PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Título

CONOCIMIENTOS ESPECIALIZADOS DEL PROFESOR SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN UN CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

ELÍAS GUTIÉRREZ GARAY

ASESORA

NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

Abril, 2019

RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito identificar los conocimientos especializados que tienen dos profesores sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería. Las investigaciones realizadas a nivel universitario con respecto a este tema son muy escasas en nuestro país y la mayoría de ellas se han realizado con estudiantes en la educación secundaria. Esta investigación se realiza aplicando el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que se desarrolla dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS), cuyas herramientas nos han permitido identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor universitario que enseña contenidos matemáticos. Esta investigación es de tipo cualitativo y el método empleado es el estudio de caso. Con los antecedentes encontrados al buscar la literatura correspondiente sobre la enseñanza y aprendizaje de los SEL se construye un instrumento, que contiene dos cuestionarios (Actividad 1 y Actividad 2) relacionados con nuestro objeto matemático de estudio que son los SEL, el cual fue aplicado a dos profesores que tienen un posgrado en enseñanza de las matemáticas y que dictan un curso de Álgebra Lineal en una universidad privada de Lima para obtener información de los conocimientos común, ampliado y especializado. A partir del análisis de los datos obtenidos, se puede inferir que los dos profesores en este estudio tienen el conocimiento común del contenido necesario para resolver las tareas propuestas en los textos del nivel al que enseñan; sin embargo, en relación con los conocimientos ampliado del contenido y especializados (en la faceta epistémica) hay algunos aspectos que son limitados o desconocidos por ellos.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS), conocimiento especializado, sistemas de ecuaciones lineales, álgebra lineal.

ABSTRACT

The purpose of this research is to identify the specialized knowledge that two professors have about linear systems of equations (SEL) in a Linear Algebra course for engineering students. The research carried out at the university level regarding this subject is very scarce in our country and most of them have been carried out with students in secondary education. This research is carried out applying the Didactic-Mathematical Knowledge Model (CDM) developed within the theoretical framework of the Ontosemiótico Approach of Mathematical Cognition and Instruction (EOS), whose tools have allowed us to identify the specialized knowledge that a university professor has when he teaches mathematical contents. This research is qualitative and the method used is the Case Study. With the background found when searching the corresponding literature on teaching and learning of the SEL, an instrument is constructed, which contains two questionnaires (Activity 1 and Activity 2) related to our mathematical object of study, which are the SEL, which was applied to two professors who have a postgraduate degree in mathematics teaching and who teach a course in Linear Algebra at a private university in Lima to obtain common, expanded and specialized knowledge information. From the analysis of the obtained data, it can be inferred that the two professors in this study have the common knowledge of the necessary content to solve the tasks proposed in the texts of the level they teach; however, in relation to expanded content and specialized knowledge (in the epistemic facet) there are some aspects that are limited or unknown by them.

Keywords: Ontosemiotic Approach of Mathematical Cognition and Instruction (EOS); specialized knowledge; systems of linear equations; linear algebra.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a mi asesora la Dra. Norma Rubio Goycochea por su dedicación y su apoyo incondicional al desarrollo de la tesis.

A mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus enseñanzas y por haber contribuido en la mejora de mis conocimientos didácticos-matemáticos. En especial a los profesores: Dra. Jesús Victoria Flores, Dra. Cecilia Gaita, Dr. Uldarico Malaspina, Dr. Francisco Ugarte y Dr. Alejandro Ortiz.

A mi esposa Lucía por su paciencia y apoyo constante para lograr mis objetivos, a mis hijos Ana, Alonso y Álvaro.

A la memoria de mis padres Constanza y Nolberto.

A mis hermanos Daniel, Edgardo, Ysabel, Guillermo, Esteban y César.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Un profesor que imparte el curso de Álgebra Lineal, como todo docente tiene que tener dominio de los contenidos que enseña, ya que no debe enseñar un tema que no sabe bien, porque ello tendrá efectos negativos en el aprendizaje de sus alumnos. En la universidad privada en donde se realizó la aplicación del instrumento de nuestra investigación, la mayoría de los profesores que dictan el curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería son ingenieros que se dedican a la docencia universitaria, otros son matemáticos puros o algunos son profesores de educación con mención en Matemáticas o en Matemáticas y Física. Nuestro interés es realizar una investigación que permita identificar y evidenciar los conocimientos especializados que tienen dos profesores sobre los SEL, ya que las actividades que realizan en el aula con los alumnos dependen de los conocimientos que ellos poseen. Esta investigación tiene como propósito central identificar ¿qué conocimientos especializados tiene un profesor universitario, que imparte un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales? Para ello, aplicaremos el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que es parte del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Desde este referente teórico de la didáctica de la matemática, construimos un instrumento que nos ha permitido identificar los conocimientos didácticos-matemáticos en las faceta epistémica del CDM que tienen los profesores; es decir, el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado. Esta investigación es de tipo cualitativo y el método empleado es el estudio de caso.

La tesis ha sido organizada en cinco capítulos que a continuación se describen brevemente.

En el capítulo 1 exponemos la relevancia de nuestro problema de investigación y una síntesis de las investigaciones realizadas sobre los sistemas de ecuaciones lineales y de los conocimientos didáctico-matemáticos de un profesor de matemáticas. Asimismo, justificamos la importancia de nuestra investigación, enunciamos la pregunta de investigación y finalmente presentamos el objetivo general y los respectivos objetivos específicos.

En el capítulo 2 hacemos una descripción de los aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) implementado por éste marco teórico de la didáctica de la Matemática. Asimismo, el método cualitativo que se ha usado (estudio de caso) y finalmente presentamos una descripción de los aspectos metodológicos de nuestra investigación, en la cual describimos el diseño, la construcción y la validación del instrumento de investigación basado en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del EOS que nos permite identificar los conocimientos especializados que tienen dos profesores sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

En el capítulo 3 realizamos una síntesis de los aspectos matemáticos y didácticos de nuestro objeto de estudio, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Asimismo, una recopilación de los aspectos históricos de los SEL y su desarrollo a lo largo de la historia.

En el capítulo 4 describimos y analizamos las respuestas obtenidas de la aplicación del instrumento a la parte relacionada a los SEL (Actividad 1 y Actividad) de dos profesores egresados de una maestría en enseñanza de las matemáticas. Se realiza un análisis de la práctica matemática según el EOS y del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

En el capítulo 5 se presenta las principales conclusiones a las cuales he llegado con respecto a los objetivos propuestos. Asimismo, se realiza algunas recomendaciones y perspectivas para futuras investigaciones con respecto a los conocimientos especializados que tiene un profesor universitario que dicta un curso de Álgebra Lineal.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presenta la relevancia de nuestro problema de investigación que consiste en identificar los conocimientos especializados de dos profesores relacionados con la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), el cual es un tópico indispensable en un curso de álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería. También, hacemos una síntesis de las investigaciones realizadas sobre los sistemas de ecuaciones lineales en el ámbito de la educación secundaria y superior. Además, presentamos una síntesis de las investigaciones realizadas sobre los conocimientos didáctico-matemáticos que debe tener un profesor de matemáticas según el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) desarrollado e implementado por la teoría del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y las realizadas con otro marco teórico como el del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK). Asimismo, justificamos la importancia de nuestra investigación, enunciamos nuestra pregunta de investigación y los objetivos de la misma.

1.1 Antecedentes

En la didáctica de la matemática es importante reconocer los conocimientos especializados que tienen los profesores para una enseñanza efectiva de los tópicos de la matemática, ya que la mayoría de los profesores universitarios de matemáticas tienen conocimiento de la disciplina que imparten, pero no cuentan con una formación sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática. Uno de los pioneros en realizar estudios sobre los conocimientos del docente para la enseñanza ha sido Shulman (1986) que propone tres tipos de conocimientos: "conocimiento de los contenidos (*Content knowledge*, CK), conocimiento pedagógico (*Pedagogical Knowledge*, PK) y conocimiento pedagógico de los contenidos o conocimiento didáctico de los contenidos (*Pedagogical Content knowledge*, PCK)" (p. 9). También reconoce que aparte del conocimiento que deben tener para una enseñanza eficaz, los profesores deben aprender y manejar otros tipos de contenidos. Además, con respecto al conocimiento pedagógico de los contenidos o conocimiento didáctico de los contenidos menciona que: "es aquel que se relaciona con las formas de enseñar el contenido, por lo tanto va más allá del contenido en cuestión, considerando sus representaciones, ejemplos, demostraciones, etc., colocando especial énfasis en cómo hacerlo comprensible para los estudiantes, para así enseñarlo mejor" (Shulman, 1986, p. 9).

En el marco de la teoría del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) desarrollan el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), el cual posibilita el análisis del conocimiento didáctico-matemático y de las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar matemáticas de manera que se promueva aprendizajes en sus alumnos.

Pocas investigaciones se han realizado en nuestro país sobre la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario y más escasas aún son las investigaciones sobre los conocimientos especializados que tiene el profesor. Sin embargo, se han realizado investigaciones sobre otros aspectos, entre ellos podemos mencionar sobre los errores y dificultades en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (SEL), como las realizadas por Valencia (2015) y Figueroa (2013); las dificultades que tienen los alumnos en los problemas contextualizados que involucran a los SEL desarrolladas por Neira (2012) y Figueroa (2013) y con respecto a las tareas propuestas en los libros de textos a nivel secundario y superior sobre los SEL llevada a cabo por Garcés (2013).

Una de las investigaciones más recientes en el Perú con respecto a las tareas propuestas en los libros de textos a nivel secundario y superior sobre los SEL en la educación secundaria y en la educación superior tecnológica es la realizada por Garcés (2013), quien tomando el marco teórico el EOS, hace un estudio sobre la idoneidad de las tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales propuestos a los estudiantes en los textos de matemática de educación secundaria y superior tecnológica. En esta investigación se utilizan las herramientas del EOS, tales como sistemas de prácticas operativas y discursivas, la configuración de objetos y procesos matemáticos, las configuraciones epistémicas, y la idoneidad didáctica en las facetas epistémica, cognitiva y ecológica. Se concluye que las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto sobre sistemas de ecuaciones lineales de la secundaria pública tienen una baja idoneidad epistémica y que los textos de nivel superior poseen un alto grado de idoneidad epistémica. Además, en sus conclusiones el investigador sugiere que en la educación superior se desarrolle las tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales a partir de problemas contextualizados de modo que la actividad matemática sea más integradora para el estudiante. Esta investigación es importante no solo por el objeto matemático de estudio, sino por la extensión que realizaremos al nivel universitario al analizar el texto obligatorio que utilizan los docentes que dictan el curso de álgebra lineal en una universidad privada de Lima.

Otra investigación realizada en el Perú con respecto a los SEL a nivel superior es la realizada por Neira (2012) que tiene como marco teórico la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) para la resolución de problemas contextualizados mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos variables en estudiantes del primer año de una universidad privada de Lima. Esta investigación tiene como objetivo analizar las dificultades que tienen los estudiantes al traducir un problema contextualizado al lenguaje matemático y viceversa, las cuales utilizan a los sistemas de ecuaciones lineales en su planteamiento y que se encuentran en el libro texto de un primer curso de matemática el cual es utilizado por los alumnos. Se concluye que los estudiantes presentan dificultades en la traducción de los problemas contextualizados del lenguaje verbal al lenguaje matemático y viceversa. También, se observó que los alumnos no validan la relación matemática que modela al problema, ni verifican o interpretan los resultados. Los problemas contextualizados de esta investigación son tomados en cuenta al elaborar el instrumento que se aplica a dos profesores en nuestra investigación.

Además, con respecto a los SEL en la educación secundaria, en la investigación de Figueroa (2013) se identifican las dificultades que tienen los estudiantes del cuarto año de educación secundaria, con respecto a su capacidad de resolución de los SEL con dos incógnitas. En esta investigación se utiliza como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), como proceso metodológico la Ingeniería Didáctica y analiza sus resultados con el apoyo de la Teoría de Representación Semiótica. Entre sus conclusiones, se menciona que la creación de problemas en los que se consideran los sistemas de ecuaciones lineales es una actividad que mejora la habilidad de resolución de problemas.

Hay que mencionar también, la investigación realizada en el Perú por Valencia (2015), que tiene como objetivo describir y explicar los errores que cometen y las dificultades que tienen un grupo alumnos de ingeniería de una universidad privada de Lima al momento de describir el objeto de estudio: procedimiento al describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. El paradigma de investigación que se utiliza es el empírico-analítico y realiza como parte de su metodología un análisis exploratorio para establecer las prácticas realizadas por los estudiantes con su objeto de investigación. Se concluye que los estudiantes al tratar de referirse al espacio generado por un conjunto de vectores, ellos cometen errores al pasar los sistemas de ecuaciones lineales del registro algebraico al matricial, el concepto de conjunto solución de un SEL y no saben cuándo un SEL tiene o no solución. La investigación menciona algunas dificultades que tienen los alumnos en la resolución de los SEL, entre las cuales se menciona el regreso de una representación matricial de un SEL mediante la matriz aumentada a un forma algebraica, la resolución de SEL que tiene menos ecuaciones que el número de incógnitas, la representación del conjunto solución de un SEL que tiene infinitas soluciones y la dificultad que tienen los alumnos en la resolución de SEL con parámetros. La investigación realizada muestra la importancia que tiene en la resolución de los SEL el método de escalonamiento de Gauss-Jordan, el uso de parámetros en la resolución de un SEL y como determinar su conjunto solución. Los errores y las dificultades encontradas en esta investigación con respecto a los SEL es usada en la elaboración de los ítems del instrumento de la investigación que se aplica a dos profesores de una universidad privada de Lima.

Con respecto a la comunidad internacional, podemos mencionar algunas investigaciones realizadas sobre los SEL, su resolución por el método de escalonamiento y su conjunto solución, como la realizada por Barros, Fernandes y Mendes (2012), Ochoviet (2009) y Tavares (2013).

En la investigación realizada por Barros, Fernandes y Mendes (2012), de naturaleza cuantitativa y descriptiva, se hace un análisis de los raciocinios desarrollados por los alumnos en la verificación de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Entre sus conclusiones se menciona la ausencia del significado de las operaciones elementales en el estudio de un SEL por el método de eliminación de Gauss, afirmando que los alumnos no comprenden el significado de las operaciones elementales y también la forma superficial como se resuelven si tiene infinitas soluciones o cuando no tienen solución. La construcción del instrumento de nuestra investigación toma en cuenta preguntas al profesor con respecto al conocimiento de las dificultades y errores que cometen los alumnos al momento de la resolución de un SEL.

Asimismo, con respecto al conjunto solución de los SEL, en la investigación de Ochoviet (2009) se realiza una secuencia de enseñanza y de actividades sobre el aprendizaje del concepto solución de un SEL con dos y tres variables en estudiantes uruguayos del nivel secundario y superior. La investigación da a conocer la problemática existente en su comprensión y la importancia que tienen los SEL como un inicio al álgebra lineal, así como las relaciones entre las representaciones geométricas y gráficas de los SEL de modo que se facilite su aprendizaje. Nuestro instrumento de investigación consta de ítems sobre cómo el profesor introduce el concepto de conjunto solución de un SEL en una sesión con sus estudiantes.

Además, los SEL son estudiados en el contexto histórico por Tavares (2013) quien menciona que la historia de la matemática puede ser una introducción motivadora de los tópicos de matemática en la enseñanza media, ya que en los libros de enseñanza media de Brasil es insertado como una ilustración y no como una metodología de enseñanza. Su objeto de investigación es la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss. La importancia de conocer el contexto histórico de nuestro objeto de estudio y su desarrollo a través del tiempo, forma parte de nuestro instrumento de investigación.

Por otro lado, la investigación de Vasco (2015) sobre conocimientos especializados del profesor de álgebra lineal, tiene como marco teórico a *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), es de tipo cualitativo y el método utilizado es el estudio de casos. Esta investigación tiene como objetivo analizar el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal a través del análisis de su práctica educativa de los contenidos de un curso de álgebra lineal como: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Tomamos en cuenta esta investigación en la elaboración del instrumento que nos permita identificar los conocimientos especializados que tienen los profesores de dictan un curso de álgebra lineal en una universidad privada de Lima.

Por otra parte, podemos mencionar algunas investigaciones recientes de la aplicación del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), como las de

Vásquez (2014) y de Castro, Pino-Fan y Velásquez (2013), que aplican el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Así, la investigación de Vásquez (2014) tiene como propósito evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad que tienen los profesores de educación primaria en activo. Asimismo, la investigación realizada por Castro, Pino-Fan y Velásquez (2013) tiene como propósito evaluar las tres facetas del conocimiento matemático para la enseñanza de la derivada, como el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento ampliado del contenido de estudiantes del sexto y octavo semestre de las licenciaturas en Matemáticas y Física y Básica Matemática de la Universidad de Antioquia, Colombia. Aunque las investigaciones mencionadas no tienen los mismos temas de nuestra investigación, estos nos sirven como referencia de la aplicación que tiene el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) para identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor.

Conviene subrayar que con respecto al marco teórico EOS, utilizado en nuestra investigación, Godino (2011) afirma que:

> La didáctica de las matemáticas debe aportar conocimientos descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos que ayuden a comprender dichos procesos. Pero también debe orientar, de manera fundamentada, la acción efectiva sobre la práctica y promover su mejora progresiva (p 1).

Además, la investigación de Pino-Fan y Godino (2015) amplían el sistema de categorías de conocimientos didáctico–matemáticos del profesor, cuya base es la aplicación de las herramientas de análisis del EOS. En la investigación se distinguen las dimensiones *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico–matemática*, y se tienen en cuenta los conocimientos que intervienen en las fases de análisis preliminar, diseño, implementación y evaluación del diseño instruccional. Para lograr identificar concordancias y complementariedades, el modelo ampliado del conocimiento didáctico–matemático es comparado con otros modelos propuestos en la disciplina de la Educación Matemática. Asimismo, la investigación de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) describen los conocimientos y las competencias del profesor de matemáticas basado en el EOS. En este sistema teórico propuesto por el EOS se toman en cuenta las nociones de sistema de prácticas, configuración ontosemiótica (epistémica y cognitiva), configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica de dicho sistema teórico, las cuales son consideradas como herramientas de análisis de las prácticas matemáticas y didácticas. Además, se realiza una descripción de acciones formativas que permiten lograr el desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos y de la competencia de análisis e intervención didáctica de los profesores de matemáticas. Nuestra investigación utilizará el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) implementado por el EOS que no permita identificar los conocimientos especializados que tienen los profesores sobre los SEL en un curso de Álgebra Lineal.

1.2 Justificación

En esta sección presentamos la justificación de nuestra investigación para identificar los conocimientos especializados que tienen los profesores sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería. Además, la importancia de la realización de nuestra investigación a nivel universitario, ya que la gran mayoría de profesores universitarios de matemáticas no han sido formados como docentes y el tener solo dominio de las matemáticas no es suficiente para que nuestros alumnos aprendan. También, la posibilidad de identificar que conocimientos especializados tienen los profesores sobre los SEL, para posteriormente implementar capacitaciones que permitan mejoras en la didáctica del docente con respecto nuestro objeto matemático de estudio.

La gran mayoría de profesores de matemáticas a nivel universitario no han sido formados como docentes, por ello es de suma importancia identificar qué conocimientos especializados tiene un profesor de Álgebra Lineal sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Con respecto a la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM), en la cual se toma en cuenta los conocimientos puestos en juego para resolver una tarea matemática se señala que

> El profesor debe ser capaz de movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado

holístico para dicho objeto), proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática. (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 99)

Con respecto a nuestro objeto matemático de estudio, el profesor debe ser capaz de: movilizar las distintas representaciones algebraicas, matriciales y geométricas de un SEL; resolver en forma algebraica, matricial y geométrica un SEL; tener conocimiento de los contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos en donde se utilizan los SEL; conocer los conceptos de SEL equivalentes, matrices equivalentes, conjunto solución de SEL equivalentes; determinar el conjunto solución de un SEL a partir de un SEL equivalente o del rango de la matriz ampliada de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente); representar en forma algebraica y geométrica (punto, recta o plano en el espacio) el conjunto solución de un SEL; conocer el método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL (operaciones elementales filas a una matriz) y de otros métodos de resolución de un SEL (el método de Cramer, matriz inversa); expresar en forma algebraica un problema de contexto mediante un SEL e interpretar las soluciones según el contexto; tener conocimiento de los conceptos matriciales (matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz escalonada, matriz equivalente y rango de una matriz), algebraicos (SEL equivalente y conjunto solución) y geométricos (punto, recta y plano) involucrados en la resolución de los SEL.

Según Vasco (2015), los profesores universitarios de matemáticas deben tener una formación específica relativa a la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, de manera que puedan realizar representaciones que ayuden a desarrollar las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Asimismo, en la investigación de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) se menciona que no son suficientes los conocimientos puramente matemáticos del profesor para que pueda organizar, implementar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que también es necesario que tengan un conocimiento más profundo de la matemática y de su enseñanza, a la cual llama conocimiento didáctico-matemático (CDM).

Lo dicho hasta aquí, supone que es de suma importancia realizar investigaciones que permitan identificar los conocimientos especializados que tienen los profesores y las prácticas que realizan para una enseñanza eficaz de los sistemas de ecuaciones lineales.

Con respecto a la relevancia de nuestra investigación sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), hay que recalcar que los SEL es parte fundamental de un primer curso del álgebra lineal por la gran variedad de aplicaciones que puede realizarse no solo en las matemáticas puras, sino también en otras disciplinas como la física, la química, el análisis de redes de transportes y redes eléctricas, los modelos económicos lineales y también en los problemas cotidianos de la vida real. En la educación superior es un tópico de cualquier curso de Álgebra Lineal que se imparte especialmente en las carreras de ciencias e ingeniería.

Hay que mencionar, además, que el tema de los sistemas de ecuaciones lineales son investigados desde diversas perspectivas, mayormente a nivel secundario y muy poco a nivel superior. La investigación realizada a nivel superior de Garcés (2013) sugiere que en la educación superior se desarrolle tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales a partir de problemas contextualizados. Asimismo, en este nivel educativo, Neira (2012) concluye que los alumnos tienen gran dificultad en la resolución de problemas contextualizados. En la educación secundaria podemos mencionar las investigaciones de Figueroa (2013) y Guerra (2012) en las que también mencionan la importancia de los problemas contextualizados en este nivel educativo. En nuestra investigación, como parte del conocimiento especializado del profesor se analizará las respuestas a tareas que involucren problemas contextualizados relacionados con contextos extra-matemáticos en el instrumento de investigación.

Acerca de las dificultades que tienen los alumnos en hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, en particular, en el manejo de los parámetros, las investigaciones de Valencia (2015), Figueroa (2013) y Martínez y Sáez (2013) mencionan que dichas situaciones ocurren por la diversidad de métodos que se utilizan en su resolución. Considerando las dificultades que manifiestan sobre el concepto de conjunto solución, en nuestra investigación se buscará identificar los conocimientos que tienen los profesores con respecto al conjunto solución de un SEL y la manera como introducen dicho concepto en una clase con sus alumnos.

Hay que mencionar, además que en la investigación de Andrews-Larson (2015) se discuten los contextos históricos que dieron lugar a los SEL. Asimismo, concluye que la historia de la matemática es importante en la enseñanza de las matemáticas, ya que el desarrollo histórico como estrategia de enseñanza hace que los contenidos puedan brindar una copiosa información de los contextos que han contribuido al desarrollo de un SEL y sus soluciones.

Por tanto, es de suma importancia conocer qué conocimientos especializados tienen los profesores de una universidad privada de Lima que dictan el curso de Álgebra Lineal con respecto a los SEL, no solo porque los SEL son un tópico que se imparte en cursos de diversos niveles y carreras, en las carreras de ciencias e ingeniería, sino porque puede servir para implementar capacitaciones en la formación de profesores que permitan mejoras en la didáctica del docente con respecto a nuestro objeto matemático de estudio.

En una breve revisión de los sílabos y programas de diversas universidades del Perú, se observó que los SEL son parte del curso de Álgebra Matricial y Geometría Analítica que se imparte en primer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú a los estudiantes de las carreras ciencias e ingeniería, en un curso de álgebra Lineal que se imparte en segundo ciclo del Programa de Estudios Generales de la Universidad de Lima para las carreras de Ingeniería. Asimismo, en los cursos de cálculo vectorial y álgebra lineal que se imparten en las diversas facultades de la Universidad Nacional de Ingeniería. En el extranjero, podemos mencionar a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador en donde se imparte en el curso de álgebra lineal, la Universidad de Palermo en Colombia en un primer curso de álgebra, en la Universidad Nacional de Córdova en Argentina en un curso de introducción a la Matemática, en el Instituto Tecnológico de Aguas Calientes en México en un curso de álgebra lineal, entre otras universidades.

Es necesario recalcar que pocas investigaciones se han realizado en nuestro país con respecto a los conocimientos especializados que tiene un profesor que dicta un curso de Álgebra Lineal y en particular sobre los SEL a nivel universitario, ya que la mayoría de investigaciones se han realizado con estudiantes en el nivel secundario, por lo cual es importante desarrollar investigaciones sobre los conocimientos especializados del profesor sobre los SEL. Ello nos permitirá reconocer los conocimientos que tienen los profesores, las prácticas matemáticas y didácticas que realizan al resolver problemas sobre los SEL, que servirán para mejorar los procesos de instrucción de este objeto matemático, ya que como hemos mencionado antes, son diversas las dificultades que tienen los estudiantes al aprender este tema.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Qué conocimientos especializados tiene un profesor, que imparte un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales?

Para poder responder a la pregunta de investigación se plantean los objetivos siguientes:

Objetivo general

Identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales.

Objetivos específicos

- Identificar el conocimiento matemático común que un profesor de Álgebra Lineal pone en juego en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales para estudiantes de ingeniería mediante una actividad que involucra la resolución de una serie de ejercicios y problemas adaptados del libro texto del curso.
- Identificar el conocimiento matemático ampliado que tiene un profesor de Álgebra Lineal mediante una actividad que involucre contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos en donde se aplican o están presentes los SEL.
- Identificar el conocimiento matemático especializado que tiene un profesor de Álgebra Lineal mediante una actividad que involucre sus conocimientos puestos en juego, el conocimiento de los tipos conflictos y dificultades en los alumnos y el contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de los SEL.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentamos los aspectos teóricos y la metodología usada en nuestra investigación. El marco teórico que usa nuestra investigación es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y el método que se aplica es el estudio de caso. La investigación tiene por finalidad identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor universitario de una universidad privada de Lima que dicta un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Esta investigación cualitativa es de tipo exploratorio y descriptivo, pues nuestro objetivo general de investigación es el de obtener información de los conocimientos didáctico-matemáticos que tiene el profesor con respecto a nuestro objeto matemático de estudio: los sistemas de ecuaciones lineales.

2.1 Aspectos teóricos del EOS

Diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje son ampliados, profundizados y desarrollados por el EOS, el cual surge a inicios de los años 90. Según Godino (2011), el EOS es "un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (p. 4). Se asumen presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y se adoptan principios didácticos de tipo socio- constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de marco teórico del EOS, se introduce la noción de práctica matemática en Godino y Batanero (1994) como una acción: "(…) toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 8).

Las prácticas matemáticas que realiza el profesor para resolver un problema matemático pueden observarse; por ejemplo, cuando escribe la resolución de un problema de sistemas de ecuaciones lineales o cuando relata sus acciones para resolverlo), los cuales pueden estar representados de diferentes maneras como verbal, gráfica, simbólica o inclusive gestual.

La noción de práctica significativa se define en Godino y Batanero (1994) como:

> Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. (p.9)

Si una práctica cumple con alguna función en la resolución de un problema o para su comunicación, validación o generalización, se dice que es significativa, en términos del EOS.

Dentro del marco teórico del EOS, se han formulado y desarrollado diversos trabajos con respecto al análisis didáctico de los procesos de estudio. En la investigación de Godino, Batanero y Font (2009), se proponen cinco niveles de análisis o tipos de análisis que se pueden aplicar a un proceso de estudio matemático que ya se ha planificado o implementado, el cual permite un análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y son las siguientes:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. (p. 16)

En nuestra investigación sobre los conocimientos especializados del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales, sólo se realizan los dos primeros niveles del análisis didáctico. Godino, Batanero y Font (2009) menciona que:

> El primer nivel de análisis se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente(institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización. (p.17)

2.1.1 Sistemas de prácticas (operativas y discursivas)

Según Godino, Batanero y Font (2009) en relación con los significados institucionales, el EOS propone los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (p. 5)

En relación con los significados personales se propone los tipos siguientes:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de poner en juego el sujeto con respecto a un objeto matemático.
- Declarado: corresponde a las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. (p. 5)

Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 6)

2.1.2 Configuración de objetos y procesos matemáticos

Según Godino, Batanero y Font (2009) mencionan que: “la noción de sistemas de prácticas es útil para ciertos análisis tipos de análisis macrodidáctico, en particular como se adquieren los conocimientos matemáticos en diferentes marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje” (p. 8). La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios introducidos en el EOS responden a la necesidad que se tiene para la descripción de los sistemas de prácticas, con la finalidad de compararlos entre ellas y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

> En el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan (emergen) de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de las prácticas matemáticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una

tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009, p 6).

