PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PROPUESTA DE UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA PARA LA ENSEÑANZA DEL SENO Y COSENO EN QUINTO DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

GILDER SAMUEL VARGAS VARGAS

ASESOR

MIHÁLY ANDRÉ MARTINEZ MIRAVAL

Mayo, 2019

RESUMEN

En esta investigación, se presenta un estudio del objeto matemático seno y coseno enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El objetivo de la investigación es construir un Modelo Praxeológico de Referencia a partir del análisis de documentos históricos, obras matemáticas y libros de texto, que articule las diferentes organizaciones matemáticas cuando se trabajen el seno y coseno tanto en el triángulo rectángulo, como en el plano cartesiano. El escaso conocimiento trigonométrico observado en los estudiantes que cursan y terminan el 5to grado de educación secundaria en el Perú, evidenciado en la práctica docente, donde ellos tendrían que poder transitar por las diferentes organizaciones del seno y coseno, nos lleva a plantear una revisión de los textos de enseñanza y proponer una nueva organización matemática a través de un Modelo Praxeológico de Referencia. La construcción de este modelo permite tener una estructura para cuestionar la organización didáctica dominante en los libros de texto, reconocer rupturas epistemológicas y una base para generar nuevos diseños didácticos. Asimismo, el desarrollo de la presente investigación se da bajo el enfoque cualitativo, en el análisis de los libros de texto se utiliza la metodología propuesta por Chaachoua y para la construcción del Modelo Praxeológico de Referencia se toma como base la estructura propuesta por Chaachoua, Ferraton y Desmoulins. Del estudio realizado, se concluye que la razón de ser de las nociones trigonométricas seno y coseno son las identidades trigonométricas porque están presentes en la génesis de la trigonometría, y porque han permitido el avance de la misma, logrando ser el ente articulador entre las diferentes etapas de su desarrollo, razón por la cual su estudio debe estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

Palabras clave: Funciones trigonométricas; Seno y coseno; Modelo Praxeológico de Referencia; Educación secundaria.

ABSTRACT

This researching show the mathematics object study of sine and cosine focusing in Didactic Anthropological Theory. The investigation's goal to build a Praxeological Reference Model since documents analysis, mathematics works and textbooks, to articulate the several mathematical organizations when are working sine and cosine how in the rectangle triangle, such as Cartesian plane. The poor trigonometric knowledge looked in the students whose are studying and ending the fifth grade of Peruvians High School, evidencing in the teacher practice, where they will have to transit for different sine and cosine organizations it leads us to raise the checking process of teaching texts and propose a new mathematical organization how the Praxeological Reference Model. The construction of this model allow to have and structure to question the text of the books in the dominant didactic organization, to recognize the epistemological ruptures and a base to generate new didactic designs. Likewise, the develop of this research about the qualitative, focus analysis of text to use by Chaachoua methodology proposal and to the construction of Praxeological Reference Model, it is taken as a base the proposed structure by Chaachoua, Ferraton and Desmoulins. The study done it concludes that the reason of be of trigonometrical sine and cosine notions are the trigonometrical identities due to they are in the trigonometric genesis and these have allowed the itself advance, getting to be the articulator entity between the different stages of development for that reason it study must be in the mathematics organizations to teach.

Keywords: Trigonometrical functions; Sine and cosine; Praxeological Reference Model; High School.

AGRADECIMIENTOS

A mí estimado asesor, Mg. Mihály André Martínez Miraval por las sugerencias y observaciones oportunas, por todo el tiempo dedicado a las revisiones de cada una de las versiones anteriores de esta investigación, por su motivación y ejemplo como investigador.

A los miembros del jurado, Dra. Avenilde Romo Vázquez y al Dr. Francisco Javier Ugarte Guerra por las observaciones durante las exposiciones de seminario de tesis y las correcciones de la versión final de esta investigación.

A la Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre por sus clases magistrales y a todos los profesores de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la PUCP. A la Mg. Daysi García Cuéllar por sus valiosas observaciones y recomendaciones.

A mis queridos padres Gregorio y Adelina por todo el apoyo, a mi amada compañera Melissa Espinoza por su infinita paciencia y motivación constante, a mi adorada hija Cattleya Vargas por todo el tiempo prestado para terminar este proyecto y al divino creador por la iluminación y el tiempo de vida para poder disfrutar de esta nueva experiencia. A mis queridos hermanos Willi, Ivan, Miguel y Lucy por haber estado pendientes de los seres que más amo, mientras yo le dedicaba tiempo a esta etapa de mi vida y por todas las atenciones prestadas.

Al Instituto de Ciencias y Humanidades por haberme facilitado los horarios y a los maestros y amigos que compartieron sus conocimientos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación se centra en el estudio del objeto matemático seno y coseno desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se analizan las diferentes Organizaciones Matemáticas del seno y coseno y cómo éstas se presentan en los documentos históricos, las obras matemáticas y los libros de texto de la Educación Básica Regular (EBR), para luego plantear una posible Organización Matemática (OM) de los mismos a través de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

En el capítulo I, se plantea el problema de investigación para lo cual se realiza una breve revisión de las investigaciones existentes en el campo de la trigonometría, correspondientes al estudio del seno y coseno, enfocándose en los significados que se les asignan. Es decir, como una razón trigonométrica en el triángulo rectángulo, como coordenadas de un punto en la circunferencia trigonométrica, y como una función real de variable real en el campo de las funciones trigonométricas, para luego analizar si es posible una articulación entre ellos a través del MPR. Asimismo, se justifica su estudio, se propone la pregunta y los objetivos de la investigación.

En el capítulo II, se realiza un recorrido histórico-epistemológico por las nociones trigonométricas desde las antiguas civilizaciones de Oriente, donde el seno y coseno nacen ligados al estudio de la astronomía y la geometría. Luego, se analiza la época medieval, donde el seno y coseno adquieren el estatus de objetos matemáticos tal como se conocen en la actualidad y pasan a formar parte del análisis funcional.

En el capítulo III, se muestran algunos elementos de la TAD que se relacionan con el presente trabajo de investigación, en particular, se definen la OM y sus elementos: los tipos de tareas, las técnicas, la tecnología y la teoría. También se mencionan brevemente las dimensiones epistemológicas, económicas y ecológicas para un problema didáctico, y la metodología empleada para el análisis de libros de textos propuesta por Chaachoua (2014).

En el capítulo IV, se presenta el análisis de dos libros de texto de la EBR correspondientes a 5to año de secundaria. Para esto, se sigue la metodología empleada por Chaachoua (2014); asimismo, se realiza el análisis praxeológico de la Organización Didáctica (OD) de dichos libros.

En el capítulo V, se construye el MPR a partir de la siguiente cuestión generatriz Q_0: ¿Cuáles son las nociones trigonométricas asociadas al seno y coseno?. A su vez esta cuestión inicial genera otras nuevas cuestiones que son respondidas por tipos de tareas buscando una cierta articulación entre dichas praxeologías.

Finalmente, se presenta las consideraciones finales del trabajo de investigación dentro del marco teórico y metodológico, así como las recomendaciones para futuras investigaciones enmarcadas en la TAD.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentamos una revisión de las principales investigaciones en torno a las diferentes nociones, representaciones y significados asociados al seno y coseno. Dentro de ellas, son de nuestro especial interés aquellas enfocadas en los análisis de los libros de texto desde la TAD. También se justifica nuestro estudio, se formula la pregunta y los objetivos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

En relación a la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas seno y coseno, en los últimos años se han desarrollado numerosos trabajos con distintos focos de atención y en los diferentes niveles escolares tal como lo afirma Cruz-Márquez (2018) quien, a su vez, estudia el fenómeno de la aritmetización de la trigonometría desde la socioepistemología.

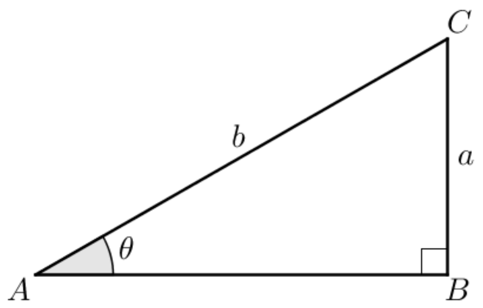
Por un lado, tenemos investigaciones referidas a las diferentes formas de representación del seno y coseno; es decir, como cociente, distancia, coordenadas y función (Brown, 2005; Weber, 2008; Byers, 2010). Así como también encontramos trabajos sobre las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes al transitar por los diferentes significados trigonométricos (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Montiel, 2007; Martín-Fernández, 2013).

Asimismo, se encuentra investigaciones desde un enfoque histórico-epistemológico donde se estudia la evolución y el desarrollo histórico del seno y coseno con la finalidad de implementar secuencias didácticas (Montiel, 2005, 2013; Caballero, 2013; Abonia, Miranda, 2017 y Cruz-Márquez, 2018).

Por otro lado, se encuentra planteamientos como las de Kendal y Stacey (1997) quienes llevan a cabo un estudio comparativo entre dos métodos para introducir a los estudiantes de una escuela secundaria australiana, cuyas edades estaban comprendidas entre los 14 y 15 años, en el estudio de la trigonometría: el método de las *razones trigonométricas* que trabaja con el triángulo rectángulo y un ángulo agudo y el método de la *circunferencia trigonométrica*, en donde se considera una circunferencia con centro en el origen de coordenadas cartesianas y radio igual a la unidad.

En el primer método que proponen las investigadoras, el de las *razones trigonométricas*; se definen al seno y coseno como relaciones de pares de lados de un triángulo rectángulo en función de uno de sus ángulos agudos.

Así, por ejemplo, el seno de un ángulo agudo se define como el cociente entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa, tal como se muestra en figura 1.



Donde:

a: Cateto opuesto al ángulo agudo θ

b: Longitud de la hipotenusa

Entonces se define:

$$sen\theta = \frac{a}{b}$$

Figura 1. Definición del seno como un cociente.
Fuente: Adaptado de Kendal y Stacey (1997, p. 323)

En el segundo método propuesto por las autoras, de la *circunferencia trigonométrica*, se define al seno y coseno como coordenadas de un punto sobre la circunferencia trigonométrica. Al respecto en la figura 2, podemos observar una adaptación a lo mencionado por dichas autoras sobre este método.

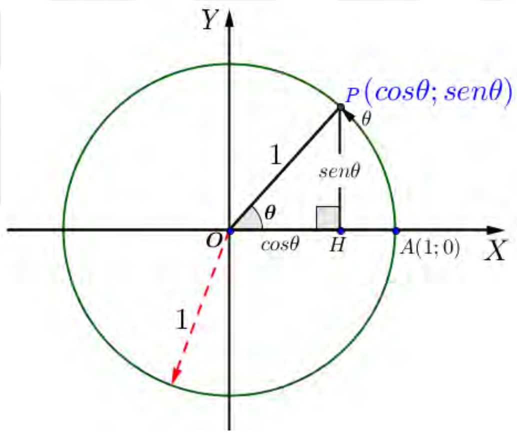


Figura 2. Definición del seno y coseno como coordenadas.
Fuente: Adaptado de Kendal y Stacey (1997, p. 324)

Kendal y Stacey (1997) concluyen que el método de la razón trigonométrica es una mejor opción para introducir el estudio de la trigonometría; debido a que los estudiantes lograron una mayor comprensión y aceptación de ciertos conceptos básicos. Por ejemplo, al ser capaces de reconocer qué razón trigonométrica es la más idónea para resolver los problemas, en cambio el método de la circunferencia trigonométrica, representa mayor dificultad para los estudiantes porque se tenía que reorientar los triángulos rectángulos de acuerdo al cuadrante.

Por otra parte, Bressoud (2010) realiza un estudio sobre el desarrollo histórico de las nociones trigonométricas y cómo estas se introducen en el ámbito escolar, en un inicio con la circunferencia trigonométrica y posteriormente con el triángulo rectángulo. Según dicho autor la trigonometría surge para explicar y entender fenómenos relacionados con la astronomía y la navegación; es decir, esta rama de las matemáticas tuvo su origen en la observación del cielo y en las construcciones geométricas, como la circunferencia, donde se estudian las relaciones entre las cuerdas y las longitudes de arco.

Bressoud (2010) propone que la mejor forma de introducir dichas nociones en la enseñanza de la trigonometría es mediante la circunferencia trigonométrica, considerando que históricamente el seno; por ejemplo, nace del estudio de las relaciones entre las cuerdas y las longitudes de arco; ya que introducir este tema mediante los triángulos rectángulos, como se acostumbra en la actualidad, constituye un obstáculo cuando se requiere hacer la transición de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas.

Se considera que es importante la búsqueda de nuevos métodos y nuevas formas de organizar el saber matemático, con la finalidad de ser enseñado. En la presente investigación se estudia al seno y coseno en el triángulo rectángulo, en la circunferencia trigonométrica y en el campo de las funciones trigonométricas, con la finalidad de articular dichas praxeologías mediante la propuesta de un MPR.

Siendo uno de los objetivos analizar la OM de los libros de texto, con la finalidad de articular las diferentes praxeologías que aparecen cuando se trabajan el seno y coseno tanto en el triángulo rectángulo como en el plano cartesiano, se presenta a continuación algunas investigaciones relacionadas con el estudio.

1.1.1 Estudios cuyo objeto de análisis es el libro de texto

Tavera (2013) lleva a cabo una investigación sobre el pensamiento variacional en los libros de texto de la educación media y superior de Colombia, acerca de las razones trigonométricas seno y coseno. Su objetivo principal fue analizar las tareas que aparecen en los libros de texto desde una perspectiva variacional.

En cuanto a lo variacional, las actividades analizadas en los libros de texto, según el autor, no evidencian los contextos simulados y reales, lo cual exige la integración de nuevas tecnologías como el uso de algún software; por ejemplo, el Geogebra, ya que incorpora el movimiento en forma de variable para que el estudiante identifique los fenómenos de cambio y variación.

En dicho trabajo se concluye que existe una desarticulación entre los lineamientos institucionales y los libros de texto debido a que las editoriales encargadas de la elaboración de dichos materiales, no tomaban en cuenta las recomendaciones de los Lineamientos Curriculares y de los Estándares Básicos de Competencia, como por ejemplo el uso de software.

De lo anterior, se pone en evidencia una desarticulación entre las normativas curriculares y los libros de texto, dicha desarticulación también se podría presentar en el sistema educativo del Perú; el cual en las últimas décadas ha experimentado cambios en los Diseños Curriculares Nacionales (DCN), incorporando nuevos temas y en el caso de la trigonometría, dejando de lado temas que son importantes para la transición de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas; por ejemplo, las identidades trigonométricas.

Al respecto Chevallard (2013) afirma lo siguiente:

> En el caso del currículum nacional, el conjunto de cuestiones primarias para ser estudiadas en la escuela constituye el "núcleo del currículum" y, por lo tanto, el fundamento del pacto nacional entre la sociedad y la escuela. En consecuencia, corresponde a la nación decidir cuidadosa y democráticamente de qué estará formado el conjunto Q, así como revisar y actualizar periódicamente sus contenidos con un esmerado control del ciclo vital del currículum. (p. 176)

Siguiendo la misma línea, Tavera y Villa-Ochoa (2016) en su estudio del tratamiento de las razones y las funciones trigonométricas en los libros de texto del primer año de la educación superior de Colombia, observaron que las tareas propuestas en dichos textos se centran en lo algebraico, y no en cómo varían dichas razones y funciones, por ejemplo, al variar el ángulo.

Los autores llegan a la conclusión, que en la transición de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas se hacen cambios de notación más no de significados. Por ejemplo se introduce la noción de funciones trigonométricas a través de la circunferencia trigonométrica como $y = sen\theta$ y $x = cos\theta$, donde la abscisa y la ordenada se interpretan como variables independientes. En cambio, en las gráficas de funciones "$y = senx$", "$y = cosx$" los símbolos "x" y "y" representan la variación entre dos variables, es decir, una variable independiente y la otra dependiente.

Asimismo, dichos investigadores sugieren el diseño de ambientes donde los estudiantes experimenten procesos de variación, lo cual significa realizar modificaciones en la OM de los libros de texto y además se planteen nuevas situaciones que puedan ser abordadas a partir del uso del Software de Geometría Dinámica como Geogebra.

Por otro lado, Cantoral, Montiel y Reyes (2015) realizaron un estudio de los libros de texto de la educación secundaria mexicana donde analizan los significados que aparecen en los temas de trigonometría, específicamente las razones trigonométricas, concluyendo que las tareas propuestas en dichos libros se reducen a operaciones aritméticas y despejes algebraicos, lo cual despoja a las razones de su significado trigonométrico.

En las investigaciones revisadas hasta el momento se observa que en los libros de texto se trabaja el seno y coseno desde diferentes puntos de vista, como una razón, como coordenada en la circunferencia trigonométrica o como función en el campo de las funciones reales, pero no se indica la pertinencia de uno sobre otro; prevalece un enfoque más algebraico que geométrico, lo cual lo hace más mecánico, por tal motivo, se trabaja superficialmente.

1.1.2 Estudios realizados en el marco de la TAD

Es de suma importancia presentar dentro de las investigaciones de referencia, a las que utilicen aspectos de la TAD, a fin de obtener información relacionada a la organización matemática que proponen sobre temas relacionados a la trigonometría, en particular, al seno y coseno.

Entre las investigaciones relacionadas al párrafo anterior, se encuentra la de Lérida (2013), quien analiza la organización matemática en los libros de texto de matemáticas 4to de la ESO, en torno a las razones trigonométricas: los tipos de tareas, las técnicas y tecnologías que aparecen en dichos textos.

Dentro de sus objetivos están el proponer actividades para que los estudiantes construyan conocimientos trigonométricos funcionales y también realizar un estudio entre los profesores de matemáticas para ver su grado de satisfacción en cuanto a los libros de texto.

Con base en los resultados obtenidos, Lérida (2013) plantea una propuesta de OD desde la TAD, teniendo en cuenta las carencias del libro de texto analizado, las necesidades del alumnado y el uso de las TIC en el aula.

Ramalho (2016) en su trabajo de tesis de maestría, desarrolla el tópico de la trigonometría en el triángulo rectángulo, con el objetivo de caracterizar la propuesta de enseñanza de la trigonometría en libros del 9º año de la enseñanza fundamental aprobados por el Programa Nacional del Libro Didáctico (PNLD) del año 2014. Para lo cual dicho autor toma en cuenta los siguientes textos: Praticando Matemática, Vontade de Saber Matemática, Projeto Teláris y Bianchini – Matemática, que a su vez son los cuatro libros de mayor uso por las escuelas públicas brasileñas.

