarrow \text{la tercera fracción unitaria es } \frac{1}{9}$$

$$\frac{7}{60} - \frac{1}{9} = \frac{21}{180} - \frac{20}{20} = \frac{1}{180}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 1 \\ \hline 0 & 180 \end{array} \quad R=0 \longrightarrow \text{la división es exacta}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180}=\frac{90}{180}+\frac{60}{180}+\frac{20}{180}+\frac{1}{180}=\frac{171}{180}=\frac{19}{20}$$

Finalmente, los egipcios para representar una fracción $\frac{a}{b}$ la cual poseía un símbolo no conocido, ellos lo representaban como la suma de otras fracciones unitarias. Es decir:

Para la fracción $\frac{a}{b}$ dividimos **b** por **a** y tomamos como primara fracción unitaria $\frac{1}{Q+1}$ siendo Q: cociente de la división. Es decir sustrajimos de $\frac{a}{b}$ una fracción $\frac{1}{Q+1}$: $\frac{a}{b} - \frac{1}{Q+1} = \frac{a_1}{b_1}$.

Luego repetimos el mismo proceso hasta que la división sea una división exacta.

Entre los numerosos documentos egipcios que han llegado a nuestros días, los de tipo matemático son realmente muy escasos. El papiro matemático de Rhind, el papiro matemático de Moscú, el denominado “rollo de cuero” y los papiros de Kahun, Berlín, Reiner y Ajmin, son los únicos documentos que disponemos para poder hacernos una ligera idea del conocimiento científico de aquella época.

El papiro de Rhind es el más conocido e importante, data del 1650 a.C. aunque es, con toda probabilidad, una copia de otro más antiguo, aproximadamente del 2000 a.C. Este papiro contiene 87 series de problemas y su resolución, encontrándose en él una gran variedad de temas matemáticos, como: repartos proporcionales, ecuaciones lineales, progresiones aritméticas y geométricas, cálculos de áreas y volúmenes, pesos, etc. lo que hace pensar que este documento fue escrito con intención pedagógica.

El papiro de Rhind (1600 a.c) es una tabla que presenta una descomposición en fracciones unitarias de números de tipo n/10, con n variando de 1 a 9, representada en la siguiente figura.

n	n/10	n	n/10
1	1/10	6	1/2 + 1/10
2	1/5	7	2/3 + 1/30
3	1/5 + 1/10	8	2/3 + 1/10 + 1/30
4	1/5 + 1/5	9	2/3 + 1/5 + 1/30
5	1/2		

Tabla 1: Representación del Papiro de Rhind

Fuente: Silva (2005)

Otra tabla encontrada en el papiro de Rhind, representa los números de tipos $\frac{2}{n}$, con denominador impar entre 5 y 101, como se aprecia a continuación:

n	2/n	n	2/n
5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	17	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
7	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	19	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
9	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	21	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$
11	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	23	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$
13	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	25	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
15	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	27	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$

Tabla 2: Representación del Papiro de Rhind

Fuente: Silva (2005)

De acuerdo con Struik (1997 citado por Silva, 2005) esta representación egipcia fue utilizada por siglos y aún puede ser encontrada en Métrica de Herón (100 d.C. aproximadamente), en la que una aproximación para:

$$\sqrt{63} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

De acuerdo con Eves (2004 citado por Silva, 2005) en el papiro de Ackmin escrito entre 500 y 800 d.C. aparece un algoritmo para obtener la descomposición en fracciones unitarias: $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$, en que $r = \frac{p+q}{z}$

Finalmente, según Struik (1997), estas representaciones de fracciones unitarias persistían hasta la edad Media, cuando Fibonacci la utilizó en su Líber Abaci de 1202.

BABILÓNICOS

Los babilónicos usaron el sistema de numeración posicional de base 60, en sus escritos cuneiformes, crearon un sistema posicional ambiguo para representar a los números fraccionarios, pues los símbolos  por ejemplo, podrían representar 1x60 + 30 o 90. Todo lleva a creer que la utilización de los números fraccionarios por los babilónicos debió ser frecuente, porque aparece varias veces en los Códigos de Hamurabi (1694 a. C).

GRECIA

Para los griegos el uso de las fracciones se aprecia en tratados teóricos y demostrativos, en textos matemáticos (semejantes a los egipcios y babilónicos) y en documentos de práctica como: declaración de propiedades, cálculos y registro de cambios de monedas.

Representaban a los números por un sistema alfabético de base 10. Los números fraccionarios no unitarios tenían símbolos, usaban una línea vertical en la parte superior y a la derecha de los números que representaba el denominador:

$$\delta^{|} = \frac{1}{5} \qquad \pi\eta^{|} = \frac{1}{88} \qquad \delta^{\nu\varepsilon} = \frac{4}{55} \qquad \mu\beta^{\eta} = \frac{42}{8} \qquad \overline{\kappa}\alpha\varsigma^{|} = 21\frac{1}{6}$$

INDIA

Boyer (1974 citado por Silva, 2005) menciona que hay indicios de que el sistema posicional era de base 10, sin embrago, no se sabe exactamente como efectuaban sus cálculos.

Conforme a Ifrah (1989 citado por Silva, 2005) por causa de sus notaciones, éstos no fueron capaces de unificar la noción de fracción, ni de construir un sistema coherente para sus unidades de medida.

- **EDAD MEDIA**

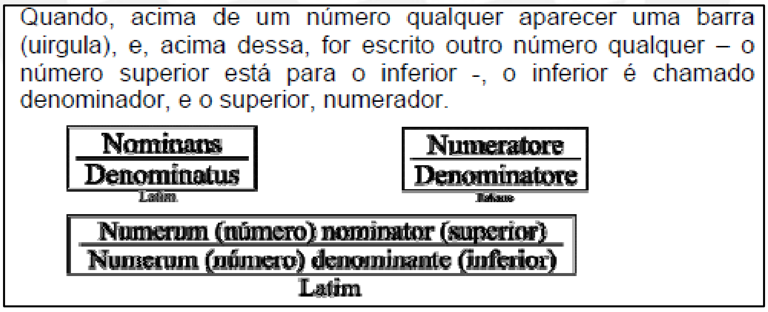
CHINA

En la China antigua se destaca el hecho de que en la división de fracciones se exige la previa reducción de éstas a común denominador. Ellos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta desarrollar el mínimo común denominador de varias fracciones.

Los chinos fueron los primeros en adoptar ciertas artimañas de carácter decimal para aligerar un poco la manipulación de las fracciones.

EUROPA

En Europa, los números romanos predominaban, por ello la aceptación del sistema posicional de base 10 fue lenta y gradual con los símbolos indianos. La primera referencia de este sistema se le atribuye a Fibonacci, en su libro Liber Abaci de 1202, en el cual presenta la terminología de los números fraccionarios que se utiliza actualmente.


Quando, acima de um número qualquer aparecer uma barra (uirgula), e, acima dessa, for escrito outro número qualquer – o número superior está para o inferior -, o inferior é chamado denominador, e o superior, numerador.

Nominans
Denominatus
Latim

Numeratore
Denominatore

Numerum (número) nominator (superior)
Numerum (número) denominante (inferior)
Latim

Figura 3: Liber Abbaci de Leonardo de Pisa (1202)

Fuente: Silva (2005)

Viéte (1579 citado por Silva, 2005) utilizaba una barra vertical para separar una parte entera de una fraccionaria y recomendaba la representación de fracciones decimales en lugar de sexagesimales.

- **EDAD MODERNA**

Para Silva (2005), la notación moderna de las fracciones se debe a los hindúes, por su numeración decimal y a los árabes por su famosa barra horizontal para separar numerador y denominador.

Las fracciones decimales aparecieron en forma accidental en la China antigua, del mismo modo en Arábia medieval y en Europa. En 1592 Viéte descubrió, a través de las fracciones, esta fórmula para π.

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}x\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}x\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}$$

El primer tratamiento de las fracciones decimales aparece en 1582, cuando se le asigna un valor aproximado a pi= 3,1416…

En 1784 Leonhard Euler publicó en su "introductio in Analysis Infinitorum", un tratado sobre el número e, sugiriendo "Para un número cuyo logaritmo y unidades, anotamos e = 2,718281…"

En 1792 se invento el sistema métrico decimal coherente y perfectamente adaptado al cálculo numérico.

En 1879 Dedekin escribió la primera definición de cuerpo numérico, donde los conjuntos de números racionales, reales y los complejos son estructuras algebraicas de un cuerpo.

En 1981, Kronecker trabaja con cuerpos numéricos formado por los conjuntos de la forma: $a+b\sqrt{2}$.

CAPÍTULO 4:

MARCO TEÓRICO

4.1 TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD):

Chevallard (1992) sostiene que el enfoque antropológico en didáctica de la matemática surgió como consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica. El mencionado enfoque señala que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una actividad humana, en lugar de ser considerada únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.

De acuerdo al enfoque antropológico, el aspecto más importante está constituido por las prácticas, y éstas se basan fundamentalmente en tareas (problemas) apropiadas. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Además, la TAD admite que toda actividad humana regularmente realizada, puede describirse como un modelo único, que se resume con la palabra praxeología.

La palabra praxeología se deriva de los términos praxis y logos. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que es la explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología.

Praxeología

Tipos de tareas	Tecnologías
Técnicas	Teorías
"Saber hacer"	**"saber"**

Figura 4: Representación de los elementos de una praxeología

Fuente: Silva (2005)

Bosch, Espinoza y Gascón (2003) sostienen que una praxeología está compuesta por tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría.

- Tipos de tareas

Desde este enfoque teórico, la noción de tareas, o mejor, de tipo de tarea, supone un objeto relativamente preciso.

Por ejemplo: Un tipo de tarea, *T*, es la siguiente: "Calcular la distancia entre x y 0"

Por otro lado, la tarea, t, tiene cabida en el tipo de tarea T y se puede decir que $t \in T$. Por otra parte, desde este punto de vista, expresiones como "Calcular", "Demostrar" se consideran un género de tareas.

> Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. Calcular... es, se ha dicho, un género de tareas; pero calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical es un tipo de tareas, lo mismo que calcular el valor de una expresión conteniendo la letra cuando se da a un valor determinado. Durante los años de colegio, el género calcular... se enriquece de nuevos tipos de tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va, en primer lugar, a aprender a calcular con vectores, después, más tarde, a calcular una integral o una primitiva, etc. Y se repetirá lo mismo, por supuesto, con los géneros Demostrar..., Construir..., o también Expresar... en función de...
>
> Por último, tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son "artefactos", "obras", construcciones institucionales, cuya

reconstrucción en tal institución, por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica. Chevallard (Op. cit. p.224)

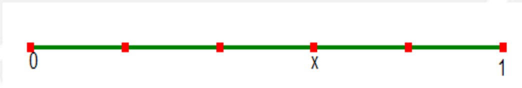
- Técnicas

Un trabajo o un ejercicio para ser realizado requiere de una manera de realizar las tareas $t \in T$: a una determinada manera de hacer, se le llama técnica. (ô).

> Sea pues T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) una manera de realizar las tareas $t \in T$. A una determinada manera de hacer ô, se le da aquí el nombre de técnica (del griego tekhnê, saber hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene pues, en principio, una técnica ô relativa a T. Contiene así un "bloque" designado por [T/ô], que se denomina bloque práctico-técnico y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina un saber-hacer: un determinado tipo de tareas, T y una determinada manera, ô de realizar las tareas de este tipo. Chevallard (Op. cit, p.225).

Por ejemplo,

T1: Calcular la distancia entre x y 0



Este tipo de tarea, puede ser resuelta por la técnica del doble conteo de las partes. Es decir, se considera a la unidad dividida en 5 partes de la misma longitud y que del punto "0" al punto "X" hay tres partes, concluyendo así que la fracción es 3/5.

Regresando al asunto de las técnicas comentamos las siguientes remarcaciones de Chevallard:

> 1. Para el tipo de tarea T simplificar una expresión algebraica no siempre se resuelve utilizando una técnica que involucre productos notables, entonces un rasgo de las técnicas es que sólo tienen éxito sobre una parte de los tipo de tarea T. Por tanto, una técnica puede ser superior a otra, si no sobre toda T, por lo menos sobre una parte.

2. “[u]na técnica ô no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica: no es así más que en casos poco frecuentes. Axiomatizar tal ámbito de las matemáticas, pintar un paisaje, fundar una familia son tipos de tareas para las cuales no existe forzosamente una técnica algorítmica... Pero es verdad que parece existir una tendencia bastante general a la algoritmización aún cuando este proceso de progreso técnico parezca a veces detenerse por largo tiempo, en una determinada institución, a propósito de tal o cual tipo de tareas o de tal o cual complejo de tipo de tareas” (Chevallard, Op.cit., p.225).

3. “[E]n una institución I dada, y a propósito de un tipo de tareas T dado, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles -que pueden existir efectivamente pero en otras instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los actores de I, de una ilusión de “naturalidad” de las técnicas institucionales en I -hacerlo así, es natural...-, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de I ignoran, o, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como artificiales, y (por ello) “contestables”, “inaceptables”, etc. En esta visión, se observa frecuentemente, entre los sujetos de I, verdaderas pasiones institucionales para las técnicas naturalizadas en la institución” (Chevallard, Op. cit., p. 225).

- **Tecnologías**

“Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional –el logos sobre la técnica -la tekhnê - ô, discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica ô, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución” (Chevallard, Op. cit., p.226).

- **Teorías**

Por esta noción se entiende una explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología.

4.2 ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS (OM) Y DIDÁCTICAS (OD)

Esta teoría distingue dos tipos de praxeología u organizaciones praxeológicas: Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y las segundas a la forma en que eso ocurre. Ambas praxeologías, Matemática y Didáctica, tienen como componente un bloque práctico- técnico, formado por tareas y técnicas y otro bloque tecnológico-teórico, formado por tecnologías y teorías.

4.2.1 ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA (OM):

Corica y Otero (2009) sostienen que la OM se constituye alrededor de uno o varios tipos de tareas matemáticas que conducen a la creación de técnicas matemáticas, las cuales se justifican por tecnologías matemáticas desarrolladas en el marco de una teoría matemática.

Los términos tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son doblemente relativos. En primer lugar, son relativos a la institución de referencia: lo que es considerado como un tipo de tarea o bien una técnica, tecnología o teoría en una institución no tiene que serlo en otra. Las técnicas existen en la medida en que pueden responder a algún tipo de tarea planteada en la institución considerada. En segundo lugar, las nociones tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son relativas a la función que cumplen en una actividad matemática determinada. Así, un mismo objeto matemático puede ser considerado como una técnica para realizar un tipo de tareas o servir como elemento tecnológico común a un conjunto de tipos de tareas y técnicas.

Los cuatro elementos citados son imprescindibles para construir cualquier praxeología; sin embargo, Chevallard (1999) también propone la noción género de tareas, con la que se refiere a un contenido que se encuentra especificado. La noción tipo de tarea supone un objeto relativamente preciso. Por ejemplo, calcular el valor de 2/3 de 1200 soles es un tipo de tarea, pero calcular es lo que se denomina un género de tareas (se caracteriza por solicitar un determinativo). También ocurrirá lo mismo con los géneros demostrar, construir, etc.

4.2.2 ORGANIZACIÓN DIDÁCTICAS (OD):

Las Organizaciones Didácticas (OD) son el resultado de un trabajo complejo y continuado que se lleva a cabo durante largo tiempo en las instituciones, cuya dinámica de funcionamiento incluye a ciertas relaciones invariables que es posible modelizar. Aquí se presentan los dos aspectos inseparables del trabajo matemático: el proceso de construcción matemática, que atañe al estudio, y el resultado mismo de esta construcción, la OM. En efecto, no hay OM sin un proceso de estudio que la engendre, pero tampoco hay proceso de estudio sin una OM en construcción (Bosch et al., 2003).

4.3 CONCEPCIONES DE FRACCIÓN

4.3.1 CONCEPCIÓN PARTE –TODO

La concepción parte-todo se da en situaciones en las que un todo es dividido en partes equivalentes (si es continuo) o es dividido en partes iguales de cantidades de objetos (si es discreto). El todo es designado como la unidad y la fracción expresa la relación que existe entre el número de partes que se toma y el número total de partes en que ha sido dividido el todo. Veamos, por ejemplo, las representaciones de la figura 6.

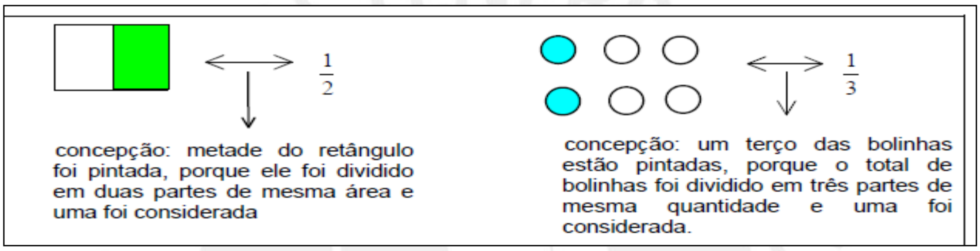


Figura 5: Representación geométrica y simbólica.

Fuente: Silva (2005)

La técnica que apoya a este tipo de tarea es la del doble conteo de partes. Para su mejor comprensión, Silva (2005) muestra dos tareas asociadas a la concepción parte-todo:

Tipo de tarea: Identificar la fracción que corresponde a la figura presentada.

- Tarea1: Qué parte de la figura está pintada.

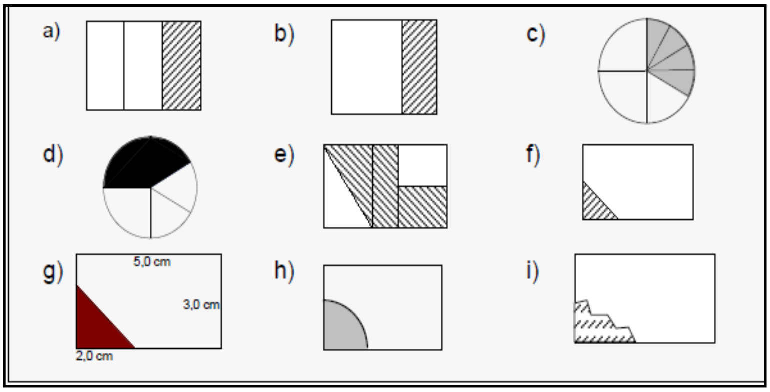


Figura 6: Representación geométrica y simbólica de concepto parte-todo.

Fuente: Silva (2005)

Aquí la autora realiza un análisis de las diferentes técnicas que ayudarán a la identificación del número fraccionario correcto:

Tarea 1a, presenta una figura usual en la enseñanza escolar que asocia la técnica del doble conteo de partes, ya que basta contar el total de partes congruentes en que el entero fue dividido y las partes que están pintadas. Así la fracción relacionada es 1/3.

Tarea 1b, la técnica consiste en superponer la figura y esconder los trazos de división, aquí obtendremos la fracción 1/3

Tarea 1c, consiste en identificar que la figura no está dividida en partes de la misma área. Así, es necesario identificar la equivalencia de las partes divididas y no divididas de la figura, aquí obtendremos la fracción 4/12 que representa también 1/3. Es necesario tener que dividir toda la figura en partes congruentes para confirmar el doble conteo.

Tarea 1d, es necesario percibir la equivalencia entre las partes que están pintadas y no están pintadas para luego subdividirlos. Aquí la figura puede ser dividida en 12 partes, es decir, se obtendría 5/12. A esta técnica también se le puede asociar la adición de fracciones.

Tarea 1e, las partes de esta figura son diferentes, es preciso percibir que el triángulo y el rectángulo pintados tienen la misma área equivalente al rectángulo central. Para eso, basta comparar las medidas de cada segmento grande que compone el lado mayor del rectángulo y constatar que los dos segmentos mayores miden cada uno, el doble del segmento menor. Aquí se le asocia la fracción 3/5

Tarea 1f, esta técnica consiste en la reconstrucción de figuras presentadas con base de la parte pintada. Aquí obtendremos 1/12

Tarea 1g, la técnica usada es muy semejante a la técnica anterior, en base a la reconstrucción. Aquí tenemos 2/15

Tarea 1h, aquí no se podrá resolver con la técnica del doble conteo de la partes ni por la reconstrucción. Es necesario asociar el concepto parte-todo al concepto de razón.