Según Godino, Batanero y Font (2009), el EOS propone para el primer nivel del análisis didáctico la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Lenguaje: son los términos, expresiones matemáticas, notaciones, símbolos, representaciones gráficas y otros en sus diversos registros (registro, oral, textual, etc.).
- Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, tareas, etc.
- Conceptos-definición: entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición.
- Proposiciones: enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba.
- Procedimientos: técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos, etc.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc. (p. 7)

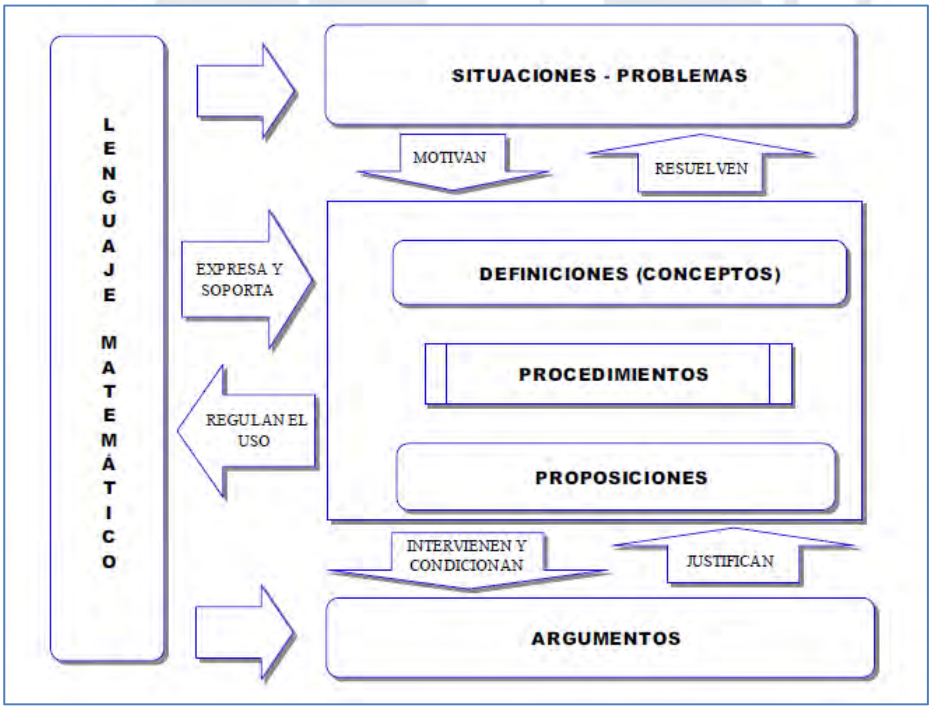


Figura 2. Configuración de Objetos matemáticos primarios

Fuente: Godino, *et al*. (2009, p. 7)

2. 2 Modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor

El EOS tiene como eje central la modelización del conocimiento matemático, en su doble faceta epistémica (institucional) y cognitiva (personal), la cual se sustenta mediante una aproximación antropológica (la matemática como actividad humana) y ontosemiótica (en la cual la noción de objeto y significado son primordiales). Esta modelización aporta las categorías primarias del *conocimiento didáctico-matemático* (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015).

Según Godino (2009), el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), se entiende como el conocimiento didáctico y las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar matemáticas para promover aprendizajes en sus alumnos. El profesor de matemáticas tiene que conocer las matemáticas en el nivel educativo en que enseña (conocimiento común), pero también poder articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles superiores (conocimiento ampliado).

Según Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017):

> Los conocimientos puramente matemáticos no son suficientes para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, los factores que influyen en dichos procesos son complejos, y es necesario tener también, un conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, diferente del que adquieren los estudiantes, que llamaremos conocimiento didáctico-matemático. (p. 291)

En la figura 5 se presenta el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

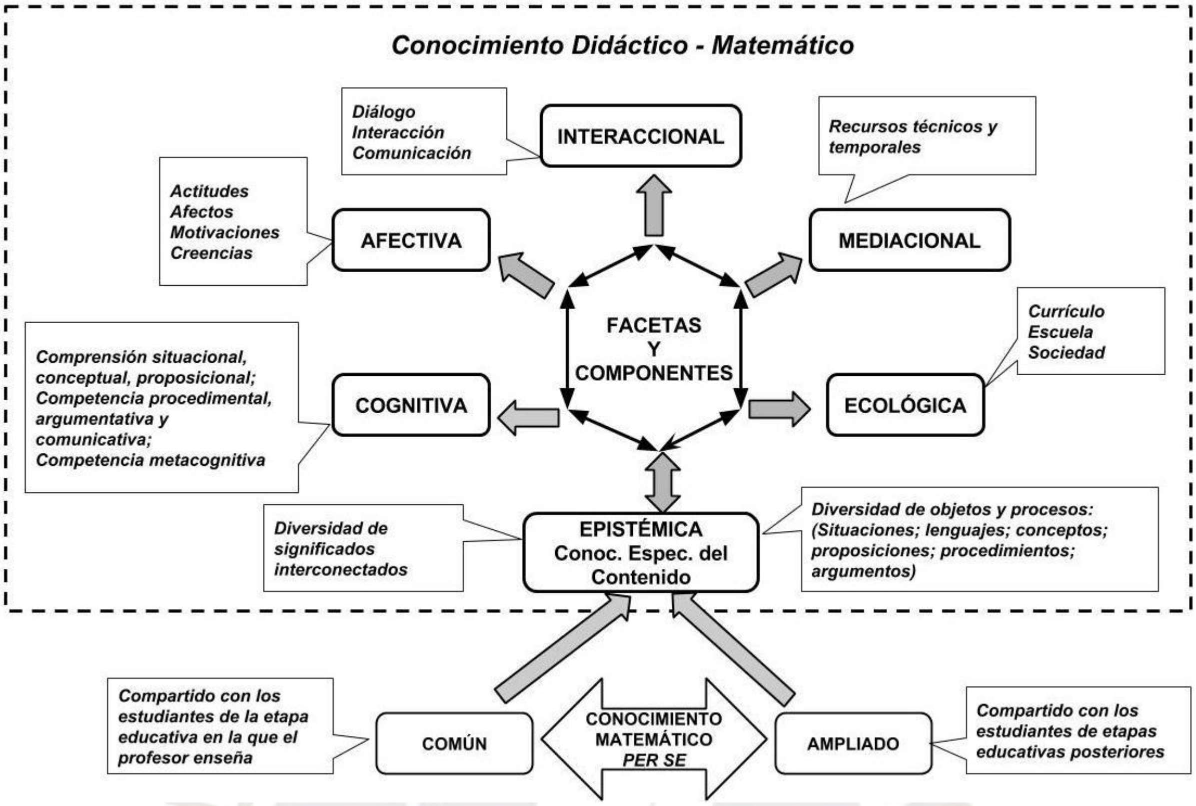


Figura 3. Facetas y componentes del conocimiento del profesor

Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

Según Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) incluye las siguientes facetas:

Faceta epistémica. Es el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce las matemáticas.

Faceta cognitiva. Implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como mejoran en su aprendizaje.

Faceta afectiva. Incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Faceta interaccional. Se refiere al conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes e interacciones que se puede establecer en el aula.

Faceta mediacional. Es el conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

> **Faceta ecológica**. Implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, la identificación de elementos del currículo que son abordados en la realización de una tarea y los factores socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática en los estudiantes. (p. 97)
>
> Todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la medida en que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático, sea común o ampliado. Además, todas ellas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una tarea matemática determinada que involucra ejercicios y problemas contextualizados sobre los sistemas de ecuaciones lineales obtenidos extraído de un libro texto o material del curso (faceta mediacional), el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y deben saber resolver la tarea utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien poder variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva). (p. 97)

En la investigación de Pino-Fan, Godino y Font (2013), se proponen las siguientes tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático:

- **Conocimiento común del contenido.** Se analiza mediante la faceta epistémica y son los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor moviliza para resolver situaciones problemáticas relacionados a un tema específico de las matemáticas. Es el conocimiento que el profesor comparte con los estudiantes del nivel educativo en donde se desempeña o con otros profesionales que usan ese conocimiento en cualquier ámbito profesional o científico. Por ejemplo, en el caso de que un profesor deba enseñar los sistemas de ecuaciones lineales, debe ser capaz de resolver situaciones problemáticas que requieran el dominio de los conceptos básicos en el nivel educativo en que se desempeña. Es un conocimiento indispensable que debe tener todo profesor de matemáticas, ya que debe conocer el tema que enseña, debe reconocer si las respuestas dadas por los estudiantes son correctas o incorrectas, o cuando el libro de texto tiene una definición adecuada.
- **Conocimiento ampliado del contenido.** Es un conocimiento matemático que se analiza a través de la faceta epistémica, y se refiere a que el profesor además de saber resolver las situaciones problemáticas sobre un

determinado tema, para un cierto nivel en el cual imparte clases, debe poseer conocimientos más avanzados de este tema en el currículo, de manera que los contenidos matemáticos que imparte se relacionen con temas más avanzados del currículo; es decir, el profesor relaciona el contenido matemático que imparte, los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de Álgebra Lineal, a otros temas más avanzados del currículo como programación lineal, circuitos eléctricos, sistemas de transporte, etc.

- **Conocimiento especializado**. Es un conocimiento que se interpreta mediante la faceta epistémica, y se refiere al conocimiento adicional que el profesor debe saber, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. El conocimiento especializado además debe implicar conocimiento común y parte del conocimiento ampliado.

  Según Pino-Fan, Godino y Font (2013), el conocimiento especializado incluye las cuatro subcategorías siguientes:

  i. El conocimiento del contenido especializado. En este tipo de conocimiento, el profesor no solo debe ser capaz de resolver situaciones problemáticas relacionados a un contenido matemático haciendo uso de diversos significados que están vinculados con el objeto matemático, diferentes tipos de representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, sino también debe ser capaz de identificar los conocimientos puestos en juego (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) en la resolución de determinada situación problemática.

  ii. El conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. Este tipo de conocimiento se fundamenta en las facetas cognitiva y afectiva, en ella el profesor hace una reflexión sistemática sobre el aprendizaje de los estudiantes, es decir, la capacidad de describir los tipos de configuraciones cognitivas que los estudiantes han desarrollado al resolver una situación problemática propuesta, describir los conflictos de aprendizajes y dificultades que tienen los estudiantes en la resolución de un cierta situación problemática, así como la implementación de estrategias para incentivar que los estudiantes se involucren en la resolución de ciertas situaciones problemáticas o en el estudio de un determinado tema.

iii. El conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. Este tipo de conocimiento se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional, en ella el profesor hace una reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, así como la identificación de las consecuencias que puede tener los modelos de gestión en clase.

iv. El conocimiento del contenido en relación con el currículo. Este tipo de conocimiento se fundamenta en la faceta ecológica y está relacionado al contexto en el que se desarrolla la práctica de la enseñanza y aprendizaje.

2.3 Método y metodología de investigación

Esta investigación es de tipo cualitativo y el método utilizado es el estudio de caso. Según Martínez (2006), el método de estudio de caso es una herramienta de investigación, cuya fortaleza radica en que a través de ella se mide y registra la conducta de las personas con respecto al objeto matemático de estudio y en nuestro caso, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), donde los datos se pueden obtener desde una gran variedad de fuentes, tales como documentos, registros de archivos, cuestionarios, entrevistas, observación de los participantes e instalaciones u objetos físicos. En nuestra investigación, se elabora y se aplica un instrumento que consta de tres cuestionarios y se realiza una entrevista semiestructurada a los profesores que dictan el curso de Álgebra Lineal en una universidad privada de Lima.

Asimismo, Ponte (2006) menciona que los estudios de caso han sido utilizados en la Educación Matemática para investigar no solo el aprendizaje de los alumnos, sino también sobre el conocimiento y prácticas profesionales de los profesores, proyectos de innovación curricular, nuevos currículos, etc.

Los propósitos de una investigación realizada por estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si mediante ella se pretende conseguir un acercamiento entre el marco teórico utilizado y la realidad del objeto de estudio. Nuestra investigación sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) a nivel universitario se realiza por el método de estudio de caso y es de tipo exploratorio y también descriptivo, pues es un área de la matemática que tiene pocas investigaciones en nuestro país y también de lo que se pretende es describir la práctica matemática e identificar los conocimientos especializados que tiene el profesor de Álgebra Lineal sobre los SEL.

En un estudio de caso se proponen cinco componentes principales para el diseño de la investigación, las cuales son los siguientes: “Las preguntas de investigación, las proposiciones teóricas, la(s) unidad(es) de análisis, la vinculación lógica de los datos a las proposiciones y los criterios para la interpretación de los datos” (Yin, 2001, p.42).

Las preguntas de investigación y las proposiciones teóricas sirven como punto de partida para la recolección de los datos desde distintos niveles de análisis del caso, en nuestra investigación se analiza un caso único, los conocimientos especializados que tienen dos profesores de un curso de Álgebra Lineal sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Luego de la recolección de los datos, estos deben vincularse lógicamente con los aspectos teóricos del EOS que tiene cinco niveles para el análisis didáctico, en nuestra investigación se realiza el análisis de prácticas matemáticas y el análisis de los objetos y procesos de las prácticas matemáticas. Finalmente, se presenta una serie de conclusiones a partir del análisis de los datos obtenidos de la aplicación del instrumento y de la entrevista semiestructura realizada a los profesores.

También, Yin (2014) propone un protocolo para el estudio de caso como instrumento principal que asegure la objetividad del mismo, tanto en función de su confiabilidad como de su validez, lo cual constituye la guía de procedimientos que debemos realizar durante la fase de obtención de la evidencia. Contiene a los siguientes elementos:

- Semblanza del estudio de caso. Es útil para integrar a los miembros del equipo de investigación y tener un referente que pueda presentar a quien desee conocer el proyecto. Sus elementos son: los antecedentes del proyecto, los tópicos a investigar, los aspectos teóricos y la revisión de la literatura relevante en la investigación.

- Preguntas del estudio de caso. Son diseñadas por el investigador y en base a ellas se debe garantizar que se obtenga la evidencia requerida para contrastar los aspectos teóricos del estudio. Además, pueden y deben ser contrastadas con información obtenida después de la recolección de datos, en las que se deben utilizar diversas fuentes mediante el uso de la triangulación de la evidencia.
- Procedimientos a ser realizados. Antes de iniciar la fase de recolección de datos se debe especificar las diferentes tareas a realizarse como: definir los mecanismos para obtener acceso a la institución, establecer suficientes instrumentos de colecta de datos, contar con esquema y un cronograma de actividades a realizarse para la obtención de la evidencia y preparar el equipo que colaborará en la investigación para responder a situaciones no previstas.
- Guía de reporte del estudio de caso. Para reportar los resultados del estudio no existe un formato aceptado por unanimidad, por el cual el investigador deberá diseñar un esquema básico para facilitar la obtención de evidencia importante para el estudio. Pues ella permite corregir errores en la obtención de los datos, prueba el funcionamiento del protocolo desarrollado y permite hacer una revisión continua de la literatura relevante lo cual facilita que la investigación se mantenga actualizado en el campo que se ubica.

En esta investigación se busca identificar los conocimientos especializados sobre los SEL que tiene un profesor que dicta un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de Ingeniería en una universidad privada de Lima, a través del diseño de un instrumento que aborda las componentes del Modelo del Conocimiento Didáctico-matemático (CDM) propuesto por el EOS que son los conocimientos común, ampliado y especializado.

De acuerdo al método de investigación que se ha elegido y asociado a los objetivos de nuestra investigación, se describen los pasos para el desarrollo de la misma. Según Yin (2001), un estudio de caso se inicia con la pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos especializados tiene un profesor universitario, que imparte un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales?

Instrumento de investigación

Para el logro del objetivo general y de los objetivos específicos propuestos, hemos elaborado un instrumento que consta de tres cuestionarios. El primer cuestionario (ver anexo 2) tiene por objetivo la de recabar información con respecto a la formación académica y profesional de los profesores de una universidad privada de Lima que dictan el curso de Álgebra Lineal, la cual es adaptado de un cuestionario de la investigación realizada por Vasco (2015).

Así mismo, el segundo cuestionario (Actividad 1) consta de 9 ítems (ver anexo 2) relacionados con nuestro objeto matemático de estudio, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Este cuestionario tiene por objetivo identificar los conocimientos que tiene un profesor con respecto a los contenidos matemáticos y los contextos en los que se aplican o están presentes los SEL, las dificultades sobre su enseñanza y aprendizaje en los alumnos, el uso de los recursos tecnológicos utilizados para su resolución, los aspectos históricos en su enseñanza, los métodos matriciales para su resolución y el concepto del conjunto solución. Para la construcción de esta actividad, se han utilizado los antecedentes de nuestra investigación, entre ellas mencionamos a las siguientes: con respecto a lo errores y dificultades en la resolución de un SEL realizada por Valencia (2015), sobre las dificultades que tienen los alumnos en los problemas contextualizados que involucran a los SEL realizadas por Neira (2012) y Figueroa (2013), sobre las tareas propuestas en los libros de textos a nivel secundario y superior sobre los SEL realizada por Garcés (2013), la resolución de un SEL por el método de Gauss-Jordan realizada por Barros, Fernandes y Mendes (2012), el conjunto solución de un SEL realizada por Ochoviet (2009) y sobre los contextos históricos de los SEL realizadas por Andrews-Larson (2015) y Tavares (2013). Las preguntas de esta actividad tienen por objetivo, según el CDM, la de identificar los conocimientos ampliados y especializados (con sus respectivas subcategorías) que tiene un profesor de Álgebra Lineal con respecto a los SEL.

Además, el tercer cuestionario (Actividad 2) consta de 5 ítems (ver anexo 2) relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). El objetivo de este cuestionario es la identificar los conocimientos común, ampliado o especializado (con sus respectivas subcategorías) mediante la resolución de ejercicios y problemas contextualizados. Las preguntas de este cuestionario han sido elaboradas de los ejercicios y problemas propuestos del capítulo 4 de sistemas de ecuaciones y determinantes del libro obligatorio del curso de Hoyos, Mitacc y Gómez (2017) de una universidad privada de Lima y de ejercicios que han sido adaptados de la investigación de Ochoviet (2009) sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación, presentamos los objetivos de cada pregunta de los dos últimos cuestionarios denominados: Actividad 1 y Actividad 2.

Objetivos de la Actividad 1

El objetivo de la actividad es identificar el conocimiento que tiene un profesor en relación con los contenidos matemáticos y los contextos en los que se aplican o están presentes los SEL, las dificultades sobre su enseñanza y aprendizaje en los alumnos, el uso de los recursos tecnológicos utilizados para su resolución, aspectos históricos en su enseñanza, los métodos matriciales para su resolución y el concepto del conjunto solución.

La actividad se subdivide en tres partes: Parte A, B y C que constan de cuatro, cuatro y un ítems respectivamente.

En relación con la Parte A:

- El objetivo de la pregunta 1 es obtener información relacionada con el conocimiento ampliado del contenido. Nos referimos a los conocimientos más avanzados que tiene el profesor de los contenidos de las diferentes áreas de las matemáticas (intra-matemático) en donde se utiliza los SEL, tales como: espacios generados, programación lineal, dependencia e independencia lineal, ajuste de curvas mediante funciones polinómicas y análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas.
- El objetivo de la pregunta 2 es obtener información relacionada también con el conocimiento ampliado del contenido. Nos referimos a los conocimientos más avanzados que tiene el profesor, en otras áreas diferentes a las de matemáticas (extra-matemático), como en las ingenierías, en donde es utilizado los SEL, por ejemplo: sistemas de transporte, circuitos eléctricos, reacciones químicas, nutrición, análisis de estructuras, entre otras.

- El objetivo de la pregunta 3 es obtener información relacionada con el conocimiento especializado en la subcategoría de conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. Se busca conocer las estrategias didácticas-matemáticas que realiza el profesor al inicio de una clase sobre los SEL.
- El objetivo de la pregunta 4 es obtener información relacionada con el conocimiento especializado en la subcategoría de conocimiento del contenido en relación con el currículo. Se busca conocer el conocimiento que tiene el profesor de las características del contenido y dificultades de los ejercicios y problemas propuestos sobre los SEL del libro texto del curso utilizado en la enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

En relación con la Parte B:

- Las preguntas 5, 6 y 7 tienen por objetivo obtener información relacionada con el conocimiento especializado (en las subcategorías de: contenido especializado, contenido en relación con los estudiantes, contenido en relación con la enseñanza y del contenido en relación con el currículo) que tiene un profesor. Así, en la pregunta 5 nos referimos al conocimiento que tiene un profesor con respecto a los errores y dificultades que tienen los alumnos al aplicar el método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL mencionadas en las investigaciones de Valencia (2015) y Barros, Fernandes y Mendes (2012); es decir, el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. En la pregunta 6 nos referimos a la utilización de los recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes sobre los SEL por parte del profesor; es decir, el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. En la pregunta 7 nos referimos al conocimiento que tiene un profesor sobre aspectos históricos de los SEL, la pregunta responde a la importancia que tiene la historia de las matemáticas en la enseñanza mencionado por Andrews-Larson (2015); es decir, el conocimiento del contenido en relación con el currículo.
- El objetivo de la pregunta 8 es obtener información relacionada con el conocimiento ampliado del contenido del profesor. Se espera que el profesor, aparte del método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL, pueda mencionar otros procedimientos o métodos para la resolución de un SEL de n ecuaciones lineales con n incógnitas como, por ejemplo, la resolución de los

SEL mediante combinación lineal de los espacios filas o columnas de la matriz del sistema o de métodos numéricos, etc.

En relación con la Parte C:

- El objetivo de la pregunta 9 es obtener información relacionada con el conocimiento especializado. Nos referimos al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza que tiene el profesor para explicar el concepto de conjunto solución de un SEL a sus alumnos. Se espera que el profesor, aparte de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, pueda mencionar en su explicación a otros objetos matemáticos, como rectas y planos, que podrían representar el conjunto solución. Esta pregunta no forma parte de las preguntas de la parte B del cuestionario 1, porque es una pregunta de respuesta abierta y esta depende de la reflexión sistemática del profesor que por su experiencia tiene sobre la gestión de una clase sobre los SEL.

Objetivos de la Actividad 2

El objetivo de la actividad es identificar los conocimientos común, ampliado o especializado que tiene un profesor que dicta un curso de Álgebra Lineal en una universidad privada de Lima sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), mediante la práctica matemática que realiza el profesor en la resolución de ejercicios y problemas sobre los SEL.

- El objetivo de la pregunta 1a, es saber si el profesor aplica sus conocimientos adquiridos del álgebra lineal para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos, geométricos o matriciales; es decir, el conocimiento común del contenido. Mientras que el objetivo de la pregunta 1b es conocer la forma cómo el profesor explica e interpreta el conjunto solución del SEL a sus alumnos, es decir el conocimiento especializado en la subcategoría del conocimiento del contenido especializado. Por último, el objetivo de la pregunta 1c es identificar los conocimientos más avanzados del álgebra lineal que el profesor utiliza para agregar una ecuación lineal al SEL de manera que su conjunto solución no se modifique; es decir, el conocimiento ampliado del contenido.

- El objetivo de la pregunta 2, es saber reconocer si el profesor aplica sus conocimientos adquiridos del álgebra lineal para resolver un SEL de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante procedimientos algebraicos o matriciales; es decir, el conocimiento común del contenido. Mientras que con respecto al conocimiento ampliado del contenido, se espera que el profesor interprete el conjunto solución en los contextos algebraicos y geométricos.
- El objetivo de la pregunta 3, es saber reconocer si el profesor aplica sus conocimientos adquiridos del álgebra lineal para la resolución de un SEL de tres ecuaciones con tres incógnitas que contiene un parámetro mediante procedimientos algebraicos o matriciales; es decir, el conocimiento común del contenido. Mientras que con respecto al conocimiento ampliado del contenido, se espera indagar si el profesor utiliza el concepto de rango de una matriz para hallar e interpretar el conjunto solución del SEL.
- El objetivo de la pregunta 4, es corroborar que el profesor utilice procedimientos matriciales para la resolución de un SEL de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que contienen dos parámetros mediante el método de Gauss-Jordan; es decir, el conocimiento común del contenido. Mientras que con respecto al conocimiento ampliado del contenido, se espera indagar si el profesor utiliza el concepto de rango de una matriz para la resolución del SEL. Asimismo, con respecto al conocimiento especializado en la subcategoría de conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, se espera examinar cómo el profesor interpreta geométricamente el conjunto solución del SEL.
- El objetivo de la pregunta 5, es corroborar que el profesor resuelva un SEL mediante el método de Gauss-Jordan; es decir, el conocimiento común del contenido. Mientras que con respecto al conocimiento ampliado, se espera reconocer que el profesor utiliza el concepto de rango para hallar el conjunto solución del SEL. Asimismo, con respecto al conocimiento especializado en la subcategoría de conocimiento del contenido especializado, se espera confirmar que el profesor utiliza representaciones verbales, algebraicas y matriciales en la resolución de un problema de contexto e interprete las soluciones obtenidas del SEL.

Análisis del libro del curso

El análisis del libro del curso se hace necesario porque los profesores no solo lo usan en el desarrollo de sus clases sino también para profundizar el aprendizaje de sus alumnos mediante ejercicios y problemas propuestos.

En el caso de los profesores del curso de Álgebra Lineal de una universidad privada de Lima, que forman parte de esta investigación, utilizan de forma obligatoria el libro de Hoyos, Mitacc y Gómez (2017), el cual está organizado en cuatros capítulos. El primer capítulo se inicia con el estudio del sistema coordenado tridimensional, luego se desarrolla el álgebra y la geometría vectorial, en la cual podemos destacar a los productos escalar y vectorial y a las aplicaciones geométricas del triple producto escalar. En el segundo capítulo se estudia la forma vectorial del plano y la recta en el espacio tridimensional. En el tercer capítulo se estudia a las matrices, se inicia con las operaciones básicas de matrices, se hace mención a las matrices especiales y al cálculo de la inversa de una matriz mediante operaciones elementales. En el cuarto capítulo se estudia a los sistemas de ecuaciones lineales mediante el álgebra matricial y el cálculo de la determinante de una matriz. En cada capítulo se refuerza el aprendizaje de los alumnos mediante ejercicios y problemas propuestos.

El libro de Hoyos, Mitacc y Gómez (2017) dedica el tercer capítulo a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Este capítulo otorga un papel central a la resolución de los SEL mediante la representación matricial de la matriz ampliada del SEL y su resolución mediante el método Gauss-Jordan. Se inicia el capítulo con una mención a un problema clásico de programación lineal que es un problema de transporte, se realiza un esquema gráfico del problema, pero no se plantea un SEL. También, se presenta una situación de la vida real, cuya resolución se requiere un SEL. Se definen en el contexto algebraico una ecuación lineal de n incógnitas, luego un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, después un SEL de tres ecuaciones con tres incógnitas y finalmente realiza una generalización de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. También, se define el conjunto solución de un SEL y se realiza dos ejemplos. Se clasifica un SEL de acuerdo a los valores de los términos independientes (homogéneo y no homogéneo) y al número de soluciones: consistente determinado (solución única), consistente indeterminado (infinitas soluciones) e inconsistente (no existe solución), además se realiza una interpretación geométrica del conjunto solución de un SEL en el plano cartesiano y en el espacio tridimensional.

Además, el tercer capítulo otorga un papel central a la resolución de los SEL mediante procedimientos matriciales usando el método Gauss-Jordan, para lo cual representa la forma algebraica de un SEL a la forma matricial mediante la matriz ampliada, luego realiza operaciones elementales a dicha matriz hasta obtener su forma escalonada, después aplica el concepto de rango de una matriz para determinar la solución del SEL y finalmente halla el conjunto solución del SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente). También, los ejemplos y ejercicios resueltos sobre SEL se presentan inicialmente en el contexto algebraico para después representarse en el contexto matricial, para luego realizar su resolución mediante el método de Gauss-Jordan, pero no se realiza una interpretación geométrica del conjunto solución. También, se abordan los problemas contextualizados, los cuales son resueltos a fin de reforzar los conocimientos adquiridos por los alumnos sobre los SEL.