Dicho trabajo se desarrolla bajo en el enfoque teórico y metodológico de la TAD y del trabajo de Gáscon (2003). El análisis de los libros de texto, a la luz de estos enfoques, evidenció actividades donde se prioriza el trabajo de las técnicas y la construcción del bloque tecnológico- teórico, evidencia de un abordaje clásico de la enseñanza de la trigonometría.

En el análisis de la OD el investigador concluye que los cuatro libros hacen una presentación del tema de las razones trigonométricas sin la profundidad requerida, donde el entorno tecnológico-teórico está constituido por la semejanza de triángulos y por algunas demostraciones de las razones trigonométricas para ángulos notables.

Por otra parte, Da Silva (2015) realiza un análisis de la transposición didáctica en los libros de texto de la enseñanza media brasileña desde la TAD, referidos a la circunferencia trigonométrica, con la finalidad de identificar las tareas, las técnicas, tecnologías y teorías que aparecen en dichos textos.

En dicha investigación el seno y coseno para un ángulo son introducidos, en uno de los textos analizados por la autora, a través de la circunferencia trigonométrica y luego son tratados en el triángulo rectángulo. Consideramos que es una nueva forma de presentar estos objetos matematicos ya que tradicionalmente en los libros de texto primero se definen como una razón trigonométrica en el triángulo rectángulo y luego como coordenadas en la circunferencia trigonométrica.

La investigadora llega a la conclusión de que los saberes trigonométricos relacionados a la circunferencia trigonométrica han sufrido muchas transformaciones, reduciéndose dicho saber a fórmulas mecánicas y cálculos algebraicos, evidenciándose así una trigonometría algebrizada, lejos de su origen histórico donde era más de carácter geométrico y funcional.

El trabajar la trigonometría como un curso lleno de fórmulas evidencia rasgos de una matemática tradicional enfocada exclusivamente en la resolución de problemas y en donde no se tiene en cuenta la complejidad creciente en el planteamiento de dichos problemas. Esta característica posiblemente también se evidencie en los materiales de estudio que utilizan los estudiantes y profesores en nuestro país.

Da Fonseca (2015) en su trabajo de tesis doctoral sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas en la enseñanza media y superior de Brasil y Francia tuvo por objetivo analizar la transición de la enseñanza de las funciones trigonométricas entre la enseñanza media y la enseñanza superior, bajo la óptica de la articulación entre los cuadros de la Didáctica de la Matemática y de la Neurociencia Cognitiva.

El investigador luego del análisis praxeológico e institucional concluye que tanto en Brasil como en Francia existe una ruptura en la transición de la enseñanza de las funciones trigonométricas de la Educación Media a la Educación Superior, cuya causa principal radica en el cambio de los dominios matemáticos, es decir geometría y funciones, con las cuales son trabajadas inicialmente las nociones trigonométricas seno y coseno como razones trigonométricas y luego como un número real. Además, considera que esta ruptura es del tipo epistemológico por estar ligada a dos dominios diferentes de las matemáticas, que a lo largo de la historia también estuvieron distanciados por las tareas que resolvieron en su debido momento, unas de carácter práctico-utilitario y otros de carácter más analítico formal.

Como una posible alternativa para mitigar esta ruptura epistemológica Da Fonseca plantea una nueva organización matemática para el estudio de las funciones trigonométricas tomando como eje principal a la circunferencia trigonométrica y dejando para un segundo momento las razones de ángulos agudos del tema trigonometría del triángulo rectángulo.

Esta nueva organización matemática propuesta por Da Fonseca se asemeja a lo planteado por Kendal y Stacey (1997) y Bressoud (2010), con la diferencia que el primero parte de un estudio epistemológico e institucional donde analiza diversos programas de estudio, libros de texto y exámenes de algunas universidades; sin embargo, creemos que esta ruptura epistemológica también debería considerar el estudio de un tema articulador como son las identidades trigonométricas, que también aparecen ligadas al origen, desarrollo y formalización de las nociones trigonométricas seno y coseno.

Asimismo, para la construcción del MPR se toma como base otras investigaciones denominadas *sistemas de referencia relativos* y que sirven en la descripción e interpretación de las nociones trigonométricas que deben ser trabajadas en la educación secundaria.

1.1.3 Sistemas de referencia relativos a la actividad trigonométrica

La propuesta del MPR se apoya en tres grandes pilares de la investigación sobre la actividad trigonométrica y que sirven como sistemas de referencia relativos. Dentro de estos sistemas relativos se tiene a los principios básicos para la construcción del saber trigonométrico en un escenario histórico propuesto por Montiel (2011), que a su vez complementa este estudio, en la dimensión epistemológica; los dominios conceptuales de Byers para las nociones trigonométricas; y las aportaciones de Chevallard sobre las Organizaciones Praxeológicas relativas al teorema de Thales.

1.1.3.1 Principios básicos de la construcción del saber trigonométrico en un escenario histórico

En el estudio histórico de las nociones trigonométricas, Montiel (2011) identifica tres momentos en la construcción del conocimiento trigonométrico: la matematización de la astronomía, de la física y de la transferencia de calor. Estos momentos a su vez están encapsulados en lo que la autora denomina como anticipación, predicción y formalización. Además, Montiel reconoce dos transiciones en el paradigma que rige la actividad matemática, cuando se dan las transiciones de la anticipación a la predicción (estudio del movimiento) en un primer encuentro y en el paso de la predicción a la formalización (estudio de la transferencia de calor).

En el siguiente cuadro 1, se sintetizan los principios básicos de cada uno de estos momentos de construcción del saber trigonométrico.

Cuadro 1. *Principios básicos de la construcción del saber trigonométrico*

	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de referencia	Matematización de la astronomía	Matematización de la física	Matematización de la transferencia de calor
Contexto	Estático-proporcional	Dinámico-periódico	Estacionario-analítico
Lenguaje	Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones	Funciones-límites
Racionalidad	Helenística-euclidiana	Física-matemática	Física-matemática
Herramienta	Razón trigonométrica	Función trigonométrica	Serie trigonométrica
Variables	$sen\theta$ (longitud) θ ángulo (grados)	$senx$ (distancia) x tiempo (radián-real)	$sent$ (temperatura) t tiempo (real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-infinito	Infinito

Fuente: Montiel (2011, p. 123)

Para la construcción del MPR es importante identificar los momentos históricos y epistemológicos de las nociones trigonométricas, ya que esto permite conocer qué problemas y bajo qué condiciones se desarrolló particularmente el saber sabio relativo al estudio de seno y coseno. Esta organización de los momentos sirve como referencia para reconocer el bloque tecnológico-teórico de las nociones trigonométricas seno y coseno.

1.1.3.2 Los dominios conceptuales de Byers para las nociones trigonométricas

Byers (2010) realiza un análisis de datos y libros de texto sobre trigonometría de la escuela secundaria y superior de Canadá y reconoce algunos dominios conceptuales que caracterizan el estudio de las nociones trigonométricas: el triángulo rectángulo, las razones trigonométricas, la circunferencia trigonométrica, las funciones trigonométricas, la onda sinusoidal y el segmento dirigido o vector.

En el MPR se toma como referencia estos dominios conceptuales para una posible OM agregando otros dominios conceptuales que se consideran importantes con base en el estudio epistemológico y de los libros de texto como son el plano cartesiano, la función longitud de arco y las identidades trigonométricas, considerando a estas últimas como praxeologías articuladoras y una de las razones de ser del estudio del seno y coseno en la educación secundaria.

La incorporación de nuevos dominios conceptuales pretende de alguna manera evitar la transición lineal entre las diferentes organizaciones matemáticas relativas al estudio del seno y coseno.

1.1.3.3 Organización Praxeológica para el teorema de Thales

El análisis praxeológico en torno al teorema de Thales realizado por Chevallard (2000) proporciona ciertas directrices sobre cómo se debería organizar el conocimiento matemático en torno a Organizaciones Matemáticas, como son la Organización Matemática Puntual (OMP) generada por un único tipo de tareas (T) con al menos una técnica que las justifica y por ende unas tecnologías y teorías $[T/\tau;\theta/\Theta]$, la Organización Matemática Local (OML) integrada por varias OMP, la Organización Matemática Regional (OMR) conformada por diversas OML y la Organización Matemática Global (OMG) que surge cuando se van agregando varias OMR, a partir de la integración de diferentes teorías.

Por ejemplo, la construcción praxeológica del seno y coseno en el triángulo rectángulo, como se observa en la figura 3, se fundamenta teóricamente en el teorema de Thales (la semejanza de triángulos) y a partir de la cual se definen al seno y coseno como razones trigonométricas.

$$\Theta_1: \text{Teorema de Thales} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \theta_1: \text{Semejanza de triángulos} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \theta_2: \text{Teorema de Pitágoras} \\ \theta_3: \text{Razones trigonométricas} \end{array} \right] \Rightarrow \theta_4: \text{Identidad fundamental} \\ \\ \end{array} \right.$$

Figura 3. Organización Matemática Regional relativa al teorema de Thales.
Fuente: Adaptado de Chevallard (2000, p. 68)

En esta OMR, se observa que la teoría del teorema de Thales justifica varias tecnologías como son la semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas para ángulos agudos y la identidad trigonométrica fundamental, razón por la cual se considera que su estudio debería estar presente en los diseños curriculares y por ende en los libros de texto.

En el presente trabajo de investigación, una de las primeras Organizaciones Matemáticas se construye en torno a la semejanza de triángulos, la misma que justifica el siguiente bloque tecnológico, cuadro 2.

Cuadro 2. *Organización Matemática para la semejanza de triángulos.*

Teoría (Θ)	**Tecnologías (θ)**
Θ_1: Semejanza de triángulos	θ_1: Criterios de semejanza
	θ_2: El teorema de Pitágoras
	θ_3: Definición de la razón trigonométrica seno
	θ_4: Definición de la razón trigonométrica coseno
	θ_7: Identidad trigonométrica fundamental

Fuente: Elaboración propia

En dicha organización matemática inicial se considera a la semejanza de triángulos como el elemento teórico, la misma que está conformada por cinco tecnologías que luego serán complementadas con otras tecnologías, que emergen del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Cabe mencionar que, en esta OM propuesta, algunos elementos tecnológicos como las razones trigonométricas al ser trabajadas en el triángulo rectángulo, son considerados como parte de un nuevo bloque teórico, que a su vez justifica nuevas tecnologías como por ejemplo, las razones trigonométricas de ángulos complementarios (θ_5) y las razones trigonométricas recíprocas (θ_6).

1.2 Justificación

La enseñanza de la trigonometría es fundamental en el nivel básico, ya que dota de herramientas para comprender y explicar fenómenos físicos, y constituye un elemento clave en la formación universitaria. Sin embargo, su enseñanza es compleja debido a sus diferentes representaciones y significados: razones, coordenadas, funciones y vectores.

Según Martín-Fernández (2013) la trigonometría está presente en diversos fenómenos, tales como: fenómenos de medida, que pueden ser distancias y ángulos; en fenómenos físicos, es decir de naturaleza periódica y no periódica; y también en fenómenos propios del saber matemático, como el estudio de los números complejos.

Al respecto, Delice y Roper (2006, citado por Demir, 2012) señalan que la trigonometría dentro de las matemáticas, es uno de los cursos fundamentales en la transición a las matemáticas avanzadas y sus aplicaciones. Así; por ejemplo, las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas tienen muchas aplicaciones en el contexto real, el primero en el cálculo de distancias inaccesibles y el segundo en el estudio de las ondas y vibraciones.

Sin embargo, en el marco del nuevo Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) implementado por el Ministerio de Educación del Perú en el 2016, algunos temas del curso de trigonometría han sido retirados sin tener en cuenta la importancia de su existencia en los planes curriculares, ya que consideramos que son temas que pueden articular las diferentes praxeologías asociadas al seno y coseno cuando éstas son trabajadas en el triángulo rectángulo y en el plano cartesiano, tal como se puede apreciar en el cuadro 3.

Cuadro 3. *Temas de trigonometría en los dos últimos Currículos Nacionales*

DCN 2009 (ANTERIOR)	CNEB 2016 (VIGENTE)
• Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios. • Razones trigonométricas de ángulos en ángulos en posición normal: 0°, 90°, 180°, 270° y 360°. • Razones trigonométricas de ángulos negativos. • Reducción de ángulos al primer cuadrante. • Triángulos oblicuángulos y ley de los senos, cosenos y tangentes. • Circunferencia trigonométrica. • Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad, etc. Deducción de fórmulas trigonométricas. • Identidades trigonométricas.	• Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios. • Razones trigonométricas de ángulos negativos. • Reducción de ángulos al primer cuadrante. • Circunferencia trigonométrica. • Funciones trigonométricas seno y coseno

Fuente: Adaptado del Currículo Nacional (Perú, 2009, 2016)

En el CNEB (2016) no aparecen temas como la resolución de triángulos oblicuángulos, en donde se estudian importantes teoremas como los de senos y cosenos que son de utilidad en otras materias como la geometría y la física, y tampoco se consideran a las identidades trigonométricas.

En la educación secundaria urge la necesidad de incluir algunos temas como las identidades trigonométricas, que complementen el estudio de las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, aprovechando el carácter transversal de la trigonometría y su estrecha relación con otros campos como la geometría, el álgebra y la aritmética. Teniendo en cuenta que dichos temas serán requeridos más adelante en la educación superior por aquellos estudiantes que se inclinen por una carrera de ciencias e ingeniería.

La presente investigación está motivada por el escaso conocimiento trigonométrico observado en los estudiantes que cursan y terminan el 5to grado de la educación secundaria en nuestro país, lo cual se ha podido evidenciar en nuestra práctica docente en diversos colegios y en los primeros ciclos universitarios de las carreras de ingeniería, donde ellos tienen que transitar por las diferentes nociones del seno y coseno.

Considerando que los temas de trigonometría se enseñan a través de libros de texto, en nuestra investigación nos proponemos analizar dichos documentos desde la TAD. Al respecto, Cantoral, Montiel y Reyes (2015) afirman que el libro de texto es un medio por el cual se construye el consenso educativo y además es un recurso fundamental para la investigación educativa, ya que brinda visiones institucionales del saber que en muchos casos suelen ser distantes de los estudiantes.

Teniendo en cuenta que los libros de texto en muchas ocasiones sirven de referencia para la elaboración de clases, como consulta, y para la elaboración de exámenes, partimos de la premisa que muchas veces los docentes utilizan otros libros que complementan a los entregados por el Ministerio de Educación, y en otras ocasiones trabajan con sus propios materiales. Esto, posiblemente, sea debido a la falta de articulación entre los contenidos trigonométricos del libro de texto de la EBR.

Según las investigaciones revisadas, las nociones de seno y coseno aparecen a lo largo del desarrollo del curso de trigonometría, primero como una razón entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, luego como coordenadas de un punto en el plano cartesiano, cuando se trabaja con la circunferencia trigonométrica o como una función real de variable real. Este tratamiento sugiere una transición como lo señala Montiel (2013), es decir, pasar del triángulo rectángulo a la circunferencia trigonométrica y, finalmente, a la función trigonométrica. Sin embargo, en estas faces las definiciones, las representaciones y los significados del seno y coseno cambian drásticamente.

Al respecto, Martín-Fernández, Ruiz y Rico (2016) afirman lo siguiente:

> Las diferentes maneras de aproximarse a estas nociones, así como sus modos de uso puede ocasionar conflictos de interpretación; la expresión y transmisión deficiente de algún concepto básico de la trigonometría puede provocar confusión en la explicación de sus significados y, por tanto, dificultar su enseñanza y aprendizaje (p. 52).

En los libros de texto de la EBR también nos encontramos con la secuencia triángulo rectángulo → circunferencia trigonométrica → función trigonométrica y si bien es cierto su tratamiento es desde la matemática contextualizada creemos que la falta de articulación entre sus diferentes significados dificulta su enseñanza y aprendizaje.

Considerando que el estudio de seno y coseno en la educación secundaria se presenta de forma desarticulada y con tareas incompletas en cuanto a su organización praxeológica, en nuestra investigación se propone un Modelo Praxeológico de Referencia a partir del estudio epistemológico, del análisis del modelo epistemológico dominante y de otras investigaciones.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

La literatura revisada pone de manifiesto que al estudio matemático del seno y coseno se le asocian diferentes praxeologías tales como razón trigonométrica en el triángulo rectángulo, coordenada de un punto en el plano cartesiano y como una función de variable real en el análisis matemático.

Siendo nuestro foco de atención la construcción del conocimiento, nos proponemos indagar sobre las distintas praxeologías que aparecen en los libros de texto de la EBR sobre el seno y coseno desde la TAD; lo cual nos lleva a formular la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo la construcción de un modelo praxeológico de referencia articula las diferentes organizaciones matemáticas del seno y coseno en quinto de secundaria?

OBJETIVO GENERAL

Proponer un modelo praxeológico de referencia que articule las diferentes organizaciones matemáticas del seno y coseno en la educación básica regular.

Objetivos específicos

- Realizar el estudio epistemológico del objeto matemático seno y coseno.
- Analizar la organización matemática de los libros de texto de la Educación Básica Regular correspondiente al CNEB (2016).
- Organizar las praxeologías del seno y coseno a partir de una cuestión generatriz.
- Identificar una organización matemática que articule las diferentes praxeologías del seno y coseno.

CAPITULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En el presente capítulo se realiza un estudio sobre los objetos matemáticos seno y coseno. Primero, se muestra un recorrido histórico y epistemológico de dichas nociones trigonométricas, desde sus orígenes en las antiguas civilizaciones de occidente (egipcia, babilónica, griega, hindú y árabe), pasando por la época medieval, hasta el período Renacentista. Luego, se presenta las definiciones formales del seno y coseno, que aparecen en los textos de matemática superior, vistos como funciones trigonométricas de variable real.

2.1 Recorrido histórico y epistemológico por las nociones trigonométricas seno y coseno

Las nociones trigonométricas seno y coseno están estrechamente ligadas al origen de la trigonometría. Esta nueva rama de las matemáticas surge motivada por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, que luego sería utilizada para predecir trayectorias y posiciones de algunos cuerpos celestes, para la medición del tiempo, para la navegación y la geografía (Kline, 1972).