Tarea 1i, el empleo de las técnicas anteriores no es suficiente. Por ello es necesario escoger una unidad de medida de área y de esta manera determinar la fracción aproximada.

Dificultades de la técnica del doble conteo:

La técnica del doble conteo de las partes puede constituir un obstáculo didáctico para construir otras técnicas. Si bien, en la enseñanza escolar el tipo de tareas presentadas en las figuras permite solamente el desarrollo de la técnica del doble conteo de las partes, no permitirá a los alumnos la construcción de otras técnicas y consecuentemente sus acciones estarán limitadas a ese tipo de tareas.

- Tarea 2: Qué parte del total de bolitas son rojas

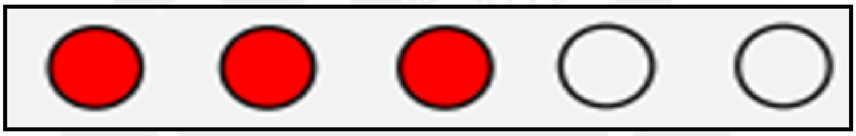


Figura 7: Representación geométrica y simbólica de concepto parte-todo.

Fuente: Silva (2005)

Esta segunda tarea asocia cantidades discretas, es decir, representa un entero con 5 bolitas, en que tres de ellas son rojas, lo que permite relacionar las cantidades de bolitas rojas con la cantidad total y con el procedimiento parte-todo podrá ser descrita como número fraccionario 3/5.

4.3.2 CONCEPCIÓN DE MEDIDA

Kieren (1992, citado en Perera et al., 2007), señala que la fracción como medida es la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad.

La concepción de medida, puede presentarse en dos situaciones diferenciadas:

- Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad
  La medida de cantidades de magnitudes como la longitud se expresan en función de la unidad básica (el metro), sus múltiplos (el decámetro, el hectómetro, el kilómetro) y sus submúltiplos (el decímetro, el centímetro, el milímetro), siendo entera la medida para cada una de estas unidades.

- Medir haciendo comparaciones con la unidad
  Escolano y Gairín (2005), señalan que la medida de magnitudes está referida inicialmente a la magnitud longitud, ya que ésta, por su carácter unidimensional, facilita la percepción de la cantidad y la construcción de unidades de longitud conocida su representación fraccionaria.

  Mediante esta magnitud se busca medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de otro segmento CD. De este modo la fracción a/b indica que el segmento AB tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento CD en b partes iguales.

La expresión a/b indica que el fraccionamiento hay que hacerlo tanto en el segmento a medir como en la unidad de medida. Una vez familiarizados con la magnitud longitud y la notación fraccionaria, podría proponerse el trabajo con la magnitud superficie que fortalece el significado de fracción como medida de figuras con cantidades de magnitud con formas distintas.

López (2012), afirma que la representación gráfica sustituye al proceso real de medida, pues lo esencial del proceso no es determinar la medida de un segmento con respecto al sistema métrico decimal, sino que hay que hacerlo con respecto a un segmento unidad del que se desconoce su longitud en términos de unidades del sistema convencional.

En consecuencia, hay un proceso de subdivisión de la unidad en un número de partes iguales que depende de la longitud del segmento a medir, de tal manera que el estudiante no realiza una medida real, sino que debe resolver visualmente el recuento de segmentos diferenciados que aparecen en la unidad y en el segmento a medir.

En la representación gráfica deben hacerse interpretaciones de aquellos aspectos que representan el segmento a medir, la unidad de medida, y las relaciones que hay entre ambos. Se deben hacer las traslaciones correspondientes de la representación gráfica a las representaciones en palabras del lenguaje natural y simbólico.

Con relación a las tareas y técnicas vinculadas al concepto de fracción como medida Silva (2005), presenta algunos tipos:

1° Tipo: determinar medidas de los segmentos divididos en partes iguales.

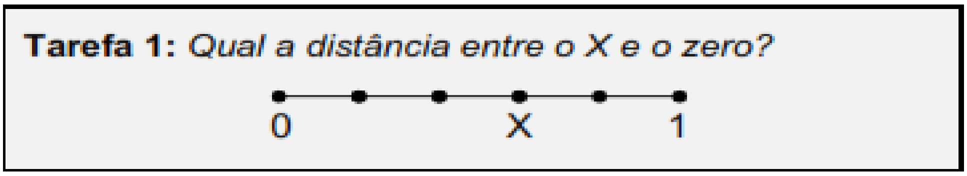


Figura 8: Representación geométrica y simbólica de concepto medida

Fuente: Silva (2005)

Esta tarea puede ser resuelta por la técnica del doble conteo de las partes. Es decir, se considera a la unidad dividida en 5 partes de la misma longitud y que del punto “0” al punto “X” hay tres partes, concluyendo así que la fracción es 3/5.

2° Tipo: determinar medidas de los segmentos no divididos en partes iguales.

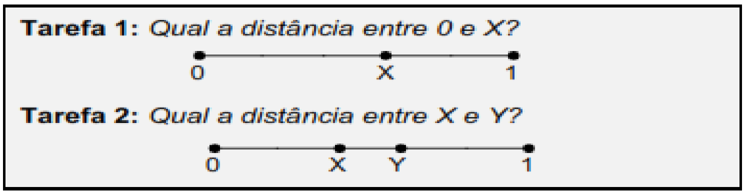


Figura 9: Representación geométrica y simbólica de concepto medida.

Fuente: Silva (2005)

En este caso es necesario dividir convenientemente, el entero en partes de la misma medida que posibilitará a utilizar la técnica del doble conteo y así encontrar la medida de 0 a X y de X a Y.

3° Tipo: reconstrucción de unidades

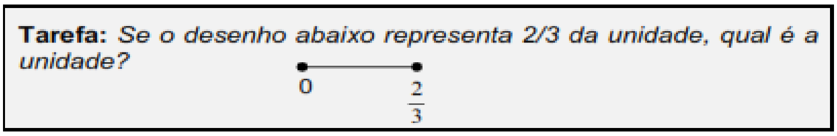


Figura 10: Representación geométrica y simbólica de concepto medida

Fuente: Silva (2005)

En este caso es necesario percibir que el segmento representa dos tercios, además, que la unidad fue dividida en tres partes de la misma longitud. Luego, para recomponer la unidad original es necesario dividir el segmento dado en dos partes de la misma medida para identificar 1/3 y elaborar la nueva figura con tres de esas partes conforme a la figura siguiente:

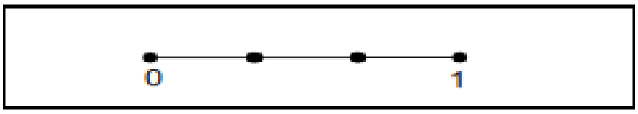


Figura 11: Representación geométrica y simbólica de concepto medida.

Fuente: Silva (2005)

4.3.3 CONCEPCIÓN COCIENTE

Silva (2005), señala que los fenómenos asociados al concepto de fracción como cociente tiene que ver con la operación de dividir un número natural por otro (a:b= a/b). Esta interpretación hace ver la fracción a/b como una división indicada, estableciendo una acción de distribuir. Diferente a los tipos de tareas anteriores que asocian los conceptos tratados, aquí “a” puede ser menor, mayor o igual a “b”.

Por ejemplo: “En un restaurante hay que repartir cinco pizzas entre cuatro niños. Calcula cuánto le corresponde a cada uno”. El resultado es 5/4 y lo obtenemos a partir de un proceso de diferenciar, dividir, abreviar, representar, simbolizar indicando mucho más que la simple representación del diagrama.

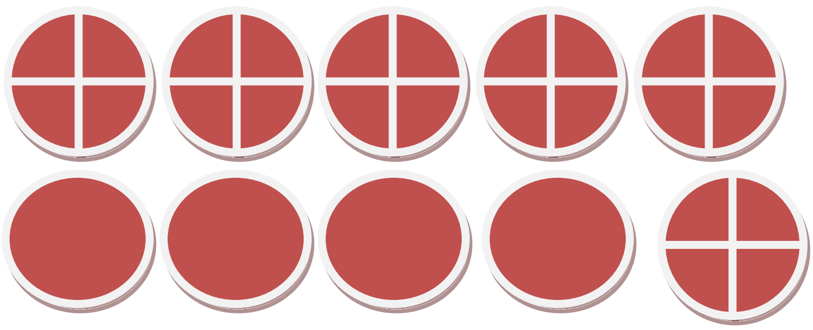
1º tipo: distribuir igualmente x objetos em um número y de partes.

Tarefa 1: *Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas.*

Figura 12: Tarea relacionada con el concepto cociente.

Fuente: Silva (2005)

Aquí se identifica dos técnicas para resolver esta tarea. En la primera se divide cada una de las cinco pizzas en cuatros partes iguales, destinando a cada persona cinco de esas partes, concluyendo que cada uno recibe 5/4 de pizza. En la segunda se decide distribuir una pizza entera para cada persona y dividir la última en cuatro partes iguales, concluyendo que a cada persona le corresponde $1\frac{1}{4}$ de pizza.



$$5 \div 4 = \frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$$

$$5 \div 4 = 1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

Figura 13: Representación geométrica y simbólica de concepto cociente.

Fuente: Silva (2005)

4.3.4 CONCEPCIÓN RAZÓN

Silva (2005), manifiesta que las tareas asociadas a la concepción razón generalmente no permiten asociar la idea de partición como los otros conceptos, sino asocia la idea de comparación entre dos medidas. En este sentido la representación $\frac{a}{b}$ o a: b, no siempre se asocia al concepto de cociente, sino podría ser entendida como una comparación, sin necesariamente transmitir una idea de número.

Flores (2001), en relación a esta concepción, plantea que la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir, si se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como razón. En estos casos no existe una unidad, un todo que permita ver la fracción. Se asocia esta interpretación a la relación parte-parte y a la relación conjunto a conjunto.

Cuando hay una relación entre a y b (una razón) todo cambio en a producirá un cambio en b. Algunas de las situaciones donde se presenta este uso de fracciones están asociadas a mezclas y aleaciones, comparaciones, escalas de mapas y planos, recetas de cocina, entre otras.

Dos de las formas más claras de ver la fracción como razón están en la probabilidad y en los porcentajes. Si se considera la razón como una forma de comparar, precisamente la probabilidad es una manera de comparación todo-todo (casos favorables vs. casos posibles). Los porcentajes también se asocian a una comparación parte-todo, pero vistos como relaciones entre conjuntos.

Así, la representación fraccionaria 2/3, por ejemplo, asociada al concepto de razón, no permitirá la lectura “dos tercios” y si “dos para tres”.

En la figura 15 se muestra algunas tareas relacionadas al concepto de fracción como razón:

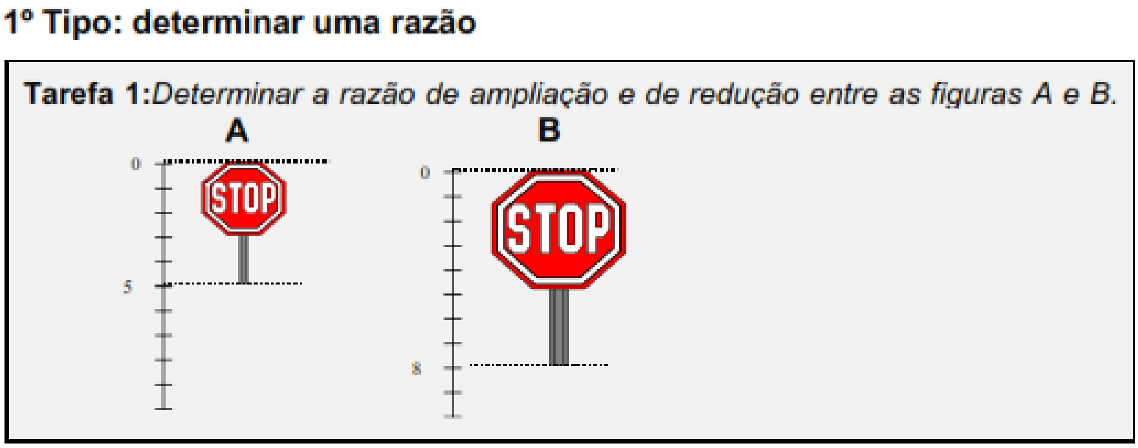


Figura 14: Representación geométrica y simbólica de concepto razón.

Fuente: Silva (2005)

La técnica encargada de resolver este tipo de tarea, percibirá como base la figura presentada, la medida de altura A es de 5 unidades y la B es 8 unidades, obteniendo la razón de A para B de "5 para 8" caracterizando una ampliación. Por otro lado, la razón de B a A es de "8 para 5" caracterizando una reducción.

4.3.5 CONCEPCIÓN OPERADOR

De acuerdo a Kieren (1992, citado en Perera et al., 2007) el papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente.

Silva (2005), expresa que en la fracción a/b cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final, las cuales son multiplicar por a y dividir por b. Además, no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b. Además, la fracción es interpretada como algo que actúa y modifica una situación, es decir, asume un papel de transformador realizando una secuencia de operaciones de multiplicación y división.

Por ejemplo:

Tarea1: construir un cuadrado cuyo lado tenga 2/3 de la medida del lado del otro cuadrado mayor, además el lado este último tiene 9 unidades de medida.

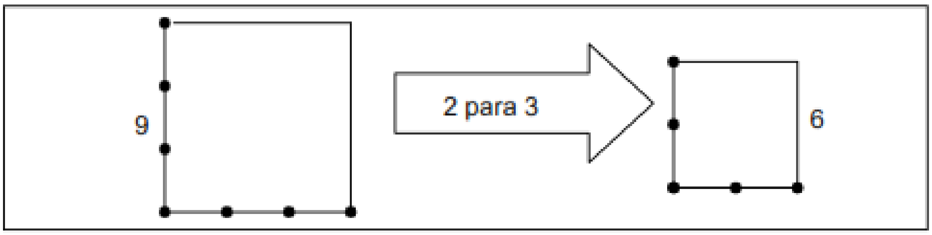


Figura 15: Representación geométrica y simbólica de concepto operador.

Fuente: Silva (2005)

Para la solución de esta tarea observamos la siguiente técnica: el cuadrado presenta como medida de lado 9 y este debe ser transformado en un nuevo cuadrado de medida 2/3 de 9. Primero, realiza la división de 9 por 3 para luego multiplicar el cociente por 2, obteniendo la medida aproximada de 6.

CAPÍTULO 5:

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La secuencia de pasos realizada para el logro de nuestros objetivos de investigación es la siguiente: selección de un texto relevante; definición de los criterios para realizar el análisis del texto, el cual se realizará por sección (inicio, proceso, evaluación y metacognición); planteamiento de los resultados y, finalmente, las consideraciones finales sobre el proceso seguido.

5.1 SELECCIÓN DEL TEXTO ESCOLAR MATEMÁTICA QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Investigaciones en el área de la Didáctica de la Matemática, como las de Cortina (2006) y Bazán y Cols (2004), señalan la importancia del empleo de los libros de texto en el aprendizaje de dicha asignatura. Cortina (1996) menciona que los libros de texto fueron propuestos como mecanismo ideal para dar coherencia al currículo, como guía de instrucción para los maestros y como material de apoyo en el aprendizaje de los niños. Mientras que Bazán et al. (2004) manifiestan que los libros de texto pueden facilitar a los docentes la organización del trabajo escolar, ya que presentan a los niños situaciones y eventos con los cuales pueden entrar en relación funcional, mediados por los maestros. Por otro lado, Vargas (2001) señala que los libros de texto no sólo pueden facilitar sino también dificultar o, inclusive, impedir el aprendizaje escolar.

Los libros de texto constituyen una importante fuente de consulta para muchos profesores quienes se basan en sus contenidos para realizar la enseñanza. Por ello, y con el propósito de identificar las diversas concepciones de fracción que se encuentran en uno de ellos, analizaremos el texto escolar “Matemática Quinto Grado de Educación Primaria”, publicado por la Editorial Peruana Bruño en el año 2009, el cual es distribuido por el Ministerio de Educación en forma gratuita a los alumnos de los colegios estatales a nivel nacional que cursan dicho grado de estudios.

Este libro está organizado en ocho unidades, cada una de las cuales debe ser desarrollada, en promedio, durante un mes de clases. Además cada unidad contiene secciones con variadas actividades de la vida cotidiana.

En esta investigación nos centraremos en la unidad 4: “La división de un todo en partes iguales”, en la cual observamos 5 secciones: sección panorámica, la sección de inicio, la sección de proceso, la sección de cierre y la sección de Evaluación y Metacognición (secciones que también están presentes en las demás unidades). La siguiente tabla, muestra las secciones en las que ha sido dividida esta unidad con la descripción de cada una de ellas otorgada por los mismos autores.

Sección Panorámica	Esta sección está estructurada para ayudar a preparar el escenario de las actividades y conocimientos que se va adquirir. Además se podrá interpretar y analizar las ilustraciones y datos, pues constituye información importante.
Sección Inicio	**Información histórica sobre la matemática:** La finalidad es ampliar los conocimientos del tema y que se desarrollen hábitos de indagación y enriquecimiento del vocabulario.
	Conocimientos previos: Es un pequeño inventario de lo que se necesita recordar para el logro de las capacidades y adquisición de conocimiento. Esta parte ayudará a descubrir lo que se domina y aquello que se necesita un estudio cuidadoso.
Sección de Proceso	Se incorpora situaciones problemáticas, información importante, con actividades individuales, grupales y autoevaluación. A medida que se desarrolle las actividades, la información y procedimientos llegarán a ser parte del conocimiento de los alumnos. Las diferentes situaciones que presenta el mundo real permitirán utilizar la matemática en la vida diaria y se darán las bases para lo que necesitará en el futuro.

Sección de Cierre	Contiene una variedad de situaciones como lo más importante en resumen, actividades complementarias, matemática recreativa, la prensa y la matemática, practica con calculadoras, curiosidades matemáticas, problemas de olimpiadas o matemática e interculturalidad.
Sección Evaluación y Metacognición	Estas actividades están relacionadas con los indicadores de logro planteados para la unidad. Ellas promueven la reflexión y verificación de lo aprendido.

Tabla 3: Estructura General de la organización del texto Escolar "Matemática Quinto Grado de Educación Primaria"

5.2 CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DEL TEXTO ESCOLAR "MATEMÁTICA QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA"

Recordemos que Silva(2005) manifiesta que la TAD se divide en dos bloques: uno práctico-teórico vinculado al saber-hacer, conformado por los tipos de tareas (t) que son resueltas por lo menos por una técnica (τ) y, el bloque tecnológico-teórico vinculado al saber, que considera como tecnología (θ) a aquello que justifica la técnica utilizada. La tecnología sería, además, justificada por una teoría (Θ).

Así, en toda actividad de enseñanza, en especial en la enseñanza de la matemática que comprende los postulados de la TAD, interviene el término de praxeología, el cual se compone de: tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría.

Gascón (2003) manifiesta la organización matemática (OM) está constituida por cuatro componentes principales tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías.

Por lo expuesto anteriormente, la TAD es un referente adecuado para describir y analizar cuestiones referidas al estudio del objeto matemático. Se ha considerado 4 criterios, ordenados en la siguiente tabla, para el análisis del texto escolar "Matemática Quinto Grado de Educación Primaria", los cuales son un aporte propio del investigador y están basados en el marco teórico y las investigaciones precedentes.

	CRITERIOS
Sobre los tipos de concepciones de fracción utilizados	**Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.**
Sobre las representaciones e ilustraciones empleadas en las concepciones	**Las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción.**
Sobre los tipos de tareas, técnicas y tecnologías	**Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.**

Tabla 4: Criterios para el análisis del texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria

5.3 ANÁLISIS POR SECCIONES DE LA UNIDAD 4 "LA DIVISIÓN DE UN TODO EN PARTES IGUALES" DEL LIBRO ESCOLAR MATEMÁTICA DE QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

El análisis de la unidad 4 se realiza en función de los criterios mencionados anteriormente y siguiendo el orden de las secciones que conforman su estructura:

5.3.1 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN PANORÁMICA

El objeto matemático analizado en esta sección es la idea de fracción. Esta sección muestra los diversos puntos que se abordarán con respecto al tema de fracciones. En relación a las actividades de estudio, se presentan las siguientes imágenes seguidas de dos preguntas:

Figura 16: Actividades sobre la idea de fracción.