Validación del instrumento mediante triangulación de expertos

En esta investigación, se ha elaborado el instrumento a partir de las investigaciones que se mencionan en los antecedentes y de los ejercicios y problemas propuestos en el libro texto obligatorio del curso de Álgebra Lineal de una universidad privada de Lima. El proceso de elaboración del instrumento de investigación ha sido guiado y supervisado por una experta en didáctica de la Matemática, nuestra asesora de investigación, que nos ha permitido reformular los ítems propuestos en las diferentes versiones que hemos presentado. Posteriormente, el instrumento de investigación fue sometido a un proceso de validación por una experta en didáctica de la matemática de una universidad privada de Lima con experiencia en el tema de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de Álgebra Lineal. A partir de las observaciones y sugerencias de la experta, con respecto a las preguntas del instrumento, se hizo algunas reformulaciones en los ítems que consideramos pertinentes, para una mejor evaluación de los conocimientos especializados que tienen los profesores que dictan el tema de sistemas de ecuaciones lineales para estudiantes de ingeniería en una universidad privada de Lima. Finalmente, la versión final del instrumento que hemos elaborado para identificar los conocimientos especializados sobre los SEL que tiene un profesor de Álgebra Lineal se presenta en el anexo 2.

Las preguntas de investigación y las proposiciones teóricas sirven como punto de partida para la recolección de los datos desde distintos niveles de análisis del caso, en nuestra investigación se analiza un caso único. La unidad de análisis es caso único: Los conocimientos especializados sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) que tiene un profesor que dicta el curso de Álgebra Lineal de una universidad privada de Lima.

Antes de la aplicación del instrumento, previamente el investigador se reunió con el grupo de profesores que dictan el curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería de una universidad privada de Lima. En esta reunión se les expuso el propósito de las actividades planteadas y la importancia de nuestra investigación que permitirá tener información de los conocimientos especializados que tienen los profesores de un curso de Álgebra Lineal sobre los SEL. También, se les informó que sus respuestas en las actividades realizadas serán tratados en forma confidencial y solo serán utilizadas con fines de investigación. Del grupo de profesores presentes en la reunión, cinco de ellos aceptaron en forma voluntaria y con buena disposición para ser partícipes de nuestra investigación.
La recolección de datos se realiza por medio de la aplicación del instrumento y de una entrevista semiestructurada, el cual fue supervisado por el profesor investigador.

Participantes

Para el análisis de las respuestas a las actividades, se consideraron solo dos de los cinco profesores a los cuales se aplicó el instrumento de investigación. La elección de los dos profesores es debida a que ellos completaron todos los ítems de las actividades propuestas y de la información obtenida de su formación académica, ambos profesores tienen conocimiento de la didáctica de la Matemáticas ya que son egresados de una maestría en enseñanza de las matemáticas, y también por su experiencia docente en el dictado del curso de Álgebra Lineal a nivel universitario.

Para mantener el anonimato de los dos profesores participantes de nuestra investigación, se les asigna los seudónimos: el Profesor A y el Profesor B. De acuerdo a la información recabada mediante un cuestionario con respecto a su formación académica y experiencia docente, mencionamos algunas características de los profesores A y B.

El Profesor A tiene una formación de pregrado en Educación en la especialidad de Matemáticas y es Magíster en Matemática y también tiene los estudios concluidos de una maestría en enseñanza de las matemáticas. Tiene 17 años de experiencia como docente en cursos relacionados con matemáticas en instituciones de nivel universitario y se ha desempeñado durante los últimos 10 semestres lectivos como docente en el curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería de una universidad privada de Lima.

Profesor B tiene una formación de pregrado en Ingeniería Industrial y además es Magíster con mención en Enseñanza de las Matemáticas. Tiene 18 años como docente en asignaturas relacionadas con matemáticas en instituciones de nivel universitario y se ha desempeñado durante los últimos 10 semestres lectivos como docente del curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería de una universidad privada de Lima.

Institución educativa

La institución en donde se realiza la investigación es una universidad privada de Lima con 58 años de fundada y cuya actividad económica se realiza sin fines de lucro. Cuenta en la actualidad con aproximadamente con 15.000 alumnos distribuidos entre su Programa de Estudios Generales, sus doce carreras pertenecientes a cinco facultades y su Escuela de Posgrado.

Los estudiantes de la universidad inician sus estudios en el Programa de Estudios Generales, el cual tiene una duración de dos semestres académicos. El curso de Álgebra Lineal se ubica en el segundo nivel (segundo Semestre) y es para estudiantes que siguen las carreras de ingeniería.

Análisis de los datos

El análisis de los datos es realizado mediante las herramientas teóricas del EOS, como el análisis didáctico de los procesos de estudio (el primer y segundo nivel del análisis didáctico) y del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que consta de seis facetas que forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Mediante el análisis de los datos, se busca obtener información de los conocimientos común, ampliado y especializado que tienen los profesores de una universidad privada de Lima con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales.

Las herramientas teóricas del EOS nos permiten describir actividad matemática realizada por el profesor al resolver los ejercicios y problemas de la actividad 2, como “los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significativos que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas” (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 9). Para este análisis se ha realizado las configuraciones epistémicas de los ítems de la actividad 2 (ver anexo 1) que son los conocimientos esperados que tiene el profesor y de las configuraciones cognitivas (análisis de las de las respuestas de los profesores, que son los conocimientos que efectivamente poseen).

La aplicación del instrumento de investigación tiene por objetivo la de identificar el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y algunos aspectos del conocimiento especializado (en sus cuatro subcategorías) relacionados principalmente a la faceta epistémica del CDM de dos profesores que dictan el tema de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería en una universidad privada de Lima.

Según Pino-Fan, Godino y Font (2013) el conocimiento común del contenido son los conocimientos matemáticos, el cual no es necesario que se oriente a la enseñanza, que el profesor pone en juego para resolver situaciones problemáticas de un tema específico de las matemáticas, en nuestro caso, los sistemas de ecuaciones lineales. Es el conocimiento que comparte el profesor con los estudiantes del nivel educativo en donde se desempeña o con otros profesionales que usan ese conocimiento en cualquier ámbito profesional o científico.

Con respecto al conocimiento común del contenido sobre los SEL, para resolver los problemas propuestos, el profesor debe tener conocimiento de:

- La matriz de coeficientes y la matriz aumentada de un SEL.
- Rango de una matriz escalonada.
- Los sistemas de ecuaciones equivalentes.
- El método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL.

- Las operaciones elementales (O.E.) filas de una matriz para obtener su forma escalonada.
- La solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).
- La solución de un SEL homogéneo.
- La representación algebraica del conjunto solución de un SEL.
- La resolución de un SEL de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos (igualación, eliminación o sustitución).
- La resolución de un SEL de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante procedimientos algebraicos (igualación, eliminación o sustitución).
- La resolución de un SEL de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante procedimientos matriciales (método de Gauss-Jordan).
- La resolución de un SEL con uno o dos parámetros mediante el método de Gauss-Jordan.
- El planteamiento algebraico de un SEL a partir de un problema contextualizado.

Por otra parte, con respecto al conocimiento ampliado, Pino-Fan, Godino y Font (2013) mencionan que el profesor además de saber resolver las situaciones problemáticas sobre un determinado tema (los sistemas de ecuaciones lineales) en un cierto nivel en el cual imparte clases, debe poseer conocimientos más avanzados de este tema, de manera que los contenidos matemáticos que imparte se relacionen con temas más avanzados del currículo.

Acorde con el conocimiento ampliado del contenido sobre los SEL, el profesor debe tener conocimiento de:

- Los contenidos de las diferentes áreas de las matemáticas (intra-matemático) en donde se utiliza los SEL, tales como: espacios generados, programación lineal, dependencia e independencia lineal, ajuste de curvas mediante funciones polinómicas.
- Los contenidos en otras áreas diferentes a las de matemáticas (extra-matemático), como en las ingenierías, en donde es utilizado los SEL, tales como: sistemas de transporte, circuitos eléctricos, reacciones químicas, nutrición, análisis de estructuras.

- Otros métodos diferentes al de Gauss-Jordan para resolver un SEL.
- La interpretación de la solución algebraica de un SEL a un contexto geométrico.
- La interpretación de la solución de un SEL a partir del rango de la forma escalonada de la matriz ampliada del SEL.
- La interpretación de la solución de un SEL a partir de contextos geométricos de un SEL equivalente.

En relación al conocimiento especializado, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) proponen en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) seis facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) que forman parte del conocimiento especializado del profesor.

En nuestra investigación no se realizó la observación de las clases de los dos profesores que forman parte de nuestro análisis, ya que no aceptaron ser grabados en una clase con sus estudiantes. Por lo cual, en nuestro análisis, nos situaremos principalmente en la faceta epistémica y en algunos aspectos parciales de las otras facetas (cognitiva, interaccional, mediacional y ecológica).

En la investigación de Pino-Fan, Godino y Font (2013) mencionan que el conocimiento especializado es el conocimiento que el profesor debe saber, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. El conocimiento especializado incluye las cuatro subcategorías: el conocimiento del contenido especializado (CEsp), el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (CREst), el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (CREns) y el conocimiento del contenido en relación con el currículo (CRCur).

Con respecto al conocimiento especializado sobre los SEL, el profesor debe tener conocimiento de:

- La introducción del concepto de conjunto solución de un SEL en una clase con sus estudiantes.
- La interpretación geométrica del conjunto solución de un SEL en el plano y en espacio.
- Las representaciones verbales, algebraicas y matriciales en la resolución de un problema de contexto que involucra a los SEL.

- La interpretación de las soluciones de un problema de contexto que involucran a los SEL.
- La conexión de la solución algebraica de un SEL con el objeto matemático que lo representa en el espacio.
- Las representaciones verbales para adicionar información a un problema de contexto.
- Los errores y dificultades que tienen los alumnos al aplicar el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales) para la resolución de un SEL.
- Las estrategias didácticas-matemáticas al iniciar una clase sobre los SEL con sus estudiantes.
- La utilización de los recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes sobre los SEL.
- El concepto del conjunto solución de un SEL y como los conecta con el objeto geométrico en el plano.
- El tránsito de la representación algebraica a la geométrica y viceversa del conjunto solución de un SEL.
- Las características del contenido y dificultades de los ejercicios y problemas propuestos sobre los SEL del libro texto del curso utilizado en la enseñanza y aprendizaje de los alumnos.
- Los aspectos históricos de los SEL y la importancia que tiene la historia de las matemáticas en la enseñanza-aprendizaje.

Entrevista a los profesores

Las entrevistas semiestructuradas fueron realizadas después de la aplicación a los profesores del instrumento de investigación. Con las preguntas de la entrevista se pretende recabar información adicional de las observaciones realizadas al análisis de las actividades, de manera que nos permitiera aclarar algunas dudas halladas en las respuestas, profundizar y comprender mejor la práctica realizada por los profesores y a su vez, validar algunas de las interpretaciones realizadas por el investigador en el análisis de las respuestas.

CAPITULO III: ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS DEL OBJETO DE ESTUDIO

En el presente capítulo se presentan los aspectos matemáticos y didácticos de nuestro objeto de estudio, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Iniciamos con una síntesis del desarrollo histórico de nuestro objeto matemático de estudio y cómo ha sido su desarrollo a lo largo de la historia. También, entre algunos aspectos matemáticos, definimos un SEL y su conjunto solución, la representación matricial de un SEL, matriz ampliada y el método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL.

3.1 Aspectos históricos de los sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección realizamos una síntesis del desarrollo a lo largo de la historia de nuestro objeto matemático de estudio, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Tratamos de describir la génesis histórica de los SEL y de sus procesos de resolución. Los aspectos históricos de nuestro objeto matemático de estudio tienen como referencia las investigaciones realizadas por Andrews-Larson (2015), Dorier (2000) y el texto de la historia de la matemática de Boyer (2016).

La investigación de Andrews-Larson (2015) menciona los contextos históricos que dieron lugar a los sistemas de ecuaciones lineales y a sus soluciones. Además, los organiza alrededor de un conjunto de ejemplos de la historia de la matemática, ya que menciona importantes desarrollos conceptuales del álgebra lineal a partir de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución. También, la autora menciona que a pesar de las diferencias que tienen los historiadores de las matemáticas sobre la contribución del álgebra lineal, hay consenso en que su historia se puede ver desde dos puntos de vista; el primero, con respecto al desarrollo con un enfoque coherente de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones, y el segundo mediante la forma axiomática de las relaciones y operaciones de vectores.

Con respecto al contexto histórico en la resolución de los SEL, la autora manifiesta que le causó asombro encontrar tres aspectos históricos trascendentales del álgebra lineal con respecto al método de la eliminación de Gauss. La primera fue que la idea de la eliminación gaussiana precedió a Gauss en más de 2000 años, hay evidencia que los chinos usaban un procedimiento equivalente hacia 200 a.C. La segunda, es que Gauss desarrolló el algoritmo conocido como la eliminación Gaussiana sin el uso de la notación matricial. La tercera fue que Gauss desarrolló su método para encontrar la mejor aproximación a la solución de un sistema de ecuaciones lineales inconsistente, en donde la cantidad de ecuaciones era el doble que las incógnitas.

Por otro lado, Boyer (2016) menciona que los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos por los babilonios hacia 2000 a.C. y que ellos lograron resolver problemas que involucraban en su resolución ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas y los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, para lo cual usaban para las incógnitas, palabras como longitud, anchura, área, o volumen, sin que ellas tengan alguna relación con problemas de medida. Un ejemplo sobre la resolución de un sistema de ecuaciones tomado de una tablilla babilónica se plantea en los siguientes términos: 1/4 anchura + longitud = 7 manos, y longitud + anchura = 10 manos. La resolución se halla reemplazando inicialmente cada mano por cinco dedos y observando que una anchura de 20 dedos y una longitud de 30 dedos satisfacen las dos ecuaciones. Para la comprobación utilizaban un método parecido al método algebraico de eliminación y cuya notación actual, sería: $y + 4x = 28$, $y + x = 10$, cuya solución es $x = 6$ manos o 30 dedos e $y = 4$ manos o 20 dedos.

También, el autor manifiesta que en China hacia 200 a.C., los matemáticos chinos resolvieron los SEL, la evidencia del uso de la eliminación gaussiana se halla en el texto escrito por Lui Hui realizado durante el reinado del Emperador Chin Shih Huang, descrito en el capítulo octavo del texto 'Los nueves capítulos sobre el arte de la matemática' que contiene 18 problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Además, el autor muestra el planteamiento y la resolución de un problema del Capítulo VIII del mismo texto, el cual se presenta mediante el siguiente SEL:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34. \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{cases}$$

Según Boyer (2016), los chinos representaban el SEL anterior, mediante la tabla:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

(Boyer, 2016, p. 259)

En la tabla mostrada, la primera fila de números son los coeficientes de la variable x, la segunda fila, los coeficientes de la variable y, la tercera fila los coeficientes de la variable z y la cuarta fila son los términos independientes.

Realizando operaciones columnas, se reduce a la siguiente tabla:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	34	39

(Boyer, 2016, p. 260)

La segunda tabla representa el sistema de ecuaciones equivalente:

$36z = 99$, $5y + z = 34$ y $3x + 2y + z = 39$.

Para Andrews-Larson (2015) el progreso en el desarrollo de la teoría de los SEL y sus soluciones, se inicia cuando aparece la idea de determinantes en Japón en el año 1683 con el matemático japonés Seki Kova. En Europa, en el año 1750 el Matemático Suizo Gabriel Cramer desarrolló un método para resolver un SEL mediante determinantes. Al mismo tiempo, el matemático Suizo Leonhard Euler, cuestiona que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tenga una única solución, para ello usa como contraejemplo el SEL siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 2y & = 5 \\ \quad 4y & = 6x - 10 \end{cases}$$

Conocido como la paradoja de Cramer. Euler solo usó reglas prácticas de eliminación y sustitución para la resolución de un SEL, pero en ella muestra una aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio, ya que aparece la idea de la dependencia de las ecuaciones lineales, dando un primer paso para el concepto de linealmente dependiente, que es un concepto más general y válido para un gran número objetos matemáticos.

Además, Andrews-Larson (2015) menciona que en el año 1811 Gauss desarrolló el método de eliminación gaussiana en el contexto de astronomía para determinar la órbita elíptica de un asteroide llamado Pallas. Para ello, utiliza el método de mínimos cuadrados para hallar la mejor solución aproximada de un sistema de 12 ecuaciones con 6 incógnitas, en la cual realiza un bosquejo del método de eliminación gaussiana sin el uso de matrices. Gauss explicó detalladamente la relación entre la eliminación y la naturaleza de la solución de un sistema de ecuaciones lineales: solución única, infinitas soluciones y no tiene solución, en el año 1809 en *Theoria Motus (Theory on the Motion of Heavenly Bodies moving in Conic Sections*). El término matriz fue inventado en 1850 por el Matemático Ingles Joseph Sylvester, cuando trabajaba sobre los determinantes, y que después en 1857 junto con su amigo y colega Arthur Cayley lo publican en *Treatise on the Theory of Matrices*, en ella se introduce las matrices a un SEL.

Asimismo, Dorier (2000) menciona que Frobenius fue uno de los primeros en introducir la definición de dependencia e independencia lineal para un SEL. En 1886, Alfredo Capelli y Giovanni Garbieri, en su curso de análisis algebraico, demuestran que un sistema de rango k es equivalente a un sistema triangular con exactamente k términos no nulos en su diagonal, con lo cual demuestra que un sistema de rango k es equivalente a un sistema triangular con exactamente k términos no nulos en su diagonal. Este resultado tiene gran importancia en la búsqueda de métodos efectivos para la resolución de un SEL. También, sugiere que en un primer curso de álgebra lineal, por su relación con ideas y conceptos básicos y fundamentales, se debe iniciar con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales tanto por su aplicación como.

3.2 Aspectos matemáticos de los sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección se expone de forma sistematizada los aspectos teóricos de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), como las definiciones de ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones equivalentes, resolución de un SEL mediante métodos algebraicos (Igualación, reducción y eliminación), conjunto solución de un SEL, clasificación de los SEL según su solución, matrices, operaciones elementales filas sobre una matriz, matrices equivalentes, matrices escalonadas, rango de una matriz, representación matricial de un SEL, matriz ampliada, método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL.

Tomamos como referencia para la descripción de los aspectos teóricos de los sistemas de ecuaciones lineales los textos de álgebra lineal, como: Anton (2008), Lay (2013), Hoyos, Mitacc y Gómez (2017), Lipschutz (1992) y Hernández, Vásquez y Zurro (2012).

3.2.1 Ecuación lineal

Una ecuación lineal en las variables $x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n$ se define como una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde b y los coeficientes $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$, son números reales. Las variables en una ecuación también se denominan como incógnitas.

Una solución de la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es un conjunto de n números $s_1,\ s_2, \cdots,\ s_n$, de manera que la ecuación lineal se cumple cuando se sustituye $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \cdots,\ x_n = s_n$.

El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denominan conjunto solución, solución general o solución de la ecuación.

3.2.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Sean $m \geq 1$ y $n \geq 1$ número naturales. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n$ es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + \cdots + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad \ldots (S)$$

Donde $a_{ij},\ b_i\ (1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n)$ son números reales. Los números a_{ij} se denominan los coeficientes del sistema y a los b_i son los términos independientes del SEL.

3.2.3 Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Una solución del SEL es un conjunto de valores de las incógnitas, digamos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \cdots,\ x_n = s_n$ o una n-upla $u = (s_1; s_2; \ldots; s_n)$ de constantes que es solución de cada una de las ecuaciones del SEL. Al conjunto de todas las soluciones del SEL se le denomina conjunto solución o la solución general del SEL.

Se dice que un SEL es inconsistente (o incompatible) si no tiene solución; es consistente (o compatible) determinado si tiene una única solución y consistente (o compatible) indeterminado si tiene infinitas soluciones.

3.2.4 Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Se dice que dos SEL con las mismas incógnitas son equivalentes, si tienen el mismo conjunto solución. Es decir, cada solución del primer SEL es solución del segundo SEL, y cada solución del segundo SEL es solución del primer SEL.

Una forma de producir un SEL, que sea equivalente a uno dado, es efectuar un número finito de operaciones, llamadas operaciones elementales a las ecuaciones lineales $L_1, L_2, \ldots, L_m$ de un SEL. Las operaciones elementales pueden ser:

- Intercambiar las ecuaciones i-ésima y j-ésima: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplicar a la ecuación i-ésima por un escalar no nulo k: $k\ L_i$
- Sumar a la ecuación i-ésima k veces la ecuación j-ésima: $L_i + k\ L_j$

Los métodos de resolución de un SEL en forma algebraica pueden ser:

- Igualación. Es una técnica común para resolver un SEL de solos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes. Se resuelve la ecuación resultante y el valor obtenido se reemplaza en una de ecuación del SEL inicial.
- Sustitución. Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye su valor en las otras ecuaciones del SEL. Se resuelve la ecuación resultante y el valor obtenido se reemplaza en las otras ecuaciones del SEL inicial.
- Reducción. Consiste en buscar un sistema equivalente en donde los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, luego se restan las dos ecuaciones resultantes, con lo cual se elimina una incógnita. Se resuelve la ecuación resultante y el valor hallado se reemplaza en una de las ecuaciones del SEL inicial.

3.2.5 Representación matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

El sistema de ecuaciones lineales (S) se puede representar matricialmente de la forma $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ es la matriz de incógnitas y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ es la matriz de términos independientes.

La matriz aumentada del SEL se denota por $A_a = [A \vdots B]$.

Se dice que el SEL es homogéneo si la matriz columna B es una matriz nula, y se dice que es no-homogéneo si la matriz columna B tiene al menos un elemento diferente de cero.

Una estrategia para la resolución de un SEL es obtener un nuevo SEL que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. Para ello, mencionaremos algunas definiciones y propiedades de matrices que serán de gran utilidad en el trabajo que realizaremos con nuestro objeto de estudio.

Sea A una matriz. Se llama elemento pivote de una fila (o columna) de A al primer elemento no nula de dicha fila (o columna), si tiene alguno.

La matriz A se llama escalonada, o se dice que está en forma escalonada por filas, si cumple las siguientes condiciones:

1) Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
2) En cada fila no nula, el elemento pivote está a la derecha del de la fila superior.
3) En una columna todos los elementos debajo del elemento pivote son ceros.

Las siguientes matrices tienen la forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz que está en forma escalonada, se dice que está en forma escalonada reducida (o forma escalonada reducida por filas) si satisface las siguientes condiciones adicionales:

4) El elemento pivote de cada fila no nula es uno.
5) Los elementos que aparecen en la misma columna que el elemento pivote de una fila son todos ceros.

Las siguientes matrices tiene la forma escalonada reducida:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos operaciones elementales (o transformaciones elementales) por filas a una matriz, a las siguientes operaciones:

- Intercambiar las filas i-ésima y j-ésima: $f_i \leftrightarrow f_j$
- Multiplicar a la fila i-ésima por un escalar no nulo k: $k\, f_i$
- Sumar a la fila i-ésima k veces la fila j-ésima: $f_i + k\, f_j$

Se dice que una matriz A es equivalente por filas a otra matriz B, si la matriz B puede obtenerse a partir de la matriz A mediante un número finito de operaciones elementales filas.

Para cada matriz A se puede obtener una matriz equivalente E en la forma escalonada (o escalonada reducida) mediante un número finito de operaciones elementales filas.

Se define el rango de una matriz A, la cual se denota por $r(A)$, como el número de filas no nulas de su forma escalonada por filas E.

3.2.6 Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales

Dos SEL serán equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto solución, si sus respectivas matrices ampliadas son equivalentes.

Para la resolución de un SEL usaremos el método de Gauss-Jordan. El método empieza representando el SEL (S) en forma matricial por medio de la matriz aumentada $A_a = [A \vdots B]$ y que mediante operaciones elementales filas se obtiene la matriz $E_a = [A' \vdots B']$ que tiene la forma escalonada(o escalonada reducida) por filas.

El método de Gauss-Jordan se puede justificar con los siguientes resultados teóricos.

Teorema 1. (Hernández, Vásquez y Zurro, 2012, p. 19) Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, con matriz de coeficientes A y matriz ampliada $A_a = [A \vdots B]$, se tienen los siguientes resultados:

i) El sistema es compatible determinado si y solo sí $r(A) = r(A_a) = n$.

ii) El sistema es compatible indeterminado si y solo sí $r(A) = r(A_a) < n$.

iii) El sistema es incompatible si y solo sí $r(A) < r(A_a)$.

Realizaremos un estudio de la estructura de las soluciones de un SEL. Iniciaremos con el SEL homogéneo $AX = 0$, el cual tiene como solución trivial $X = 0$ y por lo tanto es compatible. Veamos que si el SEL homogéneo es compatible indeterminado entonces tiene infinitas soluciones.

Proposición 1. (Hernández, Vásquez y Zurro, 2012, p. 20)

i) Si $\vec{u} = (u_1;\, u_2; \dots ; u_n)$ es una solución del sistema homogéneo $AX = 0$, entonces $c\vec{u}$ es también solución para todo número real c.

ii) Si $\vec{u} = (u_1;\, u_1; \dots ; u_n)$ y $\vec{v} = (v_1;\, v_2; \dots ; v_n)$ son soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es también solución.

Proposición 2. (Hernández, Vásquez y Zurro, 2012, p. 20)

Si el sistema homogéneo $AX = 0$ es indeterminado, entonces existen k vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots , \vec{u}_k$, linealmente independientes de manera que todas las soluciones del sistema son de la forma $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_k\vec{u}_k$, donde los c_i son números reales. Además, $k = n - r(A)$.

La estructura de las soluciones del sistema no homogéneo $AX = B$ se deduce a partir de la estructura de las soluciones de su sistema homogéneo asociado $AX = 0$.

Proposición 3. (Hernández, Vásquez y Zurro, 2012, p. 24)

Si $\vec{v}$ es una solución de $AX = B$, entonces todas sus soluciones son de la forma $\vec{u} + \vec{v}$, donde $\vec{u}$ es solución de su sistema homogéneo asociado $AX = 0$.

Teorema 2. (Hernández, Vásquez y Zurro, 2012, p. 24) Si $\vec{v}$ es una solución del sistema no homogéneo $AX = B$, entonces existen k vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots , \vec{u}_k$ linealmente independientes de manera que todas las soluciones del sistema $AX = B$ son de la forma $\vec{v} + c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_k\vec{u}_k$, donde los $c_1, c_2, \dots , c_k$ son números reales, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots , \vec{u}_k$ son soluciones del sistema homogéneo asociado $AX = 0$ y $k = n - r(A)$.

A la expresión $\vec{v} + c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_k\vec{u}_k$ se le denomina solución general del sistema $AX = B$ y a $\vec{v}$ se le denomina una solución particular del sistema.

La resolución del SEL $AX = B$ también puede realizarse utilizando otros conceptos del álgebra lineal, como combinación lineal, matriz inversa y determinantes.

Veamos la siguiente definición: si la matriz de coeficientes del SEL $AX = B$ es de orden $m \times n$ con columnas $A_1, A_2, \dots, A_n$ y si $X \in \mathbb{R}^n$, entonces AX es una combinación lineal de las columnas de la matriz A utilizando como pesos las entradas correspondientes en X; es decir, $AX = [A_1\ A_2 \dots A_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$ (Lay, 2013, P.39).

Teorema 3. (Lay, 2013, p. 40) Si A es una matriz de orden $m \times n$, con columnas $A_1, A_2, \dots, A_n$ y si $B \in \mathbb{R}^m$, el sistema $AX = B$ tiene el mismo conjunto solución que la ecuación vectorial $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = B$, la cual, a la vez tiene el mismo conjunto solución que el SEL cuya matriz aumentada es $[A_1\ A_2 \dots A_n \vdots B]$.

EL teorema anterior nos permite expresar un SEL en tres formas diferentes, pero equivalentes: como una ecuación matricial, como una ecuación vectorial o como un sistema de ecuaciones lineales.

El SEL $AX = B$ tiene una solución si y solo sí B es una combinación lineal de las columnas de A.

Teorema 4. (Lay, 2013, p. 41) Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes. Es decir, para una matriz A en particular, todos los enunciados son verdaderos o todos son falsos.

a) Para cada $B \in \mathbb{R}^m$, el sistema $AX = B$ tiene una solución.
b) Cada $B \in \mathbb{R}^m$ es una combinación de las columnas de A.
c) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$.
d) A tiene una posición de elemento pivote en cada fila.