En las siguientes líneas se busca entender el origen, la evolución y el desarrollo de las definiciones y representaciones asociadas al seno y coseno, las condiciones y problemáticas que determinan su emergencia, así como las preguntas que se plantean para resolver dichas cuestiones. Para lo cual, se asume una postura epistemológica en el sentido que le otorgan Sierpinska y Lerman (1996), es decir, “como una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, sobre los procesos y condiciones de su desarrollo, sobre las características de la actividad matemática actual y pasada” (p. 22).

Tal como lo afirma Montiel (2005) se cree que los conceptos trigonométricos emergen en la astronomía, se desarrollan en la trigonometría esférica y plana, y pasan a formar parte del análisis matemático, dando explicación a diversos fenómenos astronómicos, físicos y químicos, los mismos que están relacionados con los movimientos, el sonido y el calor.

La trigonometría evoluciona desde las antiguas civilizaciones de occidente, como la egipcia y la babilónica, donde se encontraron papiros y tablillas de arcilla que contienen ciertos rudimentos trigonométricos.

2.1.1 La civilización egipcia (2000-1800 a.C.)

La cultura egipcia se desarrolló a lo largo del río Nilo y abarcó los territorios de la actual Sudan hasta Egipto, como se observa en la figura 4. Según Illana (2012) aquí se iniciaron las matemáticas con un sistema de base decimal y operaciones aritméticas elementales realizadas por los escribas de las primeras dinastías faraónicas. Se fijaron medidas para longitudes, superficies y volúmenes, y se trabajaron operaciones con fracciones (Raiol 2014).

Figura 4. Mapa comparativo entre el antiguo Egipto y el mapa político actual.
Fuente: Adaptado de Caballero (2013, p. 6)

Los documentos matemáticos más importantes que han sobrevivido hasta nuestros días son dos papiros; el papiro de Rhind, descubierto por el escocés A. Henry Rhind en 1858 y que se conserva en el British Museum y el papiro de Moscú, que se encuentra en un museo de la capital rusa (Kline, 1972). Dichos papiros contienen problemas y sus resoluciones; por ejemplo, el papiro de Rhind contiene una colección de 84 problemas matemáticos sobre aritmética, algebra y geometría. Según Kline (1972) dichos problemas podrían haber tenido una intención pedagógica, con ejemplos de problemas típicos que los escribas tenían que saber resolver.

En el problema 56, del papiro de Rhind, se encuentra uno de los primeros vestigios de lo que podría ser una razón trigonométrica. En dicho problema se pide calcular el seket de una pirámide que tiene 250 codos de altura y 360 codos de largo en su base (Boyer, 1986).

En la figura 5, se muestra el enunciado y la resolución propuesta por el escriba *Ahmes*, quién divide la base en dos partes iguales, luego este resultado que es 180 codos lo divide entre 250 codos, finalmente como un codo equivale a siete manos se multiplica por siete obteniéndose $5+\frac{1}{2}$ manos por codo, como respuesta.

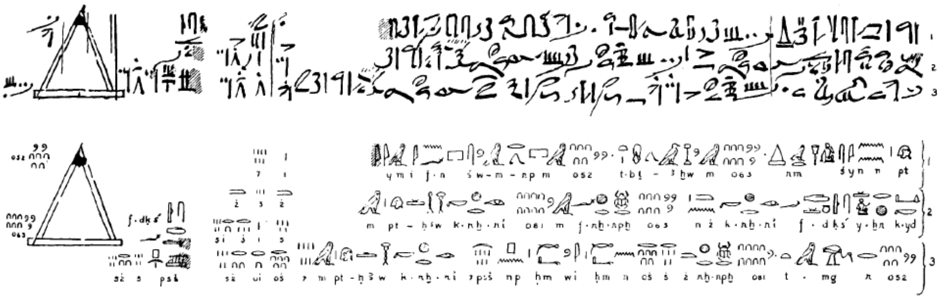


Figura 5. Problema 56 del papiro de Rhind.
Fuente: Maor (1998, p. 7)

El término seket "significa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura" (Boyer, 1986, p. 40). Hoy en día, la pendiente de una línea recta se calcula mediante la razón entre la subida y el avance y se le conoce como "desplome".

En la pirámide de base cuadrada $ABCD$ de la figura 6, donde F es su centro, H su vértice y E es el punto medio del lado BC, el seket sería igual al cociente entre la longitud del segmento EF y la altura FH, que es equivalente a la cotangente del ángulo formado por la base $ABCD$ y la cara lateral BHC de la pirámide (Maor, 1998).

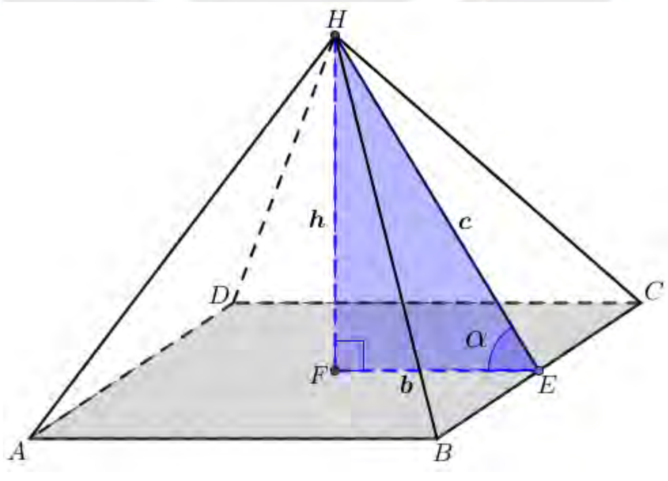


Figura 6. Relación entre "Seket" y la actual cotangente.
Fuente: Elaboración propia

Los egipcios usaban la noción de seket para mantener la pendiente constante de las caras de las pirámides; sin embargo, no se puede ubicar en su matemática el nacimiento de la trigonometría, debido a que su cálculo era netamente numérico y aun no se tenía la noción de ángulo.

Esta noción de seket, introducida por los egipcios constituye un primer acercamiento a las razones vistas como proporciones entre los lados de un triángulo rectángulo. Lo cual nos lleva a concluir que para poder definir una razón trigonométrica es importante primero definir algunos conceptos geométricos como son el triángulo rectángulo y el ángulo.

La astronomía que es la ciencia que se ocupa de la observación y el movimiento de los cuerpos celestes, así como del cálculo de sus tamaños y sus distancias, tuvo una enorme importancia para los egipcios, quienes elaboraron un calendario solar a partir de las observaciones de la estrella sirio. Adoptaron un calendario civil con un año de 365 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno y 5 días extras (Kline, 1972).

La observación y los registros de los cambios en la ubicación y posición de las estrellas y planetas, estuvo motivado por la búsqueda de épocas adecuadas para las prácticas de la agricultura, la pesca, la navegación y el comercio (Montiel, 2005). Donde “la periodicidad de los fenómenos celestes se convirtió en un puente entre la práctica empírica y la teoría predictiva” (Montiel 2005, p. 70).

2.1.2 La civilización babilónica (1900-1600 a.C.)

La civilización babilónica comprendió una serie de pueblos que ocuparon, la región comprendida entre los ríos Éufrates y Tigris y sus alrededores, conocida también como Mesopotamia y que hoy en día forma parte de la república de Irak (Kline, 1972).

Los babilonios desarrollaron un sistema numérico posicional y sexagesimal bastante avanzado para su época, el mismo que se ha podido evidenciar gracias a las tablillas de arcilla encontradas al sur de Irak. Según Maor (1998) se cree que el grado sexagesimal, como unidad de medida angular, se originó con ellos. Además, conocían algunas relaciones para los lados de un triángulo rectángulo y trigonometría básica (Raiol, 2014).

La tablilla Plimpton 322 (figura 7) que se conserva en la Universidad de Columbia, contiene otro “germen” de las razones trigonométricas. En dicha tablilla se puede apreciar una lista de ternas pitagóricas formadas por números enteros positivos y aparece también la razón entre la hipotenusa y un cateto que sería el equivalente a nuestra actual secante.

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Figura 7. Tablilla Plimpton 322.
Fuente: Gonzales (2008, p. 106)

La tablilla tiene cuatro columnas de números ordenados en 15 filas horizontales. En la tabla de la figura 7 se presentan las tres últimas columnas en notación decimal, donde la columna del extremo derecho numerada del 1 al 15, representa el orden de cada línea de números y las columnas segunda y tercera representan el cateto menor y la hipotenusa de triángulos rectángulos (Gonzales, 2008).

Esto indica que los babilonios sabían generar ciertas ternas antes que los pitagóricos; sin embargo, fueron estos últimos quienes extendieron su estudio. Posteriormente, en el siglo XIII Fibonacci, encontró la forma de generar todas las ternas pitagóricas posibles (Porras, 2018).

Sean a, b y c números enteros positivos $(a < c, \mathrm{b} < c)$ constituyen una terna pitagórica (a, b, c) si dichos números son los lados de un triángulo rectángulo que verifican la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ (Ortiz, 2005).

Existen diferentes métodos para calcular las ternas pitagóricas, como el método de Diofanto, el método de las dos fracciones o el de Fibonacci. A continuación, enunciaremos uno de estos métodos a partir del triángulo rectángulo ACB de la figura 8.

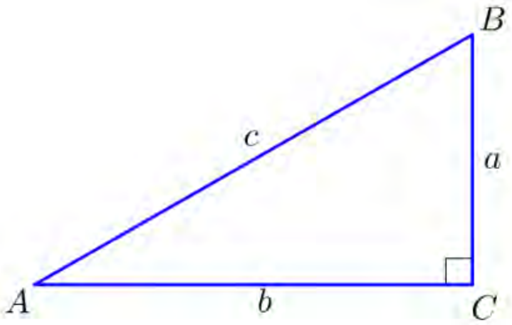


Figura 8. Triángulo rectángulo ACB recto en C.
Fuente: Elaboración propia

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividiendo ambos miembros entre b^2 obtenemos:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Hacemos el cambio de variable: $m = \frac{a}{b}$; $n = \frac{c}{b}$

$$m^2 + 1 = n^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 1$$

Por la diferencia de cuadrados: $(m+n)(m-n) = 1$

Haciendo un nuevo cambio de variable: $m + n = \frac{u}{v}$; $m - n = \frac{v}{u}$

Resolviendo los sistemas obtenemos:

$$m = \frac{u^2-v^2}{2uv}\ ;\ n = \frac{u^2+v^2}{2uv}$$

De donde: $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

De esta forma se obtienen ternas pitagóricas, simplemente asignándole valores a los parámetros m y n como por ejemplo, los números que aparecen en la primera fila de la figura 9, se obtienen a partir de $u = 12$ y $v = 5$ a los que corresponden los valores de $a = 120$, $b = 119$ y $c = 169$.

u	v	a	b	c
12	5	120	119	169
64	27	3456	3367	4825
75	32	4800	4601	6649
125	54	13500	12709	18541
9	4	72	65	97
20	9	360	319	481
54	25	2700	2291	3541
32	15	960	799	1249
25	12	600	481	769
81	40	6480	4961	8161
2	1	60	45	75
48	25	2400	1679	2929
15	8	240	161	289
50	27	2700	1771	3229
9	5	90	56	106

Figura 9. Ternas pitagóricas en base a la tablilla Plimpton 322.
Fuente: Gonzales (2008, p. 107)

Gonzales (2008) afirma:

> La tablilla contiene 15 de las 38 ternas pitagóricas que existen en las condiciones definidas y están ordenadas en forma decreciente de la razón c/a, lo cual ha permitido conjeturar que la primera columna de la tablilla sería una tabla de valores de los cuadrados de la secante del ángulo B o una tabla de valores de los cuadrados de la tangente del ángulo B. Al ser $1 + tan^2 B = sec^2 B$, y comenzar todos los números de la columna inicial por el dígito 1, al estar la tablilla parcialmente deteriorada por la izquierda, no es posible determinar cuál de las dos hipótesis, la de la secante o la de la tangente, es la cierta (p. 107).

Las tablillas y los papiros, nos revelan conocimientos matemáticos de carácter netamente práctico, sin ninguna formulación general, donde se prioriza el cálculo numérico; es decir, son matemáticas totalmente utilitarias (Boyer, 1986).

2.1.3 La civilización griega

Los griegos fueron uno de los primeros en presentar un estudio sistemático y organizado de las relaciones entre los ángulos centrales de una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que las subtienden (Boyer, 1986).

Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.). Conocido por proponer el primer modelo heliocéntrico, diecisiete siglos antes que Copérnico, y cuyo contenido no llegó a nuestros días. Sin embargo, lo que sí se conoce es su tratado, titulado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna,* considerando un universo geocéntrico como se observa en la figura 10 (Boyer, 1986).

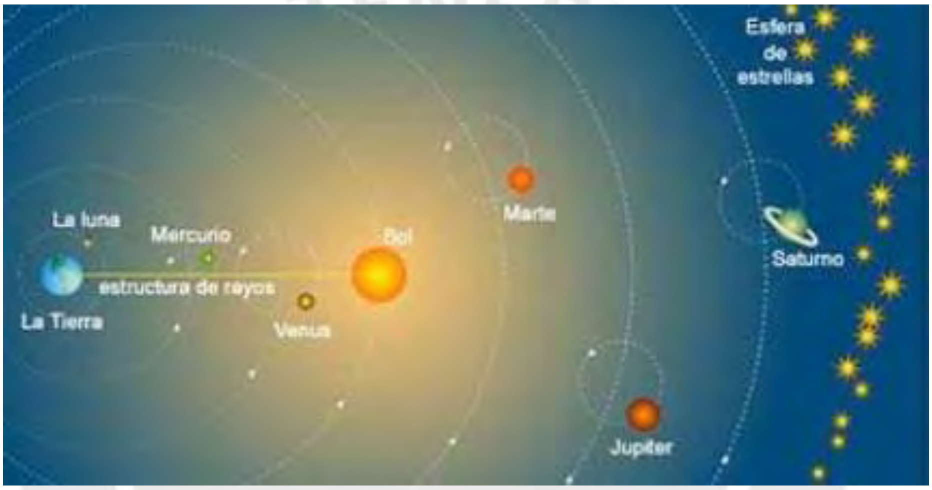


Figura 10. Modelo de universo geocéntrico de la época de Aristarco.
Fuente: López, Refolio, Rubio y Moreno (2007, p. 3)

En dicha obra Aristarco, expone su método para calcular los tamaños del Sol y la Luna basados en la geometría de los *Elementos* de Euclides. Lo cual tiene una implicación doble, porque si conocemos sus tamaños es posible saber a qué distancias se encuentran con respecto a la Tierra.

Según López, Refolio, Rubio y Moreno (2007) “Unos setenta años después, cuando Eratóstenes calcula el radio de la Tierra, el método de Aristarco proporcionará la primera estimación del tamaño de nuestro sistema solar, repetido más tarde por Hiparco y Ptolomeo” (p. 2).

Debemos tener en cuenta que los astrónomos de la época entendían que los eclipses lunares suceden cuando la tierra se interpone entre el Sol y la Luna. Es decir, cuando la sombra proyectada de la Tierra cubre totalmente a la Luna. Para sus cálculos Aristarco utilizó un modelo geocéntrico, donde la Tierra permanecía en reposo, la Luna y el Sol giraban en torno a ella completando un periodo completo en 29,5 días y un año respectivamente (López et al., 2007).

Aristarco plantea algunas hipótesis para simplificar su modelo, todas basadas en que la circunferencia y la esfera eran formas geométricas perfectas y en consecuencia debían ser el soporte de la construcción geométrica del universo:

> 1.- La Tierra, la Luna y el Sol tienen forma esférica.
>
> 2.- Las órbitas de la Luna y del Sol son perfectamente circulares.
>
> 3.- El radio de la órbita del Sol es mucho mayor que el de la Luna, por lo cual podemos considerar que sus rayos de luz se mantienen paralelos entre la Luna y la Tierra (López et al., 2007, p. 2).

El tamaño angular; es decir, el cono visual que determinan los ojos del observador y el objeto observado, generan el ángulo subtendido o abarcado por dicho objeto (Meléndez, 1999). Medir el ángulo subtendido; por ejemplo, de la Luna sería como medir su tamaño aparente. Lo cual significa que es posible calcular su distancia a partir de su tamaño, o viceversa.

El ángulo que subtiende el Sol (α_S) es casi igual que el subtendido por la Luna (α_L), lo cual se sabe por los eclipses de Sol. En efecto, como el Sol es cubierto completamente por la Luna, entonces $\alpha_L \geq \alpha_S$ como se aprecia en la figura 11 (Meléndez, 1999).

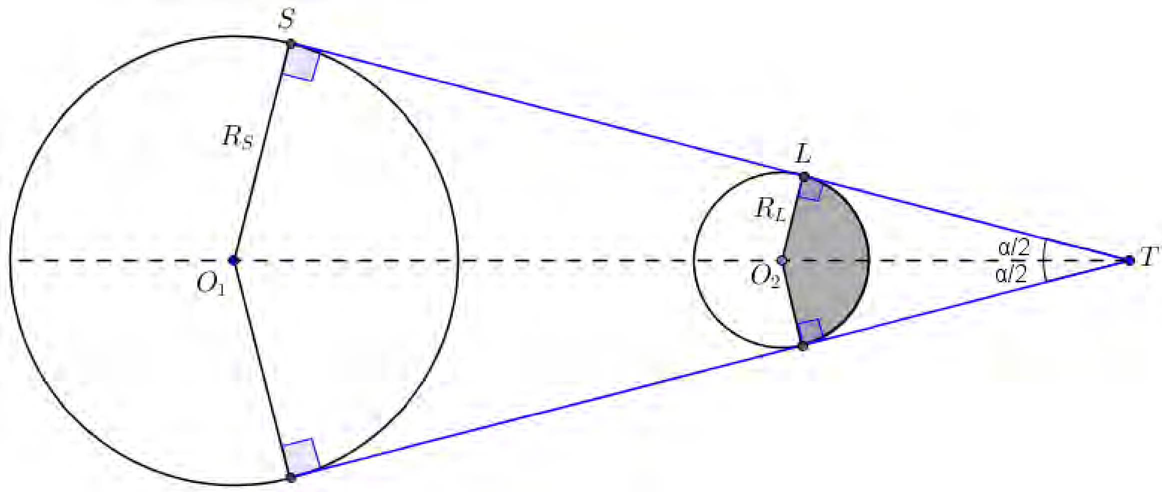


Figura 11. El Sol y la Luna subtienden el mismo ángulo.
Fuente: Adaptado de Meléndez (1999, p. 2)

Además, los eclipses de Sol confirman que la Luna está más cerca que el Sol y por lo tanto su tamaño es menor. Es decir, sus distancias y sus tamaños deben ser directamente proporcionales (Meléndez, 1999). De la figura 11 podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{R_S}{D_{TO_1}} = \frac{R_L}{D_{TO_2}} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donde R_S y R_L son los radios del Sol y la Luna respectivamente, D_{TO_1} y D_{TO_2} son las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna respectivamente.