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Pregunta 1: ¿Qué fracción representa los peones de las piezas de ajedrez, respecto del total de las piezas de juego? Pregunta 2: ¿Cuántas regletas rojas equivalen a una regleta de color anaranjado?

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

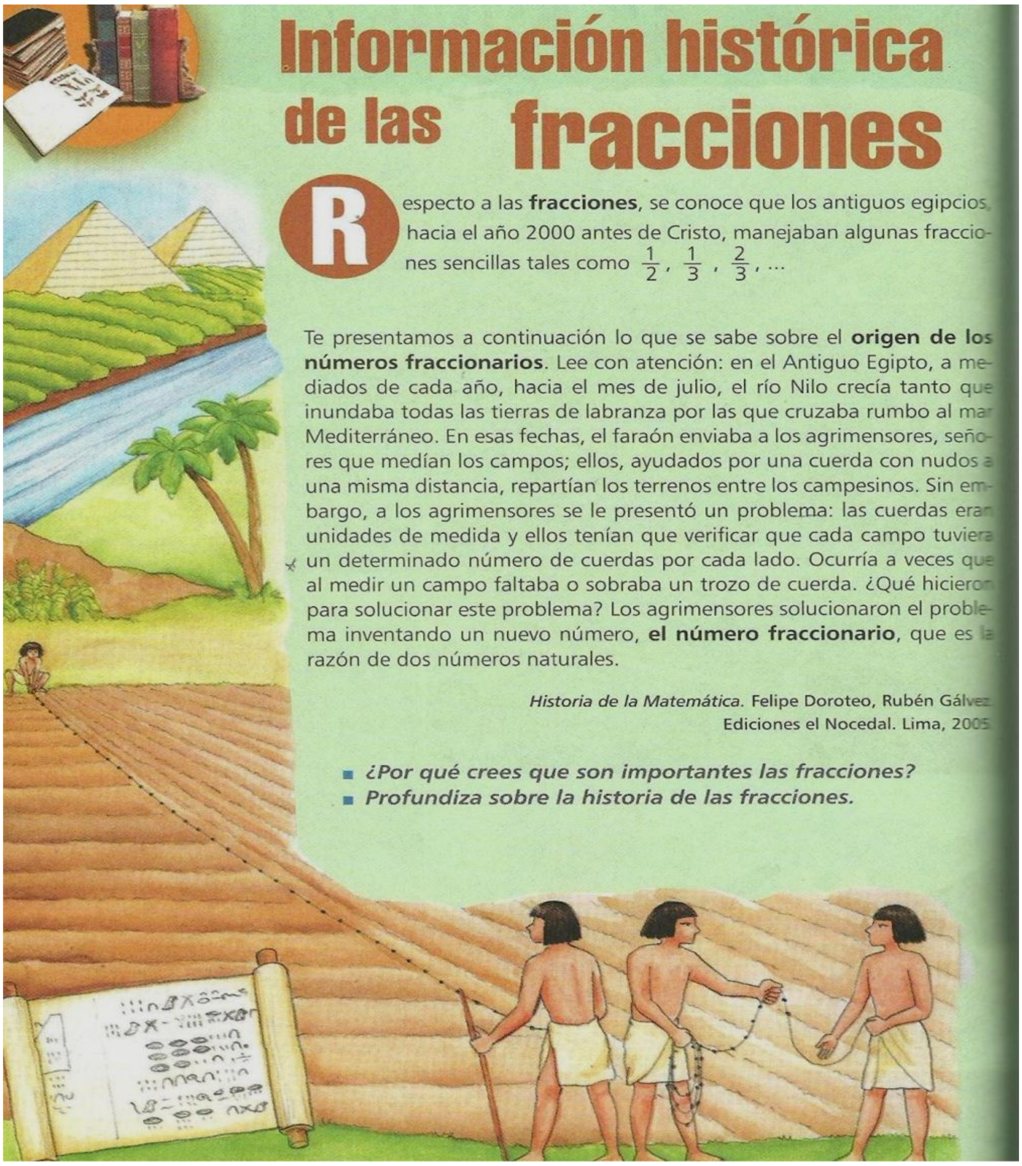
Con respecto a las concepciones de fracción, podemos observar que en la primera pregunta: ¿Qué fracción representa los peones de las piezas de ajedrez, respecto del total de las piezas de juego? si bien, la intención de los autores del texto es relacionar un juego cotidiano con las concepciones de fracción, se reduce tal concepción al de parte-todo, donde los peones representan una parte de un todo y el total de las piezas de ajedrez representa el todo discreto. Mientras que en la segunda pregunta, la concepción de fracción aparece como medida, referida a la magnitud de longitud. Mediante esta magnitud se busca saber cuántas partes rojas tiene una naranja; en este caso la respuesta es un número entero. Sin embargo, no siempre el resultado obtenido será de este tipo, de allí el sentido complejo que tiene este concepto, pues los procesos de medida que se presentan conllevan la idea de medida aproximada de una magnitud continua. Sin embargo, la representación del resultado de la medida de forma más exacta exigiría la utilización de un conjunto de números mucho más amplio, el conjunto de los números reales.

Si las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción.

Sólo se observa la presencia de ilustraciones que se utilizan, principalmente, como recurso para ejemplificar y para afianzar el concepto de fracción, mas no se muestra representación alguna de la fracción.

5.3.2 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN INICIO

- El objeto matemático analizado en esta sección es el concepto de fracción. En relación a las actividades de estudio, esta sección hace referencia a los antiguos egipcios y su relación con el origen de las fracciones.



Información histórica de las fracciones

Respecto a las **fracciones**, se conoce que los antiguos egipcios, hacia el año 2000 antes de Cristo, manejaban algunas fracciones sencillas tales como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ...

Te presentamos a continuación lo que se sabe sobre el **origen de los números fraccionarios**. Lee con atención: en el Antiguo Egipto, a mediados de cada año, hacia el mes de julio, el río Nilo crecía tanto que inundaba todas las tierras de labranza por las que cruzaba rumbo al mar Mediterráneo. En esas fechas, el faraón enviaba a los agrimensores, señores que medían los campos; ellos, ayudados por una cuerda con nudos a una misma distancia, repartían los terrenos entre los campesinos. Sin embargo, a los agrimensores se le presentó un problema: las cuerdas eran unidades de medida y ellos tenían que verificar que cada campo tuviera un determinado número de cuerdas por cada lado. Ocurría a veces que al medir un campo faltaba o sobraba un trozo de cuerda. ¿Qué hicieron para solucionar este problema? Los agrimensores solucionaron el problema inventando un nuevo número, **el número fraccionario**, que es la razón de dos números naturales.

Historia de la Matemática. Felipe Doroteo, Rubén Gálvez. Ediciones el Nocedal. Lima, 2005

- *¿Por qué crees que son importantes las fracciones?*
- *Profundiza sobre la historia de las fracciones.*

Figura 17: Actividades sobre la idea de fracción.

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se pide leer la información histórica de las fracciones y responder a las preguntas siguientes: ¿Por qué crees que son importantes las fracciones? Profundiza sobre la historia de las fracciones.

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

La información histórica que se presenta para introducir el concepto de fracción, engloba la concepción de medida, cuando se menciona en el texto: “las cuerdas eran unidades de medida y los agrimensores tenían que verificar que cada campo tuviera un determinado número de cuerdas por cada lado. Ocurría a veces que al medir un campo faltaba o sobraba un trozo de cuerda. Para solucionar este problema se inventaron los números fraccionarios”.

Además, no se enfatiza la evolución de otras concepciones de fracciones que se menciona en el trabajo de Silva (2005) y que son trabajados en la actualidad. Finalmente, se recomienda a los autores que se mencione las fuentes bibliográficas y/o virtuales para que los alumnos puedan profundizar sobre la historia de las fracciones, con el objetivo de guiarlo hacia el logro de aprendizajes significativos.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

No se presenta técnica alguna. La tarea presentada consiste en leer y responder las 2 preguntas abiertas.

❖ Otra actividad de estudio que la sección inicio presenta es la siguiente:

Actividad1:

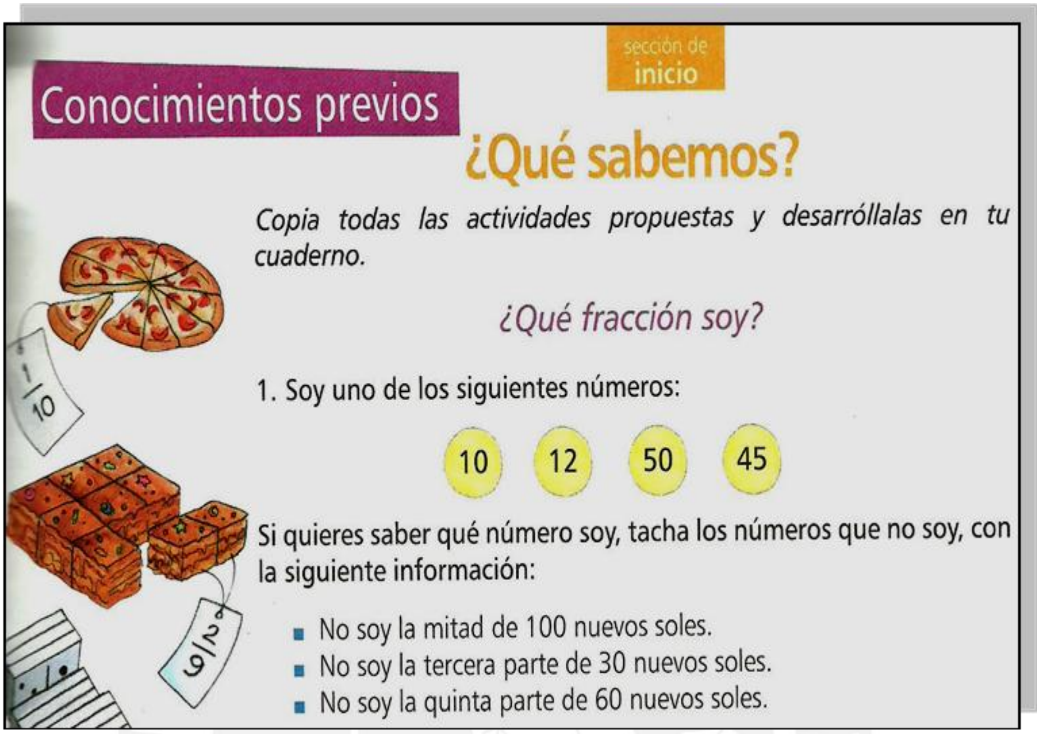


Figura 18: Actividades sobre la idea de fracción.

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Para la solución de dicha tarea, el alumno tendría que poseer conocimientos previos no sólo de la concepción parte-todo, sino de operaciones básicas, como la división y así poder resolver las premisas: la mitad de 100, la tercera parte de 30, la quinta parte de 60.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Esta tarea consiste en elegir un número entre cuatro alternativas: 10; 12; 50 y 45. Para resolverla el alumno deberá descartar los números "que no soy", de acuerdo a tres enunciados. Sin embargo, las alternativas no se adecúan a la definición de fracción que utilizamos en la tesis, puesto que una fracción es una representación, de la forma:

$\frac{a}{b}$. donde $a \in N, b \in N$ y $b \neq 0$. Asumiendo que $N = \{0; 1; 2; 3; 4...\}$

Por lo que un título más apropiado sería "¿Qué número soy?"

La tarea induce a la concepción fracción como operador, con el tipo de tarea: transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional. Por ello, la técnica sería dividir las medidas iniciales por denominador.

Así:

No soy la mitad de 100 $\Rightarrow$ No soy $\frac{1}{2}(100) = \frac{100}{2}$ = 50, luego No soy 50

No soy la tercera parte de 30 $\Rightarrow$ No soy $\frac{1}{3}(30) = \frac{30}{3}$ =10, luego No soy 10

No soy la quinta parte de 60 $\Rightarrow$ No soy $\frac{1}{5}(60) = \frac{60}{5}$ =12, luego No soy 12

No soy 50, ni 10 ni 12, entonces soy 45.

Actividad2:

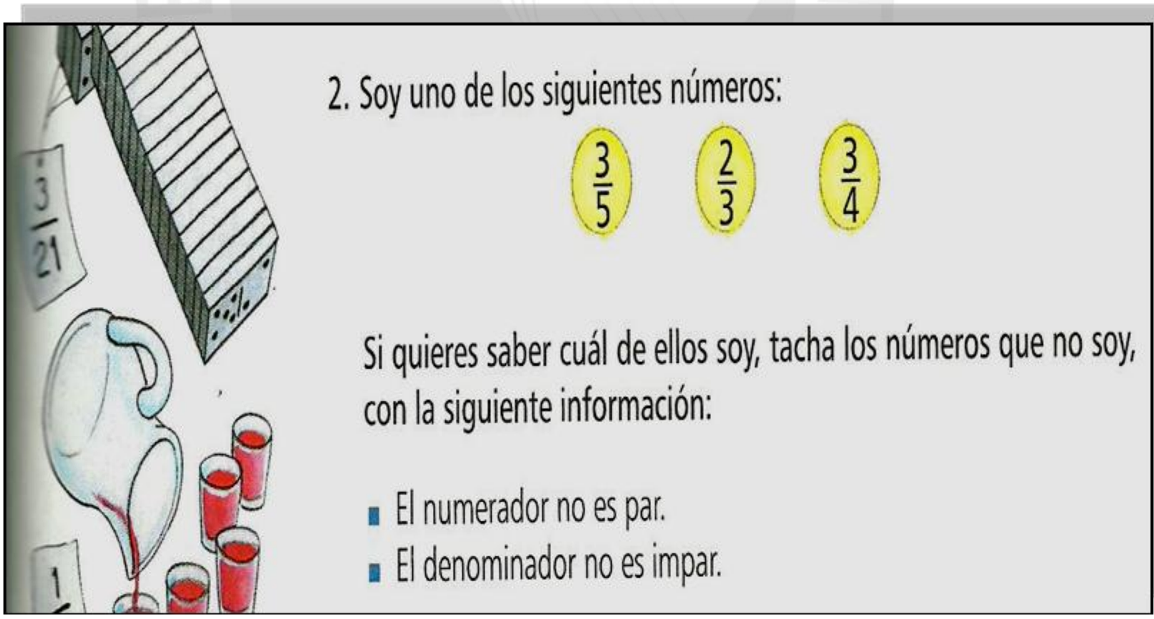
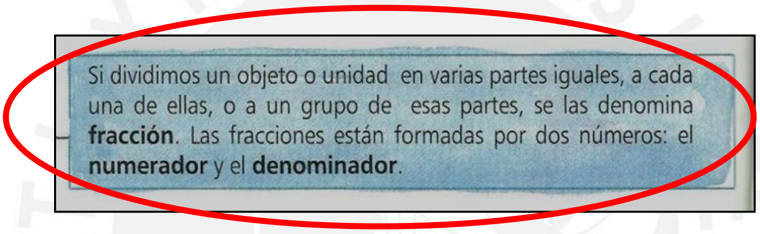


Figura 19: Actividades sobre la idea de fracción.

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En esta actividad se define indirectamente a la fracción como un número de la forma $\frac{a}{b}, a \in \mathrm{N}, b \in \mathrm{N}$. donde se pide elegir el número correcto: 3/5, 2/3 ó 3/4”. Dicha definición, si bien es correcta, se puede apreciar que la información adicional que el texto brinda para la resolución de la tarea, induce a ver a cada miembro de la fracción (numerador y denominador) como dos números naturales aislados y sin relación alguna entre ellos. Es decir, los autores sólo se preocupan de una simple nomenclatura de fracción.



Si dividimos un objeto o unidad en varias partes iguales, a cada una de ellas, o a un grupo de esas partes, se las denomina **fracción**. Las fracciones están formadas por dos números: el **numerador** y el **denominador**.

Figura 20: Nomenclatura de fracción

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Esta tarea consiste en elegir la fracción correcta, a partir de las informaciones brindadas. Para resolverla el alumno deberá descartar el numerador que es par y el denominador que es impar.

No se observa la presencia de alguna técnica. Sin embargo, una posible técnica podría ser diferenciar los números pares de los impares.
Así: 3/5, 2/3, 3/4
Donde numerador no es par, entonces numerador es impar, esto es 3
Denominador no es impar, entonces el denominador es par, esto es 4
Por lo tanto el número de la forma a/b buscado es 3/4

Actividad 3:

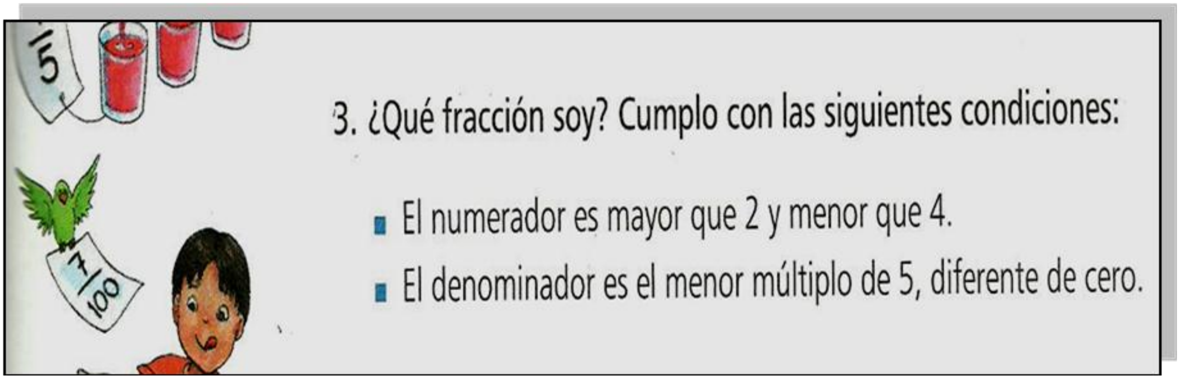


Figura 21: Actividad sobre la idea de fracción

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En esta tarea no se hace referencia explícita a alguna concepción de fracción. Sin embargo, se refuerza la idea de que los elementos de la fracción (numerador y denominador) están formados por dos números naturales aislados y sin relación alguna entre ellos.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

En esta tarea no se hace referencia a alguna concepción fracción. Sin embargo para su solución se deberá elegir a la fracción con las correctas condiciones:

- Numerador mayor que 2 y menor que 4
- Denominador el menor múltiplo de 5 diferente de cero.

Ahora bien, en relación al denominador, es necesario el dominio de otros objetos matemáticos como por ejemplo la multiplicidad, que si bien, al revisar el texto escolar matemática para cuarto grado de la misma editorial, en la unidad 2 se trabaja el tema de operaciones con naturales y es allí donde se desarrolla la operación de la multiplicación, es necesario la confirmación del dominio de tal objeto matemático, ya que el tema de múltiplos, si bien, es pertinente, su falta de dominio podría limitar la exploración de alguna técnica por parte del alumno.

No se presenta ninguna técnica brindada por el texto. Sin embargo, una posible técnica podría ser:

- Numerador mayor que 2 y menor que 4
  Ordenar los números naturales: $2 < x < 4$
  Entonces Numerador sería = 3
- Denominador el menor múltiplo de 5 diferente de cero.
  Múltiplo 5 = 0; 5; 10…., como se pide el menor y diferente de cero, entonces el múltiplo seria 5

Por lo tanto el número de la forma a/b buscado es 3/5

Actividad 4:

Juan dice: "¿Cuántos nuevos soles tendré si cada una de mis 100 gomitas las vendo a medio nuevo sol?"

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Para la solución de esta tarea, el alumno tendría que poseer conocimientos previos sobre la concepción fracción como operador. Además, la expresión "medio nuevo sol" es un término que aparece muy forzado ya que no se emplea en el lenguaje cotidiano (se suele decir "50 céntimos").