Otros resultados sobre la solución de un SEL se obtiene cuando la matriz de coeficientes A del sistema $AX = B$ es de orden $n \times n$, es decir es una matriz cuadrada y cuyo orden coincide con el número de variables del SEL.

Teorema 5. (Anton, 2008, p. 80) Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) A es una matriz invertible.

b) $AX = B$ tiene como única solución la trivial.

c) La forma escalonada reducida de A es $\mathbb{I}_n$ (matriz identidad de orden n).

d) $AX = B$ es consistente para toda matriz B de orden $n \times 1$.

e) $AX = B$ tiene exactamente una solución para toda matriz B de orden $n \times 1$.

También, se puede hacer uso de la regla de Cramer, la cual da una solución del SEL cuando el sistema es consistente, es decir tiene solución. El método usa el determinante de una matriz.

Teorema 6. (Anton, 2008, p. 80) Si $AX = B$ es un sistema de n ecuaciones y n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la solución del SEL es única y está dada por

$x_i = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, i = 1,2,\dots,n$, donde A_j es la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de la j-columna de la matriz A por los elementos de la matriz B.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

En el presente capítulo se presentan y analizan las respuestas a los ítems obtenidos de la aplicación del instrumento que contiene diferentes ítems relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Como mencionamos en el capítulo anterior, este instrumento consta de dos cuestionarios referidos a los SEL llamados: Actividad 1 y Actividad 2.

En nuestra investigación realizamos el análisis de dos profesores de una universidad privada de Lima y a quienes hemos llamado el Profesor y el Profesor B.

Las respuestas de los profesores A y B a los ítems de las actividades 1 y 2 servirán para realizar un análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego por el profesor de un curso de Álgebra Lineal con respecto a los SEL mediante el modelo de conocimiento didáctico-matemático (CDM) propuesto en el EOS.

4.1 Respuestas a la actividad 1 y análisis

A continuación, presentamos las respuestas y sus respectivos análisis a los ítems de la actividad 1 (ver anexo 2) dados por los profesores A y B, según las categorías del conocimiento didáctico-matemático implementado por el CDM.

Respuesta y análisis al ítem 1

El profesor A declara tener conocimiento de los todos los contextos intra-matemáticos (ver tabla 4.1) que se mencionan en este ítem con respecto a los SEL; es decir, de los contenidos de algunas de las diferentes áreas de las matemáticas en donde se hace uso los SEL, tales como: espacios generados, programación lineal, dependencia e independencia lineal, ajuste de curvas mediante funciones polinómicas y análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas. En la entrevista, el profesor A menciona que los contextos intra-matemáticos los aprendió cuando era jefe de práctica en una universidad estatal de Lima

Por otra parte, el profesor B declara conocer un solo contexto intra-matemático, el de programación lineal, de las alternativas propuestas en éste ítem. En la entrevista, el profesor B menciona que no tiene mucha referencia de las otras alternativas propuestas en el ítem, pero que en la independencia y dependencia lineal se requiere el uso de SEL.

Tabla 4.1 Respuestas de los profesores A y B al ítem 1

Pregunta 1 ¿En qué temas del área de las matemáticas se utilizan los sistemas de ecuaciones lineales?
Profesor A ☒ Espacios generados ☒ Programación lineal ☒ Dependencia e independencia lineal ☒ Ajuste de curvas mediante funciones polinómicas ☒ Análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas
Profesor B ☐ Espacios generados ☑ Programación lineal ☐ Dependencia e independencia lineal ☐ Ajuste de curvas mediante funciones polinómicas ☐ Análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas

Respuesta y análisis al ítem 2

El profesor A manifiesta tener conocimiento de los todos los contextos extra-matemáticos (ver tabla 4.2) que se mencionan en este ítem con respecto a los SEL; es decir, de los contenidos de algunas de las diferentes áreas tales como: sistemas de transporte, circuitos eléctricos, reacciones químicas, nutrición y análisis de estructuras. En la entrevista el profesor A menciona que los problemas los ha visto en los ejemplos y en los ejercicios de los textos de nivel superior.

Por otra parte, el profesor B declara conocer un contexto extra-matemático de las alternativas mencionadas en el ítem 2, que es el de sistemas de transporte. En la entrevista el Profesor B menciona que lo aprendió en un curso en la universidad, pero que las otras no los asocia.

Tabla 4.2 Respuestas de los profesores A y B al ítem 2

Pregunta 2 Determine los problemas de contexto en donde se aplican los sistemas de ecuaciones lineales.	
Profesor A	Profesor B

☒ Sistemas de transporte ☒ Circuitos eléctricos ☒ Reacciones químicas ☒ Nutrición ☒ Análisis de estructuras	☑ Sistemas de transporte ☐ Circuitos eléctricos ☐ Reacciones químicas ☐ Nutrición ☐ Análisis de estructuras

***Respuesta y análisis al ítem* 3**

El profesor A señala que inicia una clase sobre los SEL con un ejemplo práctico o con un problema de contexto (ver tabla 4.3), lo cual posibilitaría al alumno conocer las aplicaciones y la importancia de los SEL en su formación profesional. En la entrevista, el profesor A menciona la importancia de iniciar una clase sobre los SEL con un problema de contexto de manera que se mejore el aprendizaje de los estudiantes y no solo se conozca la parte abstracta de los SEL.

A su vez, el profesor B manifiesta iniciar una clase sobre los SEL representándolo algebraica y gráficamente mediante un software de geometría dinámica (Geogebra) el cual es un recurso tecnológico para la enseñanza. En la entrevista, el profesor A manifiesta que usa los temas de rectas y planos para indicar a sus alumnos que al resolver un SEL se está hallando una relación con dichos objetos.

Tabla 4.3 Respuestas de los profesores A y B al ítem 3

Pregunta 3 ¿Con qué actividad inicia una clase que imparte sobre los sistemas de ecuaciones lineales?
Profesor A ☒ Con un ejemplo práctico ☒ Con un problema de contexto ☐ Con la teoría sobre los SEL ☐ Con un video motivador ☐ Otro. Especifique: ………………………………………………………
Profesor B

- ☐ Con un ejemplo práctico
- ☐ Con un problema de contexto
- ☐ Con la teoría sobre los SEL
- ☐ Con un video motivador
- ☑ Otro. Especifique: Presento 2 registros de representación algebraico y gráfico, haciendo uso de algún aplicativo como el Geogebra.

Respuesta y análisis al ítem 4

El profesor A manifiesta tener conocimiento de los ejercicios o problemas del libro texto del curso con respecto a los SEL (ver tabla 4.4), indicando que son suficientes para el aprendizaje de los alumnos y contienen situaciones o contextos extra-matemáticos y además menciona a otros textos de álgebra lineal que utiliza. También, expresa la pertinencia de los ejercicios o problemas propuestos del libro texto del curso con respecto a los SEL; es decir, conoce los materiales didácticos diseñados para la enseñanza y aprendizaje del curso. En la entrevista el profesor A

Manifiesta que el libro texto del curso tiene muchos ejercicios y problemas de contexto, pero que faltaba más ejercicios de aplicación sobre los SEL.

Mientras tanto, el profesor B declara que los ejercicios o problemas propuestos sobre los SEL en el libro texto del curso son todos similares (ver tabla 4.4), con lo cual no hace ninguna distinción de los ejercicios y problemas del libro texto del curso, el cual es un material didáctico diseñado para la enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, en la entrevista el profesor B manifiesta que no entendió bien la pregunta, ya que cuando marca que todas son similares, se refería a las alternativas son similares al objetivo de la pregunta; es decir, que son suficientes para que el alumno aprenda, que son suficientes para la evaluación y que contienen situaciones de contexto.

Tabla 4.4 Respuestas de los profesores A y B al ítem 4

Pregunta 4 Los problemas o ejercicios propuestos sobre los sistemas de ecuaciones lineales en el libro texto que usted utiliza en su curso, en su opinión:
Profesor A

☒ Son suficientes para que el alumno aprenda.

☐ Son suficientes para la evaluación que usted aplicará a sus alumnos.

☑ Contienen situaciones o contextos extra-matemáticos (problemas de otras disciplinas, del rango laboral, de situaciones cotidianas, de la comunidad).

☐ Todos son similares.

Especifique (autor del libro, título del libro, ciclo académico de uso del libro, especialidad de los alumnos, otros): Libro de la Universidad

- Grossman. S. I. Algebra Lineal

- Williams. Algebra Lineal con aplicaciones

Profesor B

☐ Son suficientes para que el alumno aprenda.

☐ Son suficientes para la evaluación que usted aplicará a sus alumnos.

☐ Contienen situaciones o contextos extra-matemáticos (problemas de otras disciplinas, del rango laboral, de situaciones cotidianas, de la comunidad).

☑ Todos son similares.

Especifique (autor del libro, título del libro, ciclo académico de uso del libro, especialidad de los alumnos, otros):

Gilberto Gomez, Maximo Mitacc, Fernando Mayor

Algebra Lineal, Segundo semestre, Ingenieria

Respuesta y análisis al ítem 5

EL profesor A expresa tener conocimiento de las dificultades que tienen los alumnos al aplicar el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL (ver tabla 4.5) ya que manifiesta que tiene un conjunto de consideraciones previas (reglas) para su aplicación, los parámetros en un SEL y las aplicaciones a los SEL de orden $3x3$. En la entrevista, el Profesor A manifiesta que el método de Gauss-Jordan lo asocia con el cálculo de la determinante de una matriz, porque hay ciertas operaciones que pueden modificar el resultado, por ello trata de insistir en la utilización de tercera operación elemental, que es la de sumar a una fila el múltiplo de otra fila.

A su vez, el profesor B expresa que el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL es un algoritmo muy estructurado y en cuyo proceso la posibilidad de error en los estudiantes es muy alta. En la entrevista, el profesor B menciona que el método de Gauss-Jordan se tienen que realizar muchas operaciones aritméticas y la operación elemental se complica si te encuentras frente a una fracción, esto hace que si el estudiante se equivoque en algún número, dicho error se arrastre en todo el procedimiento.

Tabla 4.5 Respuestas de los profesores A y B al ítem 5

Pregunta 5 ¿Los alumnos tienen dificultades al aplicar el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL?
Profesor A ☐ No ¿Por qué? .... ☒ Sí ¿Por qué? Por que tiene un 'conjunto' de conside-raciones previas (reglas) para su aplicación, los parámetros, etc. y las aplicaciones simples 3x3 (No parece coherente tanta teoría para eso)
Profesor B ☐ No ¿Por qué? .... ☑ Sí ¿Por qué? El algoritmo es muy estructurado y en el proceso la posibilidad de error es muy alta.

Respuesta y análisis al ítem 6

El profesor A, a pesar de que declara no utilizar algún recurso tecnológico (ver tabla 4.6), menciona usar la calculadora en la resolución de un SEL de orden $3x3$, lo cual si es un recurso tecnológico para la enseñanza. En la entrevista el profesor A manifiesta que utiliza la calculadora como recurso tecnológico para los SEL cuadradas, para el método de Cramer y para verificar la solución de un SEL.

Por otra parte, el profesor B manifiesta utilizar algún recurso tecnológico (ver tabla 4.6). Menciona el uso del software de geometría dinámica (Geogebra), que es un recurso tecnológico, para mostrar la representación de las ecuaciones lineales (planos en el espacio tridimensional) e interpretar las soluciones (consistentes e inconsistentes) de los SEL.

Tabla 4.6 Respuestas de los profesores A y B al ítem 6

Pregunta 6 ¿Usa algún recurso tecnológico con sus alumnos para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales?
Profesor A ☒ No ☐ Sí • ¿Cuál es este recurso? (Salvo la calculadora para sistemas 3x3) • ¿Cómo lo utiliza? Explique. ………………………………………………
Profesor B ☐ No ☒ Sí • ¿Cuál es este recurso? Eventualmente Geogebra • ¿Cómo lo utiliza? Explique. Para mostrarle que representan Planos e interpretar las soluciones consistentes e inconsistentes

Respuesta y análisis al ítem 7

El profesor A expresa no tener conocimiento sobre algunos aspectos históricos de los SEL y de su importancia en la enseñanza de las matemáticas (ver tabla 4.7), solo menciona la forma cómo se representa matricialmente y lo asocia a las operaciones elementales que se utiliza para su resolución. En la entrevista el profesor A, a pesar que manifiesta no tener cierta información histórica del contexto en que apareció el método de Gauss, hay una intención de averiguar históricamente cómo se desarrolló y sistematizó el método Gauss-Jordan.

Asimismo, el profesor B manifiesta no tener conocimiento sobre los aspectos históricos de los SEL. No obstante en la entrevista, el profesor B manifiesta que en los textos deben contener los contextos históricos de los SEL, para así poder conocer algunos aspectos epistemológicos sus orígenes.

En consecuencia, ambos profesores no realizan en su práctica de enseñanza y aprendizaje los aspectos históricos de los SEL.

Tabla 4.7 Respuestas de los profesores A y B al ítem 7

Pregunta 7 ¿Conoce usted algunos aspectos históricos sobre los sistemas de ecuaciones lineales?
Profesor A ☒ No ☐ Sí Explique: No, solo referimos la conexión con la forma de la ecuación lineal AX=B y con la representación matricial; asociando las operaciones elementales con los llamados métodos de solución aprendidos en el colegio.
Profesor B ☒ No ☐ Sí Explique: ....

Respuesta y análisis al ítem 8

El profesor A, aparte del método de Gauss-Jordan, conoce otros métodos para la resolución de los SEL (ver tabla 4.8), como el método (o regla) de Cramer, el uso de la inversa de la matriz de coeficientes para resolver en forma matricial un SEL y también a métodos algebraicos usados en el colegio, pero no menciona a otros métodos para la resolución de los SEL con temas más avanzados del currículo

Por su parte, el profesor B, aparte del método de Gauss-Jordan, menciona que utiliza como un algoritmo para la resolución de un SEL al método de Cramer. No hace mención a otros métodos para la resolución de los SEL.

Tabla 4.8 Respuestas de los profesores A y B al ítem 8

Pregunta 8 ¿Aparte del método de Gauss-Jordan conoce otro(s) método(s) para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de orden $n \times n$?
Profesor A ☐ No ☒ Sí ¿Cuáles son los otros métodos y cómo los utiliza? ▪ La regla de Cramer ▪ El despeje usando la inversa, en caso la matriz $A_{n\times n}$ de coeficientes sea inversible $AX=B$; A inversible $\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$. ▪ Reducción de variables, más para el caso de pocas incógnitas (métodos usuales del colegio)
Profesor B ☐ No ☑ Sí ¿Cuáles son los otros métodos y cómo los utiliza? Método Cramer, lo utilizo como un algoritmo

Respuesta y análisis al ítem 9

El profesor A conoce los aspectos algebraicos y geométricos del conjunto solución de un SEL, ya que en la tabla 4.9, se observa que el conjunto solución lo puede distinguir como un subconjunto del plano, del espacio o de $\mathbb{R}^n$ y de allí conectarlo con un punto, una recta o un plano. Además, relaciona el conjunto solución como las n-uplas que satisfacen cada una de las ecuaciones de un SEL, pero no responde a la pregunta de cómo introduce el concepto de conjunto solución de un SEL en una clase con sus alumnos de un curso de Álgebra Lineal. Se puede apreciar que en la enseñanza del conjunto solución de los SEL, en el profesor A predomina la interacción de los aspectos algebraicos y geométricos para potenciar el aprendizaje de sus estudiantes, pero no manifiesta cómo introduce el concepto de conjunto solución y qué recursos tecnológicos utiliza en una clase con sus alumnos. En la entrevista el profesor A menciona que introduce el conjunto solución de un SEL en sus alumnos mediante ejemplos de los objetos que ellos han estudiado anteriormente, por ejemplo una recta, un plano. Además, que en SEL de $3x3$ que son tres planos, la solución puede ser otro plano, una recta o un punto.

Por otra parte, el profesor B conoce los aspectos algebraicos y geométricos del conjunto solución de un SEL (ver tabla 4.9), para ello hace uso de un recurso tecnológico, un software de geometría dinámica (Geogebra). Detalla mediante tres etapas como introduce el concepto de conjunto solución de un SEL, inicia con un sistema de dos ecuaciones lineales que representan a dos planos que se intersectan es una recta, luego propone ejemplos sobre los SEL consistente determinado (solución única), consistente indeterminado (infinitas soluciones) e inconsistente (no tiene solución). A pesar de hacer uso de un recurso tecnológico, no lo aprovecha para distinguir otras formas de representación del conjunto solución, como un punto, una recta o un plano. Además, no conecta el conjunto solución con las n-uplas que satisfacen cada una de las ecuaciones del SEL. Se puede apreciar que en la enseñanza del conjunto solución de los SEL, en el profesor B predomina la interacción de los aspectos algebraicos y geométricos, y el uso de los recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje de sus alumnos.

Tabla 4.9 Respuestas de los profesores A y B al ítem 9

Pregunta 9 Detalle cómo introduce el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en sus clases con alumnos de curso de Álgebra Lineal.
Profesor A Como los alumnos ya tienen idea de conjunto soluciones para ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadrática, etc y de sistemas 2x2 ; 3x3 , en el caso de m-ecuacionen con n incógnitas se asocia esa idea conocida con el de las n-uplas que satisfacen c/u de las m-ecuaciones. Así el conjunto solución lo pueden distinguir como un subconjunto del plano, o del espacio o de $\mathbb{R}^n$ en general y de allí pueden, por tanto, comprender que el C.S puede por ejm ser un conjunto unitario en $\mathbb{R}^3$, una recta en $\mathbb{R}^3$ o un plano, etc.

Profesor B

1º Les muestro un sistema de ecuaciones lineales (INCONS.)
en la pizarra y les pregunto qué representa
dicho SEL para ellos.
2º Dicho SEL lo represento en el Geogebra
y observan que representan 2 planos
cuya intersección es una recta.
3º Propongo 3 ejemplos:
para un sistema determinado, indeterminado
y otro consistente
con 2 registros de representación Algebraico
y gráfico (Geogebra)

4.2 Respuestas a la actividad 2 y análisis

La actividad 2 es un cuestionario que consta de cinco ítems entre ejercicios y problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Esta actividad tiene por objetivo identificar mediante la resolución de ejercicios y problemas los conocimientos común, ampliado o especializado que tiene un profesor de un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería con respecto a los SEL. Se presenta a continuación las respuestas a los ítems de los profesores A y B y el análisis correspondiente.

Respuesta y análisis al ítem 1

En la resolución de ítem 1 de la actividad 2, los profesores A y B utilizan los métodos algebraicos de igualación y sustitución para la resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. A continuación, en la tabla 4.10 se muestra la resolución realizada por el Profesor A y luego se realiza el análisis de esta resolución de acuerdo al primer y segundo nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS.

Tabla 4.10 Respuesta al ítem 1 del profesor A

1) a) Resolviendo la 1^{ra} y 3^{ra} ecuación, dado que es casi directa, obtenemos $x=3$ y $y=2$
Reemplazando en la 2^{da} ecuación
$(3)+2(2)=7$ la verifica
por tanto tiene una única solución.
No siempre sucede este hecho, en este caso por que hallamos explícitamente su solución

b) En general suelen resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas pero olvidan que la tercera es parte del sistema y debemos verificar que satisfaga la (~~ecuación~~) solución hallada.
Se puede explicar que estamos hallando el punto de intersección de dos rectas en el plano y (no paralelas) y que queremos verificar si la tercera pasa por el mismo punto o no.
El problema equivale a hallar la intersección de 3 rectas no paralelas en $\mathbb{R}^2$ plano.

c) Si se agrega: $2x+3y=12$, el C.S. no varía, no se modifica a pesar de ser otra recta diferente. Es parte de la familia de rectas que pasan por $(3;2)$
Conocimiento matemático
- Familia de rectas en función de un parámetro (m)
- El hecho de haber sumado las dos primeras ecuaciones conlleva a la propiedad de las operaciones elementales que no modifican la solución
- Por multiplicación de matrices inversibles etc.

Análisis de la práctica matemática del profesor A

Se observa en la respuesta al ítem 1 (tabla 4.10), la práctica matemática desarrollada por el profesor A comienza con la resolución del SEL en forma algebraica y para ello utiliza la primera y tercera ecuación, obteniendo $x=3$ e $y=2$. Luego, los valores obtenidos los reemplaza en la segunda ecuación para comprobar si $x=3$, $y=2$ verifican la segunda ecuación del SEL inicial. Con lo cual concluye que la solución es única.

Después, el profesor A explica geométricamente la solución como la intersección de dos rectas en el plano y luego, verifica que la tercera recta pasa por el mismo punto. Además, menciona que el problema equivale a hallar la intersección de las tres rectas no paralelas en el plano.

Finalmente, agrega al SEL inicial la ecuación lineal $2x+3y=12$, la cual por ser parte de la familia de rectas que pasan por el punto $(3;2)$, el conjunto solución no varía. La ecuación lineal que se adiciona al SEL inicial, se obtiene al sumar las dos primeras ecuaciones del SEL inicial y por la propiedad de las operaciones elementales, el conjunto solución no se modifica.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la resolución del ítem 1 realizada por el profesor A, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: ecuación, incógnitas, parámetro, sistema, solución, única solución, ecuaciones lineales con dos incógnitas, intersección de dos rectas, intersección de tres rectas, plano, familia de rectas y la representación simbólica del conjunto solución.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 1, se tienen las siguientes: ecuación lineal, conjunto solución de un SEL, familia de rectas que pasan por un punto y operaciones elementales.

Con respecto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La resolución algebraica del SEL, para lo cual usa la primera y tercera ecuación y obtiene que $x = 3$ e $y = 2$. Luego, los valores obtenidos se reemplazan en la segunda ecuación para comprobar si dichos verifican la ecuación.
- Se adiciona al SEL la ecuación $2x + 3y = 12$, el cual se obtiene al sumar las dos primeras ecuaciones del SEL inicial.

Con respecto a las propiedades, se destacan las siguientes: igualdad de ecuaciones, ecuaciones equivalentes, igualdad de una ecuación al sustituir una variable por su valor, conjunto solución de SEL equivalentes y las operaciones elementales no modifican el conjunto solución.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

1) El punto $(3; 2)$ es solución del SEL, porque verifica todas las ecuaciones del SEL y por el concepto de conjunto solución, el punto $(3; 2)$ es solución del SEL.

2) El SEL inicial y el obtenido al agregar la ecuación lineal $2x + 3y = 12$ al SEL inicial son SEL equivalentes; es decir, tienen la misma solución, ya que las operaciones elementales no modifican el conjunto solución y la nueva ecuación agregada al SEL inicial se obtiene mediante la suma de las dos primeras ecuaciones del SEL inicial, luego tienen el mismo conjunto solución.
3) El conjunto solución es la intersección de tres rectas no paralelas en el plano, porque cada ecuación del SEL se representa geométricamente como una recta en el plano que pasa por el punto $(3; 2)$. Luego, las tres rectas se intersecan en el único punto $(3; 2)$, el cual es la única solución del SEL.

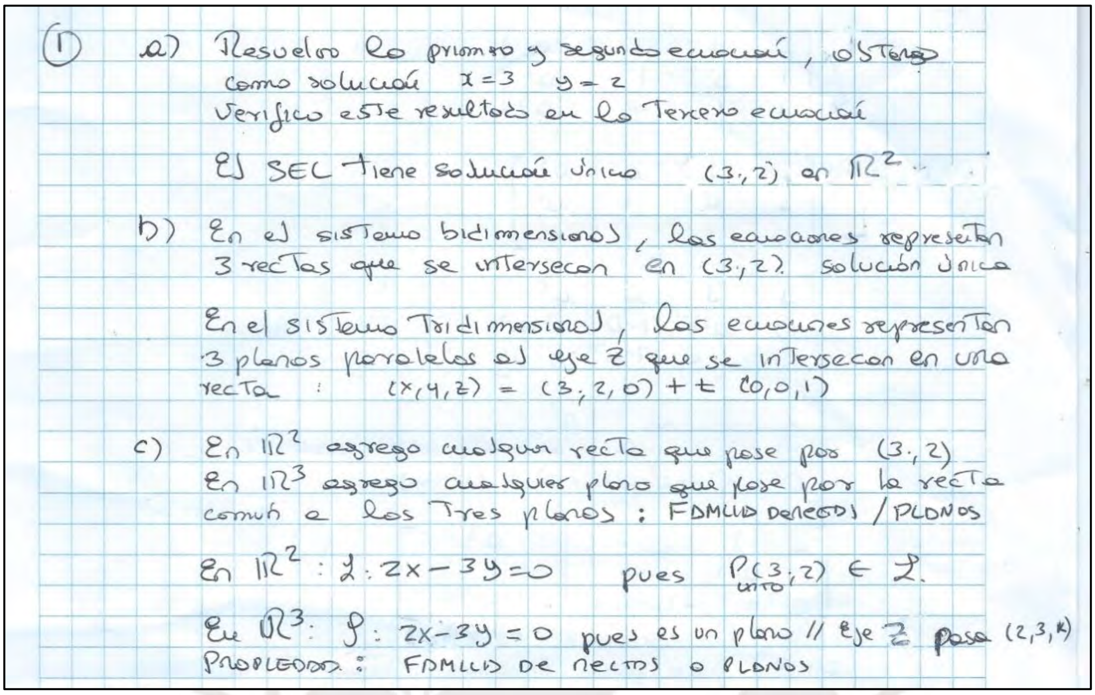
En la resolución del ítem 1a, el profesor A utiliza procedimientos algebraicos para resolver un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas y usa correctamente el concepto de conjunto solución de un SEL.

Según la respuesta del ítem 1b, el profesor el profesor A describe cómo explica a sus alumnos la solución del SEL, como un punto del plano bidimensional o geométricamente como la intersección de tres rectas que pasan por un único punto; es decir, hace uso de diferentes tipos de representaciones, como el algebraico y geométrico.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 1 de la actividad 2 realizada por el profesor A, se observa que el contexto es algebraico y geométrico, ya que utiliza los métodos algebraicos de igualación y sustitución para la resolución del SEL y conecta geométricamente las ecuaciones del SEL con rectas en el plano que se intersecan en un punto.

En la tabla 4.11 se muestra la resolución realizada por el Profesor B.

Tabla 4.11 Respuesta al ítem 1 del profesor B


(1) a) Resuelvo la primera y segunda ecuación, obtengo como solución $x = 3$ $y = 2$
Verifico este resultado en la tercera ecuación
El SEL tiene solución única $(3;2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) En el sistema bidimensional, las ecuaciones representan 3 rectas que se intersecan en $(3;2)$ solución única
En el sistema tridimensional, las ecuaciones representan 3 planos paralelos al eje Z que se intersecan en una recta : $(x,y,z) = (3;2,0) + t(0,0,1)$

c) En $\mathbb{R}^2$ agrego cualquier recta que pase por $(3,2)$
En $\mathbb{R}^3$ agrego cualquier plano que pase por la recta común a los tres planos : FAMILIA DE RECTAS / PLANOS
En $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{L}: 2x-3y=0$ pues $P(3;2) \in \mathcal{L}$.
En $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{P}: 2x-3y=0$ pues es un plano // eje Z pasa $(2,3,k)$
PROPIEDAD: FAMILIA DE RECTAS O PLANOS

Análisis de la práctica matemática del profesor B

De la respuesta al ítem 1 (tabla 4.11), se observa que el profesor B inicia la resolución del SEL de forma algebraica y para ello, utiliza la primera y segunda ecuación, obteniendo $x = 3,\ y = 2$. Luego, verifica el resultado anterior en la tercera ecuación del SEL, con lo cual concluye que el SEL tiene como única solución al punto $(3; 2) \in \mathbb{R}^2$.

Después, el profesor B explica de manera geométrica que en el sistema coordenado bidimensional las ecuaciones del SEL representan a tres rectas que se intersectan en el punto $(3;2)$, el cual es la única solución del SEL. Además, menciona que en el sistema coordenado tridimensional, las ecuaciones representan a tres planos paralelos al eje Z, cuya intersección es la recta con ecuación $(x; y; z) = (3; 2; 0) + t(0; 0; 1)$. El profesor B representa geométricamente las ecuaciones que tienen dos variables en el espacio tridimensional.

Finalmente, el profesor B menciona que en $\mathbb{R}^2$ se puede agregar cualquier recta (familia de rectas) que pase por el punto $(3;2)$ y adiciona la ecuación lineal $2x - 3y = 0$ al SEL inicial. Del mismo modo para $\mathbb{R}^3$, se puede agregar cualquier plano (familia de planos) que pase por la recta común a los tres planos y adiciona la ecuación lineal $2x - 3y = 0$. Justifica lo anterior con la propiedad de las familias de rectas y planos que pasan por el punto $(3;2)$ y por el punto $(3;2;k)$, respectivamente.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la resolución del ítem 1 realizada por el profesor B, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos son los siguientes: ecuación, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, punto, sistema bidimensional, sistema tridimensional, solución, solución única, familia de rectas, familia de planos, intersección de tres rectas, intersección de tres planos y la representación simbólica del conjunto solución como un punto en el plano cartesiano o una recta en el espacio.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor B utiliza en la resolución del ítem 1, se tienen los siguientes: ecuación lineal, conjunto solución, familia de rectas que pasan por un punto y planos paralelos.

