PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Los niveles de razonamiento de Van Hiele que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa Particular de Lima Metropolitana al desarrollar un test sobre triángulos y cuadriláteros

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN CON ESPECIALIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

AUTOR:

Lourdes Florencia Rodríguez Soto

ASESOR:

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente

Lima, Setiembre, 2019

AGRADECIMIENTOS

A mi hermana Lidia, quien me ha acompañado desde el inicio en este increíble viaje.
A mi mamá y papá, Honoria y Rubén, por su amor y sus enseñanzas.
A mi abuela, Lidia Irupailla, por darme cariño y seguridad.
A mi tía Bertha Irupailla, por ser mi mayor maestra.
Edison, todo esfuerzo tiene su recompensa, te quiero.

Un agradecimiento especial a mi asesora, Elizabeth Advíncula, quien con su carisma representa para mí un modelo a seguir tanto como persona y como profesora.

RESUMEN

El modelo de Van Hiele es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría que abarca dos grandes dimensiones de estudio: los niveles de razonamiento geométrico y las fases para una secuencia didáctica de geometría. En la presente investigación se abordará particularmente los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele respecto a los triángulos y los cuadriláteros. Este estudio es de tipo descriptivo, no experimental de diseño transversal y cuantitativo.

La presente investigación es descriptiva, ya que se enfoca en identificar y describir los niveles de razonamiento de Van Hiele en estudiantes de quinto grado de primaria. También, es no experimental de diseño transversal, puesto que no habrá manipulación intencional de la categoría de estudio y los datos serán recolectados en un tiempo único. Y es cuantitativa porque se construirán creencias propias para un grupo determinado de personas a partir de la medición de variables.

Respecto, al desarrollo de este estudio, se trabajó con un grupo de cuatro niños con alto rendimiento académico que pertenecían a quinto grado de primaria de una institución educativa particular de Lima Metropolitana. Esta investigación enriquece con la visión de una geometría accesible para todos, pues parte de un enfoque que busca conocer los niveles de razonamiento geométrico que presentan los estudiantes y a partir de ello contribuir con distintas actividades que desarrollen habilidades de razonamiento geométrico en los niños.

De esta manera, por medio de esta investigación se buscó caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y triángulos en los estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana. Asimismo, se encontró que el razonamiento geométrico de cada estudiante que participó del estudio es diverso y complejo, ya que cada uno desarrolla habilidades de razonamiento geométrico que los ubican en distintos grados de acuerdo a los niveles de Van Hiele.

Palabras claves: Niveles de Van Hiele, razonamiento geométrico, triángulos y cuadriláteros**.**

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La presente tesis parte de la siguiente pregunta problema: ¿Cuál es nivel de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y triángulos que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana? Para ello, se propone tener como marco de referencia de la investigación los Niveles del Modelo de Van Hiele. Estos niveles permiten conocer el razonamiento geométrico de los estudiantes al identificar las habilidades del nivel en el que se encuentran. Así, al determinar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele, se tendrá una visión más clara de cómo razona el niño y también de los objetivos que se espera alcancen al aprender un nuevo contenido matemático.

A partir de lo mencionado anteriormente, esta investigación tiene como objetivo principal "Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y triángulos en los estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana". Para lo cual, se propone: "Describir los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros que se espera alcancen los estudiantes de quinto grado de primaria" e "Identificar el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los cuadriláteros y triángulos en estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana".

Tras una revisión bibliográfica respecto a estudios anteriores que antecedan a esta investigación, se encontraron investigaciones que tienen como punto en común la prueba como técnica para la recogida de información. Estas investigaciones son las siguientes: "Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile" (Aravena, Gutiérrez, y Jaime, 2016); "Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento" (Jaime, 1993) y "An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van hiele levels" (Fortuny, Gutiérrez y Jaime, 1991).

Por otro lado, este trabajo de investigación presenta cuatro capítulos distribuidos en dos partes. La primera parte se refiere al marco teórico y desarrolla dos capítulos, el primero está relacionado a los objetos geométricos de la investigación, los triángulos y los cuadriláteros. Asimismo, el segundo capítulo está vinculado a los Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele en relación a los triángulos y cuadriláteros.

Luego, la segunda parte también llamada Investigación, desarrolla un primer capítulo sobre el diseño de la investigación, y un segundo capítulo sobre el análisis e interpretación de los resultados. Por último, la parte final de la tesis expone conclusiones y recomendaciones relacionadas directamente con los objetivos de investigación previamente expuestos.

El presente estudio obtuvo distintos aportes relacionados al marco teórico, metodológico y práctico relacionado a los niveles de Van Hiele. En relación al marco teórico y metodológico, se elaboró una matriz de indicadores relacionados a los Niveles de Van Hiele respecto a los triángulos y cuadriláteros. Esta matriz permite conocer, a través de determinados indicadores, aquellas habilidades que un estudiante puede alcanzar en un determinado nivel de razonamiento geométrico. Asimismo, un aporte relacionado al marco práctico es el test de razonamiento geométrico, el cual está elaborado para caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros.

El desarrollo de este estudio permite reflexionar sobre la importancia de entender y valorar a la geometría como una ciencia cotidiana en la vida de los niños. Por lo cual, es necesario conocer y respetar los niveles de razonamiento que presentan nuestros estudiantes. No obstante, en muchas ocasiones por causa de la rutina académica diaria, este tipo de evaluaciones que permite al docente conocer cómo razonan sus alumnos, queda como simple paradigma que no se emplea en las aulas.

Capítulo I: Objetos geométricos: triángulos y cuadriláteros

Los objetos geométricos a estudiar en la presente investigación son los cuadriláteros y los triángulos; estos son considerados como "figuras geométricas planas" o "bidimensionales" y forman parte de la amplia familia de figuras geométricas. A continuación, el primer capítulo abordará información importante sobre los cuadriláteros y triángulos, desde su historia, un repaso por sus características hasta una revisión de estas figuras a partir del material educativo que se emplea en la enseñanza primaria como son los libros.

1.1 Las figuras geométricas en la historia

Cuenta Vitruvio (s.f) que el filósofo Aristipo, discípulo de Sócrates, fue arrojado a las costas de la isla de Rodas. Al advertir unas figuras geométricas dibujadas en la arena, gritó a sus compañeros: "¡tengamos confianza, pues observo huellas humanas!". Las figuras geométricas han estado presentes desde hace miles de años, esto gracias a los dibujos que hacían los antiguos habitantes en su intento por representar la realidad, su entorno o todo aquello que conocían. Así mismo, señala Corberán, Huerta, Margarit, Peñas y Ruiz (1989), que las figuras geométricas, consideradas como modelos de representación rigurosa, han sido por siglos referencia obligada para la enseñanza de la geometría; muchas veces denominadas como "prima dona" del currículo en las escuelas.

Euclides, matemático griego considerado como el padre de la geometría pensaba: "¿Cómo no va a ser objeto de admiración la primera entre las ciencias que logra organizar todo el saber acumulado, codificarlo, elaborar un sistema axiomático y unos mecanismos de razonamiento que controlen y verifiquen la imaginación creadora?" (Corberán et al., 1989, p. 10). Con esta cita se observa el valor que recibía la geometría desde la antigüedad de la mano de filósofos o pensadores como el ya mencionado Euclides. Asimismo, otras fuentes que demuestran el valor que se le otorgaba a esta disciplina la podemos encontrar en "La República", obra de Platón y en la obra "Comentario a las Categorías", escrita por Elías. La primera fuente, relatada en primera persona por Sócrates, sostiene un diálogo en el que se refiere a la geometría como una de las enseñanzas fundamentales para el desarrollo académico de los guerreros y pensadores. Por su parte, la segunda obra, cuenta que en el frontis de la Academia de Platón se leía la siguiente frase: "Que nadie entre aquí si no sabe Geometría". Esta ciencia era valorada por los filósofos de la antigua Grecia, ya que les brindaba herramientas de organización, orientación espacial, entre otros.

Como se ha mencionado anteriormente, desde tiempos pasados se remonta el valor que se le otorgaba a la geometría, y con ello el interés progresivo por conocer temas como las figuras geométricas, aunque inicialmente con distintas denominaciones. Hasta el día hoy, la geometría es considerada como ciencia primordial en el desarrollo de los estudiantes, ya que como señala Akkaya, Celebi Akkaya y Erdogan (2009), la geometría es un componente de las matemáticas que permite a los estudiantes tener una mejor comprensión del ambiente que los rodea y los eventos que en este se desarrollan. Así mismo, el razonamiento geométrico desarrolla distintas características cognitivas en los estudiantes, las cuales contribuyen a su desarrollo.

A partir de la revisión realizada a las figuras geométricas a través de su historia, los siguientes párrafos expondrán información relevante sobre los objetos geométricos del presente estudio: cuadriláteros y triángulos.

1.2 Triángulos y cuadriláteros

Los cuadriláteros y triángulos son considerados figuras geométricas planas o bidimensionales, las cuales pertenecen al grupo de los polígonos. Para Weisstein (citado por Scahill, 2006), "a polygon is a closed plane figure with many sides" (p. 31)[1], es decir, un polígono es una figura cerrada de tres a más lados, el cual de acuerdo a la media de sus lados y ángulos puede ser regular o irregular. Para Cahir y Weisstein (citados por Scahill, 2006), si todos los lados y ángulos de un polígono tienen la misma medida se llaman "polígonos regulares", mientras que si sus lados y ángulos no son de igual medida, se les denomina "polígonos irregulares".

La geometría se encarga de estudiar las propiedades y medidas de las figuras geométricas. Para Godino (2004), las figuras geométricas pueden clasificarse según su forma en: figuras geométricas planas (bidimensionales) y figuras geométricas espaciales (tridimensionales). Por su parte, las figuras geométricas planas pueden dividirse en polígonos y circunferencia; mientras que las figuras geométricas espaciales pueden ser: cubo, esfera, prismas, pirámides, conos, cilindros, entre otros.

[1] Un polígono es una figura plana cerrada con muchos lados. (Traducción textual)

De acuerdo a Godino (2004), “realizar clasificaciones de estos objetos geométricos no solo ayuda a entender mejor sus propiedades sino a establecer relaciones entre ellos” (p. 468). Es por ello, que en coherencia con el propósito de la presente investigación, se tomará en cuenta la clasificación propuesta por Godino (2004), la cual permitirá estudiar los polígonos: cuadriláteros y triángulos.

Por un lado, los cuadriláteros son aquellas figuras geométricas planas que se caracterizan por presentar cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos. Cuadrilátero proviene de las palabras latinas “quadri”, que significa cuatro, y “latus”, que significa lado. Para Salvat Editores (2004), el cuadrilátero es una “figura formada por cuatro rectas que se cortan dos a dos y sus seis puntos de intersección” (p. 4075). Por otro lado, los triángulos son figuras geométricas planas conformadas básicamente por tres lados, tres vértices y tres ángulos. Díaz (citado por Barroso, 2000), señala en el Diccionario básico de matemáticas que el triángulo es un “polígono de tres lados o ángulos” (p. 288).

A continuación, a fin de caracterizar los objetos geométricos de la presente investigación, se explicarán las propiedades, los elementos y la clasificación tanto de los cuadriláteros como los triángulos. Para dicho estudio formal se tomará como principal fuente de consulta el libro “Geometría moderna” escrito con Moise y Downs (1986).

Propiedades, elementos y clasificación de cuadriláteros

De acuerdo a Moise y Downs (1986), “un cuadrilátero es una figura plana de cuatro lados” (p. 143), el cual puede definirse de la siguiente manera:

Sean **A, B, C** y **D** cuatro puntos coplanarios[2], de los cuales tres no están alineados y los segmentos **AB, BC, CD** y **DA** se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero (ver figura 1).

Para el presente estudio, se tendrá en cuenta los siguientes elementos de los cuadriláteros: lados, vértices y ángulos. A modo de ejemplo, presentamos el cuadrilátero ABCD, donde los cuatro segmentos **AB, BC, CD y DA** se llaman lados; los puntos **A, B, C y D** se llaman vértices; y los ángulos **∠ABC, ∠BCD, ∠CDA** y **∠DAB** se llaman ángulos interiores del cuadrilátero (ver figura 1).

[2] Coplanario: que se encuentran en el mismo plano.

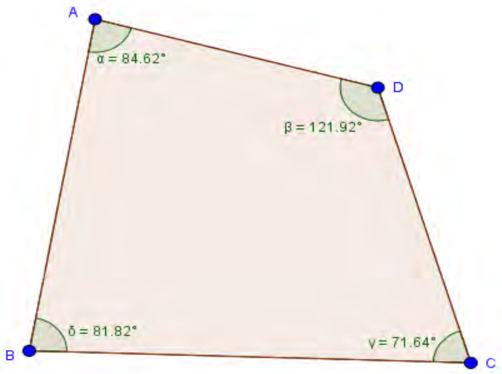


Figura 1: Cuadrilátero
Fuente: Elaboración propia

Así mismo, Salvat Editores (2004) señalan que "dos vértices consecutivos de un cuadrilátero determinan una recta que divide al plano en dos semiplanos: según que los otros dos vértices pertenezcan o no al mismo semiplano se dice que el cuadrilátero es convexo o cóncavo" (p. 4075). Para propósitos del presente estudio, este se enfocará en los cuadriláteros convexos, los cuales se clasifican en: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Así pues, en las siguientes líneas se caracterizan los cuadriláteros convexos anteriormente mencionados.

- **Paralelogramo**

Para Salvat (2004), paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Este puede ser: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

  - **Cuadrado**

Es un paralelogramo cuyos lados y ángulos son de igual medida entre sí. De acuerdo a Salvat Editores (2004), los ángulos de un cuadrado son todos iguales a un recto, es decir, miden 90°. A modo de ejemplo, presentamos el cuadrado ABCD (ver figura 2).

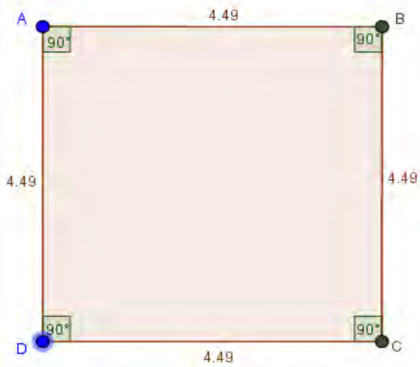


Figura 2: Cuadrado
Fuente: Elaboración propia

- **Rectángulo**

Es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos (90°) y sus lados paralelos son de igual medida, mientras que los consecutivos no lo son. A modo de ejemplo, presentamos el rectángulo ABCD (ver figura 3).

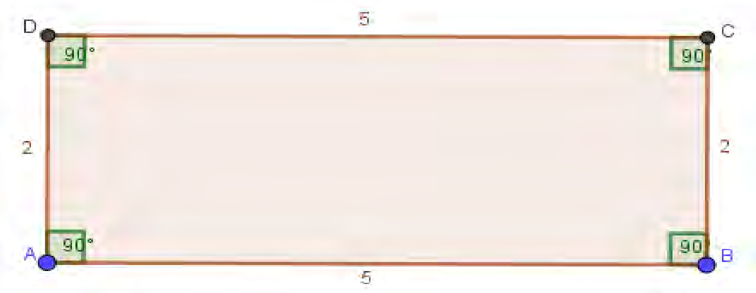


Figura 3: Rectángulo
Fuente: Elaboración propia

- **Rombo**

Es un paralelogramo cuyos lados son todos de igual medida entre sí. Tienen dos ángulos agudos (miden menos de 90°) y dos ángulos obtusos (miden más de 90°). A modo de ejemplo, presentamos el rombo ABCD (ver figura 4).

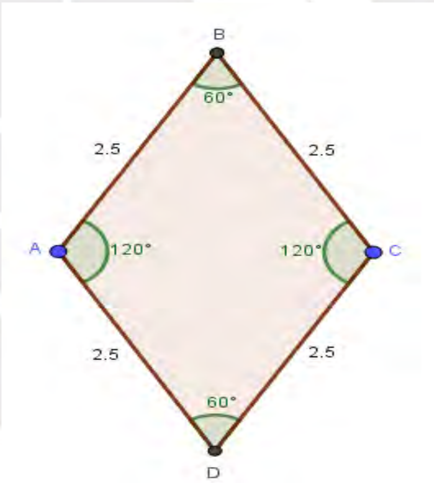


Figura 4: Rombo
Fuente: Elaboración propia

- **Romboide**

Es un paralelogramo que tiene los lados y los ángulos consecutivos de diferente medida. Mientras que sus lados paralelos son de igual media al igual que sus ángulos opuestos. A modo de ejemplo, presentamos el romboide ABCD (ver figura 5).

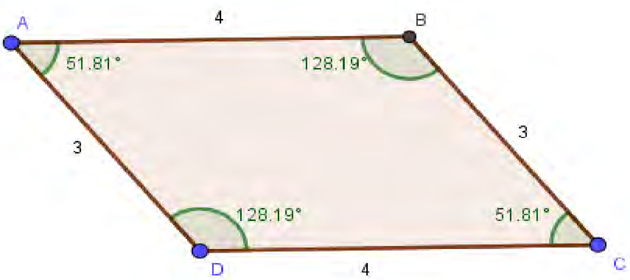


Figura 5: Romboide
Fuente: Elaboración propia

- **Trapecio**

Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos llamados bases y dos lados no paralelos. Además, la distancia entre las bases se denomina altura. Puede ser: rectángulo, isósceles y escaleno. A modo de ejemplo, presentamos el trapecio rectángulo ABCD (ver figura 6), el trapecio isósceles (ver figura 7) y el trapecio escaleno ABCD (ver figura 8).

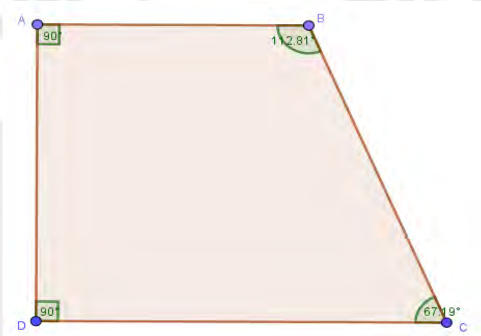


Figura 6: Trapecio rectángulo
Fuente: Elaboración propia

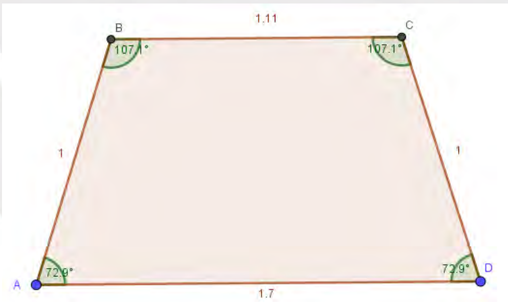


Figura 7: Trapecio isósceles
Fuente: Elaboración propia

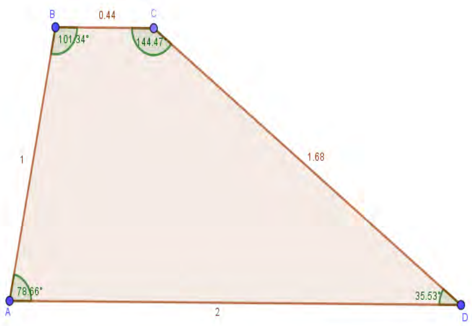


Figura 8: Trapecio escaleno
Fuente: Elaboración propia

- **Trapezoide**

Cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a otro. A modo de ejemplo presentamos el trapezoide ABCD (ver figura 9).

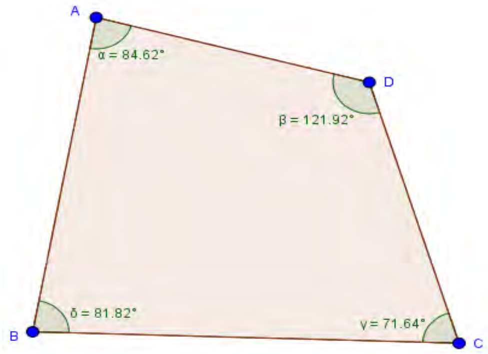


Figura 9: Trapezoide
Fuente: Elaboración propia

Propiedades, elementos y clasificación de los triángulos

Para Moise y Downs (1986), un triángulo es un polígono definido por tres lados, tres vértices y tres ángulos, el cual también puede definirse de la siguiente manera:

Si **A, B y C** son tres puntos cualesquiera no alineados sobre el plano, entonces la reunión de los segmentos **AB, AC y BC** se denomina como triángulo (ver figura 8).

Además, los puntos **A, B y C** se llaman vértices y los tres segmentos **AB, AC y BC** se denominan lados. Así mismo, cada par de lados determina un ángulo interior (llamado ángulo), los cuales sumados en total resultan ciento ochenta grados (180°); estos son: **∠BAC, ∠ABC y ∠ACB** (ver figura 10).

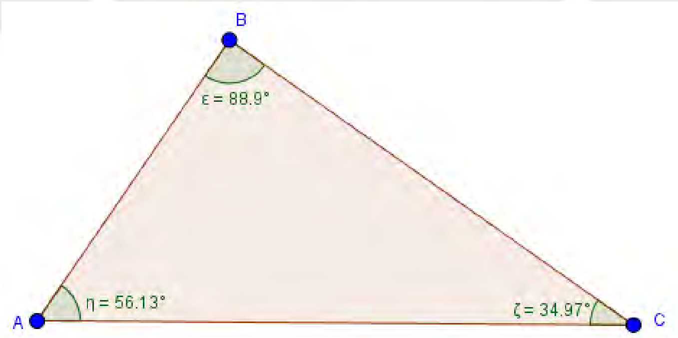


Figura 10: Triángulo
Fuente: Elaboración propia

Para Salvat Editores (2004), según sean los lados el triángulo puede ser: equilátero, isósceles y escaleno; y en razón de sus ángulos el triángulo puede ser: rectángulo, oblicuo, obtusángulo, acutángulo y equiángulo. Para propósitos del presente estudio, este se enfocará solo en los triángulos equilátero, isósceles, escaleno, rectángulo, acutángulo y obtusángulo.

A continuación, se caracterizarán los triángulos relacionados a la investigación anteriormente mencionados.

- **Triángulo equilátero**

El triángulo equilátero es aquel que tienen sus tres lados de igual medida. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 11).

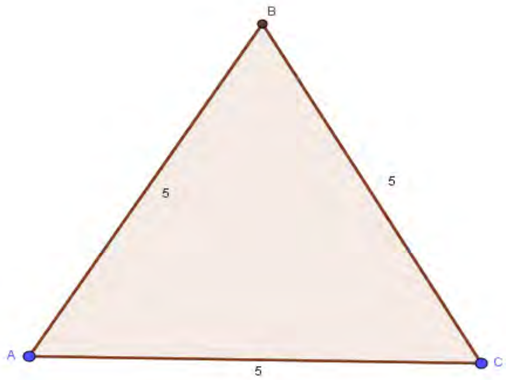


Figura 11: Triángulo equilátero
Fuente: Elaboración propia

- **Triángulo isósceles**

Un triángulo es isósceles si dos de sus tres lados son de igual medida. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 12).