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

No se observa la presencia de alguna técnica. Sin embargo, la tarea induce a multiplicar la cantidad dada por medio nuevo sol. Por ello, una técnica que se sugiere es:

$100\ x\ 0.50 = 50 \Rightarrow$ Tendré 50 nuevos soles

Actividad 5:

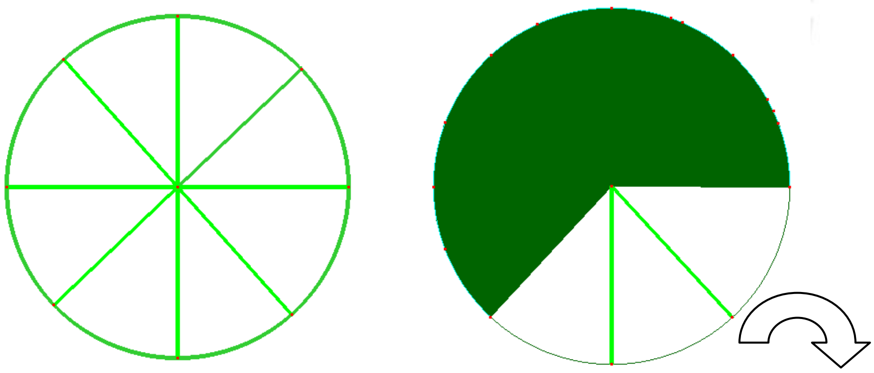
Se ha divido un pastel en 8 partes iguales; si se consumen 5 partes, ¿qué fracción del pastel queda?

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

La tarea está relacionada con la concepción de fracción como parte-todo y la pregunta ¿qué fracción del pastel queda? induce al alumno a responder en términos de fracción $\frac{3}{8}$

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Los autores no explicitan alguna técnica. Sin embargo, una posible técnica para este caso sería: "dividir el pastel en 8 partes iguales, si se consume 5 partes, por lo tanto, quedan 3 partes de 8". Es decir:



Queda $\frac{3}{8}$

Actividad 6:

6. Busca la fracción que falta para que la igualdad, en cada caso, sea verdadera:

$\frac{1}{2} + \boxed{} = \frac{7}{7}$ $\qquad \frac{9}{9} - \boxed{} = \frac{6}{9}$ $\qquad \frac{1}{3} \times \boxed{} = \frac{2}{6}$

Figura 22: Actividad sobre la idea de fracción

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

La tarea presentada está relacionada a la fracción y sus operaciones.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Se presentan tareas poco apropiadas para esta sección, pues el alumno aún no desarrolla el tema “operaciones con fracción”, que si bien, la primera y segunda tareas podrían resolverse con la concepción de fracción como parte-todo, en la tercera tarea no sería suficiente tal concepción. Así, los autores podrían presentar las operaciones a partir de algún contexto y no de forma numérica.

Presentamos algunas posibles formas de proceder del alumno en funcion a la noción de fracción presentada en el texto.

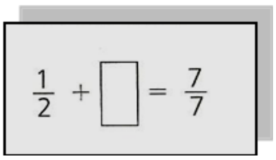
- Para $\frac{1}{2}+$ _____ $=\frac{7}{7}$, es innecesario colocar $\frac{7}{7}$ cuando pudo haberse colocado la unidad. La respuesta del alumno podría ser: $\frac{1}{2}+\frac{6}{5}=\frac{7}{7}$, pues se está considerando que la fracción está formada por dos números, y como cada elemento de la fracción es un número natural, quizás el alumno podría resolver equivocadamente de esa manera. Para resolver correctamente el alumno tendría que entender que $\frac{7}{7}=1$ y ver que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{7}$.

- 9/9 - _____ = 6/9. Aquí seguimos con la misma concepción que se establece en el libro. Se podría obtener una posible respuesta que sería $\frac{9}{9}-\frac{3}{0}=\frac{6}{9}$, pues se está considerando que la fracción está formada por dos números, y como cada elemento de la fracción es un número, quizás el alumno podría resolver erróneamente de esa manera, obteniendo la expresión $\frac{3}{0}$ la cual podría aumentar su confusión.

- 1/3 x _____ = 2/6. Aquí seguimos con la misma concepción que se establece en el libro, donde el numerador y el denominador son dos números naturales aislados, entonces el alumno podría generar esta posible respuesta que sería $\frac{1x2}{3x2}=\frac{2}{6}$, entonces su respuesta podría ser 2/2. Si bien la respuesta es correcta, quizás el alumno no entienda el porqué de su resultado, además de considerar que éste es un razonamiento que tiene validez en algunas situaciones.

No se observa la presencia de alguna técnica. Sin embargo, las técnicas posibles que se proponen son:

TÉCNICA1:



$$\text{Sí el alumno sabe que } \frac{7}{7}=1, \textit{entonces } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

TÉCNICA 2:

$$\frac{9}{9} - \square = \frac{6}{9}$$

Aquí se utilizará un rectángulo divido en 9 partes iguales:

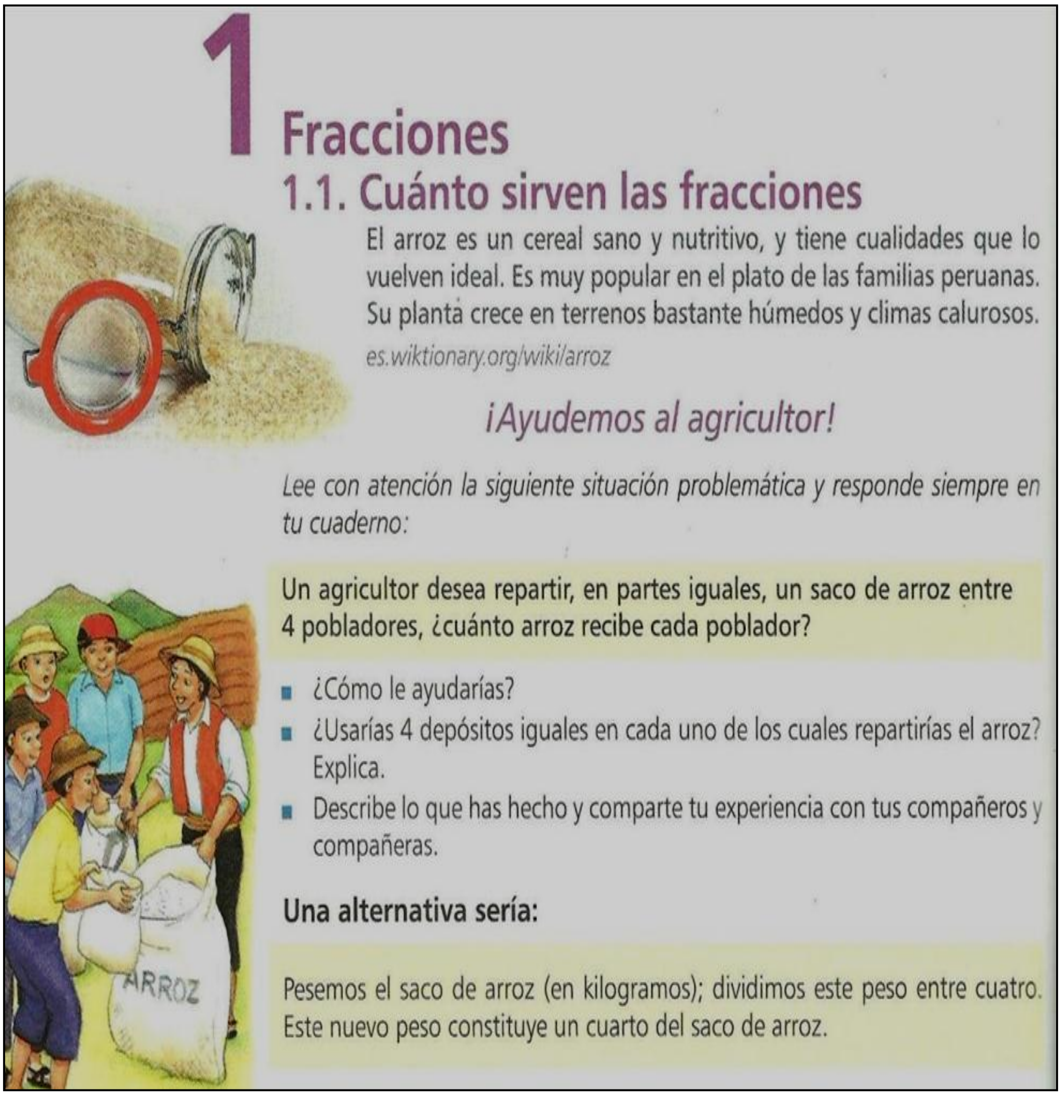
Entonces, la fracción buscada será $\frac{3}{9}$

TÉCNICA 3:

$$\frac{1}{3} \times \square = \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} x \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

5.3.3 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN PROCESO

- Esta **sección proceso** se inicia con situaciones problemáticas de la vida real, usando indirectamente la concepción de fracción como parte-todo.



1

Fracciones

1.1. Cuánto sirven las fracciones

El arroz es un cereal sano y nutritivo, y tiene cualidades que lo vuelven ideal. Es muy popular en el plato de las familias peruanas. Su planta crece en terrenos bastante húmedos y climas calurosos.

es.wiktionary.org/wiki/arroz

¡Ayudemos al agricultor!

Lee con atención la siguiente situación problemática y responde siempre en tu cuaderno:

Un agricultor desea repartir, en partes iguales, un saco de arroz entre 4 pobladores, ¿cuánto arroz recibe cada poblador?

- ¿Cómo le ayudarías?
- ¿Usarías 4 depósitos iguales en cada uno de los cuales repartirías el arroz? Explica.
- Describe lo que has hecho y comparte tu experiencia con tus compañeros y compañeras.

Una alternativa sería:

Pesemos el saco de arroz (en kilogramos); dividimos este peso entre cuatro. Este nuevo peso constituye un cuarto del saco de arroz.

Figura 23: Cuánto sirven las fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Los fenómenos asociados a este contexto tienen que ver con la operación de dividir un número natural por otro (1:4= 1/4), esta interpretación hace ver la fracción a/b como una división indicada, estableciendo una acción de distribuir.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

La tarea propuesta en el libro está dirigida a introducir la concepción de fracción como cociente, con el tipo de tarea de distribuir en partes iguales un objeto "n". Por ello, la técnica más apropiada para este caso es la operación de dividir el saco de arroz en 4 partes iguales y distribuir una parte a cada poblador. El libro sugiere pesar el saco de arroz en kilogramos, para luego dividir este peso entre los cuatro pobladores, obteniendo cada poblador 1/4 de saco.

Sin embargo, como desconocemos el peso total del saco de arroz, tendríamos que darle el valor al peso total "x" kilogramos. Luego, dividir esta cantidad en cuatro partes iguales. Es decir, el total "x" tendría que ser dividido entre 4, es decir $\frac{x}{4}$, obteniendo así para cada poblador $\frac{x}{4}$. Esta sería la respuesta si se mantuviera la pregunta ¿Cuánto arroz recibe cada poblador? Sin embargo, los alumnos no han trabajado antes con el concepto de variable y podría originarse una dificultad para la comprensión y solución de la tarea.

❖ Luego se presenta la **definición de fracción**:

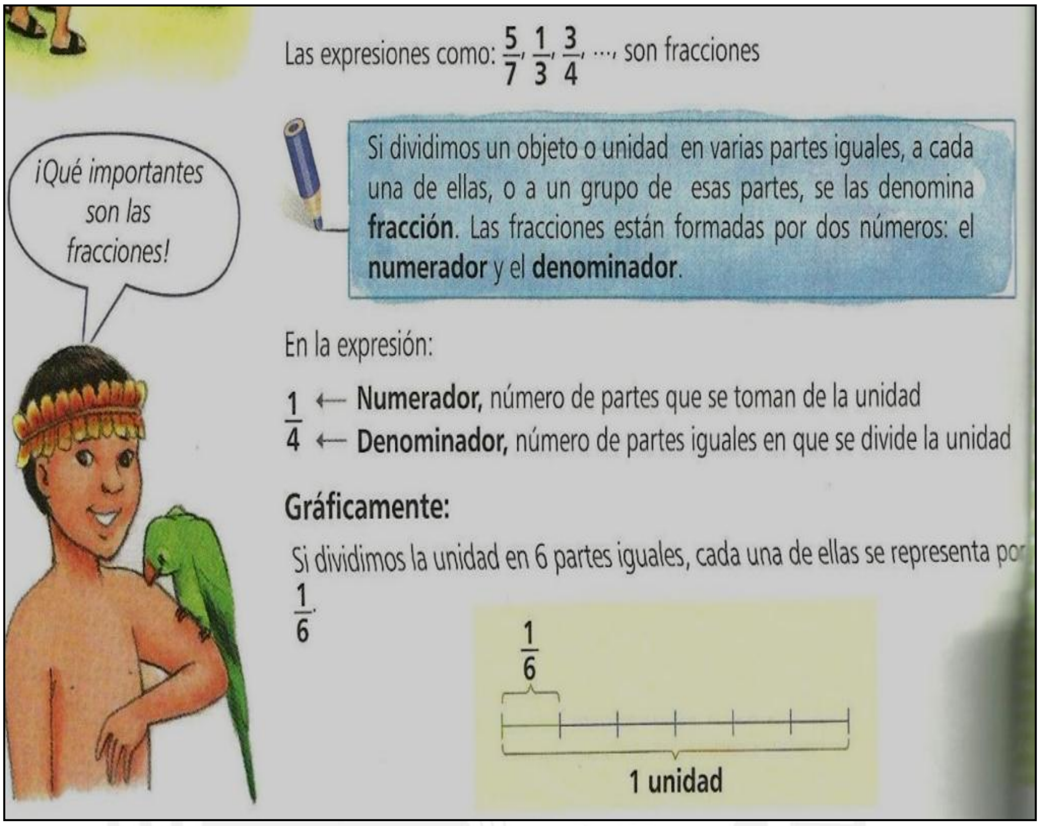


Figura 24: Definición de fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Después de observar las expresiones como 5/7, 1/3, 3/4, la fracción está definida a partir de la idea parte-todo. Sin embargo, hay evidencias en el mismo texto de situaciones que requieren de otras concepciones de fracción.

Posteriormente, se considera a la fracción como una expresión formada por dos números (numerador y denominador) pero se omite que una fracción es un número, como está definido en esta investigación.

Sobre si las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción.

Se usa el segmento de recta como representación figural, para vincular la concepción de fracción como parte-todo. Pues se ha dividido el segmento en 6 partes congruentes y se le asigna una fracción igual a 1/6 a cada parte.

❖ En la siguiente página se presenta **la lectura de una fracción**

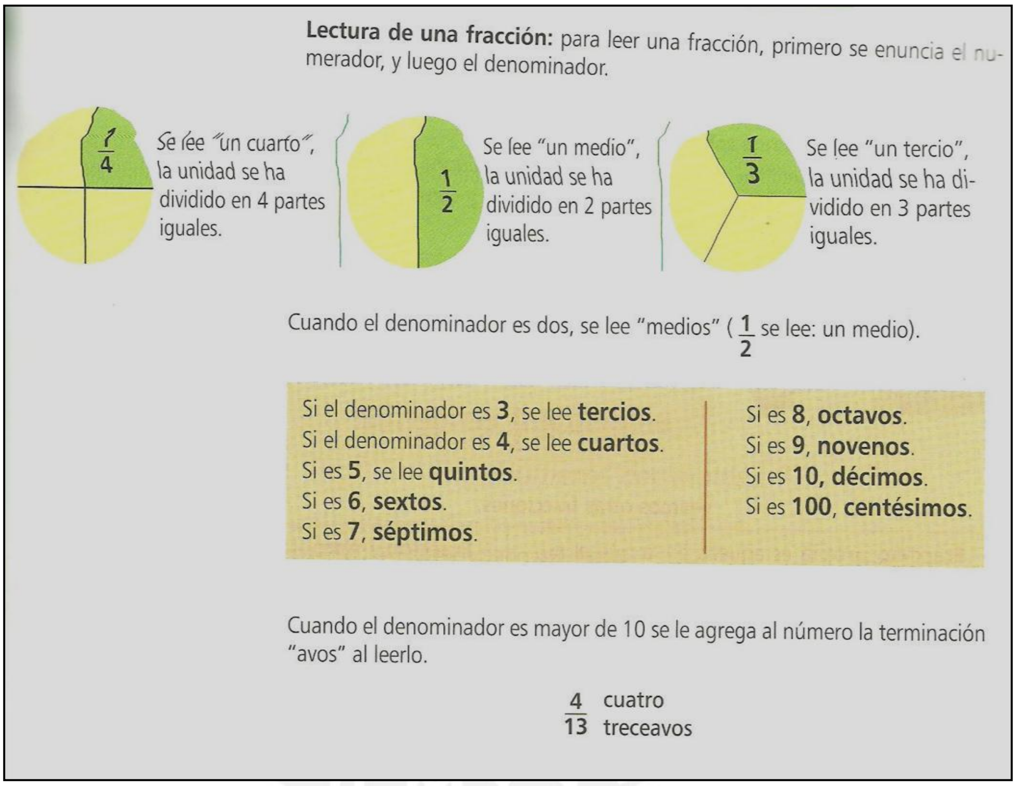


Figura 25: Lectura de una fracción

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En esta página se explica apropiadamente la lectura de una fracción, considerando la concepción de fracción como parte-todo.

Debido que en la unidad 5 de este mismo libro se tratará el tema de razón y proporción, sería pertinente e incluso necesario introducir el concepto de razón, pues no sólo se leería “un cuarto”, “un medio”, “un tercio” sino que también podría leerse : “1 de 4”, “1 de 2” ó “1 de 3”. Eso será, dependiendo de qué concepción de fracción alude la situación en que se presentan dichas fracciones.

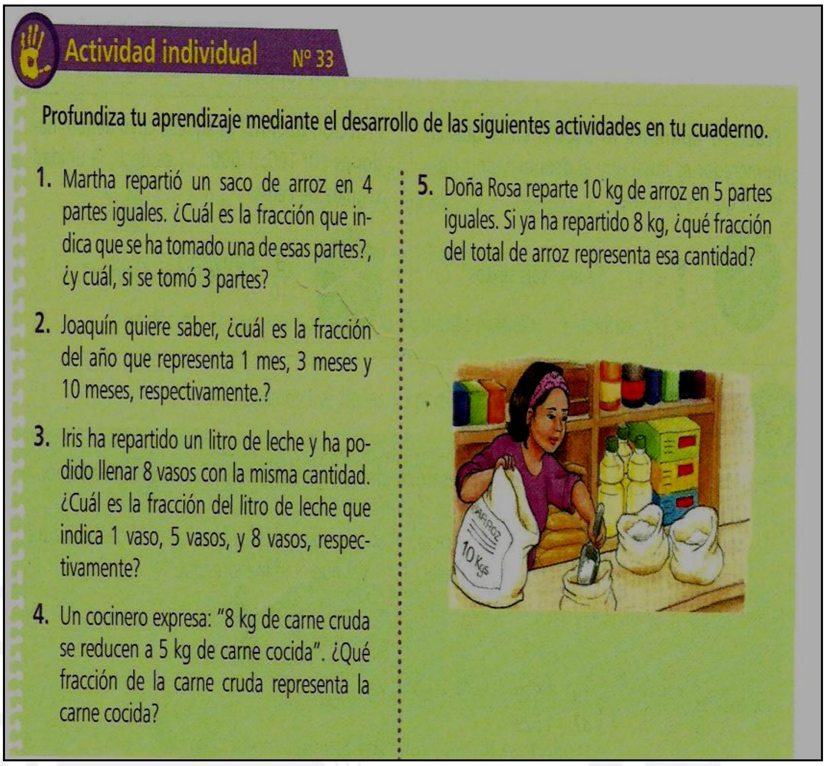
Sobre si las representaciones guardan relación con el concepto de fracción correspondiente

Se emplea las representaciones verbales y círculos divididos, que tiene como propósito vincular el concepto de parte-todo.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

En las tres figuras, se presenta la técnica del doble conteo de las partes, donde en el primer sector un todo es dividio en 4 partes y cada parte es representada por 1/4. En la segunda figura, un todo es dividio en 2 partes y cada parte es representada por 1/2 y en la tercera, un todo es dividido en 3 partes iguales y cada parte es representada por 1/3.