La razón entre la distancia del Sol a la Luna y la distancia del Sol a la Tierra se puede relacionar en lenguaje moderno como $sen3°$ (Figura 12).

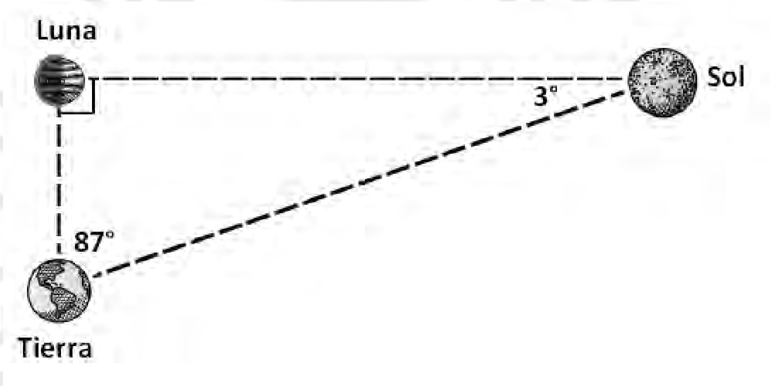


Figura 12. Cálculo de la distancia entre el Sol y la Luna.
Fuente: Adaptado de Van Brummelen (2009, p. 23)

En la época de Aristarco aún no existían las tablas de cuerdas trigonométricas y por ende era complicado calcular el $sen3°$, cuyo conocimiento según Ortiz (2005) hubiese sido útil para establecer relaciones entre las distancias de la Tierra, la Luna y el Sol; sin embargo, si se conocía el siguiente teorema:

Si $0° < \beta < \alpha < 90°$, entonces $\frac{sen\alpha}{sen\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tan\alpha}{tan\beta}$

Con este teorema, Aristarco concluye que $\frac{1}{20} < sen3° < \frac{1}{18}$ y así afirmar que el Sol esta más de 18 veces, pero menos que 20 veces, más alejado de la Tierra que de la Luna (Ortiz, 2005).

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.- 194 a.C.). En el año 240 a. C. Eratóstenes en su trabajo "*Sobre la medida de la Tierra*", realiza uno de los primeros cálculos sobre el tamaño de la tierra con bastante precisión Maor (1998). Eratóstenes observó que los rayos del sol en un día particular de verano (solsticio de verano) caen perpendicularmente sobre la ciudad de Syena (actual Asuán); es decir, los rayos del sol no generaban sombras; mientras que, en Alejandría, situada en el mismo meridiano y 5000 estadios hacia el norte, los rayos formaban un ángulo de 7,2° desde el cenit, medido por la sombra de una varilla vertical (Boyer, 1986; Maor, 1998).

Eratóstenes considera que el Sol y la Tierra están muy alejados, razón por la cual sus rayos nos llegan prácticamente paralelos; esta diferencia entre sus ángulos de elevación, cuando se observan desde dos lugares, se debe a la forma terrestre (Maor, 1998).

Así, gracias a la igualdad de los ángulos $S'AZ$ y $S''OZ$ (figura 13), se estima que la longitud de la circunferencia terrestre ronda los 250 000 estadios; equivalente a unos 46 000 km (Boyer, 1986). El cual tiene un margen de error debido a que los valores exactos son 40 075 km para la circunferencia ecuatorial y 40 008 km para la circunferencia polar. Este error posiblemente este inducido por la falta de evidencia sobre la longitud exacta del estadio empleada en dichas mediciones.

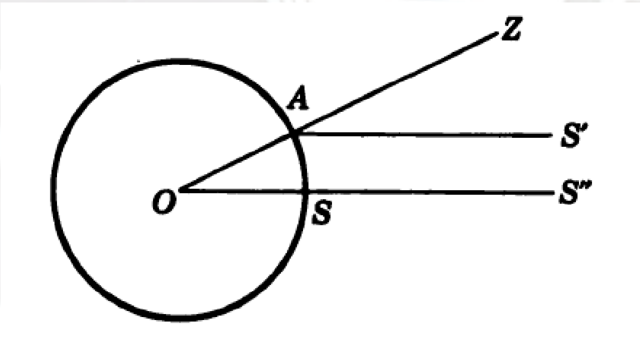


Figura 13. Cálculo de la longitud de la circunferencia terrestre.
Fuente: Tomado de Boyer (1986, p. 214)

De los trabajos de Eratóstenes se puede concluir que existe una primera aproximación a la relación entre ángulos de una circunferencia y distancias (longitudes de arco).

Hiparco de Nicea (180 a. C. – 125 a.C.). Nació en la ciudad de Nicea (Iznik en la actualidad, en el noroeste de Turquía), pero se estableció en la isla de Rodas, lugar donde instaló su observatorio (Maor, 1998). Considerado como el gran astrónomo de la antigüedad y padre de la trigonometría por haber sido uno de los primeros en elaborar una tabla de cuerdas trigonométricas. Hiparco emprendió la tarea de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos (Boyer, 1986).

Según Oliveira (2010) con la finalidad de estudiar la esfera celeste Hiparco se plantea ciertas proposiciones que relacionan la posición de los astros con los ángulos y éstos con la longitud de la cuerda de una circunferencia. En ese sentido Maor (1998) refiriéndose a Hiparco afirma lo siguiente:

> Él consideraba cada triángulo—plano o esférico—como inscrito en un círculo, tal que cada lado viene a ser una cuerda. Con el fin de calcular las diversas partes del triángulo necesitaba encontrar la longitud de la cuerda en función del ángulo central, y esto se convirtió en la tarea principal de la trigonometría para los próximos siglos. (p. 24)

En la figura 14 se observa la definición de cuerda utilizada en la época de Hiparco y cuya definición prevalece hasta nuestros días; es decir, como un segmento de recta AB en la circunferencia. Donde el punto O es el centro de la circunferencia, OA y OB son las longitudes de los radios que generan un ángulo central α .

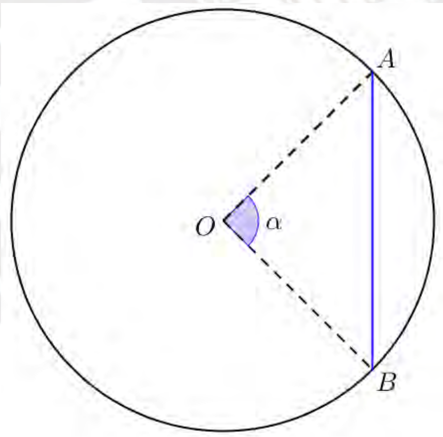


Figura 14. Definición de la cuerda AB (cuerda de α) en la circunferencia.
Fuente: Adaptado de Oliveira (2010, p. 30)

Las longitudes de las cuerdas (denotado como crd) dependen de un valor específico del radio (denotado por R) y las longitudes de los arcos generalmente se miden en grados sexagesimales, donde $360°$ es la longitud del arco de la circunferencia.

En la figura 15 tenemos algunos ejemplos de cuerdas fáciles de encontrar.

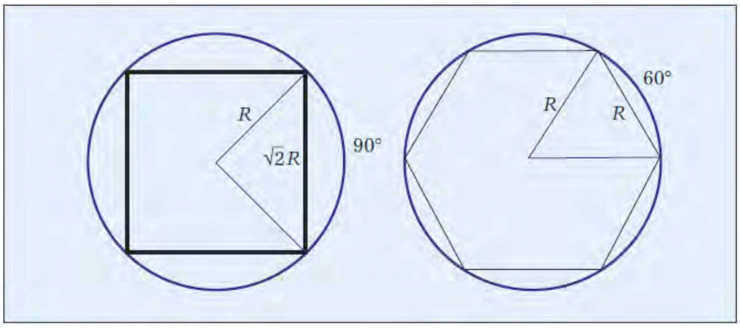


Figura 15. Valores para cuerdas de circunferencia conocidas.
Fuente: Bressoud (2010b, p. 108)

De figura 14 se puede concluir que $crd(90°) = \sqrt{2}R$ y la $crd(60°) = R$. Según Bressoud (2010b) Euclides calculó otras longitudes de cuerdas al trabajar con polígonos regulares como pentágonos y decágonos y al calcular sus lados. Para calcular cuerdas correspondientes a otros ángulos, Hiparco utiliza los resultados geométricos que en lenguaje actual serían como las que aparece en la figura 16.

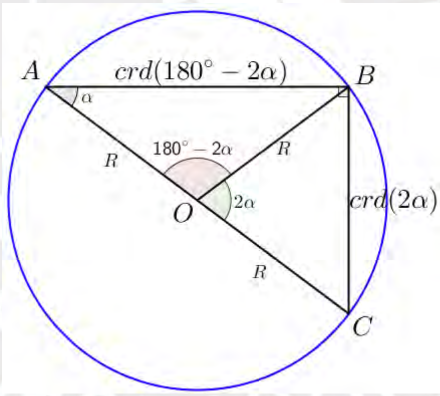


Figura 16. Triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia.
Fuente: Adaptado de Oliveira (2010, p. 31)

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos:

$$crd^2(2\alpha) + crd^2(180° - 2\alpha) = (2R)^2$$

$$crd(180° - 2\alpha) = \sqrt{(2R)^2 - crd^2(2\alpha)}$$

Mediante resolución de triángulos en el triángulo OBC podemos relacionar la longitud de la cuerda BC con el radio de la circunferencia es decir $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$, que usaremos en la expresión anterior: $2Rsen(90° - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - (2Rsen(\alpha))^2}$

$$2Rcos(\alpha) = \sqrt{(2R)^2 - (2Rsen(\alpha))^2}$$

$$(2R)^2cos^2(\alpha) = (2R)^2(1 - sen^2(\alpha))$$

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Esta expresión viene a ser una de las identidades fundamentales de la trigonometría. Hiparco también estableció el siguiente teorema:

$$crd^2(\alpha) = R(2R - crd(180° - 2\alpha))$$

Utilizando convenientemente la relación $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$, tenemos:

$$\left(2Rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = R\big(2R - 2Rsen(90° - \alpha)\big)$$

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

Con estos resultados Hiparco fue capaz de construir la primera tabla trigonométrica de cuerdas, para ángulos que son múltiplos de 7,5°. Por ejemplo, el ángulo de 15° se obtenía a partir del ángulo de 30°, el mismo que se puede obtener fácilmente del ángulo de 60°.

Uno de los primeros problemas resueltos por Hiparco utilizando el conocimiento de las cuerdas según Ptolomeo fue el de las estaciones desiguales. Bressoud (2010b, traducción nuestra) afirma que: “En invierno, a los ochenta y nueve días, es el más corto; el verano, a noventa y tres y cinco octavos de días, es el más largo” como se observa en la figura 17.

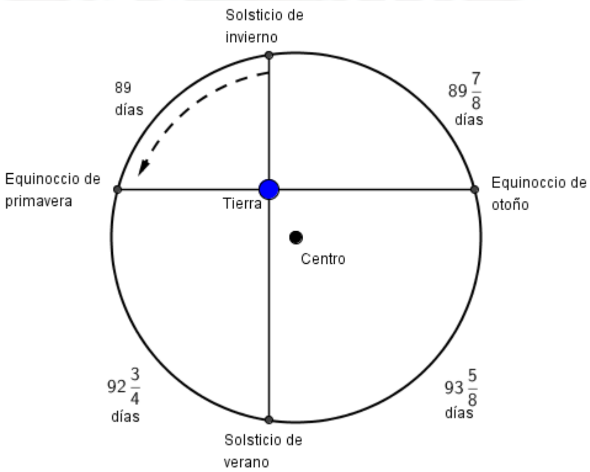


Figura 17. Uso de las longitudes de cuerda para determinar distancias.
Fuente: Adaptado de Bressoud (2010b, p. 108)

En dicha resolución según Bressoud (2010b, traducción nuestra):

> Hiparco utiliza las longitudes observadas de las estaciones para determinar la longitud del arco recorrido por el sol en su órbita durante cada temporada. Luego encontró las longitudes de las cuerdas que conectan la posición del sol con los extremos de las estaciones. Estas longitudes le permitieron determinar hasta qué punto la tierra está desde el centro de la órbita del sol. (p. 108)

En consecuencia, como lo afirma Cruz-Márquez (2018) Hiparco plantea que, para hacer coincidir el modelo con los fenómenos observados respecto al sol, es necesario que la tierra no esté ubicada exactamente en el centro de la llamada eclíptica.

Menelao de Alejandría (70 d.C. – 140 d. C.). En su obra titulada *Esférica* establece la base para el estudio de los triángulos esféricos los mismos que forman parte de la trigonometría esférica que sería la predecesora de la trigonometría plana. Menelao y probablemente Hiparco conocían algunos lemas que sirvieron de base para demostrar su teorema sobre transversales (Boyer, 1986).

Uno de estos lemas (figura 18) dice lo siguiente: “si la prolongación de la cuerda AB corta a la prolongación del radio OD' en C', entonces $\frac{AC'}{BC'} = \frac{sen\widehat{AD'}}{sen\widehat{BD'}}$ ” (Boyer, 1986, p. 217).

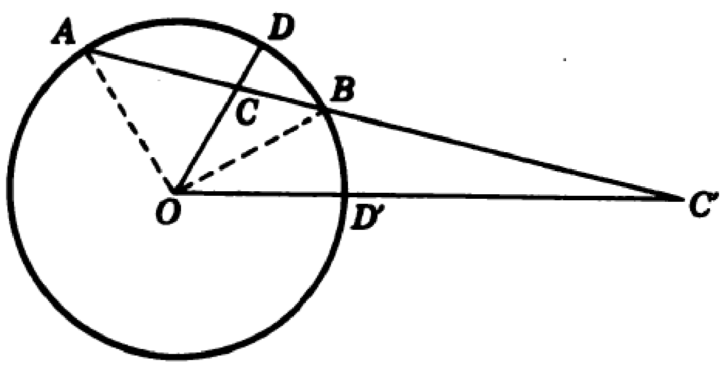


Figura 18. Lema utilizado en la demostración del teorema de Menelao.
Fuente: Tomado de Boyer (1986, p. 217)

Menelao es considerado como uno de los creadores de la trigonometría esférica por sus aportaciones sobre los triángulos esféricos.

En el libro I de su obra Esférica se define por primera vez el triángulo esférico, en donde la suma de sus ángulos es mayor que 180° y en el libro III se enuncia el conocido teorema de Menelao (Ortiz, 2005).

Claudio Ptolomeo (85 d. C. – 165 d. C.). Nace en Egipto, pero su vida transcurre en Alejandría, ciudad que era considerada como el centro cultural e intelectual de la época. Es considerado como uno de los primeros matemáticos polifacéticos, pues incursionó en la astronomía, la geografía, la música y la física (Maor, 1998).

Uno de los mayores aportes de Ptolomeo es el *Almagesto*, que es un resumen de la astronomía desarrollada hasta su época, conformado por trece libros, al igual que los *Elementos* de Euclides. Ambas obras han ejercido una enorme influencia sobre las matemáticas; sin embargo, "a diferencia de los *Elementos*, que hasta la actualidad constituye el núcleo de la geometría clásica, el *Almagesto* perdió gran parte de su autoridad cuando el sistema heliocéntrico de Copérnico fue aceptado" (Maor, 1998, p. 25).

En el primer tratado del *Almagesto,* aparece la construcción de la tabla de cuerdas de Ptolomeo, dicha lista considera la longitud de una cuerda en una circunferencia, como se puede apreciar en la figura 19, en términos del ángulo central α (Maor, 1998). Este ángulo central toma valores en intervalos de medio grado para una media vuelta.

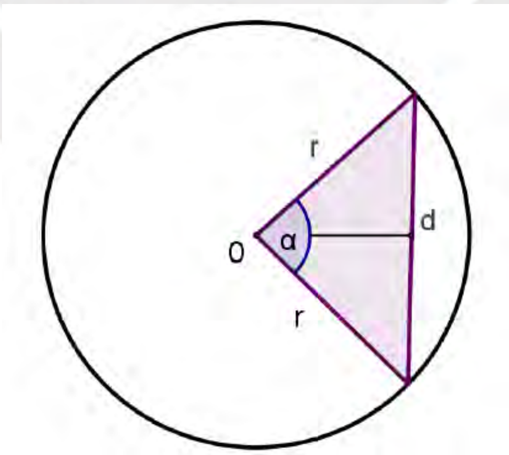


Figura 19. Longitud de la cuerda de Ptolomeo.
Fuente: Maor (1998, p. 26)

La longitud d se puede calcular mediante la resolución de triángulos y sería:

$$d = 2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ptolomeo considera una circunferencia de 120 unidades de diámetro, de modo que $r = 60$. Si reemplazamos $r = 60$ en la ecuación anterior, entonces ésta se transforma en $d = 120sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Así, además de la proporcionalidad del factor de 120, tenemos una lista de valores para el $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; en consecuencia, por identidades del ángulo doble se puede obtener el $sen\alpha$ (Maor, 1998).

En el cálculo de sus cuerdas Ptolomeo usa el siguiente teorema: si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia entonces:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

En otras palabras, la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero, es igual al producto de sus dos diagonales, Figura 20.

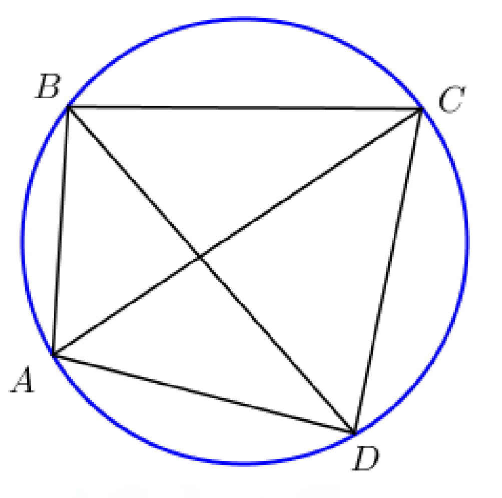


Figura 20. Teorema de Ptolomeo.