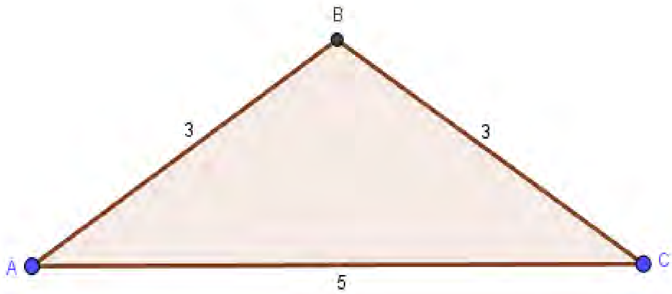


Figura 12: Triángulo isósceles
Fuente: Elaboración propia

- **Triángulo escaleno**

El triángulo escaleno es aquel que presenta lados de distinta medida. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 13).

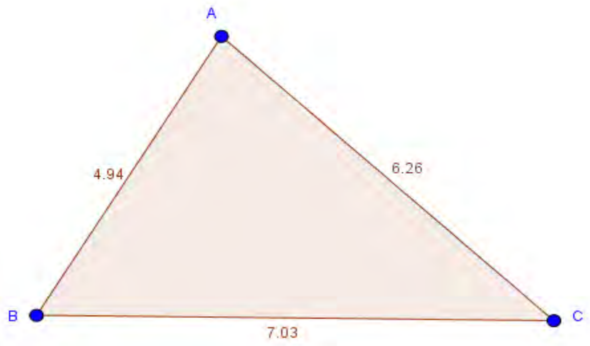


Figura 13: Triángulo escaleno
Fuente: Elaboración propia

- **Triángulo rectángulo**

El triángulo rectángulo, también conocido como recto u ortogonio, es aquel en el que uno de sus ángulos interiores (ángulos) es recto, es decir, mide 90°. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 14).

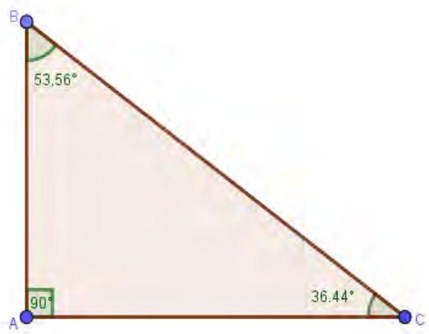


Figura 14: Triángulo rectángulo
Fuente: Elaboración propia

- **Triángulo acutángulo**

Se denomina triángulo acutángulo, agudo u oxigonio si los tres ángulos del triángulo son agudos, es decir, miden menos de 90°. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 15).

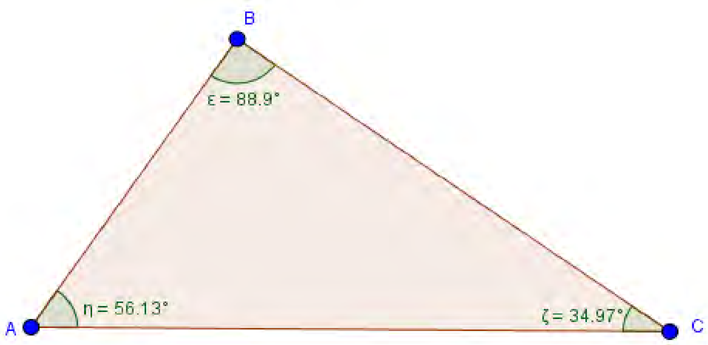


Figura 15: Triángulo acutángulo
Fuente: Elaboración propia

- **Triángulo obtusángulo**

Se denomina triángulo obtusángulo o ambligonio, si uno de los ángulos del triángulo es obtuso, es decir, miden más de 90°. A modo de ejemplo presentamos el triángulo ABC (ver figura 16).

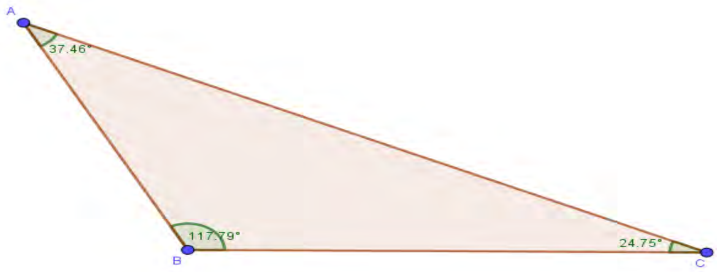


Figura 16: Triángulo obtusángulo
Fuente: Elaboración propia

Una vez revisada la bibliografía pertinente sobre los objetos geométricos de la presente investigación (cuadriláteros y triángulos), se pasará a exponer la implicancia de estos con documentos institucionales del Ministerio de Educación del Perú (Minedu): Programación Curricular de Educación Primaria y Cuaderno de Trabajo de Matemática (quinto grado de primaria).

1.3 Triángulos y cuadriláteros en el Programa Curricular de Educación Primaria del Ministerio de Educación del Perú

El Programa Curricular de Educación Primaria del Perú forma parte del Currículo Nacional (2016), el cual es marco orientador para la educación básica en cuanto señala los aprendizajes esperados en los estudiantes de acuerdo a las etapas de formación básica. Por su parte, el Programa Curricular de Educación Primaria tiene como objetivo "contribuir con orientaciones específicas que permitan concretar la propuesta pedagógica del Currículo Nacional" (Minedu, 2017). Asimismo, estas orientaciones son el marco para las competencias, capacidades y desempeños organizados en cada área curricular.

Según el Ministerio de Educación del Perú (2017), los desempeños de aprendizaje son aquellos aprendizajes esperados alineados a las competencias, las capacidades y los estándares de aprendizaje nacionales. A continuación, se detallan aquellos desempeños o estándares de aprendizaje que un estudiante de ciclo V debe lograr en relación al tema de triángulos y cuadriláteros, y respondiendo a los requerimientos del Minedu (p. 252, 2017):

- Resuelve problemas en los que modela características de objetos con propiedades de formas geométricas.
- Describe y clasifica cuadriláteros y triángulos basado en criterios propios.
- Describe y clasifica cuadriláteros y triángulos por sus elementos: vértices, lados, ángulos, y por sus propiedades; usando lenguaje geométrico.
- Combina instrumentos y recursos para construir formas geométricas.
- Plantea y explica sus afirmaciones sobre relaciones entre elementos de las formas geométricas.
- Deduce propiedades y las sustenta con argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
- Explica sus afirmaciones sobre relaciones entre elementos de las formas geométricas.

1.4 Triángulos y cuadriláteros en el Cuaderno de Trabajo de 5to de primaria del Ministerio de Educación del Perú

Uno de los documentos que promueve el desarrollo de habilidades matemáticas en base al trabajo con triángulos y cuadriláteros es el Cuaderno de Trabajo de Matemática de quinto grado de Primaria. Este cuaderno de trabajo busca complementar aquello que los estudiantes han desarrollado durante las clases, para lo cual desarrollan distintas actividades que los estudiantes pueden trabajarlas como tarea o en la clase. En las siguientes líneas se explicarán algunas actividades del cuaderno de trabajo relacionadas al tema de la presente investigación.

La primera actividad titulada “Trazamos polígonos regulares”, busca que los estudiantes reconozcan y repasen las características del triángulo equilátero a través de una actividad vivencial. Esta actividad consiste en armar una cometa con forma de tetraedro, para el cual los niños[3] deberán armar primero cuatro caras con forma de triángulos equiláteros. Esta tarea promueve habilidades de trazo, dibujo, ubicación y reflexión a partir de las cuales los niños forman el triángulo equilátero teniendo noción de: segmentos, puntos, ángulos y lados.

La segunda actividad, denominada “Descubrimos polígonos regulares”, tiene por objetivo que los estudiantes reconozcan y repasen los elementos de ciertas figuras geométricas

[3] En esta investigación se emplea la palabra niño para referirse de forma global a los niños y las niñas.

como el rombo y el triángulo. Para ello, los estudiantes deberán recorrer las calles y encontrar en las señales de tránsito las figuras geométricas que se les asemeje. Luego, deberán construir con papel las figuras geométricas encontradas, para después responder una serie de preguntas relacionadas a las características de dichas figuras. Con esta actividad, se busca que los estudiantes reconozcan y repasen la noción de: polígono, lados y ángulos.

Ambos documentos descritos anteriormente explican cómo el Minedu, ente principal de la educación peruana, abarca el tema de los polígonos, en especial los cuadriláteros y triángulos. Para ello, postula distintos estándares y desempeños que permiten conocer cuánto aprenden los niños en relación a un tema determinado. Asimismo, propone actividades que los docentes pueden utilizar respetando el grado de enseñanza y el tema elegido.

Capítulo II: Niveles de Razonamiento Geométrico de Van Hiele en la enseñanza de los triángulos y los cuadriláteros

A continuación, el siguiente capítulo se centrará en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele en la enseñanza de los triángulos y cuadriláteros. Por ello, se empezará por describir brevemente del Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele; después, se explicará cada nivel de razonamiento geométrico para luego describir los mismos en relación al trabajo con triángulos y cuadriláteros; asimismo, se especificarán las propiedades de los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y, finalmente, se detallará el proceso de evaluación de los niveles de Van Hiele.

2.1 Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele o la Teoría de Van Hiele se remonta al año 1957 en la Universidad de Utrecht, Holanda. Este modelo fue presentado por la pareja de esposos conformada por Dina van Hiele—Geldof y Pierre van Hiele. Según De Villiers (2012), Pierre van Hiele presentó una investigación basada en los problemas de aprendizaje de sus estudiantes en el área de geometría; mientras que Dina van Hiele se enfocó en estudiar un experimento de enseñanza para la geometría. A partir de estas dos investigaciones y las experiencias recogidas por ambos autores surgió el modelo de Van Hiele.

Durante su experiencia de enseñanza, los Van Hiele descubrieron las dificultades de los estudiantes por entender argumentos matemáticos formales conforme se iban incorporando nuevos elementos de aprendizaje. Dichos investigadores se percataron que, al igual que hoy en día, muchos alumnos no comprenden lo que estudian, debido, probablemente, a la ausencia de actividades que permitan a los estudiantes demostrar una afirmación o un ejercicio. Tal y como señala Corberán et al. (1994), "es difícil encontrar cursos de Primaria, ni siquiera del Ciclo Superior, en los que se realicen demostraciones más o menos rigurosas, aunque sean intuitivas, de las propiedades o resultados que se están estudiando" (p. 12).

Así pues, este modelo desarrolla dos grandes dimensiones: Los Niveles de razonamiento geométrico o Niveles de Van Hiele[4], y Las Fases para una secuencia didáctica de geometría (Gamboa y Vargas, 2013). Ambas dimensiones responden a la problemática encontrada por los Van Hiele descrita anteriormente. La primera, de acuerdo a Corberán et al. (1994), se enfoca en los procesos de aprendizaje que están inmersos en la Geometría, para los cuales se plantean diversos niveles de razonamiento geométrico. Por otro lado, la segunda dimensión surge como respuesta directa al "¿qué experiencias de aprendizajes se pueden desarrollar para promover habilidades de razonamiento geométrico?".

Respecto al Modelo de Van Hiele, Guillén (2004) coincide en que este abarca dos grandes aspectos:

> Está formado por dos componentes: el primero es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas; el segundo es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar el nivel de razonamiento superior al que tengan (las cinco "fases de aprendizaje"); básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. (p.105)

2.2 Descripción de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele

Los niveles de Van Hiele buscan explicar el desarrollo del razonamiento geométrico en los estudiantes. Según este modelo, los niveles por los que atraviesa el estudiante respecto a su razonamiento geométrico son cinco: Visualización, Análisis, Clasificación, Deducción y Rigor. Estos niveles permiten conocer el razonamiento y las ideas

[4] En adelante, referirse a "los Niveles de Van Hiele" será también referirse a "los niveles de razonamiento geométrico".

geométricas que los estudiantes manejan. Para Van de Walle (citado por Akkaya et al., 2009), los niveles de Van Hiele "define how they [students] think and what kind of geometric ideas they are busy with instead of how much knowledge they have" (p. 183).[5]

En relación a dicho modelo, Gamboa y Vargas (2013) señalan que "el modelo de Van Hiele ayuda a explicar cómo, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles" (p. 81). Cada uno de los niveles presentan características particulares, sin embargo, guardan relación uno del otro. De acuerdo a Gamboa y Vargas (2013), la relación que existe entre los niveles es tal que para que un estudiante domine su nivel y alcance el siguiente nivel deberá cumplir con ciertos aprendizajes del nivel anterior.

En la educación escolar primaria y secundaria se pueden distinguir los cuatro primeros niveles de razonamiento de Van Hiele. Estos son: Visualización; Análisis; Clasificación y Deducción. El quinto nivel, el nivel de "Rigor", demanda del estudiante una alta capacidad de abstracción. Para Gamboa y Vargas (2013) y Gutiérrez (1991), este último nivel solo se desarrolla en estudiantes de universidades con buena capacidad y comprensión de la geometría.

Así mismo, en su "Diseño para evaluar los niveles de Van Hiele", Gutiérrez y Jaime (1994) consideran diferentes "key thinking process" ("procesos de pensamiento clave") por cada nivel de razonamiento propuestos en el modelo de Van Hiele. Es decir, según estos autores, los niveles de razonamiento están integrados y caracterizados por distintos procesos de pensamiento clave, los cuales permiten evaluar cada nivel. Para Gutiérrez y Jaime (1994), la idea de que cada nivel contiene procesos de pensamiento clave no es nueva. Por el contrario, esta forma parte de las investigaciones que buscan evaluar los niveles de Van Hiele en los estudiantes.

> The view of considering the kind of reasoning of a Van Hiele level divided into several components is not new. De Villiers (1987) makes this distinction. Also Hoffer (1981) shows a characterization of 5 geometric skills to be considered for the assessment of each Van Hiele level. (Gutiérrez y Jaime, 1994, p. 42).[6]

---

[5] Definen cómo piensan y qué tipo de ideas geométricas mantienen los niños, no buscan expresar cuánto conocimiento tienen (Traducción textual).

[6] La idea de considerar el tipo de razonamiento de un nivel de Van Hiele dividido en varios componentes no es nuevo. De Villiers (1987) hace esta distinción. También Hoffer (1981) muestra una caracterización de 5 habilidades geométricas para ser consideradas para la evaluación de cada nivel de Van Hiele. (Traducción textual).

Para Gutiérrez y Jaime (1994) los procesos de pensamiento clave que caracterizan a los niveles de Van Hiele son: Identificación, Definición, Clasificación y Prueba; estos engloban habilidades matemáticas que serán descritas posteriormente.

Procesos de pensamiento claves en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele

Al igual que los niveles de razonamiento de Van Hiele, estos procesos claves se explican según el tema geométrico que se busca evaluar. Así, de acuerdo al tema de triángulos y cuadriláteros, el primer procedimiento se refiere a la "identificación" de la familia a la que pertenece cada objeto geométrico; el segundo procedimiento se enfoca en la "definición" de un concepto, el cual puede darse como una repetición o lectura de un concepto dado (read definition) o aquella que formula una definición para una clase de figuras geométricas (state definition); el tercer procedimiento apunta a la "clasificación" de objetos geométricos en diferentes familias; y el último proceso indica la "prueba" de propiedades o afirmaciones a manera de convencer a alguien sobre la veracidad de dichas afirmaciones.

Como señalan Gutiérrez y Jaime (1994), los niveles de razonamiento geométricos están integrados por procesos de pensamiento clave, y a su vez estos están conformados por distintas habilidades matemáticas como: identificar, comparar, demostrar, clasificar, entre otras. Sin embargo, no todos estos procedimientos y habilidades forman parte de todos los niveles. En la siguiente tabla (tabla 1), se explica el sentido de lo expuesto anteriormente, el check, "✓", significa que dicho proceso forma parte del nivel de razonamiento geométrico, mientras que el símbolo "x", significa que dicho proceso no forma parte del nivel de razonamiento geométrico.

Tabla 1: Procesos de pensamiento clave en cada nivel de razonamiento de Van Hiele[7]

	Identificación	**Definición**	**Clasificación**	**Prueba**
Nivel 1	✓	✓	✓	x
Nivel 2	✓	✓	✓	✓
Nivel 3	x	✓	✓	✓
Nivel 4	x	✓	x	✓

Fuente: Tomado y adaptado de Gutiérrez y Jaime (1994, p. 43).

[7] Key thinking process involved in each reasoning level of Van Hiele Gutiérrez y Jaime (1994).

De igual manera, Gutiérrez y Jaime (1994) indican que los procesos de pensamiento clave muestran ciertas diferencias entre sí de acuerdo al nivel de razonamiento de los estudiantes. Por ejemplo, el proceso de "identificación" presentará determinadas características estando en el nivel 1 y algunas variaciones estando en el nivel 3. A continuación, la siguiente tabla describe los procesos de pensamiento clave presentes en los niveles de razonamiento geométrico o niveles de Van Hiele.

Tabla 2: Descripción de los procesos claves en cada nivel de razonamiento de Van Hiele

	Identificación	**Definición**	**Clasificación**	**Prueba**
Nivel 1	Percepción global de las figuras en base a características físicas generales: aspecto, tamaño, posición.	Se formulan definiciones en base a los atributos generales de la figura. Algunas veces el nombre de la figura se convierte en su propia definición. Por ejemplo: "un triángulo es un triángulo".	Clasificación de las figuras considerando sus características físicas generales. No se acepta ninguna relación entre familias de figuras, ni figuras que pertenecen a la misma familia pero que tienen aspectos diferentes.	------------------
Nivel 2	Identificación de las figuras geométricas en base a sus propiedades matemáticas.	Formulación de definiciones empleando algunas propiedades con cierto grado de dificultad (omisión de propiedades).	Clasificación "exclusiva", basada en los conocimientos previos de los estudiantes.	Comprobación de propiedades con ayuda de uno o algunos ejemplos.
Nivel 3	-----------------	Comprensión y formulación de definiciones matemáticas incorporando algunas propiedades de las figuras. La redundancia de las características o propiedades es casi inexistente.	Clasificación de figuras geométricas a partir de sus propiedades matemáticas.	Comprobación de propiedades con ayuda algunos ejemplos y apoyado de explicaciones informales con base matemática.
Nivel 4	-----------------	Comprensión y formulación de definiciones matemáticas. Reconocimiento de la equivalencia de dos o más definiciones para una misma figura geométrica.	-----------------	Demostración de propiedades en base a pruebas matemáticas.

Fuente: Tomado y adaptado de Gutiérrez y Jaime (1994).

Descripción de las propiedades de los niveles de Van Hiele

En su descripción de los niveles de Van Hiele, Corberán et al. (1994) resaltan que estos niveles de razonamiento geométrico presentan características que explican el recorrido de los estudiantes a través de estos hasta demostrar la comprensión de aquello que están aprendiendo. Algunas de las características resaltadas por Corberán et al. son, primero, que los niveles guardan relación uno con el otro, es decir, la adquisición de un nivel no supone dejar de lado las habilidades de razonamiento conseguidas en el nivel precedente. Según los autores mencionados anteriormente, los estudiantes utilizan de manera implícita o inconsciente ciertas habilidades, las cuales cuando llegan a usarse de manera explícita o consciente en los próximos niveles significan el "paso al siguiente nivel". Corberán et al. presentan la siguiente tabla donde exponen los principales elementos explícitos e implícitos en los niveles de Van Hiele.

Tabla 3: Elementos implícitos y explícitos en los niveles de razonamiento de Van Hiele

	Elementos explícitos	**Elementos implícitos**
Nivel 1	Objetos geométricos	Propiedades de los objetos geométricos.
Nivel 2	Propiedades de los objetos geométricos.	Relaciones entre propiedades y/u objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/u objetos	Demostración formal de relaciones
Nivel 4	Demostración formal de relaciones.	______

Fuente: Tomado de Corberán et al. (1994).

Otra característica de los niveles de Van Hiele es que el paso de un nivel a otro nivel de razonamiento se realiza de forma continua. Es decir, conforme los estudiantes Van adquiriendo destrezas irán desenvolviéndose en situaciones sencillas hasta llegar a situaciones complejas. Tal y como señalan Corberán et al. (1994) "el aprendizaje de una nueva forma de razonar no se realiza de golpe. La experiencia en la realización de actividades y la resolución de problemas hace que poco a poco se vayan adquiriendo esas nuevas destrezas" (p. 23).

La última característica que menciona Corberán et al. respecto a los niveles de razonamiento geométrico es el lenguaje específico que se demuestra en cada nivel. Van Hiele (citado por Corberán et al., 1994) afirma que "dos personas que razonan en diferentes niveles y que, por lo tanto, interpretan los argumentos expuestos de formas diferentes, no podrán entenderse" (p. 23). El lenguaje que se use en cada nivel varía no solo por el vocabulario matemático que empleen los alumnos, sino también por la comprensión de términos matemáticos.

Al igual que las características antes mencionadas, autores como Gutiérrez y Jaime (1996), Gamboa y Vargas (2013) y Venegas (2015), sugieren que los niveles de razonamiento de Van Hiele se sostienen bajo las siguientes propiedades: Recursividad, Secuencialidad, Especificidad del lenguaje, Continuidad y Localidad. A continuación, se explicarán dichas propiedades.

- **Recursividad**

Esta propiedad hace referencia a cómo los objetos que se trabajan en un determinado nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente nivel. Ello, con el fin de hacer explícito aquello que los estudiantes mantenían implícito. Gamboa y Vargas (2013) señalan que "el éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior" (p.86).

- **Secuencialidad**

La secuencialidad en los niveles de Van Hiele "hace referencia a que para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores" (Gutiérrez y Jaime, 1996, p.93). Con ello se puede afirmar que cada nivel de razonamiento geométrico se apoya del nivel que lo antecede, y por lo tanto, como señala Vargas y Gamboa (2013), no se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada los niveles inferiores.

- **Especificidad del lenguaje**

En cuanto a la propiedad de Especificidad de Lenguaje, Gutiérrez y Jaime (1996) consideran que "cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje propio, entendiendo por ello no sólo las palabras o construcciones gramaticales empleadas, sino también el significado que se les da" (p.94). Respecto a ello, señala Venegas (2015) que el docente sostiene un lenguaje distinto al de los alumnos debido, probablemente, a los distintos niveles en los que se encuentren.

- **Continuidad**

La Continuidad es aquella propiedad que explica cómo el estudiante pasa de un nivel a otro, el cual, según Gamboa y Vargas (2013) puede durar entre cuatro y cinco años. Para

Gutiérrez y Jaime (1996), “el paso de un nivel al siguiente se produce de manera pausada y continua, con un periodo de transición durante el cual se entremezclan momentos de razonamiento de los dos niveles consecutivos” (p.94).

- **Localidad**

Gutiérrez y Jaime (1996) señalan que “por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría” (p.93). Es decir, como explica Gamboa y Vargas (2013), los estudiantes no se encuentran en el mismo nivel de razonamiento geométrico respecto a los campos de estudio de la geometría que se desarrolla en el curso, lo cual se debe, probablemente, a los conocimientos previos que se posean.