❖ Luego se presenta una **Actividad individual** conformada por un grupo de 5 actividades para ser resueltas en forma individual, es decir sin intervención del profesor.



Actividad individual Nº 33

Profundiza tu aprendizaje mediante el desarrollo de las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Martha repartió un saco de arroz en 4 partes iguales. ¿Cuál es la fracción que indica que se ha tomado una de esas partes?, ¿y cuál, si se tomó 3 partes?
2. Joaquín quiere saber, ¿cuál es la fracción del año que representa 1 mes, 3 meses y 10 meses, respectivamente.?
3. Iris ha repartido un litro de leche y ha podido llenar 8 vasos con la misma cantidad. ¿Cuál es la fracción del litro de leche que indica 1 vaso, 5 vasos, y 8 vasos, respectivamente?
4. Un cocinero expresa: "8 kg de carne cruda se reducen a 5 kg de carne cocida". ¿Qué fracción de la carne cruda representa la carne cocida?
5. Doña Rosa reparte 10 kg de arroz en 5 partes iguales. Si ya ha repartido 8 kg, ¿qué fracción del total de arroz representa esa cantidad?

Figura 26: Actividad individual de las fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Las tareas hacen referencia a la concepción de fracción como parte- todo y también, indirectamente, a las concepciones cociente y razón.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

En cuanto a las tareas 1; 2 y 3 se hace referencia a la concepción de parte-todo:

- En la tarea1 se pide dividir un saco de arroz entre 4 partes iguales, por ello los fenómenos asociados a este contexto tienen que ver con la operación de dividir un todo en cuatro partes, lo cual hace referencia a la concepción parte-todo.

- En la tarea 2 se pide repartir el todo en 12 partes lo cual hace referencia a la concepción parte-todo.

- En la tarea 3 se pide distribuir un litro de leche en 8 vasos lo cual hace referencia a la concepción parte-todo.

En cuanto a las técnicas, no se observa la utilización de alguna técnica, ya que son problemas que solo están propuestos. Por ello sugerimos algunas técnicas para el desarrollo de las tareas propuestas:

- Técnica 1, se sugiere la técnica del conteo y división, es decir dividir el saco de arroz en cuatros partes iguales, luego se realiza el conteo de cuantas partes se ha dividido. Finalmente cada persona recibe 1/4 del saco de arroz.

- Técnica 2, se sugiere la técnica del doble conteo de las partes, es decir basta contar el total de partes (total de meses) se ha dividido el todo (1año) y luego las partes que se ha tomado: 1 mes, 3 meses y 10 meses la fracción que representaría sería: 1/12, 3/12 y 10/12 respectivamente.

- Técnica 3, se sugiere la división de un litro de leche en 8 partes iguales (8 vasos), y las partes que se ha tomado, es decir 1 vaso, 5 vasos, y 8 vasos donde la fracción del litro de leche que representaría lo pedido sería: 1/8, 5/8 y 8/8 respectivamente.

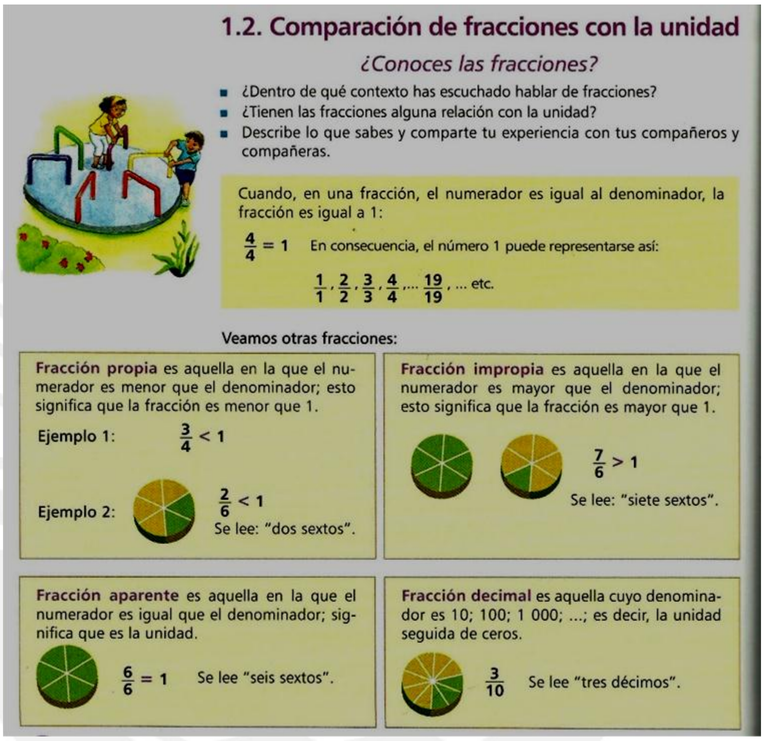
- En la tarea 4 se pide ¿Qué fracción de la carne cruda representa la carne cocida? Para resolver esta tarea es necesario conocer el concepto de razón, ya que se está pidiendo indirectamente comparar dos cantidades la carne cocida y de la carne cruda.

- En cuanto a la técnica, se sugiere percibir como base la cantidad de la carne cocida, obteniéndose la razón de 5 es a 8.

- En la tarea 5 se pide repartir 10kg. de arroz en 5 partes iguales. Si ya se repartió 8 kg. ¿Qué fracción del total representa esa cantidad? Ello hace referencia a la concepción de cociente.

- En cuanto a las técnicas, no se observa la utilización de alguna técnica, porque son situaciones propuestas. Por ello se sugiere la división de un todo y se toma 8 de ese todo, resultando 8/10.

❖ Aquí se muestra el subtítulo: "**La comparación de fracción con la unidad**" y dentro de ello se presenta una "clasificación de fracciones": Fracción propia, fracción impropia, fracción aparente y fracción decimal.



1.2. Comparación de fracciones con la unidad

¿Conoces las fracciones?

- ¿Dentro de qué contexto has escuchado hablar de fracciones?
- ¿Tienen las fracciones alguna relación con la unidad?
- Describe lo que sabes y comparte tu experiencia con tus compañeros y compañeras.

Cuando, en una fracción, el numerador es igual al denominador, la fracción es igual a 1:

$\frac{4}{4} = 1$ En consecuencia, el número 1 puede representarse así:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots \frac{19}{19}, \ldots$ etc.

Veamos otras fracciones:

Fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador; esto significa que la fracción es menor que 1.

Ejemplo 1: $\frac{3}{4} < 1$

Ejemplo 2: $\frac{2}{6} < 1$ Se lee: "dos sextos".

Fracción impropia es aquella en la que el numerador es mayor que el denominador; esto significa que la fracción es mayor que 1.

$\frac{7}{6} > 1$ Se lee: "siete sextos".

Fracción aparente es aquella en la que el numerador es igual que el denominador; significa que es la unidad.

$\frac{6}{6} = 1$ Se lee "seis sextos".

Fracción decimal es aquella cuyo denominador es 10; 100; 1 000; ...; es decir, la unidad seguida de ceros.

$\frac{3}{10}$ Se lee "tres décimos".

Figura 27: Comparación de fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En esta parte ¿Conoces las fracciones?, se presenta una fracción cuyo numerador y denominador poseen el mismo valor.

Ejemplo: $\frac{4}{4} = 1$

Aquí se retoma la definición general de fracción presentada en el texto, donde un todo es dividido en cuatro partes iguales, introduciendo la idea parte-todo.

Así mismo, se realiza la definición de otras fracciones, a las cuales se les llama: fracción propia, fracción impropia, fracción aparente y fracción decimal.

- **Fracción propia**

Con respecto a este tipo de fracción, observamos una adecuada definición y representación.

- **Fracción impropia**

Con respecto a este tipo de fracción, observamos una adecuada definición. Sin embargo, la representación gráfica (ilustración), no se adecúa a la concepción de fracción como parte-todo establecida previamente en la definición que ofrece el texto. Las fracciones impropias están comúnmente relacionadas a situaciones de distribución o división. De acuerdo a Silva (2005), las fracciones a/b, donde a<b, a=b ó a >b se pueden vincular a la concepción de fracción como cociente, el cual se caracteriza porque representa una distribución o división de a en b partes iguales, asociados a la fracción a/b o a la operación $a \div b$.

- **Fracción aparente**

Con respecto a las fracción aparente, observamos que el nombre no parece ser el más adecuado. El término “aparente”, podría inducir al alumno a pensar que esta fracción en realidad no lo es. Es decir, que esta fracción, que tiene la peculiaridad de que la unidad de divide en n partes de las cuales se tomaron todas, sólo “aparenta” ser una fracción, pero no lo es.

- **Fracción decimal**

Con respecto a la definición de fracción decimal, ésta es aquella cuyo denominador es potencia de 10. Es necesario considerar que la fracción decimal y el número decimal son sistemas simbólicos paralelos que representan los mismos conceptos, lo cual podría generar alguna confusión en el alumno ya que, como manifiestan Owens y Super (1993, citados en Gairín 1998), para el alumno es una idea difícil de asimilar que cualquier concepto, especialmente un número, pueda tener más de un símbolo para representarlo.

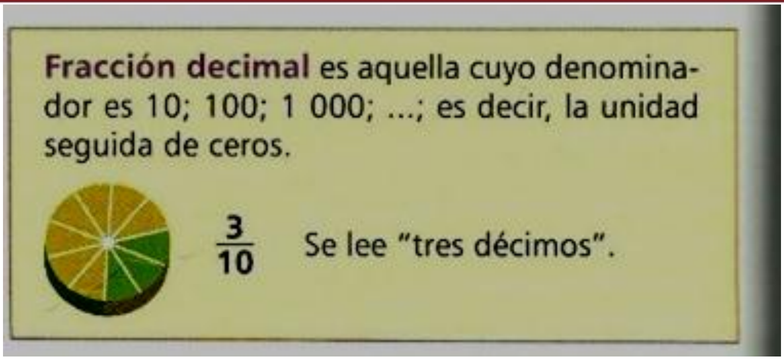


Figura 28: Fracción decimal

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Sobre si las representaciones guardan relación con el concepto de fracción correspondiente

La representación de la fracción impropia no guarda relación con la concepción de fracción como parte-todo establecido en el texto, cuya definición es: "la fracción es aquella en la que la unidad se divide en "n" partes iguales". Sin embargo, como vemos en su representación gráfica, el todo estaría representado por dos unidades, lo cual entra en contradicción con la definición de fracción que establece que el todo, osea, **la unidad** se divide en partes iguales.

Es importante resaltar que la fracción como parte-todo, no es adecuada cuando se pretende representar gráficamente a la fracción impropia. En el ejemplo 7/6 sería ilógico pretender que el alumno entienda que se puede tomar 7 partes de un todo dividido en 6 partes.

Ahora, si quisiéramos forzar la representación de la fracción impropia 7/6, bajo el concepto de parte-todo, se necesitaría sumar dos fracciones provenientes de 2 unidades con las mismas dimensiones y divididas en 6 partes iguales cada una, de las cuales se tomaron 6 partes de un todo (6/6), mientras que del otro todo sólo se tomó una parte (1/6), y la suma de ambas fracciones (6/6 +1/6) originaría la fracción impropia 7/6 la cual, como vemos, no proviene de tomar 7 partes de un todo dividido en 6, sino de la suma de dos fracciones provenientes de distintas unidades.

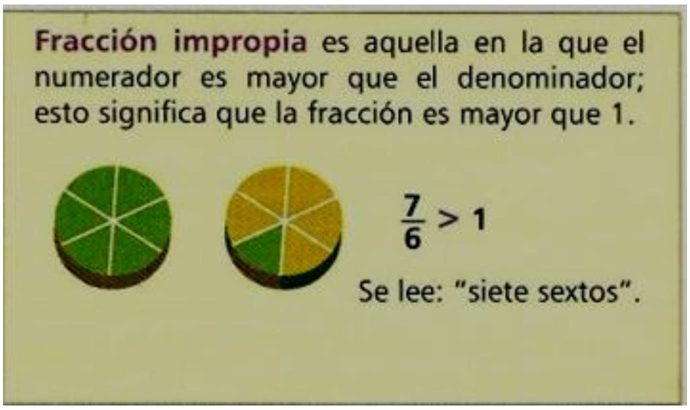


Figura 29: Fracción impropia

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

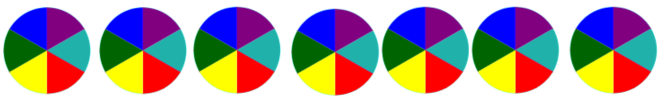
Por ello se sugiere una representación apropiada para la fracción impropia para ello, es recomendable considerar el uso del concepto de fracción como cociente, tal como lo manifiestan investigadores como Silva (2005).

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

No se identifica técnicas apropiadas. Sin embrago, investigadores como Silva (2005), sugiere, a manera de ejemplo, dos tipos de técnicas para resolver la siguiente tarea: Distribuir 7 pizzas entre 6 personas.

La primera técnica, dividir cada unidad (cada pizza) en 6 partes iguales, destinando a cada persona 1/6 de cada pizza y como son 7 pizzas recibiría en total 7/6. Una segunda técnica seria distribuir una unidad entera para cada persona y dividir la última unidad en seis partes iguales, concluyendo que a cada persona le corresponde 1 + 1/6 que es igual a 7/6.

Técnica1:

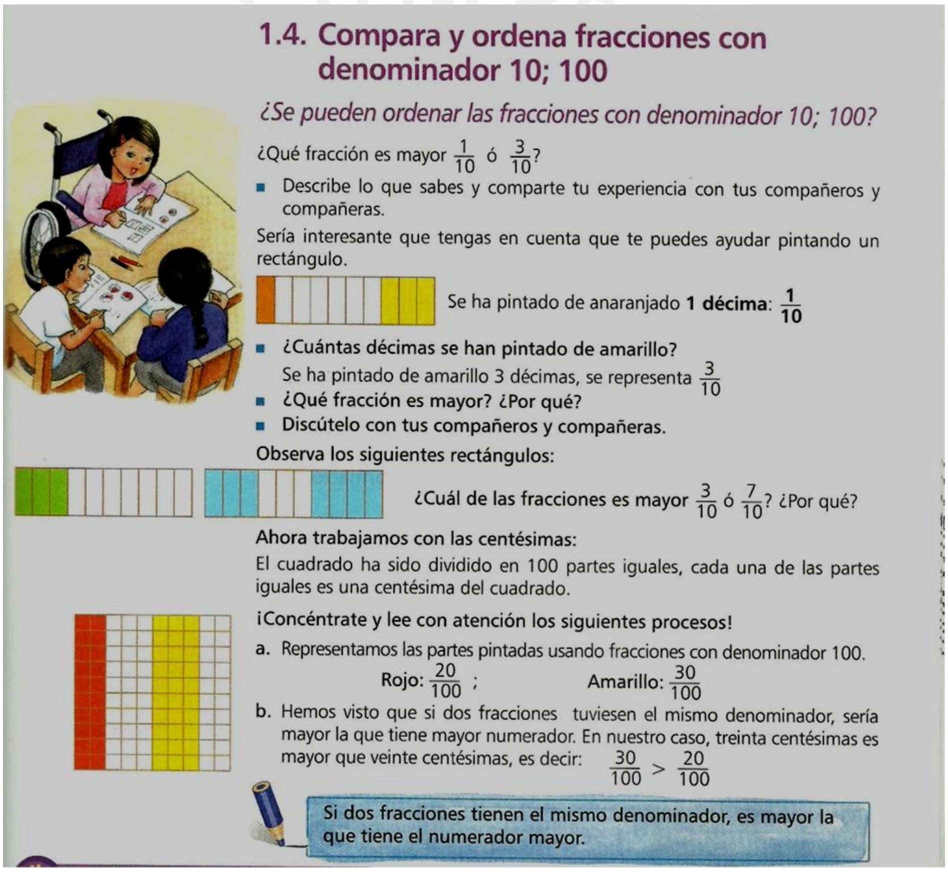


$$\Rightarrow \boxed{7 \div 6 = \frac{7}{6} = 7x\frac{1}{6}}$$

Técnica 2:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{7 \div 6 = 1\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6}}$$

- En la siguiente página, se presenta la forma de comparar fracciones con denominador 10 y 100:



1.4. Compara y ordena fracciones con denominador 10; 100

¿Se pueden ordenar las fracciones con denominador 10; 100?

¿Qué fracción es mayor $\frac{1}{10}$ ó $\frac{3}{10}$?

- Describe lo que sabes y comparte tu experiencia con tus compañeros y compañeras.

Sería interesante que tengas en cuenta que te puedes ayudar pintando un rectángulo.

Se ha pintado de anaranjado **1 décima**: $\frac{1}{10}$

- ¿Cuántas décimas se han pintado de amarillo?
  Se ha pintado de amarillo 3 décimas, se representa $\frac{3}{10}$
- ¿Qué fracción es mayor? ¿Por qué?
- Discútelo con tus compañeros y compañeras.

Observa los siguientes rectángulos:

¿Cuál de las fracciones es mayor $\frac{3}{10}$ ó $\frac{7}{10}$? ¿Por qué?

Ahora trabajamos con las centésimas:

El cuadrado ha sido dividido en 100 partes iguales, cada una de las partes iguales es una centésima del cuadrado.

¡Concéntrate y lee con atención los siguientes procesos!

a. Representamos las partes pintadas usando fracciones con denominador 100.
Rojo: $\frac{20}{100}$; Amarillo: $\frac{30}{100}$

b. Hemos visto que si dos fracciones tuviesen el mismo denominador, sería mayor la que tiene mayor numerador. En nuestro caso, treinta centésimas es mayor que veinte centésimas, es decir: $\frac{30}{100} > \frac{20}{100}$

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene el numerador mayor.

Figura 30: Comparación de fracciones

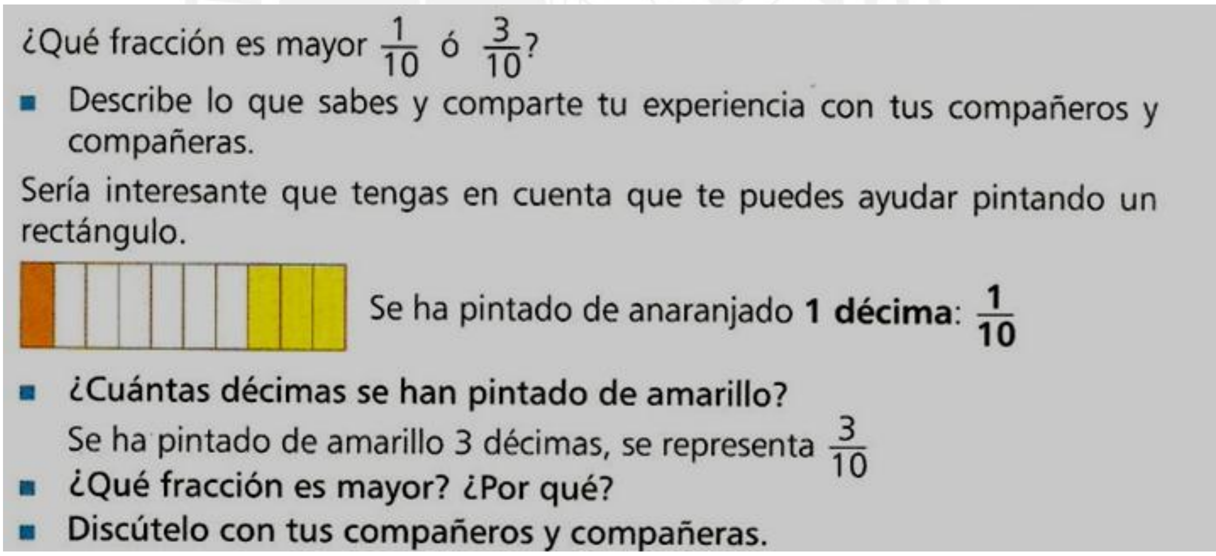
Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Con respecto a la comparación de las fracciones, éstas están vinculadas a la concepcion de fracción como parte-todo, en las cuales, el todo es dividido en 10 partes en un caso (rectángulo) y en 100 partes en otro caso (cuadrado). La idea de 1/10 lleva a la conclusión de que el todo se ha dividido en diez partes de las cuales sólo se usará una, así mismo, se usará 3 de ese todo el cual se representa como 3/10. Sin embargo, en el cuadrado, cada una de esas partes representa 1/100 partes. Así, sí se toman 20 partes entonces se representará como 20/100 y si se toman 30, se representará 30/100.

