

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



La aplicación de Gauss de superficies mínimas en el grupo de Heisenberg

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

ELTON ROCKY DAMAZO JAIMES

Asesor

DR. CHRISTIAM BERNARDO FIGUEROA SERRUDO

Jurado

DR. JESUS ABAD ZAPATA SAMANEZ

DR. ROLAND RABANAL MONTOYA

Lima - Perú

Julio - 2019

LA APLICACIÓN DE GAUSS DE SUPERFICIES MÍNIMAS EN EL
GRUPO DE HEISENBERG

Elton Rocky Damazo Jaimes

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Christian Bernardo Figueroa Serrudo (asesor)

Dr. Jesus Abad Zapata Samanez (presidente)

Dr. Roland Rabanal Montoya (miembro)

Lima - Perú

Julio - 2019



A mi esposa e hija, que fueron
mi motivación más grande para
concluir con éxito este trabajo

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por darme una hermosa familia, por siempre tenerme presente en todos sus planes y por permitirme alcanzar mis metas.

A mi esposa Yessica, por su amor incondicional, por creer en mí siempre y darme aliento para conseguir todos mis sueños. A mi hija Aimee, por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada día mas.

A mi papá, Justino y mi mamá, Placencia, por el apoyo que siempre me brindan en mi vida y por el incansable esfuerzo que hicieron día a día para que sea un profesional. Son tantas cosas que tendría que agradecerles.

Un agradecimiento muy especial a mi asesor el Dr. Christiam Figueroa, por su admirable paciencia, sus sugerencias, correcciones y por su constante apoyo en la elaboración de este trabajo.

A los miembros del jurado Dr. Jesús Zapata y Dr. Roland Rabanal por sus recomendaciones para mejorar este trabajo.

A los profesores de la Maestría en Matemáticas de la PUCP, por transmitirme sus diversos conocimientos, en especial a los profesores Christiam Figueroa, Jesús Zapata, Arturo Fernández, Richard Gonzalez y Percy Fernández.

A mis amigos de la Maestría que compartieron mis alegrías y penas en este trayecto, en especial a Jorge Condeña, Hector Llanos, Jhon Suarez, Raúl Bejar, Noel Espinoza, Álida Silva, Lourdes Moreno, etc. También a Marco Ticse quien fue el que me animó a hacer la Maestría en la PUCP. Que Dios los bendiga a todos.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de las superficies mínimas en el grupo de Heisenberg tridimensional, a partir de su aplicación de Gauss. Inicialmente estudiamos la geometría riemanniana del grupo de Heisenberg con métrica invariante a izquierda, calculando los campos invariantes a izquierda, las curvaturas, las geodésicas y el grupo de isometrías de este espacio. Luego estudiamos las aplicaciones armónicas, desde un punto de vista geométrico, pues encontraremos que nuestra aplicación de Gauss es armónica en el disco de Poincaré. Esto nos permitirá construir una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas en nuestro espacio ambiente. Finalmente, con esta representación obtendremos diferentes ejemplos de superficies mínimas en el grupo de Heisenberg.

Palabras Claves: *Aplicación de Gauss, Inmersiones mínimas, Grupo de Heisenberg, Aplicaciones armónicas.*

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Grupo de Heisenberg | 3 |
| 1.1. Conexión de Levi-Civita en \mathcal{H}_3 | 8 |
| 1.2. Curvatura en \mathcal{H}_3 | 9 |
| 1.3. Geodésicas de \mathcal{H}_3 | 11 |
| 1.4. Isometrías de \mathcal{H}_3 | 14 |
| 2. Aplicaciones Armónicas | 24 |
| 2.1. Fibrados Vectoriales | 24 |
| 2.2. Conexión Lineal | 25 |
| 2.3. Diferencial Covariante | 26 |
| 2.4. Segunda Forma Fundamental | 27 |
| 2.5. El Laplaciano | 29 |
| 2.6. Campo de Tensiones | 31 |
| 3. La Aplicación de Gauss | 37 |
| 3.1. Inmersiones mínimas con aplicación de Gauss dada | 47 |
| 3.2. La Acción de Isometrías | 49 |
| 3.3. Ejemplos de Inmersiones Mínimas | 53 |
| 3.3.1. Gráficos Mínimos | 58 |
| Bibliografía | 64 |

Introducción

La aplicación de Gauss de superficies mínimas ha sido objeto de gran cantidad de investigaciones. En particular, el estudio de la aplicación de Gauss de las superficies mínimas en el espacio euclidiano, ha permitido obtener una representación de las superficies mínimas en dicho espacio, la cual permitió estudiar con mayor profundidad dichas superficies.

Nuestro objetivo en este trabajo será el estudio de la aplicación de Gauss de superficies mínimas en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . Encontraremos que la aplicación de Gauss es una aplicación armónica entre la superficie mínima y el disco de Poincaré. Esto nos permitirá construir una representación tipo Weierstrass para este tipo de superficies.

A continuación mostramos los procedimientos que seguiremos en este trabajo:

En el Capítulo 1 estudiamos la geometría de nuestro espacio ambiente \mathcal{H}_3 , el cual será identificado con \mathbb{R}^3 con una operación de grupo. Luego calcularemos sus geodésicas y su grupo de isometrías.

En el Capítulo 2 estudiamos las aplicaciones armónicas desde un punto de vista geométrico. Diremos que una aplicación es armónica, si su campo de tensiones es cero, es decir, la traza de su segunda forma fundamental es nula. Luego obtenemos una expresión local para este campo de tensiones.

En el Capítulo 3 estudiamos la aplicación de Gauss de una superficie mínima en \mathcal{H}_3 y probaremos que esta aplicación es armónica en el disco de Poincaré \mathbb{H}^2 . Por otro lado probaremos que cualquier aplicación armónica no antiholomorfa en \mathbb{H}^2 es la aplicación de Gauss de una superficie mínima que nunca es vertical en \mathcal{H}_3 , como consecuencia obtendremos una representación tipo Weierstrass en términos de la aplicación de Gauss. También veremos que sucede con la aplicación de Gauss g cuando aplicamos una isometría del grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 a nuestra inmersión

mínima y también como cambia nuestra inmersión mínima si le aplicamos una isometría del disco de Poincaré \mathbb{H}^2 a nuestra aplicación de Gauss g . Finalmente obtendremos diferentes ejemplos de superficies mínimas en \mathcal{H}_3 .



Capítulo 1

Grupo de Heisenberg

El álgebra de Heisenberg, \mathfrak{h}_3 es un álgebra de Lie de dimensión 3 el cual es nilpotente de orden 2. Debido al Teorema de Ado que nos dice que cualquier álgebra de Lie de dimensión finita se puede encajar en el álgebra de las transformaciones lineales, entonces podemos considerar todo álgebra de Lie como un subálgebra del álgebra de las transformaciones lineales $gl(V)$. En el caso particular de un álgebra nilpotente, debido al Teorema de Engel se garantiza que existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $Av = 0$, para todo A en \mathfrak{h}_3 . En consecuencia A se puede representar como una matriz triangular superior con ceros en su diagonal, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación definamos la aplicación exponencial $exp : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ dada por

$$exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Luego, vemos claramente que la aplicación exponencial es un *difeomorfismo global*.

Debido a la correspondencia biunívoca entre las álgebras de Lie y los grupos de Lie simplemente conexos dada por la aplicación exponencial definida arriba, al grupo simplemente conexo cuya álgebra es \mathfrak{h}_3 lo denotamos por \mathcal{H}_3 y lo llamaremos el **Grupo de Heisenberg**, este grupo es el grupo de matrices 3×3 dadas por:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Al ser la aplicación exponencial un difeomorfismo global, entonces podemos darle una estructura diferenciable. Luego, aprovechamos esto para representar este grupo de una manera mas simple. Primero identificamos el álgebra \mathfrak{h}_3 con el espacio vectorial \mathbb{R}^3 mediante el siguiente isomorfismo (de espacios vectoriales) :

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{h}_3$$

dado por,

$$(a, b, c) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior formamos la composición $\tilde{\phi} = \exp \circ \phi$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\phi} \mathfrak{h}_3 \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}_3$$

dada por,

$$(a, b, c) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\exp} \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que con la composición anterior de la aplicación exponencial y el isomorfismo ϕ obtenemos una estructura diferenciable en \mathcal{H}_3 , luego \mathcal{H}_3 es difeomorfa a \mathbb{R}^3 , es decir, cubriremos \mathcal{H}_3 con una única parametrización $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_3$.

Ahora veamos que \mathcal{H}_3 es un grupo isomorfo a \mathbb{R}^3 , pero con una operación distinta. Para ello tendremos que la operación grupal de \mathcal{H}_3 induce vía $\tilde{\phi}$, el siguiente producto en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} (x, y, z) * (a, b, c) &= \tilde{\phi}^{-1} \left(\tilde{\phi}(x, y, z) \cdot \tilde{\phi}(a, b, c) \right) \\ &= \left(x + a, y + b, z + c - \frac{ya}{2} + \frac{xb}{2} \right) \end{aligned}$$

Luego el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 es isomorfo, como grupo de Lie, a \mathbb{R}^3 con la operación $*$ dada por :

$$(x, y, z) * (a, b, c) = \left(x + a, y + b, z + c - \frac{ya}{2} + \frac{xb}{2} \right)$$

Recordemos que en todo grupo de Lie la operación $*$: $G \times G \rightarrow G$ es C^∞ . Si fijamos un $g \in G$, la restricción sigue siendo C^∞ . Esto afirma que las traslaciones a izquierda $L_g : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ son difeomorfismos y su inversa esta dada por

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$$

Además en \mathcal{H}_3 se tiene

$$(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c)$$

porque se cumple

$$(a, b, c) * (-a, -b, -c) = (a - a, b - b, c - c + \frac{-ab}{2} - \frac{-ba}{2}) = (0, 0, 0).$$

En adelante consideraremos al grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 como \mathbb{R}^3 con la operación $*$.

Como en todo grupo de Lie, definimos las traslaciones a izquierda

$$\begin{aligned} L_{(a,b,c)} : \mathcal{H}_3 &\rightarrow \mathcal{H}_3 \\ (x, y, z) &\mapsto (a, b, c) * (x, y, z) \end{aligned}$$

definida por:

$$L_{(a,b,c)}(x, y, z) = \left(a + x, b + y, c + z + \frac{ay}{2} - \frac{bx}{2} \right).$$

Si $p = (x, y, z)$ y 0 el elemento identidad de \mathcal{H}_3 , entonces

$$(dL_p)_0 : T_0\mathcal{H}_3 \rightarrow T_p\mathcal{H}_3$$

donde su matriz asociada a la base canónica es dada por:

$$(dL_p)_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Al tener la base en el espacio tangente en la identidad $T_0\mathcal{H}_3$, en este caso visto como el espacio tangente de \mathbb{R}^3 , obtenemos los campos invariantes a izquierda

$$E_i(x, y, z) = dL_{(x,y,z)}(e_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

donde $\{e_i\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Como las traslaciones a izquierda son difeomorfismos, entonces su diferencial es un isomorfismo y siendo $\{e_i\}$ una base del espacio tangente en la identidad, obtendremos los campos invariantes a izquierda E_i , donde $E_i(p) = (dL_p)_0(e_i)$.

Calculando los E_i en términos de los campos coordenados, tendremos:

$$\begin{aligned} E_1 &= (dL_p)_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_2 &= (dL_p)_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_3 &= (dL_p)_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Considerando el producto interno en el espacio tangente de la identidad de tal manera que la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ resulte una base ortonormal, resulta que los $\{E_i\}$ forman una base ortonormal en cada $p \in \mathcal{H}_3$.

Por otro lado sabemos que el corchete del álgebra de Heisenberg, en términos de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 , está dado por

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_i, e_3] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Teniendo esto, el corchete de los campos invariantes operará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z}; \end{aligned}$$

es decir

$$[E_1, E_2] = E_3$$

También tenemos

$$\begin{aligned} [E_1, E_3] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3] &= \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[\frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = 0
\end{aligned}$$

Resumiendo tenemos

$$[E_1, E_2] = E_3;$$

$$[E_1, E_3] = 0;$$

$$[E_2, E_3] = 0.$$

No olvidemos que el corchete de campos invariantes a izquierda sigue siendo invariante a izquierda. El álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 de los campos invariantes a izquierda es generada por

$$\{E_1, E_2, E_3\}.$$

En un grupo de Lie siempre podemos colocar una métrica riemanniana. La manera usual es empezar con un producto interno \langle, \rangle en $T_0\mathcal{H}_3$ en la cual la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal. Cuando $u, v \in T_{(x,y,z)}\mathcal{H}_3$ definimos el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{(x,y,z)} = \left\langle dL_{(x,y,z)}^{-1}(u), dL_{(x,y,z)}^{-1}(v) \right\rangle_0.$$

Encontremos las componentes de la métrica, en la parametrización usual de \mathbb{R}^3 .

Por definición se tendrá entonces

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{(x,y,z)} = \left\langle dL_{(x,y,z)}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), dL_{(x,y,z)}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle_0 \\
&= \left\langle dL_{(x,y,z)}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), dL_{(x,y,z)}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle_0.
\end{aligned}$$

Utilizando una curva en la dirección $(1,0,0)$, calculamos

$$\begin{aligned}
dL_{(x,y,z)}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{d}{dt}(L_{(-x,-y,-z)}(x+t, y, z))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(t, 0, \frac{-xy}{2} + \frac{yx+yt}{2}\right)|_{t=0} \\
&= \left(1, 0, \frac{y}{2}\right)
\end{aligned}$$

con esto se llega a que

$$g_{11} = \left\langle \left(1, 0, \frac{y}{2}\right), \left(1, 0, \frac{y}{2}\right) \right\rangle_0 = 1 + \frac{y^2}{4}$$

Análogamente se calcula

$$g_{22} = 1 + \frac{x^2}{4}, \quad g_{33} = 1, \quad g_{12} = -\frac{xy}{4}, \quad g_{13} = \frac{y}{2}.$$

Además g_{13} será igual a g_{31} , pues la matriz es simétrica.

Luego la métrica invariante a izquierda asociada a este producto interno, puede ser expresada de la siguiente forma.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz\right)^2$$

Notemos que los campos invariantes a izquierda son ortonormales en esta métrica.

Provista de una métrica invariante a izquierda, el grupo de Heisenberg se convierte en una variedad riemanniana en el cual su grupo de isometría $\mathbf{Iso}(\mathcal{H}_3, \mathbf{g})$ es de dimensión 4. Para este resultado ver Teorema 3.3 en [1] Pág. 238.

1.1. Conexión de Levi-Civita en \mathcal{H}_3

Ahora determinaremos la expresión de la conexión riemanniana $\hat{\nabla}$ en la base canónica $\{E_1, E_2, E_3\}$. Como esta base es ortonormal, la fórmula de Koszul tiene la siguiente expresión

$$\langle \hat{\nabla}_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \}$$

donde $\hat{\nabla}$ es la conexión riemanniana y X, Y, Z son campos invariantes a izquierda.