Las características y propiedades que presentan los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele demuestran el carácter riguroso de su estudio, el cual nos permite entender cómo razonan y cómo aprenden los niños. En relación al tema de la presente investigación, el estudio de los niveles de razonamiento respecto a los cuadriláteros y triángulos nos mostraran las distintas habilidades y características que niños de la misma edad poseen, lo cual a su vez nos permitirán entender cómo razonan respecto a los polígonos antes mencionados.

Evaluación de los niveles de Van Hiele

La evaluación de los niveles de Van Hiele tiene como propósito identificar el nivel o los niveles de razonamiento geométrico que presentan los estudiantes respecto a un determinado tema relacionado a la geometría, de manera que el/la docente se acerque al razonamiento de los niños haciendo pausa en cada respuesta brindada por ellos para revisarla y analizarla. Evaluar el razonamiento geométrico implica evaluar las razones, los argumentos, las explicaciones y las demostraciones que están detrás de las respuestas que los niños brinden en un test u otra prueba. Asimismo, al evaluar el nivel de razonamiento geométrico es importante valorar el razonamiento como un conjunto de procesos y no como un solo proceso. Para Aravena y Gutiérrez (2016):

> El razonamiento matemático se basa en realizar, según la tarea planteada, algunos de los procesos de reconocimiento y descripción, uso o formulación de definiciones, clasificación y demostración. Por tanto, la correcta evaluación del nivel de razonamiento de Van Hiele obliga a evaluar cómo razonan los estudiantes cuando realizan cada uno de dichos procesos (p. 110).

Según Gutiérrez y Jaime (1998), una prueba capaz de evaluar el nivel de razonamiento de Van Hiele debe poseer las siguientes características: a) Evaluar los procesos de pensamiento claves en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele-identificación, definición, clasificación y prueba (explicados en las páginas 23-25 de la presente investigación). b) Debe evaluar, por lo menos, los cuatro niveles de razonamiento, de tal manera que los niños tengan la oportunidad de responder preguntas de acuerdo a su capacidad de razonamiento. c) Debe dar la oportunidad a los estudiantes de justificar sus respuestas, de manera que el investigador pueda estudiar el nivel razonamiento que está detrás de los argumentos.

Debido a las características y propiedades de los niveles de Van Hiele, distintos investigadores, incluidos los Van Hiele, han propuesto diferentes instrumentos para evaluar el razonamiento geométrico. Gutiérrez y Jaime (1998), en su investigación sobre la evaluación de los niveles de Van Hiele, resaltan dos de los instrumentos más significativos propuestos a la fecha para dicha evaluación; el primero, es un modelo de evaluación basado en un test de elección múltiple; y el segundo, se centra más en una entrevista clínica, ambos tienen el objetivo de identificar el nivel de razonamiento geométrico en los niños. Gutiérrez y Jaime (1998) encontraron que:

> An early attempt was made by Usiskin (1982), who designed a paper and pencil multiple-choice test in which each item was intended to evaluate a specific level of reasoning. The answers were marked as right or wrong, and students were assigned to a van Hiele level depending on the number of correct answers at each particular level. […]Burger and Shaughnessy (1986) worked at the other end of the spectrum of possibilities by creating a clinical interview test based on a set of problems and semi-structured dialogues. For each problem, each student's answer was analyzed and a van Hiele level was assigned on the basis of the dominant level evidenced in the answer. Finally, from the levels assigned to a student's set of answers, an overall van Hiele level was assigned to the student. (p. 27) [8]

A partir de ello, Gutiérrez y Jaime (1998) proponen un modelo de test el cual permite evaluar los niveles de Van Hiele de tal manera que cumpla con los requisitos antes

[8] Usiskin (1982) realizó un intento temprano, diseñó una prueba de selección múltiple de papel y lápiz en la que cada ítem tenía la intención de evaluar un nivel específico de razonamiento. Las respuestas fueron marcadas como correctas o incorrectas, y los estudiantes fueron asignados a un nivel de van Hiele dependiendo de la cantidad de respuestas correctas en cada nivel particular. […] Burger y Shaughnessy (1986) trabajaron en el otro extremo del espectro de posibilidades al crear una prueba de entrevista clínica basada en un conjunto de problemas y diálogos semiestructurados. Para cada problema se analizó la respuesta de cada alumno y se asignó un nivel de van Hiele sobre la base del nivel dominante evidenciado en la respuesta. Finalmente, a partir de los niveles asignados al conjunto de respuestas de un alumno, se asignó un nivel general de van Hiele al alumno. […] (Traducción textual).

mencionados. Este modelo será explicado con más detalles en la segunda sección de la presente investigación. Es preciso mencionar que para evaluar los niveles de razonamiento geométrico también hay que tener muy presente su propiedad de "continuidad". Esta propiedad permite entender cómo a partir de las respuestas que se den en el test se puede establecer un grado de adquisición en los niveles de razonamiento que el alumno alcance.

De esta manera, al evaluar los niveles de razonamiento geométrico debe considerarse una continuidad y discretitud entre ellos, y no pensar determinar un nivel de razonamiento único. Jaime (1993) explica que la adquisición de los niveles se determina debido a la continuidad o discretitud en la transición de un nivel de razonamiento a otro. Asimismo, señala que "las investigaciones en las que se ha intentado identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes han encontrado con frecuencia comportamientos que rebaten la discretitud [o continuidad de los niveles]" (Jaime, 1993, p. 260).

Es por esto que, con el propósito de alcanzar los objetivos de la investigación, la evaluación de los niveles de Van Hiele se apoyará de la "metodología del cálculo de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento" y de la corrección matemática de las respuestas propuestas por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991). Estos autores (citados por Aravena y Gutiérrez, 2016),

> Proponen unos criterios de evaluación de los niveles de razonamiento basados en la consideración de la perfección en el uso de un determinado nivel de razonamiento y en la corrección matemática de las respuestas, valorada esta desde el punto de vista del nivel de razonamiento expresado. (p.117)

A continuación, se expondrán las ideas más importantes relacionadas a la metodología del cálculo de grados de adquisición y los tipos de respuestas que permitirán entender la evaluación de los niveles de Van Hiele.

- **Grados de adquisición**

De acuerdo a Jaime (1993), el cálculo de los grados de adquisición favorece a la evaluación del test de razonamiento geométrico, ya que "proporciona mayor información sobre la forma de razonamiento de los estudiantes y mayor precisión en su evaluación que la asignación de un simple y único nivel de razonamiento." (p.263). Este método busca que al asignar el nivel o los niveles de razonamiento geométrico en los estudiantes, se comprenda al razonamiento como un proceso continuo que se desarrolla progresivamente y que puede presentar distintas características de acuerdo a las actividades propuestas.

Al hablar de grados de adquisición se hace referencia al porcentaje o dominio de un nivel de razonamiento respecto a otro (en un mismo estudiante). La determinación del grado de adquisición va desde el "dominio nulo" hasta el "dominio completo". Jaime (1993) explica así los grados de adquisición que pueden encontrarse por cada nivel de Van Hiele:

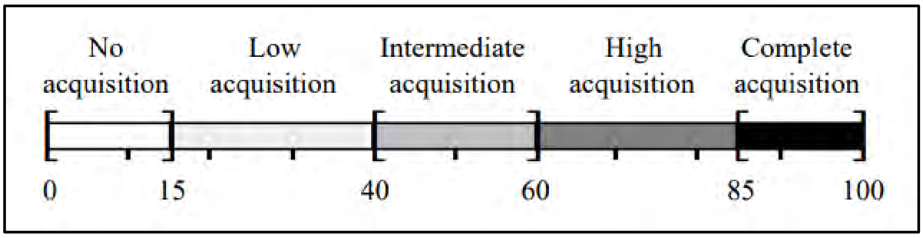
Tabla 4: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele

Grado de Adquisición	Descripción
Adquisición nula	No se emplean las características de un nivel de razonamiento determinado.
Adquisición baja	Empieza la conciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, sin embargo, es muy pobre el uso de los mismos.
Adquisición media	El empleo de las características y métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina el nivel, por lo que suele haber saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
Adquisición alta	Dominio de características y métodos del nivel. En ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento.
Adquisición alta y completa	Dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios del nivel de razonamiento.

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993).

Asimismo, Jaime (1993) y Gutiérrez (1991) sugieren una lectura cuantitativa de los grados de adquisición de los de Niveles de Van Hiele ($Gr_{(n)}$). Estos se asignan según el dominio de un determinado nivel de razonamiento, el cual es medido en porcentaje y va desde 0% a 100%. Tal y como se aprecia en la Figura 17 y en la Tabla 5, cada grado de adquisición está representado como una variación porcentual, la cual discurre entre dos números porcentuales.

Figura 17: Valores cuantitativos de los Grados de adquisición de los Niveles de Van Hiele



Fuente: Tomado de Gutiérrez (1991)

Tabla 5: Valoración porcentual de los grados de adquisición de los Niveles de Van Hiele

Grados de adquisición de los Niveles de Van Hiele	
Valor cuantitativo	**Valor cualitativo**
Adquisición nula	$0\% \leq Gr_{(n)} \leq 15\%$
Adquisición baja	$15\% \leq Gr_{(n)} \leq 40\%$
Adquisición media	$40\% \leq Gr_{(n)} \leq 60\%$
Adquisición alta	$60\% \leq Gr_{(n)} \leq 85\%$
Adquisición alta y completa	$85\% \leq Gr_{(n)} \leq 100\%$

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993).

Los grados de adquisición permiten la buena lectura y comprensión de las respuestas al test de razonamiento geométrico. Por ello, es importante conocer los tipos de respuestas que se pueden obtener en el test de razonamiento geométrico, las cuales permiten conocer con mayor exactitud el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele. A continuación, se explica cuáles son estos tipos de respuesta y cómo estas permiten determinar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele.

- **Tipos de respuesta**

Como se mencionó anteriormente, las respuestas a las actividades del test son la principal herramienta que nos permiten identificar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento. Por ello, Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) proponen una metodología de interpretación a las respuestas, las cuales se complementan con la corrección matemática que se hace a cada ejercicio. Estos autores sugieren unos “Tipos de respuesta” que tienen en cuenta la veracidad y la exactitud de cada respuesta, tomando como punto de referencia tanto la corrección matemática como la caracterización de los niveles de razonamiento. Jaime (1993) sostiene que “a partir del conjunto de respuestas a un test […], a cada estudiante se le pueden asignar los grados de adquisición que muestra de cada uno de los niveles de Van Hiele.” (p. 264).

A continuación, se describen los siete tipos de respuesta que desarrolla Jaime (1993) para comprender y saber identificar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento. Es preciso mencionar que los tipos de respuestas varían de acuerdo al tema geométrico a evaluar.

Tabla 6: Tipos de respuestas

Tipo de respuesta	Descripción
Tipo 1	Ítems sin respuestas o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento.
Tipo 2	Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas que no contestan directamente a la pregunta planteada pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento.
Tipo 3	Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Respuestas breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.
Tipo 4	Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Estas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.
Tipo 5	Respuestas bastantes completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado.
Tipo 6	Respuestas bastantes completas y matemáticamente correctas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. No obstante, no llegan a resolver el problema totalmente.
Tipo 7	Respuestas matemáticamente completas y correctas, que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993).

En la tabla 7 se aprecia la correlación entre la "corrección matemática" y el "uso del nivel de Van Hiele" por cada tipo de respuesta. Así, por ejemplo, una respuesta tipo 2 significa que es matemáticamente incorrecta y que por lo que se observa el nivel de razonamiento es bajo; mientras que una respuesta tipo 5 puede ser matemáticamente incorrecta, sin embargo, se observa un nivel de razonamiento alto.

Tabla 7: Características de los tipos de respuestas

Uso del Nivel de V.H.		Corrección Matemática	
		Incorrecta	Correcta
	Alto	5	6, 7
	Medio	4	
	Bajo	2	3

Fuente: Tomado de Jaime (1993).

Asimismo, una vez determinado el tipo de respuesta al test de razonamiento, el siguiente paso para asignar el grado de adquisición es la ponderación de dichas respuestas. Jaime

(1993) propone una ponderación en porcentaje que va del 0% al 100% y que responde a cada tipo de pregunta. En la siguiente tabla se aprecia lo anteriormente mencionado:

Tabla 8: Ponderación de los diferentes tipos de respuestas

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Fuente: Tomado de Jaime (1993)

Para propósitos del presente estudio, en los siguientes capítulos se presentará la corrección matemática y los tipos de respuestas que se espera alcancen los estudiantes a partir del test de razonamiento aplicado. Esto permitirá un mejor análisis y determinación del grado de adquisición de los niveles de Van Hiele.

2.3 Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele respecto a los cuadriláteros y triángulos

A continuación, se caracterizan los niveles de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y triángulos. Para ello, se toma de referencia a Corberán et al. (1994), Gutiérrez y Jaime (1996) y otros autores que se irán citando. Asimismo, es preciso tener en cuenta que se describirán los niveles del 1 al 4, ya que son aquellos que, según Gamboa y Vargas (2013), los estudiantes de colegio pueden alcanzar.

Nivel 1: Visualización

El nivel 1 denominado con el nombre de "Nivel de visualización" o "Nivel de reconocimiento", es aquel en el que los objetos se perciben por su totalidad o como unidades (Guillén, 2004). Los estudiantes en este nivel perciben las figuras geométricas "centrando sus descripciones en el aspecto físico de las figuras […]. No son capaces de generalizar características de una figura a otra" (Aravena y Gutiérrez, 2016, p.110). Así, en este nivel no se reconocen explícitamente los elementos y propiedades de los objetos, como señala Lobo (2004), un niño en este nivel puede reconocer la imagen de un rectángulo mas no es consciente de las propiedades de esta figura geométrica plana.

Respecto a los cuadriláteros y triángulos, en el nivel 1 los estudiantes presentan las siguientes características (Corberán et al., 1994; Jaime, A.; Gutiérrez, A., 1994; Aravena, M.; Gutiérrez, A., 2016):

- Compara triángulos y cuadriláteros usando aspectos o características físicas globales de cada uno de estos polígonos.
- Caracteriza los cuadriláteros y triángulos a partir de figuras dadas.
- Emplea vocabulario geométrico relacionado a los cuadriláteros o triángulos.
- Identifica triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.
- A partir de una figura dada, reproduce en papel algunos cuadriláteros y triángulos.
- Clasifica cuadriláteros y triángulos en base a su apariencia global: “se parece a ...”, “tiene la forma de ...”, “es como……...”.

Nivel 2: Análisis

En el nivel 2 o “nivel de análisis”, los conceptos de los cuadriláteros y triángulos se entienden a través de los elementos que los componen, identificando y generalizando propiedades de los mismos, las cuales se utilizan independientemente sin establecer relaciones entre ellas. Gutiérrez y Jaime (citados por Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014) consideran que el niño en este nivel:

> Percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas. Puede describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas. (p. 148).

En relación a los cuadriláteros y triángulos, en el nivel 2 los estudiantes presentan las siguientes características (Corberán et al., 1994; Jaime, A.; Gutiérrez, A., 1994; Aravena, M.; Gutiérrez, A., 2016):

- Reconoce que los cuadriláteros y triángulos están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan.
- Describe las características de cuadriláteros y triángulos, utilizando vocabulario geométrico apropiado (por ejemplo: “lados opuestos”, “los ángulos consecutivos suman 180°”, entre otros).
- Definen los cuadriláteros y triángulos a partir de las propiedades que caracterizan a cada uno de estos polígonos.
- Clasifica cuadriláteros y triángulos, relacionando algunas propiedades: lados y ángulos.
- Justifica la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros.

Nivel 3: Clasificación

Para Gutiérrez y Jaime (citados por Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014), en el nivel 3 o "Nivel de Clasificación", se realizan clasificaciones lógicas de los objetos, descubriendo nuevas propiedades en base a relaciones o propiedades ya conocidas y por medio del razonamiento informal. Así mismo, se comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico en una forma aislada pero no se comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración. Por ejemplo, según Lobo (2004), el estudiante podrá entender por qué todo cuadrado es un rectángulo y por qué no todo rectángulo es cuadrado, pero no podrá explicar la congruencia de las diagonales de un rectángulo.

Sobre los cuadriláteros y triángulos, en el nivel 3 los estudiantes presentan las siguientes características (Corberán et al., 1994; Jaime, A.; Gutiérrez, A., 1994; Aravena, M.; Gutiérrez, A., 2016):

- Construye definiciones propias de los cuadriláteros y triángulos usando sus propiedades de manera correcta.
- Clasifica diferentes familias de cuadriláteros y triángulos a partir de sus propiedades: lados, ángulos y diagonales.
- Justifica la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros, haciendo uso correcto de definiciones y propiedades.
- No construyen demostraciones matemáticas relacionadas a los cuadriláteros y triángulos.
- Utilizan las demostraciones físicas de los cuadriláteros y triángulos para verificar su demostración más que como un medio para realizarlas.
- Realizan demostraciones haciendo explícitas las definiciones.
- Aceptan formas equivalentes de una definición relacionada a los cuadriláteros y triángulos.

Nivel 4: Deducción

El nivel 4 o "Nivel de Deducción", los estudiantes comprenden la estructura axiomática de la matemática y se emplea el razonamiento lógico formal para construir demostraciones, comprendiendo la posibilidad de obtener el mismo resultado siguiendo distintas premisas. Sin embargo, los estudiantes en este nivel aún no han adquirido un conocimiento global de los sistemas axiomáticos, por lo cual no se comprende la necesidad del razonamiento riguroso (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Dado a que la presente investigación está dirigida a estudiantes de quinto grado de nivel primario, solamente se considerarán los niveles de razonamiento geométrico del 1 al 3 como aquellos en los que puede estar la muestra de este estudio. Para ello, se ha revisado los estándares de aprendizaje que propone el Ministerio de Educación e investigaciones encontradas relacionadas al tema.

2.4. Descripción de las fases de aprendizaje del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele para los triángulos y cuadriláteros.

Uno de los resultados de la investigación realizada por Akkaya et al. (2009), señala que la enseñanza de la geometría basada en el modelo de Van Hiele es más efectiva que la enseñanza de contenido geométrico tradicional, por lo cual dichos autores sugieren que esta forme parte de la planificación de las sesiones de clase. De igual manera, Gutiérrez y Jaime (2012) consideran que la enseñanza de la geometría en la educación básica regular debe basarse en metodologías que promuevan actividades de exploración y descubrimiento por los estudiantes. De esta manera, las clases de geometría con dichas metodologías se caracterizarían por ser activas y participantes, las cuales a su vez permitirán a los niños descubrir, comprender y aprender conceptos, propiedades y relaciones geométricas.

Las fases del modelo de Van Hiele constituyen una propuesta metodológica que permite a los docentes organizar los distintos contenidos que un tema geométrico puede abarcar. Sobre qué significa el aprendizaje para Van Hiele, Gutiérrez y Jaime (2012) consideran que:

> Van Hiele caracteriza el aprendizaje como un resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas. No obstante, esas experiencias, aunque existen y no deben despreciarse, generalmente no son suficientes para producir un desarrollo de la capacidad de razonamiento completo y rápido, por lo que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales, bien organizadas para que sean lo más útiles posible (p. 56-57).

A continuación, se describirán las cinco fases de la secuencia didáctica del modelo de Van Hiele respecto a la enseñanza de cuadriláteros y triángulos. Para ello, se tomará de referencia los aportes de Corberán et al. (1994) y Lobo (2004).

Fase 1: Información

También conocida como “la fase de toma de contacto” (Corberán et al., 1994), es aquella en la que al iniciar el estudio de un tema, el profesor informa sobre el campo de investigación a trabajar, los problemas a resolver e indaga los conocimientos previos y el nivel de razonamiento del grupo.

Fase 2: Orientación dirigida

Esta se caracteriza porque los estudiantes exploran el campo de investigación mediante una serie de actividades dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y las propiedades fundamentales del área de estudio. Para Corberán et al. (1994), el objetivo de esta fase es que los estudiantes se familiaricen con métodos de razonamiento del nivel superior de Van Hiele que se espera alcance.

Fase 3: Explicitación

Corberán et al. (1994) indican que “en esta fase los estudiantes intercambian sus experiencias, comentan lo que han observado, explican cómo han resuelto las actividades, etc., todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo” (p. 27). En otras palabras, esta fase se basa en el diálogo entre los estudiantes con intervenciones del profesor cuando sea necesario, a fin de conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos dentro de las características del nivel de razonamiento respectivo.

Fase 4: Orientación libre

En esta fase, los estudiantes aplican sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio, para ello se asignan tareas que preferiblemente lleven a diferentes soluciones. Corberán et al. (1994) consideran que “los problemas que hay que plantear en esta fase no tienen nada que ver con ejercicios de "aplicación" (...). Por el contrario, en estos problemas deben intervenir varios conceptos o propiedades del campo de estudio” (p. 27), a partir de los cuales los estudiantes deberán usar y combinar de manera que lleguen a la solución de un problema.

Fase 5: Integración

En esta fase el profesor resume el campo explorado, con la finalidad de lograr que los estudiantes integren en su red de conocimientos las habilidades de razonamiento adquiridas. "El trabajo que se realiza en esta fase, y las actividades que se planteen, no deben tener como objetivo producir conocimientos nuevos, sino que deben ayudar a organizar los que ya se han aprendido" (Corberán et al., 1994, p. 28).

Si bien es cierto, en la presente investigación no se desarrollarán actividades para las fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele, se considera necesario dar algunos alcances de las mismas para entender el cómo se promueve trabajar bajo este modelo.

II. PARTE: INVESTIGACIÓN

Capítulo I: Diseño de la investigación

1.1 Objetivos de la investigación

El presente estudio tiene como objetivo general "Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros en los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana". Este objetivo busca responder a la siguiente pregunta de investigación: "¿Cuál es el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana?".

De igual manera, como objetivos específicos, los cuales promuevan un mejor análisis de estudio, se plantean los siguientes: "Describir los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros que se espera alcancen los estudiantes de quinto grado de primaria" e "Identificar el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros en estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana".

1.2 Metodología de la investigación

Diaz, Suárez y Flores (2016), en su Guía de Investigación en Educación, señalan que el método de investigación "es el procedimiento o camino regular, explícito, repetible, racional, ordenado y objetivo que selecciona el investigador para responder al problema de investigación, [y] alcanzar sus objetivos.” (p. 28). A partir de ello, se entiende como método de investigación aquella secuencia de pasos por las que el investigador atraviesa con el fin de alcanzar el propósito de su estudio.