Con base en este teorema, Ptolomeo deduce las primeras identidades para la suma y diferencia de dos ángulos y que son usados con mucha frecuencia dentro de la trigonometría, para calcular nuevas razones trigonométricas; por ejemplo, el $sen75°$, $cos16°$ y la $tan8°$.

En la figura 21, se tiene una circunferencia de centro O y radio R, donde 2α y 2β son las medidas del ángulo centrales AOC y AOB respectivamente.

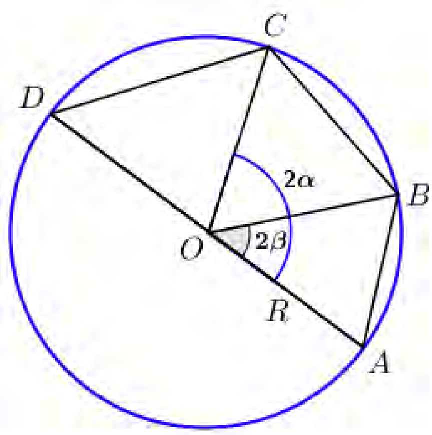


Figura 21. Deducción de la cuerda para la diferencia de dos arcos.
Fuente: Adaptado de Oliveira (2010, p. 35)

En el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en la circunferencia de diámetro AD por el teorema de Ptolomeo, se tiene:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Las longitudes de las cuerdas en términos de los ángulos quedarían de la siguiente manera:

$$crd(2\beta) \cdot crd(180° - 2\alpha) + crd(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = crd(2\alpha) \cdot crd(180° - 2\beta)$$

$$crd(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = crd(2\alpha) \cdot crd(180° - 2\beta) - crd(2\beta) \cdot crd(180° - 2\alpha)$$

Como $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$ y $sen(90° - \theta) = cos\theta$, de la ecuación anterior podemos deducir la siguiente expresión moderna:

$$2Rsen(\alpha - \beta) \cdot 2R = 2Rsen\alpha \cdot 2Rsen(90° - \beta) - 2Rsen\beta \cdot 2Rsen(90° - \alpha)$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sen\beta$$

Ptolomeo conocía, a partir de los pitagóricos, el valor de la cuerda del ángulo de $36°$, que viene a ser el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia. Así, por cálculo de la diferencia de cuerdas, él fue capaz de calcular la cuerda de $6°$ como la diferencia de $36°$ – $30°$. Luego por bisecciones, llegó a las cuerdas de $3°$, de $1{,}5°$, y de $0{,}75°$. De ahí en adelante construyó una tabla de cuerdas con variaciones de $0{,}75°$ en $0{,}75°$ (Oliveira, 2010).

En la figura 22 se muestra una sección de la tabla de Ptolomeo, donde Maor (1998) afirma lo siguiente:

> Para el cálculo de la tabla de Ptolomeo en la que usó el sistema de numeración sexagesimal babilónico o base 60, el sistema sólo es adecuado y disponible para el manejo de las fracciones hoy en día (…). Pero él lo utiliza en conjunción con el sistema griego en el que cada letra del alfabeto se le asigna un valor numérico: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y así sucesivamente. Esto hace que la lectura de su tabla sea un poco difícil (p. 26).

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠'	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2.50	0;1.2.50
α∠'	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34.15	0;1.2.50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠'	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8.28	0;1,2,48
γ∠'	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39.52	0;1.2.48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1.2.47
δ∠'	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42.40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1.2,46
ε∠'	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16.49	0;1,2,44
ς∠'	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2.42
ζ∠'	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50.54	0;1,2.41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠'	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0.2,36
ροε∠'	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0.2.20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠'	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠'	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0.1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠'	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠'	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0.0.9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Figura 22. La tabla de cuerdas de Ptolomeo.
Fuente: Maor (1998, p. 27)

2.1.4 La trigonometría hindú

Una contribución importante de la cultura india a la trigonometría fue la introducción de lo equivalente a la función seno para reemplazar a las tablas de cuerdas griegas, las mismas que figuran en los Siddhantas y en el Aryabhatiya (Boyer, 1986). En estas tablas se dan valores del seno para ángulos menores o iguales a 90° en intervalos que van de $3\frac{3}{4}°$ cada uno. Estas tablas también contienen los valores de lo que hoy se conoce como el seno verso, es decir $1 - cos\theta$.

Según Esteban, Ibañez y Ortega (1998) ya en los inicios del siglo VI los matemáticos de la india desarrollaron algunos conceptos de algunas razones trigonométricas. Usaron la palabra jya-ardha para semicuerda y su abreviatura (jya o jiva) se empleó para denominar a la razón seno (ver figura 23).

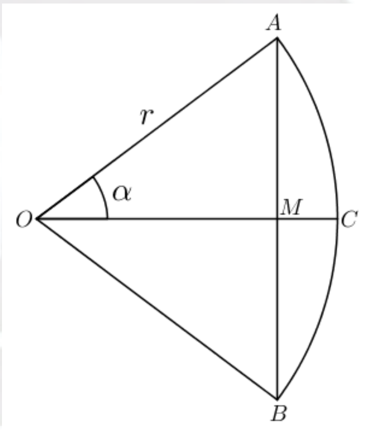


Figura 23. Arco de un ángulo.
Fuente: Adaptado de Esteban, Ibañez y Ortega (1998, p. 61)

Los matemáticos indios definieron y desarrollaron la teoría de tres razones trigonométricas, cuyos equivalentes modernos a partir de la resolución de triángulos rectángulos sería los siguientes:

$$jya(\alpha) = AM = rsen(\alpha)$$

$$kojya(\alpha) = OM = rcos(\alpha)$$

$$ukramajya(\alpha) = MC = OC - OM = r[1 - cos(\alpha)]$$

Un siglo más tarde, Bhaskara I, en su obra Maha Bhaskarita, consiguió elaborar una fórmula, llamada Aryabhata I, que permitía obtener el seno de cualquier ángulo sin tener que acudir a la tabla trigonométrica, (Esteban, Ibañez y Ortega, 1998).

En el cuadro 4 se presentan algunas identidades trigonométricas con sus respectivos autores, en cuyas obras aparecen por primera vez tal como se conocen incluso hoy en día.

Cuadro 4. *Identidades trigonométricas y sus respectivos autores*

Identidad trigonométrica	Autores
$cosa = sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	Verahamihira (c. 505-587 d.C.)
$sen^2a + cos^2a = 1$	Verahamihira (c. 505-587 d.C.)
$sen^2a = \frac{1}{4}(sen^2 2a + versen^2 2a) = \frac{1}{2}(1 - cos2a)$	Verahamihira (c. 505-587 d.C.)
$1 - sen^2a = cos^2a = sen^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	Brahmagupta (n. 598 d.C.)
$sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm sena)}$	Aryabhata II (c.900)
$sen(A \pm B) = senAcosB \pm cosAsenB$	Bhaskaracharya (n.1114 d.C.)

Fuente: Adaptado de Morey (2003, p. 23)

En dichas identidades trigonométricas se puede observar también el uso de la función seno verso que luego con el pasar de los años perdería su vigencia.

Cuando los árabes tradujeron la Aryabhatiya, se mantuvo la palabra jiva sin traducir su significado, así jiva también podía ser pronunciada como jiba o jaib. Cuando la versión árabe fue traducida al latín jaib fue traducido como *sinus* que significa pecho, bahía o una curva (Maor, 1998). Muy pronto el termino *sinus* ganó popularidad en toda Europa y llego a ser común en los textos de matemáticas, tal es así que el inglés Edmund Gunter (1581-1626) lo abrevió como *sin* para utilizarlo en su dispositivo mecánico denominado “escala de Gunter”.

El término coseno según Maor (1998) surge de la necesidad de calcular el complemento del seno, Aryabhata lo denominaba kotijya. Más tarde Edmund Gunter lo abrevio como *co.sinus*; sin embargo, fue modificado por el profesor John Newton a coseno y posteriormente en 1674 abreviado como *cos* por el matemático inglés Sr. Jonas Moore (1617-1679).

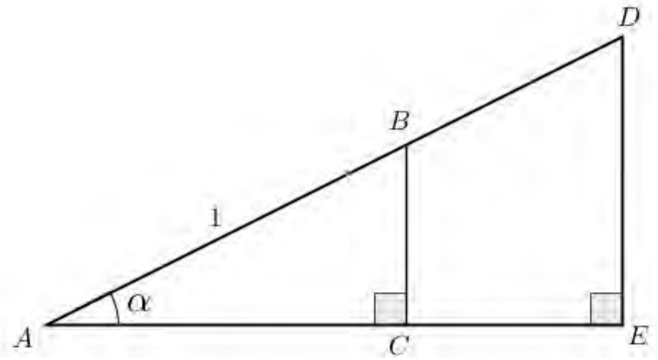
Se puede observar que los hindús, así como los griegos consideraban a la trigonometría como una herramienta para la astronomía, esa trigonometría era más de carácter aritmético que geométrico (Raiol, 2014).

2.1.5 La trigonometría árabe

La trigonometría árabe según Boyer (1986) se construyó en base al estudio de la llamada función seno y fue gracias a ellos que pasó a Europa como la trigonometría del seno.

El imperio musulmán o árabe logra importantes avances en las ciencias y en las artes entre los siglos VIII y XI, debido a la difusión de la lengua árabe, que sustituye al griego como lengua universal. Esta influencia árabe se inicia con la fundación de la Escuela de Bagdad en el siglo IX, siendo uno de sus máximos exponentes Al Battani conocido como el Ptolomeo de Bagdad (Lobo Da Costa, 1997).

Al battani (850 d. C. – 929 d. C.). En su libro titulado *Sobre el movimiento de las estrellas* deja algunas fórmulas trigonométricas como la siguiente $b = \frac{asen(90° - A)}{senA}$, donde aparecen el seno y la función seno verso (Boyer, 1986). Estas expresiones ya son ideas básicas de la trigonometría moderna. Además, introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y demuestra que la razón jiva es válida para cualquier triángulo rectángulo, independiente del valor de la longitud de la hipotenusa, figura 24 (Lobo Da Costa, 1997).



Por el Teorema de Thales, tenemos:

$$jiva = \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

Luego:

$$sen\alpha = \frac{DE}{AD} = jiva$$

Figura 24. Fórmula utilizada para construir la tabla Al Battani.
Fuente: Adaptado de Lobo Da Costa (1997, p. 20)

Con esta nueva fórmula se pudo construir una tabla trigonométrica de senos en intervalos de un cuarto de grado. Según Lobo Da costa (1997) “Al-Battani estaba interesado en calcular la altitud del sol, para eso fue necesario utilizar las razones trigonométricas y construir tablas más precisas que las existentes en la época” (p. 20).

Al Battani, según Raiol (2014) también es responsable de la formulación y establecimiento de las siguientes identidades trigonométricas:

$$senx = \frac{tanx}{\sqrt{1+tan^2x}} \qquad tanx = \frac{senx}{cosx}$$

$$cosx = \frac{1}{\sqrt{1+cot^2x}} \qquad secx = \sqrt{1+tan^2x}$$

Según Kline (1972) los astrónomos árabes introdujeron las nociones de la tangente y la cotangente, pero como longitudes de unidades determinadas. La sistematización de la trigonometría plana y esférica la proporciona Nasir-Eddin con su trabajo de astronomía titulado *Tratado del Cuadrilátero*.

En el siglo IX el astrónomo árabe Al Hasib, al calcular la longitud de la sombra de una varilla cuya longitud es de una unidad, clavada en una pared y paralela al terreno, obtuvo una nueva razón que le daba la longitud $s = tan\alpha$ (ver figura 25). Por el contrario si la varilla estaba hincada verticalmente en el suelo, la longitud t, de su sombra vendrá dada por la razón recíproca $t = cot\alpha$.

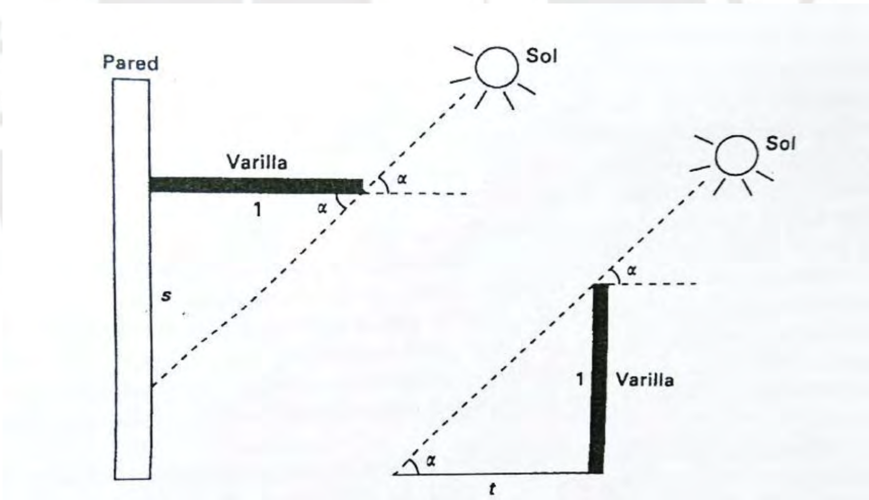


Figura 25. Razones trigonométricas tangente y cotangente.
Fuente: Tomado de Esteban, Ibañez y Ortega (1998, p. 65)

Abu'l-Wefa (939-998). Trabaja la relación tangente en una circunferencia unitaria y demuestra las fórmulas para el ángulo doble como $sen(2\alpha) = 2sen\alpha cos\alpha$ y el ángulo mitad y además formula de manera clara y precisa el teorema de senos para triángulos esféricos (Boyer, 1986). También construye una nueva tabla trigonométrica de senos en intervalos que van de un cuarto de grado $(15')$, con hasta ocho decimales, introdujo las funciones secante y cosecante y con esto definió todas las relaciones trigonométricas en la circunferencia unitaria, pues hasta entonces, dichas relaciones solo habían sido trabajadas en el triángulo rectángulo (Raiol, 2014). Dentro de estas nuevas relaciones trigonométricas Rariol (2014) hace referencia a las siguientes identidades:

$$tanx = \frac{1}{cotx} \qquad cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$$

Al-Biruni (973- 1048). Escribió más de 146 obras y trabajó la trigonometría mediante aplicaciones a otros campos como la astronomía, la geografía y el calendario. Fue uno de los primeros en investigar las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante a través de su *Tratado exaustivo sobre sombras*, donde además presenta varias demostraciones para identidades trigonométricas que eran utilizados en la resolución de problemas astronómicos (Raiol, 2014).

$$senx = cos(90° - x) \qquad cotx = tan(90° - x) \qquad cscx = \sqrt{1 + cot^2x}$$

Al tratar el problema de inscribir un nonágono en una circunferencia se encuentra con la ecuación cúbica $x^3 = 1 + 3x$, la cual resuelve con el uso de la identidad trigonométrica del coseno del ángulo triple $(cos3x = 4cos^3x - 3cosx)$, con una aproximación de seis cifras exactas (Boyer, 1986).

Ibn- Yunus (m. 1008). Introdujo la fórmula $2cosxcosy = cos(x + y) + cos(x - y)$, que en la actualidad se le conoce como una identidad trigonométrica para la transformación de producto de cosenos a suma de cosenos. Según Boyer (1986), esta fórmula se usó en Europa durante el siglo XVI, antes de la invención de los logaritmos que usaba el método “prostafairesis” para convertir productos en sumas.

Jamshid Al-Kashi (1390-1450). Al igual que sus predecesores Abu’l-Wefa y al-Biruni, Al-Kashi también calculó el $sen1°$ con un altísimo grado de aproximación, aplicando la identidad del seno para el ángulo triple. A continuación, se presenta la resolución propuesta por Usón y Ramirez (2012), a la que agregamos algunos elementos de la TAD.

Tarea: Calcular el valor del $sen1°$ por identidades del ángulo triple.

Resolución

Paso 1: Por identidades del ángulo triple: $sen(3x) = 3sen(x) - 4sen^3(x)$

$$sen3° = 3sen1° - 4sen^31°$$

Paso 2: De la tabla trigonométrica de Abul-Wafa, el valor de $sen3° = 0{,}052335956$

$$0{,}052335956 = 3sen1° - 4sen^3 1°$$

Paso 3: Hacemos el cambio de variable $sen1° = x$ y dividimos entre 4.

$$x^3 - 0{,}75x + 0{,}013083989 = 0$$

Paso 4: Resolviendo la ecuación cubica por métodos iterativos.

$$sen1° = 0{,}017452406437283571$$

Los matemáticos árabes, según Usón y Ramirez (2012) empleaban estas técnicas iterativas aproximadamente desde el siglo XII. Los demás valores de senos y tangentes se obtienen mediante identidades trigonométricas; por ejemplo, él $sen12°$ se puede calcular a partir de $sen(72° - 60°)$ es decir utilizando la identidad trigonométrica de la diferencia de dos ángulos, como se muestra en la siguiente tarea.

Tarea: Calcular el valor del $sen12°$ por identidades de ángulos compuestos.

Resolución

Paso 1: Por la identidad trigonométrica: $sen(x - y) = sen(x)\,cos(y) - cos(x)\,sen(y)$

$$sen(72° - 60°) = sen72°cos60° - cos72°sen60°$$

Paso 2: Reemplazando los valores notables de los ángulos 72° y 60°.

$$sen(12°) = \left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Paso 3: Operando las fracciones homogéneas y ordenando.

$$sen(12°) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

A partir del $sen12°$ se puede obtener $sen6°$, $sen3°$, $sen\left(\frac{3°}{2}\right)$ y $sen\left(\frac{3°}{4}\right)$ mediante las identidades del ángulo mitad, como aparecen en Hobson (1957).

$$sen(6°) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1\right)$$

$$sen(3°) = \frac{1}{16}\left[\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) - 2\left(\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{5 + \sqrt{5}}\right]$$

De todo lo anterior se puede concluir que una de las principales tareas en la antigüedad era el cálculo de los valores del seno y coseno con varias cifras decimales, en un primer momento mediante técnicas asociadas a las construcciones geométricas de polígonos regulares inscritos en circunferencias, en donde se asociaba las cuerdas con los ángulos, dando nacimiento a nuevas relaciones en el triángulo rectángulo como las identidades trigonométricas.