Luego tendremos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\nabla}_{E_1} E_3, E_2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle - \langle [E_3, E_2], E_1 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle 0, E_2 \rangle - \langle 0, E_1 \rangle + \langle -E_3, E_3 \rangle \} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

De manera análoga conseguimos

$$\langle \hat{\nabla}_{E_1} E_3, E_3 \rangle = 0$$

y

$$\langle \hat{\nabla}_{E_1} E_3, E_1 \rangle = 0$$

Si escribimos $\hat{\nabla}_{E_1} E_3 = aE_1 + bE_2 + cE_3$ y al reemplazar en las ecuaciones anteriores obtenemos $a = 0$, $c = 0$ y $b = -\frac{1}{2}$, y concluimos que

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_3 = -\frac{1}{2}E_2.$$

Por la simetría de la conexión riemanniana ($\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X = [X, Y]$) tenemos

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_3 - \hat{\nabla}_{E_3} E_1 = [E_1, E_3] = 0$$

por tanto

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_3 = \hat{\nabla}_{E_3} E_1$$

Análogamente calculamos el comportamiento de la conexión de los campos invariantes y tendremos lo siguiente:

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_1 = 0, \quad \hat{\nabla}_{E_2} E_1 = -\frac{1}{2}E_3, \quad \hat{\nabla}_{E_3} E_1 = -\frac{1}{2}E_2,$$

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_2 = \frac{1}{2}E_3, \quad \hat{\nabla}_{E_2} E_2 = 0, \quad \hat{\nabla}_{E_3} E_2 = \frac{1}{2}E_1,$$

$$\hat{\nabla}_{E_1} E_3 = -\frac{1}{2}E_2, \quad \hat{\nabla}_{E_2} E_3 = \frac{1}{2}E_1, \quad \hat{\nabla}_{E_3} E_3 = 0.$$

Observación 1.1. Identificamos el espacio tangente en un punto $p = (x, y, z)$ con el álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 , es decir, si $v \in T_p \mathcal{H}_3$

$$v = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \left(a_3 + \frac{1}{2}(ya_1 - xa_2) \right) E_3$$

1.2. Curvatura en \mathcal{H}_3

Nuestro siguiente objetivo es calcular la curvatura de \mathcal{H}_3 . Para esto necesitamos de la conexión riemanniana hallada anteriormente. Bastará saber como se comporta la conexión en los campos invariantes a izquierda E_i .

El comportamiento de la conexión nos permite conocer la curvatura. Por definición la *curvatura* está dada por

$$R(X, Y)Z = \hat{\nabla}_Y \hat{\nabla}_X Z - \hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_Y Z + \hat{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

donde X, Y, Z son campos en \mathcal{H}_3 .

Calculamos la curvatura en \mathcal{H}_3 al evaluar en los campos invariantes a izquierda E_i . Obtenemos por ejemplo

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= \hat{\nabla}_{E_2} \hat{\nabla}_{E_1} E_1 - \hat{\nabla}_{E_1} \hat{\nabla}_{E_2} E_1 + \hat{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_1 \\ &= \hat{\nabla}_{E_3}(0) - \hat{\nabla}_{E_1} \left(-\frac{1}{2}E_3\right) + \hat{\nabla}_{E_3} E_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}E_2\right) - \frac{1}{2}E_2 = -\frac{3}{4}E_2. \end{aligned}$$

Se escribirá R_{ijij} para indicar el valor de $\langle R(E_i, E_j)E_i, E_j \rangle$, esto es, la componente del tensor curvatura en la dirección E_j . En particular se tiene

$$R_{1212} = \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle = -\frac{3}{4}$$

Análogamente se calcula

$$\begin{aligned} R(E_1, E_3)E_1 &= \hat{\nabla}_{E_3} \hat{\nabla}_{E_1} E_1 - \hat{\nabla}_{E_1} \hat{\nabla}_{E_3} E_1 + \hat{\nabla}_{[E_1, E_3]} E_1 \\ &= \hat{\nabla}_{E_3}(0) - \hat{\nabla}_{E_1} \left(-\frac{1}{2}E_2\right) + \hat{\nabla}_0 E_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}E_3\right) = \frac{1}{4}E_3, \end{aligned}$$

entonces

$$R_{1313} = \frac{1}{4}$$

También tendremos

$$\begin{aligned} R(E_2, E_3)E_2 &= \hat{\nabla}_{E_3} \hat{\nabla}_{E_2} E_2 - \hat{\nabla}_{E_2} \hat{\nabla}_{E_3} E_2 + \hat{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_2 \\ &= \hat{\nabla}_{E_3}(0) - \hat{\nabla}_{E_2} \left(\frac{1}{2}E_1\right) + \hat{\nabla}_0 E_1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}E_3\right) = \frac{1}{4}E_3, \end{aligned}$$

luego

$$R_{2323} = \frac{1}{4}$$

Análogamente obtenemos que

$$R_{2113} = 0$$

Esto muestra que algunas componentes pueden ser nulas. El resto de las componentes se hallan usando las propiedades del tensor curvatura dadas por:

$$R_{ijkl} = R_{klij},$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl},$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}.$$

Sabemos que una variedad riemanniana tiene curvatura constante K_0 si y sólo si $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$ para todo $i \neq j$, y $R_{ijkl} = 0$ en los otros casos. En \mathcal{H}_3 tenemos que $R_{1313} = -R_{1331} = \frac{1}{4} = K_0$, pero $R_{1212} = -R_{1221} = -\frac{3}{4}$. Por lo tanto \mathcal{H}_3 es una variedad de curvatura seccional no constante.

Además \mathcal{H}_3 resulta ser una variedad riemanniana homogénea, ya que dados $x, y \in \mathcal{H}_3$, existe una isometría (traslación a izquierda) que lleva x en y . Por tanto \mathcal{H}_3 es una variedad homogénea de curvatura seccional no constante.

1.3. Geodésicas de \mathcal{H}_3

En esta sección calcularemos las geodésicas del Grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 , Para esto expresaremos los campos coordenados en función de los campos invariantes a izquierda E_i , es decir

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1 + \frac{y}{2}E_3; \quad \frac{\partial}{\partial y} = E_2 - \frac{x}{2}E_3; \quad \frac{\partial}{\partial z} = E_3.$$

Sea la curva $t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{H}_3$, luego γ será una geodésica si y sólo si $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$.

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \dot{x}(E_1 + \frac{y}{2}E_3) + \dot{y}(E_2 - \frac{x}{2}E_3) + \dot{z}E_3 \\ &= \dot{x}E_1 + \dot{y}E_2 + (\frac{\dot{x}y}{2} - \frac{x\dot{y}}{2} + \dot{z})E_3 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} &= \left[\ddot{x} + \frac{1}{2}(\dot{x}y\dot{y} - x\dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{z}) \right] E_1 + \left[\ddot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2y - x\dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{z}) \right] E_2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(\ddot{x}y - x\ddot{y} + 2\ddot{z}) \right] E_3 \quad (1.1) \end{aligned}$$

Entonces $\nabla \frac{d\gamma}{dt} = 0$, si y sólo si,

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}(\dot{x}\dot{y} - x\dot{y}^2 + 2\dot{y}\dot{z}) = 0 \\ \ddot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2\dot{y} - x\dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{z}) = 0 \\ \frac{1}{2}(\ddot{x}y - x\ddot{y} + 2\ddot{z}) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

El sistema anterior se puede expresar como:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} \left(\frac{\dot{x}y}{2} - \frac{x\dot{y}}{2} + \dot{z} \right) = 0 \\ \ddot{y} - \dot{x} \left(\frac{\dot{x}y}{2} - \frac{x\dot{y}}{2} + \dot{z} \right) = 0 \\ \ddot{z} + \left(\frac{\ddot{x}y}{2} - \frac{x\ddot{y}}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) = x\ddot{y} - \ddot{x}y$$

En la tercera ecuación de (1.3) tendremos:

$$\ddot{z} = \frac{1}{2}(x\ddot{y} - \ddot{x}y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

Entonces

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) + c \quad (1.4)$$

Con los resultados en los sistemas anteriores, calcularemos las geodésicas que pasan por el origen, es decir: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Tendremos los siguientes casos:

(i) Cuando $\dot{x}(0) \neq 0$, $\dot{y}(0) \neq 0$ y $\dot{z}(0) = 0$.

De (1.4): $c = 0$ y tendremos que

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

Y así reemplazando en la primera ecuación de (1.3) tendremos

$$\ddot{x} + \dot{y}(-\dot{z} + \dot{z}) = 0$$

Con lo cual $\ddot{x} = 0$, es decir, $x(t) = \dot{x}(0)t$.

Luego la solución del sistema es:

$$x(t) = \dot{x}(0)t, \quad y(t) = \dot{y}(0)t, \quad z(t) = 0.$$

Por tanto las geodésicas γ serán **rectas contenidas en el plano XY**.

(ii) Cuando $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ y $\dot{z}(0) \neq 0$.

Hacemos $t = 0$ en (1.4), y así tenemos que $c = \dot{z}(0)$

Entonces

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \dot{z}(0)$$

Luego de (1.3), tenemos:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{z}(0)\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - \dot{z}(0)\dot{x} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior tenemos:

$$x(t) = y(t) = 0$$

Entonces

$$z(t) = \dot{z}(0)t$$

Con esto obtenemos que:

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{y}(t) = 0, \quad z(t) = \dot{z}(0)t.$$

Por lo tanto la geodésica γ será una **recta vertical**.

(iii) Cuando $\dot{x}(0) \neq 0$ ó $\dot{y}(0) \neq 0$ y $\dot{z}(0) \neq 0$.

Con estas condiciones de (1.4) obtenemos que:

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \dot{z}(0)$$

y reemplazando en las dos primeras ecuaciones de (1.3), se tiene

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{z}(0)\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - \dot{z}(0)\dot{x} = 0 \end{cases}$$

Integramos el sistema anterior y obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{z}(0)y = 0 \\ \dot{y} - \dot{z}(0)x = 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)} \cos(\dot{z}(0)t) + \frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)} \sin(\dot{z}(0)t) - \frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)} \\ y = -\frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)} \cos(\dot{z}(0)t) + \frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)} \sin(\dot{z}(0)t) + \frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)} \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)}\right)^2 + \left(y - \frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)}\right)^2 &= \left(\frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)}\right)^2 \\ &= \frac{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}{\dot{z}^2(0)}. \end{aligned}$$

es decir, las geodésicas que pasan por el origen son **espirales** alrededor del cilindro de radio $\sqrt{\frac{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}{\dot{z}^2(0)}}$ y centro $\left(-\frac{\dot{y}(0)}{\dot{z}(0)}, \frac{\dot{x}(0)}{\dot{z}(0)}\right)$.

1.4. Isometrías de \mathcal{H}_3

En esta sección mostraremos cuáles son las isometrías del grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 y cual es su grupo de Isometrías.

Proposición 1.2. *Toda traslación a izquierda*

$$\begin{aligned} L_{(a,b,c)} &: \mathcal{H}_3 &\rightarrow & \mathcal{H}_3 \\ (x,y,z) &\mapsto & (a,b,c) * & (x,y,z) \end{aligned}$$

en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 es una isometría.

Demostración. Sea $p = (a, b, c) \in \mathcal{H}_3$. Como dL_p en la identidad lleva la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ en la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$, entonces se preservan las distancias. Por lo tanto, se sigue que las traslaciones a izquierda son isometrías. \square

Observación 1.3. Sabemos que la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ definida al inicio del Capítulo 1 es un difeomorfismo, luego por la fórmula de Campbell-Hausdorff la aplicación exponencial induce sobre \mathfrak{h}_3 el grupo de estructura $*$ en \mathcal{H}_3 ya definido anteriormente y se tendrá la siguiente igualdad:

$$X_1 * X_2 = X_1 + X_2 + \frac{1}{2} [X_1, X_2]$$

donde $[X_1, X_2] = (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$ y $X_i = x_ie_1 + y_ie_2 + z_ie_3$, $i = 1, 2$.

Ahora pasaremos a mostrar que el diferencial de una isometría $\phi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ que deja fija la identidad es un automorfismo sobre el Álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 . Para ello usaremos unos resultados dados a detalle en [2] y las geodésicas de \mathcal{H}_3 que pasen por la identidad.

Se tiene que $\mathfrak{h}_3 = U \oplus V$ es un álgebra de Heisenberg con centro U , si existe una representación $J : U \rightarrow \text{End}(V)$ que satisface: $J(a)^2 = -|a|^2 I_v$, $\forall a \in U$.

Donde U y V son espacios vectoriales y $\{e_3\}$, $\{e_1, e_2\}$ sus respectivas bases ortonormales. Además tenemos la aplicación $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow U$ que satisface:

1. $\langle J(e_3)e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, [e_1, e_2] \rangle$
2. $\langle J(a)x, y \rangle = \langle a, [x, y] \rangle$, $a \in U$, $x, y \in V$.

Para las geodésicas de \mathcal{H}_3 usamos la parametrización dada por la exponencial. Entonces sean $t \mapsto x(t) \in V$, $t \mapsto a(t) \in U$ funciones vectoriales dadas por $x(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2$ y $a(t) = x_3(t)e_3$. Luego obtenemos una curva $t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{H}_3$ definida por

$$\gamma(t) = \exp(x(t) + a(t)).$$

Por otro lado tenemos la expresión $\frac{d\gamma}{dt}$ el vector tangente a γ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{x} + \left(\dot{a} + \frac{1}{2}[\dot{x}, x] \right) \quad (1.5)$$

donde \dot{x} y \dot{a} serán las derivadas de las funciones vectoriales.

Notemos que la ecuación anterior ya está expresada en función de los campos invariantes a izquierda E_i , es decir

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{x}_1 E_1 + \dot{x}_2 E_2 + \left(\dot{x}_3 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) \right) E_3$$

Vamos a considerar sólo las geodésicas que pasan por la identidad 0, entonces $x(0) = 0$, $a(0) = 0$

Por tanto,

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = \dot{x}(0) + \dot{a}(0)$$

En adelante se denotará : $\dot{x}(0) = y$, $\dot{a}(0) = b$.

Como $\{E_3\}$ es una base de U y $J(E_3) \in \text{End}(V)$. Entonces hallemos la regla de correspondencia de $J(E_3) : V \rightarrow V$. Sea

$$J(E_3)(x_1, x_2) = (\alpha, \beta)$$

Luego

$$J(E_3)(x_1 E_1 + x_2 E_2) = \alpha E_1 + \beta E_2$$

Por otro lado, usando la segunda propiedad del operador $[,]$ tenemos

$$\begin{cases} \langle J(E_3)E_1, E_1 \rangle = 0 \\ \langle J(E_3)E_1, E_2 \rangle = 1 \\ \langle J(E_3)E_2, E_1 \rangle = -1 \\ \langle J(E_3)E_2, E_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Ahora hacemos el siguiente producto

$$\langle J(E_3)(x_1 E_1 + x_2 E_2), E_1 \rangle = \langle \alpha E_1 + \beta E_2, E_1 \rangle$$

Luego

$$\langle x_1 J(E_3)E_1 + x_2 J(E_3)E_2, E_1 \rangle = \alpha$$

Entonces

$$\alpha = -x_2$$

Análogamente haciendo el siguiente producto

$$\langle J(E_3)(x_1 E_1 + x_2 E_2), E_2 \rangle = \langle \alpha E_1 + \beta E_2, E_2 \rangle$$

Obtenemos

$$\beta = x_1$$

Por lo tanto $J(E_3) : V \rightarrow V$ es dada por

$$J(E_3)(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

Afirmación. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) = \frac{1}{2} J(\dot{a}(0)) \dot{x}(t) \quad (1.6)$$

En efecto, al calcular $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t)$ tendremos

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) = \left(\ddot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2}{2} \left(\dot{x}_3 + \frac{\dot{x}_1 x_2}{2} - \frac{x_1 \dot{x}_2}{2} \right) \right) E_1 + \left(\ddot{x}_2 - \frac{\dot{x}_1}{2} \left(\dot{x}_3 + \frac{\dot{x}_1 x_2}{2} - \frac{x_1 \dot{x}_2}{2} \right) \right) E_2 \quad (1.7)$$

Como estamos usando las geodésicas de \mathcal{H}_3 que pasan por la identidad entonces se cumple el sistema de ecuaciones (1.3) y la ecuación (1.4).