Con respecto a las propiedades, se destacan la de igualdad de ecuaciones, la igualdad de una ecuación al sustituir una variable por su valor y la propiedad de conjunto solución de SEL equivalentes.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

1) El punto $(3;2)$ es la única solución del SEL en $\mathbb{R}^2$, porque satisface todas las ecuaciones del SEL.
2) El SEL inicial y el obtenido al agregar la ecuación lineal $2x + 3y = 12$ al SEL inicial son SEL equivalentes, ya que son familias de rectan que pasan por el mismo punto; es decir, tienen la misma solución.
3) En $\mathbb{R}^3$, el SEL inicial y el obtenido al agregar la ecuación lineal $2x + 3y = 12$ al SEL inicial tienen el mismo conjunto solución, ya que el conjunto solución del SEL inicial es la recta $(x;y;z) = (3;2;0) + t(0;0;1)$, que geométricamente es la intersección de tres planos paralelos al eje Z y el nuevo SEL obtenido al agregar la ecuación lineal $2x - 3y = 0$ son familias de planos que pasan por la misma recta; es decir, tienen el mismo conjunto solución.

En la resolución del ítem 1a, el profesor B utiliza procedimientos algebraicos para resolver un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas y usa correctamente el concepto de conjunto solución de un SEL.

Según la respuesta del ítem 1b, se puede observar que el profesor B declara que explica a sus alumnos la solución del SEL de forma geométrica como la intersección de tres rectas que pasan por un único punto del sistema bidimensional. Además, presenta otra representación de la solución del SEL en el sistema tridimensional; es decir, relaciona la solución de un SEL mediante el uso de diferentes tipos de representaciones, como el algebraico y geométrico.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 1 de la actividad 2 realizada por el profesor B, se observa que el contexto es algebraico y geométrico ya que utiliza los métodos algebraicos de igualación y sustitución para la resolución del SEL y conecta geométricamente las ecuaciones del SEL con rectas en el plano dimensional que se intersectan en un punto o planos en el espacio que se intersectan en una recta.

Respuesta y análisis al ítem 2

Los profesores A y B realizan la resolución del ítem 2 llevando la representación algebraica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a una representación de la forma matricial de un SEL. A continuación, en la tabla 4.12 se muestra la resolución realizada por el Profesor A y luego se realiza el análisis de la resolución de acuerdo al primer y segundo nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS.

Tabla 4.12 Respuesta al ítem 2 del profesor A

2) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 9z = 7 \end{cases}$

Usando operaciones elementales en la matriz asociada al sistema:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & -9 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \langle \text{Matriz Aumentada} \rangle$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones debido a que el rango $r = 2$ es menor que el número de incógnitas que es 3.

La existencia de solución se da en virtud de que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(\tilde{A})$

Otra opción es el cálculo de determinantes y otra el proceso mismo del intento de resolver el sistema

Análisis de la práctica matemática del profesor A

De la respuesta al ítem 2 (tabla 4.12), se observa que la práctica matemática desarrollada por el profesor A comienza llevando la representación algebraica del SEL $\begin{cases} x + \ y - 2z & = & 5 \\ 2x - y + 3z & = & 8 \\ x + 4y - 9z & = & 7 \end{cases}$, a una representación de la forma matricial (matriz ampliada) de un SEL $\mathrm{A_a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$.

Luego, resuelve el SEL por el método de Gauss-Jordan realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada del SEL, obteniendo una matriz escalonada que es equivalente a la matriz inicial del SEL de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & -3 & 7 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.

Después, considerando la matriz escalonada, menciona que el SEL tiene infinitas soluciones, pues su rango es igual a 2 y es menor a 3 el número de incógnitas del SEL. La existencia de la solución del SEL es justificada mediante la propiedad de matrices equivalentes; es decir, dos matrices equivalentes tienen el mismo rango, en este caso $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A_a})$. El Profesor A finaliza la resolución de la pregunta 2, mencionando que otra forma de resolver el SEL es mediante el uso de determinantes (método de Cramer) pero no la realiza.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor A en la resolución del ítem 2, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos son los siguientes: ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, número de incógnitas, existencia de solución, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL y la representación simbólica de la matriz escalonada y el rango de una matriz.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 2, se tienen los siguientes: sistema de ecuaciones lineales, matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, rango de una matriz, matrices equivalentes, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente e inconsistente).

Con respecto a los procedimientos se destacan cuatro:

- La asignación de la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$.
- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & -3 & 7 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.
- La obtención de un SEL equivalente, al llevar la matriz escalonada a una representación algebraica de un SEL de la forma $\begin{cases} x + y - 2z & = & 5 \\ -3y + 7z & = & -2 \end{cases}$.
- La aplicación del rango de una matriz para determinar la existencia de la solución del SEL.

Con respecto a las propiedades, se destacan la propiedad de rango de dos matrices equivalentes, la propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas o columnas y la propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes.

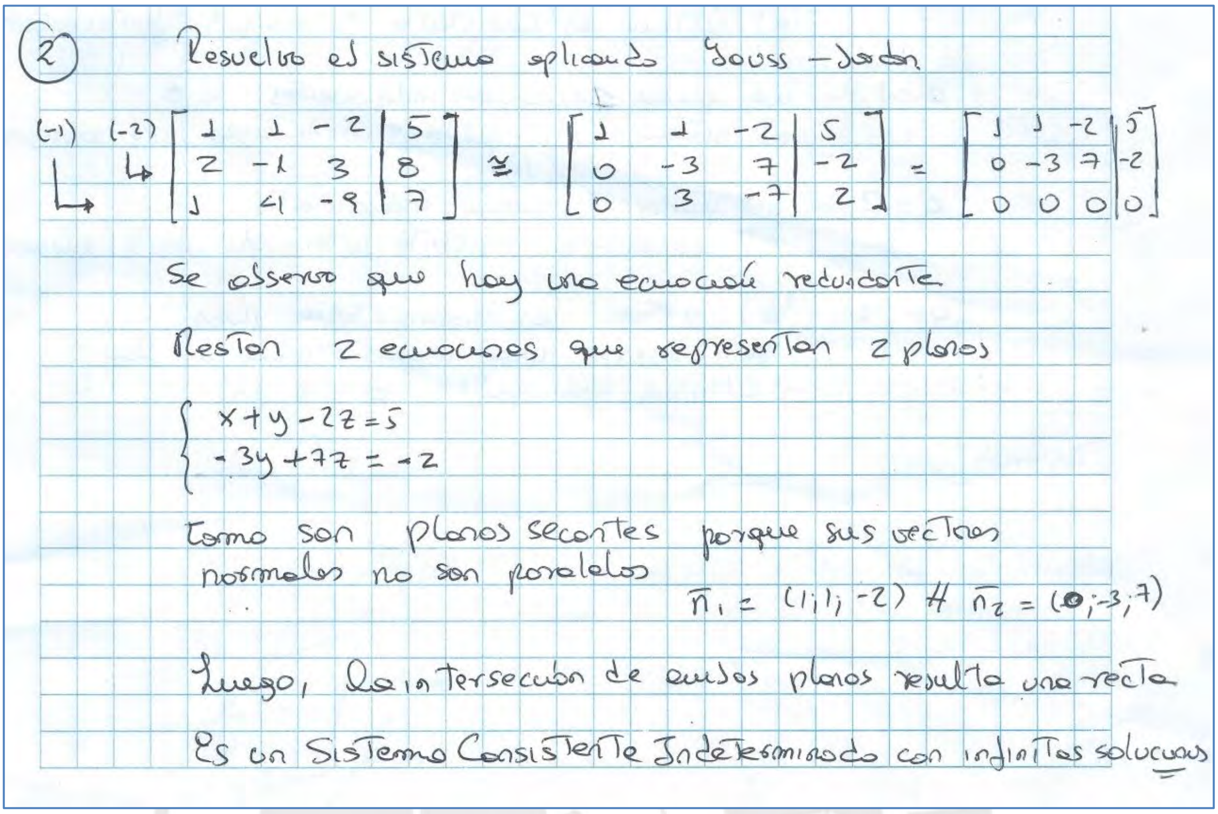
Entre los argumentos podemos identificar el siguiente: el SEL tiene infinitas soluciones, ya que al realizar operaciones elementales a la matriz ampliada del SEL para obtener su forma escalonada, el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales 2, como éste rango es menor al número de incógnitas del SEL, el sistema es consistente indeterminado; es decir, el SEL tiene infinitas soluciones.

En la resolución del ítem 2, el profesor A utiliza procedimientos matriciales para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas aplicando el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada) y relaciona la noción de rango de una matriz con la solución de un SEL. También, moviliza otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial. Además, menciona que otra forma de resolver el SEL sería mediante determinantes, lo cual no lo realiza.

El profesor A, a pesar de movilizar las representaciones de un objeto matemático y conectar la noción de rango de una matriz con el conjunto solución de un SEL, no argumenta por qué el SEL tiene infinitas soluciones, no realiza otra forma de resolver el SEL ni interpreta geométricamente el conjunto solución del SEL.
Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 2 de la actividad 2 realizada por el profesor A, se observa que el contexto es netamente matricial, ya que representa matricialmente el SEL mediante la matriz ampliada, para después usar el método de Gauss-Jordan para obtener su forma escalonada y finalmente utiliza el concepto de rango de una matriz para hallar la solución del SEL.

La tabla 4.13 muestra la resolución realizada por el Profesor B.

Tabla 4.13 Respuesta al ítem 2 del profesor B


(2) Resuelvo el sistema aplicando Gauss-Jordan

$$\begin{array}{cc} (-1) & (-2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 2 & -1 & 3 & | & 8 \\ 1 & 4 & -9 & | & 7 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & -3 & 7 & | & -2 \\ 0 & 3 & -7 & | & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & -3 & 7 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que hay una ecuación redundante

Restan 2 ecuaciones que representan 2 planos

$$\begin{cases} x+y-2z=5 \\ -3y+7z=-2 \end{cases}$$

Como son planos secantes porque sus vectores normales no son paralelos

$\vec{n}_1 = (1;1;-2) \nparallel \vec{n}_2 = (0;-3;7)$

Luego, la intersección de ambos planos resulta una recta

Es un Sistema Consistente Indeterminado con infinitas soluciones

Análisis de la práctica matemática del profesor B

De la respuesta al ítem 2 (tabla 4.13), se observa que la actividad realizada por el profesor B comienza llevando la representación algebraica del SEL $\begin{cases} x+\ y-2z & = & 5 \\ 2x-y+3z & = & 8, \\ x+4y-9z & = & 7 \end{cases}$ a una representación de la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) del SEL de la forma: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$.

Luego, resuelve el SEL por el método de Gauss-Jordan realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada, obteniendo la matriz escalonada de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & -3 & 7 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$, la cual es equivalente a la matriz ampliada de SEL inicial.

Después, el profesor B menciona que el SEL tiene una ecuación redundante. Luego, a partir de la matriz escalonada obtiene un nuevo SEL equivalente al inicial de la forma $\begin{cases} x+y-2z & = & 5 \\ -3y+7z & = & -2 \end{cases}$. Menciona que cada ecuación representa un plano y como los vectores normales $\vec{n_1} = (1;1;-2)$ y $\vec{n_2} = (0;-3;7)$ no son paralelos, los planos son secantes y cuya intersección es una recta en el espacio. Finalmente, a partir de la recta obtenida por esta intersección, el profesor B menciona que el SEL es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor B en la resolución del ítem 2, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos son los siguientes: sistema, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, plano, planos secantes, intersección de planos, recta, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL y la representación simbólica de la matriz escalonada.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor B utiliza en la resolución del ítem 2, se destacan las siguientes: sistema de ecuaciones lineales, matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, matrices equivalentes, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$.
- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & -3 & 7 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.
- La obtención de un SEL equivalente, al llevar la matriz escalonada a una representación algebraica de un SEL de la forma $\begin{cases} x + y - 2z & = & 5 \\ -3y + 7z & = & -2 \end{cases}$.
- La obtención del conjunto solución, mediante la representación geométrica de cada ecuación lineal de tres variables como un plano en el espacio, para luego obtener sus vectores normales a $\overrightarrow{n_1} = (1; 1; -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0; -3; 7)$ y

verificar que no son paralelas, los planos son secantes y se intersectan en una recta. La recta obtenida es el conjunto solución del SEL.

Con respecto a las propiedades, se destacan la propiedad de rango de dos matrices equivalentes, la propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas o columnas y la propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes.

Entre los argumentos podemos identificar el siguiente: el SEL tiene infinitas soluciones, ya cada ecuación del SEL equivalente se representa geométricamente como un plano en el espacio y como sus vectores normales no son paralelos, se intersectan formando una recta. La recta en el espacio es un conjunto que tiene infinitos puntos, luego el SEL es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones.

En la resolución del ítem 2, el profesor B utiliza procedimientos matriciales para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas aplicando el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada) y relaciona la forma escalonada de una matriz con el número de ecuaciones redundantes del SEL. También, moviliza otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial y de la representación algebraica de una ecuación a su representación de geométrica de un plano en el espacio.

El profesor B, a pesar de movilizar las representaciones de un objeto matemático y conectar la noción de rango de una matriz con el conjunto solución de un SEL, no argumenta por qué el SEL tiene infinitas soluciones, no realiza otra forma de resolver el SEL y ni interpreta geométricamente el conjunto solución.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 2 de la actividad 2 realizada por el profesor B, se observa que utiliza el contexto matricial, ya que representa el SEL mediante la matriz ampliada, después usa el método de Gauss-Jordan para obtener su forma escalonada, luego relaciona las filas de la matriz escalonada con un SEL equivalente; es decir, la forma algebraica de un SEL. Finalmente, utiliza conceptos geométricos de planos que se intersectan en el espacio para hallar la solución del SEL.

Respuesta y análisis al ítem 3

Los profesores A y B realizan la resolución del ítem 3 de la actividad 2 llevando la representación algebraica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a una representación de la forma matricial de un SEL. A continuación, en la tabla 4.14 se muestra la resolución realizada por el Profesor A y luego se realiza el análisis de la resolución de acuerdo al primer y segundo nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS.

Tabla 4.14 Respuesta al ítem 3 del profesor A

3) $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k^2 \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$

a) $k=0 \Rightarrow$ El sistema tiene matriz:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\tilde{A}}$$

como $|A| \neq 0$ $(0-1(-1)+1(1)=2)$ es consistente determinado

Verdadero.

En general por ser cuadrada calculamos:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2-1) - 1(k-1) + 1(1-k)$$

$$= (k-1)[k^2+k-1-1]$$

$$= (k-1)^2(k+2) = 0 \Rightarrow k=1 \lor k=-2$$

Luego es consistente determinado $\forall k \neq 1$ y $k \neq -2$

b) Para $k=1$ el sistema equivale a

$\{ x + y + z = 1$

que es consistente indeterminado Verdadero

c) para $k = 2 \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$ es consistente determinado Verdadero

d) Para $k=-2$: Equivale a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -8 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$ran(A) = 2 \neq ran(\tilde{A}) = 3$ Verdadero

$\therefore$ Inconsistente

Análisis de la práctica matemática del profesor A

Como se observa en la respuesta al ítem 3 (tabla 4.14), la práctica matemática realizada por el profesor A se inicia reemplazando $k = 0$ en el SEL $\begin{cases} kx & + & y & + & z & = & k \\ x & + & ky & + & z & = & k^2 \\ x & + & y & + & kz & = & k^3 \end{cases}$.

Después, el SEL resultante lo representa en la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) de la forma $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. Luego, halla la determinante de la matriz de coeficientes $|A| = 2 \neq 0$, con lo cual verifica la parte a) del ítem 3, que el SEL es consistente determinado.

Como el SEL inicial tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, calcula la determinante de la matriz de coeficientes e iguala a cero: $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2) = 0$, obteniendo $k = 1$, $k = -2$. Luego, el profesor A concluye que el sistema es consistente determinado $\forall\, k \neq 1$ y $\forall\, k \neq -2$.

Para la parte b), reemplaza $k = 1$ en el SEL inicial y obtiene el sistema equivalente $\{x + y + z = 1$, para luego concluir la veracidad de que el sistema es consistente indeterminado.

Para la parte c), verifica que $k = 2 \in (\mathbb{R} - \{-2; 1\})$ y concluye que el SEL es consistente determinado.

Para la parte d), reemplaza el valor de $k = -2$ en el SEL inicial y después lo representa mediante la matriz ampliada $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$.

Luego, resuelve el SEL por el método de Gauss-Jordan realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada, obteniendo una matriz escalonada de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$.

Finalmente, considerando la matriz escalonada, concluye que el SEL es inconsistente, debido a que $(ran(A) = 2) \neq (ran(\tilde{A}) = 3)$.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor A en la resolución del ítem 3, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: sistema, sistema de ecuaciones lineales, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL, la representación simbólica de la matriz escalonada y la representación de la determinante de una matriz.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 3, se tienen los siguientes: sistema de ecuaciones lineales, la matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, rango de una matriz, matrices equivalentes, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La representación de la matriz ampliada o aumentada del SEL obtenida al reemplazar en el SEL inicial el valor del parámetro k por cero, obteniéndose la matriz $\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. Luego, al obtener la representación matricial de un SEL homogéneo se calcula la determinante de la matriz de coeficientes para concluir que el SEL es consistente determinado.
- El cálculo de la determinante de la matriz de coeficientes del SEL $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ para luego concluir que si $|A| \neq 0$, el SEL consistente determinado $\forall\, k \neq 1$ y $\forall\, k \neq 2$.
- La obtención del SEL $\{x + y + z = 1$, el cual es equivalente al SEL original al reemplazar $k = 1$.
- La representación de la matriz ampliada o aumentada del SEL obtenida al reemplazar el valor del parámetro $k = -2$, en el SEL inicial, para obtener la

matriz $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$. Luego, al realizar operaciones elementales filas obtiene la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$.

- La aplicación del rango de una matriz para determinar que el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

Con respecto a las propiedades, se destacan los siguientes: matrices equivalentes, el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas, determinante de la matriz de coeficientes de un SEL homogéneo y conjunto solución de SEL equivalentes.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

1) El SEL homogéneo es consistente determinado, ya que al calcular la determinante de la matriz de coeficientes del SEL homogéneo, se obtiene que es diferente de cero y por lo tanto el SEL homogéneo es consistente; es decir, tiene solución.
2) El SEL es inconsistente para $k = -2$, ya que al realizar operaciones elementales a la matriz ampliada del SEL obtenida al reemplazar $k = -2$, se tiene que la forma escalonada la matriz de coeficientes tiene rango igual a 2 y es diferente al de la matriz ampliada que es igual a 3. Por lo tanto, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

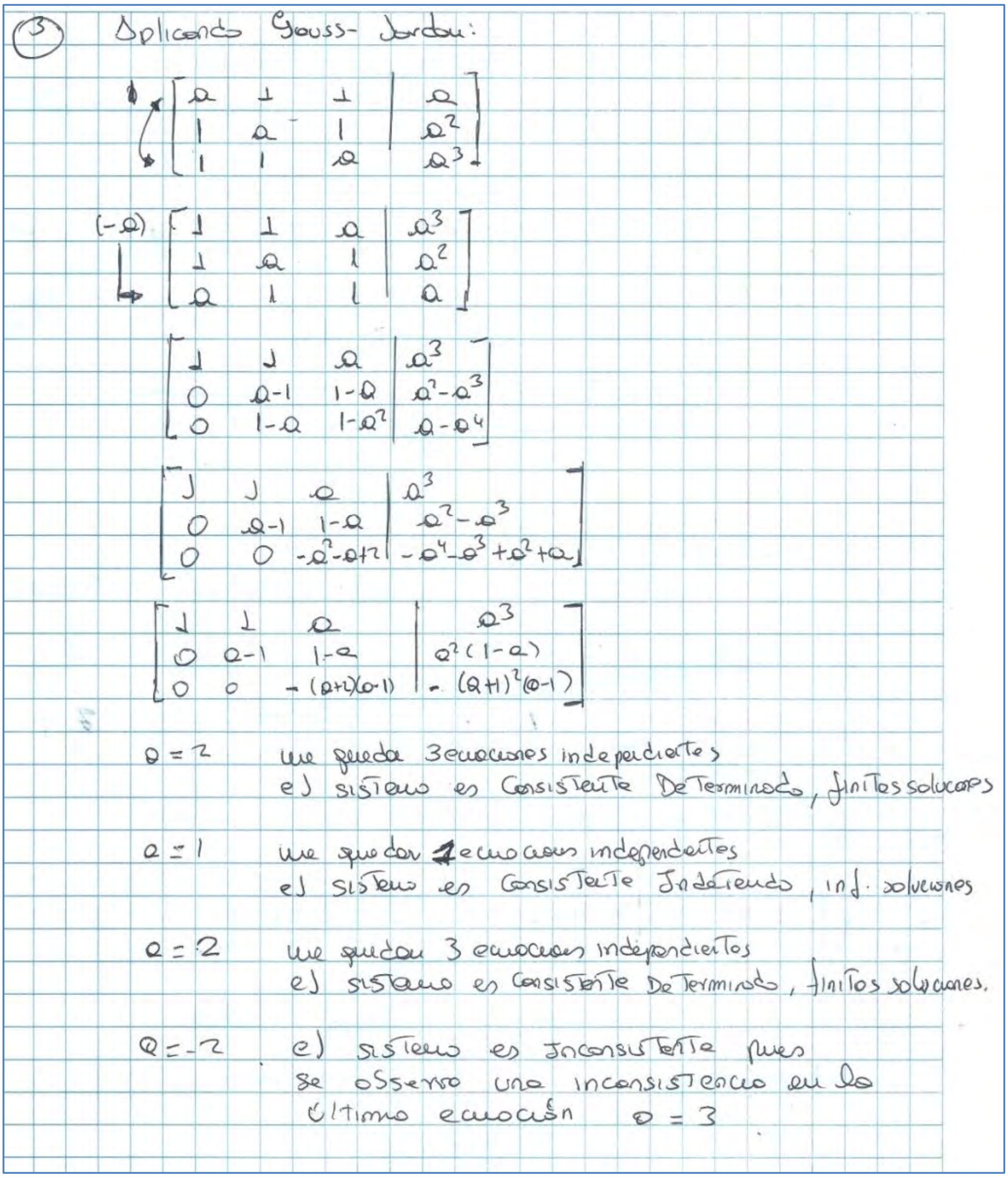
Según la resolución del ítem 3, el profesor A utiliza procedimientos matriciales para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tiene un parámetro, aplica el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada) y relaciona la noción de rango de una matriz con la solución de un SEL. También, sabe movilizar otras representaciones del objeto matemático al llevar el SEL de la representación algebraica al matricial y además, utiliza la determinante de la matriz de coeficientes para comprobar si el SEL tiene o no solución.

El profesor A, sabe movilizar las representaciones del objeto matemático y conectar la noción de rango de una matriz con el conjunto solución de un SEL, pero no justifica por qué el SEL es consistente determinado.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 3 de la actividad 2 realizada por el profesor A, se observa que el contexto es netamente matricial, ya que utiliza la matriz ampliada del SEL, el método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL (operaciones elementales filas a una matriz) y el concepto de rango de una matriz para hallar la solución de un SEL.

La tabla 4.15 muestra la resolución realizada por el Profesor B.

Tabla 4.15 Respuesta al ítem 3 del profesor B


3 Aplicando Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a & a^3 \end{array}\right]$$

$$(-a)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 1 & a & 1 & a^2 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & a-1 & 1-a & a^2-a^3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a-a^4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & a-1 & 1-a & a^2-a^3 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & -a^4-a^3+a^2+a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^3 \\ 0 & a-1 & 1-a & a^2(1-a) \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-1) & -(a+1)^2(a-1) \end{array}\right]$$

$a = 2$ me queda 3 ecuaciones independientes
el sistema es Consistente Determinado, finitos solucions

$a = 1$ me quedan 1 ecuaciones independientes
el sistema es Consistente Indeterminado, inf. soluciones

$a = 2$ me quedan 3 ecuaciones independientes
el sistema es Consistente Determinado, finitos soluciones.

$a = -2$ el sistema es Inconsistente pues
se observa una inconsistencia en la
última ecuación $a = 3$

Como se observa en la respuesta al ítem 3 (tabla 4.15), la práctica matemática realizada por el profesor B, se inicia llevando la representación algebraica del SEL inicial a una representación de la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) de la forma $\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 1 & 1 & \vdots & \mathrm{Q} \\ 1 & \mathrm{Q} & 1 & \vdots & \mathrm{Q}^2 \\ 1 & 1 & \mathrm{Q} & \vdots & \mathrm{Q}^3 \end{bmatrix}$, en donde se puede advertir que el profesor B ha cambiado el parámetro k por el parámetro Q. Luego, aplicando el método de Gauss-Jordan mediante operaciones elementales filas a la matriz ampliada, obtiene la matriz escalonada de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{Q} & \vdots & \mathrm{Q}^3 \\ 0 & \mathrm{Q}-1 & 1-\mathrm{Q} & \vdots & \mathrm{Q}^2(1-\mathrm{Q}) \\ 0 & 0 & -(\mathrm{Q}+2)(\mathrm{Q}-1) & \vdots & -(\mathrm{Q}+1)^2(\mathrm{Q}-1) \end{bmatrix}$, habiendo un error en el último elemento de la fila 3 de la matriz escalonada, ya que falta el término Q.

La parte a) de ítem no lo realiza, pues reemplaza el valor de $\mathrm{Q} = 2$, la cual es la parte c) del ítem 3.

Para la parte b), reemplaza $\mathrm{Q} = 1$ en la matriz escalonada y manifiesta que le queda una ecuación independiente, con lo cual concluye que el SEL es consistente indeterminado; es decir, el SEL tiene infinitas soluciones.

Para la parte c), reemplaza el valor de $\mathrm{Q} = 2$ en la matriz escalonada y manifiesta que le quedan tres ecuaciones independientes, con lo cual concluye que el SEL es consistente determinado; es decir, el SEL finitas soluciones.

Para la parte d), reemplaza el valor de $\mathrm{Q} = -2$ en la matriz escalonada y manifiesta que el SEL es inconsistente, pues se tiene una inconsistencia en la última ecuación de la forma $0 = 3$.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor B en la resolución del ítem 3, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: ecuación, sistema, sistema de ecuaciones lineales, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL y la representación simbólica de la matriz escalonada.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor B utiliza en la resolución del ítem 3, se tienen los siguientes: matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, matrices equivalentes, ecuaciones independientes, solución de una ecuación y conjunto solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} Q & 1 & 1 & \vdots & Q \\ 1 & Q & 1 & \vdots & Q^2 \\ 1 & 1 & Q & \vdots & Q^3 \end{bmatrix}$.
- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & Q & \vdots & Q^3 \\ 0 & Q-1 & 1-Q & \vdots & Q^2(1-Q) \\ 0 & 0 & -(Q+2)(Q-1) & \vdots & -(Q+1)^2(Q-1) \end{bmatrix}$, la cual tiene un error en el último elemento de la fila 3 de la matriz escalonada, ya que falta el término Q.

Con respecto a las propiedades, se destacan la propiedad de matrices equivalentes, la propiedad de que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas y la propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

1) Si $Q = 1$ el SEL es consistente indeterminado, ya que al reemplazar $Q = 1$ en la forma escalonada de la matriz ampliada del SEL, se obtiene una única ecuación lineal del nuevo SEL y cómo la cantidad de ecuaciones es menor que es el número de variables, el SEL es consistente indeterminado.
2) Si $Q = 2$ el SEL es consistente determinado, ya que al reemplazar $Q = 2$ en la forma escalonada de la matriz ampliada del SEL, se obtienen tres ecuaciones lineales del nuevo SEL y cómo la cantidad de ecuaciones es igual al número de variables, el SEL es consistente determinado.
3) Si $k = -2$ el SEL es inconsistente, ya que al realizar operaciones elementales a la matriz ampliada del SEL obtenida al reemplazar $k = -2$, se tiene que la tercera ecuación obtenida de la forma escalonada de la matriz de coeficientes

tiene una inconsistencia, pues se obtiene que $0 = 3$. Por lo tanto, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

Según la resolución del ítem 3, el profesor B utiliza procedimientos matriciales para hallar la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tiene un parámetro, para lo cual utiliza el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada) y relaciona el número de filas no nulas con el número de ecuaciones resultantes del SEL equivalente.