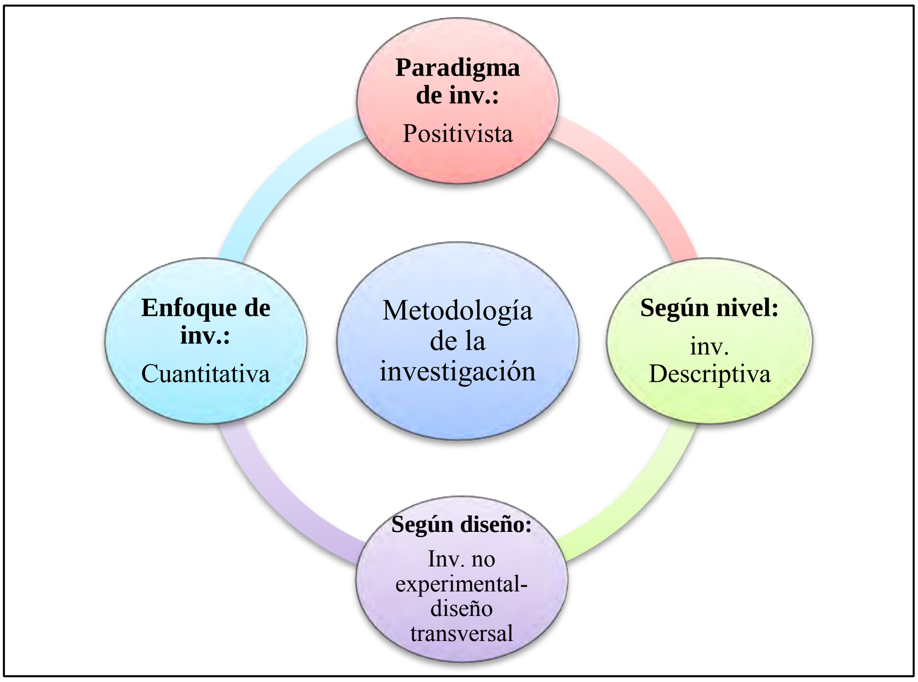
Para comenzar a explicar este procedimiento, se empezará por señalar el paradigma o enfoque de la presente investigación. Este estudio se desarrolla bajo el paradigma positivista, puesto que trabaja baja una metodología rigurosa que incluye técnicas descriptivas con diseños cuasi-experimentales (Suárez, 2017). La técnica descriptiva que se usará será un test que permita determinar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. Con la aplicación del test se podrá conocer el grado de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico de cada niño.

Respecto al tipo de investigación, como precisa Arias (2012), existen muchos modelos y diversas clasificaciones que hablan de tipología. Se puede hacer referencia al tipo de investigación según su nivel, su diseño y su propósito. En primer lugar, según su nivel, el presente estudio es descriptivo; es decir, se centra en caracterizar a un individuo, un grupo, una situación, un evento o cualquier fenómeno con el objetivo de establecer su comportamiento, estructura o rasgos particulares (Arias, 2012). Bajo un nivel de investigación descriptiva, la presente investigación se enfoca en identificar y describir los niveles de razonamiento de Van Hiele en estudiantes de quinto grado de primaria. De igual manera, al ser de nivel descriptivo, el estudio no busca ahondar en los factores que podrían explicar los niveles en los que se encuentran los estudiantes.

En cuanto a la investigación según su diseño, el presente estudio es “no experimental de diseño transversal”. Es una investigación no experimental, ya que no hay manipulación intencional de las variables o categorías de estudio ni asignación al azar de la muestra (Fernández et al. 2010). Respecto a este tipo de investigación, Mertens (citada por Fernández, Hernández y Baptista, 2010) considera que la investigación no experimental “es apropiada para variables que no pueden o deben ser manipuladas o resulta complicado hacerlo” (p. 150), afirmación que concuerda con la recogida de información de la presente investigación. Asimismo, es de diseño transversal, puesto que se “recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado” (Fernández et al. 2010, p. 151).

Por último, de acuerdo al enfoque de investigación, el presente estudio es de corte cuantitativo. Para Suárez (2017), Fernández, Hernández y Baptista (2010), el enfoque cuantitativo, busca predecir, controlar y confirmar hipótesis, apoyándose de estudios previos y de la medida de variables, así con este enfoque se construirán creencias propias para un grupo determinado de personas. De igual manera, la investigación cuantitativa se basa en la estadística inferencial, la cual según Fernández, Hernández y Baptista (2010), permitirá deducir propiedades de una población a partir de una muestra. No obstante, la muestra del presente estudio es no probabilística, por lo cual no podrá hacerse inferencias o generalizaciones. Para Schmelkes (2014), la presente investigación es de enfoque cuantitativo porque es rigurosa, busca interpretar aquello que mide con el instrumento y presentará conclusiones validadas a partir de la validación de los instrumentos.

Gráfico 1: Metodología de la investigación



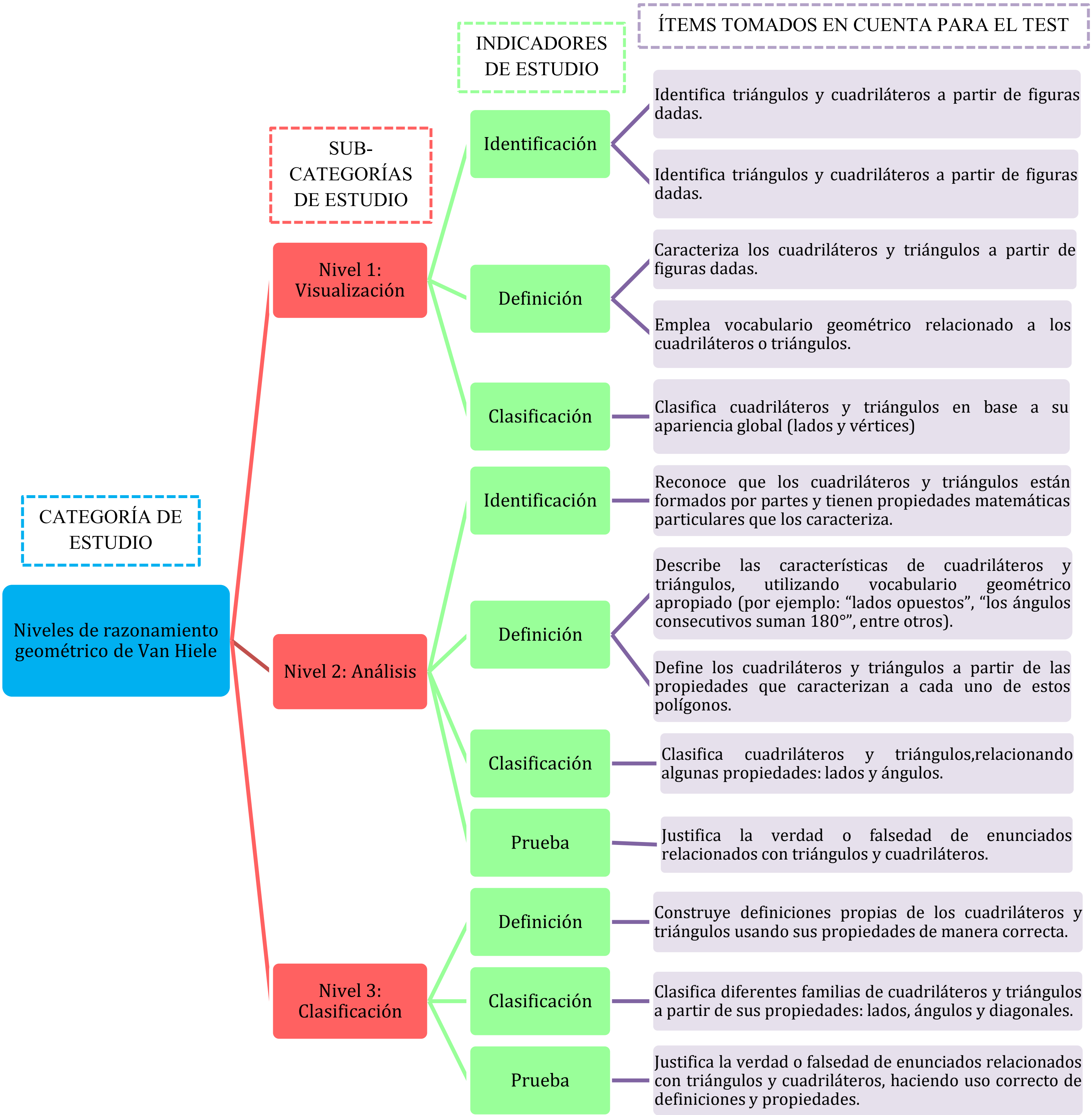
Fuente: Elaboración propia

1.3 Categoría, subcategoría e indicadores de la investigación

La categoría de estudio a través de la cual se plantea el análisis de la presente investigación está relacionada a los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele. Las sub-categorías de análisis que se extraen a partir de la categoría y los objetivos específicos permiten conocer a detalle cada nivel de razonamiento geométrico, mientras que los indicadores de análisis permiten entender los procesos de razonamiento.

El gráfico que se presenta a continuación muestra la relación entre la categoría de estudio, las sub-categorías e indicadores de análisis, así como los ítems que se incorporan en el instrumento de investigación.

Gráfico 2: Distribución de categoría, sub-categoría e indicadores de análisis



Fuente: Elaboración propia

En las siguientes líneas se explicará a detalle la categoría y sus respectivas sub-categorías junto a los indicadores.

Categoría: Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele

Esta categoría hace referencia al razonamiento geométrico e ideas geométricas que presentan los estudiantes respecto al tema de cuadriláteros y triángulos. Se evidencia a través del test de razonamiento geométrico con el cual se podrá conocer el razonamiento de los estudiantes respecto a los problemas planteados.

Subcategorías

- **Nivel 1-Visualización:** hace referencia a cómo los alumnos perciben las figuras geométricas, la cual se da por su totalidad, describiendo así a la figura en base a características globales, dejando de lado a los elementos y propiedades de los objetos. Se evidencia cuando los alumnos describen las figuras geométricas de forma global, dejando implícito sus elementos y propiedades.

  Los indicadores seleccionados para esta categoría, explicados en la siguiente sección, son los siguientes:
    - Identificación
    - Definición
    - Clasificación
- **Nivel 2-Análisis:** esta sub-categoría hace referencia al entendimiento de las figuras geométricas por los elementos que las componen. Aunque no se relacionan unas figuras con otros, los estudiantes logran reconocer algunas propiedades. Se evidencia cuando los estudiantes describen las figuras geométricas apoyándose de sus elementos y algunas propiedades.

  Los indicadores seleccionados para esta categoría, explicados en la siguiente sección, son los siguientes:
    - Identificación
    - Definición
    - Clasificación
    - Prueba
- **Nivel 3-Clasificación:** hace referencia a la comprensión de las figuras a partir de su clasificación de acuerdo a las propiedades por medio de razonamiento informal. Sin embargo, los estudiantes no pueden demostrar las propiedades de las figuras

geométricas. Se evidencia cuando los estudiantes organizan familias de figuras según las características y propiedades que estas comparten.

Los indicadores seleccionados para esta categoría, explicados en la siguiente sección, son los siguientes:

- Definición
- Clasificación
- Prueba

Indicadores

A continuación se exponen los indicadores de la presente investigación, estos se desprenden de cada sub-categoría de análisis y permiten comprender mejor los niveles de razonamiento geométrico.

- **Identificación:** hace referencia a la identificación de la familia a la que pertenece un objeto geométrico. Se evidencia cuando los estudiantes describen los rasgos o las características de las distintas figuras geométricas.
- **Definición:** hace referencia a definición de un concepto, el cual puede darse como una repetición o lectura de un concepto dado o aquella que formula una definición para una clase de figuras geométricas. Se evidencia cuando los estudiantes definen las figuras geométricas empleando el lenguaje aprendido por ellos.
- **Clasificación:** hace referencia a la clasificación de objetos geométricos en diferentes familias. Se evidencia cuando los alumnos determinan agrupaciones de figuras geométricas de acuerdo a sus características o propiedades.
- **Prueba:** hace referencia a la prueba de propiedades o afirmaciones a manera de convencer a alguien sobre la veracidad de dichas afirmaciones. Se evidencia cuando los estudiantes emplean demostraciones a manera de comprobar las propiedades de las figuras geométricas.

1.4 Población, muestra e informantes

Arias (2012) señala que la población "es un conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación. Ésta queda delimitada por el problema y por los objetivos del estudio." (p.81). Entonces, se entiende por población al grupo de interés referente para que el investigador construya las conclusiones de la investigación. Así, la población de la presente investigación la conforman los estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana, Perú.

De igual manera, a partir de la población se extrae la muestra de estudio, la cual, según Hernández, Fernández y Baptista (2010) es un “subgrupo de la población del cual se recolectan los datos y debe ser representativo de ésta.” (p.175). Respecto a la muestra, Arias (2012) considera que, de acuerdo a las características y objetivos de la investigación, esta puede ser: probabilística y no probabilística. Hernández, Fernández y Baptista (2010) sostienen que en las muestras probabilísticas “todos los elementos de la población tienen la misma posibilidad de ser escogidos” (p. 176), ya sea a través de un muestreo aleatorio o mecánico; mientras en las muestras no probabilísticas “la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o de quien hace la muestra.” (p. 176). A partir de ello, esta investigación presenta una muestra intencionada de cuatro (4) estudiantes con alto rendimiento académico ubicados en quinto grado de primaria de institución educativa particular de Lima Metropolitana.

Esta muestra es de tipo no probabilística o dirigida, lo que significa que ha sido seleccionada de acuerdo a los intereses de la investigación. La muestra la conforman 4 estudiantes de una IE particular de Lima Metropolitana, los cuales tienen como característica en común su alto rendimiento académico en el curso de matemática. La escuela de estos alumnos trabaja bajo el sistema de “sets”, el cual consiste en agrupar a los niños de acuerdo al rendimiento académico en el curso de matemática. Los autores, Hernández, Fernández y Baptista (2010), señalan que la ventaja de una muestra no probabilística en una investigación cuantitativa “es su utilidad para determinado diseño de estudio que requiere no tanto una “representatividad” de elementos de una población, sino una cuidadosa y controlada elección de casos con ciertas características". Así también, los informantes que participan de la recogida de la información desarrollando el test de razonamiento geométrico serán los mismos que conforman la muestra de la investigación.

1.5 Técnica e instrumento de la investigación

Técnica e instrumento para la recogida de información

De acuerdo con el objetivo de la presente investigación, “Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y triángulos en los estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana”, la técnica seleccionada para la recogida de información es la prueba. Fernández et al. (2010) consideran que las pruebas o inventarios miden variables específicas, como la inteligencia, la personalidad, el razonamiento matemático, el tipo de cultura organizacional, el estrés preoperatorio, entre otros. En particular, la prueba en esta investigación permitirá conocer el grado de adquisición del nivel o niveles de razonamiento geométrico que los estudiantes alcancen.

Asimismo, esta técnica tendrá como instrumento una prueba abierta, la misma parte del “Modelo de test para evaluar los niveles de van Hiele” propuesta por Adela Jaime y Ángel Gutiérrez (1994). De acuerdo con estos autores, para medir el nivel de razonamiento geométrico hay que tener presente los niveles de Van Hiele, de manera que en la prueba abierta se propongan actividades o preguntas que den la oportunidad a los estudiantes de explicar y argumentar las razones de sus respuestas matemáticas. Jaime y Gutiérrez (1994) explican sobre su propuesta que:

> (...) El marco se basa en la consideración de los diferentes procesos clave involucrados en cada nivel de pensamiento y el uso de preguntas abiertas. Presentamos una propuesta de examen en papel y lápiz con una estructura que se aproxima a las entrevistas clínicas, con el fin de obtener la mayor cantidad de información posible de las respuestas escritas de los estudiantes (Gutiérrez y Jaime, 1994, p. 41).

A partir de dicha propuesta se elaboró el primer borrador del test para la presente investigación. Este pasó por revisión de parte de la asesora asignada por la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú y luego, por la observación del investigador Ángel Gutiérrez, co-creador de la propuesta de test para evaluar los niveles de Van hiele y uno de los principales exponentes relacionados al modelo de Van Hiele. Tanto la asesora como el experto antes mencionados revisaron la coherencia de las preguntas con la matriz investigación que contenía los indicadores de cada nivel de Van Hiele seleccionados en el presente estudio. La validación con el experto, Ángel Gutiérrez, se dio por medio de comunicación vía correo electrónico al departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia.

El test de razonamiento geométrico, instrumento del presente estudio, está organizado en 4 actividades, las cuales contienen a su vez entre 1 y 4 ejercicios relacionados al tema de cuadriláteros y triángulos (ver anexo 1). Cada ejercicio responde a un determinado nivel de razonamiento geométrico, por lo cual cumple con un objetivo que se expresa como indicador en la matriz de investigación (anexo 2). En la siguiente la tabla se presenta el objetivo y el nivel designado por cada ejercicio de las cuatro actividades del test de razonamiento geométrico.

Tabla 8: Descripción del test de razonamiento geométrico a partir del Modelo de Van Hiele

Niveles	Actividad-ejercicio	Objetivo
Nivel 1: Visualización	I.1	Identificar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.
	I.2	Identificar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.
		Clasificar triángulos y cuadriláteros en base a sus apariencias globales (lados y vértices)
	II.1	Caracterizar los triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.
		Emplear vocabulario geométrico relacionado a los triángulos o cuadriláteros.
Nivel 2: Análisis	I.2	Clasificar triángulos y cuadriláteros en base a sus apariencias globales (lados y vértices).
	II.2	Describir las características de triángulos y cuadriláteros utilizando vocabulario geométrico apropiado (por ejemplo: “lados opuestos”, “los ángulos consecutivos suman 180°”, entre otros).
	II.3	Definir los triángulos y cuadriláteros a partir de las propiedades que caracterizan a cada uno de estos polígonos.
	III.1	Reconocer que los triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan.
	IV.1	Justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros.
Nivel 3: Clasificación	IV.1	Clasificar diferentes familias de triángulos y cuadriláteros a partir de sus propiedades: lados, vértices y ángulos.
		Justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros haciendo uso correcto de definiciones y propiedades.
	IV.2	Construir definiciones propias de los cuadriláteros usando sus propiedades de manera correcta.

Fuente: Tomado y adaptado de Maguiña (2013)

Técnica para la organización, procesamiento y análisis de datos

Gutiérrez y Jaime (1994) sugieren para el análisis de los resultados de la evaluación de los niveles de Van Hiele el uso de los "Grado de Adquisición". Esta denominación permite interpretar la adquisición de un nivel de razonamiento de Van Hiele, así como obtener más información sobre el razonamiento de los alumnos. Como se explicó en la sección “Evaluación de los niveles de Van Hiele”, Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) describen los criterios de evaluación en base a la perfección del uso de un determinado nivel de razonamiento y en la corrección matemática de las respuestas (revisar capítulo 2.5 de la primera sección de la investigación).

Tomando de referencia los procesos anteriormente mencionados, el procedimiento a llevarse a cabo en la etapa del análisis pasará por las siguientes etapas: aplicar el test a la muestra no probabilística; realizar el vaciado de la información; explorar la información recabada; clasificar las respuestas de acuerdo al tipo de respuestas y de acuerdo al nivel de Van Hiele; analizar las respuestas de acuerdo al tipo de respuestas y de acuerdo al nivel de Van Hiele; realizar análisis adicionales; asignar grados de adquisición de acuerdo a los niveles destacados; y finalmente, preparar los resultados obtenidos.

1.6 Importancia del estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele

Vargas y Gamboa (2013) sostienen que la geometría es una ciencia que forma parte de nuestro día a día, y que por tal, esta ciencia es de gran importancia para la humanidad y su desarrollo. Estos autores señalan que la geometría “se relaciona, de manera directa o indirecta, con múltiples actividades que se realizan ya sea para el progreso de la sociedad, el estudio o para la recreación” (p. 75). Asimismo, la importancia de la geometría radica en que por más simple que sea una actividad propuesta, esta permite desarrollar destrezas o habilidades mentales que exploran el razonamiento geométrico de los estudiantes o las personas en general (Vargas y Gambo, 2013).

A partir de lo mencionado anteriormente, es importante que los principios que direccionan la enseñanza de la geometría promuevan el desarrollo de habilidades visuales, interpretativas, de clasificación, de lenguaje, entre otras como parte del razonamiento geométrico. Siguiendo con dicha visión de la geometría, surge el Modelo de Van Hiele, objeto de estudio de la presente investigación, el cual trabaja dos grandes dimensiones: los Niveles de Van Hiele y las Fases de Aprendizaje. En particular, la primera dimensión tiene una orientación descriptiva, ya que permiten conocer las diferentes formas razonamiento en lo estudiantes. Dicha orientación contribuye con el objetivo anteriormente explicado de la geometría, permitiendo así conocer las habilidades de razonamiento de los estudiantes.

La importancia del estudio de los Niveles de razonamiento de Van Hiele parte por reconocer la importancia de la geometría como una ciencia que promueve el desarrollo de habilidades y destrezas de razonamiento geométrico. Es por eso que en la presente investigación, el test de razonamiento que se aplique comunicará el nivel de razonamiento geométrico o nivel de razonamiento de Van Hiele que presenten los estudiantes. Al conocer los niveles de Van Hiele se hará visible el desarrollo del pensamiento geométrico de niños y niñas. Al hacerse visible tal pensamiento, el docente no solo sabrá y respetará el proceso de aprendizaje de los estudiantes, sino que también tendrá que responder a las necesidades directas de los estudiantes a partir de actividades contextualizadas.

Gamboa y Vargas (2013) señalan que los niveles de razonamiento geométrico deben alcanzarse consecutivamente de forma que se respete el proceso de aprendizaje de los alumnos. Es decir, una vez conocido los niveles de razonamiento de los estudiantes, los profesores tomarán esto como diagnóstico o conocimiento previo para plantear el trabajo con los estudiantes. Asimismo, De Villiers (2010) señala que gracias a las investigaciones realizadas por los estudiosos Van Hiele se conoció que uno de los motivos más comunes del fracaso del plan de estudio de la geometría se debe a que su enseñanza se propone un nivel o niveles superiores al nivel de razonamiento que presentan los estudiantes. De igual manera, en su investigación relacionada a los niveles de Van Hiele, de Souza y Ferrentini (2010) consideran que cada estudiante razona a partir de distintos niveles, por lo que en las clases uno de los problemas de aprendizaje se debe a la falta de interés de los docentes por conocer cómo piensan sus estudiantes o en qué nivel de razonamiento se encuentran.

Capítulo II: Análisis e interpretación de los resultados

2.1 Aplicación del test de razonamiento geométrico

El test de razonamiento geométrico cuenta con cuatro actividades, las cuales presentan un número determinado de ejercicios (entre 1 y 4). La prueba está programada para desarrollarse en una hora (60 minutos) y cada ejercicio tiene por objetivo medir el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele. En la siguiente tabla se presenta, a manera de resumen, las actividades/ejercicios junto a los niveles que los estudiantes pueden alcanzar al desarrollar el test de razonamiento geométrico.