De (1.4) tenemos

$$\dot{x}_3 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = c$$

pero al tener que $x(0) = 0$ y $a(0) = 0$, entonces para todo t tendremos

$$\dot{x}_3 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = \dot{a}(0) \quad (1.8)$$

Luego reemplazando la anterior ecuación en las dos primeras ecuaciones del sistema (1.3) tendremos

$$\ddot{x}_1 = -\dot{a}(0)\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = \dot{a}(0)\dot{x}_1$$

Y al reemplazar estas últimas expresiones en (1.7) tendremos

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) = -\frac{1}{2} \dot{a}(0) \dot{x}_2 E_1 + \frac{1}{2} \dot{a}(0) \dot{x}_1 E_2$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{2} \dot{a}(0) \dot{x}_2 E_1 + \frac{1}{2} \dot{a}(0) \dot{x}_1 E_2 \\ &= \frac{\dot{a}(0)}{2} (-\dot{x}_2, \dot{x}_1) \\ &= \frac{1}{2} J(\dot{a}(0)) \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Proposición 1.4. *Sea $\phi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$, una isometría que deja fija la identidad ($\phi(0) = 0$) y denotemos por ϕ_* el diferencial de ϕ . Entonces ϕ_* es un automorfismo sobre el álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 .*

Demostración. Sea $\phi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$, una isometría que deja fija la identidad ($\phi(0) = 0$). Consideremos ahora el fibrado tangente $T(\mathcal{H}_3) = T_V(\mathcal{H}_3) \oplus T_U(\mathcal{H}_3)$ inducido por $\mathfrak{h}_3 = V \oplus U$. Esto puede ser descrito por el tensor de Ricci dado por $r(x, y) = \text{Traza} \{z \rightarrow R(z, x)y\}$. Sabemos que el tensor de Ricci es una forma bilineal simétrica, entonces existe la aplicación $S : T(\mathcal{H}_3) \rightarrow T(\mathcal{H}_3)$, luego el tensor de Ricci es dado por $r(x, y) = \langle S(x), y \rangle$. Al ser ϕ una isometría, su diferencial $\phi_* : T(\mathcal{H}_3) \rightarrow T(\mathcal{H}_3)$ también es una isometría y así $r(\phi_* x, \phi_* y) = r(x, y)$, de donde

$$\langle S(\phi_* x), \phi_* y \rangle = \langle S(x), y \rangle, \text{ para todo } y.$$

Luego

$$\phi_*^{-1} S \phi_*(x) = S(x), \text{ para todo } x.$$

Entonces

$$S \phi_* = \phi_* S$$

De lo anterior podemos afirmar que $T(\mathcal{H}_3)$ queda definido por los espacios propios de S y que ϕ_* deja los subespacios $T_V(\mathcal{H}_3)$ y $T_U(\mathcal{H}_3)$ invariantes, pues si $u_i \in U$ es un autovector de S , entonces

$$S \phi_*(u_i) = \phi_* S(u_i) = \phi_*(\lambda_i u_i) = \lambda_i \phi_*(u_i)$$

De lo anterior vemos que $\phi_*(u_i)$ es un autovector que corresponde a λ_i , donde $\phi_*(u_i) \in U$.

Escojamos ahora $y \in V$, $b \in U$ y consideremos la geodésica $\gamma(t) = \exp(x(t) + a(t))$ que pasa por la identidad 0, con vector tangente inicial $\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = y + b$, con $\dot{x}(0) = y$, $\dot{a}(0) = b$.

Como $\phi(0) = 0$ entonces $t \rightarrow \phi(\gamma(t))$ es la geodésica que pasa por la identidad con vector tangente inicial $\phi_*(y) + \phi_*(b)$. Sea $\pi_V \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \right)$ la $T_V(\mathcal{H}_3)$ componente del vector tangente $\phi_* \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)$ y por (1.5) tendremos que $\pi_V \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \right) = \phi_*(\dot{x}(t))$.

Entonces la derivada covariante de esta componente a lo largo de la geodésica $\phi \circ \gamma$ viene dado por:

$$\nabla_{\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)} \phi_*(\dot{x}(t)) = \nabla_{\phi_* \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)} \phi_*(\dot{x}(t)) = \phi_* \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) \right)$$

Es decir,

$$\nabla_{\phi_* \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)} \phi_*(\dot{x}(t)) = \phi_* \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) \right)$$

Por otro lado, usemos (1.6) y evaluando en $t = 0$ tendremos:

$$J(b)y = 2 \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) \right) \Big|_{t=0}$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi_*(J(b)y) &= \phi_* \left(2 \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \dot{x}(t) \Big|_{t=0} \right) = 2 \nabla_{\phi_* \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)} \phi_*(\dot{x}(t)) \Big|_{t=0} \\ &= 2 \nabla_{\phi_* \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)} \pi_V \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \right) \Big|_{t=0} = 2 \left[\frac{1}{2} J(\phi_*(b)) \cdot \phi_*(y) \right] = J(\phi_*(b)) \phi_*(y) \end{aligned}$$

Y así tenemos

$$\phi_*(J(b)y) = J(\phi_*(b)) \phi_*(y) \tag{1.9}$$

Usando la segunda propiedad del operador $[\cdot, \cdot]$, hacemos:

$$\begin{aligned} \langle b, \phi_*([x, y]) \rangle &= \langle \phi_*^{-1}(b), [x, y] \rangle = \langle J(\phi_*^{-1}(b))x, y \rangle \\ &= \langle \phi_*(J(\phi_*^{-1}(b))x), \phi_*(y) \rangle \quad (\text{pues } \phi_* \text{ es una isometría}) \\ &= \langle J(\phi_*(\phi_*^{-1}(b))\phi_*(x)), \phi_*(y) \rangle \quad (\text{por (1.9)}) \\ &= \langle J(b)\phi_*(x), \phi_*(y) \rangle \\ &= \langle b, [\phi_*(x), \phi_*(y)] \rangle \quad \text{para todo } b. \end{aligned}$$

Y así se tiene

$$\langle b, \phi_*([x, y]) \rangle = \langle b, [\phi_*(x), \phi_*(y)] \rangle$$

Por lo tanto ϕ_* es un automorfismo sobre el álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 . \square

Proposición 1.5. *Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda, entonces todo automorfismo del grupo G cuya diferencial en la identidad preserva el producto interno es una isometría.*

Demostración.

Afirmación. *Sea φ un automorfismo de \mathcal{H}_3 y $p \in \mathcal{H}_3$. Entonces*

$$\varphi = L_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ L_{p^{-1}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} L_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ L_{p^{-1}}(x) &= L_{\varphi(p)}(\varphi(p^{-1} * x)) \\ &= \varphi(p) * \varphi(p^{-1}) * \varphi(x) \\ &= \varphi(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_3 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$d\varphi_p(v) = d(L_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ L_{p^{-1}})_p(v) ; \quad v \in T_p\mathcal{H}_3$$

Entonces

$$d\varphi_p(v) = d(L_{\varphi(p)})_{\varphi(0)} \circ d\varphi_0 \circ (dL_{p^{-1}})_p(v)$$

Al tener que $d\varphi_0$ preserva el producto interno, entonces $d\varphi_0$ es una isometría, luego la composición de la igualdad anterior es una isometría. Por lo tanto $d\varphi_p$ es una isometría.

Luego tendremos

$$\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v \rangle_p$$

Por lo tanto φ es una isometría. \square

A continuación daremos a conocer el grupo de isometrías del grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 , para ello denotemos por $A(\mathcal{H}_3)$ al grupo de automorfismos de \mathcal{H}_3 que preservan producto interno en \mathfrak{h}_3 .

Corolario 1.6. *El grupo de Isometrías de \mathcal{H}_3 coincide con el producto semidirecto $A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3$ (con \mathcal{H}_3 actuando por traslaciones izquierdas).*

Demostración. Definamos el producto semidirecto $A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3$

$$A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3 = \{L_p \circ \varphi / \varphi \in A(\mathcal{H}_3), p \in \mathcal{H}_3\}$$

Como $A(\mathcal{H}_3)$ es el grupo de Automorfismos de \mathcal{H}_3 que preservan el producto interno, entonces sus elementos serán isometrías, además sabemos que las traslaciones a izquierda L_p son isometrías. Luego todos los elementos de $A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3$ son **isometrías**.

Ahora probemos que toda isometría de \mathcal{H}_3 está en $A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3$, para esto consideremos una isometría $\phi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ tal que $\phi(0) = 0$. Por el corolario anterior tenemos que el diferencial de ϕ es un automorfismo sobre \mathfrak{h}_3 , luego ϕ es un automorfismo de \mathcal{H}_3 .

Finalmente si $\phi(0) = x, x \neq 0$, entonces bastará tomar $\bar{\phi} = L_{x^{-1}} \circ \phi \in A(\mathcal{H}_3) \ltimes \mathcal{H}_3$. □

Lema 1.7. *Si f_1 y f_2 son isometrías en una variedad riemanniana M conexa tal que $f_1(p) = f_2(p)$ y $df_{1p} = df_{2p}$, entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. Ver [3] Pág. 84. □

Teorema 1.8. *Si $\varphi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ es una isometría tal que $\varphi(0) = 0$, entonces*

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -z) \end{cases}$$

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base de \mathfrak{h}_3 y

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

la matriz que representa a $d\varphi_0 : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathfrak{h}_3$ en esa base. Como $d\varphi_0$ es un automorfismo del álgebra \mathfrak{h}_3 , entonces

$$d\varphi_0(e_3) = [d\varphi_0(e_1), d\varphi_0(e_2)]$$

esto implica que $a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3$, es decir

$$a_{13} = 0$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{33}$$

Además $d\varphi_0$ preserva el producto interno en \mathfrak{h}_3 , es decir $AA^t = I$. De ésto y las anteriores igualdades, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \end{array} \right.$$

Entonces tendremos los siguientes 2 casos:

- i) Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, con $a_{11} \neq 0$, tendremos que $a_{33} = 1$ y $a_{11} = a_{22}$, luego $a_{12} = -a_{21}$. Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado la aplicación $\varphi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$ es un automorfismo de \mathcal{H}_3 tal que $\varphi(0) = 0$ y $d\varphi_0 = A$, entonces por el Lema 1.7 y la Proposición 1.5, φ es una única isometría con esas propiedades. Por tanto, φ es una rotación alrededor del eje z .

- ii) Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$, con $a_{11} \neq 0$, tendremos que $a_{33} = -1$ y $a_{11} = -a_{22}$, luego $a_{12} = a_{21}$. Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado la aplicación $\varphi(x, y, z) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -z)$ es un automorfismo de \mathcal{H}_3 tal que $\varphi(0) = 0$ y $d\varphi_0 = A$, entonces por el Lema 1.7 y la Proposición 1.5, φ es una única isometría con esas propiedades. Por tanto, φ es la composición de una reflexión respecto al plano XY y una reflexión respecto a una dirección paralela al plano XY .

□

Por lo tanto, toda isometría de \mathcal{H}_3 se obtendrá como composición de una *traslación a izquierda* y una *isometría* dada por el Teorema anterior.



Capítulo 2

Aplicaciones Armónicas

Sabemos que las *inmersiones mínimas* son aquellas cuya curvatura media es nula. Generalizaremos este concepto, estudiando el campo de tensiones entre dos variedades riemannianas. Para llegar a ello daremos algunas definiciones de fibrados vectoriales y conexión lineal para obtener la expresión local del campo de tensiones.

2.1. Fibrados Vectoriales

En esta sección recordaremos algunos conceptos de fibrados vectoriales que serán usados mas adelante. Sea M una variedad diferenciable C^∞ conexa y orientable.

Definición 2.1. Un fibrado vectorial real de rango n sobre M consiste en :

1. Tres variedades diferenciables, el espacio total E , la variedad base M y F un espacio vectorial real de dimensión n llamado la fibra estándar del fibrado.
2. Una aplicación $\zeta : E \rightarrow M$ sobreyectiva y C^∞ .
3. Un cubrimiento \mathcal{U} , de abiertos en M tal que para cada abierto, $U \in \mathcal{U}$, existe una aplicación diferenciable $\varphi : \zeta^{-1}(U) \rightarrow F$ de tal manera que $(\zeta, \varphi) : \zeta^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ es un difeomorfismo.
4. Cada fibra $E_p = \zeta^{-1}(p)$ es un espacio vectorial real de dimensión n y $\varphi|_{E_p} : E_p \rightarrow F$ es un isomorfismo lineal para cada $p \in M$.

Denotaremos por $C(E)$ al espacio vectorial de las secciones diferenciables de E ; es decir

$$C(E) = \{\sigma : M \rightarrow E : \zeta \circ \sigma(x) = x\}$$

Un ejemplo típico de un fibrado vectorial es el *fibrado tangente*, donde

$$E = TM = \{(p, v) : v \in T_p M\},$$

la proyección está dada por $\zeta(p, v) = p$ y las secciones para este fibrado son los campos vectoriales C^∞ .

A partir de unos fibrados vectoriales dados se pueden construir otros fibrados. Por ejemplo, tenemos el *fibrado dual* $\zeta^* : E^* \rightarrow M$ donde $(\zeta^*)^{-1}(x) = E_x^*$ y las secciones están dadas por funcionales $\sigma(x) : E_x \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\eta : W \rightarrow M$ es otro fibrado sobre M construimos el fibrado *producto tensorial*

$$\zeta \otimes \eta : E \otimes W \rightarrow M$$

donde las fibras $(\zeta \otimes \eta)^{-1}(x) = E_x \otimes W_x$. Si $\sigma \in C(E)$ y $\theta \in C(W)$ entonces una sección en el fibrado producto tensorial está dada por $(\sigma \otimes \theta)(x) = \sigma(x) \otimes \theta(x)$, para todo $x \in M$.

Por último, dada una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ y $\eta : W \rightarrow N$ un fibrado sobre N , entonces el fibrado sobre M inducido por la aplicación f se define de tal manera que la fibra sobre $x \in M$ está dada por $W_{f(x)}$, y las secciones en este fibrado son de la forma $\theta \circ f$, donde $\theta \in C(W)$. A este fibrado se le llamará el *fibrado inducido* por f y lo denotaremos por $f^{-1}(W)$.

2.2. Conexión Lineal

Una conexión lineal en un fibrado vectorial $\zeta : E \rightarrow M$ es una aplicación bilineal ∇ en el espacio de las secciones.

$$\nabla : C(TM) \times C(E) \rightarrow C(E)$$

tal que para cada función diferenciable f en M . Se cumple lo siguiente:

1. $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$
2. $\nabla_X f\sigma = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma$, donde $\sigma \in C(E)$

Si tenemos una conexión lineal en un fibrado podemos construir otra conexión en otro fibrado. Por ejemplo ∇^E es una conexión lineal en el fibrado E , definimos la conexión dual en E^* como

$$(\nabla_X^*)\theta(\sigma) = X(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla_X^E\sigma)$$

donde $\theta \in C(E^*)$ y $\sigma \in C(E)$. Si ∇^W es una conexión en el fibrado W , entonces la conexión producto tensorial en $V \otimes W$ está dada por

$$\nabla_X(\sigma \otimes \lambda) = (\nabla_X^E \sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes (\nabla_X^W \lambda)$$

Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable y $\eta : W \rightarrow N$ un fibrado vectorial sobre N con conexión lineal ∇^W , entonces definimos la conexión para el fibrado vectorial $f^{-1}W$ de la siguiente manera: Sea $p \in M$, $y = f(p) \in N$, $X \in T_pM$ y $\theta \in C(W)$, entonces

$$\nabla_X(f^*\theta) = f^*\nabla_{df(X)}^W(\theta)$$

donde $f^*(\theta) = \theta \circ f \in C(f^{-1}W)$. En particular si $W = TN$ y $df(Y) \in C(TN)$, con $Y \in C(TM)$, entonces

$$\nabla_X df(Y) = \nabla_{df(X)}^W df(Y)$$

2.3. Diferencial Covariante

En esta sección observaremos la conexión lineal desde el punto de vista tensorial, por medio del isomorfismo que nos permite indentificar el espacio de las transformaciones lineales $T : V \rightarrow W$ con el espacio $V^* \otimes W$.