El profesor B sabe movilizar las representaciones de un objeto matemático de la forma algebraica a la matricial, pero no relaciona el rango de una matriz con el conjunto solución de un SEL ni justifica por qué el SEL consistente determinado.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 3 de la actividad 2 realizada por el profesor B, se observa que el contexto es netamente matricial, ya que utiliza la matriz ampliada del SEL y el concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes para hallar la solución del SEL.

Respuesta y análisis al ítem 4

Los profesores A y B realizan la resolución del ítem 4 de la actividad 2 llevando la representación algebraica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a una representación de la forma matricial de un SEL. A continuación, en la tabla 4.16 se muestra la resolución realizada por el Profesor A y luego se realiza el análisis de la resolución de acuerdo al primer y segundo nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS.

La tabla 4.16 muestra la resolución realizada por el Profesor A.

Tabla 4.16 Respuesta al ítem 4 del profesor A

4) Analizamos su matriz aumentada

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & a-8 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & b-1 \end{array}\right)$$

a) Si $a=3$ y $b=1$ los rangos coinciden y valen 2 menor que el número de incógnitas
Luego el sistema es consistente indeterminado
tiene infinitas soluciones

b) Si $a \neq 3$ $\operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(\tilde{A})$
Luego es consistente determinado y por ende
tiene una única solución

c) Si $a=3$ y $b \neq 1$ $\operatorname{ran} A = 2 \neq 3 = \operatorname{ran}(\tilde{A})$
El sistema es inconsistente
No tiene solución $CS = \emptyset$

d) Geométricamente

Caso (a): Se trata de tres planos cuya intersección es una recta (infinitos puntos)

Caso (b): Se trata de tres planos que se cortan en un solo punto

Caso (c): Se trata de tres planos que no concurren en ningún punto.

Análisis de la práctica matemática del profesor A

Como se observa en la respuesta al ítem 4 (tabla 4.16), la práctica matemática desarrollada por el profesor A, se inicia representando la forma algebraica del SEL $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - z = -1 \\ 4x + 2y + a\,z = b \end{cases}$ a la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & a & \vdots & b \end{bmatrix}$. Luego, mediante el método de Gauss-Jordan realiza operaciones elementales a la matriz ampliada hasta obtener su forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & \vdots & b-1 \end{bmatrix}$.

Usando la matriz escalonada se tiene lo siguiente:

Para la parte a), reemplaza $a = 3$ y $b = 1$ y obtiene que los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, dicho rango es menor que el número de incógnitas. Luego, para dichos valores de los parámetros a y b, el sistema es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones.

Para la parte b), si $a \neq 3$, se obtiene que $ran(A) = 3 = ran(\tilde{A})$. Luego, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución.

Para la parte c), si $a = 3$ y $b \neq 1$, se obtiene que $(ran(A) = 2) \neq (3 = ran(\tilde{A}))$. Luego, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución y que $C.S. = \phi$.

Para la parte d), interpreta geométricamente la solución del SEL como sigue a continuación:

- Para la parte a), se trata de tres planos cuya intersección es una recta (infinitos puntos).
- Para la parte b), se trata de tres planos que se cortan en un solo punto.
- Para la parte c), se trata de tres planos que no concurren en ningún punto.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor A en la resolución del ítem 4, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: sistema, recta en el espacio, plano, puntos, número de incógnitas, solución, intersección de planos, la representación matricial de un SEL, la representación simbólica de la matriz escalonada y la representación simbólica del conjunto vacío.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 4, se tienen los siguientes: sistema de ecuaciones lineales, matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, rango de una matriz, matrices equivalentes, plano en el espacio, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & a & \vdots & b \end{bmatrix}$.
- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada para obtener la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & \vdots & b-1 \end{bmatrix}$.
- La aplicación del rango de una matriz para determinar la solución del SEL; es decir, si el sistema es consistente determinado, consistente indeterminado o inconsistente.

Con respecto a las propiedades, se destacan la propiedad de matrices equivalentes, la propiedad de que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas, la propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes y la propiedad de intersección de planos en el sistema tridimensional.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

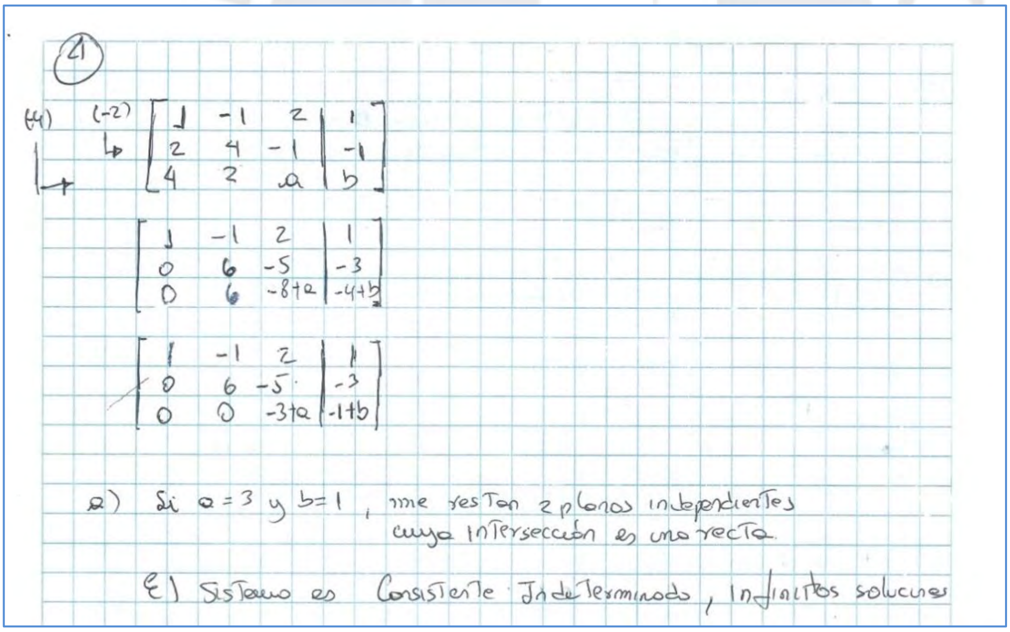
1) Si en el SEL los parámetros a y b asumen los valores 3 y 1, respectivamente, entonces el SEL resultante tiene infinitas soluciones, ya que para dichos valores de los parámetros, los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales a 2, el éste rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones
2) Si $a \neq 3$ entonces el SEL tiene única solución, ya que si $a \neq 3$ se obtiene $ran(A) = 3 = ran(\tilde{A})$, el cual es igual al número de incógnitas, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución.
3) Si $a = 3$ y $b \neq 1$, entonces el SEL no tiene solución, ya que para éstos valores de a y b, se obtiene que $(ran(A) = 2) \neq (3 = ran(\tilde{A}))$. Luego, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

Según la resolución del ítem 4, el profesor A utiliza procedimientos matriciales para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tiene dos parámetros y aplica el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada). También, relaciona el concepto de rango de una matriz con el conjunto solución de un SEL y sabe movilizar otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial. Además, conecta el conjunto solución de un SEL con el objeto geométrico que representa en el espacio tridimensional; es decir, da una interpretación geométrica del conjunto solución de un SEL.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 4 de la actividad 2 realizada por el profesor A, se observa que los contextos son matricial y geométrico, ya que utiliza la matriz ampliada y el concepto de rango de una matriz para hallar la solución de un SEL y además, interpreta geométricamente la solución del SEL en el espacio tridimensional.

La tabla 4.17 muestra la resolución realizada por el Profesor B.

Tabla 4.17 Respuesta al ítem 4 del profesor B



4

(-4) (-2)

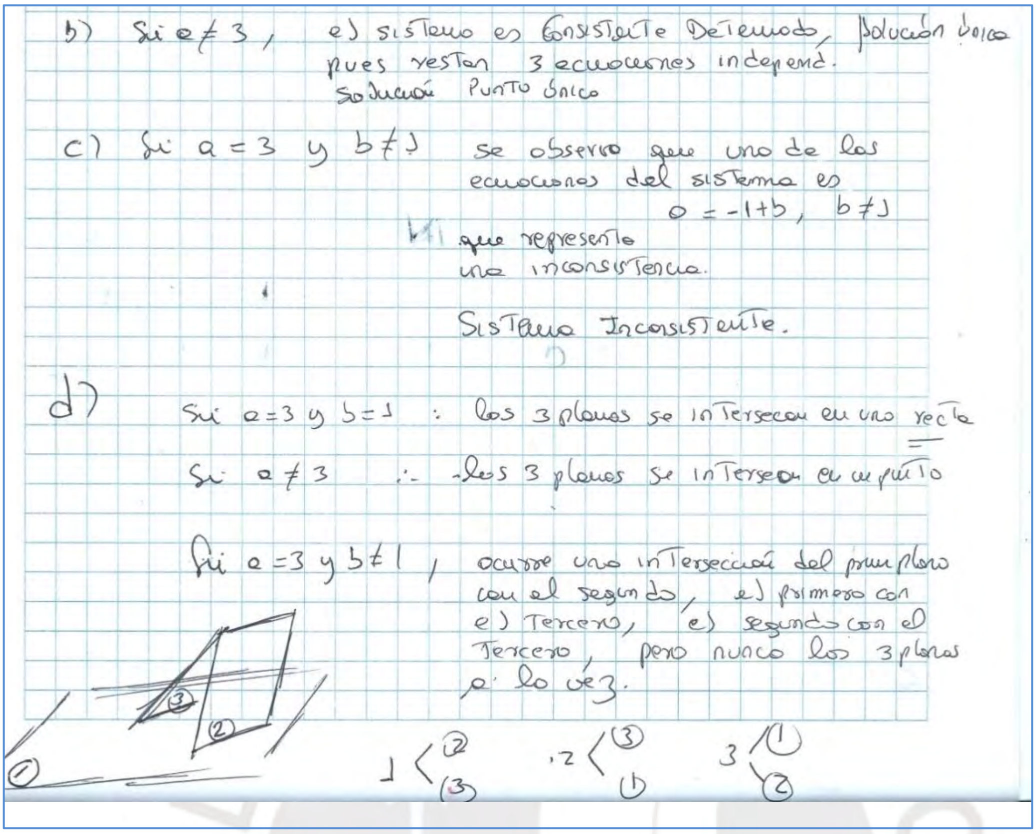
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & a & b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & -8+a & -4+b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -3+a & -1+b \end{array}\right]$$

a) Si $a = 3$ y $b = 1$, me resTan 2 planos independientes cuya intersección es una recta.

El Sistema es Consistente Indeterminado, Infinitas soluciones



b) Si $a \neq 3$, el sistema es consistente determinado, solución única pues restan 3 ecuaciones independ.
Solución punto único

c) Si $a = 3$ y $b \neq 1$ se observa que una de las ecuaciones del sistema es
$0 = -1+b$, $b \neq 1$
que representa una inconsistencia.

Sistema Inconsistente.

d) Si $a=3$ y $b=1$: los 3 planos se intersecan en una recta

Si $a \neq 3$: los 3 planos se intersecan en un punto

Si $a=3$ y $b \neq 1$, ocurre una intersección del primer plano con el segundo, el primero con el tercero, el segundo con el tercero, pero nunca los 3 planos a la vez.

Análisis de la práctica matemática del profesor B

Como se aprecia en la respuesta al ítem 4 (tabla 4.17), la práctica matemática realizada por el profesor B comienza representando la forma algebraica del SEL $\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & -1 \\ 4x & + & 2y & + & a\,z & = & b \end{cases}$, a la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & a & \vdots & b \end{bmatrix}$. Luego, mediante el método de Gauss-Jordan realiza operaciones elementales a la matriz ampliada hasta obtener su forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & -3+a & \vdots & -1+b \end{bmatrix}$.

Para la parte a), reemplaza $a = 3$ y $b = 1$ en la matriz escalonada y menciona que le quedan dos planos independientes cuya intersección es una recta. Luego, concluye que para dichos valores de a y b, el sistema es consistente indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones.

Para la parte b), si $a \neq 3$, manifiesta que el sistema es consistente determinado, con solución única, ya que restan tres ecuaciones independientes y la solución es un único punto.

Para la parte c), si $a = 3$ y $b \neq 1$, muestra que una de las ecuaciones del sistema es $0 = 1 - b$ y como $b \neq 1$ se tiene una inconsistencia. Luego, concluye que el SEL es inconsistente.

Para la parte d), interpreta geométricamente como sigue:

- Para la parte a), los tres planos se intersecan en una recta.
- Para la parte b), los tres planos que se intersecan en un punto.
- Para la parte c), menciona que puede ocurrir la intersección del primer plano con el segundo, el primero con el tercero, el segundo con el tercero, pero nunca los tres planos a la vez. Éstas se presentan mediante una gráfica.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor B en la resolución del ítem 4, es posible identificar algunos *elementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: ecuación, sistema, recta en el espacio, plano, solución, intersección de planos, la representación matricial de un SEL y la representación simbólica de la matriz escalonada.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor B utiliza en la resolución del ítem 4, se tienen los siguientes: matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, matrices equivalentes, conjunto solución de un SEL (consistente e inconsistente), independencia de las ecuaciones lineales y la representación geométrica de una ecuación lineal de tres variables como un plano en el espacio.

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & a & \vdots & b \end{bmatrix}$.

- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & -3+a & \vdots & -1+b \end{bmatrix}$.
- Determinar el número de ecuaciones independientes del SEL y su correspondiente representación geométrica para obtener el conjunto solución del SEL.

Con respecto a las propiedades, se destacan las siguientes: matrices equivalentes, el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas, conjunto solución de SEL equivalentes e intersección de planos en el sistema tridimensional.

Entre los argumentos podemos identificar los siguientes:

1) Si en el SEL los parámetros a y b asumen los valores 3 y 1, respectivamente, entonces el SEL resultante tiene infinitas soluciones, ya que para dichos valores de los parámetros, los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, entonces las ecuaciones representan a dos planos que se intersectan en una recta, el sistema es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones.
2) Si $a \neq 3$ entonces el SEL tiene única solución, ya que si $a \neq 3$ la forma escalonada reducida representa geométricamente a tres planos cuya intersección es un único punto, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución.
3) Si $a = 3$ y $b \neq 1$ entonces el SEL no tiene solución, ya que para dichos valores el SEL equivalente tiene una ecuación inconsistente de la forma $0 = -1 + b,\ b \neq 1$. Luego, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

En la resolución del ítem 4, el profesor B utiliza procedimientos matriciales para la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tiene dos parámetros y utiliza el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada). También, conecta el concepto de ecuaciones independientes en un SEL con el conjunto solución de un SEL y sabe movilizar otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial. Además, relaciona el conjunto solución de un SEL con el objeto geométrico que representa en el espacio tridimensional; es decir, da una interpretación geométrica del conjunto solución de un SEL.

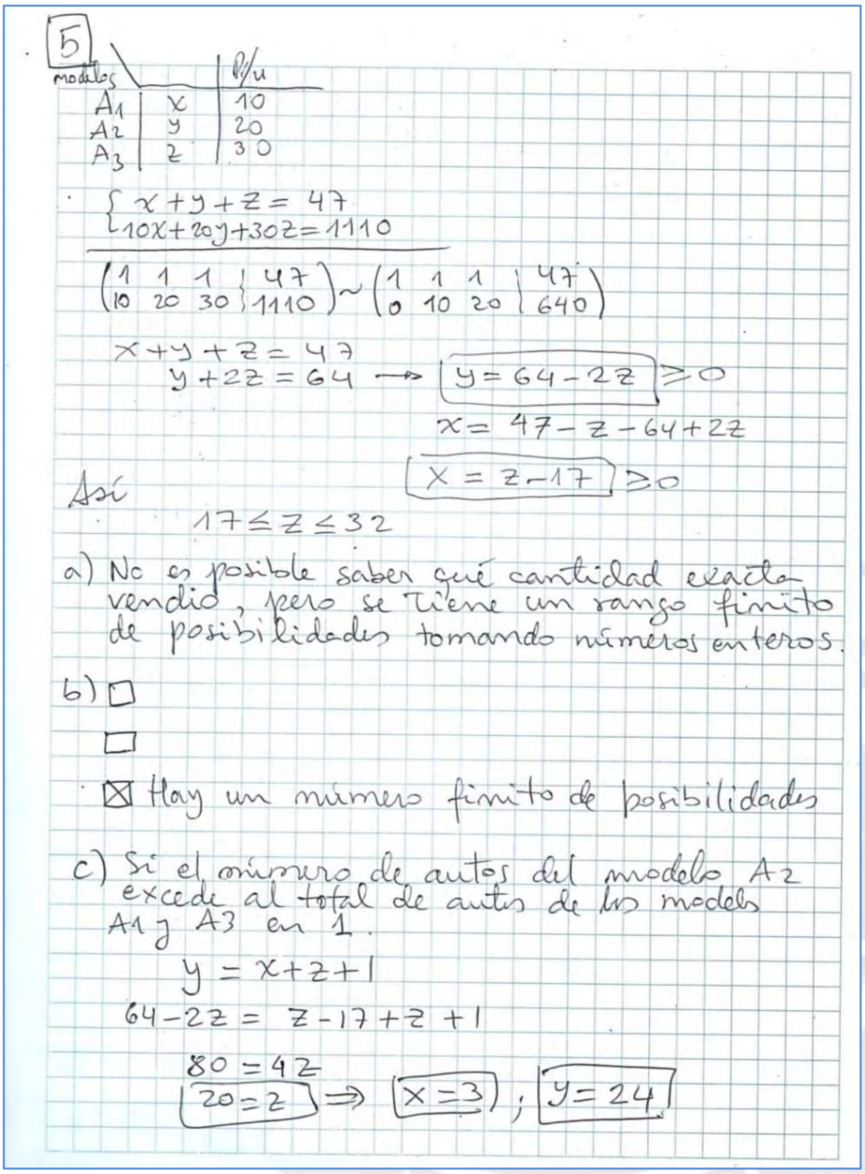
Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 4 de la actividad 2 realizada por el profesor B, se observa que el contexto es matricial y geométrico, ya que utiliza la matriz ampliada y el concepto de ecuaciones independientes para hallar la solución de un SEL y además, interpreta geométricamente la solución del SEL en el espacio tridimensional.

Respuesta y análisis al ítem 5

Los profesores A y B realizan la resolución del ítem 5 de la actividad 2 llevando un problema de contexto a una representación algebraica de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, para luego representarlo en la forma matricial. A continuación, en la tabla 4.18 se muestra la resolución realizada por el Profesor A y luego se realiza el análisis de la resolución de acuerdo al primer y segundo nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS.

La tabla 4.18 muestra la resolución realizada por el Profesor A.

Tabla 4.18 Respuesta al ítem 5 del profesor A



5

Modelos		P/u
A1	x	10
A2	y	20
A3	z	30

$$\begin{cases} x+y+z=47 \\ 10x+20y+30z=1110 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 47 \\ 10 & 20 & 30 & 1110 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 47 \\ 0 & 10 & 20 & 640 \end{array}\right)$$

$$x+y+z=47$$
$$y+2z=64 \rightarrow \boxed{y=64-2z} \geq 0$$
$$x=47-z-64+2z$$

Así

$$\boxed{x=z-17} \geq 0$$
$$17 \leq z \leq 32$$

a) No es posible saber qué cantidad exacta vendió, pero se tiene un rango finito de posibilidades tomando números enteros.

b) ☐

☐

☒ Hay un número finito de posibilidades

c) Si el número de autos del modelo A2 excede al total de autos de los modelos A1 y A3 en 1.

$$y=x+z+1$$
$$64-2z=z-17+z+1$$
$$80=4z$$
$$\boxed{20=z} \Rightarrow \boxed{x=3} ; \boxed{y=24}$$

Análisis de la práctica matemática del profesor A

Como se observa en la respuesta al ítem 5 (tabla 4.18), la práctica matemática desarrollada por el profesor A, se inicia desarrollando un esquema la información obtenida del enunciado del problema de contexto de la forma

Modelos		Precio unitario
A1	x	10
A2	y	20
A2	z	30

Luego, mediante el esquema, presenta en forma algebraica el SEL:

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 47 \\ 10x & + & 20y & + & 30z & = & 1110 \end{cases}.$$

Después, representa el SEL matricialmente (la matriz aumentada o ampliada) de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 47 \\ 10 & 20 & 30 & \vdots & 1110 \end{bmatrix}$.

Usando el método de Gauss-Jordan realiza operaciones elementales a la matriz ampliada hasta obtener su forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 47 \\ 0 & 10 & 20 & \vdots & 640 \end{bmatrix}$.

Posteriormente, usa la matriz escalonada para obtener un SEL equivalente al SEL inicial de la forma $\begin{cases} x + y & + & z & = & 47 \\ \quad\; y & + & 2z & = & 64 \end{cases}$.

En el SEL anterior, expresa las variables x e y en términos de la variable z y obtiene las desigualdades siguientes:

$y = 64 - 2z \geq 0,\;\; x = z - 17 \geq 0.$

Resolviendo las desigualdades, se obtiene $17 \leq z \leq 32.$

Para la parte a), el profesor menciona que no es posible saber qué cantidad exacta vendió, pero tomando números enteros se tiene un rango finito de posibilidades.

En la parte b), el profesor elige, de las alternativas propuestas, que hay un número finito de posibilidades para averiguar la cantidad vendida de cada modelo.

En la parte c), para averiguar la cantidad vendida de cada modelo, agrega al enunciado del problema la información siguiente: el número de autos del modelo A2 excede al total de autos de los modelos A1 y A3 en uno. La información anterior se expresa algebraicamente mediante la ecuación $y = x + z + 1.$

Resolviendo el nuevo SEL se obtiene: $x = 3$, $y = 24$ y $z = 20.$

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor A en la resolución del ítem 5, es posible identificar algunos *elementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: número de autos, precio, cantidad, ecuación, inecuación, posibilidades, incógnitas, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL, la representación simbólica de la matriz escalonada y la representación simbólica del conjunto solución.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 5, se tienen los siguientes: ecuación, variables, sistema de ecuaciones lineales, matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, matrices equivalentes, matriz escalonada, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de las variables x, y y z que representan la cantidad de autos vendidos de los modelos A1, A2 y A3, respectivamente.
- La representación del problema de contexto mediante el SEL de la forma $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 47 \\ 10x & + & 20y & + & 30z & = & 1110 \end{cases}$.
- La representación mediante la matriz ampliada o aumentada del SEL mediante la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 47 \\ 10 & 20 & 30 & : & 1110 \end{bmatrix}$.
- La realización del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz la matriz escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 47 \\ 0 & 10 & 20 & : & 640 \end{bmatrix}$.
- La obtención de un SEL equivalente $\begin{cases} x + y & + & z & = & 47 \\ \quad\; y & + & 2z & = & 64 \end{cases}$, a partir de la matriz escalonada.
- Se adiciona una información al enunciado inicial del problema, que se representa algebraicamente mediante la ecuación $y = x + z + 1$, para obtener la cantidad vendida de cada modelo.

Con respecto a las propiedades, se destacan las siguientes: matrices equivalentes, el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas, conjunto solución de un SEL equivalente y desigualdades.

Entre los argumentos podemos identificar que el SEL tiene un número finito de posibilidades, ya que al llevar la forma escalonada del SEL a un SEL equivalente, se obtiene las desigualdades siguientes: $y = 64 - 2z \geq 0$, $x = z - 17 \geq 0$, de las cuales se obtiene $17 \leq z \leq 32$, y según el contexto del problema las variables son números enteros, por lo cual la variable z puede asumir solo valores enteros desde 17 hasta 32; es decir, hay 16 posibilidades que es un número finito de posibilidades.

De acuerdo a la resolución del ítem 5, el profesor A representa mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas el problema de contexto. Luego, representa matricialmente mediante la matriz ampliada el SEL y utiliza el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada). También, agrega una nueva ecuación al SEL equivalente a fin de obtener una única posibilidad o solución del problema de contexto. Además, utiliza representaciones verbales para adicionar una información al problema de contexto y moviliza otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial y viceversa, pero no interpreta la solución del SEL.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 5 de la actividad 2 realizada por el profesor A, se observa que el contexto es verbal, algebraico y matricial, ya que representa el problema de contexto mediante un SEL, luego transita al contexto matricial al representar el SEL mediante la matriz ampliada.

La tabla 4.19 muestra la resolución realizada por el Profesor B.

Tabla 4.19 Respuesta al ítem 5 del profesor B

⑤ x : Cantidad autos modelo D1

y : cantidad autos modelo D2

z : cantidad autos modelo D3

Se construye el siguiente sistema:

a)

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z = 1110 \\ x + y + z = 47 \end{cases}$$

Sistema matricial

$$\begin{array}{c} (-1) \\ \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 111 \\ 1 & 1 & 1 & 47 \end{array}\right]$$

Se aplica Gauss-Jordan

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ (2) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 111 \\ 0 & -1 & -2 & -64 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -17 \\ 0 & +1 & +2 & +64 \end{array}\right]$$

Sistema ecuaciones

$$\begin{cases} x = -17 + t \\ y = 64 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad / \ t \in \mathbb{N}$$

$-17 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq 17$

$64 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 32$

t	x	y	z
17	0	30	17
⋮			
32	25	0	32

$t = \{t \in \mathbb{N} / 17 \leq t \leq 32\}$

b) Hay un número finito de posibilidades para la cantidad vendida de c/modelo

c) Tomo una solución (10, 30, 17) y obtengo una ecuación para dicho punto. Dicha ecuación se la adiciono a las otras dos, verificando que no sea redundante.

Análisis de la práctica matemática del profesor B

Como se observa en la respuesta al ítem 5 (tabla 4.19), la práctica matemática desarrollada por el profesor B, comienza representado mediante las variables x, y y z, la cantidad de autos vendidos de los modelos A1, A2 y A3 respectivamente.

Luego, construye el siguiente SEL $\begin{cases} 10x & + & 20y & + & 30z & = & 1110 \\ x & + & y & + & z & = & 47 \end{cases}$.

Después de simplificar la primera ecuación lineal (se divide por 10), representa el SEL resultante en la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 111 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 47 \end{bmatrix}$.

Usando el método de Gauss-Jordan realiza operaciones elementales a la matriz ampliada hasta obtener su forma escalonada reducida: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -17 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 64 \end{bmatrix}$.

Usa la matriz escalonada para obtener la solución del SEL de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x & = & -17+t \\ y & = & 64-2t\,, \quad t \in \mathbb{N} \\ z & = & t \end{cases}$$

Halla las restricciones para t y obtiene el conjunto $\{t \in \mathbb{N} / \ 17 \leq t \leq 32\}$.

Posteriormente, muestra las posibles soluciones mediante la tabla:

t	x	y	z
17	0	30	17
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32	15	0	32

No responde la parte a).

En la parte b), elige de las alternativas propuestas, que hay un número finito de posibilidades para averiguar la cantidad vendida de cada modelo.

Para la parte c), elige la solución $(0;30;17)$ y menciona que con dicho punto obtiene una ecuación (no lo halla) que se adiciona a las otras dos verificando que no sea redundante.

Análisis de los objetos matemáticos: Configuración cognitiva

En la actividad matemática realizada por el profesor B en la resolución del ítem 5, es posible identificar algunos e*lementos lingüísticos* (términos, notaciones y expresiones) en sus diversos registros (verbal y simbólico), también de las definiciones (o conceptos), procedimientos, proposiciones (o propiedades) y argumentos que el profesor utiliza.

Los elementos lingüísticos observados son los siguientes: cantidad de autos, ecuación, inecuación, posibilidades, incógnitas, la representación algebraica de un SEL, la representación matricial de un SEL, la representación simbólica de la matriz escalonada y la representación simbólica del conjunto solución.

Entre las definiciones (o conceptos) que el profesor A utiliza en la resolución del ítem 5, se tienen los siguientes: ecuación, variables, sistema de ecuaciones lineales, matriz ampliada de un SEL, operaciones elementales, matrices equivalentes, matriz escalonada reducida, SEL equivalentes y solución de un SEL (consistente determinado, consistente indeterminado e inconsistente).