2.1.6 La trigonometría como una ciencia independiente

La trigonometría inicia su periodo de consolidación como una rama independiente de las matemáticas a mediados del siglo XV, en la llamada Liga Hanseática alemana, que en palabras de Stewart (2008) "controlaba la mayor parte del comercio y, en consecuencia, era rica e influyente; por tal motivo, necesitaba mejorar los métodos de navegación, junto con mejoras en el calendario y en los usos prácticos de las observaciones astronómicas" (p. 93).

Johann Müller (1436 - 1476). Astrónomo y matemático de origen alemán más conocido como Regiomontano, es considerado como el padre de la trigonometría moderna. En 1464 presenta su obra titulada *De triangulis omnimodis*, donde se exponía de forma sistematizada los métodos de resolución de triángulos, tomando como base las propiedades de la resolución de triángulos rectángulos (Boyer, 1986). Asimismo, trabajó "en una nueva versión corregida del Almagesto y en 1471 calculó una nueva tabla de senos y de tangentes" (Stewart, 2008, p. 95) utilizando como radios 600 000 y 100 000 unidades respectivamente (Stewart, 2008).

François Viète (1540 - 1603). Con su trabajo *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* publicado en 1579 es uno de los primeros en hacer un tratamiento sistémico en la resolución de triángulos planos y esféricos, utilizando las seis funciones trigonométricas (Montiel, 2011). Además desarrolla las otras tres fórmulas para las identidades trigonométricas de transformación de suma de senos y cosenos a producto; por ejemplo, la siguiente $senA + senB = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

La trigonometría de Viète, así como su álgebra, tienen como característica principal la generalización. Además, fue el fundador del enfoque analítico para la trigonometría, introdujo la noción del triángulo polar en el estudio de la trigonometría esférica (Boyer, 1986).

Según Boyer (1986) en su obra *Canon mathematicus* (1579) Viète calculó tablas trigonométricas para intervalos de un minuto y en su *Variorum de rebus mathematicis* (1593) encontramos un teorema equivalente a la actual ley de tangentes $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$.

La transición de las razones trigonométricas a las funciones periódicas comenzó con Viète en el siglo XVI, tuvo un nuevo impulso con la aparición del cálculo infinitesimal en el siglo XVII y culminó con los trabajos de Euler.

Roger Cotes (1682- 1716). En su obra póstuma *Harmonia mensurarum* “se reconoce el carácter periódico de las funciones trigonométricas, apareciendo quizás por primera vez en forma impresa los ciclos de las funciones tangente y secante” (Boyer, 1986, p. 536). Se trataría de uno de los primeros textos que sistematiza el cálculo aplicado a las funciones circulares y logarítmicas (Boyer, 1986).

Abraham de Moivre (1667- 1754). El famoso teorema de De Moivre que relaciona al seno y coseno $(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$ según Boyer (1986) no viene dado de forma explícita, pero si se puede reconocer a través de sus obras. Por ejemplo, en las *Philosophical Transactions* de 1707 y en su *Miscellanea analytica* de 1730 aparecen las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}n\theta + \sqrt{-1}\cos n\theta\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}n\theta - \sqrt{-1}\cos n\theta\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{sen}\theta$$

$$(\mathrm{sen}\theta \pm i\cos\theta)^{\frac{1}{n}} = cos\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right) \pm isen\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right)$$

La última expresión era utilizada para descomponer $x^{2n} + 2xcos\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2xcos\theta + 1$ (Boyer, 1986).

Leonhard Euler (1707-1783). En su obra *Introductio,* Euler realiza el estudio analítico de las funciones trigonométricas, donde el seno de un ángulo “ya no era un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o bien el número definido por la serie” (Boyer, 1986, p. 558). Con Euler la trigonometría toma su forma actual, cuando adopta como medida del radio de la circunferencia a la unidad y define funciones aplicadas a números reales y no a ángulos como se trabajaba hasta entonces.

En el cuadro 5 se muestra el análisis praxeológico del estudio histórico epistemológico realizado por Da Fonseca (2015), donde se reconocen algunas tareas, las posibles técnicas que resuelven dichas tareas, el entorno tecnológico que justifican dichas técnicas y las teorías que se generan.

Cuadro 5*. Análisis praxeológico del estudio histórico-epistemológico.*

	Pre-historia	**Edad Antigua**	**Edad Media**	**Edad Moderna**
Tareas	- Calcular la longitud de una sombra	- Analizar las fases de la luna, los puntos cardinales y las estaciones del año. - Medir distancias, longitudes y profundidades.	- Resolver un triangulo. - Construir tablas trigonométricas.	- Construir tablas trigonométricas. - Calcular el valor del seno con varias cifras decimales.
Técnicas	- Tabular secuencias numéricas para relacionar longitudes de sombras con horas del día.	- Resolución de figuras planas y esféricas. - Utilización del análisis.	Resolucion de triángulos planos y esféricos.	- Interación entre al analisis numérico y geométrico.
Tecnologías	- Ángulos. - Triángulos. - Semejanza. - Proporcionalidad. - Esfera celeste.	- Triángulos rectángulos. - Relaciones trigonométricas. - Ángulo y medida de ángulos. - Trigonometría esférica.	- Relaciones métricas en triángulos planos y esféricos. - Nociones de cantidades variables.	- Razones trigonométricas. - Funciones trigonométricas. - Series infinitas.
Teorías	- Función sombra	- Función sombra. - Función cuerda.	- Función seno.	- Función seno

Fuente: Adaptado de Da Fonseca (2015, p. 210)

En el trabajo de Da Fonseca (2015) a los bloques que nosotros identificamos como tecnologías y teorías el simplemente los menciona como “nociones” y “fases” respectivamente. Además, hace mención a otros bloques como las motivaciones, los objetivos y los autores de estos conocimientos trigonométricos.

Siendo uno de nuestros objetivos situar nuestro objeto matemático de estudio dentro del saber sabio de las funciones trigonométricas a continuación presentamos un esquema de lo que concebimos como Modelo Epistemológico de Referencia (MER) donde se establece una cierta organización para el estudio del seno y coseno (Figura 26).

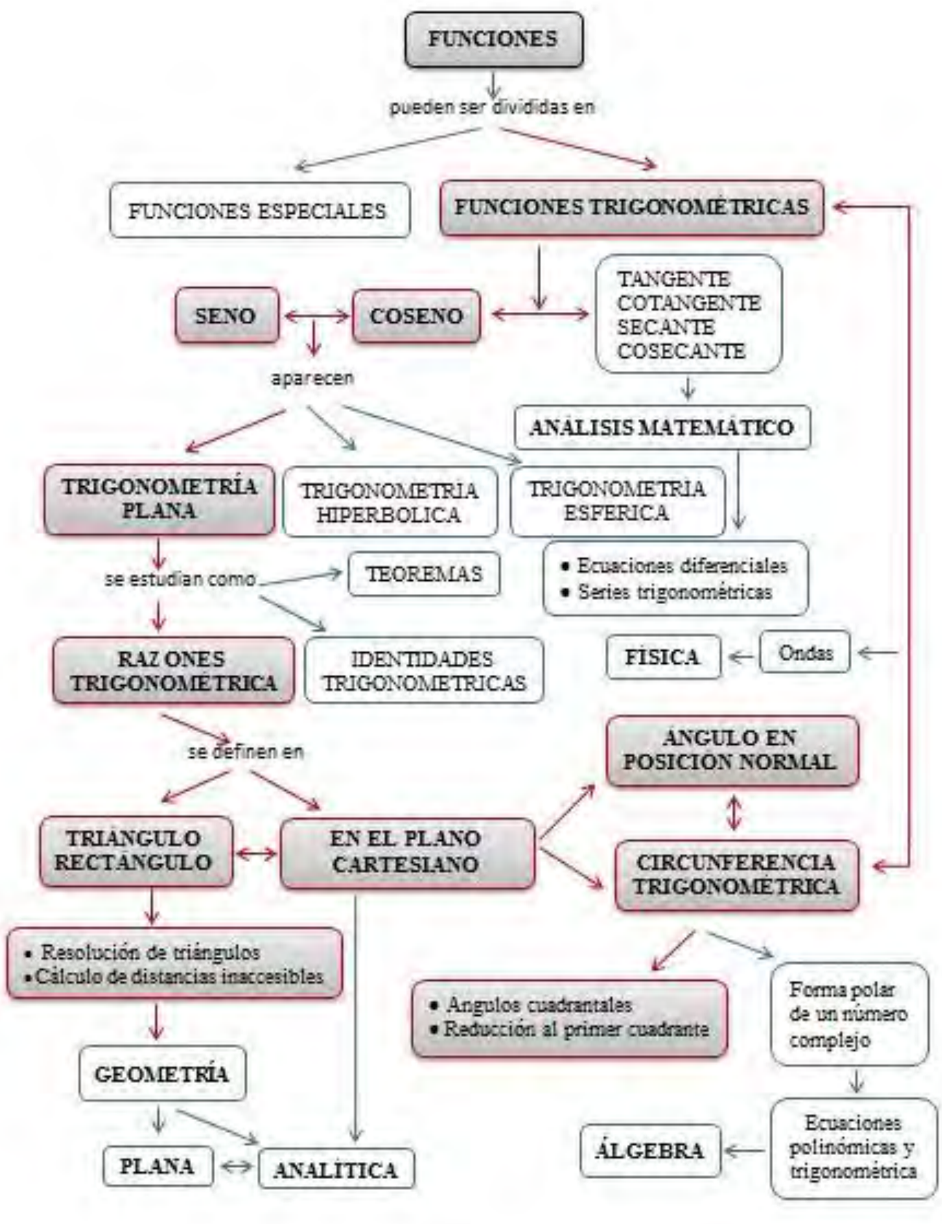


Figura 26. Modelo Epistemológico de Referencia para el estudio del seno y coseno.
Fuente: Elaboración propia

En la trigonometría plana se estudia a las nociones trigonométricas seno y coseno como razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, en el plano cartesiano se relacionan con las coordenadas de un ángulo en posición normal y finalmente en la circunferencia trigonométrica se definen como coordenadas de números reales.

Así, la trigonometría, que en sus inicios sirvió a la Agrimensura y a la astronomía, se convirtió en un primer momento en una disciplina independiente de las matemáticas para después ser incorporada a análisis matemático.

Tal como lo afirma Montiel (2005) creemos que los conceptos trigonométricos evolucionaron desde la geometría dando explicación a diversos fenómenos astronómicos, físicos, químicos y que están relacionados con los movimientos, el calor y el sonido.

2.2 El seno y coseno como objeto matemático a ser estudiado

Para el estudio del seno y coseno tomaremos como referencia algunos libros de texto, teniendo en cuenta ciertos criterios, tales como: que sean textos recomendados en los programas de estudio de algunas universidades, que sean de mayor uso tanto por la comunidad de estudiantes como por los profesores en la educación básica y superior y, finalmente, que desarrollen los temas propios del curso de trigonometría tanto en el triángulo rectángulo como en el plano cartesiano.

En el cuadro 6 se presentan los libros de texto seleccionados para nuestro análisis, donde nuestros principales referentes son los siguientes textos: Trigonometría de Esteban, Ibañez y Ortega (1998), *números y funciones reales* de Lima (2013) y algunos trabajos de investigación como la de Carneiro (2014).

Cuadro 6*. Libros de texto seleccionados para el estudio del objeto matemático*

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Lima, E. L	2013	Números y funciones reales	Primera	PROFMAT
Swokowsky, E. W, Cole, J. A	2009	Álgebra y Trigonometría con geometría analítica	Décimo segunda	Cengage Learning
Sullivan, M	2006	Álgebra y Trigonometría	Séptima	Pearson
Esteban, Ibañez y Ortega	1998	Trigonometría	Primera edición	SINTESIS

El estudio de las nociones trigonométricas seno y coseno engloba otras definiciones como las de ángulos, medidas de ángulos, el triángulo rectángulo, la semejanza de triángulos, la circunferencia trigonométrica, las identidades trigonométricas, las funciones trigonométricas entre otras y que serán trabajadas en las siguientes líneas.

2.2.1 Ángulos y su medida

Definición 2.2.1. Para Esteban, Ibañez y Ortega (1998) "un ángulo está constituido por dos semirrectas con origen común" (p. 143). En la figura 27, el ángulo queda definido por las semirrectas (rayos) OA y OB que se llaman lados del ángulo y cuyo origen es el punto O, que se denomina vértice.

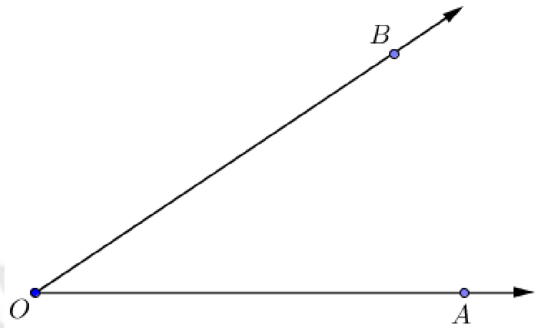


Figura 27. Representación del ángulo.
Fuente: Adaptado de Esteban, Ibañez y Ortega (1998, p. 143)

2.2.1.1 Ángulo trigonométrico.

Definición 2.2.2. Es aquel ángulo generado por la rotación de un rayo en un plano alrededor de un punto fijo, llamado vértice, desde una posición inicial (lado inicial) hasta una posición final (lado final). En la figura 28 se observa que el rayo OA gira hasta la posición OB en el sentido mostrado generando así el ángulo θ, donde la letra P nos representa al plano.

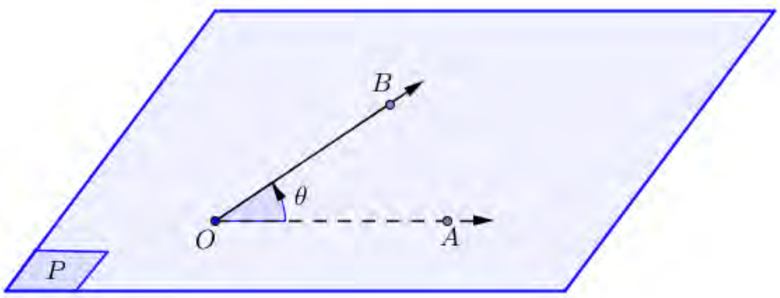


Figura 28. Representación del ángulo trigonométrico.

Si el ángulo gira en sentido anti horario es decir en el sentido contrario a las agujas del reloj, por convenio, se le asigna sentido positivo y si el giro es en sentido horario se le considera de sentido negativo.

2.2.1.2 Medida de ángulos

Los ángulos se pueden medir en grados y en radianes. El grado sexagesimal $(1°)$ se define como la medida de ángulo de una vuelta divido en 360 partes, a su vez este se subdivide en minutos y cada minuto en segundos.

Definición 2.2.3. Un radián $(1\ rad)$, se define como la medida del ángulo central que determina sobre una circunferencia un arco de igual longitud al radio de la circunferencia que lo contiene, (Swokowski, 2009). En la figura 29 se observa su interpretación geométrica.

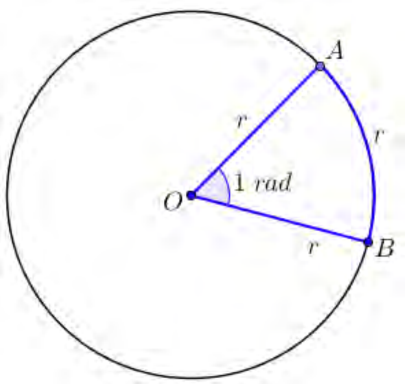


Figura 29. Definición de un radián.
Fuente: Adaptado de Swokowski (2009, p. 402)

2.2.2 Semejanza de triángulos

Definición 2.2.4. Según Muniz (2013) dos triángulos son semejantes cuando existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de uno y otro triángulo, de modo que los ángulos en vértices correspondientes sean iguales y la razón entre las longitudes de lados correspondientes sea siempre la misma (Figura 30).

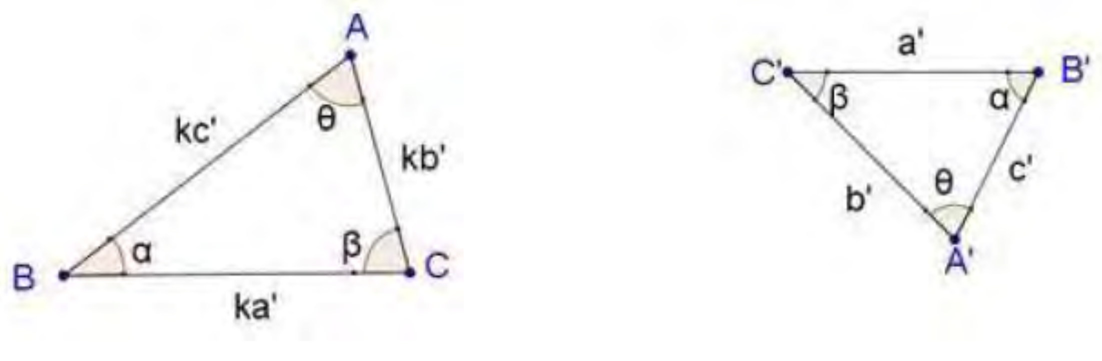


Figura 30. Triángulos semejantes.
Fuente: Carneiro (2014, p. 17)

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ mostrados en la figura 27 son semejantes, con la correspondencia de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, y sus lados son proporcionales dos a dos, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

Donde, $\overline{XY}$ es la longitud de un segmento XY y k es un número real positivo denominado razón de semejanza entre los triángulos ABC y $A'B'C'$ (Carneiro, 2014).

2.2.2.1 Casos de semejanza de triángulos en el plano

De acuerdo con Muniz (2013) existen tres casos para la semejanza de triángulos:

Caso 1: Ángulo, Ángulo (AA). Para que dos triángulos sean semejantes, es suficiente que ellos tengan dos ángulos respectivamente congruentes.

Caso 2: Lado, Lado, Lado (LLL). Para que dos triángulos sean semejantes, es suficiente que ellos tengan los lados respectivamente proporcionales.

Caso 3: Lado, Ángulo, Lado (LAL). Para que dos triángulos sean semejantes, es suficiente que ellos tengan dos lados respectivamente proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados congruentes.

2.2.3 Triángulos rectángulos

Los triángulos ABB', ACC', ADD' y AEE', ilustrados en la Figura 31, son triángulos rectángulos, ya que los ángulos $A\widehat{B'}B$, $A\widehat{C'}C$, $A\widehat{D'}D$ y $A\widehat{E'}E$ son ángulos rectos. Como el ángulo α es agudo,$0° < \alpha < 90°$, es común a todos los triángulos, por el caso (AA), los triángulos son semejantes. Por lo tanto, la razón entre la longitud de los lados es constante (Carneiro, 2014).