Tabla 9: Distribución de actividades de la prueba

Actividad/ejercicio	Niveles		
	1: Visualización	2: Análisis	3: Clasificación
I.1	✓		
I.2	✓	✓	
II.1	✓		
II.2		✓	
II.3		✓	
III.1		✓	
IV.1		✓	✓
IV.2			✓

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Como se mencionó anteriormente, la muestra del presente estudio la conforman cuatro estudiantes de una IE particular de Lima Metropolitana. Por motivos de privacidad y respeto a la identidad de los estudiantes, a cada uno se le asignó un código. Este código permite hacer distinciones entre las respuestas obtenidas a partir del test de razonamiento, y así lograr analizar el nivel de razonamiento presente en los estudiantes. Es preciso mencionar que el test de razonamiento geométrico empleado en el presente estudio se aplicó en el idioma inglés, ya que los alumnos que participaron pertenecen a una IE bilingüe, en la que el curso de matemática es impartido en este idioma desde los primeros grados.

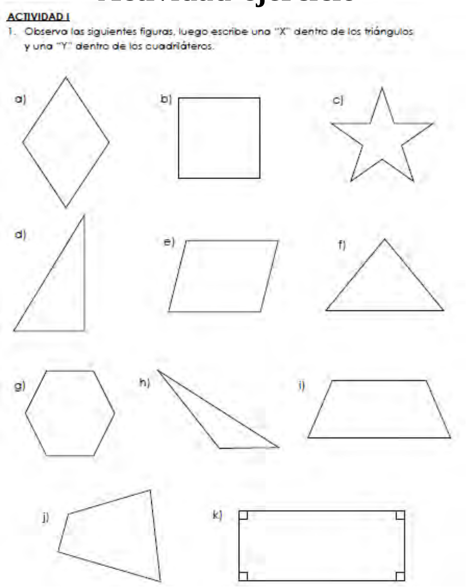
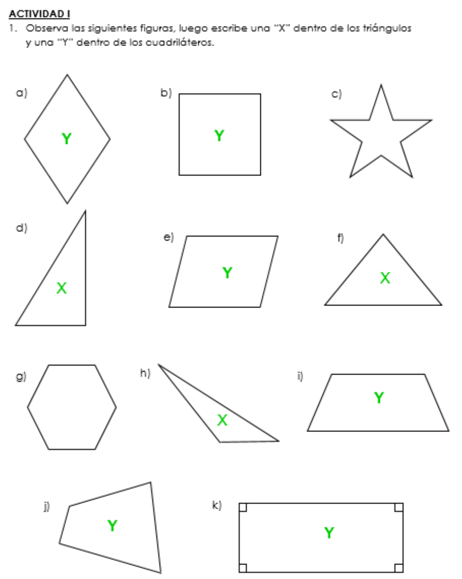
La muestra la constituyen los alumnos: CM, JO, OS y LH. Estos cuatro estudiantes lograron terminar la prueba en el tiempo establecido, es decir, desarrollaron las cuatro actividades en su totalidad. En líneas generales, se encontró que la mayoría de los estudiantes tienen un vocabulario geométrico apropiado y manejan criterios correctos para clasificar los triángulos y cuadriláteros. También se observó que la mayoría de los argumentos que emplean para justificar sus respuestas están relacionados a propiedades elementales de los triángulos y cuadriláteros. De igual manera, se encontró que algunos argumentos se apoyan de la percepción global o características físicas relacionadas a los triángulos y cuadriláteros.

A continuación, se presentan las respuestas esperadas a las actividades planteadas en el test, así como las respuestas recogidas a partir de la aplicación del test.

2.2 Descripción de las respuestas esperadas al test de razonamiento

Debido a que el propósito de la presente investigación es caracterizar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros en estudiantes de quinto grado de primaria de una IE particular de Lima Metropolitana, se propone aplicar un test con cuatro actividades, las cuales desarrollan entre 1 y 4 ejercicios relacionados al tema de cuadriláteros y triángulos. El test permitirá identificar el grado de adquisición del nivel de razonamiento geométrico que presenta la muestra del presente estudio. A continuación, se describen las actividades, los tipos de respuestas junto a la corrección matemática por cada ejercicio y los objetivos de cada uno de ellos en relación a los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele.

ACTIVIDAD I

<table>
<tr><td colspan="2">Ejercicio: I.1</td></tr>
<tr><td>Nivel 1: Visualización</td><td>Objetivo:
Identificar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.</td></tr>
<tr><td>Actividad-ejercicio

</td><td>Corrección matemática

</td></tr>
</table>

Descripción de la respuestas	**Tipo de respuesta**
Ejercicio sin respuestas	1
Reconoce algunos de los triángulos y cuadriláteros a partir de su forma global.	3
Reconoce cada triángulo y cuadrilátero a partir de forma global,	7

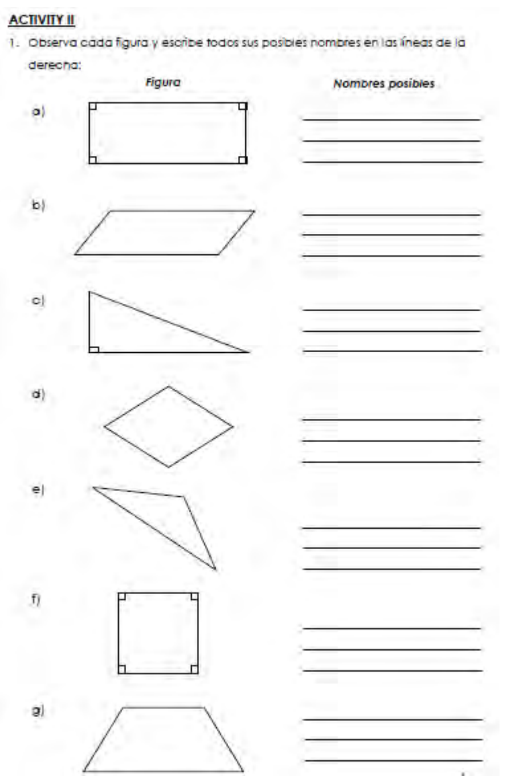
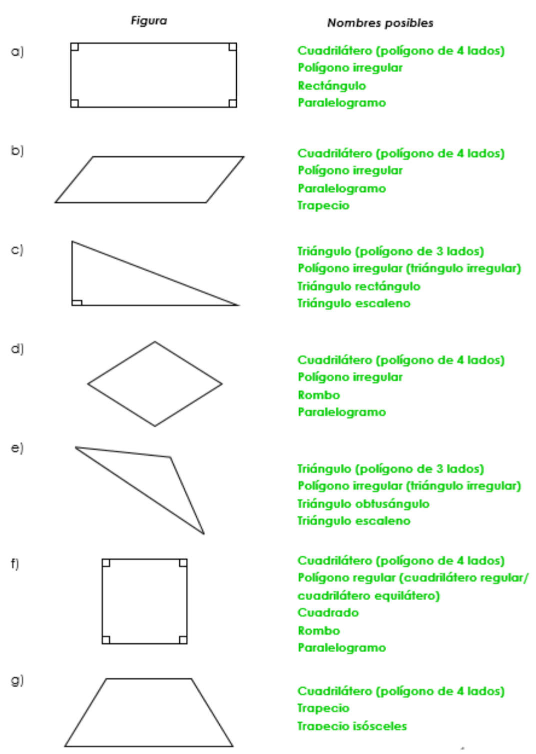
<table>
<tr><th colspan="2">Ejercicio: I.2</th></tr>
<tr><td>Nivel 1: Visualización</td><td>Objetivos:
- Identificar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.
- Clasificar triángulos y cuadriláteros en base a su apariencia global: “se parece a...”, “tiene la forma de...”, “es como……...”.</td></tr>
<tr><td>Nivel 2: Análisis</td><td>Objetivo:
- Clasificar triángulos y cuadriláteros, relacionando algunas propiedades: lados y vértices.</td></tr>
<tr><td>Actividad-ejercicio

2. Responde lo siguiente:
a) ¿Cómo sabes qué figuras son triángulos y qué figuras no son triángulos?
______
______
______
b) ¿Cómo sabes qué figuras son cuadriláteros y qué figuras no son cuadriláteros?
______
______
______
c) Escribe la letra de las figuras que no son triángulos y explica, en cada caso, ¿por qué no son triángulos?
______
______
______
______
______
______
d) Escribe el número de las figuras que no son cuadriláteros y explica, en cada caso, ¿por qué no son cuadriláteros?
______
______
______
______
______</td><td>Corrección matemática

Reconoce a las figuras por su apariencia global o por su forma, y las clasifica según el número de lados de cada figura.</td></tr>
</table>

Descripción del ejercicio	**Tipo de respuesta**
Ejercicio sin respuesta.	1
Clasifica de manera incorrecta las figuras usando conceptos errados.	2
Reconoce a las figuras en base a su apariencia global y las clasifica sin usar propiedades, empleando justificaciones escuetas.	3
Reconoce las figuras por su apariencia global o por su forma y las clasifica según el número de lados o vértices, empleando justificaciones precisas.	6 y 7

ACTIVIDAD II

Ejercicio: II.1	
Nivel 1: Visualización	**Objetivos**: - Caracterizar los triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas. - Emplear vocabulario geométrico relacionado a los triángulos o cuadriláteros.
Actividad-ejercicio	**Corrección matemática**
	

Descripción del ejercicio	**Tipo de respuesta**
Ejercicio sin respuesta.	1
Reconoce las características de algunos triángulos y cuadriláteros.	3
Reconoce las características de los triángulos y cuadriláteros sin emplear vocabulario geométrico.	5
Reconoce las características de los triángulos y cuadriláteros empleando vocabulario geométrico para nombrarlos.	6 y 7

Ejercicio: II.2	
Nivel 2: Análisis	**Objetivos**: Describir las características de los triángulos y cuadriláteros utilizando vocabulario geométrico apropiado, por

ejemplo: "lados opuestos", "los ángulos consecutivos suman 180°", entre otros.

Actividad-ejercicio	Corrección matemática
(see worksheet below)	Se espera que los alumnos describan las figuras identificadas previamente usando sus características y empleando vocabulario geométrico.

2. A partir de las respuestas anteriores, completa los siguientes espacios en blanco:

Figura	Nombre 1	Nombre 2	Nombre 3
a)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
b)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
c)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
d)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
e)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
f)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
g)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______

Ejercicio: II.3

Nivel 2: Análisis	**Objetivos**: Definir los triángulos y cuadriláteros a partir de las propiedades que caracterizan a cada uno de estos polígonos

Actividad-ejercicio	Corrección matemática
(see worksheet below)	Se espera que los alumnos describan las figuras identificadas previamente usando sus propiedades y empleando vocabulario geométrico.

3. Lee las siguientes definiciones:

Triángulo: es un polígono que tiene tres lados y tres ángulos.
Romboide: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.
Rectángulo: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.
Rombo: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y cuatro lados de igual medida.
Cuadrado: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos cuyos lados son de igual medida y cuyos ángulos son todos rectos.
Trapecio: es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

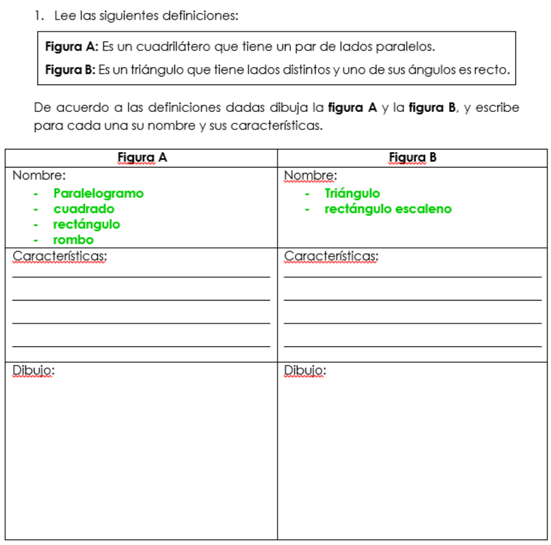
Ahora, para cada figura mostrada en la página 4 y con ayuda de las definiciones dadas, completa los siguientes espacios en blanco.

Figura	Nombre 1	Nombre 2	Nombre 3
a)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
b)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
c)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
d)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
e)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
f)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______
g)	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______	Es un ______, porque ______

Descripción del ejercicio	Tipo de respuesta
Ejercicio sin respuesta.	1
Describe las figuras del ejercicio II.1 de manera incorrecta.	2
Describe las figuras del ejercicio II.1 usando sus características generales y empleando vocabulario geométrico.	3
Describe las figuras del ejercicio II.1 usando sus propiedades y empleando vocabulario geométrico	6 y 7

ACTIVIDAD III

<table>
<tr><td colspan="2">Ejercicio: III.1</td></tr>
<tr><td>Nivel 2: Análisis</td><td>Objetivos:
Reconocer que los triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan.</td></tr>
<tr><td>Actividad-ejercicio

1. Lee las siguientes definiciones:
Figura A: Es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.
Figura B: Es un triángulo que tiene lados distintos y uno de sus ángulos es recto.
De acuerdo a las definiciones dadas dibuja la figura A y la figura B, y escribe para cada una su nombre y sus características.
Figura A — Nombre: / Características: / Dibujo:
Figura B — Nombre: / Características: / Dibujo:</td><td>Corrección matemática

1. Lee las siguientes definiciones:
Figura A: Es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.
Figura B: Es un triángulo que tiene lados distintos y uno de sus ángulos es recto.
De acuerdo a las definiciones dadas dibuja la figura A y la figura B, y escribe para cada una su nombre y sus características.
Figura A — Nombre: - Paralelogramo - cuadrado - rectángulo - rombo / Características: / Dibujo:
Figura B — Nombre: - Triángulo - rectángulo escaleno / Características: / Dibujo:</td></tr>
</table>

Descripción del ejercicio	Tipo de respuesta
Ejercicio sin respuesta	1
Respuesta matemáticamente incorrecta.	2
Reconoce que algunos triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas. Emplea justificaciones cortas.	3
Reconoce que algunos triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan. Emplea justificaciones precisas.	5
Reconoce que los triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan. Emplea justificaciones precisas.	6 y 7

ACTIVIDAD IV

Ejercicio: IV.1	
Nivel 2: Análisis	**Objetivos**: Justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros.
Nivel 3: Clasificación	- Clasificar diferentes familias de triángulos y cuadriláteros a partir de sus propiedades: lados, vértices y ángulos. - Justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros, haciendo uso correcto de definiciones y propiedades.
Actividad-ejercicio	**Corrección matemática**

Actividad-ejercicio

1. Lee los siguientes enunciados y escribe **V** si son verdaderas o **F** si son falsas. Luego, escribe una justificación para tus respuestas.

Enunciado	**V/F**	**Justificación**
a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 90°.		
b) Los triángulos equiláteros tienen solo dos ángulos de igual medida.		
c) Todos los cuadrados son rectángulos.		
d) Todos los rombos son cuadrados		
e) Todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles.		
f) Todos los paralelogramos son trapecios		

Corrección matemática

1. Lee los siguientes enunciados y escribe **V** si son verdaderas o **F** si son falsas. Luego, escribe una justificación para tus respuestas.

Enunciado	**V/F**	**Justificación**
a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 90°.	F	
b) Los triángulos equiláteros tienen dos ángulos de igual medida.	F	
c) Todos los cuadrados son rectángulos.	V	
d) Todos los rombos son cuadrados	F	
e) Todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles.	V	
f) Todos los paralelogramos son trapecios	V	

Descripción del ejercicio	**Tipo de respuesta**
Ejercicio sin respuesta.	1
Respuestas matemáticamente incorrectas.	2
Respuestas matemáticamente correctas con justificaciones escuetas.	3
En su mayoría, respuestas matemáticamente correctas con justificaciones que emplean definiciones, características y propiedades relacionadas a los triángulos y cuadriláteros.	5
Respuestas matemáticamente correctas con justificaciones que emplean definiciones, características y propiedades relacionadas a los triángulos y cuadriláteros.	6 y 7

Ejercicio: IV.2	
Nivel 3: Clasificación	**Objetivos**: Construir definiciones propias de los cuadriláteros usando sus propiedades de manera correcta.

Actividad-ejercicio	Corrección matemática
2. Lee atentamente siguientes propiedades: • Es una figura geométrica formada por cuatro segmentos. • Es una figura geométrica que tiene lados opuestos que son paralelos. • Es una figura geométrica que tiene cuatro lados de igual medida. • Es una figura geométrica cuyos ángulos opuestos tienen igual medida. A partir de las propiedades dadas, escribe el nombre o nombres de la figura o figuras que cumplen con estas propiedades y justifica tu respuesta.	2. Lee atentamente siguientes propiedades: • Es una figura geométrica formada por cuatro segmentos. • Es una figura geométrica que tiene lados opuestos que son paralelos. • Es una figura geométrica que tiene cuatro lados de igual medida. • Es una figura geométrica cuyos ángulos opuestos tienen igual medida. A partir de las propiedades dadas, escribe el nombre o nombres de la figura o figuras que cumplen con estas propiedades y justifica tu respuesta. Cuadrado o rombo paralelogramo

Descripción del ejercicio	Tipo de respuesta
Ejercicio sin respuesta.	1
Construye definiciones incorrectas para los cuadriláteros.	2
Construye definiciones propias de los cuadriláteros usando algunas de sus propiedades respecto a los lados y ángulos para justificar sus respuestas.	5
Construye definiciones propias de los cuadriláteros usando sus propiedades respecto a los lados y ángulos para justificar su respuesta.	6 y 7

En el siguiente punto se presentan los resultados de la prueba aplicada a los cuatro estudiantes que participaron de la muestra.

2.3 Descripción de las respuestas dadas al test de razonamiento geométrico

Los ejercicios propuestos para evaluar el grado de adquisición del nivel 1, nivel de “visualización” o de “reconocimiento”, son tres: I.1, I.2 y II.1. El nivel 1 explica que un niño con dicho nivel de razonamiento, percibe los objetos, en este caso particular los triángulos y cuadriláteros, por su totalidad o como simples unidades. Es decir, cuando se describa las figuras geométricas, por ejemplo, el niño se centrará solo en los aspectos globales de cada una; además, no reconocerá correctamente los elementos de las figuras ni sus propiedades. Asimismo, este nivel se acompaña de un vocabulario geométrico básico, el cual se caracteriza por la repetición de palabras como lados, esquinas, ángulos, entre otros.

Los tres ejercicios que tienen por objetivo evaluar el nivel 1, demandarán del estudiante lo siguiente: identificar y caracterizar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas; clasificar triángulos y cuadriláteros en base a su apariencia global; y emplear vocabulario geométrico relacionado a los cuadriláteros y triángulos. Es decir, los alumnos tendrán que reconocer dichas figuras geométricas teniendo en cuenta su aspecto físico y sus características globales, sin necesidad de hacer hincapié en sus propiedades. Asimismo, los estudiantes no tendrán por qué generalizar o relacionar las características de una figura con otra.

En cuanto a los ejercicios propuestos para evaluar el grado de adquisición del nivel 2, nivel de “análisis”, fueron cinco: I.2, II.2, II.3, III.1 y IV.1. Un niño con nivel 2 de razonamiento geométrico reconoce que cada figura, en este caso, triángulos y cuadriláteros, están formados por elementos y propiedades que los caracterizan y los hacen polígonos particulares. En este nivel, los estudiantes no establecen claramente relaciones entre figuras, es decir, realizan ciertas clasificaciones en base a algunas propiedades o algunas características de los polígonos. Por otro lado, los niños en este nivel emplean un vocabulario geométrico variado, el cual le permite justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados a triángulos y cuadriláteros.

Los cinco ejercicios que tienen por objetivo evaluar el nivel 2, demandarán del estudiante lo siguiente: describir las características de triángulos y cuadriláteros utilizando vocabulario geométrico apropiado; definir los triángulos y cuadriláteros a partir de las propiedades que caracterizan a cada uno de estos polígonos; reconocer que los triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan; clasificar triángulos y cuadriláteros relacionando algunas propiedades como sus lados y vértices; y justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros.

Por su parte, los ejercicios propuestos para evaluar el nivel 3, nivel de “clasificación”, fueros dos: IV.1 y IV.2. El nivel 2 de razonamiento geométrico explica que los niños realizan clasificaciones entre figuras (de las mismas familias), descubriendo así propiedades ya conocidas o propiedades nuevas que formulan a partir de un razonamiento informal. De igual manera, un niño con grado de adquisición del nivel 2 presenta un razonamiento lógico que le permite comprender enunciados matemáticos a partir del aspecto físico de las figuras, mas no es capaz de formular demostraciones matemáticas.

Los dos ejercicios que tienen por objetivo evaluar el nivel 3, demandarán del estudiante las siguientes habilidades: clasificar diferentes familias de triángulos y cuadriláteros a partir de sus propiedades: lados, vértices y ángulos; justificar la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros, haciendo uso correcto de definiciones y propiedades; y construir definiciones propias de los cuadriláteros usando sus propiedades de manera correcta.

A continuación, se describirán aspectos generales y particulares recogidos por cada ejercicio del test de razonamiento geométrico aplicado. En el ejercicio I.1 se observa que los estudiantes, en su totalidad, no tuvieron problemas al reconocer los triángulos y cuadriláteros a partir de las figuras dadas. Este ejercicio presentó once figuras de polígonos, de los cuales tres eran triángulos, seis cuadriláteros y las dos últimas figuras de más de cinco lados. Los alumnos escribieron una "Q" dentro de las figuras que eran cuadriláteros (6 de un total de 11 figuras), y una "T" en aquellas que eran triángulos (3 de un total de 11 figuras).

Es preciso señalar que las respuestas al ejercicio I.1 están guiadas por la percepción global, es decir, por el aspecto físico de cada figura. En la figura 17 se aprecia un ejemplo de las respuestas dadas al ejercicio I.1 del test de razonamiento geométrico.