Sobre si las representaciones guardan relación con el concepto de fracción correspondiente

- Se observa las fracciones 1/10, 3/10 y a continuación se muestra su respectiva representación gráfica:



¿Qué fracción es mayor $\frac{1}{10}$ ó $\frac{3}{10}$?

- Describe lo que sabes y comparte tu experiencia con tus compañeros y compañeras.

Sería interesante que tengas en cuenta que te puedes ayudar pintando un rectángulo.

Se ha pintado de anaranjado **1 décima**: $\mathbf{\frac{1}{10}}$

- **¿Cuántas décimas se han pintado de amarillo?**

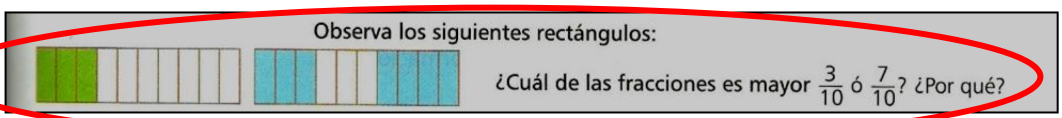
  Se ha pintado de amarillo 3 décimas, se representa $\frac{3}{10}$
- **¿Qué fracción es mayor? ¿Por qué?**
- **Discútelo con tus compañeros y compañeras.**

Figura 31: Comparación de fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Es decir, se hace uso del rectángulo horizontal dividido en 10 partes iguales en posición horizontal para representar 1/10 de color anaranjado y 3/10 de color amarillo y de esta manera poder realizar las comparaciones de dichas fracciones sin ningún problema, pues la comparación de saber quién es mayor o menor es rápida y a simple vista: 3/10 > 1/10.

Al comparar otras fracciones como 3/10 y 7/10 se muestra las siguientes figuras:



En este caso, se observa que el primer rectángulo dividio en 10 partes, se han tomado 3 de esas partes, es decir 3/10 y que en el segundo rectángulo dividido también en 10 partes se han tomado 7 de esas partes, obteniendo 7/10. Concluyendo que los 3/10 partes del primer rectángulo es más pequeño que los 7/10 del segundo rectángulo.

- A continuación, se hace uso de otra representación figural, para hacer referencia a las centésimas. Es decir, en esta ocasión la unidad es dividida en 100 partes iguales:
  Aquí, se muestra un cuadrado dividido en 100 partes iguales, y dentro de él, a su vez, se muestra dos partes pintadas de rojo y de amarillo.

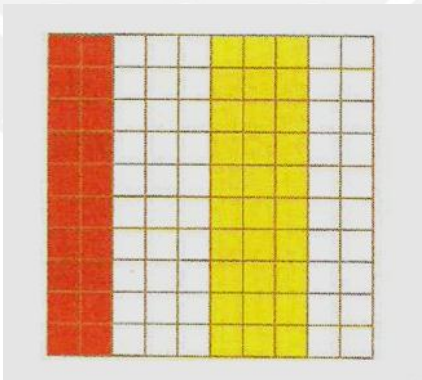


Figura 32: Comparación de fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

La parte pintada de color rojo está representada por dos rectángulos verticales divididos cada uno en 10 partes, lo que numéricamente representa del todo 20/100 y la parte amarilla está representada por tres rectángulos verticales divididos cada uno en 10 partes, lo que numéricamente es 30/100.

Representamos las partes pintadas usando fracciones con denominador 100.

Rojo: $\frac{20}{100}$; Amarillo: $\frac{30}{100}$

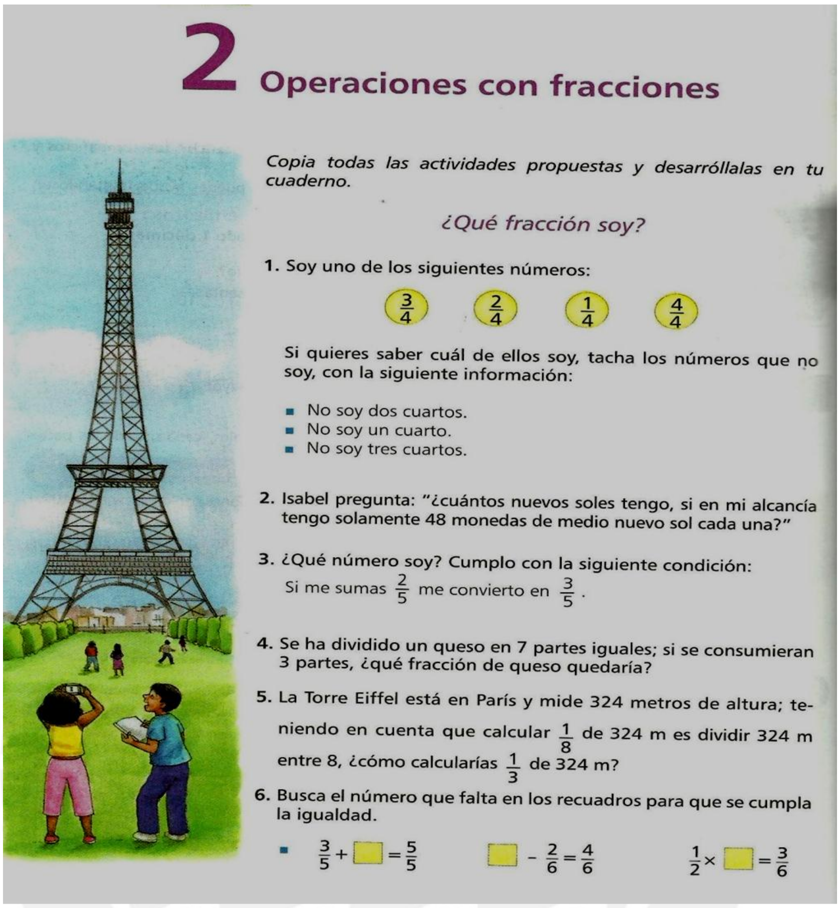
Con ello se deduce que la parte pintada de color rojo es más pequeña con respecto a la parte pintada de color amarillo, por lo tanto se puede concluir que:

Hemos visto que si dos fracciones tuviesen el mismo denominador, sería mayor la que tiene mayor numerador. En nuestro caso, treinta centésimas es mayor que veinte centésimas, es decir: $\frac{30}{100} > \frac{20}{100}$

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Se presenta la técnica de dividir en m partes iguales la unidad (denominador) y de tomar n partes (numerador).

❖ En este tema **operaciones con fracciones**, se presenta 6 actividades propuestas:



2 Operaciones con fracciones

Copia todas las actividades propuestas y desarróllalas en tu cuaderno.

¿Qué fracción soy?

1. Soy uno de los siguientes números:

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}$

Si quieres saber cuál de ellos soy, tacha los números que no soy, con la siguiente información:

- No soy dos cuartos.
- No soy un cuarto.
- No soy tres cuartos.

2. Isabel pregunta: "¿cuántos nuevos soles tengo, si en mi alcancía tengo solamente 48 monedas de medio nuevo sol cada una?"

3. ¿Qué número soy? Cumplo con la siguiente condición:
Si me sumas $\frac{2}{5}$ me convierto en $\frac{3}{5}$.

4. Se ha dividido un queso en 7 partes iguales; si se consumieran 3 partes, ¿qué fracción de queso quedaría?

5. La Torre Eiffel está en París y mide 324 metros de altura; teniendo en cuenta que calcular $\frac{1}{8}$ de 324 m es dividir 324 m entre 8, ¿cómo calcularías $\frac{1}{3}$ de 324 m?

6. Busca el número que falta en los recuadros para que se cumpla la igualdad.

- $\frac{3}{5}+\square=\frac{5}{5}$ $\square-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$ $\frac{1}{2}\times\square=\frac{3}{6}$

Figura 33: Operaciones con fracciones

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

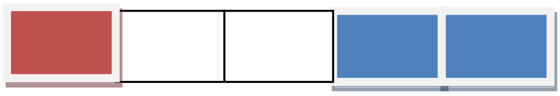
Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En esta primera actividad se encuentra la misma observación descrita en la sección Inicio, conocimientos previos (ver páginas 55).

En la segunda actividad es suficiente resolverlo con una simple multiplicación:
48x 0.50 = 24 soles.

En la tercera actividad se vuelve a introducir la operación de la adición de fracciones homogéneas, aunque es suficiente la concepción de fracción como parte-todo para dar respuesta a la actividad mencionada.

Aquí se utilizará un rectángulo divido en 5 partes iguales:



Donde:

Tengo $\frac{2}{5}$ y se le suma $\frac{1}{5}$, entonces, resulta $\frac{3}{5}$. La fracción buscada será $\frac{1}{5}$

En la cuarta actividad se pide dividir un queso en 7 partes iguales, consumir 3 partes y responder ¿Qué fracción de queso quedaría?, para este caso sería "dividir el pastel en 7 partes iguales, si se consume 3 partes, por lo tanto quedaría 4 partes de 8". Es decir: $\frac{4}{7}$

En la quinta actividad se hace referencia al concepto de operador, pues se asume un papel de transformador, realizando una operación de división. Esto se puede observar cuando nos piden calcular $\frac{1}{3}$ de 324 que es igual a $\frac{324}{3} = 108$

En la sexta actividad se pide resolver tres tipos de ejercicios de operaciones con fracciones. A pesar de que en los dos ejercicios es suficiente el concepto de parte-todo, no sucede lo mismo con la tercera actividad, ya que tal concepto de fracción no es suficiente sino se necesitaría de otro concepto de fracción como por ejemplo, el de operador.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

En la quinta actividad, se presenta la técnica de la operación de la división.

La Torre Eiffel está en París y mide 324 metros de altura; teniendo en cuenta que calcular $\frac{1}{8}$ de 324 m es dividir 324 m entre 8, ¿cómo calcularías $\frac{1}{3}$ de 324 m?

En la Sexta actividad, los autores no presentan técnicas. Por ello, se sugiere algunas pobibles técnicas:

<u>Técnica1:</u>

Consiste en buscar una fracción que sumada con 3/5 obtenga de resultado 5/5. Para ello, si usamos la técnica del doble conteo de las partes, y el todo es la unidad es decir 5/5, y como vemos ya tenemos 3/5, entonces para llegar al todo necesitamos de 2/5.
Aquí, lo representaremos gráficamente:

1) $\frac{3}{5} + \boxed{} = \frac{5}{5}$

$$\text{Sí el alumno sabe que } \frac{5}{5} = 1, \textit{ entonces } \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

<u>TÉCNICA 2:</u>

Consiste en buscar una fracción que al restarle 2/6 de como resultado 4/6. Para ello, si usamos la técnica del doble conteo de las partes, vemos que la unidad, es decir, el todo estará dividido en 6 partes, luego la fracción que al restarle 2/6 de cómo resultado 4/6, será la fracción 6/6.

Aquí, lo representaremos gráficamente:

$$\square - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

Aquí se utilizará un rectángulo divido en 6 partes iguales:

Donde:

La fracción $\frac{4}{6}$ sumada con la fracción $\frac{2}{6}$ resultará $\frac{6}{6}$

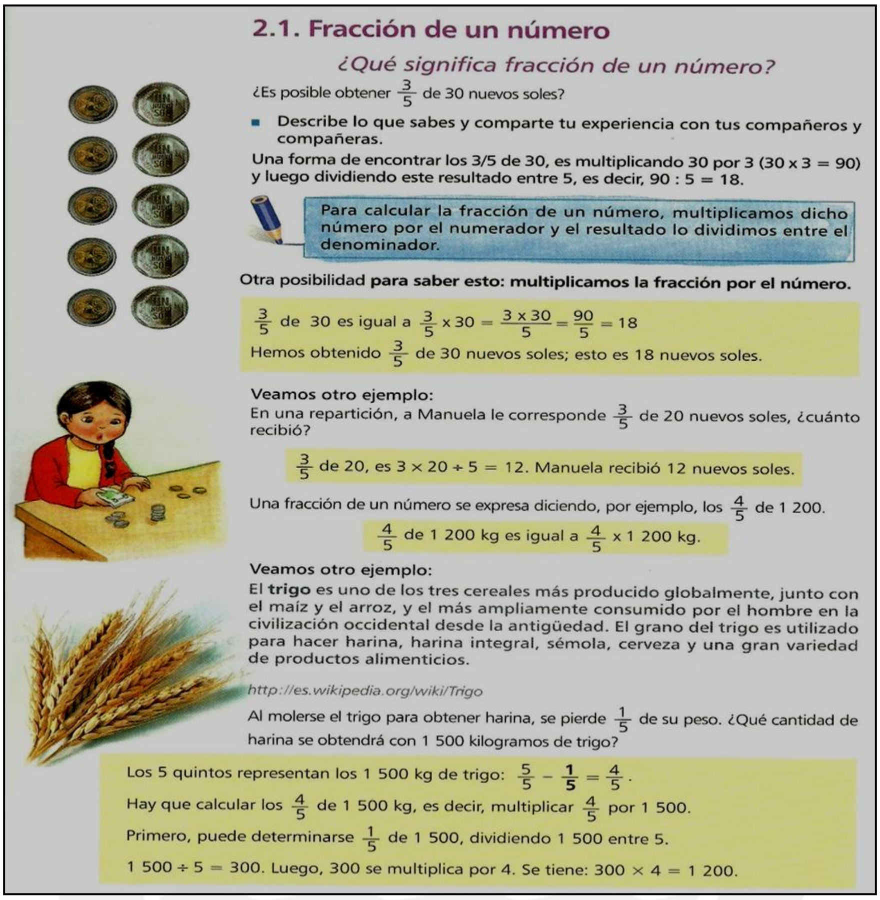
<u>TÉCNICA 3:</u>

$$\frac{1}{3} \times \square = \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} x \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

Se necesita del concepto de fracción como operador, ya que la tarea que se indica es que número multiplicado por 1/3 obtenga 2/6. Entonces aqui, fracción 2/2 actúa como función transformadora de un número.

Por lo tanto, la fracción buscada sería: 2/2.

❖ En esta parte del libro, se inicia con el titulo **Fracción de un número**.



2.1. Fracción de un número

¿Qué significa fracción de un número?

¿Es posible obtener $\frac{3}{5}$ de 30 nuevos soles?

- Describe lo que sabes y comparte tu experiencia con tus compañeros y compañeras.

Una forma de encontrar los 3/5 de 30, es multiplicando 30 por 3 ($30 \times 3 = 90$) y luego dividiendo este resultado entre 5, es decir, $90 : 5 = 18$.

Para calcular la fracción de un número, multiplicamos dicho número por el numerador y el resultado lo dividimos entre el denominador.

Otra posibilidad **para saber esto: multiplicamos la fracción por el número.**

$\frac{3}{5}$ de 30 es igual a $\frac{3}{5} \times 30 = \frac{3 \times 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$

Hemos obtenido $\frac{3}{5}$ de 30 nuevos soles; esto es 18 nuevos soles.

Veamos otro ejemplo:

En una repartición, a Manuela le corresponde $\frac{3}{5}$ de 20 nuevos soles, ¿cuánto recibió?

$\frac{3}{5}$ de 20, es $3 \times 20 \div 5 = 12$. Manuela recibió 12 nuevos soles.

Una fracción de un número se expresa diciendo, por ejemplo, los $\frac{4}{5}$ de 1 200.

$\frac{4}{5}$ de 1 200 kg es igual a $\frac{4}{5} \times 1\,200$ kg.

Veamos otro ejemplo:

El **trigo** es uno de los tres cereales más producido globalmente, junto con el maíz y el arroz, y el más ampliamente consumido por el hombre en la civilización occidental desde la antigüedad. El grano del trigo es utilizado para hacer harina, harina integral, sémola, cerveza y una gran variedad de productos alimenticios.

http://es.wikipedia.org/wiki/Trigo

Al molerse el trigo para obtener harina, se pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. ¿Qué cantidad de harina se obtendrá con 1 500 kilogramos de trigo?

Los 5 quintos representan los 1 500 kg de trigo: $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Hay que calcular los $\frac{4}{5}$ de 1 500 kg, es decir, multiplicar $\frac{4}{5}$ por 1 500.

Primero, puede determinarse $\frac{1}{5}$ de 1 500, dividiendo 1 500 entre 5.

$1\,500 \div 5 = 300$. Luego, 300 se multiplica por 4. Se tiene: $300 \times 4 = 1\,200$.

Figura 34: Fracción de un número

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

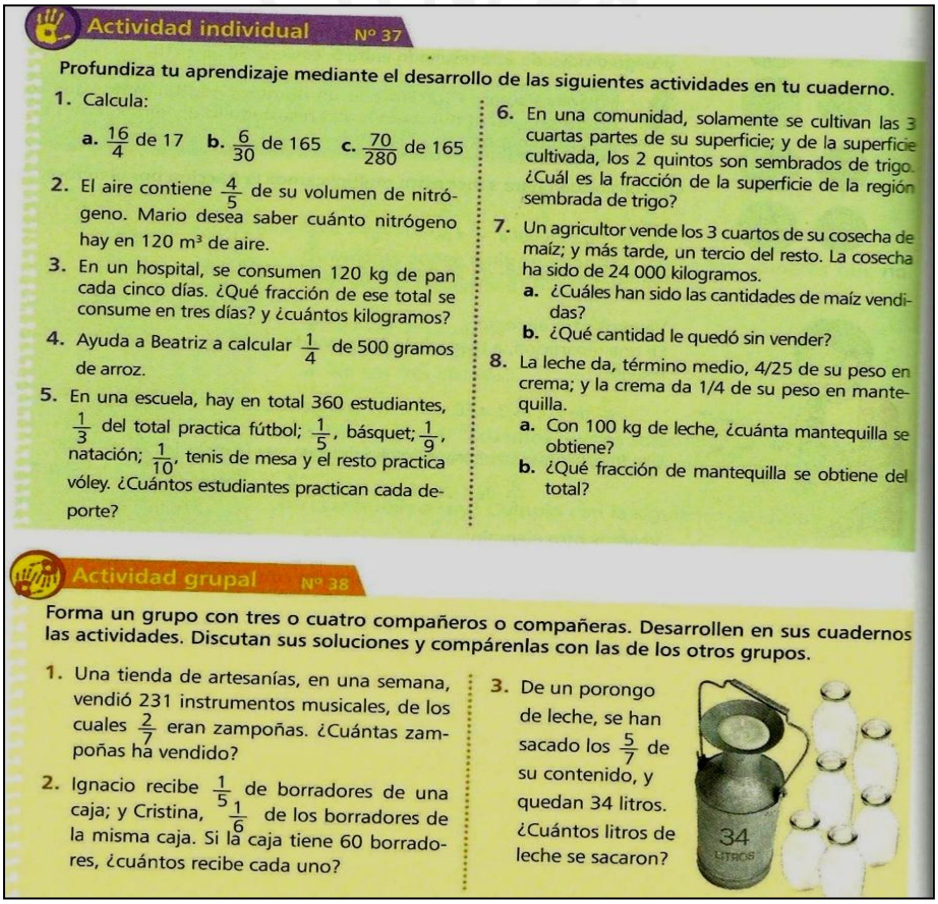
En esta parte "**Fracción de un número**", se introduce la **concepción de fracción como operador**, el cual asume un papel de transformador realizando una secuencia de operaciones de división y multiplicación.

Los ejemplos propuestos en esta parte, se limitan a aquellos cuyos resultados son números enteros, dejando de lado la posibilidad de un resultado como una fracción. Así, por ejemplo se pide calcular los 3/5 de 30 obteniendo como resultado 18, los 3/5 de 20 obteniendo 12, los 4/5 de 1200 obteniendo 960. Como vemos todos los números son múltiplos de los denominadores de las fracciones, restringiendo los resultados a números enteros.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

En cuanto a las **técnicas,** se observa la utilización de la técnica de división y luego multiplicación que forma parte de la concepción de fracción como operador, que se presentó implicitamente en la definición de fracción de un número en la página 82 de esta investigación.

❖ En la página siguiente se presenta un conjunto de actividades individuales que consta de 8 tareas que serán desarrolladas por los alumnos en sus hogares y actividades grupales con 9 tareas que serán desarrolladas en el aula.