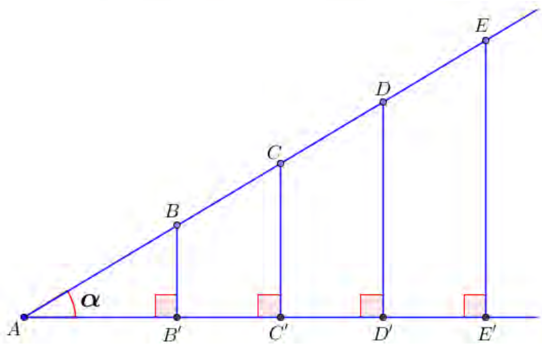


Figura 31. Triángulos rectángulos.
Fuente: Adaptado de Carneiro (2014, p. 18)

De esta figura se puede establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}$$

Teorema 2.2.1. (Teorema de Pitágoras). En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.2.4 Razones trigonométricas

A partir de la figura 18 se establecen las siguientes razones $k = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}$ que dependen del ángulo α y no de las longitudes de los lados de los triángulos involucrados, y es conocida como seno del ángulo α y denotada por $sen\alpha$, es decir:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}$$

De forma análoga:

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$$

$$tan(\alpha) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}}$$

2.2.4.1 La razón seno

Definición 2.2.5. El seno del ángulo agudo α se define como la razón entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura 19 (Felfand; Saul, 2001).

2.2.4.2 La razón coseno

Definición 2.2.6. En un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α (figura 29), el coseno del ángulo α, abreviado como $cos\alpha$, se define como la razón entre el cateto adyacente al ángulo α y la longitud de hipotenusa (Felfand; Saul, 2001).

En la figura 32, se define un triángulo rectángulo ACB, recto C, donde "b" es el cateto adyacente al ángulo agudo α, "a" su cateto opuesto y "c" es la longitud de la hipotenusa. Además en dicho triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

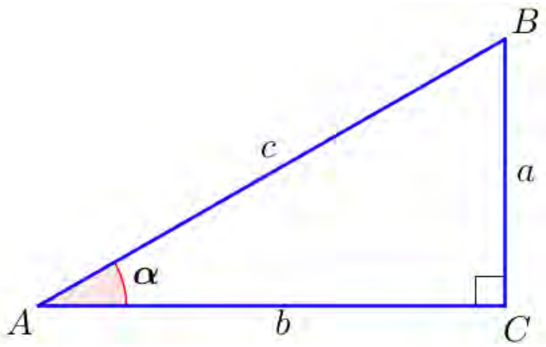


Figura 32. Definición de triángulo rectángulo.

A partir de la figura 29 se definen las razones trigonométricas seno y coseno como cocientes entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo y además se puede definir la razón tangente como la división entre el seno y el coseno, cuadro 7.

Cuadro 7. *Definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo.*

Definición de la razón trigonométrica	**Como se lee**
$sen\alpha = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$	Seno de alfa
$cos\alpha = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$	Coseno de alfa
$tan\alpha = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \dfrac{a}{b}$	Tangente de alfa

Fuente: Adaptado de Sullivan (2006, p. 508)

Observación 2.2.1. Del triángulo rectángulo ABC de la figura 19, donde $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ se puede obtener la siguiente identidad fundamental:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

También se pueden establecer algunas relaciones entre el seno y el coseno como por ejemplo la propiedad de ángulos complementarios y las razones trigonométricas recíprocas.

Teorema 2.2.2. Si $\alpha + \beta = 90°$ entonces $sen\alpha = cos\beta$ y $cos\alpha = sen\beta$.

Demostración:

Del triángulo rectángulo ACB, recto C, (figura 33) se tiene:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{BC}{AB} = cos\beta$$

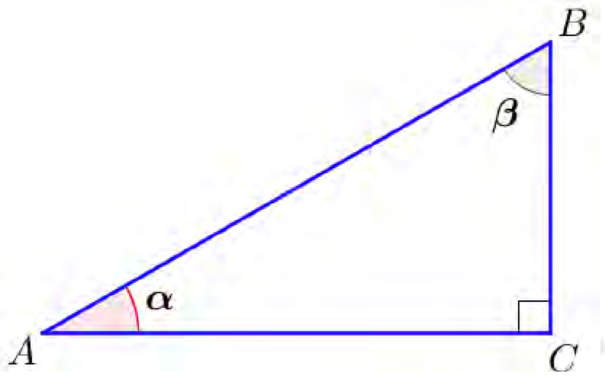


Figura 33. Ángulos complementarios.

2.2.5 Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal.

2.2.5.1 Ángulos en posición normal

Definición 2.2.7. Es aquel ángulo cuyo lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas, su vértice se encuentra en el origen del plano cartesiano y su lado terminal está en uno de los cuadrantes de dicho plano, figura 34. Donde "x" es la abscisa, "y" la ordenada y "r" es el radio vector del punto P.

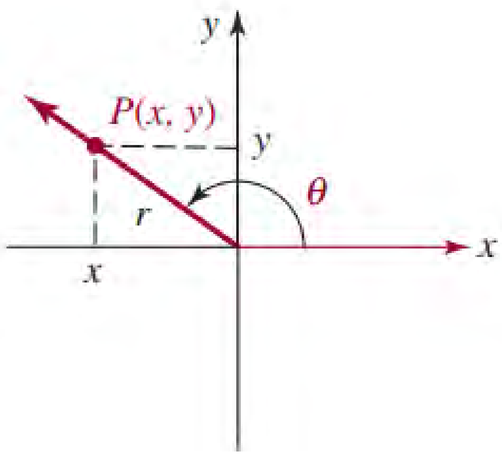


Figura 34. Ángulo en posición normal.
Fuente: Tomado de Zill y Dewar (2012, p. 376)

Definición 2.2.8. De acuerdo con Zill y Dewar (2012) sea θ cualquier ángulo en posición normal y $\mathrm{P}(x, y)$ cualquier punto, excepto $(0,0)$ en el lado final de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre $(0,0)$ y $\mathrm{P}(x, y)$, las razones trigonométricas se definen como sigue:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \rightarrow csc\theta = \frac{r}{y}, r \neq 0, y \neq 0$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow sec\theta = \frac{r}{x}, r \neq 0, x \neq 0$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow cot\theta = \frac{x}{y}, x \neq 0, y \neq 0$$

2.2.5.2 Ángulos cuadrantales.

Definición 2.2.9. Son aquellos ángulos en posición normal cuyos lados finales coinciden con alguno de los semiejes coordenados. Si α es la medida de un ángulo cuadrantal, entonces es de la forma $\alpha = \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

2.2.6 Circunferencia trigonométrica.

Definición 2.2.10. Es aquella circunferencia con centro se encuentra en el origen de coordenadas rectangulares y su radio es igual a la unidad.

En una circunferencia trigonométrica (figura 35) la medida en radianes de un ángulo de t radianes es igual a la medida t del arco subtendido, Zill y Dewar (2012).

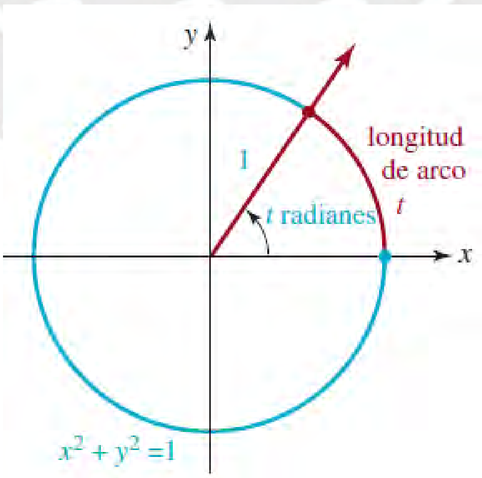


Figura 35. Ángulo en posición normal en la circunferencia trigonométrica.
Fuente: Tomado de Zill y Dewar (2012, p. 390)

2.2.7 Identidades trigonométricas

Definición 2.2.11. Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones trigonométricas y que se verifica para todo valor admisible de la variable (Sullivan, 2006).

A continuación, se hace una breve revisión de las principales identidades trigonométricas como son las identidades fundamentales, de ángulos compuestos, múltiples y de transformación.

2.2.7.1 Identidades trigonométricas fundamentales

En estudio de las identidades trigonométricas fundamentales comprende a las identidades por cociente, las recíprocas y las pitagóricas como se observan en la figura 36.

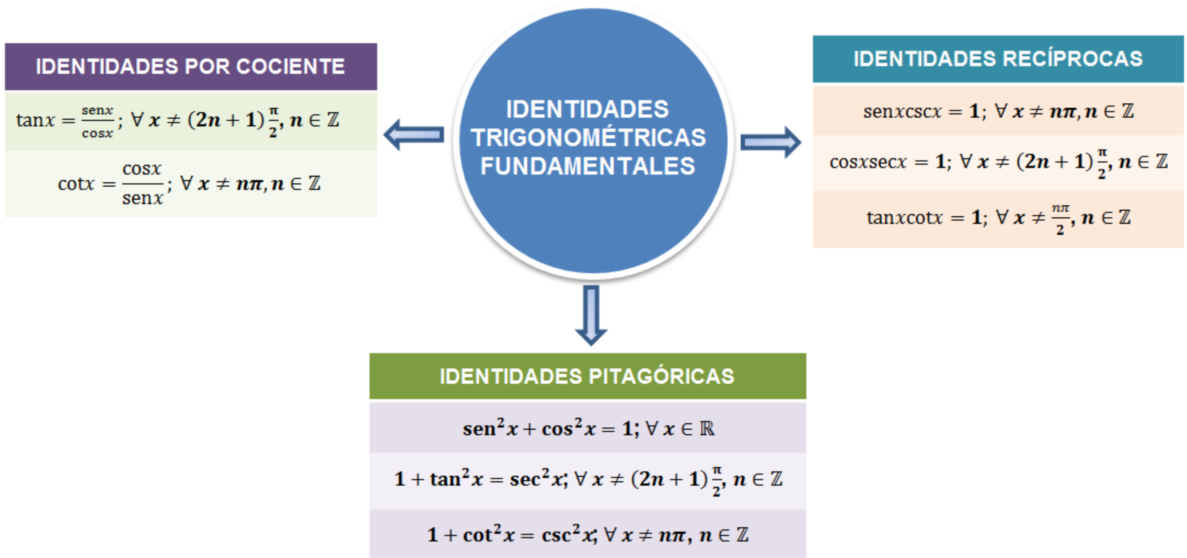


Figura 36. Identidades trigonométricas fundamentales.
Fuente: Adaptado de Swokowski (2009, p. 417)

De estas identidades fundamentales se generan otras identidades conocidas como auxiliares mediante despejes algebraicos y el uso de identidades algebraicas como el binomio al cuadrado.

$$sen^4x + cos^4x = 1 - 2sen^2xcos^2x$$

$$sen^6x + cos^6x = 1 - 3sen^2xcos^2x$$

2.2.7.2 Identidades trigonométricas de ángulos compuestos

Las identidades de ángulos compuestos se utilizan para calcular razones trigonométricas de ángulos desconocidos a partir de ángulos cuyas razones trigonométricas son conocidas, por ejemplo el $\text{sen}75°$ se puede obtener a partir de los ángulos notables $30°$ y $45°$.

En el cuadro 8 se presenta las principales identidades trigonométricas de ángulos compuestos para la suma y deferencia de senos y cosenos.

Cuadro 8. *Identidades para la suma y diferencia de dos ángulos*

Suma de dos ángulos	Diferencia de dos ángulos
$cos(u+v) = cosucosv - senusenv$	$cos(u-v) = cosucosv + senusenv$
$sen(u+v) = senucosv + cosusenv$	$sen(u-v) = senucosv - cosusenv$
$tan(u+v) = \dfrac{tanu + tanv}{1 - tanutanv}$	$tan(u-v) = \dfrac{tanu - tanv}{1 + tanutanv}$

Fuente: Adaptado de Swokowski (2009, p. 526)

2.2.7.3 Identidades trigonométricas de ángulos múltiples

En este grupo tenemos a las identidades del ángulo doble y triple, que son consecuencias inmediatas de las identidades de ángulos compuestos, cuadro 9.

Cuadro 9. *Identidades para el ángulo doble y triple*

Ángulo doble	Ángulo triple
$sen(2x) = 2senxcosx$	$sen(3x) = 3senx - 4sen^3x$
$cos(2x) = cos^2x - sen^2x$	$cos(3x) = 4cos^3x - 3cosx$
$tan(2x) = \dfrac{2tanx}{1 - tan^2x}$	$tan(3x) = \dfrac{3tanx - tan^3x}{1 - 3tan^2x}$

Fuente: Adaptado de Swokowski (2009, p. 534)

A partir de las identidades del ángulo doble se obtienen nuevas identidades conocidas como las identidades de degradación.

$$2sen^2x = 1 - cos2x \qquad 2cos^2x = 1 + cos2x$$

2.2.7.4 Transformaciones trigonométricas

Las identidades trigonométricas de transformación según Swokowski (2009) se usan con frecuencia en un proceso llamado integración dentro del cálculo. En el cuadro 10, se observan las identidades para transformar de sumas a productos y productos a sumas de senos y cosenos.

Cuadro 10. *Identidades de transformación.*

<table>
<tr><th>De suma a producto</th><th>De producto a suma</th></tr>
<tr><td>$cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$</td><td>$2cos\alpha cos\beta = cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)$</td></tr>
<tr><td>$cosA - cosB = -2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$</td><td>$2sen\alpha sen\beta = cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)$</td></tr>
<tr><td>$senA + senB = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$</td><td rowspan="2">$2sen\alpha cos\beta = sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)$</td></tr>
<tr><td>$senA - senB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Swokowski (2009, p. 544)

El seno y coseno como objetos matemáticos en sí viven dentro de las funciones trigonométricas, las mismas que son estudiadas dentro del análisis matemático. A continuación, definiremos ciertos conceptos relacionados a las funciones trigonométricas tomando como referencia los libros de *números y funciones reales* de Lima (2013) y Análisis Matemático 1 de Figueroa (2014), por ser libros de lectura oficial presente en la currícula de diversos cursos de matemática superior. Previamente, debemos hablar de otras funciones como la función longitud de arco.

2.2.8 Función longitud de arco

Definición 2.2.12. De acuerdo con Figueroa (2014) se denomina función longitud de arco a la correspondencia L que asocia a cada longitud de arco α un único punto $P(x, y) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$. Esto es:

$$L: \mathbb{R} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$$
$$\alpha \to (x, y)\,, x^2 + y^2 = 1$$

Denotamos por $\mathcal{C}$ a la circunferencia, que llamaremos circunferencia trigonométrica o unitaria. Tenemos por lo tanto $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Donde las coordenadas de todo punto en $\mathcal{C}$ están entre -1 y 1, es decir, si $(x,y) \in \mathcal{C}$, entonces $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$ (Lima, 2013).

A la función longitud, Lima (2013) lo denomina función de Euler $E: \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ (figura 37) la cual hace corresponder a todo número real t el punto (x,y) de $\mathcal{C}$, de manera que:

- Como $0 \in \mathbb{R}$ y coincide con el punto $A = (1,0)$ de $\mathcal{C}$, es decir, $E(0) = (1;0)$;
- Dado un número real t, los puntos de $\mathcal{C}$ se desplazan en el sentido positivo si $t > 0$ y en sentido negativo si $t < 0$, una longitud igual a t y $E(t)$ (Lima, 2013).

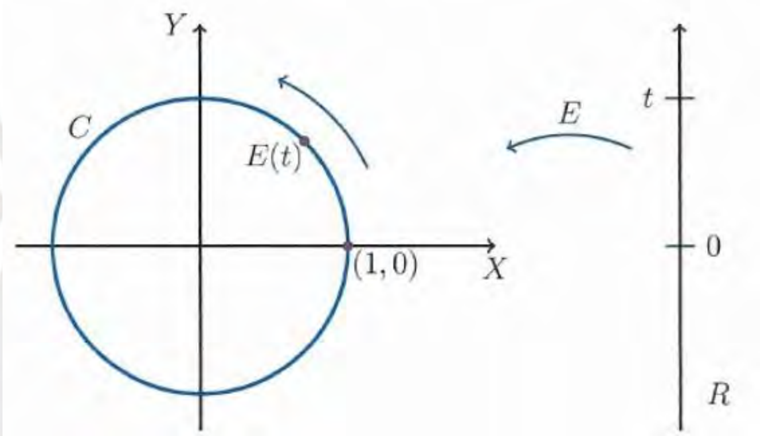


Figura 37. Función de Euler.
Fuente: Tomado de Lima (2013, p. 221)

2.2.9 Las funciones trigonométricas

Definición 2.2.13. Según Figueroa (2014) para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $cos\alpha$ y $sen\alpha$ son la primera y segunda coordenada de la función $P = L(\alpha)$, donde P es el punto cuya distancia al punto $P_0 = (1,0)$, a lo largo de la circunferencia $\mathcal{C}$, es igual a α, esto es: $(cos\alpha, sen\alpha) = L(\alpha), \forall\ \alpha\ \in \mathbb{R}$.

Entonces tenemos:

a) sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\alpha \to sen\alpha =$ Ordenada de $L(\alpha)$

a) cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\alpha \to cos\alpha =$ Abscisa de $L(\alpha)$

A partir de la función de Euler las funciones seno y coseno para cada $t \in \mathbb{R}$ quedarían definidas así $E(t) = (cost, sent)$, donde $x = cost$ y $y = sent$; es decir son la abscisa y la ordenada respectivamente del punto $E(t)$ de la circunferencia trigonométrica (Lima, 2013).

En la figura 38 se ilustra las definiciones anteriores para el seno y coseno respectivamente.