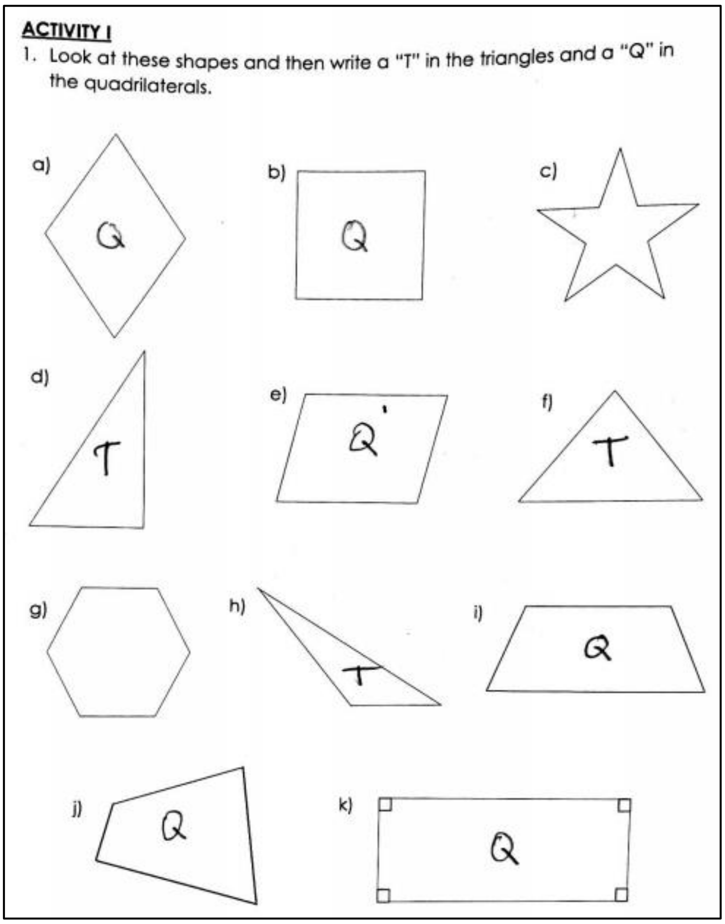
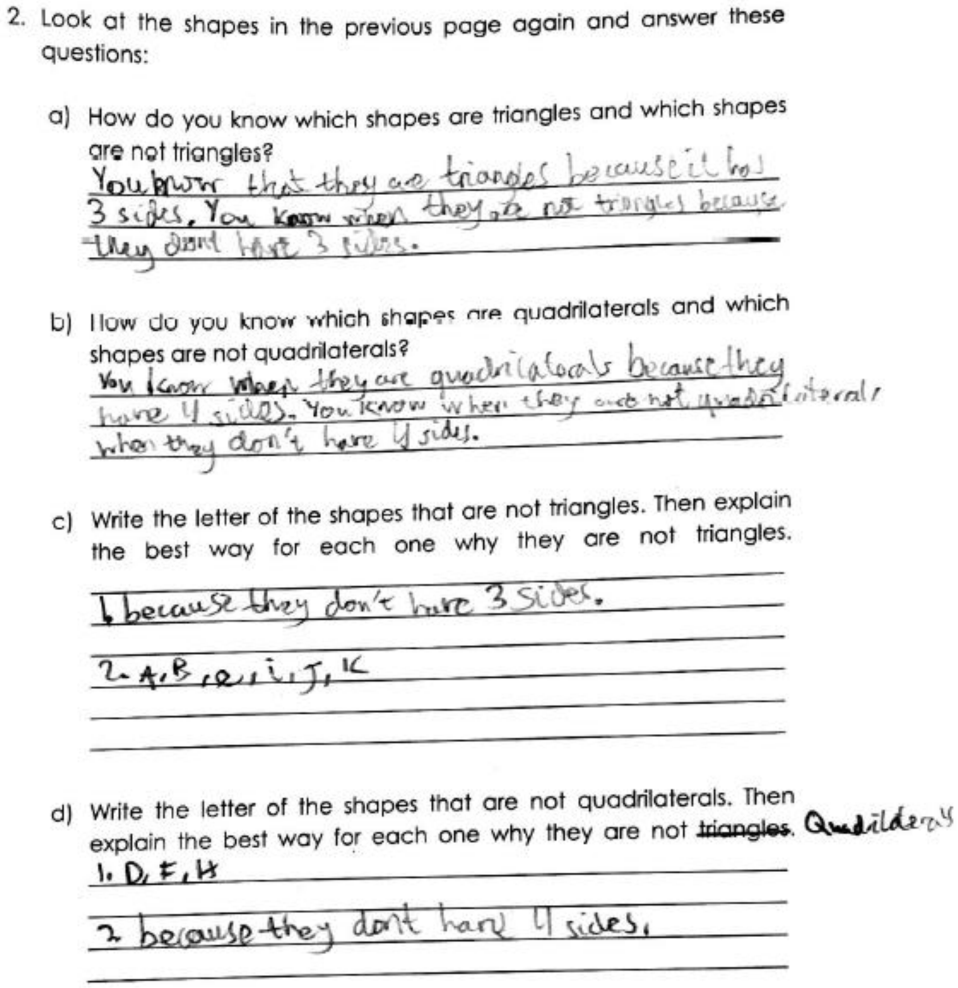


Figura 17

Respecto al ejercicio I.2, continuación del ejercicio I.1, requirió de los estudiantes desarrollar respuestas que justifiquen las preguntas planteadas. Estas preguntas demandaban de los estudiantes explicar cuándo una figura era triángulo o cuando era cuadrilátero. Se observa que 3 de los 4 estudiantes emplearon la palabra “lado/s” como principal fuente para justificar por qué una figura es triángulo o por qué una figura es cuadrilátero. Asimismo, hacen referencia a la cantidad de lados para justificar sus respuestas y, en general, repiten las siguientes premisas: “es triángulo si tiene 3 lados”, “si tiene más de tres lados no es triángulo”, “es cuadrilátero si tiene 4 lados”, “no es cuadrilátero si tiene más o menos de 4 lados”.


2. Look at the shapes in the previous page again and answer these questions:

a) How do you know which shapes are triangles and which shapes are not triangles?
You know that they are triangles because it has 3 sides. You know when they are not triangles because they don't have 3 sides.

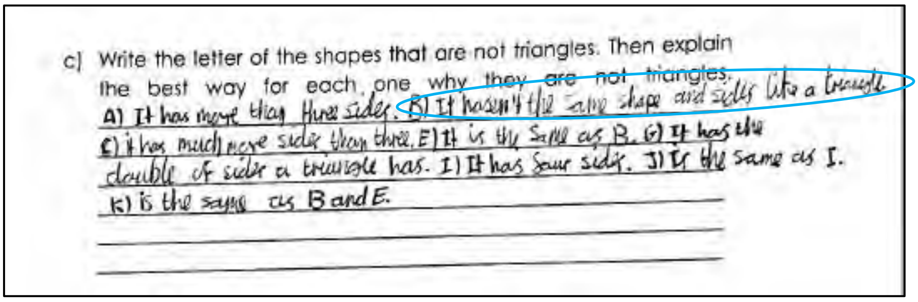
b) How do you know which shapes are quadrilaterals and which shapes are not quadrilaterals?
You know when they are quadrilaterals because they have 4 sides. You know when they are not quadrilaterals when they don't have 4 sides.

c) Write the letter of the shapes that are not triangles. Then explain the best way for each one why they are not triangles.
1 because they don't have 3 sides.
2. A, B, C, I, J, K

d) Write the letter of the shapes that are not quadrilaterals. Then explain the best way for each one why they are not ~~triangles~~. Quadrilaterals
1. D, F, H
2. because they don't have 4 sides.

Figura 18

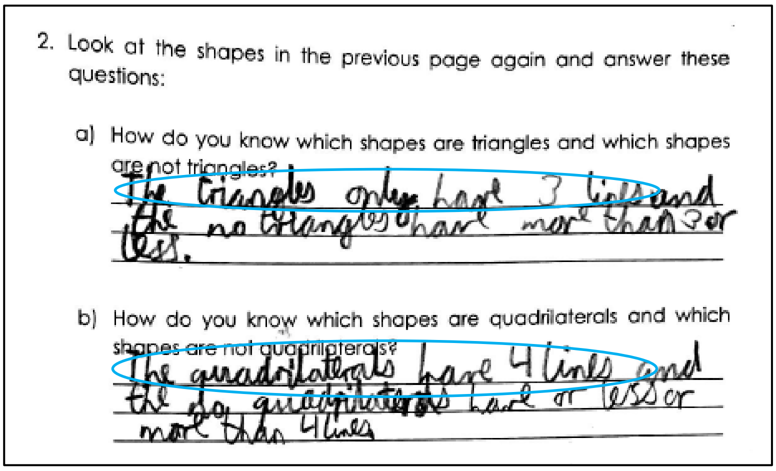
Sin embargo, como se puede observar en la figura 19, LH añadió a una de sus justificaciones que la figura “b)” no era triángulo ya que “no tiene la misma forma y lados que un triángulo”. Esta muestra reitera el uso de una percepción global para justificar sus respuestas. A continuación, se muestra las respuestas al ejercicio I.2 del alumno LH.



c) Write the letter of the shapes that are not triangles. Then explain the best way for each one why they are not triangles.
A) It has more than three sides. B) It hasn't the same shape and sides like a triangle C) it has much more sides than three. E) It is the same as B. G) It has the double of sides a triangle has. I) It has four sides. J) Is the same as I. K) is the same as B and E.

Figura 19

Por otro lado, JO fue el único estudiante que al justificar sus respuestas empleó la palabra “línea/s” haciendo referencia a la cantidad de lados que un cuadrilátero o un triángulo deben tener para ser tales figuras. De la muestra de 4 estudiantes, JO es el primero en incorporar la palabra “línea” dentro de su vocabulario geométrico. La figura 20 muestra la respuesta elaborada por JO.



2. Look at the shapes in the previous page again and answer these questions:

a) How do you know which shapes are triangles and which shapes are not triangles?
The triangles only have 3 lines and the no triangles have more than 3 or less.

b) How do you know which shapes are quadrilaterals and which shapes are not quadrilaterals?
The quadrilaterals have 4 lines and the no quadrilaterals have or less or more than 4 lines

Figura 20

Por lo que se refiere al ejercicio II.1, se encontró que la mayoría de los estudiantes usó vocabulario geométrico para nombrar las figuras; no obstante, solo 3 de los 4 niños desarrollaron en su totalidad dicho ejercicio. Este ejercicio presentó siete figuras de polígonos, de las cuales dos eran triángulos y cinco cuadriláteros. Para nombrar cada figura, los niños emplearon nombres convencionales con los que se conoce a dichos polígonos (triángulo, cuadrado, paralelogramo, entre otros); también se valieron de características generales para denominarlas (polígono, cuadrilátero, lados iguales y otros). A continuación, en la figura 21 se observa algunos de los nombres asignados por uno de los alumnos al polígono “e)” y al polígono “f)” del ejercicio II.1.

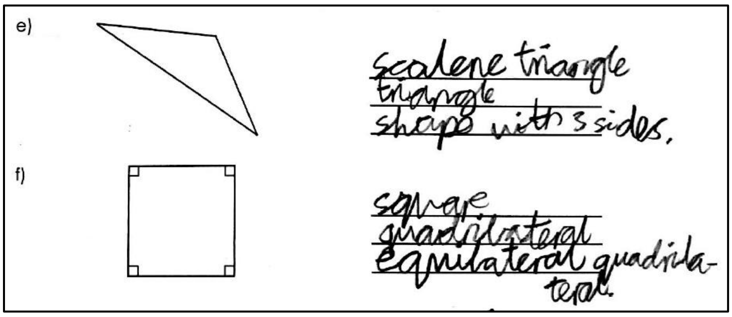


Figura 21

Asimismo, en relación a este ejercicio, se observa que el estudiante LH emplea un lenguaje sencillo o coloquial para denominar las figuras propuestas. Por ejemplo, emplea palabras como: “cuadrado largo”, “rectángulo echado”, “rectángulo corto” para nombrar las figuras. En la siguiente imagen se observa lo mencionado.

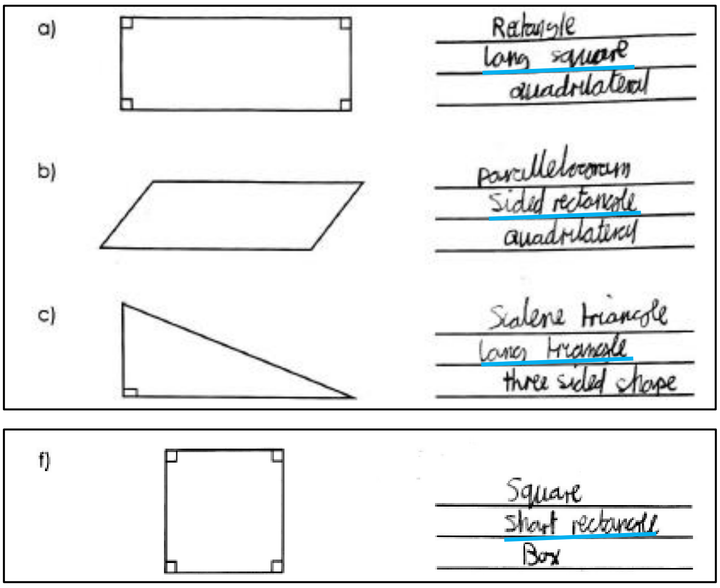


Figura 22

Respecto al ejercicio II.2, ejercicio relacionado al II.1, muestra como los estudiantes definen los triángulos y cuadriláteros para justificar sus respuestas anteriores. De la muestra, 3 de los 4 estudiantes formulan definiciones que emplean algunas propiedades, como referirse al número de lados, acompañado de vocabulario geométrico básico, y en algunos casos, vocabulario coloquial para indicar alguna característica de la figura. Así por ejemplo, en la figura 23, 24 y 25 se observa las propiedades y el vocabulario que emplean OS, LH y JO para definir un paralelogramo, triángulo rectángulo y rombo respectivamente. Las siguientes figuras muestran el uso reiterativo de la propiedad relacionada al número de lados de que tiene cada polígono; así como el empleo de vocabulario coloquial para expresar las características de dichos polígonos.

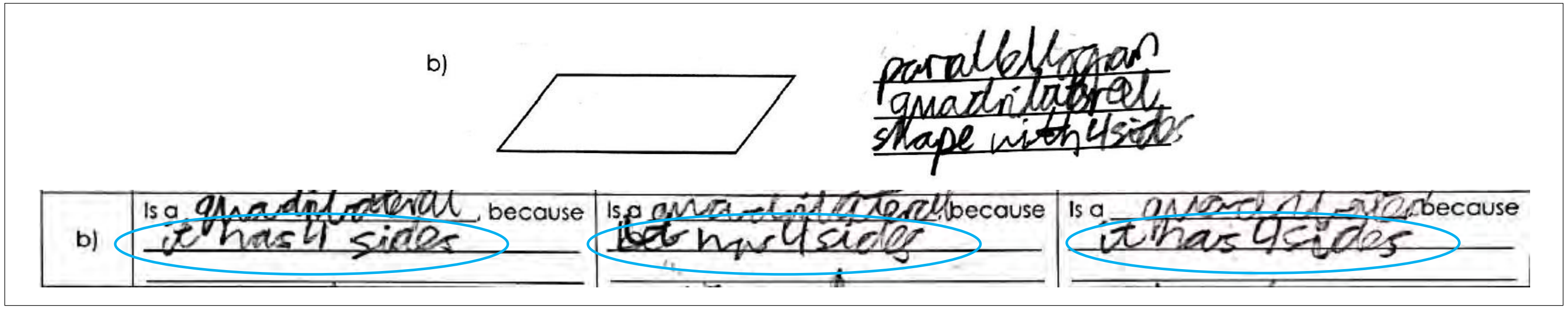


Figura 23

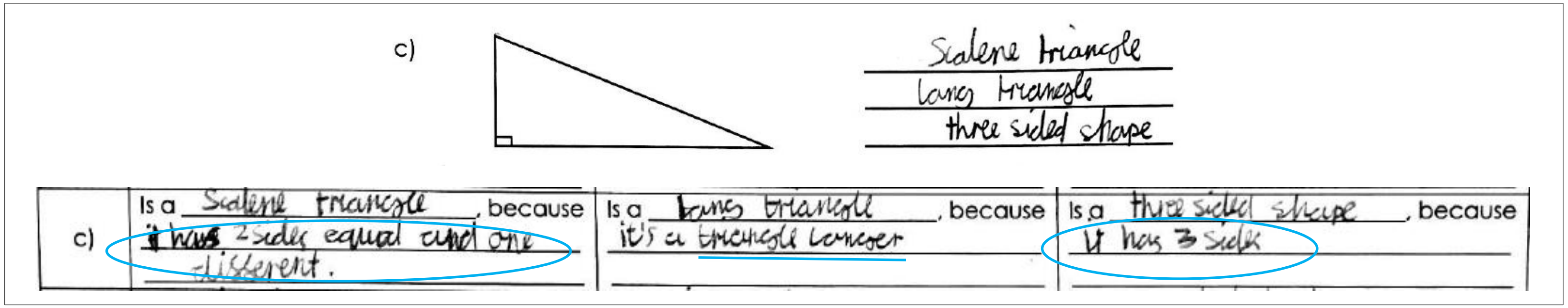


Figura 24

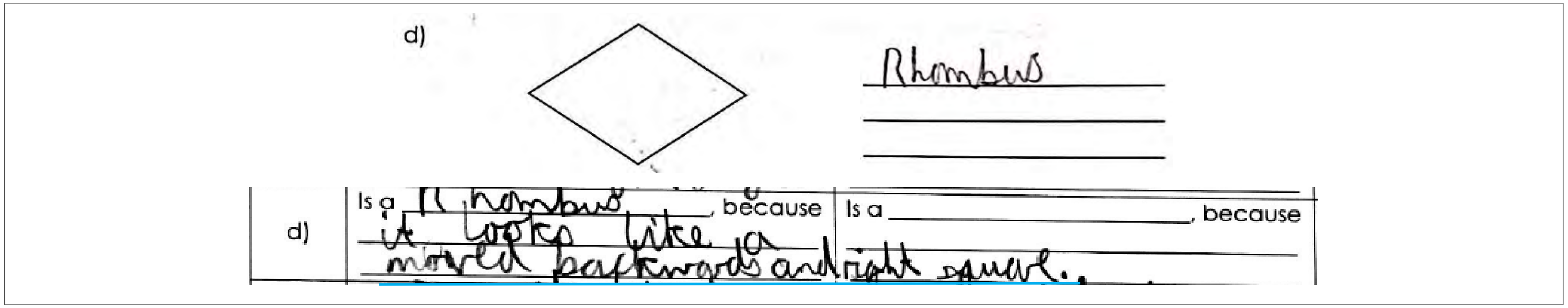


Figura 25

Por su parte, CM al justificar sus respuestas emplea hasta 2 propiedades de un polígonos. Asimismo, hace uso de un vocabulario geométrico variado para fundamentar sus respuestas. A continuación, en las figuras 26 y 27 se puede apreciar lo anteriormente indicado:

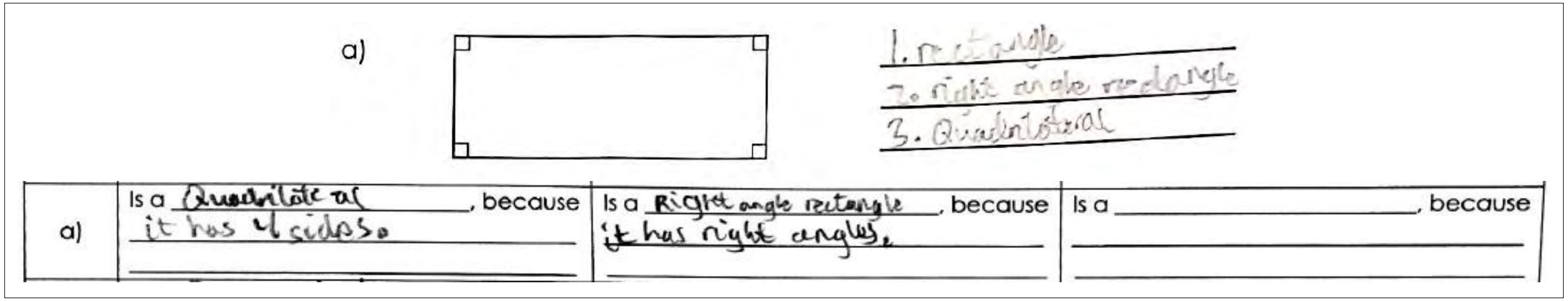


Figura 26

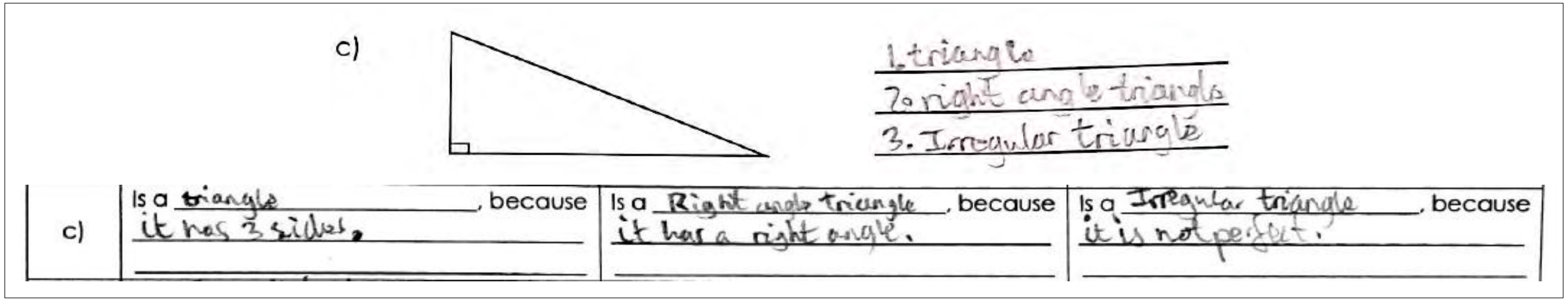


Figura 27

Por su parte, el ejercicio III.1 buscó que los niños reconozcan propiedades de los cuadriláteros y triángulos, y así relacionen las características de estas figuras y, empleando vocabulario geométrico, describan cada una de ellas apoyándose además de dibujos. Los cuatro estudiantes respondieron correctamente el ejercicio propuesto, se valieron de las características de cada figura para justificar sus respuestas. Pese a que no todas las respuestas fueron iguales, todas estuvieron matemáticamente correctas.

Dos de los cuatro alumnos (OS y LH) consideran que la figura A (figura A: es un cuadrilátero que tienen dos pares de lados paralelos) es un paralelogramo; mientras que solo uno (JO) considera que es un rombo y otro niño (CM) considera que es un cuadrado. Solo uno de los cuatro estudiantes (CM) señala más de una característica de la figura relacionada a los lados y los ángulos. El resto de estudiantes (OS, LH y JO), hace referencia a solo una característica de la figura, los lados. A continuación, la figura 28 ilustra lo observado en esta primera parte del ejercicio III.1.