Sea $\zeta : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial sobre M y ∇ una conexión lineal en este fibrado. Si $\sigma \in C(E)$, donde $C(E)$ denota el espacio vectorial de las secciones diferenciables en E , entonces, la aplicación

$$\nabla(\sigma) : C(TM) \rightarrow C(E)$$

dada por $\nabla(\sigma)(X) := \nabla_X \sigma$ es lineal sobre \mathbb{R} . Es decir podemos considerar $\nabla(\sigma)$ como una sección en el fibrado $TM^* \otimes E$ y lo llamaremos el **diferencial covariante** de la sección σ . Análogamente ahora consideremos la conexión producto tensorial en el fibrado $TM^* \otimes E$

$$\nabla : C(TM) \times C(TM^* \otimes E) \rightarrow C(TM^* \otimes E)$$

Si $\delta \otimes w \in C(TM^* \otimes E)$, entonces la aplicación

$$\nabla(\delta \otimes w) : C(TM) \rightarrow C(TM^* \otimes E)$$

será también una transformación lineal, luego el diferencial covariante $\nabla(\delta \otimes w) \in C(TM^* \otimes (TM^* \otimes E)) = C(\otimes^2 TM^* \otimes E)$ y representará al diferencial covariante de la sección $\delta \otimes w$.

2.4. Segunda Forma Fundamental

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades riemannianas. Sabemos que el diferencial $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es una transformación lineal y por lo tanto $df_p \in T_pM^* \otimes T_{f(p)}N$, desde este punto de vista, df es una sección del fibrado producto tensorial $TM^* \otimes f^{-1}TN$ sobre M , donde $f^{-1}TN$ es el fibrado inducido a M cuyas fibras son $T_{f(p)}N$.

Veamos las cualidades de $\nabla(df)$, el diferencial covariante de la sección df , donde ∇ es una conexión en el fibrado $TM^* \otimes f^{-1}TN$. Fijemos la sección df del fibrado vectorial $TM^* \otimes f^{-1}TN$, luego tendremos

$$\nabla(df) : C(TM) \rightarrow C(TM^* \otimes f^{-1}TN)$$

Para un punto $p \in M$, se tiene que $\nabla(df)_p \in T_pM^* \otimes T_pM^* \otimes T_{f(p)}N$, es decir vía isomorfismo tenemos

$$\nabla(df)_p \in (T_pM \otimes T_pM)^* \otimes T_{f(p)}N \cong \mathcal{L}(T_pM \otimes T_pM, T_{f(p)}N)$$

Lo anterior nos dice que la aplicación $\nabla(df)_p : T_pM \times T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es bilinear en T_pM , pues el espacio de las bilineales es isomorfo a $(\otimes^2(T_pM))^* \otimes T_{f(p)}N$, luego $\nabla(df) \in C(\otimes^2 TM^* \otimes f^{-1}TN)$, es decir $\nabla(df)$ es una aplicación bilinear en TM con valores en $f^{-1}TN$. Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 2.2. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades riemannianas. Se define la *segunda forma fundamental* de f como el diferencial covariante de la sección df , es decir $\nabla(df)$.

Veamos la regla de correspondencia de este diferencial. Como $df \in C(TM^* \otimes f^{-1}TN)$, entonces

$$\nabla(df) : C(TM) \rightarrow C(TM^* \otimes f^{-1}TN)$$

tal que $\nabla(df)(X) = \nabla_X(df) \in C(TM^* \otimes f^{-1}TN)$, para todo $X \in C(TM)$. De donde, $\nabla_X(df) : TM \rightarrow f^{-1}TN$, y por lo tanto

$$\nabla(df)(X, Y) = (\nabla_X(df))(Y). \quad (2.1)$$

Por otro lado sabemos que desde el punto de vista tensorial podemos escribir df de la siguiente forma:

$$df = \sum_i \delta_i \otimes w_i$$

con $\delta_i \in C(TM^*)$, $w_i \in C(f^{-1}TN)$. Entonces

$$(\nabla_X(df))(Y) = \sum_i \nabla_X(\delta_i \otimes w_i)(Y) = \sum_i \nabla_X^* \delta_i(Y) w_i + \delta_i(Y) \nabla_X^f w_i$$

Por otro lado, de la conexión en el fibrado dual TM^* se tiene

$$\nabla_X^* \delta_i(Y) = X(\delta_i(Y)) - \delta_i(\nabla_X Y).$$

De las dos ecuaciones, anteriores reemplazando y reordenando convenientemente tendremos

$$(\nabla_X(df))(Y) = \sum_i \left[X(\delta_i(Y)) w_i + \delta_i(Y) \nabla_X^f w_i \right] - \delta_i(\nabla_X Y) w_i$$

Y así obtenemos

$$(\nabla_X(df))(Y) = \nabla_X^f \sum_i (\delta_i \otimes w_i)(Y) - \sum_i \delta_i \otimes w_i(\nabla_X Y)$$

Ahora usando la expresión tensorial de df y la conexión del fibrado se concluye que

$$(\nabla(df))(X, Y) = \nabla_X^f df(Y) - df(\nabla_X^Y) = \nabla_{df(X)}^{TN} df(Y) - df(\nabla_X^M Y). \quad (2.2)$$

Ahora presentaremos una expresión local para el diferencial $\nabla(df)$. Sean (X_i, U_i) y (Y_α, V_α) dos parametrizaciones en p y $f(p)$ respectivamente, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right\}$ los campos coordenados asociados a sus respectivas parametrizaciones, entonces

$$\nabla(df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \quad (2.3)$$

Sea $f^\alpha = y_\alpha \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$, a f^α le llamaremos la α -ésima componente de f .

Si escribimos $df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_\alpha f_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$, donde $f_j^\alpha = \frac{\partial(y_\alpha \circ f)}{\partial x_j}$, entonces de las propiedades de conexión lineal, obtenemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_\alpha \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f f_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_\alpha \left[f_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + f_j^\alpha \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right]$$

De acuerdo a la definición de conexión inducida, tenemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\alpha} \left[f_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + f_j^{\alpha} \nabla_{df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}^{TN} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right] = \sum_{\alpha} f_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_j^{\alpha} f_i^{\beta} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_{\beta}}}^{TN} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}$$

Al tener en cuenta los coeficientes de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ de la conexión lineal en TN e intercambiando sumas convenientemente,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^f df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma} \left[f_{ij}^{\gamma} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_j^{\alpha} f_i^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \right] \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}$$

Por otro lado,

$$df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma} df^{\gamma}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}$$

con $f^{\gamma} = y_{\gamma} \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora consideremos la conexión en el fibrado dual TM^* donde df^{γ} es una sección

$$(\nabla^* df^{\gamma})_{ij} := \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^* df^{\gamma} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = f_{ij}^{\gamma} - df^{\gamma} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

Reemplazando tenemos

$$df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma} [f_{ij}^{\gamma} - (\nabla^* df^{\gamma})_{ij}] \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}$$

En (2.3)

$$\nabla(df)_{ij} = \nabla(df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma} \left[(\nabla^* df^{\gamma})_{ij} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_j^{\alpha} f_i^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \right] \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}} \quad (2.4)$$

Denotaremos por $\nabla(df)_{ij}^{\gamma}$ cada componente de la segunda forma fundamental $\nabla(df)_{ij}$

2.5. El Laplaciano

Definición 2.3. Sea M una variedad riemanniana, con $p \in M$. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos vectoriales de clase C^{∞} en M y por $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de las funciones C^{∞} definidas sobre M . Siendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $h \in \mathcal{D}(M)$, se definen:

1. **La divergencia de X** , como la función $divX : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde $divX$ es igual a la *traza* de la aplicación lineal $v \mapsto \nabla_v X$, con $v \in T_p M$ y ∇ la conexión riemanniana en M .

2. **El gradiente de h** , como el campo vectorial $grad(h)$ en M , dado por

$$\langle grad(h(p)), v \rangle = dh_p v, \quad v \in T_p M.$$

3. **El laplaciano de h** , como el operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, dado por

$$\Delta h = div(grad(h)).$$

Sean (U, \mathbf{x}) una parametrización en $p \in M$ con base asociada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ y $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, daremos a conocer la expresión local del Laplaciano.

Tenemos que

$$\Delta h = div(grad(h)) = Tr(T : X \rightarrow \nabla_X grad(h))$$

Ahora determinemos las entradas de la matriz A que representa a la transformación lineal T , para esto escribimos

$$T \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_i A_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Y siendo (g_{ij}) la matriz de la métrica en M , se tendrá

$$\left\langle T \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i A_{ik} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i A_{ik} g_{ij} = (g_{ji})(A_{ik})$$

Luego A_{ik} se expresará así

$$A_{ik} = \sum_j g^{ij} \left\langle T \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Y como la traza de T es igual a $\sum_i A_{ii}$, entonces

$$\Delta h = div(grad(h)) = \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} grad(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.5)$$

Esta última ecuación es la expresión local del Laplaciano de la función h , donde (g^{ij}) es la matriz inversa de la métrica en M .

Por otro lado, de la compatibilidad de la conexión riemanniana tenemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \text{grad}(h), \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

y de la definición de gradiente se tiene

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(dh \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) - dh \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

pero la última expresión de arriba es el diferencial covariante de la sección dh y de (2.2) se tiene

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = (\nabla dh) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = (\nabla dh)_{ij}$$

Al sustituir esta última ecuación en (2.5) obtenemos

$$\Delta h = \sum_{ij} g^{ij} (\nabla dh)_{ij} \quad (2.6)$$

2.6. Campo de Tensiones

En esta sección daremos la definición del campo de tensiones y expresaremos localmente como es este campo, para esto nos ayudaremos del laplaciano de una función f y de su segunda forma fundamental.

Definición 2.4. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades riemannianas. Definimos el campo de tensiones como

$$\tau(f) = \text{Tr}(\nabla(df)).$$

Hay que recordar que ∇df es una bilineal con valores vectoriales y por lo tanto el campo de tensiones $\tau(f)$ toma valores vectoriales en $T_{f(x)}N$.

Ahora daremos a conocer la expresión local para el campo de tensiones de la aplicación f . De acuerdo a la definición del campo de tensiones

$$\tau(f)^\gamma = \text{Tr} \left((\nabla df)_{ij}^\gamma \right) = \text{Tr} \left((\nabla df)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)$$

representa la γ -ésima componente del campo de tensiones, donde $(\nabla df)_{ij}^\gamma$ denota cada componente de la ecuación dentro del corchete dada en (2.4).

Tambien de (2.6) se tiene para la función $f^\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ que

$$\Delta f^\gamma = \sum_{ij} g^{ij} (\nabla df^\gamma)_{ij}$$

Luego la expresión local para el campo de tensiones de f estará dada por

$$\tau(f) = \sum \tau(f)^\gamma \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

Ahora usando la expresión del diferencial covariante dada en (2.4) tendremos

$$\tau(f)^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} (\nabla (df)_{ij}^\gamma) = \sum_{i,j} g^{ij} \left[(\nabla df^\gamma)_{ij} + \sum_\alpha \sum_\beta f_j^\alpha f_i^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \right].$$

Y de la expresión local del laplaciano en (2.6), obtenemos

$$\tau(f)^\gamma = \Delta f^\gamma + \sum_{ij} \sum_{\alpha\beta} f_j^\alpha f_i^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g^{ij} \quad (2.7)$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, \dim N$, donde el laplaciano Δf^γ esta asociado a la variedad riemanniana M , los símbolos de Christoffel corresponden a la conexión de N y cada componente del campo de tensiones $\tau(f)$ está dado por (2.7) .

Definición 2.5. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ . Decimos que f es **armónica**, si $\tau(f) = 0$.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de aplicaciones armónicas.

Ejemplo 2.6. Si $N = \mathbb{R}$ entonces f es una aplicación armónica en el sentido (2.6).

Ejemplo 2.7. La aplicación identidad en M es armónica ya que $\nabla df(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in TM$ (ver (2.2)).

Ejemplo 2.8. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión isométrica de una superficie regular en \mathbb{R}^3 , localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas, es decir $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$. Entonces

$$\tau^\gamma = \Delta^S f^\gamma = \lambda^2 \Delta f^\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3$$

donde Δ es el laplaciano en el plano \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, cada inmersión es mínima, si y solamente si, cada f^γ es una función armónica en el sentido euclideo.

Ejemplo 2.9. Decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es totalmente geodésica si su segunda forma fundamental es nula, es decir $\nabla(df) = 0$. En particular toda aplicación totalmente geodésica es armónica.

Para finalizar los ejemplos, [4], [5] y [6] nos dicen que las isometrías son aplicaciones armónicas y que la composición de una aplicación armónica con una isometría en su dominio sigue siendo armónica. Pero la composición de dos aplicaciones armónicas no es armónica en general.

Sea Σ una superficie de riemann conexa y orientable, la cual admite un atlas complejo y sean (u, v) coordenadas locales de una parametrización de este atlas y $z = u + iv$ la coordenada compleja. Se define

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

Sea M una variedad riemanniana y $f : \Sigma \rightarrow M$ una inmersión conforme tal que la métrica inducida es $ds = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 \|dz\|^2$. El operador de Laplace Beltrani sobre Σ estará dado por:

$$\Delta = \lambda^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \right) = 4\lambda^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Teorema 2.10. Sea Σ una superficie de riemann, M una variedad riemanniana y $f : \Sigma \rightarrow M$ una inmersión conforme de clase C^2 . Entonces f es una aplicación armónica, si y sólo si

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, \dim M.$$

donde $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(f(z))$ son los símbolos de Christoffel de M .

Demostración. Sabemos que la inmersión f será armónica si su campo de tensiones $\tau(f)$ se anula.

Usando la expresión de las componentes del campo de tensiones para una inmersión $f : \Sigma \rightarrow M$ tenemos:

$$\tau(f)^i = \Delta f^i + \sum_{\alpha\beta} \sum_{jk} f_\beta^j f_\alpha^k \Gamma_{jk}^i g^{\alpha\beta}$$

para $i = 1, \dots, \dim M$ y $\alpha, \beta = 1, 2$.

Usando coordenadas isotérmicas de la anterior ecuación obtenemos

$$\tau(f)^i = \Delta f^i + \lambda^{-2} \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \left[\frac{\partial f^j}{\partial u} \frac{\partial f^k}{\partial u} + \frac{\partial f^j}{\partial v} \frac{\partial f^k}{\partial v} \right]$$

donde $f_1^j = \frac{\partial f^j}{\partial u}$, $f_2^j = \frac{\partial f^j}{\partial v}$.