En cuanto a los procedimientos se destacan los siguientes:

- La asignación de las variables x, y y z que representan la cantidad de autos vendidos de los modelos A1, A2 y A3, respectivamente.
- La representación del problema de contexto mediante el SEL de la forma $\begin{cases} 10x & + & 20y & + & 30z & = & 1110 \\ x & + & y & + & z & = & 47 \end{cases}$.
- Después de simplificar la primera ecuación lineal del SEL(se divide por 10), representa el SEL resultante en la forma matricial (la matriz aumentada o ampliada) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 111 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 47 \end{bmatrix}$.
- La aplicación del método de Gauss-Jordan para la resolución del SEL mediante de operaciones elementales filas a la matriz ampliada, para obtener la matriz la matriz escalonada reducida $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 17 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 64 \end{bmatrix}$.
- La obtención de las soluciones del SEL de la forma $\begin{cases} x = & -17 + t \\ y = & 64 - 2t \\ z = & t \end{cases}, t \in \mathbb{N}$.
- La representación de las soluciones mediante la tabla

t	x	y	z
17	0	30	17
⋮	⋮	⋮	⋮
32	15	0	32

Con respecto a las propiedades, se destacan las siguientes: matrices equivalentes, el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas, conjunto solución de un SEL equivalente y desigualdades.

Entre los argumentos podemos identificar que el SEL tiene un número finito de posibilidades, ya que al llevar la forma escalonada del SEL a un SEL equivalente, se obtienen las soluciones siguientes: $x = -17 + t,\ y = 64 - 2t, z = t.$ Según el contexto del problema $-17 + t \geq 0$ y $64 - 2t \geq 0$, se obtiene $17 \leq t \leq 32$, y como las variables son números naturales, el parámetro t puede asumir solo valores naturales desde 17 hasta 32; es decir, hay 16 posibilidades que es un número finito de posibilidades.

Según la resolución del ítem 5, el profesor B representa mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas el problema de contexto. Luego, representa matricialmente mediante la matriz ampliada el SEL y utiliza el método de Gauss-Jordan (mediante operaciones elementales filas para llevar a la matriz ampliada a su forma escalonada). También, elige una solución del problema de contexto. Además, resuelve el problema de contexto verbal mediante un contexto verbal al algebraico y moviliza otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial y viceversa, pero no interpreta la solución del SEL.

Finalmente, al comparar la configuración epistémica (CE) (ver anexo 1) con la solución al ítem 5 de la actividad 2 realizada por el profesor B, se observa que el contexto es verbal, algebraico y matricial, ya que representa el problema de contexto mediante un SEL, luego transita al contexto matricial al algebraico al hallar las soluciones del SEL.

4.3 Síntesis del análisis de las actividades 1 y 2

A continuación presentamos una síntesis del análisis de las actividades 1 y 2 realizada a los profesores A y B, según las categorías del conocimiento didáctico-matemático implementado por el CDM.

Según Pino-Fan, Godino y Font (2013) el conocimiento común del contenido son los conocimientos matemáticos que el profesor moviliza para resolver situaciones problemáticas con respecto a un tema específico de las matemáticas, en nuestro caso, los sistemas de ecuaciones lineales.

La siguiente tabla muestra el conocimiento común del contenido de los profesores A y B.

Tabla 4.20 Conocimiento común del contenido de los profesores A y B

Descripción	**Pregunta(s)**	**Profesor A**		**Profesor B**	
		Si	**No**	**Si**	**No**
Define las matrices de coeficientes y aumentada de un SEL.	P2, P3, P4 y P5 (Act. 2)	X		X	
Determina la forma escalonada de una matriz.	P2, P3 y P4 (Act. 2)	X		X	
Resuelve algebraicamente un SEL	P1 (Act. 2)	X		X	
Resuelve matricialmente un SEL.	P2 (Act. 2)	X		X	
Resuelve un SEL con un parámetro por el método de Gauss-Jordan.	P3 (Act. 2)	X		X	
Resuelve un SEL con dos parámetros por el método de Gauss-Jordan.	P4 (Act. 2)	X		X	
Plantea algebraicamente un SEL a partir de un problema de contexto.	P5 (Act. 2)	X		X	
Utiliza el método de Gauss-Jordan para la resolución de un SEL.	P2, P3, P4 y P5 (Act. 2)	X		X	
Representa algebraicamente el conjunto solución de un SEL.	P1 y P2 (Act. 2)	X		X	

Identifica cuando un SEL es consistente (determinado e indeterminado) e inconsistente.	P3, P4 y P5 (Act. 2)	X		X	

Fuente: Elaboración propia

A partir de la tabla 4.20 podemos observar que los profesores A y B conocen la representación matricial de un SEL, ya que definen las matrices de coeficientes y ampliada de un SEL. Así mismo conocen el procedimiento para hallar la forma escalonada de una matriz, para ello realizan operaciones elementales filas. Además, resuelven en forma algebraica y matricial un SEL, y en el procedimiento matricial utilizan el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales filas). También, resuelven un SEL con uno y dos parámetros (variables libres) por el método de Gauss-Jordan. Hay que mencionar, además que identifican si un SEL tiene o no tiene solución, realizan un planteamiento algebraico de un SEL a partir de un problema de contexto y representan en forma algebraica el conjunto solución de un SEL.

Por otra parte, con respecto al conocimiento ampliado del contenido, Pino-Fan, Godino y Font (2013) mencionan que el profesor además de saber resolver las situaciones problemáticas sobre un determinado tema (SEL) en un cierto nivel en el cual imparte clases, debe poseer conocimientos más avanzados de este tema, de manera que dichos contenidos se relacionen con temas más avanzados del currículo.

La siguiente tabla muestra el conocimiento ampliado del contenido de los profesores A y B.

Tabla 4.11 Conocimiento ampliado del contenido de los profesores A y B

Descripción	**Pregunta(s)**	**Profesor A**		**Profesor B**	
		Si	**No**	**Si**	**No**
Conoce los contextos intra-matemáticos en donde se utilizan los SEL (mencionados en la actividad 1).	P1 (Act. 1)	X			X (solo uno)

Conoce los contextos extra-matemáticos en donde se aplican los SEL (mencionados en la actividad 1).	P2 (Act. 1)	X			X (solo uno)
Conoce métodos diferentes al de Gauss-Jordan para resolver un SEL.	P8 (Act. 1)	X		X	
Interpreta la solución algebraica de un SEL a un contexto geométrico.	P4 (Act. 2)	X		X	
Interpreta la solución de un SEL a partir del rango de un SEL.	P4 (Act. 2) P2 (Act.2)	X X		X	 X
Caracteriza la solución de un SEL a partir de contextos geométricos de una ecuación lineal.	P2 (Act. 2)		X	X	
Reconocen que un SEL y su SEL equivalente tienen el mismo que el conjunto solución.	P1,P2 y P5 (Act. 2)	X		X	

Fuente: Elaboración propia

A partir de la tabla 4.21 podemos observar que existen algunas diferencias entre los profesores A y B en lo que respecta al conocimiento especializado del contenido. En los contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos en donde se utiliza los SEL (mencionados en la actividad 1) el profesor A afirma tener conocimiento de todos ellos, mientras tanto el profesor B solo hace mención de uno en cada caso. Así mismo, ambos profesores tienen conocimiento de otros métodos diferentes al de Gauss-Jordan para resolver un SEL, interpretan la solución algebraica de un SEL a un contexto geométrico, y reconocen que un SEL y su SEL equivalente tienen el mismo conjunto solución. Además, el profesor A utiliza el concepto de rango para interpretar el conjunto solución, mientras el profesor B caracteriza la solución de un SEL a partir de contextos geométricos (utiliza rectas y planos) de un SEL.

En relación al conocimiento especializado, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) proponen en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) seis facetas que forman parte del conocimiento especializado del profesor. Nuestra investigación no ha sido exhaustiva, ya que se hicieron preguntas de la faceta cognitiva, pero no se ingresó al aula de los profesores, por lo cual nos situaremos principalmente en la faceta epistémica y en algunos aspectos parciales de las otras facetas (interaccional, mediacional y ecológica). Según Pino-Fan, Godino y Font (2013) el conocimiento especializado es aquel conocimiento que el profesor debe saber, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. El conocimiento especializado tiene cuatro subcategorías: el conocimiento del contenido especializado (CEsp), el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (CREst), el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (CREns) y el conocimiento del contenido en relación con el currículo (CRCur).

La siguiente tabla muestra el conocimiento especializado y sus respectivas subcategorías de los profesores A y B.

Tabla 4.22 Conocimiento especializado de los profesores A y B

Descripción / subcategoría	**Pregunta(s)**	**Profesor A**		**Profesor B**	
		Si	**No**	**Si**	**No**
Introduce el concepto de conjunto solución de un SEL en una clase con sus estudiantes. (CEsp)	P9 (Act. 1)	X		X	
Interpreta en forma geométrica el conjunto solución de un SEL en el plano y en el espacio. (CEsp)	P4 (Act. 2)	X		X	
Conoce las representaciones verbales, algebraicas y matriciales en la resolución de un problema de contexto sobre SEL. (CEsp)	P5 (Act. 2)	X		X	
Interpreta el conjunto solución de un problema de contexto sobre los SEL. (CEsp)	P5 (Act. 2)	X		X	
Conoce la conexión de la solución algebraica de un SEL con el objeto matemático que lo representa en el espacio. (CEsp)	P4 (Act. 2)	X		X	
Adiciona representaciones verbales a un problema de contexto. (CEsp)	P5 (Act. 2)	X		X	

Conoce los errores y dificultades de los alumnos al aplicar el método de Gauss-Jordan en la resolución de un SEL. (CREst)	P5 (Act.1)	X		X	
Conoce estrategias didácticas-matemáticas al iniciar una clase sobre los SEL. (CREns)	P3 (Act. 1)	X		X	
Utiliza los recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de los SEL. (CREns)	P6 (Act. 1)	X		X	
Conoce el concepto del conjunto solución de un SEL y los conecta con el objeto geométrico en el plano. (CREns)	P1 b) (Act.2)	X		X	
Conoce el tránsito de la representación algebraica a la geométrica y viceversa del conjunto solución de un SEL. (CREns)	P1 b) y P4 (Act.2)	X		X	
Conoce las características del contenido y dificultades de los ejercicios y problemas propuestos sobre los SEL del libro texto del curso. (CRCur)	P4 (Act. 1)	X		X	
Conoce los aspectos históricos de los SEL y su importancia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. (CRCur)	P7 (Act. 1)		X		X

Fuente: Elaboración propia

A partir de la tabla 4.22 podemos observar que los profesores A y B tienen el conocimiento especializado, excepto que no conocen los aspectos históricos de los SEL y su importancia en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe a que nuestra investigación no ha sido exhaustiva, ya que algunas facetas que forman parte del conocimiento especializado no han podido ser evaluadas por razones ajenas al investigador.

CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Esta investigación, como se ha mencionado en el capítulo 2, es de tipo exploratorio y descriptivo y tiene por objetivo identificar los conocimientos especializados sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) que tienen dos profesores que imparten un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería de una universidad privada de Lima. Con esta finalidad, se ha elegido como referente teórico el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) implementado por el EOS (Pino-Fan, Godino y Font, 2013) y también como esta investigación es de tipo cualitativo y el método empleado es el estudio de caso, se ha elaborado un instrumento de investigación que nos ha permitido identificar el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y algunos aspectos del conocimiento especializado (con sus cuatro subcategorías) relacionados principalmente a la faceta epistémica del CDM que tienen dos profesores de una universidad privada de Lima.

A continuación, se mencionan las principales conclusiones a las cuales se ha llegado con respecto a los objetivos propuestos; además, algunas recomendaciones y perspectivas para futuras investigaciones con respecto a los conocimientos especializados que tiene un profesor universitario.

El objetivo general de esta investigación es identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales.

En relación al primer objetivo específico, en el análisis de los ítems propuestos en la actividad 2, identificamos que los profesores A y B tienen el conocimiento común del contenido con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), ya que según lo propuesto en Pino-Fan, Godino y Font (2013) y Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), el profesor moviliza sus conocimientos matemáticos para resolver situaciones problemáticas en relación a los SEL en el nivel educativo que se desempeña; es decir, en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería.

En efecto, los profesores A y B realizan la resolución de un SEL mediante procedimientos algebraicos para la resolución de un SEL de tres ecuaciones con dos incógnitas y usan adecuadamente el concepto de solución de un SEL. También, usan procedimientos matriciales para la resolución de un SEL mediante el método de Gauss-Jordan para obtener la forma escalonada de la matriz ampliada de un SEL, recomendada por Barros, Fernandes y Mendes (2012), Ochoviet (2009) y Tavares (2013). Además, usan procedimientos matriciales para la resolución de SEL con un parámetro y con dos parámetros, mediante el método de Gauss-Jordan, el cual es recomendado en las investigaciones de Valencia (2015), Figueroa (2013) y Martínez y Sáez (2013). Asimismo, mediante la forma escalonada de la matriz ampliada de un SEL relacionan el concepto de rango con la solución de un SEL. Finalmente, resuelven el problema extra-matemático, mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, el cual se representa mediante la matriz ampliada del SEL y utilizan el método de Gauss-Jordan para hallar su solución. En conclusión, los profesores A y B conocen el tema que enseñan; es decir, tienen el conocimiento común del contenido con respecto a los SEL.

En relación al segundo objetivo específico, el conocimiento ampliado del contenido que tiene un profesor del curso de Álgebra Lineal de una universidad privada de Lima, observamos algunas diferencias entre los profesores A y B en lo relacionado a los conocimientos más avanzados del currículo en donde se utilizan los SEL y la relación de este contenido con otros ámbitos del conocimiento. A pesar que la investigación realizada no ha sido exhaustiva, ya que habiendo muchos contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos en donde se utilizan los SEL a nivel universitario, se propuso algunos de ellos en los ítems uno y dos de la Actividad 1 (ver anexo2), el profesor A manifiesta tener conocimiento de todos los contextos intra-matemático y extra-matemático de las alternativas propuestas en los ítems uno y dos de la Actividad 1, menciona a otros métodos matriciales para la resolución de un SEL, pero no menciona a los métodos iterativos para la solución de un SEL, que es un tema más avanzado del currículo. Por otro lado, el profesor B manifiesta conocer un contexto intra-matemático y un contexto extra-matemático de las alternativas propuestas en los ítems uno y dos de la actividad 1, con respecto a otros métodos, manifiesta conocer sólo el método de Cramer.

En relación al tercer objetivo específico, tratamos de identificar el conocimiento especializado que tiene un profesor universitario con respecto a los SEL. Al respecto, Pino-Fan, Godino y Font (2013), manifiestan que es el conocimiento que el profesor debe saber, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. A pesar que nuestra investigación no es exhaustiva, ya que no se realizó la observación de las clases de los profesores A y B, esto es porque no aceptaron a ser grabados en una clase con sus estudiantes, nos situaremos principalmente en la faceta epistémica y en algunos aspectos parciales de las otras facetas (interaccional, mediacional y ecológica). De acuerdo análisis realizado de las actividades 1 y 2 con respecto a las subcategorías del conocimiento especializado, podemos concluir lo siguiente:

Con respecto al conocimiento del contenido especializado, los profesores A y B tienen éste conocimiento, pues son capaces de resolver una situación problemática haciendo uso de los diversos tipos de representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Los profesores A y B son capaces de relacionar e interpretar la solución de un SEL mediante diferentes tipos de representaciones, como el algebraico y geométrico. Además, al resolver un problema de contexto saben transitar de un contexto verbal al algebraico. También, movilizan otras representaciones del objeto matemático llevando el SEL de la representación algebraica al matricial y viceversa. Asimismo, interpretan el conjunto solución de un problema de contexto sobre SEL y adicionan adecuadamente representaciones verbales a un problema de contexto.

Con respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, los profesores A y B de acuerdo al ítem 5 de la actividad 1 tienen éste conocimiento. El profesor A declara tener conocimiento de las dificultades que tienen los alumnos al aplicar el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL y en la entrevista menciona que el método de Gauss-Jordan lo asocia con el cálculo de la determinante de una matriz y que hay ciertas operaciones que pueden modificar el resultado. Mientras, el profesor B expresa que el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL es un algoritmo muy estructurado y que en el proceso la posibilidad de error es muy alta, en la entrevista añade que el método de Gauss-Jordan realiza muchas operaciones aritméticas y que la operación elemental se complica si se realiza con una fracción. Las respuestas de los profesores son a base a su experiencia, porque en la entrevista mencionan que no tienen conocimiento de los avances didácticos del tema.

Con respecto al conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, los profesores A y B tienen éste conocimiento, ya que utilizan diversas estrategias didácticas al iniciar una clase sobre los SEL. El Profesor A menciona que inicia una clase sobre los SEL con un ejemplo práctico o con un problema de contexto y el profesor B representando un SEL en forma algebraica y gráficamente mediante un software de geometría dinámica (Geogebra). Asimismo, ambos profesores usan un recurso tecnológico en la enseñanza de los SEL, el profesor A usa una calculadora para la resolución de un SEL de orden orden $3x3$ y el profesor B un software de geometría dinámica (Geogebra), los cuales fueron corroborados en la entrevista. Además, en lo que respecta a la enseñanza del conjunto solución de los SEL, en ambos profesores predomina la interacción de los aspectos algebraicos y geométricos, y también realizan el tránsito de la representación algebraica a la geométrica y viceversa del conjunto solución de un SEL

Con respecto al conocimiento del contenido en relación con el currículo, los profesores A y B tienen éste conocimiento, pues expresan que los ejercicios o problemas propuestos del libro texto del curso con respecto a los SEL son adecuados. Sin embargo, ambos profesores desconocen sobre los aspectos históricos de los SEL y de su importancia en la enseñanza de las matemáticas, lo cual fue confirmado en la entrevista.

Las herramientas teóricas del EOS, como el análisis didáctico de los procesos de estudio (el primer y segundo nivel del análisis didáctico) y la faceta epistémica del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), nos ha permitido identificar, mediante un instrumento de investigación, los conocimientos especializados que tiene un profesor que imparte un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería, sobre las prácticas matemáticas y la resolución de problemas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales.

Recomendaciones y futuras investigaciones

Dentro de las principales recomendaciones de nuestra investigación que pueden servir en la formación inicial y permanente del profesorado hemos considerado las siguientes:

- Realizar cursos de capacitación para los profesores de un curso de Álgebra Lineal con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los SEL, en donde se realice el primer y segundo nivel del análisis didáctico implementado por el EOS.
- Implementar en los cursos de formación de profesores de matemática los contextos históricos de la matemática de manera que permita una mejora del conocimiento y comprensión de objeto matemático que están abordando.
- Hacer de conocimiento a los profesores sobre la importancia de reconocer las dificultades y errores que tienen los alumnos con respecto a un tema de la Matemática.
- Aplicar el instrumento de investigación a estudiantes de posgrado que llevan un curso de Álgebra Lineal para realizar un análisis de sus conocimientos especializados y contrastar sus respuestas con lo obtenido en nuestra investigación.
- Ampliar la investigación sobre el desempeño del profesor de Álgebra Lineal en el aula, que no se realiza en la presente investigación, para poder identificar otras facetas (afectiva, cognitiva, interaccional y ecológica) del conocimiento especializado que tiene el profesor.

Limitaciones de la investigación

Como toda investigación, la nuestra también tuvo algunas limitaciones, dentro de las cuales identificamos las siguientes:

- La investigación se ha aplicado a cinco profesores de un curso de Álgebra Lineal y de ellos sólo se realizado el análisis a dos profesores. La elección de los dos profesores es debida a que ellos completaron todos los ítems de las actividades propuestas y de la información obtenida de su formación académica, ambos profesores tienen conocimiento de la didáctica de la Matemáticas ya que son egresados de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, y también por su experiencia docente en el dictado del curso de Álgebra Lineal a nivel universitario; por lo que los resultados podrían no ser generalizables a todos los profesores de un curso de Álgebra Lineal.

- Los profesores no aceptaron ser grabados en sus clases, por lo cual solo se realizó el análisis de algunos aspectos de las distintas facetas del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

REFERENCIAS

Andrews-Larson, C. (2015). Roots of linear algebra: a historical e exploration of linear system. *Primus*, *25*(6), 507-528. doi: 10.1080/10511970.2015.1027975

Anton, H. (2008). *Introducción al álgebra lineal.* México: Limusa Wiley.

Barros, P., Fernandes, A., y Mendes, C. (Octubre 2012). Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares. En H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, y C. Nunes (Organizadores), *Seminario de Investigación en Educación Matemática*. Simposio llevado a cabo en el XXIII Seminario de investigación en Educación Matemática, Coimbra, Portugal.

Boyer, C. (2016). *Historia de la matemática* (6a. reimpresión). Madrid, España: Alianza Editorial.

Castro, W., Pino-Fan, L., y Velásquez, H. (2013). El conocimiento didáctico-matemático: una propuesta de evaluación de tres de sus facetas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6688/1/Velasquez2013Conocimiento.pdf

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In J.-L. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas* (Tesis de Maestría). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4736

Garcés, W. (2013). *Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y la educación superior tecnológica* (Tesis de Maestría). Recuperado de http://tesis.pucp. repositorio/handle/123456789/5149edu.pe/

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNION, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM-IACME), Recife (Brasil).

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématique*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistema de Prácticas y Configuraciones de Objetos y Procesos como Herramientas para el Análisis Semiótico en Educación Matemática. Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education – 3rd Meeting. Aristotle (pp. 1- 22). University of Thessaloniki

Godino, J., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font. V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90– 113. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Guerra, A. (2012*). Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales* (Tesis de Maestría). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/8842/1/andresanibalguerragonzalez.2012.pdf

Hernández, E., Vásquez, M. J., y Zurro, M. A. (2012). *Álgebra lineal y Geometría*. Madrid, España: Pearson Educación.

Hoyos, F., Mitacc, M. y Gómez, G. (2017). *Álgebra lineal*. Universidad de Lima.

Lay, D. (2013). *Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias*. México: Pearson Educación.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra lineal.* Madrid: España: McGraw-Hill.

Martínez, F., y Sáez, S.M. (2013). Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato. *NÚMEROS*, *85*(marzo de 2014), 41-48. Recuperado de http:// www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_03.pdf

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Neira, V. (2012). S*istemas de ecuaciones lineales con dos variables: Traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de Ciencias Administrativas* (Tesis de Maestría). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1548

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas* (Tesis de doctorado). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ochoviet_2009.pdf

Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R2 y R3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *7*(1), 1-24.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada. Recuperado de https://periodicos.ufsc.br/ index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n2p1/26018

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87– 109

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. Bolema, 25, 105-132. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/ 277117517_Estudos_de_Caso_em_Educacao_Matematica

Santana, A. (2011). *Utilização do escalamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio* (Tesis de Maestría). Recuperado de https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/download/1820/cursoId:91

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, *15*(2). pp. 4-14.

Tavares, A. (2013). *Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: Sistemas lineares, determinantes e matrizes* (Tesis de Maestría). Recuperado de https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/18655

Valencia, E. (2015). *Errores y dificultades de los estudiantes de ingeniería en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$ (Tesis de Maestría). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5906

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis Doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/11901/Conocimiento_especializado_del_profesor_de_algebra.pdf?sequence=2

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo* (Tesis Doctoral). Recuperado de http://hdl.handle.net/10803/284319

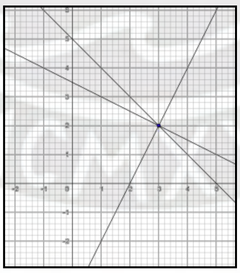
Yin R. (2001) Estudo de caso: planejamento e métodos. Trad. Daniel Grassi. Bookman: Porto Alegre. Recuperado de https://saudeglobaldotorg1.files.wordpress.com/2014/02/yin-metodologia_da_pesquisa_estudo_de_caso_yin.pdf

ANEXOS

Anexo 1: Configuración epistémica de la actividad 2

Tabla A.1 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 1 de la actividad 2)

(Contexto algebraico)

OBJETOS MATEMÁTICOS	**CARACTERÍSTICAS**
Situación-Problema	Dado el siguiente SEL: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ a) ¿Por qué este SEL tiene una única solución? b) ¿Cómo explicaría su respuesta anterior a sus alumnos? c) Agrega al SEL una ecuación de modo que el conjunto solución no se modifique. ¿Qué conocimiento matemático (concepto, propiedad, teoremas, etc.) usó para dar su respuesta?
Lenguaje	• Verbal: ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, conjunto solución de un SEL • Simbólico: x , y $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ • Gráfico 
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales (SEL). • Definición de dos ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes si ambas tienen las mismas soluciones. • Concepto de conjunto solución de un SEL.

Procedimientos	• Para la resolución del SEL usaremos los métodos algebraicos de igualación y sustitución. Para ello se despeja la variable x en la primera ecuación: $x = 5 - y$ • Se reemplaza el valor de x en la segunda ecuación: $$5 - y + 2y = 7$$ • Resolviendo se obtiene: $y = 2$, luego reemplazando en el primer despeje se obtiene $x = 3$ • Los valores de $x = 3$ e $y = 2$, satisfacen la tercera ecuación del sistema. El sistema tiene una única solución: $(3; 2)$ • El punto $(3; 2)$, verifica las ecuaciones del SEL. • Se elige una ecuación que contenga como una solución a $(3; 2)$. • Agregamos al SEL original, la ecuación lineal: $x - y = 1$ • Por la definición de sistema de ecuaciones equivalentes, se tiene que $(3; 2)$ es también solución del nuevo SEL.
Proposiciones-propiedades	• Propiedades de la igualdad de ecuaciones. • Propiedades de ecuaciones equivalentes. • La igualdad de una ecuación al sustituir una variable por su equivalente. • Propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes.
Argumentos	• Tesis 1: EL punto $(3; 2)$ es solución del SEL. Justificación: El punto $(3; 2)$ satisface todas las ecuaciones del SEL. Por el concepto de conjunto solución, el punto $(3; 2)$ es solución del SEL. • Tesis 2: La solución del SEL es única. Justificación: Las gráficas de las ecuaciones lineales del SEL se intersectan el punto $(3; 2)$. El conjunto solución de un SEL con dos incógnitas es el único punto $(3; 2)$ de $\mathbb{R}^2$. • Tesis 3: El SEL original y el nuevo SEL obtenido al agregar una ecuación lineal tienen las mismas soluciones. Justificación: Los dos SEL son equivalentes y por la propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes, ellas tienen al punto $(3; 2)$ como solución.

Tabla A. 2 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 1 de la actividad 2)

(Contexto matricial)

OBJETOS MATEMÁTICOS	**CARACTERÍSTICAS**
Situación-Problema	Dado el siguiente SEL: $\begin{cases} x & + & y & = 5 \\ x & + & 2y & = 7 \\ 2x & - & y & = 4 \end{cases}$ a) ¿Por qué este SEL tiene una única solución? b) ¿Cómo explicaría su respuesta anterior a sus alumnos? c) Agrega al SEL una ecuación de modo que el conjunto solución no se modifique. ¿Qué conocimiento matemático (concepto, propiedad, teoremas, etc.) usó para dar su respuesta?
Lenguaje	• Verbal: sistemas de ecuaciones lineales (SEL), conjunto solución de un SEL, SEL equivalentes, resolución de SEL por el método de Gauss-Jordan, operaciones elementales por filas a una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz escalonada, matrices equivalentes. • Simbólico: $x,\ y,\ \mathrm{AX} = B,\quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{A}_a = [A \vdots B],$ E_1 $f_i \leftrightarrow f_j\ ,\ \ k\, f_i\,,\ k \neq 0,\ f_i + k\ f_j$
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales. • Concepto de conjunto solución de un SEL. • Definición de sistema de ecuaciones consistente e inconsistente. • Definición de una matriz ampliada de un SEL. • Definición de operaciones elementales. • Definición de matrices equivalentes: Dos matrices son equivalentes, si una de ellas puede obtenerse a partir de la otra matriz mediante operaciones elementales filas. • Definición de SEL equivalentes.

Procedimientos	• Asignación de la matriz de coeficientes del SEL: $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ • Asignación de la matriz ampliada del SEL: $\mathrm{A}_a=[A \vdots B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 5\\ 1 & 2 & \vdots & 7\\ 2 & -1 & \vdots & 4\end{bmatrix}$ • Resolviendo el SEL por el método de Gauss-Jordan. Realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada del SEL, se obtiene la matriz equivalente $\mathrm{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 5\\ 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$ • El SEL es consistente determinado y tiene una única solución $(3;2)$. • Se elige una ecuación lineal que contenga como solución a $(3;2)$. Agregamos la ecuación lineal: $x-y=1$ al SEL inicial. • La matriz ampliada del nuevo SEL es $\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 5\\ 1 & 2 & \vdots & 7\\ 2 & -1 & \vdots & 4\\ 1 & -1 & \vdots & 1\end{bmatrix}$ • Realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada del nuevo SEL se obtiene la matriz equivalente $\mathrm{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 5\\ 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$ • El nuevo SEL es consistente determinado y tiene una única solución $(3;2)$. • Los SEL son equivalentes si tienen la misma solución.
Propiedades	• Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedad de matrices equivalentes. • Propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas • Propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes.
Argumentos	• Tesis 1: EL SEL inicial tiene una única solución a $(3;2)$. Justificación: La matriz ampliada $\mathrm{A}_a=[A \vdots B]$ tiene como matriz equivalente a E_1. El rango de la matriz equivalente tiene rango 2 y es igual al número de

	variables. El SEL es consistente determinado y tiene una única solución $(3;2)$. • Tesis 2: EL SEL original y el nuevo SEL obtenido al agregar una ecuación lineal tienen las mismas soluciones. Justificación: Las matrices ampliadas de los dos SEL al llevarlas a sus respectivas formas escalonadas tienen las dos primeras filas no nulas iguales. Los SEL son equivalentes, es decir tiene las mismas soluciones.