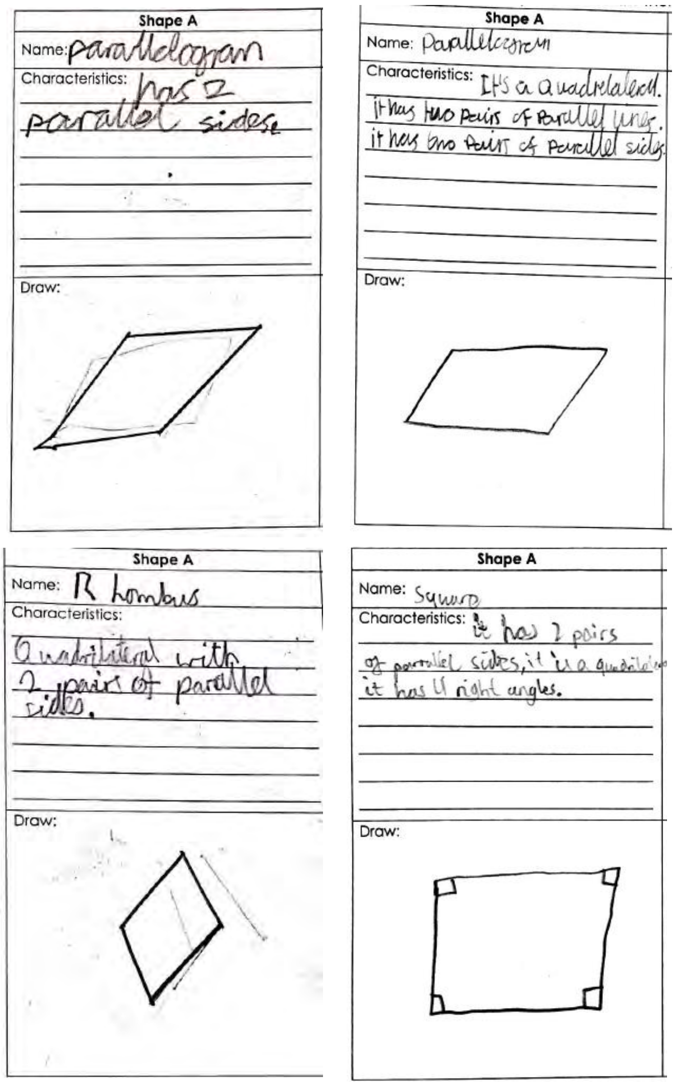


Figura 28

Respecto a la figura B del ejercicio III.1, las respuestas también fueron correctas. La figura B (figura B: es un triángulo que tiene lados diferentes y un ángulo recto) fue relacionada con: triángulo rectángulo y triángulo escaleno. Como se observa en la figura 29, solo uno (LH) de los cuatro niños señaló que el triángulo al que hacía referencia la figura B era un triángulo escaleno, los demás lo relacionaron con triángulo rectángulo. Tres de los cuatro estudiantes (LH, CM y JO), al justificar sus respuestas, emplean propiedades del triángulo relacionados a los lados y ángulos; mientras que un estudiante (OS) basa su justificación en una solo característica del triángulo relacionada a los ángulos.

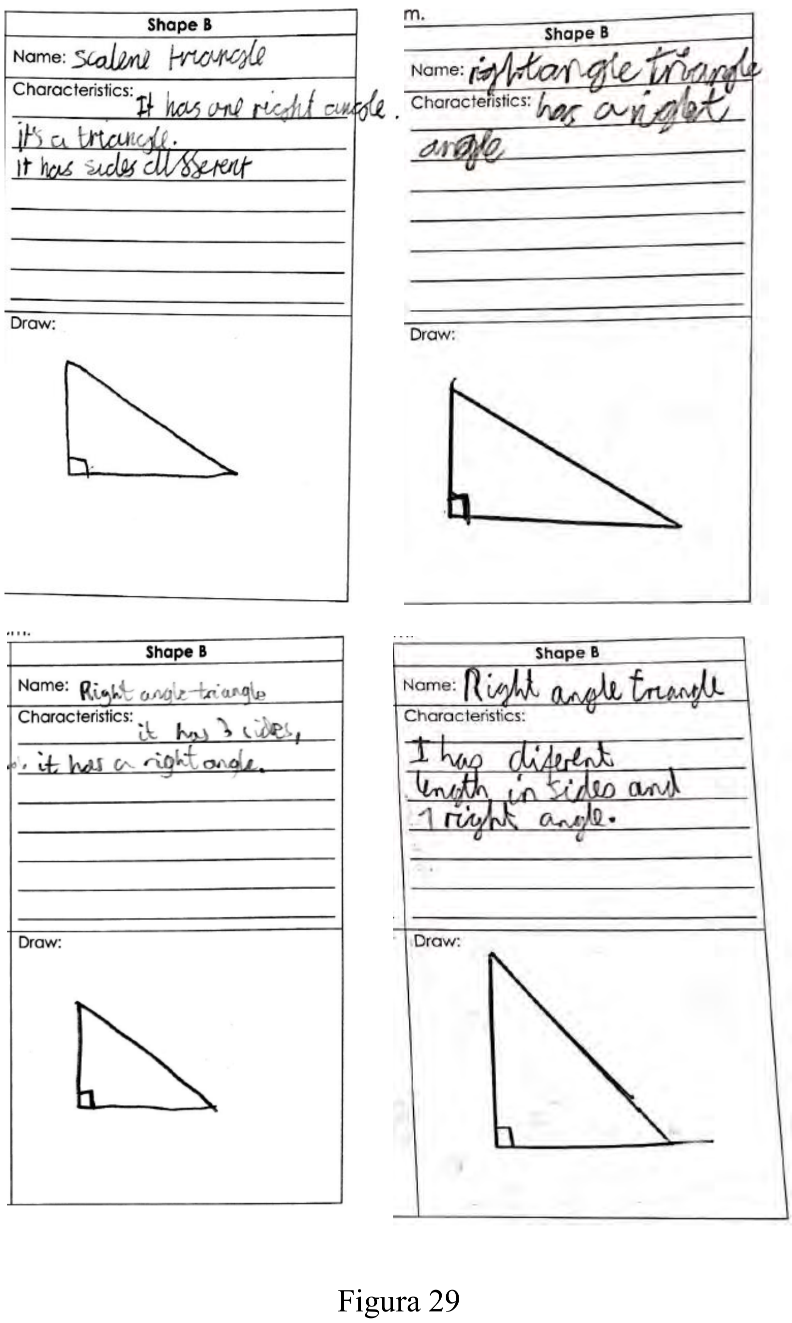
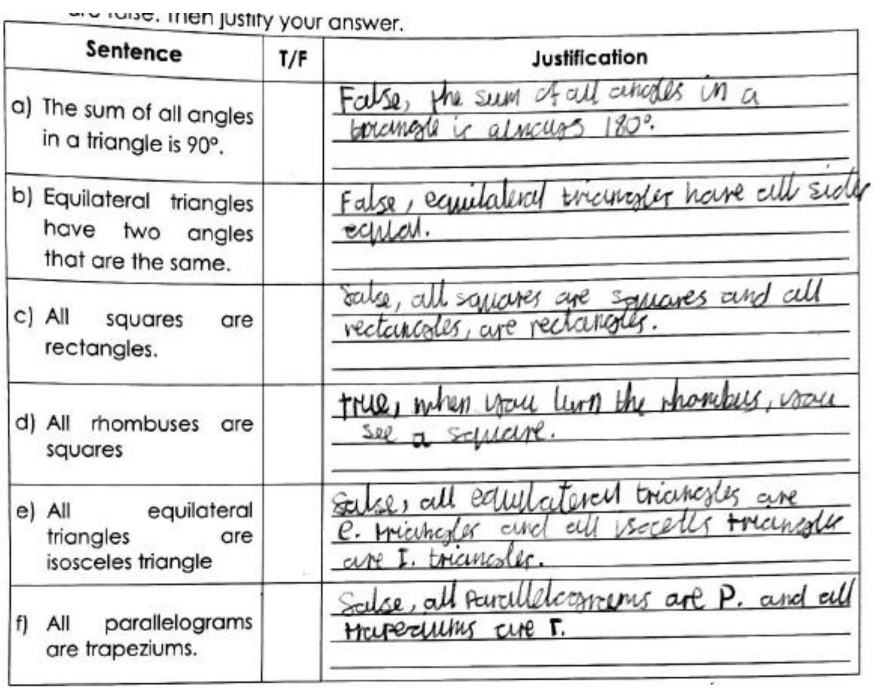


Figura 29

En relación al ejercicio IV.1, este demandó del estudiante hacer uso de todo el conocimiento relacionado a los cuadriláteros y triángulos para demostrar la verdad o falsedad de seis proposiciones. En las respuestas proporcionadas por los estudiantes, se apreció el uso de vocabulario geométrico, definiciones y ejemplos que emplearon los niños para sustentar sus justificaciones. En las siguientes líneas se mostrará las respuestas más resaltantes dadas por cada estudiante a este ejercicio.

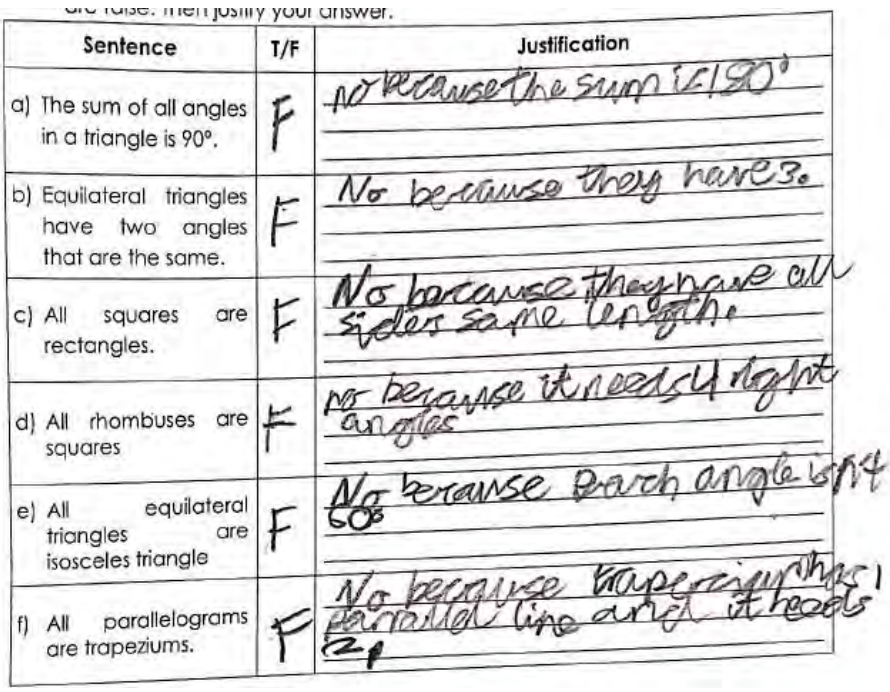
Como se puede observar en la figura 30, LH obtuvo dos respuestas matemáticamente correctas de las seis propuestas. En general, las demostraciones que emplea LH se sostienen de la percepción global que reconoce en cada figura. Repite frases como "todos los cuadrados son cuadrados", "todos los paralelogramos son paralelogramos", y así con el rectángulo, trapecio, triángulo equilátero y triángulo isósceles. Asimismo, emplea algunas propiedades para demostrar la verdad de un enunciado, como "la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°" y "todos los lados de un triángulo equilátero son iguales".


are false. Then justify your answer.

Sentence	T/F	Justification
a) The sum of all angles in a triangle is 90°.		False, the sum of all angles in a triangle is always 180°.
b) Equilateral triangles have two angles that are the same.		False, equilateral triangles have all sides equal.
c) All squares are rectangles.		false, all squares are squares and all rectangles, are rectangles.
d) All rhombuses are squares		true, when you turn the rhombus, you see a square.
e) All equilateral triangles are isosceles triangle		false, all equilateral triangles are e. triangles and all isoscells triangles are I. triangles.
f) All parallelograms are trapeziums.		false, all parallelograms are P. and all trapeziums are T.

Figura 30

En relación a OS (ver figura 16), obtuvo tres respuestas matemáticamente correctas de las 6 planteadas. Dentro de las demostraciones que emplea para justificar sus respuestas válidas, usa propiedades relacionados a los triángulos y cuadriláteros. Algunas propiedades como "la suma de los ángulos (internos) de un triángulo es 180°", “(triángulos equiláteros) tienen 3 (ángulos que son iguales)” y “(los rombos para ser cuadrados) necesitan 4 ángulos rectos”. De igual manera, se observa que al justificar sus respuestas equivocadas emplea propiedades elementales memorizadas. Por ejemplo, frente al enunciado “todos los cuadrados son rectángulos”, OS responde “no porque (los cuadrados) tienen todos los lados de igual medida”; asimismo, frente a la premisa “todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles”, OS señala que “no porque cada ángulo (de los triángulos isósceles) no mide 60°”; y frente al enunciado “todos los paralelogramos son trapecios”, OS señala que “no porque los trapecios tienen 1 (par) de lados paralelos”.



are false. Then justify your answer.

Sentence	T/F	Justification
a) The sum of all angles in a triangle is 90°.	F	no because the sum is 180°
b) Equilateral triangles have two angles that are the same.	F	No because they have 3.
c) All squares are rectangles.	F	No because they have all sides same length.
d) All rhombuses are squares	F	no because it needs 4 right angles
e) All equilateral triangles are isosceles triangle	F	No because each angle isn't 60°
f) All parallelograms are trapeziums.	F	No because trapezium has 1 parallel line and it needs 2.

Figura 31

Por su parte, CM obtuvo 3 respuestas matemáticamente correctas de las 6 propuestas. Se observa que al justificar la falsedad o verdad de sus respuestas CM emplea propiedades relacionadas a las figuras. Una de sus afirmaciones correctas fue “todos los lados (de un triángulo equilátero) son los mismos, no son dos lados sino tres lados (de igual medida)”. Asimismo, en sus justificaciones erróneas demuestra el uso de propiedades elementales memorizadas que parten de la percepción global como “los rectángulos no tienen lados iguales”, “(los) rombos tienen ángulos agudos y obtusos”.

Sentence	T/F	Justification
a) The sum of all angles in a triangle is 90°.	F	Every side is 60°.
b) Equilateral triangles have two angles that are the same.	F	No because it has all the sides the same and it doesn't have 2 sides, it has 3 sides.
c) All squares are rectangles.	F	No because rectangles doesn't have all the sides equal.
d) All rhombuses are squares	F	No because rhombuses have acute and obtuse angles.
e) All equilateral triangles are isosceles triangle	F	No because Isosceles doesn't have all the sides equal.
f) All parallelograms are trapeziums.	F	No because it is not same shaped.

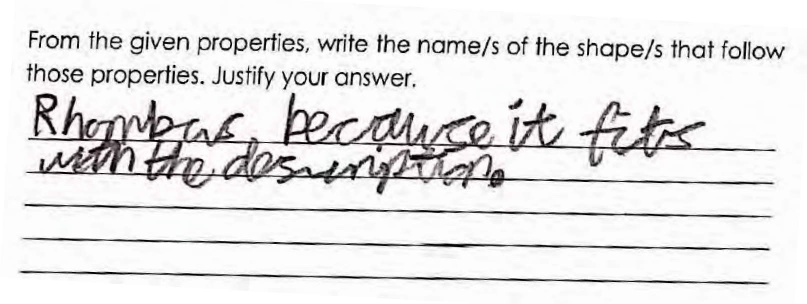
Figura 32

Respecto a JO, logró 3 respuestas matemáticamente correctas de un total de 6 enunciados. Al igual que los demás niños, JO emplea alguna propiedad para justificar la verdad o falsedad del problema. Por ejemplo, señala que "todos los ángulos de un triángulo equilátero son iguales (igual medida)", asimismo, se refiere, aunque equivocadamente, a la suma de los ángulos internos de un triángulo. Por otro lado, es importante señalar que JO fue el único en afirmar que "todo cuadrado es rectángulo" y "todo paralelogramo es trapecio". Para justificar sus respuestas emplea explicaciones informales con base en su percepción visual, tales como: "Sí porque tu solo alargas dos líneas" (en respuesta a la primera afirmación) y "Sí, solo las líneas iguales (paralelas) se han alargado" (en respuesta a la segunda afirmación).

Sentence	T/F	Justification
a) The sum of all angles in a triangle is 90°.	T	Yes because all angles are 90.
b) Equilateral triangles have two angles that are the same.	F	No because in a equilateral triangle all angles are the same
c) All squares are rectangles.	T	Yes because you only large 2 lines
d) All rhombuses are squares	T	Yes only that flatened.
e) All equilateral triangles are isosceles triangle	F	No because one has a straight angle
f) All parallelograms are trapeziums.	T	Yes only that some sides are large

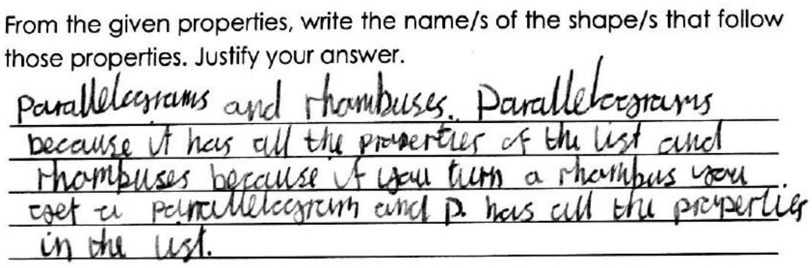
Figura 33

Por último, en el ejercicio IV.2 todos los alumnos respondieron matemáticamente correcto. Sin embargo, se observa que las justificaciones a sus respuestas van desde incompletas a las que usan propiedades relacionadas a los lados y ángulos de los cuadriláteros. A continuación, se presentan las respuestas de los alumnos en el siguiente orden: OS, LH, CM y JO.


From the given properties, write the name/s of the shape/s that follow those properties. Justify your answer.

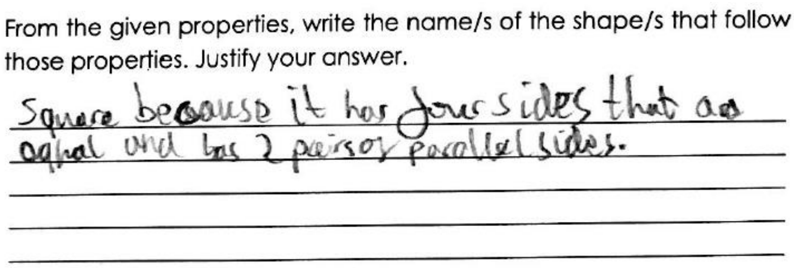
Rhombus because it fits with the description.

Figura 34


From the given properties, write the name/s of the shape/s that follow those properties. Justify your answer.

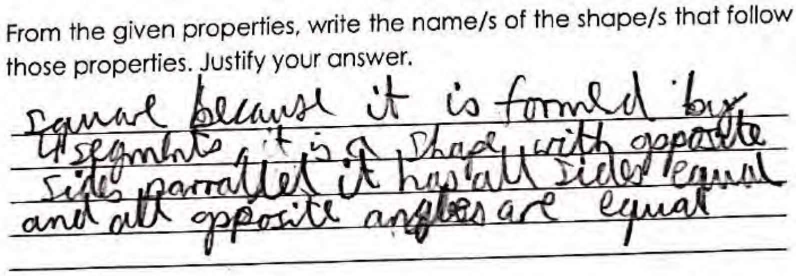
Parallelograms and rhombuses. Parallelograms because it has all the properties of the list and rhombuses because if you turn a rhombus you get a parallelogram and p. has all the properties in the list.

Figura 35


From the given properties, write the name/s of the shape/s that follow those properties. Justify your answer.

Square because it has four sides that are equal and has 2 pairs of parallel sides.

Figura 36


From the given properties, write the name/s of the shape/s that follow those properties. Justify your answer.

Square because it is formed by 4 segments, it is a shape with opposite sides parallel it has all sides equal and all opposite angles are equal

Figura 37

2.4 Análisis de los resultados

El análisis de los resultados tendrá como base la metodología del cálculo de grados de adquisición de los Niveles de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1993). De igual manera, se tendrá en cuenta los tipos de respuestas previamente explicados por cada ejercicio en el punto 2.1; asimismo, será imprescindible tomar de referencia las respuestas dadas al test de razonamiento y descritas previamente en el punto 2.3.

Tipos de respuestas según estudiante

En las siguientes tablas se muestran los tipos de respuestas por cada ejercicio de acuerdo a las respuestas dadas de cada estudiante. Para ello, se ha tomado en cuenta la corrección matemática de los ejercicios, la descripción de las respuestas esperadas al test y la descripción de las respuestas dadas al test.

Tabla 10: Tipo de respuestas de OS

Ejercicio	Tipo de respuesta						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
I.1							✓
I.2						✓	
II.1						✓	
II.2					✓		
II.3					✓		
III.1				✓			
IV.1					✓		
IV.II			✓				

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Tabla 11: Tipo de respuestas de LH

Ejercicio	Tipo de respuesta						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
I.1							✓
I.2						✓	
II.1					✓		
II.2					✓		
II.3					✓		
III.1					✓		
IV.1			✓				
IV.II			✓				

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Tabla 12: Tipo de respuestas de CM

Ejercicio	Tipo de respuesta						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
I.1							✓
I.2						✓	
II.1						✓	
II.2						✓	
II.3						✓	
III.1						✓	
IV.1					✓		
IV.II					✓		

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Tabla 13: Tipo de respuestas de JO

Ejercicio	Tipo de respuesta						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
I.1							✓
I.2					✓		
II.1						✓	
II.2					✓		
II.3					✓		
III.1					✓		
IV.1			✓				
IV.II						✓	

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Niveles de Van Hiele relacionados al tipo de respuesta del estudiante

A partir del tipo de respuestas determinadas en los test de razonamiento de los estudiantes, se organizó en la tabla 14 los Niveles de Van Hiele relacionados a cada ejercicio y cada respuesta. En cada columna se organiza con las iniciales de los estudiantes.

Tabla 14: Niveles de Van Hiele en relación al tipo de respuesta por cada estudiante

Ejercicio	OS	LH	CM	JO
	Nivel/Tipo[9]	Nivel/Tipo	Nivel/Tipo	Nivel/Tipo
I.1	1/7	1/7	1/7	1/7
I.2	2/6	2/6	2/6	2/5
II.1	1/6	1/5	1/6	1/6
II.2	2/5	2/5	2/6	2/5
II.3	2/5	2/5	2/6	2/5

[9] Nivel, hace referencia al Nivel de Va Hiele.
Tipo, hace referencia al tipo de respuesta.

III.1	2/4	2/5	2/6	2/5
IV.1	3/5	3/3	3/5	3/3
IV.II	3/3	3/3	3/5	3/6

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

Grado de adquisición de los Niveles de Van Hiele

Una vez organizados los tipos de respuestas al test de razonamiento y los niveles vinculados a cada uno, en la siguiente tabla se organiza la ponderación del grado de adquisición de los niveles (1, 2 y 3) por cada ejercicio.

Tabla 15 y 16: Grado de adquisición de los Niveles de Van Hiele por estudiante

Ejercicio	OS			LH		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
I.1	100	-	-	100	-	-
I.2	100	80	-	100	80	-
II.1	80	-	-	75	-	-
II.2	-	75	-	-	75	-
II.3	-	75	-	-	75	-
III.1	-	50	-	-	75	-
IV.1	-	100	75	-	100	25
IV.II	-	-	25	-	-	25
Gr	93%	76%	50%	92%	81%	25%
	Completa	Alta	Media	Completa	Alta	Baja

Ejercicio	CM			JO		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
I.1	100	-	-	100	-	-
I.2	100	80	-	100	75	-
II.1	80	-	-	80	-	-
II.2	-	80	-	-	75	-
II.3	-	80	-	-	75	-
III.1	-	80	-	-	75	-
IV.1	-	100	75	-	100	25
IV.II	-	-	75	-	-	80
Gr	93%	84%	75%	93%	80%	52%
	Completa	Alta	Alta	Completa	Alta	Media

Fuente: Tomado y adaptado de Jaime (1993)

A partir de lo recogido en las tablas 15 y 16, se observa que los cuatro estudiantes que participaron del estudio presentan un grado de adquisición "completo" respecto al nivel 1. Es decir, todos estos estudiantes no mostraron dificultades en desarrollar los tres ejercicios planteados para dicho nivel. Asimismo, de acuerdo a Gutiérrez y Jaime (1994), las respuestas de estos alumnos demuestran manejo de percepción global de los triángulos y cuadriláteros en base a sus características físicas. También, emplean definiciones en base a atributos generales como se observó en el ejercicio I.2 del test.