Expresando la igualdad anterior en coordenadas complejas, obtenemos

$$\tau(f)^i = \Delta f^i + \lambda^{-2} \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \left[2 \frac{\partial f^j}{\partial z} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}} + 2 \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} \right]$$

De ahí, como $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, se tiene

$$\tau(f)^i = \Delta f^i + 4\lambda^{-2} \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z}$$

Luego, como $\Delta f^i = 4\lambda^{-2} \frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{z} \partial z}$

Finalmente

$$\tau(f)^i = 4\lambda^{-2} \left[\frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} \right]$$

Luego el campo de tensiones $\tau(f)$ se anula cuando los $\tau(f)^i$ se anulen, es decir

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} = 0$$

Por lo tanto la inmersión conforme $f : \Sigma \rightarrow M$ es *armónica*, si y sólo si

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} = 0$$

.

□

Teorema 2.11. *Sea $f : M \rightarrow N$ una inmersión isométrica entre dos variedades riemannianas M y N . Entonces*

$$\tau(f) = kH$$

donde k es la codimensión de f y H es el vector curvatura media. En particular, una inmersión isométrica es mínima, si es armónica.

Demostración. La segunda forma fundamental de la inmersión f es una forma vectorial bilineal simétrica $B : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_{f(p)} M)^\perp$ dada por

$$B(x, y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp$$

donde \bar{X} y \bar{Y} son campos en N , extensiones de $x, y \in T_p M$ y $\bar{\nabla}$ la conexión en N .

Para cada $\eta \in (T_{f(p)} M)^\perp$ existe un único operador autoadjunto A_η en $T_p M$ llamado operador Weingarten y está asociado a la forma bilineal B , dado por

$$\langle B(x, y), \eta \rangle = \langle A_\eta(x), y \rangle = \langle x, A_\eta(y) \rangle$$

donde $x, y \in T_p M$.

Escogiendo una base ortonormal $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ en $(T_p M)^\perp$, definimos el campo curvatura media de la inmersión f

$$H(p) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\text{tr} A_{\eta_i}) \eta_i \quad (2.8)$$

donde k es la codimensión de f .

Por otro lado, tenemos

$$\tau(f) = \text{Tr}(\nabla(df)) = \text{Tr}(B(X, Y))$$

donde X, Y son campos en M .

De (2.8) se tiene

$$\text{Tr}(B(X, Y)) = \sum_{i=1}^k (\text{tr} A_{\eta_i}) \eta_i$$

Por lo tanto

$$\tau(f) = kH.$$

□

Proposición 2.12. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ una aplicación de clase C^2 , siendo $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ el disco hiperbólico dotado con la métrica $\frac{4|dz^2|}{(1-|z|^2)^2}$. Luego la aplicación f será armónica si y sólo si

$$f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}}{1-|f|^2} f_z f_{\bar{z}} = 0.$$

Demostración. En efecto, tenemos que \mathbb{H}^2 es una variedad riemanniana con tensor métrico (g_{ij}) . Sea $f = (f^1, f^2)$, con los g_{ij} dados, obtenemos los símbolos de Christoffel de \mathbb{H}^2 :

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2f^1}{1 - |f|^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{2f^2}{1 - |f|^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-2f^1}{1 - |f|^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-2f^2}{1 - |f|^2}$$

Luego al ser f armónica, usando el Teorema 2.10 obtenemos

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^1 \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^2 \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} = 0$$

Y juntando las dos igualdades anteriores, se tiene

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^1 \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} + i \left[\frac{\partial^2 f^2}{\partial \bar{z} \partial z} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^2 \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f^k}{\partial z} \right] = 0$$

Reemplazando los símbolos de Christoffel de \mathbb{H}^2 en la igualdad anterior, usando que $f = f^1 + if^2$ para obtener una expresión mas corta en coordenadas complejas y agrupando convenientemente obtenemos:

$$f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}}{1 - |f|^2} f_z f_{\bar{z}} = 0.$$

□

Capítulo 3

La Aplicación de Gauss

Sea Σ una superficie de Riemann parametrizada por coordenadas isotérmicas y $z = u + iv$ una coordenada en Σ . Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión conforme. Denotemos por $F = \pi \circ X$ la proyección horizontal de X , donde $\pi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ es una sumersión riemanniana, y por $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ la tercera coordenada de X , luego tenemos que $X = (F, h)$. Consideremos F como una función de valores complejos e identifiquemos \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 . Denotemos por $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ la normal unitaria a X dada por

$$\begin{aligned} N : \Sigma \subset \mathcal{H}_3 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subset T_0\mathcal{H}_3 \\ p &\mapsto (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)) \end{aligned}$$

donde ξ es un campo unitario normal a Σ en \mathcal{H}_3 y \mathbb{S}^2 es la esfera unitaria de \mathfrak{h}_3 .

Observación 3.1. Un vector expresado en función de los campos invariantes a izquierda $\{E_i\}$ será denotado entre corchetes, es decir

$$v_1E_1 + v_2E_2 + v_3E_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Definición 3.2. La aplicación de Gauss de X es la aplicación $g = \varphi \circ N : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, donde $\bar{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann y φ es la proyección estereográfica de la esfera con respecto al polo sur, es decir, $g : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ está definida por

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2} \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re} g \\ 2 \operatorname{Im} g \\ 1 - |g|^2 \end{bmatrix}$$

La otra elección de la normal reemplazaría g por $\tilde{g} = -\frac{1}{g}$.

Observación 3.3.

1. En adelante \langle , \rangle denotará la extensión de la forma bilineal real a los números complejos, es decir, sean $\bar{w} = \bar{a} + i\bar{b}$ y $\bar{t} = \bar{c} + i\bar{d}$ vectores complejos, donde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ son vectores reales, entonces

$$\begin{aligned} \langle \bar{w}, \bar{t} \rangle &= \langle \bar{a} + i\bar{b}, \bar{c} + i\bar{d} \rangle \\ &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + i \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle + i \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle - \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle. \end{aligned}$$

donde los productos internos anteriores, corresponden al producto interno usual de vectores reales.

2. Sea $X = (x, y, h)$ nuestra inmersión conforme, tendremos los vectores complejos X_z y $X_{\bar{z}}$ dados por

$$X_z = \frac{1}{2}(X_u - iX_v) \quad \text{y} \quad X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_u + iX_v)$$

donde X_u y X_v son vectores de componentes reales, y tangentes a Σ .

Definición 3.4. Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión conforme y E_3 el tercer campo invariante a izquierda. Definimos

$$\eta = 2 \langle E_3, X_z \rangle$$

Llamaremos al par (g, η) el dato de Weierstrass de la inmersión X .

Proposición 3.5. La función $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, satisface la siguiente igualdad

$$h_z = \frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \tag{3.1}$$

Demostración. En efecto, expresemos $X_z = (x_z, y_z, h_z)$ en función de los campos invariantes a izquierda $\{E_i\}$

$$X_z = x_z E_1 + y_z E_2 + \left(h_z + \frac{yx_z}{2} - \frac{xy_z}{2} \right) E_3$$

Luego,

$$\langle E_3, X_z \rangle = h_z + \frac{yx_z}{2} - \frac{xy_z}{2}$$

Es decir,

$$\frac{\eta}{2} = h_z + \frac{yx_z}{2} - \frac{xy_z}{2} \tag{3.2}$$

Luego usando que $x = \frac{F+\bar{F}}{2}$ y $y = \frac{(\bar{F}-F)i}{2}$, se tiene

$$\frac{\eta}{2} = h_z + \frac{i}{2} \frac{(\bar{F}-F)}{2} \frac{(F+\bar{F})_z}{2} - \frac{i}{2} \frac{(F+\bar{F})}{2} \frac{(\bar{F}-F)_z}{2}$$

Por lo tanto

$$h_z = \frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z)$$

□

Proposición 3.6. *La inmersión X es **conforme**, si y sólo si*

$$F_z\bar{F}_z = -\frac{\eta^2}{4}. \quad (3.3)$$

Demostración. Sea X conforme, de (3.2) tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\eta) &= \frac{\eta + \bar{\eta}}{2} = h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \\ -\operatorname{Im}(\eta) &= -\frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{2} = h_v + \frac{yx_v}{2} - \frac{xy_v}{2} \end{aligned}$$

Luego tendremos

$$\begin{aligned} X_u &= x_u E_1 + y_u E_2 + \operatorname{Re}(\eta) E_3, \\ X_v &= x_v E_1 + y_v E_2 - \operatorname{Im}(\eta) E_3. \end{aligned}$$

Como la variedad Σ está parametrizada por coordenadas isotérmicas y X es conforme, se cumple

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \lambda^2 \quad \text{y} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

Luego

$$\|X_u\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + [\operatorname{Re}(\eta)]^2 = \lambda^2 = x_v^2 + y_v^2 + [\operatorname{Im}(\eta)]^2 = \|X_v\|^2$$

entonces

$$[\operatorname{Im}(\eta)]^2 - [\operatorname{Re}(\eta)]^2 = x_u^2 - x_v^2 + y_u^2 - y_v^2$$

También se tendrá

$$\operatorname{Re}(\eta)\operatorname{Im}(\eta) = x_u x_v + y_u y_v$$

Por otro lado tenemos

$$F_z = \frac{1}{2}[(x_u + y_v) + i(y_u - x_v)] \quad , \quad \bar{F}_z = \frac{1}{2}[(x_u - y_v) - i(y_u + x_v)]$$

Entonces

$$F_z \bar{F}_z = \frac{1}{4}[x_u^2 - x_v^2 + y_u^2 - y_v^2 - 2i(x_u x_v + y_u y_v)]$$

Por tanto, reemplazando las ecuaciones anteriores en la última ecuación tenemos que

$$F_z \bar{F}_z = -\frac{\eta^2}{4}.$$

Ahora probemos que X es conforme. En efecto, tenemos

$$\begin{cases} \langle X_u, X_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + [\operatorname{Re}(\eta)]^2 \\ \langle X_v, X_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + [\operatorname{Im}(\eta)]^2 \\ \langle X_u, X_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v - \operatorname{Re}(\eta)\operatorname{Im}(\eta) \end{cases} \quad (3.4)$$

Por otro lado, tenemos

$$F_z \bar{F}_z = \frac{1}{4}[x_u^2 - x_v^2 + y_u^2 - y_v^2 - 2i(x_u x_v + y_u y_v)]$$

$$-\frac{\eta^2}{4} = \frac{1}{4} [[\operatorname{Im}(\eta)]^2 - [\operatorname{Re}(\eta)]^2 - 2i\operatorname{Re}(\eta)\operatorname{Im}(\eta)]$$

Y al cumplirse (3.3), de las dos igualdades anteriores tenemos

$$x_u^2 + y_u^2 + [\operatorname{Re}(\eta)]^2 = x_v^2 + y_v^2 + [\operatorname{Im}(\eta)]^2$$

$$x_u x_v + y_u y_v = \operatorname{Re}(\eta)\operatorname{Im}(\eta)$$

Y reemplazando estas dos últimas igualdades en (3.4), obtenemos

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad \text{y} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

Por lo tanto, X es conforme. □

Observación 3.7. De la definición de $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ y la inmersión $X = (F, h)$ tendremos

- $\bar{F}_z = \overline{F_{\bar{z}}}$, $\bar{F}_{\bar{z}} = \overline{F_z}$
- $F_{z\bar{z}} = \overline{F_{\bar{z}z}}$, $\bar{F}_{z\bar{z}} = \overline{F_{\bar{z}z}}$

Proposición 3.8. De la forma como están definidos η y la aplicación de Gauss g , se cumple lo siguiente:

a) $g = 0$ o ∞ si y sólo si $\eta = 0$.

b) $g = 0$ si y sólo si $F_z = 0$

c) $g = \infty$ si y sólo si $F_z = 0$

d) Si $g \neq \infty$, entonces

$$\bar{g}F_z = -\frac{\eta}{2}, \quad F_z = \frac{g\bar{\eta}}{2}.$$

Demostración. En efecto,

a) Tendremos que $\eta = 0$ si y sólo si E_3 es ortogonal a X_z , o que un vector paralelo a E_3 , que en este caso es la normal N , sea ortogonal a X_z . A partir de esto se presentan dos casos:

- $g = 0$ si y solo si en $\bar{\mathbb{C}}$ la normal N en el polo norte apunta hacia arriba, es decir

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $g = \infty$ si y solo si en $\bar{\mathbb{C}}$ la normal N en el polo sur apunta hacia abajo, es decir

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Primero, obtengamos la normal $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ en función de η , F_z y F_z .

De la definición de X y η tenemos

$$X_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (F + \bar{F})_z \\ i(\bar{F} - F)_z \\ \eta \end{bmatrix}, \quad X_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (F + \bar{F})_{\bar{z}} \\ i(\bar{F} - F)_{\bar{z}} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix}$$

Luego

$$X_z \times X_{\bar{z}} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ \operatorname{Im}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 \end{bmatrix}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} X_z \times X_{\bar{z}} &= \left(\frac{X_u - iX_v}{2} \right) \times \left(\frac{X_u + iX_v}{2} \right) \\ &= -\frac{2i}{4} X_u \times X_v = -\frac{i}{2} X_u \times X_v \end{aligned}$$

y teniendo que la regla del producto vectorial es la misma en este caso, tenemos

$$X_u \times X_v = -2i X_z \times X_{\bar{z}} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ \operatorname{Im}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 \end{bmatrix}$$

Como la variedad Σ está parametrizada por coordenadas isotérmicas y X es conforme, se cumple

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \lambda^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

Luego se tiene

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} [\langle X_u, X_u \rangle + \langle X_v, X_v \rangle] = \frac{\lambda^2}{2}$$

Y

$$\|X_u \times X_v\| = \|X_u\| \cdot \|X_v\| = \lambda^2$$

Luego de las dos igualdades anteriores, se tiene

$$\|X_u \times X_v\| = 2 \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = |F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2} |\eta|^2. \quad (3.5)$$

Por lo tanto

$$N = \frac{1}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2} |\eta|^2} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ \operatorname{Im}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Finalmente como $g = 0$ entonces $\eta = 0$, luego de (3.3) tendremos que $F_z = 0$ o $F_{\bar{z}} = 0$, pero sabemos que la normal N tiene tercera componente positiva, por lo tanto $F_{\bar{z}} = 0$.

- c) En efecto, al ser $\eta = 0$ entonces de (3.3) tendremos que $F_z = 0$ o $F_{\bar{z}} = 0$ pero sabemos que la normal N tiene la tercera componente negativa, por lo tanto $F_z = 0$.

d) De la ecuación (3.6), cuando $g \neq \infty$, obtenemos

$$\frac{2g}{1+|g|^2} = \frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2}, \quad \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2} = \frac{|F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2},$$

y entonces

$$g = \frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{2|F_z|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2}$$

Usando (3.3), cuando $g \neq \infty$, concluimos

$$\bar{g}F_z = -\frac{\eta}{2}, \quad F_{\bar{z}} = \frac{g\bar{\eta}}{2}. \quad (3.7)$$

□

Observación 3.9. Las igualdades en (3.7) muestran que las funciones $\frac{\eta}{g}$ y $g\bar{\eta}$ pueden ser extendidas diferenciablemente a puntos donde $g = 0$ o ∞ .

Proposición 3.10. *Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión conforme. Entonces su aplicación de Gauss g no puede ser idénticamente igual a 0 o ∞ en un conjunto abierto.*

Demostración. Supongamos que $g \equiv 0$ en un conjunto abierto U . Luego por (3.7) tenemos que $\eta \equiv 0$ y $F_{\bar{z}} \equiv 0$ en U , entonces $\bar{F}_z = 0$. Por tanto por (3.1) obtenemos que $h_z = -\frac{i}{4}\bar{F}F_z$, y entonces $h_{z\bar{z}} = \frac{i}{4}|F_z|^2$, como $h_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(h_{uu} + h_{vv}) \in \mathbb{R}$, concluimos que $F_z \equiv 0$ en U , y entonces $X_z \times X_{\bar{z}} \equiv 0$, luego esto es una contradicción ya que X es una inmersión.