Actividad individual Nº 37

Profundiza tu aprendizaje mediante el desarrollo de las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Calcula:

   a. $\frac{16}{4}$ de 17 b. $\frac{6}{30}$ de 165 c. $\frac{70}{280}$ de 165

2. El aire contiene $\frac{4}{5}$ de su volumen de nitrógeno. Mario desea saber cuánto nitrógeno hay en 120 m^3 de aire.
3. En un hospital, se consumen 120 kg de pan cada cinco días. ¿Qué fracción de ese total se consume en tres días? y ¿cuántos kilogramos?
4. Ayuda a Beatriz a calcular $\frac{1}{4}$ de 500 gramos de arroz.
5. En una escuela, hay en total 360 estudiantes, $\frac{1}{3}$ del total practica fútbol; $\frac{1}{5}$, básquet; $\frac{1}{9}$, natación; $\frac{1}{10}$, tenis de mesa y el resto practica vóley. ¿Cuántos estudiantes practican cada deporte?
6. En una comunidad, solamente se cultivan las 3 cuartas partes de su superficie; y de la superficie cultivada, los 2 quintos son sembrados de trigo. ¿Cuál es la fracción de la superficie de la región sembrada de trigo?
7. Un agricultor vende los 3 cuartos de su cosecha de maíz; y más tarde, un tercio del resto. La cosecha ha sido de 24 000 kilogramos.
   a. ¿Cuáles han sido las cantidades de maíz vendidas?
   b. ¿Qué cantidad le quedó sin vender?
8. La leche da, término medio, 4/25 de su peso en crema; y la crema da 1/4 de su peso en mantequilla.
   a. Con 100 kg de leche, ¿cuánta mantequilla se obtiene?
   b. ¿Qué fracción de mantequilla se obtiene del total?

Actividad grupal Nº 38

Forma un grupo con tres o cuatro compañeros o compañeras. Desarrollen en sus cuadernos las actividades. Discutan sus soluciones y compárenlas con las de los otros grupos.

1. Una tienda de artesanías, en una semana, vendió 231 instrumentos musicales, de los cuales $\frac{2}{7}$ eran zampoñas. ¿Cuántas zampoñas ha vendido?
2. Ignacio recibe $\frac{1}{5}$ de borradores de una caja; y Cristina, $\frac{1}{6}$ de los borradores de la misma caja. Si la caja tiene 60 borradores, ¿cuántos recibe cada uno?
3. De un porongo de leche, se han sacado los $\frac{5}{7}$ de su contenido, y quedan 34 litros. ¿Cuántos litros de leche se sacaron?

Figura 35: Actividades individuales

Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

En las actividades individuales y grupales, se hace referencia a la concepción de fracción como operador.

Sobre si las representaciones guardan relación con el concepto de fracción correspondiente a los conceptos de fracción

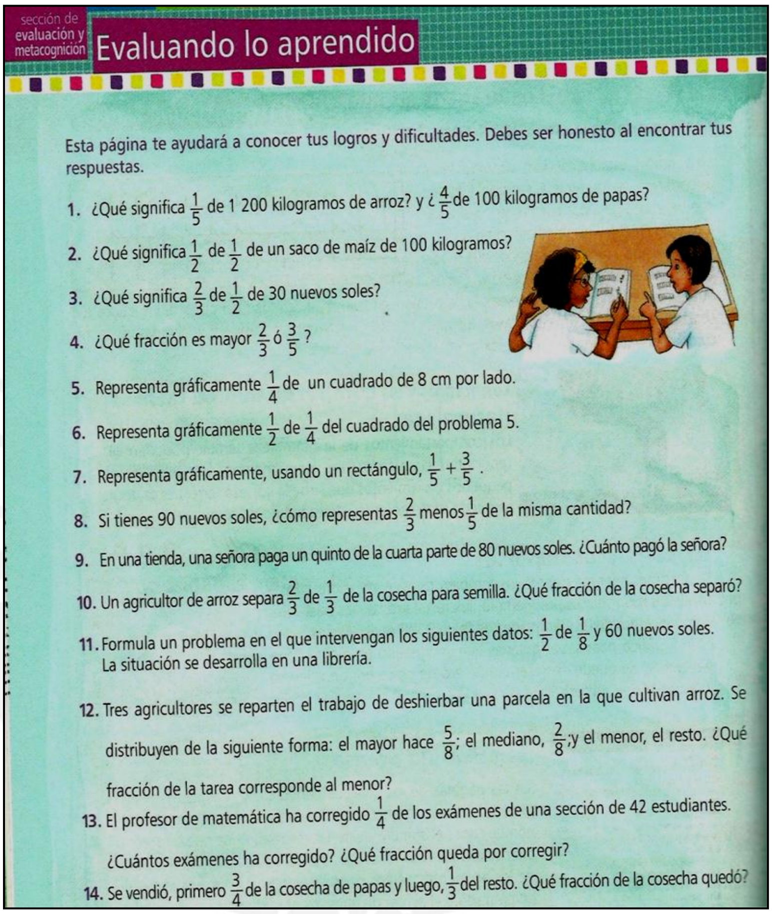
Se presentan representaciones verbales como por ejemplo: los 3 cuartos, un tercio, etc. y sus respectivas representaciones numéricas.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

- En la tarea 1 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, haciendo uso de la concepción de fracción como operador.
- En la tarea 2 se transmite el desarrollo de la concepción operador, usando la técnica de división y multiplicación.
- En la tarea 3 se induce a la concepción parte-todo, con el tipo de tarea reconstruir un entero. Para ello se usará la técnica de reversibilidad del doble conteo de las partes, es decir, un todo será 120kg x 5 partes= 600 kg, la parte tomada del todo será 120kg x 3 = 360kg, logrando así la fracción buscada: $\frac{a}{b} = \frac{360}{600}$
- De la tareas 4 a la 8 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, aquí vuelve la concepción de operador.
- Por otro lado, en la actividad grupal las tareas dadas también se desarrollan usando la concepción de operador.

5.3.4 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN

- En esta última sección se presenta un conjunto de actividades distribuidas por subtítulos como: Evaluando lo aprendido, autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación y la metacognición.


sección de evaluación y metacognición

Evaluando lo aprendido

Esta página te ayudará a conocer tus logros y dificultades. Debes ser honesto al encontrar tus respuestas.

1. ¿Qué significa $\frac{1}{5}$ de 1 200 kilogramos de arroz? y ¿ $\frac{4}{5}$ de 100 kilogramos de papas?
2. ¿Qué significa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de un saco de maíz de 100 kilogramos?
3. ¿Qué significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 30 nuevos soles?
4. ¿Qué fracción es mayor $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{5}$?
5. Representa gráficamente $\frac{1}{4}$ de un cuadrado de 8 cm por lado.
6. Representa gráficamente $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del cuadrado del problema 5.
7. Representa gráficamente, usando un rectángulo, $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$.
8. Si tienes 90 nuevos soles, ¿cómo representas $\frac{2}{3}$ menos $\frac{1}{5}$ de la misma cantidad?
9. En una tienda, una señora paga un quinto de la cuarta parte de 80 nuevos soles. ¿Cuánto pagó la señora?
10. Un agricultor de arroz separa $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de la cosecha para semilla. ¿Qué fracción de la cosecha separó?
11. Formula un problema en el que intervengan los siguientes datos: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$ y 60 nuevos soles. La situación se desarrolla en una librería.
12. Tres agricultores se reparten el trabajo de deshierbar una parcela en la que cultivan arroz. Se distribuyen de la siguiente forma: el mayor hace $\frac{5}{8}$; el mediano, $\frac{2}{8}$;y el menor, el resto. ¿Qué fracción de la tarea corresponde al menor?
13. El profesor de matemática ha corregido $\frac{1}{4}$ de los exámenes de una sección de 42 estudiantes. ¿Cuántos exámenes ha corregido? ¿Qué fracción queda por corregir?
14. Se vendió, primero $\frac{3}{4}$ de la cosecha de papas y luego, $\frac{1}{3}$ del resto. ¿Qué fracción de la cosecha quedó?

Figura 36: Evaluando lo aprendido

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Se hace referencia a la concepción parte-todo en todas las preguntas.

Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Evaluando lo aprendido: se observa las tareas del 1 al 14.

- En cuanto a las técnicas, no se observa la utilización de alguna técnica, ya que son problemas que sólo están propuestos. Algunas técnicas que se sugiere para su solución podrían ser:

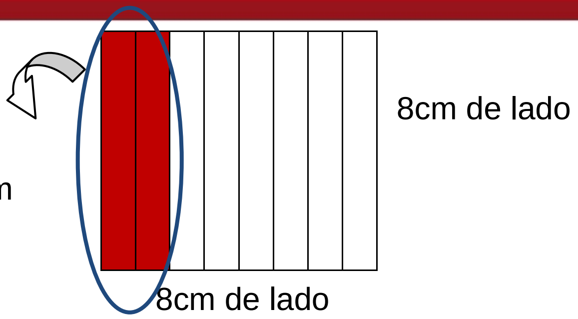
  - ✓ Con respecto a las preguntas 1, 2 y 3, se observa que dichas preguntas son ambiguas, pues el término ¿Qué significa?, se puede entender como ¿Qué entiendes por esta fracción? por ejemplo, en la primera pregunta 1/5 de 1200 ¿Cuál es tu interpretación? se presta a múltiples respuestas: Un alumno podría decir en el primer caso, significa la quinta parte de 1200, otro podría resolverlo y decir que 1/5 de 1200 significa 240, otro podría decir que dividimos 1200 en cinco partes de las cuales nos quedamos con una. Y aunque todas las reflexiones serian correctas, se sugiere especificar qué se espera que haga el alumno ¿Que interprete y dé su opinión o que opere y halle su respuesta o resultado?

  - ✓ Con respecto a la pregunta 4, se pide la comparación de fracciones heterogéneas, lo que no fue explicado en la sección proceso, donde sólo se abordó la comparación de fracciones. En aquella sección sólo se reduce a la comparación de fracciones homogéneas. Ahora para su resolución es necesario hallar fracciones homogéneas que sean equivalentes con dichas fracciones dadas. Así: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ podemos hallar fracciones equivalentes a estas solo multiplicando a la primera fracción por $\frac{5}{5}$ y a la segunda fracción por $\frac{3}{3}$, y de esta manera lograr las nuevas fracciones $\frac{2x5}{3x5}=\frac{10}{15}$ y $\frac{3x3}{5x3}=\frac{9}{15}$ entonces $\frac{10}{15}>\frac{9}{15}$.

  - ✓ Con respecto a la pregunta 5, su posible representación figural sería:

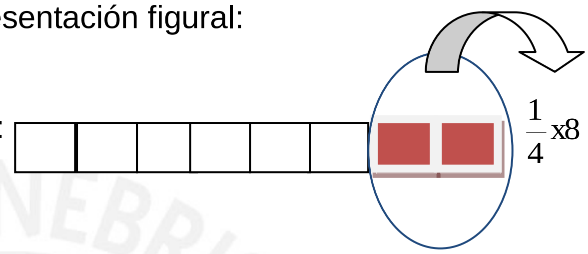
$\frac{1}{4} \text{ x } 8cm = 2$

Respuesta: 2cm



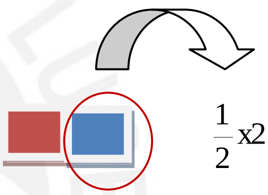
- Con respecto a la pregunta 6 su representación figural:

$\frac{1}{2} de \frac{1}{4} \text{de 8 cm. de lado}$ $\Longrightarrow$ Paso1:



$\frac{1}{4} x8 = 2$

Ahora:



$\frac{1}{2} x2 = 1$

Por lo tanto su respuesta sería 1 cm.

- Con respecto a la pregunta 7 su representación figural sería:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

- Con respecto a la pregunta 8 su resolución se puede realizar usando la concepción operador.

$$\frac{2}{3} \text{ x } 90 - \frac{1}{5} x\, 90 = 60 - 18 = 42$$

- Con respecto a la pregunta 9 y 10 los estudiantes podrán hacer uso de la concepción como operador (tratado en esta unidad como fracción de un número) para responder a dichas preguntas.

Pregunta 9: $\frac{1}{5}\,\text{de}\,\frac{1}{4}\,de\,80 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\text{x}80 = 20$

$$\frac{1}{5}\text{x}20 = 4$$

Pregunta 10: $\frac{2}{3}\,\text{de}\,\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\,\text{x}\,\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

- Con respecto a la pregunta 11 se pide la formulación de un problema con los datos dados. Dichos datos son entregados en el problema, facilitando así su elaboración.

- Con respecto a la pregunta 12, se pide la resolución de operaciones con fracciones homogéneas. Dichas fracciones fueron estudiadas en la sección de proceso.

  Así se pide sumar las fracciones homogéneas para obtener la unidad.

  Para ello se suma $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}+\frac{a}{b}=\frac{8}{8} \Rightarrow \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{1}{8}$

- Con respecto a la pregunta 13 se podrá hacer uso de la concepción como parte todo, sin embargo por tratarse de exámenes el resultado esperado seria un número entero.

El profesor de matemática ha corregido $\frac{1}{4}$ de los exámenes de una sección de 42 estudiantes.
¿Cuántos exámenes ha corregido? ¿Qué fracción queda por corregir?

- Con respecto a la pregunta 14, aquí es necesario del dominio de operaciones de fracciones para obtener el resultado.
  La técnica que proponemos es:

Se vendió, primero $\frac{3}{4}$ de la cosecha de papas y luego, $\frac{1}{3}$ del resto. ¿Qué fracción de la cosecha quedó?

Se vendió $\frac{3}{4}$ de la cosecha de papas, entonces nos queda $\frac{1}{4}$ de dicha cosecha.

Luego se vendió $\frac{1}{3}$ de lo queda, osea $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{12}$. Quedando

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1x3}{4x3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

❖ Aquí se presenta la autoevaluación

Autoevaluación

Copia el cuadro y responde en tu cuaderno.

Evaluando lo que aprendí	Aprendí Sí	Aprendí NO
Identifico fracciones.		
Interpreto fracciones con denominadores 10; 100.		
Comparo fracciones con denominadores 10; 100.		
Ordeno fracciones con denominadores 10; 100.		
Interpreto la fracción de un número.		
Resuelvo operaciones con fracciones.		
Identifico fracciones equivalentes.		

Figura 37: Autoevaluación

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

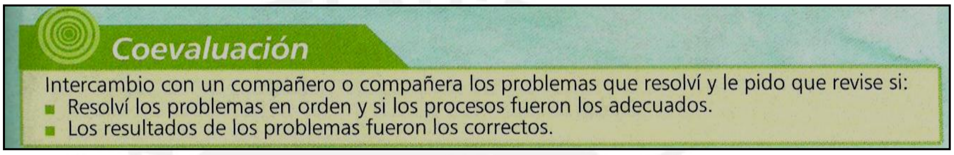
Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.

Se observa un cuadro en el que se presentan indicadores de autoevaluación relacionados al tema de fracciones. Sin embargo, los indicadores no están referidos a varias concepciones de fracción que tácitamente aparecen en el texto pero que a pesar de su importancia para la mejor comprensión de las fracciones, estas no se los menciona en forma explícita. Nos referimos a las concepciones cociente y razón. Por ello, se sugiere considerar indicadores más pertinentes, considerando la importancia de entender, primero, el concepto de fracción.

Dado que en el texto se enfatiza en la concepción parte-todo, se propone los siguientes indicadores:

- Interpreto la concepción como parte-todo (presente, por ejemplo, en la actividad individual de la página 64 de esta investigación).
- Interpreto la concepción como cociente (que no se explica en el texto a pesar que se presenta la definición de las fracciones impropias en la página 67 de esta investigación, aunque con una representación figural inadecuada).
- Puedo representar figuralmente una fracción propia.
- Puedo representar figuralmente una fracción impropia.

❖ Aquí se presenta la coevaluación


Coevaluación

Intercambio con un compañero o compañera los problemas que resolví y le pido que revise si:

- Resolví los problemas en orden y si los procesos fueron los adecuados.
- Los resultados de los problemas fueron los correctos.

Figura 38: Coevaluación

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

Aquí se pone a prueba el dominio que tiene el estudiante sobre la organización matemática construida. Por tratarse de una coevaluación el alumno compartirá sus resultados con un compañero o compañera, quien se encargará de revisar los procesos y resultados.

❖ Aquí se presenta la Metacognición

Se presenta un esquema resumen de lo trabajado en la unidad. El cual es pertinente para el aprendizaje

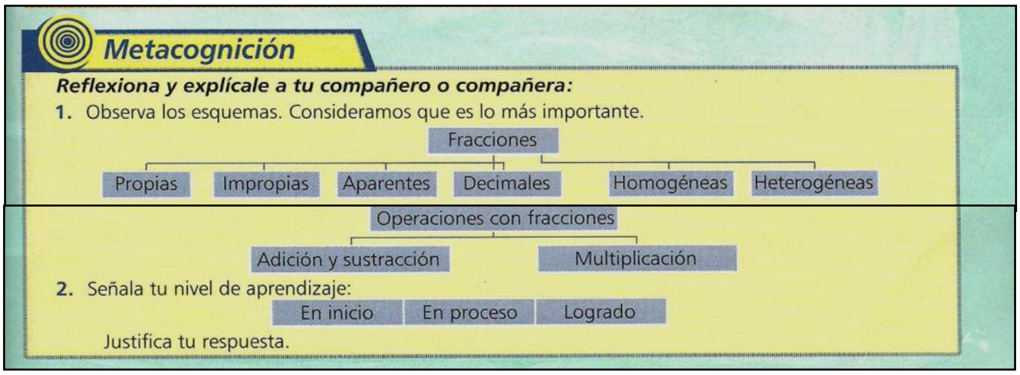


Figura 39: Metacognición

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

5.4 RESULTADOS

Luego de analizar las secciones de la unidad 4 “La división de un todo en partes iguales” del texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria, se tienen los siguientes resultados, los cuales se han agrupado teniendo en cuenta los criterios de:

- Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto.
- Las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción.
- Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.

Se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto:

Para efectos de esta investigación sobre la enseñanza de las fracciones en la Educación primaria y de acuerdo con Silva (2005), la fracción es una representación, es decir, una expresión que se escribe con numerador y denominador racional o irracional. Sin embargo, teniendo en cuenta que el texto analizado es de 5to grado de Educación Primaria, sólo se encontrará representaciones de la forma:

$$\frac{a}{b}.\text{ donde } a \in N, b \in N \text{ y } b \neq 0. \text{ Asumiendo que } N = \{0; 1; 2; 3; 4...\}$$

Esta restricción en el campo de valores de a y b hará que en este nivel no se pueda considerar el concepto de fracción como medida.

En el texto, se privilegia la concepción parte-todo, es decir, el resultado de la partición de la unidad en partes iguales. Sin embargo, esta concepción de fracción se restringe al caso de fracción propia, dejando de lado la posibilidad de analizar el caso de fracción impropia y esto puede evidenciarse en la definición de fracción y en las expresiones presentadas en el texto, las cuales se muestran en la página 56 de esta investigación. Esta restricción podría traer como consecuencia una confusión en los alumnos, al querer representar una fracción impropia a/b bajo el concepto de parte-todo, y no entender cómo a/b, donde a>b, se pueda dividir en b partes y tomar a partes mayores que b.

Otra concepción presente en el texto, es la concepción de operador aunque aparece con el nombre de “Fracción de un número” y aunque esta concepción sólo se muestre por necesidad en el cálculo de la fracción de un número, el papel que cumple, según Silva (2005), es que en la fracción a/b cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final, los cuales son multiplicar por a y dividir por b. Además, no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b. Además, la fracción es interpretada como algo que actúa y modifica una situación, es decir, asume un papel de transformador realizando una secuencia de operaciones de multiplicación y división.

Se aprecia la presencia de otra concepción como el de razón, aunque tal presencia se hace de manera eventual y no explícita ya que no son introducidos teóricamente. Por ejemplo, el ejercicio 4 de la actividad individual, que podemos observar en la página 68 de esta investigación, está vinculado al concepto de fracción como razón, porque hay una relación de comparación entre a y b (una razón) en la que todo cambio en a producirá un cambio en b.