En relación a los grados de adquisición del nivel 2, se aprecia en las tablas 15 y 16 que los cuatro estudiantes alcanzaron un grado de adquisición "alto" respecto a dicho nivel. Este grado de adquisición significa que los estudiantes son capaces de identificar los triángulos y cuadriláteros en base a algunas propiedades matemáticas, de igual manera, emplean dichas propiedades con cierto grado de dificultad al definir los triángulos y cuadriláteros (Gutiérrez y Jaime, 1994). De los cuatro estudiantes, CM presenta un grado de adquisición más alto que OS, con una diferencia de 8%. Uno de los ejercicios que sustenta esta diferencia es el III.1, en el que se aprecia como CM a diferencia de OS señala más de una característica de las figuras relacionadas a los lados y los ángulos.

Por último, respecto al nivel 3, los niños alcanzan distintos grados de adquisición. LH alcanza un grado "bajo" respecto a este nivel 3, JO y OS alcanzan un grado "medio", y CM alcanza un grado "alto" del mismo nivel. Respecto a LH, este alcanza grado "bajo" ya que apoya sus justificaciones en percepciones globales sobre los triángulos y cuadriláteros. Por su parte JO y OS, quienes alcanzan un grado "medio" del nivel 3, emplean algunas propiedades elementales relacionadas a los triángulos y cuadriláteros para justificar sus respuestas; se aprecia como en muchas de sus respuestas estas propiedades son memorizadas pues pese a que son correctas las emplean erróneamente. En relación a CM, quien obtuvo grado "alto" de adquisición del nivel 3, se observa que en la mayoría de sus justificaciones emplea propiedades relacionadas a las características de los triángulos y cuadriláteros.

CONCLUSIONES

Los resultados del test de razonamiento geométrico permitieron identificar y analizar los distintos grados de adquisición de los niveles de Van Hiele presentes en cuatro estudiantes de 5to de primaria de una IE particular de Lima metropolitana respecto al tema de triángulos y cuadriláteros. En este punto se exponen las principales conclusiones a las que se llegó tras finalizar el trabajo de investigación.

En primer lugar, se encontró que los cuatro estudiantes presentan un grado de adquisición completo respecto al nivel 1 o nivel de “visualización”. Esto quiere decir que todos estos estudiantes no mostraron dificultades en desarrollar los tres ejercicios planteados para dicho nivel. Los mismos han demostrado dominio de su percepción global para identificar y caracterizar triángulos y cuadriláteros, empleando definiciones para estas figuras que parten de sus atributos generales.

Asimismo, los cuatro estudiantes presentan un grado de adquisición alto respecto al nivel 2 o nivel de “análisis”, lo cual demuestra la capacidad que poseen para identificar y definir triángulos y cuadriláteros en base a algunas propiedades matemáticas. Por su parte, solo uno de los cuatro estudiantes presenta un grado de adquisición alto respecto al nivel 3 o nivel de “clasificación”, lo que significa que en la mayoría de sus justificaciones emplea correctamente las propiedades de ambas figuras.

De igual manera, es importante señalar que las habilidades del razonamiento geométrico en los niños varían gradualmente de acuerdo a los niveles de Van Hiele. Así, si la habilidad de identificación de un estudiante es alta en el nivel 1, en el nivel 3, por ejemplo, podría descender.

Respecto a la habilidad de razonamiento geométrico relacionada a la identificación, esta desarrolló una constante en todo el estudio. En la mayoría de respuestas, se observa como los estudiantes se apoyan de esta habilidad basándose en la percepción global de las figuras o en sus características físicas.

En cuanto a las habilidades de razonamiento geométrico relacionadas a la definición y clasificación, estas se basaron en propiedades básicas de los triángulos y cuadriláteros tales como el número de lados o ángulos de dichas figuras.

Por otro lado, cabe resaltar que los estudiantes emplean un lenguaje matemático diverso para responder y justificar las preguntas del test. El vocabulario que presentan los alumnos va desde el uso de palabras coloquiales hasta el uso de palabras matemáticas establecidas por convención, como por ejemplo "cuadrado largo" o "figura de cuatro lados".

Tras el análisis de investigación, se observaron las propiedades de los niveles de Van Hiele, sobre todo, se aprecia como la continuidad de los niveles permite a los niños poseer distintos grados de adquisición, y cómo el lenguaje geométrico varía de niño a niño, desde usar un vocabulario cotidiano a usar un vocabulario más especializado. Los estándares o desempeños de aprendizaje presentados al inicio de la investigación que están relacionados a quinto grado de primaria, guardan consecuencia con lo recogido en el test.

A partir de los resultados de la presente investigación, se concluye también que es importante para los docentes conocer los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico o niveles de Van Hiele. De tal manera que pueda enfatizar en posibles errores, dificultades o asegurar la comprensión de propiedades relacionadas, por ejemplo, a los polígonos.

Por último, en el presente estudio se aprecia la diversidad y complejidad del razonamiento geométrico en cada estudiante, quienes pese a pertenecer al mismo grado y compartir ciertas características, desarrollan habilidades de razonamiento geométrico en distintos grados de acuerdo a los niveles de Van Hiele.

RECOMENDACIONES

A continuación, se exponen algunas recomendaciones que pueden ser trabajadas en futuras investigaciones relacionadas al tema desarrollado en el presente estudio:

1. Respecto a la caracterización de los niveles de razonamiento geométrico, se sugiere centrarse en un solo elemento de la geometría. Así, por ejemplo, si se quiere saber el razonamiento geométrico de los estudiantes respecto a los polígonos, deberá establecerse o seleccionarse una familia de polígonos en específico. En el presente estudio se trabajó con dos familias de figuras geométricas planas: cuadriláteros y triángulos, por lo que la investigación tuvo cuidado al trabajar las distintas propiedades y características de cada una de ellas.
2. En relación a la descripción de los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele, se sugiere que la investigación parta por el enfoque de grados de adquisición de los niveles. Este enfoque permite conocer que procedimientos y habilidades matemáticas están detrás de la determinación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele.
3. Se sugiere que el test de razonamiento geométrico, empleado para caracterizar los niveles de Van Hiele en los estudiantes, presente un número reducido de ejercicios, de tal manera que permita determinar el grado de adquisición de dichos niveles y al mismo tiempo no sea agotador al ser resuelto.
4. Asimismo, es favorable ofrecer a los estudiantes ejercicios que no solo muestren el razonamiento de los niños a través de los resultados (cálculos), sino también que promueven el desarrollo de distintas habilidades matemáticas como: demostración, comparación, argumentación, interpretación, entre otras.
5. Respecto a los docentes, es importante adquirir en nuestra práctica diaria ojos de investigador/a, por lo que aplicar este tipo de pruebas permite recabar información necesaria para responder a las necesidades de nuestros estudiantes.
6. Por último, es importante que el MINEDU, como organismo principal de la educación peruana, promueva prácticas docentes que se interesen por estudiar o reconocer los distintos procesos de pensamiento que están detrás de cada campo de la geometría o las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akkaya, R., Celebi Akkaya, S. y Erdogan, T. (2009). *The Effect of the Van Hiele Model Based Instruction on the Creative Thinking Levels of 6th Grade Primary School Students.* Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ837779.pdf

Aravena, M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Educación de las Ciencias, 34 (1),* 107-128. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/306639/396634

Arias, F. (2012). *El proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica.* Recuperado de: http://ebevidencia.com/wp-content/uploads/2014/12/EL-PROYECTO-DE-INVESTIGACI%C3%93N-6ta-Ed.-FIDIAS-G.-ARIAS.pdf

Barrantes, R. (1997). *Investigación: Un camino al conocimiento. Un enfoque cualitativo y cuantitativo.* Costa Rica: EUNED

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Margarit, J., Pascual, A., Pastor A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencias.

Corberán, R., Huerta, P., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1989). *Didáctica de la Geometría: Modelo Van Hiele.* España: Edició Valencia

Corporativo Enlace. (2014, Enero 27) *Diferencias entre la Investigación Cualitativa y Cuantitativa* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=hDD7yv1mHDI

De Villiers, M. (2012). Some Reflections on the Van Hiele theory. *National Mathematics Congress.* Conferencia llevada a cabo en Swakopmund, Namibia. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/264495589_Some_Reflections_on_the_Van_Hiele_theory

Díaz, B. & Sime, P. (2009). *La explicitación de la metodología de investigación. Un vistazo.* Recuperado de http://blog.pucp.edu.pe/blog/wp-content/uploads/sites/184/2009/02/boletin2.pdf

Gamboa, R. y Vargas, G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27 (1),* 74-94. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319

Godino, J. (2004). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16 (3),* 103-125. Recuperado de http://www.redalyc.org/html/405/40516306/

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas, (32), 55-70.* Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a05.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. *El Grupo de las Isometrías del Plano* (85-97). Madrid, España: Editorial Síntesis, S. A.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceeding of the 18 th PME conference, Lisboa, (2),* 41-48. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/237561733_A_model_of_test_design_to_assess_the_Van_Hiele_levels

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acqusion of the van hiele levels. *Journal for research in Mathematics Education, 22 (3), 237-251.* Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJaiFor91.pdf

Gutiérrez, Á., y A. Jaime (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros. *Educación Matemática, (3).* México: Editorial Iberoamérica

Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Tesis Doctoral. Recuperado de https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Jara, L. (2015). *Niveles de razonamiento según el modelo de van hiele que alcanzan los estudiantes del primer año de secundaria al abordar actividades sobre paralelogramos* (tesis para optar grado de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Kitzinger, J. (1995). Introducing focus group. *US National Library of Medicine National Institutes of Health*. Recuperado de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2550365/pdf/bmj00603-0031.pdf

Lobo, N. (2004). Aplicación del modelo propuesto en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. *Multiciencias, 4.* Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90440104

Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele*. Lima: Tesis Maestría. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/4733/MAGUI%C3%91A_ROJAS_ALBERT_PROPUESTA_CUADRILATEROS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, M. (1999). *La investigación cualitativa etnográfica en educación*. México: Trillas.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. México: Sistemas Técnicos de Edición

Ministerio de Educación del Perú. (2016). Área de Matemática. *Programa Curricular de Educación Primaria,* 230-271. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-primaria-16-marzo.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2017). Cuaderno de trabajo de 6to grado, Educación Primaria. *Matemática*. Recuperado de http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/5260

Ministerio de Educación del Perú. (2017). Programas curriculares de la Educación Básica Regular. *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/

Salvat Editores. (2004). Triángulos. En *La Enciclopedia. Vol. 19, p.15135-15137*. Madrid, España: Salvat Editores.

Salvat Editores. (2004). Cuadriláteros. En *La Enciclopedia. Vol. 19, p.4075-4076*. Madrid: Salvat Editores.

Suárez, M. (2017). Módulo 4: Desarrollo de la Investigación. *Seminario de Tesis 2. Estudios empíricos.* Lima: Maestría en Integración e Innovación Educativa de las TIC.v

Uribe, S.; Cárdenas, O. y Becerra Martínez, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática, vol. 26, núm. 2*, pp. 135-160

Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria* (tesis para optar grado de Magíster). Universidad de Cantabria, Cantabria, España. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf;sequence=1

Vitruvio, M. (s.f). *Los diez Libros de Arquitectura*. Recuperado de https://www.u-cursos.cl/fau/2015/0/AO104/1/foro/r/1_Vitrubio_Los_diez_Libros_de_Architectura.pdf

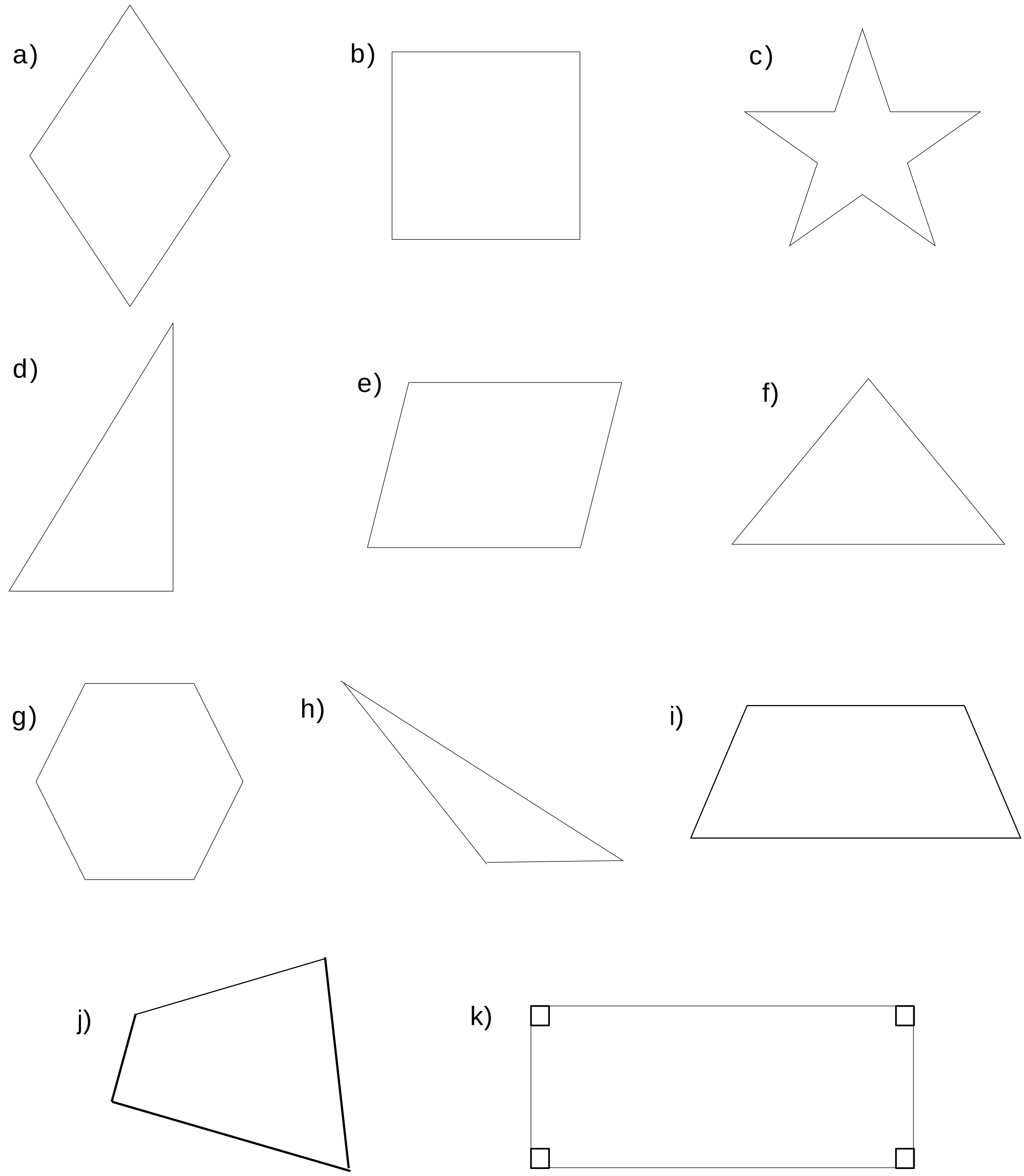
ANEXOS

Anexo 1
Test de razonamiento geométrico

A continuación, encontrarás cuatro actividades, presta mucha atención y resuelve cada una de ellas.

ACTIVIDAD I

1. Observa las siguientes figuras, luego escribe una “X” dentro de los triángulos y una “Y” dentro de los cuadriláteros.



2. Responde lo siguiente:

a) ¿Cómo sabes qué figuras son triángulos y qué figuras no son triángulos?

b) ¿Cómo sabes qué figuras son cuadriláteros y qué figuras no son cuadriláteros?

c) Escribe la letra de las figuras que no son triángulos y explica, en cada caso, ¿por qué no son triángulos?

d) Escribe el número de las figuras que no son cuadriláteros y explica, en cada caso, ¿por qué no son cuadriláteros?

ACTIVITY II

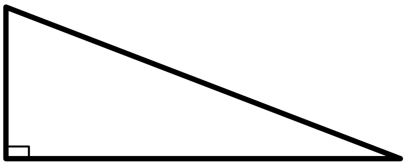
1. Observa cada figura y escribe todos sus posibles nombres en las líneas de la derecha:

Figura *Nombres posibles*

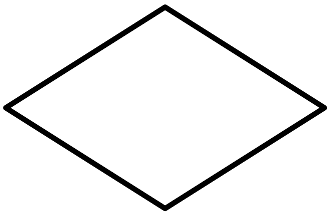
a)

b)

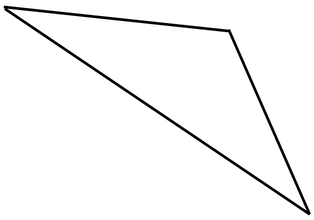
c)



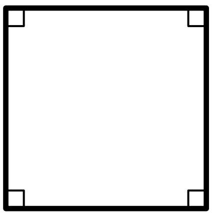
d)



e)



f)



g)

2. A partir de las respuestas anteriores, completa los siguientes espacios en blanco:

Figura	Nombre 1	Nombre 2	Nombre 3
a)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
b)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
c)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
d)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
e)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
f)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________
g)	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________	Es un ____________________, porque ____________________

3. Lee las siguientes definiciones:

Triángulo: es un polígono que tiene tres lados y tres ángulos.

Romboide: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Rectángulo: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.

Rombo: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y cuatro lados de igual medida.

Cuadrado: es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos cuyos lados son de igual medida y cuyos ángulos son todos rectos.

Trapecio: es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

Ahora, para cada figura mostrada en la página 4 y con ayuda de las definiciones dadas, completa los siguientes espacios en blanco.

Figura	Nombre 1	Nombre 2	Nombre 3
a)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
b)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
c)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
d)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
e)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
f)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________
g)	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________	Es un ________, porque ________

ACTIVIDAD III

1. Lee las siguientes definiciones:

Figura A: Es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos. Figura B: Es un triángulo que tiene lados distintos y uno de sus ángulos es recto.

De acuerdo a las definiciones dadas dibuja la figura A y la figura B, y escribe para cada una su nombre y sus características.

Figura A	Figura B
Nombre:	Nombre:
Características: __________ __________ __________ __________ __________ __________ __________	Características: __________ __________ __________ __________ __________ __________ __________
Dibujo:	Dibujo:

ACTIVIDAD IV

1. Lee los siguientes enunciados y escribe V si son verdaderas o F si son falsas. Luego, escribe una justificación para tus respuestas.

Enunciado	V/F	Justificación
a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 90°.		
b) Los triángulos equiláteros tienen solo dos ángulos de igual medida.		
c) Todos los cuadrados son rectángulos.		
d) Todos los rombos son cuadrados		
e) Todos los triángulos equiláteros son triángulos isósceles.		
f) Todos los paralelogramos son trapecios		

2. Lee atentamente siguientes propiedades:
   - Es una figura geométrica formada por cuatro segmentos.
   - Es una figura geométrica que tiene lados opuestos que son paralelos.
   - Es una figura geométrica que tiene cuatro lados de igual medida.
   - Es una figura geométrica cuyos ángulos opuestos tienen igual medida.

   A partir de las propiedades dadas, escribe el nombre o nombres de la figura o figuras que cumplen con estas propiedades y justifica tu respuesta.

Anexo 2

Matriz de coherencia de investigación

Problema	Objetivo General de la investigación	Objetivos específicos	Categorías	Sub-categorías	Indicadores	Descripción de los indicadores	Número de ítem
¿Cuál es nivel de razonamiento geométrico respecto a los triángulos y cuadriláteros que alcanzan los estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana?	Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico, respecto a los triángulos y cuadriláteros, en estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana.	Describir los niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros, que se espera alcancen los estudiantes de quinto grado de primaria. Identificar el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele, respecto a los triángulos y cuadriláteros, en estudiantes de quinto grado de primaria de una Institución Educativa particular de Lima Metropolitana	Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele	Nivel 1: Visualización	Identificación	- Identifica triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.	Act.I.1
						- Identificar triángulos y cuadriláteros a partir de figuras dadas.	Act.I.2
					Definición	- Caracteriza los cuadriláteros y triángulos a partir de figuras dadas. - Emplea vocabulario geométrico relacionado a los triángulos o cuadriláteros.	Act.II.1
					Clasificación	- Clasificar triángulos y cuadriláteros en base a sus apariencias globales (lados y vértices)	Act.I.2
				Nivel 2: Análisis	Identificación	- Reconoce que los triángulos y cuadriláteros están formados por partes y tienen propiedades matemáticas particulares que los caracterizan.	Act.III.1
					Definición	- Describir las características de triángulos y cuadriláteros utilizando vocabulario geométrico apropiado (por ejemplo: "lados opuestos", "los ángulos consecutivos suman 180°", entre otros).	Act.II.2
						- Define los triángulos y cuadriláteros a partir de las propiedades que caracterizan a cada uno de estos polígonos.	Act.II.3
					Clasificación	- Clasificar triángulos y cuadriláteros en base a sus apariencias globales (lados y vértices).	Act.I.2
					Prueba	- Justifica la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros.	Act.IV.1
				Nivel 3: Clasificación	Definición	- Construye definiciones propias de los cuadriláteros los usando sus propiedades de manera correcta.	Act.IV.2
					Clasificación	- Clasifica diferentes familias de cuadriláteros y triángulos a partir de sus propiedades: lados, vértices y ángulos.	Act.IV.1
					Prueba	- Justifica la verdad o falsedad de enunciados relacionados con triángulos y cuadriláteros, haciendo uso correcto de definiciones y propiedades.	Act.IV.1

Anexo 3

Cronograma de trabajo

Cronograma de trabajo con las actividades: Diagrama de Gantt

Tiempo Tarea	2017																					2018																																	2019				
	Ag.			Set.				Oct.				Nov.					Dic.					Mzo.			Abr.					My.					Jun.					ul.					Ag.					Set.-Dic.					Ene…				
	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Definición y planteamiento del problema																																																											
Búsqueda bibliográfica - Antecedentes - Marco teórico																																																											
Diseño de la investigación																																																											
- Matriz empírica																																																											
- Metodología de la investigación																																																											
Operativización metodológica																																																											
- Contacto con los informantes																																																											
- Diseño de instrumentos																																																											
- Validación de instrumentos																																																											
Recolección de la información																																																											
Organización de la información																																																											
Análisis y consolidación de la información																																																											
Comunicación y difusión																																																											