Análogamente g no puede ser idénticamente igual a ∞ en un conjunto abierto. □

Observación 3.11. Las ecuaciones (3.3) y (3.7) caracterizan el dato de Weierstrass (g, η) , pues teniendo η y g obtenemos F y así obtendríamos nuestra inmersión conforme X .

Lema 3.12. *La inmersión conforme X es mínima, si y sólo si*

$$\begin{cases} F_{z\bar{z}} = \frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2} g \\ \eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

La primera ecuación en (3.8) ocurre cuando $g \neq 0, \infty$. Cuando $g = 0, \infty$ tendremos que $F_{z\bar{z}} = 0$.

Demostración.

Afirmación. *La inmersión conforme X es mínima, si y sólo si*

$$\hat{\nabla}_{X_u} X_u + \hat{\nabla}_{X_v} X_v = 0, \quad \hat{\nabla} \text{ es la conexión en } \mathcal{H}_3.$$

En efecto, como la curvatura media H de la superficie es igual a cero, entonces la traza del operador Weingarten A_ξ será igual a cero, donde ξ es un campo normal unitario a la superficie, es decir

$$\text{tr}(A_\xi) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle A_\xi(X_u), X_u \rangle + \langle A_\xi(X_v), X_v \rangle &= 0 \\ \langle -\hat{\nabla}_{X_u} \xi, X_u \rangle + \langle -\hat{\nabla}_{X_v} \xi, X_v \rangle &= 0 \\ \langle \xi, \hat{\nabla}_{X_u} X_u \rangle + \langle \xi, \hat{\nabla}_{X_v} X_v \rangle &= 0 \\ \langle \xi, \hat{\nabla}_{X_u} X_u + \hat{\nabla}_{X_v} X_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\hat{\nabla}_{X_u} X_u + \hat{\nabla}_{X_v} X_v = 0.$$

Ahora demostraremos la proposición

Sean X_u y X_v campos coordenados de Σ . Expresando X_u y X_v en función de los campos invariantes a izquierda, tenemos

$$\hat{\nabla}_{X_u} X_u = \begin{bmatrix} x_{uu} + \text{Re}(\eta)y_u \\ y_{uu} - \text{Re}(\eta)x_u \\ (\text{Re}(\eta))_u \end{bmatrix}, \quad \hat{\nabla}_{X_v} X_v = \begin{bmatrix} x_{vv} - \text{Im}(\eta)y_v \\ y_{vv} + \text{Im}(\eta)x_v \\ -(\text{Im}(\eta))_v \end{bmatrix}$$

Expresando x e y en función de F , obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{X_u} X_u &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(F + \bar{F})_{uu} + i(\eta + \bar{\eta})(\bar{F} - F)_u \\ 2i(\bar{F} - F)_{uu} - (\eta + \bar{\eta})(F + \bar{F})_u \\ 2(\eta - \bar{\eta})_u \end{bmatrix} \\ \hat{\nabla}_{X_v} X_v &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(F + \bar{F})_{vv} - (\eta - \bar{\eta})(\bar{F} - F)_v \\ 2i(\bar{F} - F)_{vv} - i(\eta - \bar{\eta})(F + \bar{F})_v \\ 2i(\eta - \bar{\eta})_v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $\hat{\nabla}_{X_u}X_u + \hat{\nabla}_{X_v}X_v = 0$ equivale a

$$F_{z\bar{z}} = \frac{i}{4}(\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}}) \quad , \quad \eta_z + \bar{\eta}_z = 0.$$

En efecto, tenemos que $F_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}[x_{uu} + x_{vv} + i(y_{uu} + y_{vv})]$, ahora si las dos primeras componentes de $\hat{\nabla}_{X_u}X_u + \hat{\nabla}_{X_v}X_v$ se anulan, tendremos

$$x_{uu} + \operatorname{Re}(\eta)y_u + x_{vv} - \operatorname{Im}(\eta)y_v + i[y_{uu} - \operatorname{Re}(\eta)x_u + y_{vv} + \operatorname{Im}(\eta)x_v] = 0$$

Luego

$$x_{uu} + x_{vv} + i(y_{uu} + y_{vv}) = \operatorname{Im}(\eta)y_v - \operatorname{Re}(\eta)y_u + i[\operatorname{Re}(\eta)x_u - \operatorname{Im}(\eta)x_v]$$

Así

$$F_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}[\operatorname{Im}(\eta)y_v - \operatorname{Re}(\eta)y_u + i[\operatorname{Re}(\eta)x_u - \operatorname{Im}(\eta)x_v]]$$

Por otro lado, al calcular $\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}}$ obtenemos

$$\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}} = \operatorname{Re}(\eta)x_u - \operatorname{Im}(\eta)x_v + i[\operatorname{Re}(\eta)y_u - \operatorname{Im}(\eta)y_v]$$

Entonces

$$\frac{i}{4}(\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}}) = \frac{1}{4}(\operatorname{Im}(\eta)y_v - \operatorname{Re}(\eta)y_u + i[\operatorname{Re}(\eta)x_u - \operatorname{Im}(\eta)x_v])$$

Por lo tanto, se tiene que $F_{z\bar{z}} = \frac{i}{4}(\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}})$.

Análogamente, haciendo que la parte vertical de $\hat{\nabla}_{X_u}X_u + \hat{\nabla}_{X_v}X_v$ se anule, se tendrá que $\eta_z + \bar{\eta}_z = 0$.

Para finalizar la demostración, cuando $g \neq 0, \infty$, usando (3.7) concluimos que

$$F_{z\bar{z}} = \frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2} g$$

y cuando $g = 0, \infty$ en un punto, tendremos que $\eta = 0$ y entonces $F_{z\bar{z}} = 0$. \square

Teorema 3.13. *Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión mínima conforme. Entonces su aplicación de Gauss $g : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ satisface*

$$(1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} + 2\bar{g}g_z g_{\bar{z}} = 0 \tag{3.9}$$

Esta igualdad ocurre cuando $g \neq \infty$; en la vecindad de un punto donde $g = \infty$, g será reemplazado por $\frac{1}{g}$

Demostración. Primero restringimos nuestros valores a un dominio donde $g \neq \infty$, es decir, $F_z \neq 0$. Usando (3.7) tenemos que $g^2 = -\frac{F_{z\bar{z}}}{F_{\bar{z}}}$ y entonces

$$2gg_z = -\frac{F_{z\bar{z}}}{F_{\bar{z}}} + \frac{F_{\bar{z}}\bar{F}_{z\bar{z}}}{F_{\bar{z}}^2},$$

y por (3.8) obtenemos cuando $g \neq 0$,

$$g_z = \frac{i}{4}F_z(1 - |g|^2)^2. \quad (3.10)$$

Por continuidad esta igualdad también ocurre cuando $g = 0$. Derivando (3.10) con respecto a \bar{z} , concluimos usando (3.7), (3.8) y (3.10), que g satisface (3.9).

De la misma manera, en una vecindad de un punto donde $g = \infty$, probamos que $\frac{1}{g}$ satisface (3.9). \square

Definición 3.14. Se dirá que una inmersión $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ es *vertical*, si el campo invariante a izquierda E_3 es tangente a $X(\Sigma)$ en todos sus puntos.

Corolario 3.15. *Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión mínima conforme que no es vertical. Supongamos que su normal tiene tercera coordenada positiva. Entonces su aplicación de Gauss g toma valores en el disco hiperbólico \mathbb{H}^2 y esta es armónica (por la métrica hiperbólica).*

Demostración. La tercera componente de N es $\frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}$, luego esta componente es positiva si y sólo si $|g| < 1$, es decir, $g \in \mathbb{H}^2$. También, la ecuación

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{g}}{1 - |g|^2}g_zg_{\bar{z}} = 0.$$

nos dice que g es una aplicación armónica en \mathbb{H}^2 en el sentido de la Definición 2.5 y de la Proposición 2.12. \square

Observación 3.16. Si $|g| \equiv 1$ en un conjunto abierto, entonces por (3.9) obtenemos que g es constante, y luego usando (3.7), obtenemos que $\bar{g}F + g\bar{F}$ es constante. Luego su normal es de la forma $N = (a, b, 0)$. Por lo tanto la superficie $X(\Sigma)$ es un plano vertical, es decir, una superficie de ecuación $ax + by = c$, para algún $(a, b) \neq (0; 0)$ y algún $c \in \mathbb{R}$, y esta superficie es mínima.

Proposición 3.17. *Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión mínima conforme, tal que $X(\Sigma)$ no es un plano vertical. Sea (g, η) su dato de Weierstrass. Entonces tenemos*

$$\eta = 8i\frac{\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2}, \quad (3.11)$$

y la métrica inducida sobre Σ por X es

$$ds^2 = 16 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 |dz|^2. \quad (3.12)$$

Las expresiones anteriores ocurren en puntos donde $g \neq 1, \infty$ y extendemos diferenciablemente en puntos donde $g = 1, \infty$. En particular, si $|g| < 1$, entonces g no es antiholomorfa (es decir $g_z \neq 0$).

Demostración. La ecuación (3.11) se obtiene de las ecuaciones (3.7) y (3.10).

Usando (3.7) y (3.11), obtenemos

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}(|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2) + \frac{1}{4}|\eta|^2 = 8 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 |dz|^2,$$

De la igualdad anterior obtenemos (3.12).

Por último, tenemos que $\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle > 0$, desde que X es una inmersión; por tanto si $|g| < 1$, esto muestra que g no es antiholomorfa. \square

3.1. Inmersiones mínimas con aplicación de Gauss dada

En esta sección obtendremos una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas en términos de la aplicación de Gauss g .

Teorema 3.18. *Sea Σ una superficie de Riemann simplemente conexa. Sea $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ una aplicación armónica que no es antiholomorfa. Sea $z_0 \in \Sigma$, $F_0 \in \mathbb{C}$ y $h_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una única inmersión mínima conforme $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ tal que g es la aplicación de Gauss de X y $X(z_0) = (F_0, h_0)$.*

Además si $X = (F, h)$, entonces

$$F_z = -4i \frac{g_z}{(1 - |g|^2)^2}, \quad F_{\bar{z}} = -4i \frac{g^2 \bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2}$$

$$h_z = 4i \frac{\bar{g} g_z}{(1 - |g|^2)^2} - \frac{i}{4} (\bar{F} F_z - F \bar{F}_{\bar{z}}).$$

Observación 3.19. Dado $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, tal que se tienen F_u y F_v , para obtener F se debe tener las siguientes condiciones de integrabilidad

$$x_{uv} = x_{vu}, \quad y_{uv} = y_{vu}$$

Demostración. Primero obtendremos la parte horizontal F a través del siguiente sistema diferencial

$$\begin{cases} F_z &= -4i \frac{g_z}{(1-|g|^2)^2} \\ F_{\bar{z}} &= -4i \frac{g^2 \bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

satisfaciendo $F(z_0) = F_0$.

Luego, es suficiente verificar que $F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z}$ (ya que Σ es simplemente conexo). Como tenemos que g es armónica, obtenemos que $F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z} = -8i \frac{g g_z \bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3}$, que prueba lo que consideramos inicialmente.

Ahora tenemos que obtener la función h . Sea

$$\eta = 8i \frac{\bar{g} g_z}{(1-|g|^2)^2} \quad (3.14)$$

Consideremos la ecuación diferencial

$$h_z = \frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \quad (3.15)$$

satisfaciendo $h(z_0) = h_0$.

Luego, es suficiente verificar que

$$\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \right)_{\bar{z}} \in \mathbb{R}.$$

pues tendríamos que $h_{uv} = h_{vu}$, la condición de integrabilidad para h .

En efecto, usando el hecho de que g es armónica y (3.13), obtenemos

$$\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \right)_{\bar{z}} = \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \in \mathbb{R},$$

que prueba lo considerado. Ahora sea $X = (F, h) : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$, y verifiquemos que X satisface las conclusiones del Teorema. Es claro que $X(z_0) = (F_0, h_0)$.

- $\eta = 2 \langle E_3, X_z \rangle$, pues al tener las expresiones de η , F_z y $F_{\bar{z}}$ en función de la aplicación de Gauss g , entonces por (3.15) tenemos $h_z = \frac{\eta}{2} - \frac{y x_z}{2} + \frac{x y_z}{2}$ y por la Proposición 3.5 esto equivale a $\eta = 2 \langle E_3, X_z \rangle$.

- X es conforme, pues de las ecuaciones (3.13) y (3.14), se cumple la ecuación (3.3).

- X es una inmersión, pues de la igualdad

$$\|X_u \times X_v\| = 2 \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = |F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2} |\eta^2| = 16 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2.$$

los vectores X_u y X_v nunca serán paralelos, ya que g_z nunca se anula (g no es antiholomorfa).

- g es la aplicación de Gauss de X , pues de (3.13) y (3.14) se tiene

$$\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z = 32g \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 \quad \text{y} \quad |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 = 16 \frac{1 + |g|^2}{(1 - |g|^2)^3} |g_z|^2$$

Luego

$$\frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2} |\eta^2|} = \frac{2g}{1 + |g|^2}, \quad \frac{|F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2} |\eta^2|} = \frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2}.$$

Por lo tanto

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2} \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re} g \\ 2 \operatorname{Im} g \\ 1 - |g|^2 \end{bmatrix}$$

- X es mínima, pues de (3.13) y (3.14) se tiene

$$F_{z\bar{z}} = \frac{i}{8} |\eta|^2 \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2} g = -8i \frac{gg_z \bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^3} \quad \text{y} \quad \eta_{\bar{z}} = 8i \frac{1 - |g|^4}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2$$

Luego

$$\eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z = \eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_{\bar{z}} = 0.$$

Finalmente, (3.8) se cumple, entonces X es mínima. □

3.2. La Acción de Isometrías

En esta sección veremos que sucede con la aplicación de Gauss g si le aplicamos una isometría de \mathcal{H}_3 a la inmersión X y también veremos que le sucede a la superficie, si le aplicamos una isometría del disco hiperbólico a la aplicación de Gauss g .

Sea Σ una superficie de Riemann simplemente conexa. Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión mínima conforme que nunca es vertical y sea $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ su aplicación de Gauss (tal que la normal tenga tercera coordenada positiva), la cual es armónica y no es antiholomorfa. A continuación veremos que sucede si tenemos una isometría Φ de \mathcal{H}_3 que preserva la orientación de las fibras (traslaciones y rotaciones alrededor del eje z).

Proposición 3.20. *Sea $\Phi = L_p$ una traslación a izquierda de \mathcal{H}_3 , entonces la aplicación de Gauss de $L_p \circ X$ es g .*

Demostración. De la definición de campo invariante a izquierda tenemos que $dL_p(E_i(x)) = E_i(L_p x)$ luego la base canónica $\{E_1, E_2, E_3\}$ es invariante por traslaciones a izquierda.

Ahora calculemos la aplicación de Gauss g_l de $Y = L_p \circ X$. Tenemos que

$$X_u = x_u E_1 + y_u E_2 + \left(h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \right) E_3$$

Luego,

$$\begin{aligned} Y_u &= dL_p(X_u) = dL_p \left(x_u E_1 + y_u E_2 + \left(h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \right) E_3 \right) \\ &= x_u E_1(L_p) + y_u E_2(L_p) + \left(h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \right) E_3(L_p) \\ &= X_u \end{aligned}$$

Del mismo modo $Y_v = X_v$. Luego la normal de $\phi \circ X$ será la misma que la de X , por tanto tendrán la misma aplicación de Gauss g .