Tabla A.3 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 2 de la actividad 2)

(Contexto algebraico)

OBJETOS MATEMÁTICOS	**CARACTERÍSTICAS**
Situación - Problema	Dado el siguiente SEL: $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 9z = 7 \end{cases}$ Mencione si este tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene solución. ¿Cómo llegó a esa conclusión? Justifique su respuesta.
Lenguaje	• Verbal: ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, conjunto solución de un SEL • Simbólico: x, y, z $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 9z = 7 \end{cases}$
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales (SEL). • Definición de dos ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes si ambas tienen las mismas soluciones. • Concepto de conjunto solución de un SEL.
Procedimientos	• Para la Resolución del SEL usaremos el método algebraico de reducción. Eliminando la variable x en las EC.1 y EC. 2 del SEL, se obtiene: (Ec.3)−(Ec.1): $3y - 7z = 2$ (Ec.4) (Ec.2) −2(Ec.1): $-3y + 7z = -2$ (Ec.5) Sumando la Ec.4 y E.5, se obtiene: $0 = 0$ EL SEL equivalente tiene infinitas soluciones. De la Ec.4: $y = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}z$ Reemplazando en la Ec.1 y resolviendo se obtiene:

	$x = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}z$ Luego, la solución es de la forma: $(x; y; z) = \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{3}z; \frac{2}{3} - \frac{7}{3}z; z\right) =$ $\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; 0\right) + z\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 1\right), z \in \mathbb{R}$ • Por la definición de sistema de ecuaciones equivalentes, se tiene el SEL tiene infinitas soluciones.
Proposiciones-propiedades	• Propiedades de la igualdad de ecuaciones. • Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedades de los SEL equivalentes. • Propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes.
Argumentos	• Tesis 1: EL SEL tiene infinitas soluciones. Justificación: Al Resolver algebraicamente el SEL por el método de reducción, se tiene que dos ecuaciones son iguales. AL resolver en términos de la variable z, se obtiene el punto $(x; y; z) = \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{3}z; \frac{2}{3} - \frac{7}{3}z; z\right)$, que verifica las ecuaciones del SEL. Como $z \in \mathbb{R}$, el SEL tiene infinitas soluciones. Por el concepto de conjunto solución de sistemas equivalentes, el SEL tiene infinitas soluciones.

Tabla A.4 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 2 de la actividad 2)

(Contexto matricial)

OBJETOS MATEMÁTICOS	**CARACTERÍSTICAS**
Situación - Problema	Dado el siguiente SEL: $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 9z = 7 \end{cases}$ Mencione si este tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene solución. ¿Cómo llegó a esa conclusión? Justifique su respuesta.
Lenguaje	• Verbal: sistemas de ecuaciones lineales (SEL), conjunto solución de un SEL, SEL equivalentes, resolución de SEL por el método de Gauss-Jordan, operaciones elementales por filas a una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz escalonada, matrices equivalentes, rango de una matriz. • Simbólico: $x,\ y,\ z,\ \mathrm{AX} = B,\quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix},$ $\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B],\ \mathrm{E},\ f_i \leftrightarrow f_j,\ k\,f_i,\ k \neq 0,\ f_i + k\,f_j$
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales. • Concepto de conjunto solución de un SEL. • Definición de un SEL consistente e inconsistente. • Definición de una matriz ampliada de un SEL. • Definición de operaciones elementales. • Definición de matrices equivalentes: Dos matrices son equivalentes, si una de ellas puede obtenerse a partir de la otra matriz mediante operaciones elementales filas. • Definición de SEL equivalentes. • Rango de una matriz.
Procedimientos	• Asignación de la matriz de coeficientes del SEL: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ • Asignación de la matriz ampliada del SEL: $\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$ • Resolviendo el SEL por el método de Gauss-Jordan. Realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada del SEL, se obtiene la matriz equivalente

	$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & \vdots & 13/3 \\ 0 & 1 & -7/3 & \vdots & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ la cual tiene rango igual a 2. Como el rango de A y el rango de A_a son iguales a dos. El SEL es consistente determinado; es decir tiene infinitas soluciones. Como $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A}_a) = 2$ es menor que el número de variables, que es 3, hay una variable libre o parámetro. Haciendo $z = t$, se obtiene: $x = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}t,\ \ y = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}t$ La solución es de la forma: $(x; y; z) = \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{3}z; \frac{2}{3} - \frac{7}{3}z; z\right) = \left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; 0\right) +$ $t\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 1\right),\ t \in \mathbb{R}$
Propiedades	• Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedad de matrices equivalentes. • Propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas • Propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes.
Argumentos	• Tesis 1: EL SEL tiene infinitas soluciones. Justificación: Al Resolver el SEL por el método de Gauss-Jordan, la matriz ampliada $\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B]$ tiene como matriz equivalente a la matriz escalonada E. El rango de la matriz equivalente es 2 y es menor que el número de variables. Luego el SEL es consistente indeterminado y tiene infinitas soluciones. • Tesis 2: La solución del SEL es una recta en el espacio. Justificación: Al resolver el SEL, se tiene que $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A}_a) = 2$ y es menor que el número de variables, que es 3, hay una variable libre o parámetro. Haciendo $z = t$, se obtiene: $x = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}t,\ \ y = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}t$ La solución es de la forma: $(x; y; z) = \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{3}z; \frac{2}{3} - \frac{7}{3}z; z\right) = \left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; 0\right) + t\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 1\right)$, $t \in \mathbb{R}$, la cual es una recta del espacio tridimensional.

Tabla A.5 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 3 de la actividad 2)

(Contexto algebraico)

OBJETOS MATEMÁTICOS	**CARACTERÍSTICAS**
Situación - Problema	Dado el siguiente SEL: $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$ Verifique las siguientes afirmaciones para los valores de k: a) Para $k = 0$, el sistema es consistente determinado. b) Para $k = 1$, el sistema es consistente indeterminado. c) Para $k = 2$, el sistema es consistente determinado. d) Para $k = -2$, el sistema es inconsistente.
Lenguaje	• Verbal: ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, conjunto solución de un SEL, sistema consistente, sistema consistente determinado, sistema inconsistente, parámetro • Simbólico: x, y, z $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k^2 \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales (SEL). • Sistema de ecuaciones lineales homogénea y no homogénea. • Definición de dos ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes si ambas tienen las mismas soluciones. • Concepto de conjunto solución de un SEL.
Procedimientos	Reemplazamos el valor del parámetro k en cada caso. a) Al reemplazar $k = 0$ en el SEL, se obtiene el SEL homogéneo: $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ AL resolver el SEL se tiene como única solución a $(0; 0; 0)$. Luego, el SEL es consistente determinado.

	b) Al reemplazar $k=1$ en el SEL, se obtiene tres ecuaciones iguales a la ecuación $x+y+z=1$. Se puede expresar una variable en términos de las otras dos, por ejemplo $x=1-y-z$. EL SEL es consistente indeterminado, pues se tiene dos variables libres o parámetros. c) Al reemplazar $k=2$, se tiene el SEL siguiente: $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$ Al resolver el SEL por métodos algebraicos, el SEL es consistente determinado y tiene como única solución a $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{9}{2})$. d) Al reemplazar $k=-2$, se tiene el SEL siguiente: $\begin{cases} -2x + y + z = -2 \\ x + -2y + z = 4 \\ x + y + -2z = -8 \end{cases}$ Al resolver el SEL mediante métodos algebraicos (sumando las tres ecuaciones), se obtiene que $0=-4$. Luego, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.
Proposiciones-propiedades	• Propiedades de la igualdad de ecuaciones. • Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedades de los SEL equivalentes. • Propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes.
Argumentos	Tesis 1: Para $k=1$ el SEL tiene infinitas soluciones. Justificación: Al reemplazar $k=1$ en el SEL, se obtienen tres ecuaciones iguales a la ecuación $x+y+z=1$. Expresando una variable en términos de las otras dos, se tiene que $x=1-y-z$. El conjunto solución tiene la forma: $(x;y;z)=(1-y-z;y;z)=(1;0;0)+y(-1;1;0)+z(-1;0;1)$ Las variables y y z pueden asumir todos los valores reales. Luego, usando el concepto de conjunto solución de SEL equivalentes, el SEL tiene infinitas soluciones.

Tabla A.6 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 3 de la actividad 2)

(Contexto matricial)

<table>
<tr><th>OBJETOS MATEMÁTICOS</th><th>CARACTERÍSTICAS</th></tr>
<tr><td>Situación - Problema</td><td>Dado el siguiente SEL:
$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$
Verifique las siguientes afirmaciones para los valores de k:
a) Para $k = 0$, el sistema es consistente determinado.
b) Para $k = 1$, el sistema es consistente indeterminado.
c) Para $k = 2$, el sistema es consistente determinado.
d) Para $k = -2$, el sistema es inconsistente.</td></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>• Verbal: sistemas de ecuaciones lineales (SEL), conjunto solución de un SEL, SEL equivalentes, resolución de SEL por el método de Gauss-Jordan, operaciones elementales por filas a una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz escalonada, matrices equivalentes, rango de una matriz intersección de planos, recta, punto.
• Simbólico: $x,\ y,\ z,\ \mathrm{AX} = B,\quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix},\quad \mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B],\ \mathrm{E},\ \ f_i \leftrightarrow f_j\ ,\ k\, f_i\, ,\ k \neq 0,\ f_i + k\, f_j$</td></tr>
<tr><td>Definiciones (Conceptos)</td><td>• Definición de una ecuación lineal:
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
• Definición de un sistema de ecuaciones lineales.
• Concepto de conjunto solución de un SEL.
• Definición de un SEL consistente e inconsistente.
• Definición de una matriz ampliada de un SEL.
• Definición de operaciones elementales.
• Definición de matrices equivalentes: Dos matrices son equivalentes, si una de ellas puede obtenerse a partir de la otra matriz mediante operaciones elementales filas.
• Definición de SEL equivalentes.
• Rango de una matriz.
• La determinante de una matriz.
• Planos en el espacio.
• Intersección de planos.</td></tr>
</table>

Procedimientos

- Asignación de la matriz de coeficientes del SEL:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

- Asignación de la matriz ampliada del SEL:

$$\mathrm{A}_a=[\mathrm{A} \vdots B]=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & k \\ 1 & k & 1 & \vdots & k^2 \\ 1 & 1 & k & \vdots & k^3 \end{bmatrix}$$

- Resolviendo el SEL por el método de Gauss-Jordan. Realizando operaciones elementales filas a la matriz ampliada del SEL, se obtiene la matriz equivalente

$$\mathrm{E}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & k^3 \\ 0 & k-1 & 1-k & \vdots & k^2-k^3 \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) & \vdots & k(k+1)^2(1-k) \end{bmatrix}$$

Analizando los valores del parámetro k:

Si $k=1$, se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.

Como $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{A}_a)=1$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Por lo tanto b) es cierto.

Si $k=-2$, se tiene la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$.

Como $(ran(A)=2) \neq (ran(\tilde{\mathrm{A}})=3)$, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución. Por lo tanto d) es cierto.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & k^3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -k^2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & k(k+1)^2/(k+2) \end{bmatrix}$$

Como $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{A}_a)=3$ y es igual al número de variables, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución.
Por lo tanto a) y c) son ciertas.

Ahora, interpretemos geométricamente la solución del SEL.

Si $k=1$, se tiene que $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{A}_a)=1$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones que están ubicados en un plano de $\mathbb{R}^3$, dado por la ecuación $x+y+z=1$. Las

	ecuaciones representan a tres planos coincidentes. Para $k=-2$, el SEL es inconsistente, es decir, no tiene solución. Geométricamente las ecuaciones representan a planos que no se intersectan en un objeto en común. Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, el SEL es consistente determinado, es decir, tiene una única solución. Geométricamente los planos se intersectan en un único punto $\mathbb{R}^3$.
Propiedades	• Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedad de matrices equivalentes. • Propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas • Propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes. • Propiedad de la intersección de planos • Propiedad de planos coincidentes. • Propiedad del determinante de la matriz de coeficientes de un SEL.
Argumentos	Tesis 1: Si $k=0$, el SEL homogéneo es consistente determinado Justificación: AL reemplazar $k=0$ en la matriz aumentada del SEL, se tiene la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. Al calcular la determinante de la matriz de coeficientes del SEL homogéneo, se obtiene 2, que es diferente de cero y por lo tanto el SEL homogéneo es consistente determinado; es decir, tiene una única solución. Tesis 2: Si $k=-2$, el SEL es inconsistente. Justificación: Al reemplazar $k=-2$, en la forma escalonada de la matriz ampliada del SEL, se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$. La matriz de coeficientes tiene rango igual a 2 y es diferente al de la matriz ampliada que es igual a 3. Por lo tanto, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

Tabla A.7 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 4 de la actividad 2)

(Contexto matricial)

OBJETOS MATEMÁTICOS	CARACTERÍSTICAS
Situación - Problema	Dado el SEL siguiente: $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - z = -1, \quad a,b \in \mathbb{R} \\ 4x + 2y + az = b \end{cases}$ a) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a = 3$ y $b = 1$? b) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a \neq 3$? c) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a \neq 3$ y $b \neq 1$? d) Interprete geométricamente la solución de los casos anteriores.
Lenguaje	• Verbal: sistemas de ecuaciones lineales (SEL), conjunto solución de un SEL, SEL equivalentes, resolución de SEL por el método de Gauss-Jordan, operaciones elementales por filas a una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz escalonada, matrices equivalentes, rango de una matriz, parámetros intersección de planos, recta, punto. • Simbólico: x, y, z, a, b, $\mathrm{AX} = B$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & a \end{bmatrix}$, $\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B]$, E, $f_i \leftrightarrow f_j$, $k\, f_i$, $k \neq 0$, $f_i + k\, f_j$
Definiciones (Conceptos)	• Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ • Definición de un sistema de ecuaciones lineales. • Concepto de conjunto solución de un SEL. • Definición de un SEL consistente e inconsistente. • Definición de una matriz ampliada de un SEL. • Definición de operaciones elementales. • Definición de matrices equivalentes: Dos matrices son equivalentes, si una de ellas puede obtenerse a partir de la otra matriz mediante operaciones elementales filas. • Definición de SEL equivalentes. • Rango de una matriz. • Recta en el espacio

	• Plano en el espacio. • Intersección de planos.
Procedimientos	• Asignación de la matriz de coeficientes del SEL: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & a \end{bmatrix}$ • Asignación de la matriz ampliada del SEL: $\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & a & \vdots & b \end{bmatrix}$ • Resolviendo el SEL por el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada, se tiene la matriz escalonada $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & \vdots & b-1 \end{bmatrix}.$ Analizando los valores de los parámetros a y b. a) Si $a = 3$ y $b = 1$, se tiene $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ Como $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A_a)} = 2$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones. b) Si $a \neq 3$, se tiene $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & (b-1)/(a-3) \end{bmatrix}$ Como $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A_a)} = 3$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución. c) Si $a = 3$ y $b \neq 1$, se tiene $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & (b-1) \end{bmatrix}$ Como $(\mathrm{r(A)} = 2) \neq (\mathrm{r(A_a)} = 3)$, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución. d) Ahora, interpretemos geométricamente la solución del SEL. Si $a = 3$ y $b = 1$, la solución del SEL representa a una recta en $\mathbb{R}^3$ que es la intersección de tres planos en $\mathbb{R}^3$. Si $a \neq 3$, la solución del SEL es un punto de $\mathbb{R}^3$, el cual es la intersección de tres planos en $\mathbb{R}^3$.

	Si $a = 3$ y $b \neq 1$, el SEL no tiene solución y las ecuaciones representan a tres planos que no se intersectan en pares pero no con el tercer plano.
Propiedades	• Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedad de matrices equivalentes. • Propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas • Propiedad del conjunto solución de sistemas equivalentes. • Propiedad de la intersección de planos
Argumentos	Tesis 1: Si $a = 3$ y $b = 1$, el SEL tiene infinitas soluciones. Justificación: Al reemplazar $a = 3$ y $b = 1$, en la matriz escalonada E, se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. Como $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A_a)} = 2$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente indeterminado; es decir, tiene infinitas soluciones. Tesis 2: Si $a \neq 3$ entonces el SEL tiene una única solución. Justificación: Como $a \neq 3$, la forma escalonada de la matriz ampliada del SEL tiene la forma: $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & (b-1)/(a-3) \end{bmatrix}$$ Como $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A_a)} = 3$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente determinado; es decir, tiene una única solución. Tesis 3: Si $a = 3$ y $b \neq 1$, entonces el SEL no tiene solución. Justificación: Si $a = 3$ y $b \neq 1$, la forma escalonada de la matriz ampliada tiene la forma: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & (b-1) \end{bmatrix}$ Como $(ran(A) = 2) \neq (3 = ran(\tilde{A}))$, el SEL es inconsistente; es decir, no tiene solución.

Tabla A.8 Configuración epistémica del SEL (solución del ítem 5 de la actividad 2)

(Contexto algebraico-matricial)

<table>
<tr><th>OBJETOS MATEMÁTICOS</th><th>CARACTERÍSTICAS</th></tr>
<tr><td>Situación - Problema</td><td>Una Tienda de juguetes vende tres tipos de autos de juguetes. El modelo A1 se vende a un precio de 10 soles la unidad, el modelo A2 a un precio de 20 soles la unidad y el modelo A3 a un precio de 30 soles la unidad. En un cierto día se vendieron un total de 47 autos de juguetes por un monto total de 1110 soles.
a) El gerente de la tienda con la información anterior quiere averiguar cuántos autos de cada modelo se han vendido. ¿Es posible saber qué cantidad de cada modelo se ha vendido?
b) Según el contexto del problema. ¿Cuáles de las siguientes interpretaciones es la correcta?
☐ Falta información para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto.
☐ Hay infinitas posibilidades que se ha vendido de cada modelo de auto.
☐ Hay un número finito de posibilidades para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto.
Si no hay una única solución, agrega una información adicional al anunciado del problema para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto de juguete.</td></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>• Verbal: sistemas de ecuaciones lineales (SEL), conjunto solución de un SEL, SEL equivalentes, resolución de SEL por el método de Gauss-Jordan, operaciones elementales por filas a una matriz, incógnitas, inecuación, cantidad, precio, posibilidades, conjunto solución.
• Simbólico: x, y, z, $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$, $A_a = [A \vdots B]$, E, $f_i \leftrightarrow f_j$, $k\, f_i$, $k \neq 0$, $f_i + k\, f_j$
• Gráfico:
<table><tr><td>Modelos de autos</td><td>A 1</td><td>A2</td><td>A3</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>Precio (Soles)</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Cantidad vendida</td><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Definiciones (Conceptos)</td>
<td>

- Definición de una ecuación lineal: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
- Definición de un sistema de ecuaciones lineales.
- Definición de matriz ampliada de un SEL.
- Definición de operaciones elementales.
- Definición de matrices equivalentes.
- Concepto de conjunto solución de un SEL.
- Definición de un SEL consistente e inconsistente.
- Definición de SEL equivalentes.
- Definición de rango de una matriz.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Procedimientos</td>
<td>

- Representación mediante un esquema la información obtenida del enunciado del problema de contexto

<table>
<tr><td>Modelos de autos</td><td>A1</td><td>A2</td><td>A3</td></tr>
<tr><td>Precio (Soles)</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Cantidad vendida</td><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr>
</table>

Las variables $x, y, z \in \mathbb{N}$

- Mediante el esquema anterior, se presenta la forma algebraica del SEL:

$$\begin{cases} x + y + z = 47 \\ 10x + 20y + 30z = 1110 \end{cases}$$

- Representado el SEL mediante la matriz ampliada

$$\mathrm{A}_a = [\mathrm{A} \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 47 \\ 10 & 20 & 30 & \vdots & 1110 \end{bmatrix}$$

- Usando en la matriz ampliada el método de Gauss-Jordan, se tiene la matriz escalonada $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -17 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 64 \end{bmatrix}$.
- Como $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A}_a) = 2$ y el número de variables es 3, el SEL es consistente indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones. Hay una variable libre o parámetro, Haciendo $z = t$, se obtiene:

</td>
</tr>
</table>

	$$\begin{cases} x &= -17+t \\ y &= 64-2t\,, \quad t \in \mathbb{N} \\ z &= t \end{cases}$$ Según el contexto del problema: $-17+t \geq 0$ y $64-2t \geq 0$ Se tiene que $17 \leq t \leq 32$. Como $t \in \mathbb{N}$, se tiene que t puede asumir 16 posibilidades; es decir, un número finito de posibilidades para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto. • Una condición adicional para obtener una única solución del problema de contexto puede ser: el doble de la cantidad de autos vendidos del modelo A1 más el número de autos vendidos de los tipos A2 y A3 es igual a 48.
Propiedades	• Propiedades de ecuaciones equivalentes. • Propiedad de matrices equivalentes. • Propiedad que el rango de una matriz no cambia mediante operaciones elementales filas. • Propiedad del conjunto solución de SEL equivalentes. • Propiedad de inecuaciones.
Argumentos	Tesis: El problema de contexto con la condición adicional “el doble de la cantidad de autos vendidos del modelo A1 más el número de autos vendidos de los tipos A2 y A3 es igual a 58” tiene una única solución. Justificación: Agregando la ecuación obtenida por la condición adicional al problema de contexto inicial, se tiene el SEL siguiente: $$\begin{cases} x + y + z = 47 \\ 10x + 20y + 30z = 1110 \\ 2x + y + z = 58 \end{cases}$$ Resolviendo el SEL, se tiene: $x=11$, $y=8$, $z=28$, como única solución. Luego, se han vendido 11 autos del modelo A1, 8 autos del modelo A2 y 28 autos del modelo A3.

Anexo 2: Instrumento desarrollado

INFORMACIÓN SOBRE EL PROFESOR

El siguiente cuestionario comprende siete ítems sobre la formación académica, experiencia docente y conocimientos sobre los sistemas de ecuaciones lineales a nivel universitario. El desarrollo del cuestionario es anónimo y se agradece su colaboración y la sinceridad de sus respuestas.

A. FORMACIÓN ACADÉMICA

1) Grado académico:

   Bachiller ☐
   Magister ☐
   Doctor ☐

2) Especial de estudio de pregrado:

   - ☐ Matemática pura
   - ☐ Educación en la especialidad de Matemática y/o Física
   - ☐ Ingeniería (especifique especialidad):________________________
   - ☐ Otro (especifique): ______________________________________

B. EXPERIENCIA DOCENTE

3) Docente en instituciones de nivel universitario: ____años

4) Docente en la universidad actual

   Nombre de la universidad:_________________________________, _____años

C. CONOCIMIENTOS SOBRE EL OBJETO MATEMÁTICO

5) Usted adquirió inicialmente los conocimientos sobre sistemas de ecuaciones lineales en un curso de:

   Antegrado: ☐

   Maestría: ☐

   Otro (especifique):___________________________

6) Número de veces que ha dictado un curso que contenga el tema de los sistemas de ecuaciones lineales: ____veces.

7) ¿Qué libro(s) utiliza para la preparación de sus clases? Especifique

____

____

ACTIVIDAD 1

La actividad es un cuestionario que contiene nueve preguntas con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y se divide en tres partes. El desarrollo del cuestionario es anónimo y se agradece su colaboración y la sinceridad de sus respuestas.

Parte A

En las siguientes preguntas marque con una X la(s) alternativa(s) que usted crea conveniente.

1) ¿En qué temas del área de las matemáticas se utilizan los SEL?

- ☐ Espacios generados
- ☐ Programación lineal
- ☐ Dependencia e independencia lineal
- ☐ Ajuste de curvas mediante funciones polinómicas
- ☐ Análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales por diferencias finitas

2) Determine los problemas de contexto en donde se aplica los SEL.

- ☐ Sistemas de transporte
- ☐ Circuitos eléctricos
- ☐ Reacciones químicas
- ☐ Nutrición
- ☐ Análisis de estructuras

3) ¿Cómo da inicio a una clase que imparte sobre SEL?

- ☐ Con un ejemplo práctico
- ☐ Con un problema de contexto
- ☐ Con la teoría sobre los SEL
- ☐ Con un video motivador
- ☐ Otro. Especifique: …………………………………………………………….

4) Los problemas o ejercicios propuestos sobre SEL en el libro texto que usted utiliza en su curso, en su opinión:

- ☐ Son suficientes para la evaluación que usted aplicará a sus alumnos.
- ☐ Contienen situaciones o contextos extra-matemáticos (problemas de otras disciplinas, del rango laboral, de situaciones cotidianas, de la comunidad).
- ☐ Todas son similares.

Especifique (autor del libro, título del libro, ciclo académico de uso del libro, especialidad de los alumnos, otros): ………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Parte B

En las siguientes preguntas marque con una X en la opción Sí o No, según crea conveniente. Si su respuesta es afirmativa, utilice los espacios en blanco para justificar la opción elegida.

5) ¿Los alumnos tienen dificultades al aplicar el método de Gauss-Jordan para la resolución de los SEL?

- ☐ No
- ☐ Sí

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

6) ¿Usa algún recurso tecnológico con sus alumnos para la resolución de los SEL?

- ☐ No
- ☐ Sí
  - ¿Cuál es este recurso?

    …………………………………………………………………………………
  - ¿Cómo lo utiliza?

    …………………………………………………………………………………
    …………………………………………………………………………………
    …………………………………………………………………………………

7) ¿Conoce usted algunos aspectos históricos sobre los SEL?

- ☐ No
- ☐ Sí

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

8) ¿Aparte del método de Gauss-Jordan conoce otro(s) método(s) para resolver los SEL de orden $n \times n$?

- ☐ No
- ☐ Sí

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Parte C

9) Detalle cómo introduce el concepto de conjunto solución de un SEL a sus alumnos.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………....

ACTIVIDAD 2

La actividad contiene cinco preguntas entre ejercicios y problemas relacionados a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Para el desarrollo de la actividad se le pide responder en el cuadernillo para justificar sus respuestas.

1) Dado el siguiente SEL:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a) ¿Por qué este SEL tiene una única solución?

b) ¿Cómo explicaría su respuesta anterior a sus alumnos?

c) Agrega al SEL una ecuación de modo que el conjunto solución no se modifique.

¿Qué conocimiento matemático (concepto, propiedad, teoremas, etc.) usó para dar su respuesta?

2) Dado el siguiente SEL:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 9z = 7 \end{cases}$$

Mencione si este tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene solución. ¿Cómo llegó a esa conclusión? Justifique su respuesta.

3) Dado el siguiente SEL:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$$

Verifique las siguientes afirmaciones para los valores de k:

a) Para $k = 0$, el sistema es consistente determinado.

b) Para k=1, el sistema es consistente indeterminado.

c) Para k=2, el sistema es consistente determinado.

d) Para $k = -2$, el sistema es inconsistente.

4) Dado el SEL:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - z = -1, \\ 4x + 2y + az = b \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a=3$ y $b=1$?

b) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a \neq 3$?

c) ¿Qué sucede con el conjunto solución si $a=3$ y $b \neq 1$?

d) Según su práctica docente, interprete geométricamente la solución de los casos anteriores.

5) Una tienda de juguetes vende tres tipos de autos de colección. Los modelos de autos A1, A2 y A3, se venden a 10 soles, 20 soles 30 soles, respectivamente la unidad. En un cierto día se vendieron un total de 47 autos de colección por un monto total de 1 110 soles.

Con la información anterior, el gerente de la tienda quiere averiguar cuántos autos de cada modelo se han vendido.

a) ¿Es posible saber qué cantidad de cada modelo se ha vendido? Justifique su respuesta.

b) Según su respuesta dada en a). ¿Cuál de las siguientes interpretaciones es la correcta?

- ☐ Falta información para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto.
- ☐ Hay infinitas posibilidades de la cantidad de modelos vendidos.
- ☐ Hay un número finito de posibilidades de la cantidad vendida de cada modelo de auto.

c) Si no hay una única solución, agregue una condición adicional al anunciado del problema para averiguar la cantidad vendida de cada modelo de auto de colección en dicho día.