- **Las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción.**

Las representaciones figurales empleadas en las páginas 65 y 66 de esta investigación son usadas como recurso para ejemplificar las representaciones verbales. Por ejemplo, el uso del segmento de recta, que permite representar la concepción parte-todo, ya que es resultado de dividir un segmento en partes congruentes y asignar una fracción a cada parte.
Los círculos divididos; que también tienen como propósito representar la concepción parte-todo.

En la representación figural de la página 70, la gráfica de la fracción impropia, se observa una representación figural no adecuada a la concepción de fracción como parte-todo (donde la fracción es aquella en la que la unidad se divide en “n” partes iguales). Sin embargo, como vemos en su representación figural, el todo estaría representado por dos unidades, lo cual entra en contradicción con la definición de fracción que establece que el todo, es decir, la unidad se divide en partes iguales. Es importante resaltar que la fracción como parte-todo, no es adecuada cuando se pretende representar gráficamente a la fracción impropia. En el ejemplo; la fracción impropia 7/6 que plantea el texto, sería ilógico pretender que el alumno entienda que se puede tomar 7 partes de un todo dividido en 6 partes. Sin embargo, si quisiéramos forzar la representación de la fracción impropia 7/6, bajo la concepción parte-todo, se necesitaría sumar dos fracciones provenientes de 2 unidades con las mismas dimensiones y divididas en 6 partes iguales cada una, de las cuales se tomaron 6 partes de un todo (6/6), mientras que del otro todo sólo se tomó una parte (1/6), y la suma de ambas fracciones (6/6 +1/6) originaría la fracción impropia 7/6 la cual, como vemos, no proviene de tomar 7 partes de un todo dividido en 6, sino de la suma de dos fracciones provenientes de distintas unidades.

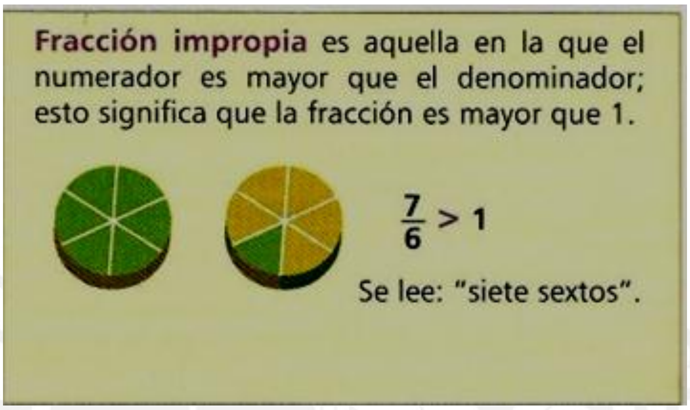


Figura 40: Representación de la Fracción impropia

Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

- **Identificar la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan.**

❖ Las tareas que se presentan no son muy explícitas, sin embargo se puede identificar algunas:

1. Determinar la fracción de un entero. Esta tarea está relacionada a la concepción de fracción como parte-todo
2. Transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional. Esta tarea corresponde a la concepción de fracción como operador.
3. Distribuir en partes iguales un objeto a "n" personas. Esta tarea corresponde a la concepción de fracción como cociente.

❖ Las técnicas que se presentan no son muy explícitas, sin embargo, se puede identificar algunas:

1. La técnica de la división y del doble conteo de la partes. Estas técnicas pertenecen a la concepción de fracción como parte-todo.

2. Dividir las medidas iniciales por denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador. Esta técnica corresponde a la concepción de fracción como operador.

3. La técnica de la operación de división. Esta técnica pertenece a la concepción de fracción como cociente.

CAPÍTULO 6:

CONSIDERACIONES FINALES Y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Nuestra investigación tiene como objetivo general analizar y describir la Organización Matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria. Siendo la Teoría Antropológica un referente adecuado para describir y analizar cuestiones referidas al estudio del objeto matemático de las fracciones en el texto escolar analizado.

Al término de esta investigación confirmamos que se han podido alcanzar los objetivos planteados. En relación a los objetivos específicos debemos señalar lo siguiente:

En el texto escolar analizado se ha identificado el uso de dos concepciones de fracción: como parte-todo y como operador. Cabe destacar que la concepción de fracción como parte-todo es el que predomina, se oficializa mediante la definición de fracción y es el que está presente en la mayoría de las tareas. La concepción de fracción como operador, aunque no se le define de esta manera sino como fracción de un número, se oficializa a través de la técnica de dividir las cantidades por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador y está presente en algunas tareas. Las concepciones de fracción como razón y cociente no son considerados explícitamente, aunque aparecen en forma eventual en otras tareas.

La praxeología predominante en el texto analizado es la del saber hacer, constituido por los siguientes tipos de tareas y técnicas: Determinar la fracción de un entero (vinculada al concepto de fracción como parte-todo) cuya técnica empleada fue la de división y del doble conteo de la partes. Transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (vinculada a la concepción de fracción como operador) cuya técnica empleada fue la de dividir las medidas iniciales por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador. Distribuir en partes iguales un objeto a “n” personas (vinculada a la concepción de fracción como cociente) cuya técnica empleada fue la de la operación de división.

Con respecto a las representaciones figurales, se observa la presencia de algunas, por ejemplo: los círculos divididos y el segmento de recta, que tienen como propósito representar la concepción parte-todo. El uso de otras representaciones sería más adecuado, porque ayudarían a un mejor entendimiento de dicho objeto matemático. Por ejemplo, para la representación de la fracción impropia sería mucho más apropiado emplear la concepción de cociente, ya que representarlo bajo la concepción parte-todo, implicaría entrar en contradicción con la definición de fracción como parte-todo. Realizar la representación adecuada favorecería enormemente el aprendizaje de los alumnos puesto que ellos podrían visualizar correctamente la representación de acuerdo a cada tipo de fracción.

Por otro lado, el análisis de las concepciones de fracción como: Parte-todo, operador, cociente, razón nos permitió identificar las praxeologías (tipos de tareas y técnicas empleadas para resolver las tareas vinculadas a tales conceptos así como las tecnologías que justifican esas técnicas) que están presentes en el texto escolar y cómo éstas pueden influir negativa o positivamente en el aprendizaje del objeto matemático en estudio.

En relación a la metodología de análisis del texto, la definición de los criterios fue importante para el logro de los objetivos propuestos, los cuales permitieron un análisis basado no sólo en la TAD, sino que se adoptó una postura en la que se concibe al hacer matemática en el contexto de una institución con prácticas determinadas que pueden ser modelizadas y luego serán transformadas con la finalidad de su enseñanza.

SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Finalmente, consideramos que este trabajo puede complementarse con otras investigaciones, tales como:

Realizar estudios en otros textos escolares para analizar las concepciones de fracción que se utilizan.

Con este estudio se puede saber si en los otros textos escolares predomina la concepción de fracción como parte-todo, como ha sido el caso del texto escolar analizado en este estudio, o se toman en cuenta las otras concepciones de fracción como: operador, cociente, razón y medida.

Realizar estudios en otros textos escolares sobre la praxeología matemática relacionada a la concepción de fracción que se utiliza.

Con este estudio se puede analizar la praxeología matemática presente en los otros textos escolares y si ésta es apropiada para el logro de los aprendizajes vinculados a la fracción.

Realizar otros estudios sobre la praxis pedagógica en relación a los conceptos de fracción

Con este estudio se puede saber si los docentes dominan todas las concepciones de fracción que existe. Ello es importante porque de eso depende, en gran medida, el entendimiento de los alumnos en relación a dicho objeto matemático.

REFERENCIAS

Bazán, A., Castañeda, S., Macotela, S. y López, M. (2004). *Evaluación del desempeño en lectura y escritura. Aportes empíricos a la noción de componentes lingüísticos en el cuarto grado de primaria,* Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9, 841-861

Bosch, Espinoza, Gascón (2003). *El profesor como director de los procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas.* Recherches en didactique des Mathématiques,29, 79-136

Chevallard, Y. (1999). *L´analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique Du didactique.* Recherches en didactique des Mathématiques. 14(72), 9-42

Corica, A y Otero, M. (2009). *Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en momento de la evaluación.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2009)12(3):305-331. Recepción: Febrero 27,2009/ Aceptación: Octubre 21, 2009.

Cortina, L. (1996). *Los libros de texto de las editoriales privadas. Sus propuestas para matemáticas de primer grado.* Revista Latinoamericana de Estudios Educativos,26,165-203

Elguero, C. (2008). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural Del trabajo.* Tesis de Maestría. México.

Escolano, R y Gairín, J (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria.* En Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 1, 17-35. Recuperado el 10 de abril de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaemPortugues/articulos/pre/aprendizaje/La%20venta%20en%20la%20escuela*Revista%20iberoamericana%20de%20educaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica.*Union_001_006.pdf

Flores, R. (2010). *Significados asociados a La noción de fracción en la Educación Secundaria.* Tesis. México.

Gómez, B. (2009). *El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas.* En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (21-35). Santander, España: SEIEM.

Guerra, V. (2009). *La conducción del Método Heurístico en la estrategia de la matemática*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Perú.

Hébert, Y. (1980). *Matemáticas Generales, Probabilidades y Estadísticas. Traducción de Enrique Linés, Madrid. España*.

López, J (2012*). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo.* Tesis de Maestría. Colombia

Mora, H. (2006). *Concepción proceso- objeto de función en la comprensión del teorema fundamental del cálculo.* Tesis. México.

Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación superior*. Perú.

Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Perú.

Perera, P. y Valdemoros, M (2007). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria*. Investigación en Educación Matemática. México.

Piscoya, L. (2002). ¿*Cuánto saben nuestros maestros?* Universidad Nacional Mayor de san Marcos. Perú.

Quiroz, E. y Sagredo, M. (2009). Matemática Quinto Grado de Educación Primaria. Editorial Bruño. Perú.

Ramírez, M. (2006). *Estrategias Didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. El caso de los estudiantes del curso "Didáctica de la Matemática III" de la especialidad de primaria de la EAP de Educación de la UNMSM*. Tesis Doctoral. Perú.

Ríos, Y. (2006). *Una Ingeniería didáctica sobre fracciones.* Universidad de Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* Tesis doctoral. São Paulo. Brasil.

Vargas, M. (2001) *"Actividades de producción oral y escrita en libros de texto en español. Aproximaciones a un análisis de dos libros destinados a primer grado de primaria",* Revista Mexicana de Investigación Educativa, 6, 249-26.

ANEXOS

PERÚ | Ministerio de Educación | Viceministerio de Gestión Pedagógica | Dirección General de Educación Superior y Técnico Profesional

Dirección de Educación Superior Pedagógica
Área de Formación Inicial Docente

3.2 ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS

La carrera tiene diez semestres académicos. Cada semestre abarca 18 semanas, 30 horas semanales, dando un total de 540 horas. El total de horas de la carrera es de 5400. El desarrollo de las clases es presencial en los ocho primeros semestres y en los dos últimos se alternan la asesoría presencial y a distancia, ya que el estudiante desarrolla su práctica pre-profesional en una Institución Educativa.

<table>
<tr><th colspan="22">PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE EDUCACIÓN PRIMARIA</th></tr>
<tr><th rowspan="2">ETAPAS</th><th rowspan="2">ÁREAS</th><th colspan="2">I</th><th colspan="2">II</th><th colspan="2">III</th><th colspan="2">IV</th><th colspan="2">V</th><th colspan="2">VI</th><th colspan="2">VII</th><th colspan="2">VIII</th><th colspan="2">IX</th><th colspan="2">X</th></tr>
<tr><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th><th>Hs</th><th>Cr</th></tr>
<tr><td rowspan="18">FORMACION GENERAL</td><td>Ciencias Sociales I - II</td><td colspan="8" rowspan="18">FORMACIÓN GENERAL</td><td colspan="12" rowspan="18"></td></tr>
<tr><td>Matemática I - IV</td></tr>
<tr><td>Comunicación I - IV</td></tr>
<tr><td>Inglés I - IV</td></tr>
<tr><td>Tecnologías de la Información y Comunicación I - IV</td></tr>
<tr><td>Educación Física I - II</td></tr>
<tr><td>Arte</td></tr>
<tr><td>Cultura Emprendedora y Productiva I - II</td></tr>
<tr><td>Cultura Científico Ambiental I - III</td></tr>
<tr><td>Religión, Filosofía y Ética I - II</td></tr>
<tr><td>Psicología I - III</td></tr>
<tr><td>Diversidad y Educación Inclusiva</td></tr>
<tr><td>Desarrollo vocacional y Tutoría I - II</td></tr>
<tr><td>Currículo I -II</td></tr>
<tr><td>Educación Intercultural</td></tr>
<tr><td>Práctica I - IV</td></tr>
<tr><td>Investigación I - III</td></tr>
<tr><td>Opcional I-IV / Seminarios</td></tr>
<tr><td rowspan="18">FORMACION ESPECIALIZADA</td><td>Didáctica de Comunicación para Educación Primaria I - III</td><td colspan="8" rowspan="18"></td><td colspan="12" rowspan="18">FORMACIÓN ESPECIALIZADA</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Matemática para Educación Primaria I - III</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Personal Social para Educación Primaria I - III</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Ciencia y Ambiente para Educación Primaria I - III</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Arte para Educación Primaria. I - II</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Educación Religiosa para Educación Primaria I - II</td></tr>
<tr><td>Didáctica de Educación Física para Educación Primaria I - II</td></tr>
<tr><td>Estrategias para el trabajo en aulas unidocentes y multigrado</td></tr>
<tr><td>Estrategias para la detección e intervención .de problemas de aprendizaje y conducta.</td></tr>
<tr><td>Orientaciones para la Tutoría en Educación Primaria</td></tr>
<tr><td>Teoría de la educación I – II</td></tr>
<tr><td>Inglés V – VIII</td></tr>
<tr><td>Currículo-de Educación Primaria I - III</td></tr>
<tr><td>Gestión de instituciones de Ed. Primaria</td></tr>
<tr><td>Investigación aplicada I - V</td></tr>
<tr><td>TIC aplicada a la Educación Primaria</td></tr>
<tr><td>Práctica pre-profesional I – VI</td></tr>
<tr><td>Opcional V – VI /Seminarios actualización</td></tr>
</table>

PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

ETAPAS	ÁREAS	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX		X	
		Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr	Hs	Cr
FORMACION GENERAL	Ciencias Sociales I - II	4	3	2	2																
	Matemática I - IV	4	3	4	3	4	3	4	3												
	Comunicación I - IV	4	3	4	3	4	3	4	3												
	Inglés I - IV	2	1	2	1	2	1	2	1												
	Tecnologías de la Información y Comunicación I - IV	2	1	2	1	2	1	2	1												
	Educación Física I - II	2	1	2	1																
	Arte	2	2																		
	Cultura Emprendedora y Productiva I - II					2	2	4	3												
	Cultura Científico Ambiental I - III	2	1	2	2	2	1														
	Religión, Filosofía y Ética I - II					2	2	2	2												
	Psicología I - III	2	2	4	3			4	3												
	Diversidad y Educación Inclusiva					2	2														
	Desarrollo vocacional y Tutoría I - II	2	1	2	1																
	Currículo I - II					2	2	2	2												
	Educación Intercultural					2	2														
	Práctica I - IV	2	1	2	1	2	1	2	1												
	Investigación I - III			2	2	2	1	2	1												
	Opcional I – IV / Seminarios	2	2	2	2	2	2	2	2												
FORMACION ESPECIALIZADA	Didáctica de Comunicación para Educación Primaria I - III									4	3	4	3	4	3						
	Didáctica de Matemática para Educación Primaria I - III									4	3	4	3	4	3						
	Didáctica de Personal Social para Educación Primaria I - III											2	2	4	3	4	3				
	Didáctica de Ciencia y Ambiente para Educación Primaria I - III									4	3	2	1	2	1						
	Didáctica de Arte para Educación. Prim. I - II													4	3	2	1				
	Didáctica de Educación Religiosa para Educación Primaria I - II									2	1	2	1								
	Didáctica de Educación Física para Educación Primaria I - II													4	3	2	1				
	Estrategias para el trabajo en aulas unidocentes y multigrado											4	3								
	Estrategias para la detección e intervención de problemas de aprendizaje y conducta.															4	3				
	Orientaciones para la Tutoría en Educación Prim.															4	3				
	Teoría de la Educación I - II									4	4	4	4								
	Inglés V - VIII									2	1	2	1	2	1	2	1				
	Currículo de Educación Primaria I-III									6	5	2	2	2	2						
	Gestión de instituciones de Ed. Primaria																	4	3		
	Investigación aplicada I - V											2	2	2	2	4	4	6	5	6	5
	TIC aplicada a la Educación Primaria															4	3				
	Práctica pre-profesional I - VI									2	1	2	1	2	1	4	3	20	14	20	11
	Opcional V – VI / Seminarios actualización									2	2									4	4
	Número de Horas	30		30		30		30		30		30		30		30		30		30	
	Número de Créditos		21		22		23		22		23		23		22		22		22		20

3.3 CARTELES

ÁREA MATEMÁTICA

FORMACIÓN GENERAL

SEMESTRE I- MATEMÁTICA I	SEMESTRE II – MATEMÁTICA II	SEMESTRE III – MATEMÁTICA III	SEMESTRE IV – MATEMÁTICA IV
Orienta el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes a través del razonamiento y demostración, la comunicación matemática y resolución de problemas. Promueve en los estudiantes actitudes positivas hacia la matemática.	Orienta en los estudiantes el desarrollo de las capacidades de abstracción, razonamiento lógico, resolución de problemas y comunicación matemática. Propicia el análisis de propiedades y relaciones geométricas, identificando formas y relaciones espaciales implicadas que se representan en la realidad. Sensibiliza al estudiante para que aprecie la belleza que generan.	Orienta en los estudiantes el desarrollo de estrategias personales para el análisis de situaciones concretas, la identificación y resolución de problemas utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando su conveniencia.	Orienta el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes, mediante el razonamiento, abstracción, selección y utilización del lenguaje y herramientas matemáticas adecuadas para resolver situaciones de diversos contextos con actitud crítica y reflexiva.

SEMESTRE I- MATEMÁTICA I	SEMESTRE II – MATEMÁTICA II	SEMESTRE III – MATEMÁTICA III	SEMESTRE IV – MATEMÁTICA IV
• Lógica proposicional - Inferencia lógica, reglas de inferencia y demostración. Cuantificadores. • Teoría conjuntista - Operaciones y resolución de ejercicios y problemas. • Conjuntos numéricos - N, Z, Q, I y R: estructura operaciones y propiedades en R. - Sistemas de numeración en otras bases - Resolución de ejercicios y problemas • Expresiones algebraicas - Productos y cocientes notables. - Factorización • Ecuaciones e inecuaciones - Aplicación a ejercicios y problemas de situaciones del contexto. • Matrices y determinantes - Sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables • Programación lineal - Determinación de la región factible - Determinación de la solución óptima. - Métodos de optimización lineal. Tipos de soluciones: única, múltiple, no acotada y no factible	• Series. • Sucesiones y progresiones - Convergencia y divergencia de sucesiones. Interés simple y compuesto • Geometría en el plano - Elementos fundamentales de la geometría. • Polígonos y circunferencia • Movimientos y transformaciones en el plano	• Relaciones Binarias - Relaciones definidas de R en R. - Gráfica de relaciones de variable real • Funciones - Funciones especiales - Continuidad y discontinuidad. - Crecimiento y decrecimiento. - Simetría. Periodicidad • Estadística descriptiva - Medidas de tendencia central y de posición. - Medidas de dispersión: varianza, desviación media y desviación estándar	• Análisis de funciones de variable real - Incremento de una variable y de una función. - Límite de una función y reglas básicas. - Derivada de una función en un punto. - Derivada general de una función. - Reglas básicas de derivación de funciones de R en R. • Geometría del espacio - Conceptos y elementos básicos - Poliedros - Cuerpos de revolución y redondos • Trigonometría - Resolución de: triángulos rectángulos y oblicuángulos. Ley de senos y cosenos - Circunferencia trigonométrica - Funciones Trigonométricas • Estadísticas - Correlación y regresión estadística Coeficiente de correlación. Recta de regresión