De esto deducimos que si removemos la condición inicial (F_0, h_0) en el Teorema 3.18, entonces la inmersión con una aplicación de Gauss dada es única salvo traslaciones en \mathcal{H}_3 . \square

Proposición 3.21. *Sea Φ una rotación de un ángulo θ alrededor del eje z , entonces la aplicación de Gauss de $\Phi \circ X$ es $\rho \circ g$, donde ρ es la rotación del mismo ángulo θ sobre el $0 \in \mathbb{H}^2$ (no tomamos en consideración las isometrías de \mathcal{H}_3 que no preservan la orientación de las fibras desde que solo consideramos superficies cuya normal tengan tercera coordenada positiva).*

Demostración. En la sección 1.4 obtuvimos la isometría de rotación

$$\Phi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Tenemos que $X = (x, y, h)$ y sea $Y = \Phi \circ X$, calcularemos para esta nueva inmersión su aplicación de Gauss. Primero calculemos el vector $\xi = Y_u \times Y_v$.

Hacemos lo siguiente

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \end{bmatrix}$$

$$Y_u = d\Phi(X_u) = \left(x_u \cos \theta - y_u \sin \theta, x_u \sin \theta + y_u \cos \theta, h_u + \frac{yx_u}{2} - \frac{xy_u}{2} \right)$$

$$Y_v = d\Phi(X_v) = \left(x_v \cos \theta - y_v \sin \theta, x_v \sin \theta + y_v \cos \theta, h_v + \frac{yx_v}{2} - \frac{xy_v}{2} \right)$$

Luego

$$Y_u \times Y_v = \begin{bmatrix} (x_u h_v - x_v h_u + \frac{x}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \cos \theta \\ (y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (x_v h_u - x_u h_v + \frac{x}{2}(x_u y_v - x_v y_u)) \cos \theta \\ x_u y_v - x_v y_u \end{bmatrix}$$

Luego la aplicación de Gauss de la inmersión Y será $g_r = \varphi \circ \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \right)$, donde φ es la proyección estereográfica con respecto al polo sur. Entonces

$$g_r = \frac{1}{\|\xi\|} \begin{bmatrix} \frac{(x_u h_v - x_v h_u + \frac{x}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \cos \theta}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \\ \frac{(y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (x_v h_u - x_u h_v + \frac{x}{2}(x_u y_v - x_v y_u)) \cos \theta}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, al calcular la aplicación de Gauss g de la inmersión X , obtenemos

$$g = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \begin{bmatrix} \frac{y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \\ \frac{x_v h_u - x_u h_v + \frac{x}{2}(x_u y_v - x_v y_u)}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \end{bmatrix}$$

Ahora hacemos $\rho \circ g$ donde ρ es la rotación sobre el 0 del ángulo θ

$$\rho \circ g = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \\ \frac{x_v h_u - x_u h_v + \frac{x}{2}(x_u y_v - x_v y_u)}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \begin{bmatrix} \frac{(x_u h_v - x_v h_u + \frac{x}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \cos \theta}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \\ \frac{(y_u h_v - y_v h_u + \frac{y}{2}(x_v y_u - x_u y_v)) \sin \theta + (x_v h_u - x_u h_v + \frac{x}{2}(x_u y_v - x_v y_u)) \cos \theta}{1 + x_u y_v - x_v y_u} \end{bmatrix}$$

Y al ser Φ una isometría, entonces $\|X_u \times X_v\| = \|\xi\|$. Por lo tanto $g_r = \rho \circ g$. □

Observación 3.22. Las isometrías $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ del disco hiperbólico, que preservan orientación, son de la forma

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}.$$

con $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Proposición 3.23. Sea T una isometría positiva (es decir, preserva la orientación) de \mathbb{H}^2 , entonces $T \circ g$ es armónica y no es antiholomorfa.

Demostración. Tenemos que $T(g) = \frac{\alpha g + \beta}{\beta g + \bar{\alpha}}$. Entonces

$$(T \circ g)_z = \frac{g_z}{(\beta g + \bar{\alpha})^2}$$

Como g no es antiholomorfa, entonces $(T \circ g)_z \neq 0$. Descartamos el caso donde $g = -\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$, pues de la Observación 3.16 tendríamos que $X(\Sigma)$ es un plano vertical. Por lo tanto $T \circ g$ no es antiholomorfa. También se tiene que T es armónica y por lo tanto $T \circ g$ es armónica. □

Gracias al Teorema 3.18, la proposición anterior nos dice que $T \circ g$ es la aplicación de Gauss de una inmersión mínima conforme que nunca es vertical $\tilde{X} : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$.

Corolario 3.24. Sea T una rotación de un ángulo θ sobre $0 \in \mathbb{H}^2$, y sea \tilde{X} la inmersión mínima conforme que nunca es vertical, cuya aplicación de Gauss es $T \circ g$, donde g es la aplicación de Gauss de la inmersión mínima conforme X que nunca es vertical. Entonces \tilde{X} es $\Phi \circ X$, donde Φ es una rotación alrededor del eje z del mismo ángulo θ .

Demostración. En efecto, de la Proposición anterior tenemos que $T \circ g$ es la aplicación de Gauss de una inmersión mínima conforme $\tilde{X} : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}_3$ que nunca es vertical. Por otro lado, si $\Phi \circ X$ es una inmersión mínima conforme tal que no es vertical, donde Φ es una rotación del mismo ángulo θ alrededor del eje z , entonces de la Proposición 3.21 tenemos que $T \circ g$ es la aplicación de Gauss de $\Phi \circ X$. Luego por la unicidad de la inmersión mínima conforme del Teorema 3.18, concluimos que \tilde{X} es $\Phi \circ X$. \square

Observación 3.25.

- Si T no es una rotación sobre 0, entonces en general \tilde{X} no es una deformación trivial de X .
- Si T es una isometría negativa (invierte la orientación) de \mathbb{H}^2 , entonces $T \circ g$ sigue siendo armónica pero no es antiholomorfa necesariamente. Ahora si $T \circ g$ no fuera antiholomorfa, su correspondiente superficie mínima puede ser completamente distinta a la superficie inicial.

3.3. Ejemplos de Inmersiones Mínimas

Usando la representación tipo Weierstrass para superficies mínimas dada en la sección 3.1, daremos algunos ejemplos de inmersiones mínimas.

Ejemplo 3.26 (El Hemisferio mínimo). Sea $\Sigma = \mathbb{H}^2$ y $g(z) = iz$. Entonces $g_z = i$, y usando las fórmulas del Teorema 3.18 obtenemos (salvo una traslación)

$$F_z = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \quad \text{y} \quad F_{\bar{z}} = \frac{4z}{(1 - |z|^2)^2}$$

luego

$$F = \int \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dz$$

integrando

$$F = \frac{4}{\bar{z}(1 - |z|^2)} + k(\bar{z}) \tag{3.16}$$

Derivando con respecto a \bar{z} el resultado anterior, tendremos

$$F_{\bar{z}} = 4 \left[\frac{2|z|^2 - 1}{\bar{z}^2(1 - |z|^2)} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} k(\bar{z})$$

Luego se tendrá

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} k(\bar{z}) = \frac{4}{\bar{z}^2}$$

integrando se tendrá

$$k(\bar{z}) = -\frac{4}{\bar{z}}$$

Luego reemplazando la última igualdad en (3.16) tendremos

$$F = \frac{4z}{1 - |z|^2}.$$

Ahora haciendo los mismos cálculos para h , tendremos que $h_z = 0$, y así $h = 0$, por tanto obtenemos el plano de ecuación $z = 0$. Esta es invariante por rotaciones alrededor del eje z . Llamaremos a esta superficie el *hemisferio mínimo* de polo $(0, 0, 0)$.

Ejemplo 3.27 (Superficies invariantes por traslación). Asumamos que la imagen de g es una geodésica de \mathbb{H}^2 y que g no es antiholomorfa. Sea $\Sigma = \mathbb{C}$ y

$$g(u + iv) = \frac{a(1 - \cosh v) + \bar{c} \sinh v}{c(1 - \cosh v) + \bar{a} \sinh v}$$

con $|a|^2 - |c|^2 = 1$. Luego tenemos

$$g_z = -\frac{i}{2} \frac{1 - \cosh v}{(c(1 - \cosh v) + \bar{a} \sinh v)^2}$$

A menos de una rotación sobre $0 \in \mathbb{H}^2$, podemos asumir que la geodésica intersecta al eje $\{\operatorname{Re} \zeta = 0\}$ ortogonalmente y es orientado de derecha a izquierda, además podemos asumir que esta intersección ocurre cuando $v = 0$. De esto obtenemos $g(0) \in i\mathbb{R}$ y $g_z(0) = -\frac{i}{2}g_v(0) \in i\mathbb{R}_+$, que da $a \in \mathbb{R}$ y $c \in i\mathbb{R}$. Por tanto a menos de una multiplicación por -1 de a y c podemos establecer $a = \cosh \theta$ y $c = i \sinh \theta$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. De las fórmulas del Teorema 3.18, obtenemos

$$F_z = \frac{1}{2}(\cosh(2\theta) + \cosh v + i \sinh(2\theta) \sinh v)$$

,

$$F_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\cosh(2\theta) - \cosh v - i \sinh(2\theta) \sinh v)$$

A continuación hallaremos F . Sabemos

$$F_u = F_z + F_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad F_v = i(F_z - F_{\bar{z}})$$

Luego tendremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} F_u = \cosh(2\theta) \\ F_v = i \cosh v - \sinh(2\theta) \cdot \sinh v \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos (a menos de una traslación)

$$F = \cosh(2\theta)u - \sinh(2\theta) \cosh v + i \sinh v.$$

Por otro lado del Teorema 3.18 haciendo unos cálculos obtenemos

$$h_z = \frac{1}{4} \cosh(2\theta) \sinh v - \frac{i}{4} \sinh(2\theta) - \frac{i}{4} \cosh(2\theta)u \cosh v,$$

Ahora hallaremos h . Sabemos

$$h_z = \frac{1}{2}(h_u - ih_v)$$

Y al comparar ésta última ecuación con la anterior, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} h_u = \frac{1}{2} \cosh(2\theta) \sinh v \\ h_v = \frac{1}{2} \sinh(2\theta) + \frac{1}{2} \cosh(2\theta)u \cosh v \end{cases}$$

y finalmente resolviendo el sistema anterior, obtenemos (a menos de una traslación)

$$h = \frac{1}{2} \cosh(2\theta)u \sinh v + \frac{1}{2} \sinh(2\theta)v.$$

Esta superficie es un gráfico entero sobre \mathbb{R}^2 , dado por

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2} \sinh(2\theta) \left(\arg \sinh(x_2) + x_2 \sqrt{1 + x_2^2} \right).$$

Esta es invariante por la familia uniparamétrica de traslaciones a lo largo del eje x_1 .

Esto es descrito en [7].

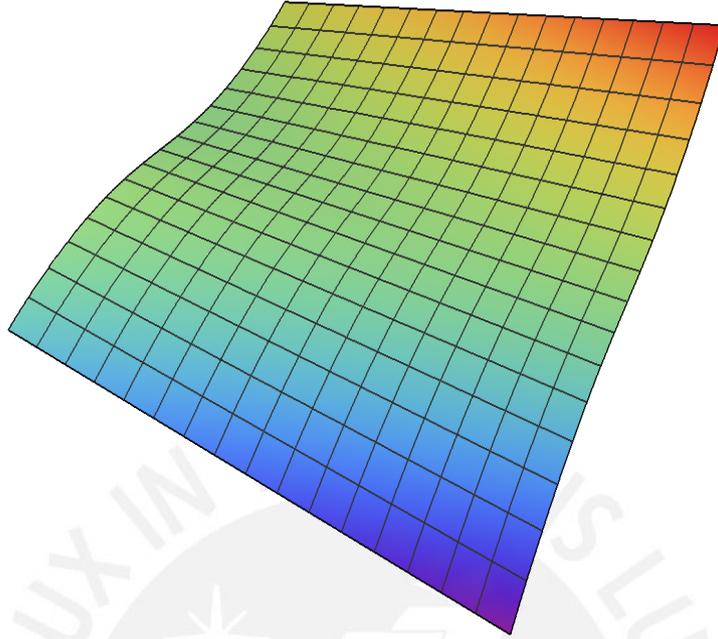


Figura 3.1: Superficie invariante por Traslación para $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ejemplo 3.28 (Helicoides). En este ejemplo buscaremos una inmersión mínima cuya aplicación de Gauss sea de la forma $g(u + iv) = e^{iu}\varphi(v)$, donde φ es una función diferenciable de valores reales.

Sea $\Sigma = \mathbb{R} \times]-v_0, v_0[$ y $g(u + iv) = e^{iu}\varphi(v)$, para que g sea armónica, debe verificar la ecuación (3.9).

Tenemos

$$g_z = \frac{i}{2}e^{iu}(\varphi - \varphi') ; g_{\bar{z}} = \frac{i}{2}e^{iu}(\varphi + \varphi') ; g_{z\bar{z}} = -\frac{e^{iu}}{4}(\varphi - \varphi'')$$

Al reemplazar estos términos en la ecuación (3.9) obtenemos

$$\frac{e^{iu}}{4} \left[\frac{(1 - \varphi^2)\varphi'' + 2\varphi(\varphi')^2 - \varphi(1 + \varphi^2)}{1 - \varphi^2} \right] = 0$$

Por tanto g será armónica, si

$$(1 - \varphi^2)\varphi'' + 2\varphi(\varphi')^2 - \varphi(1 + \varphi^2) = 0. \quad (3.17)$$

Por otro lado, sea $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y φ una función de valores reales definida en un intervalo abierto I satisfaciendo

$$(\varphi')^2 - \varphi^2 = a(1 - \varphi^2)^2$$

y tal que no sea constante en un intervalo. Tenemos $\varphi'' - \varphi = -2a\varphi(1 - \varphi^2)$, y entonces

$$(1 - \varphi^2)\varphi'' + 2\varphi(\varphi')^2 - \varphi(1 + \varphi^2) = 0.$$

Supongamos que $a > 0$. Escojamos φ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi' > 0$, y restrinjamos φ a un intervalo $]-v_0, v_0[$ tal que $\varphi(]-v_0, v_0[) =]-1, 1[$. (Si $a = \frac{1}{4}$, entonces $\varphi(x) = \tan(\frac{x}{2})$). Tenemos que g es armónica, pues φ verifica la ecuación (3.17). Como

$$g_z = \frac{i}{2}e^{iu}(\varphi - \varphi'),$$

Entonces

$$F_z = 2e^{iu} \frac{\varphi - \varphi'}{(1 - \varphi(v)^2)^2}, \quad F_{\bar{z}} = -2e^{iu} \varphi^2 \frac{\varphi - \varphi'}{(1 - \varphi(v)^2)^2}.$$

Integrando como en el ejemplo anterior, obtenemos (salvo una traslación)

$$F = -2ie^{iu} \frac{\varphi(v) - \varphi'(v)}{1 - \varphi(v)^2}.$$

De ahí obtenemos que

$$h_z = \frac{\varphi'(v)^2 - \varphi(v)^2}{(1 - \varphi(v)^2)^2} = a,$$

que nos da, salvo una traslación

$$h = au$$

Tenemos $|F| \rightarrow +\infty$ cuando $v \rightarrow -v_0$, y $|F| \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow v_0$. Entonces la clausura de la superficie contiene al eje z , éste es la mitad de un helicoide derecho. Obtendremos el helicoide derecho completo por rotación del ángulo π sobre el eje z , pues estamos aplicando una isometría de \mathcal{H}_3 a la superficie mínima, la cual hace que la superficie siga teniendo curvatura media igual a 0. Por lo tanto, el helicoide completo sigue siendo una superficie mínima.

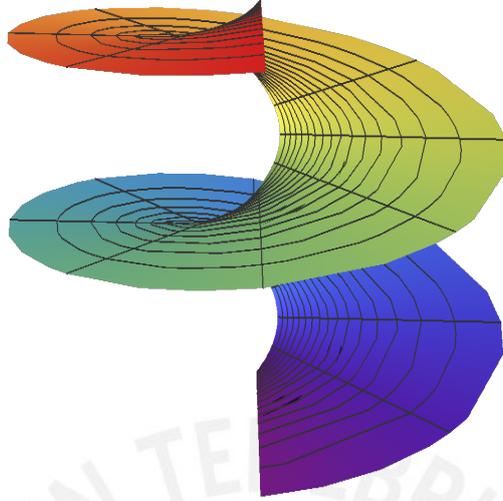


Figura 3.2: Helicoide para $\varphi(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

3.3.1. Gráficos Mínimos

En esta parte presentaremos la ecuación de los gráficos mínimos en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 descrito a detalle en [8] y mostraremos dos ejemplos de gráficos mínimos en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 .

Sea S una superficie en \mathcal{H}_3 que localmente es el gráfico de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^2 . Entonces una parametrización local para S es

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)) , \quad (x, y) \in U$$

Luego si $p = (x, y, f(x, y))$, entonces una base del espacio tangente $T_p S$ asociada a esta parametrización es

$$X_x = \frac{\partial}{\partial x} X(x, y) = (1, 0, f_x) = E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3$$

$$X_y = \frac{\partial}{\partial y} X(x, y) = (0, 1, f_y) = E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3$$

Entonces el campo normal unitario a la superficie es

$$\xi = - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3$$

donde $w = \sqrt{1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2}$.

Luego la métrica inducida por \mathcal{H}_3 en S es

$$\begin{aligned} E &= \langle X_x, X_x \rangle = 1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 \\ F &= \langle X_y, X_x \rangle = \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y + \frac{x}{2}\right) \\ G &= \langle X_y, X_y \rangle = 1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Si $\hat{\nabla}$ es la conexión riemanniana de \mathcal{H}_3 , entonces por la fórmula de Weingarten para hipersuperficies tenemos

$$A_\xi(Z) = -\nabla_Z \xi, \quad Z \in T_p S$$

Luego los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} L &= -\langle \nabla_{X_x}, X_x \rangle = \frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w} \\ M &= -\langle \nabla_{X_x}, X_y \rangle = \frac{f_{xy} + \frac{1}{2}(f_y - \frac{x}{2})^2 - \frac{1}{2}(f_x + \frac{y}{2})^2}{w} \\ N &= -\langle \nabla_{X_y}, X_y \rangle = \frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w} \end{aligned}$$

Sabemos que para una superficie S su **curvatura media** está dada por los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \right)$$

Ahora una superficie es **mínima** si $H \equiv 0$, luego al reemplazar las expresiones de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental en la fórmula anterior dada por H e igualando a cero, obtenemos que S es una superficie mínima si

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2 \left(f_y - \frac{x}{2}\right) \left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0 \quad (3.18)$$

La fórmula anterior es la ecuación de **gráficos mínimos** de una superficie en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 .

Ahora pasamos a presentar dos ejemplos de gráficos mínimos dadas por una aplicación de Gauss, la cual es armónica y no es antiholomorfa.

Ejemplo 3.29. Sea $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ y

$$g(u + iv) = \frac{-1 + i \cosh(2u) \sinh(2v)}{\sinh(2u) + \cosh(2u) \cosh(2v)}$$

Esta es la aplicación de Gauss de una superficie completa de curvatura media constante en \mathbb{L}^3 llamada semicanal (ver [9] y [10] pág. 98). La imagen de g es $\mathbb{H}^2 \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$.

Luego obtenemos

$$g_z = \frac{(\cosh(2u) + 1)(\cosh(2u) + \sinh(2u) \cosh(2v) - i \sinh(2v))}{(\sinh(2u) + \cosh(2u) \cosh(2v))^2},$$

y entonces

$$F_z = -\frac{i \cosh(2u) + \sinh(2v) + i \cosh(2v) \sinh(2u)}{\cosh(2u) - 1}$$

$$F_{\bar{z}} = -\frac{i \cosh(2u) + \sinh(2v) - i \cosh(2v) \sinh(2u)}{\cosh(2u) - 1}$$

A menos de una traslación, y usando los mismo pasos hechos en el Ejemplo 3.27, obtenemos

$$F = 2 \sinh v \cosh v \coth u + i(\coth u - 2u)$$

luego

$$h_z = i \cosh^2 v - \frac{i}{2} - u \frac{\sinh v \cosh v}{\sinh^2 u} + iu \coth u - 2iu \cosh^2 v \coth u + \sinh v \cosh v \coth u$$

y finalmente, a menos de una traslación obtenemos

$$h = \sinh v \cosh v(2u \coth u - 1)$$

La aplicación F es un difeomorfismo de Σ sobre \mathbb{C} . Por tanto obtenemos un nuevo ejemplo de un gráfico entero mínimo sobre \mathbb{R}^2 . Sean $x_1 = \operatorname{Re} F$, $x_2 = \operatorname{Im} F$ y $x_3 = h$ las coordenadas de esta superficie. La aplicación $\beta :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\beta(u) = x_2$ es un difeomorfismo, luego

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \left(u - \frac{1}{2 \coth u} \right) \\ &= x_1 \left(\beta^{-1}(x_2) - \frac{1}{2 \coth \beta^{-1}(x_2)} \right) \\ &= x_1 f(x_2) \end{aligned}$$

Por tanto la superficie es definida por una ecuación de la forma

$$x_3 = x_1 f(x_2),$$

donde f es una función. Cuando $x_2 \rightarrow -\infty$, es decir, cuando $u \rightarrow +\infty$, tenemos $f(x_2) \sim -\frac{1}{2}x_2$; cuando $x_2 \rightarrow +\infty$, es decir, cuando $u \rightarrow 0$, tenemos $f(x_2) \sim \frac{1}{2x_2}$. De ahí por un lado la superficie es asintótica a la superficie de ecuación $x_3 = -\frac{1}{2}x_1x_2$ que es invariante por traslaciones a lo largo del eje x_2 (esta es la imagen del Ejemplo 3.27 para $\theta = 0$); por otro lado, la superficie es asintótica a la superficie de ecuación $x_3 = 0$, que es un hemisferio mínimo.

Finalmente esta superficie al ser un gráfico mínimo cumple con la ecuación (3.18).

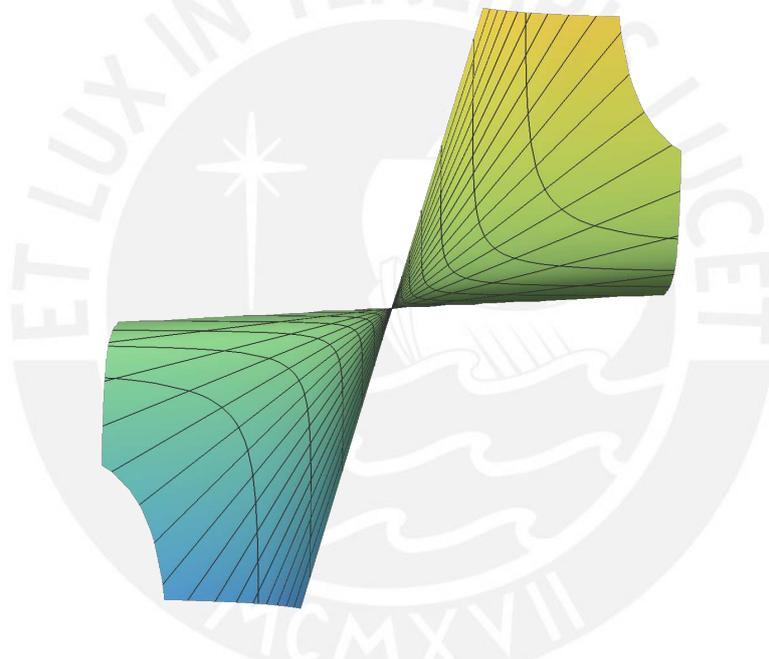


Figura 3.3: Gráfico Entero Mínimo

Ejemplo 3.30. Sea $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ y

$$g(u + iv) = \frac{-1 - i \cosh(2u) \sinh(2v)}{\sinh(2u) + \cosh(2u) \cosh(2v)}$$

Esta es la conjugada compleja de la aplicación de Gauss del Ejemplo 3.29. Luego obtenemos

$$g_z = -\frac{(\cosh(2u) - 1)(\cosh(2u) + \sinh(2u) \cosh(2v) + i \sinh(2v))}{(\sinh(2u) + \cosh(2u) \cosh(2v))^2}$$

y entonces

$$F_z = \frac{i \cosh(2u) - \sinh(2v) + i \cosh(2v) \sinh(2u)}{\cosh(2u) + 1}$$

$$F_{\bar{z}} = \frac{i \cosh(2u) - \sinh(2v) - i \cosh(2v) \sinh(2u)}{\cosh(2u) + 1}$$

A menos de una traslación, usando los pasos hechos en el ejemplo anterior, obtenemos

$$F = -2 \sinh v \cosh v \tanh u - i \tanh u + 2iu$$

y luego

$$h_z = i \cosh^2 v - \frac{i}{2} + u \frac{\sinh v \cosh v}{\cosh^2 u} + iu \tanh u - 2iu \cosh^2 v \tanh u + \sinh v \cosh v \tanh u$$

y finalmente, a menos de una traslación obtenemos

$$h = \sinh v \cosh v (2u \tanh u - 1)$$

La aplicación F es un difeomorfismo de Σ sobre $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$. Por tanto la superficie es un gráfico sobre la mitad del plano. Sean $x_1 = \operatorname{Re} F$, $x_2 = \operatorname{Im} F$ y $x_3 = h$ las coordenadas de esta superficie. La aplicación $\omega :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ dada por $\omega(u) = x_2$ es un difeomorfismo, luego

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \left(\frac{\coth u}{2} - 2u \right) \\ &= x_1 \left(\frac{\coth \omega^{-1}(x_2)}{2} - 2\omega^{-1}(x_2) \right) \\ &= x_1 f(x_2) \end{aligned}$$

Por tanto la superficie es definida por una ecuación de la forma

$$x_3 = x_1 f(x_2),$$

donde f es una función. Cuando $x_2 \rightarrow +\infty$, es decir, cuando $u \rightarrow +\infty$, tenemos $f(x_2) \sim -\frac{1}{2}x_2$; cuando $x_2 \rightarrow 0$, es decir, cuando $u \rightarrow 0$, tenemos $f(x_2) \sim \frac{1}{2x_2}$. De ahí por un lado la superficie es asintótica a la superficie de ecuación $x_3 = -\frac{1}{2}x_1x_2$, y por otro lado la superficie no es completa y su clausura contiene al eje x_3 . La superficie puede ser completada por rotación del ángulo π sobre el eje x_3 . Finalmente esta superficie al ser un gráfico mínimo cumple con la ecuación (3.18).

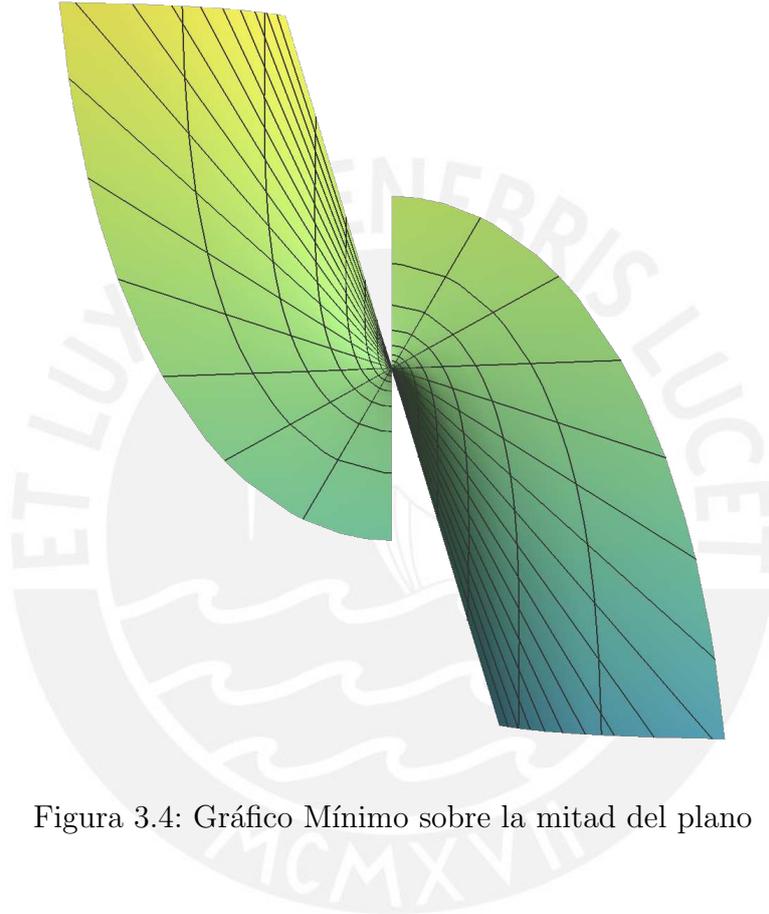


Figura 3.4: Gráfico Mínimo sobre la mitad del plano

Bibliografía

- [1] S. Kobayashi, “Foundations of differential geometry vol 1 (new york: Interscience) kobayashi s and nomizu k 1969,” *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, 1963.
- [2] A. Kaplan, “Riemannian nilmanifolds attached to clifford modules,” *Geometriae Dedicata*, vol. 11, no. 2, pp. 127–136, 1981.
- [3] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [4] J. Eells and J. H. Sampson, “Harmonic mappings of riemannian manifolds,” *American journal of mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 109–160, 1964.
- [5] J. Eells and L. Lemaire, “A report on harmonic maps,” *Bulletin of the London mathematical society*, vol. 10, no. 1, pp. 1–68, 1978.
- [6] J. Eells and L. Lemaire, “Another report on harmonic maps,” *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 20, no. 5, pp. 385–524, 1988.
- [7] C. B. Figueroa, F. Mercuri, and R. H. Pedrosa, “Invariant surfaces of the heisenberg groups,” *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. 177, no. 1, pp. 173–194, 1999.
- [8] C. Figueroa *et al.*, “The gauss map of minimal graphs in the heisenberg group,” *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, vol. 25, pp. 1–21, 2012.
- [9] H. I. Choi, A. Treibergs, *et al.*, “Gauss maps of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of minkowski space,” *Journal of Differential Geometry*, vol. 32, no. 3, pp. 775–817, 1990.

- [10] Z.-C. Han, L.-F. Tam, A. Treibergs, and T. Wan, “Harmonic maps from the complex plane into surfaces with nonpositive curvature,” *Communications in Analysis and Geometry*, vol. 3, no. 1, pp. 85–114, 1995.
- [11] B. Daniel, “The gauss map of minimal surfaces in the heisenberg group,” *International Mathematics Research Notices*, vol. 2011, no. 3, pp. 674–695, 2010.
- [12] C. B. F. Serrudo, “Introducción a las aplicaciones armónicas,” *Pro Mathematica*, vol. 23, no. 45-46, pp. 113–125.
- [13] M. P. d. Carmo and A. C. Asperti, “Notas de um curso de grupos de lie,” 1974.
- [14] M. P. Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. 1990.
- [15] A. Kaplan, “On the geometry of groups of heisenberg type,” *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 15, no. 1, pp. 35–42, 1983.