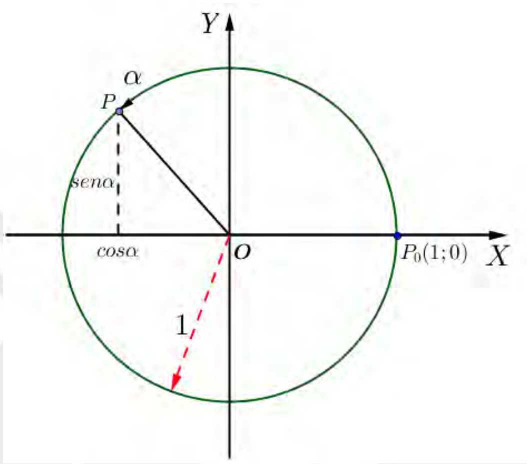


Figura 38. Definición del seno y coseno como funciones trigonométricas.
Fuente: Adaptado de Figueroa (2014, p. 116)

La correspondencia que existe entre los puntos de la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$, los extremos de los arcos α, y los puntos de plano $\mathbb{R}^2$ hace posible establecer, entre otras, algunas relaciones típicas de la trigonometría como las siguientes:

- Al ser $P(cos\alpha, sen\alpha) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$, se obtiene la identidad trigonométrica fundamental $cos^2\alpha + \ sen^2\alpha = 1$.
- Dado que P es un punto de la circunferencia trigonométrica, tanto su abscisa y su ordenada en el plano cartesiano varía entre -1 y 1.
- De $L(\ \alpha + 2n\pi) = L(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, se deduce inmediatamente que $cos(\ \alpha + 2n\pi) = cos\alpha$ y $sen(\ \alpha + 2n\pi) = sen\alpha$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

2.2.10 Función periódica

Definición 2.2.14. Según Lima (2013) una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si existe un número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si esto ocurre, entonces $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$. El menor número $T > 0$ tal que

$f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se denomina periodo de la función f. Las funciones trigonométricas seno y coseno son periodicas, de periodo 2π.

A continuación, vamos a desarrollar algunas definiciones sobre las funciones trigonométricas que aparecen en los textos del nivel superior como en el álgebra y trigonometría de Swokowski (2009).

2.2.11 Funciones trigonométricas de números reales

Definición 2.2.15. "El valor de una función trigonométrica de un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, siempre que exista ese valor" (Swokowski, 2009, p. 429). En la figura 39 podemos ver la interpretación geométrica que hace dicho autor y para lo cual utiliza una circunferencia trigonométrica U.

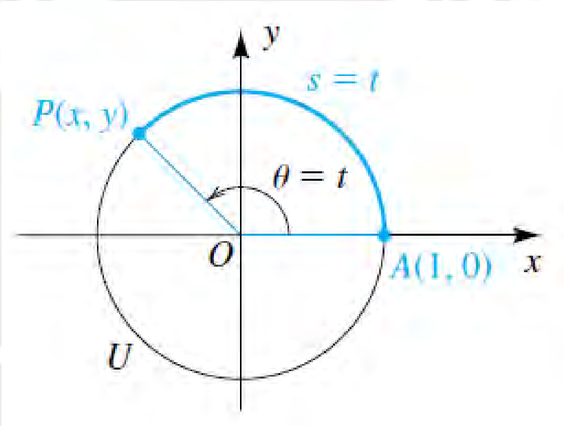


Figura 39. Funciones trigonométricas de números reales
Fuente: Tomado de Swokowski (2009, p. 429)

A partir del gráfico de la figura 39, se desprende lo que se puede apreciar en la figura 40, que si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces:

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Figura 40. Definición de las funciones trigonométricas.
Fuente: Tomado de Swokowski (2009, p. 430)

CAPITULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, exponemos y justificamos nuestras elecciones teóricas y metodológicas desde la TAD, que permitirán alcanzar los objetivos planteados.

3.1 Marco teórico

La didáctica de las matemáticas según Chevallard (2013) estudia la "tripleta didáctica" (X, Y, O), donde el primer elemento "X" puede ser una persona o un conjunto de estudiantes como en el caso de la educación secundaria, la segunda componente "Y" sería el profesor o el equipo de "ayudantes didácticos" a quienes corresponde enseñar la obra "O", es decir, cualquier cosa material o no, creada por la acción humana con cierta finalidad.

En la presente investigación nos centraremos en el tercer elemento (O) de dicha terna, ya que analizaremos algunos libros didácticos de la Educación Básica Regular.

3.1.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard es una evolución de la Teoría de la Transposición Didáctica y su estudio se enfoca en las organizaciones praxeológicas didácticas pensadas para la enseñanza y el aprendizaje de las organizaciones matemáticas (Almouloud, Santos y Henriques, 2018).

En la TAD se reconoce al quehacer matemático como parte de las actividades humanas relativas a una institución (Chevallard, 1999). Así, el término institución *I* hace referencia a una organización social, suficientemente estable, que dota de recursos humanos e intelectuales a los sujetos para enfrentar de forma eficaz tareas problemáticas. Según Chevallard, cuando una persona ocupa una posición en una institución, se convierte en sujeto activo de esa institución y contribuye a la vida de la institución por ser subordinado a ella.

En nuestra investigación, estas actividades humanas se refieren a las actividades matemáticas presentadas en los libros didácticos, en particular en el estudio del seno y coseno en el triángulo rectángulo y el plano cartesiano dentro de la institución Educación Secundaria.

Al considerar la actividad matemática como organizaciones praxeológicas surge la necesidad de construir Modelos Epistemológicos de Referencia (MER) para el estudio de dichas actividades. Al respecto, Lucas (2015) afirma lo siguiente:

> La TAD propone un *modelo epistemológico general* de la actividad matemática cuya noción clave es la de *praxeología*, de tal manera que todos los MER *específicos* de los diferentes ámbitos concretos de la actividad matemática deberán ser compatibles con dicho modelo epistemológico general. (p. 421)

Es decir, el análisis y el modelamiento de esas actividades matemáticas se llevan a cabo a través de sistemas denominados por Chevallard como organizaciones (o praxeologías) matemáticas que permite comprender, describir, analizar y modelar las actividades humanas.

La noción de praxeología matemática

Según Lucas (2015) a mediados de los años 90, Chevallard introdujo la noción de praxeologías u organizaciones matemáticas que es una de las nociones claves de la TAD, con la finalidad de hacer explícita y contrastable la modelización de la actividad matemática dentro de las diferentes instituciones sociales.

La praxeología, según Chevallard (2006b), es la unidad mínima de análisis de la actividad humana, la cual puede ser analizada en dos bloques inseparables como son la *praxis* y el *logos*. La *praxis* es la parte práctica de estas actividades humanas (matemáticas) y el *logos* o saber que se refiere al pensamiento y razonamiento que sustenta o justifica la praxis. Al respecto, Serrano (2013) manifiesta lo siguiente:

> La noción de *praxeología* o de *organización praxeológica*, constituye así una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática sin atribuirle ninguna especificidad particular, es decir, considerándola como una actividad humana más. Como toda obra humana, una praxeología surge como una respuesta a un conjunto de cuestiones y a la vez como un medio para realizar, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas. (p. 18)

Así, la praxis está relacionada con el “saber hacer”, y engloba los tipos de tareas (*T*), lo que se hace y la técnica (τ), la forma en que se hace; en cambio, el *logos* o saber, se corresponde con los aspectos descriptivos que organizan la actividad matemática, es decir tecnologías *(θ)* y teorías *(Θ)*, tal como se observa en la figura 41.

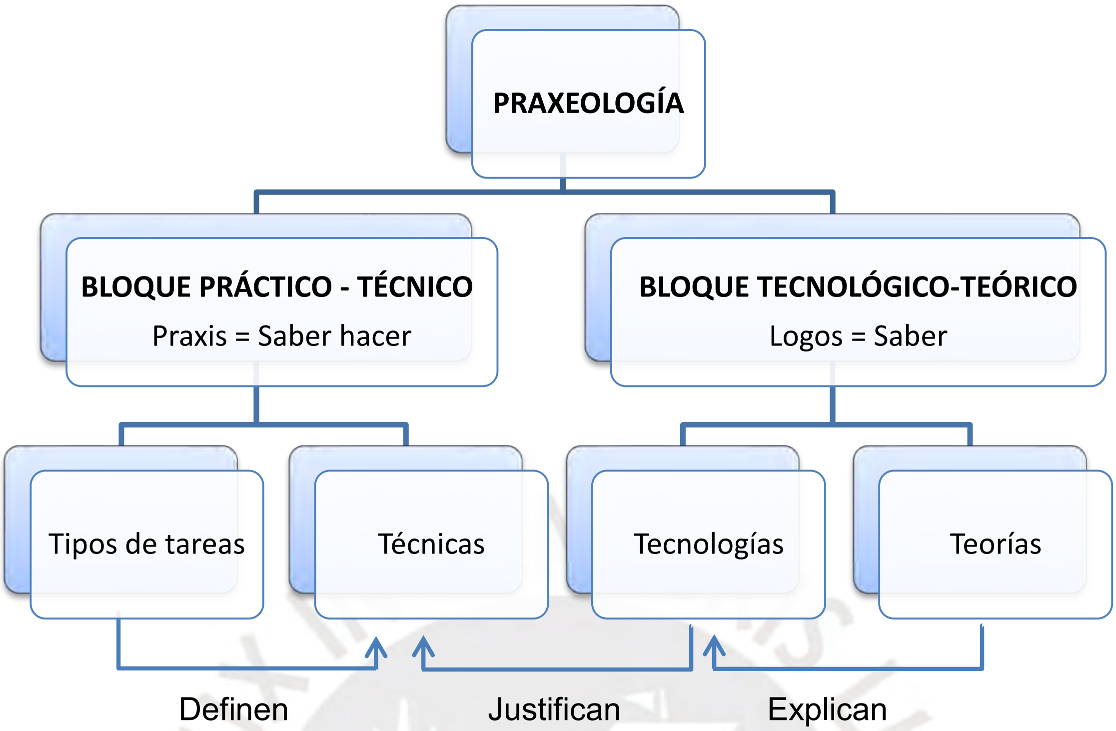


Figura 41. Organización Matemática
Fuente: Adaptado de Lérida (2013, p. 8)

El sistema formado por los *tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías*, constituye la unidad mínima de análisis de las organizaciones matemáticas. Estos elementos de la OM se representan simbólicamente como $\mathrm{P} = [T, \tau, \theta, \Theta]$, los cuales están fuertemente interrelacionados entre sí.

Elementos de la Organización Matemática

Una Organización Matemática (OM) engloba un tipo de tareas, que definen ciertas técnicas bajo ciertas tecnologías y que pertenecen a un determinado campo teórico del saber matemático.

Tipos de tareas (T)

Es el primer elemento de la praxis, que engloba las nociones de tareas (t), el tipo de tareas (T) y el género de tareas. Una tarea es una acción sobre un objeto particular, un tipo de tarea es la acción que recae sobre diversos tipos de objetos, y un género de tareas solo menciona la acción, por ejemplo: calcular, dividir, integrar.

Un género de tareas agrupa diferentes tipos de tareas. Durante el desarrollo del curso de trigonometría, por ejemplo, el género calcular se enriquece de nuevos tipos de tareas: en un primer momento se debe calcular el seno para ángulos agudos en un triángulo rectángulo, luego al calcular el seno de un ángulo en posición normal, y más adelante al calcular la variación del seno de un arco en la circunferencia trigonométrica. Si una tarea t pertenece a un tipo de tarea T entonces se escribe así $t \in T$. Por ejemplo el tipo de tarea T_1: determinar el valor del seno para un ángulo agudo, puede estar compuesto de varias tareas como:

t_{11}: Determinar el valor del seno de $30°$.

t_{12}: Determinar el valor del seno de $45°$.

t_{13}: Determinar el valor del seno de $75°$.

Técnicas (τ)

La técnica es una forma de hacer las tareas dentro de una institución. El bloque $[\mathrm{T}/\tau]$ se denomina práctico-técnico (saber hacer). Una técnica es un conjunto de procedimientos (no necesariamente un algoritmo) que permite tratar ciertas tareas, con ciertos dispositivos y medios (Castela, 2017).

En la figura 42, se presenta la resolución de la siguiente tarea t_{11}: Determinar el valor del $sen30°$.

En primer lugar, se construye un triángulo equilátero ABC, desde el vértice C se traza la altura "CH" relativa al lado AB, la cual se comporta como mediatriz y bisectriz. Por el teorema de Pitágoras obtenemos la longitud de la altura. Finalmente, en el triángulo ACH se calcula el seno de 30° usando la definición: $sen30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

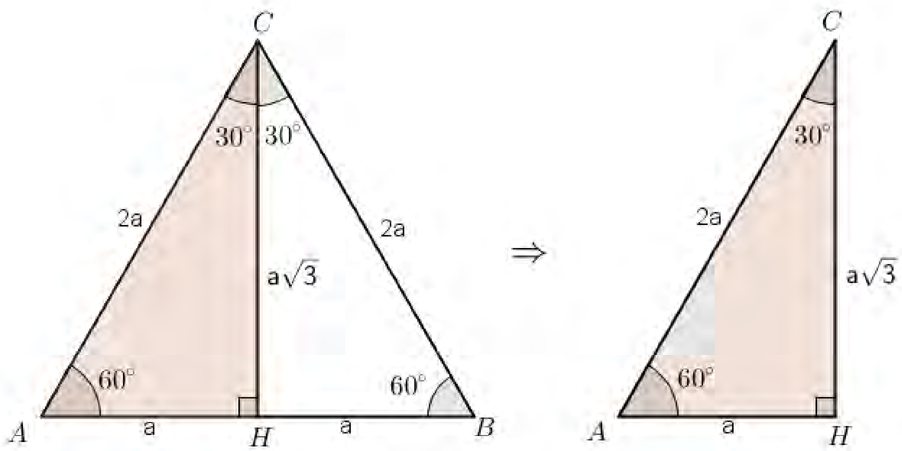


Figura 42. Resolución de la tarea t_{11}
Fuente: Elaboración propia

Dentro de las técnicas que resuelven a la tarea del ejemplo anterior tenemos a las siguientes, primero τ_1: las construcciones geométricas en el triángulo rectángulo, segundo τ_2: sustituir la longitud de la hipotenusa y del cateto adyacente en la relación pitagórica para encontrar la longitud del cateto opuesto, y tercero τ_3: reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo.

Tecnologías (θ)

Es el discurso racional que justifica y hace inteligible la técnica, garantizando la resolución de las tareas. En palabras de Serrano (2013), una tecnología relacionada a las técnicas "tiene la importante función de aportar elementos para desarrollarla, con la finalidad de ampliar su alcance, superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas" (p. 19).

Entonces se puede afirmar que la tecnología tiene varias funciones como las de justificar racionalmente las técnicas, la de explicar y hacer explicita la técnica, así como la producción de nuevas técnicas (Lucas, 2015).

En el caso de la tarea del ejemplo mostrado anteriormente, las tecnologías que justifican las técnicas son los polígonos regulares, el teorema de Pitágoras y definición de las razones trigonométricas.

Teorías (Θ)

La teoría (asociada a una tecnología) corresponde a un segundo nivel de justificación y explicación, y constituye el último nivel de justificación de la actividad matemática. Para nuestro ejemplo, la teoría en la cual se justifican las tecnologías son las construcciones geométricas y las razones trigonométricas.

Generalmente, en una institución (**I**), una teoría (Θ) justifica a varias tecnologías θ_j, cada una de estas tecnologías, a su vez, justifica y hace inteligible varias técnicas τ_{ij} correspondientes a tantos tipos de tareas T_{ij}.

Tipos de Organizaciones Matemáticas

Las organizaciones matemáticas, según el grado de complejidad creciente, pueden ser puntuales, locales, regionales y globales (Chevallard, 2000). Esta distinción entre los diferentes tipos de praxeologías permite tener herramientas más precisas para el análisis de los procesos matemáticos y didácticos (Chevallard, 2000).

- *Organizaciones Matemáticas Puntuales* (OMP). Generadas por un único *tipo de tareas* y definidas a partir del bloque práctico-técnico.
- *Organizaciones Matemáticas Locales* (OML). Es el resultado de combinar diversas OMP que poseen la misma tecnología, es decir $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$.
- *Organizaciones Matemáticas Regionales* (OMR). Son la coordinación, articulación y posterior integración, de diversas OML alrededor de una teoría común, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_i, \Theta]$.
- *Organizaciones Matemáticas Globales* (OMG). Surgen por la integración de varias praxeologías regionales $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$.

En la figura 43 se muestra la jerarquización entre estos cuatro tipos de organizaciones praxeológicas.

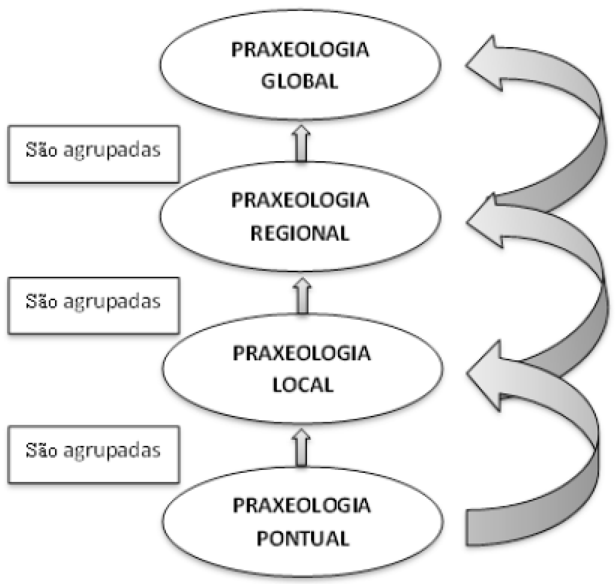


Figura 43. Estructuras de complejidad creciente
Fuente: Tomado de Ramalho (2016, p. 32)

En la propuesta del Modelo Praxeológico de Referencia para el estudio del seno y coseno en quinto de secundaria, una praxeología regional de acuerdo con Chevallard (2000) sería en torno a la semejanza de triángulos que a su vez estaría formada por otras praxeologías locales como: el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y la identidad trigonométrica fundamental.

3.1.2 Dimensiones fundamentales de un problema didáctico

En el análisis de la modelización matemática para un problema didáctico Gascón (2011) distingue tres dimensiones; la epistemológica, la ecológica y la económica. Dicho problema didáctico puede representarse mediante el siguiente esquema heurístico:

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

En este esquema, P_0 constituye una formulación inicial de un cierto problema docente, mientras que P_1, P_2 y P_3 representan las dimensiones mencionadas anteriormente. Cuando a la formulación inicial P_0 se le agrega como mínimo la dimensión epistemológica P_1, lo cual se simboliza mediante $P_0 \oplus P_1$, entonces se tiene un problema didáctico como tal. La secuencialidad entre las dimensiones es indicada por el símbolo$\hookrightarrow$, que no debe ser interpretado como una inclusión.

Finalmente, un problema didáctico puede ser representado por P_δ.

Un problema didáctico encierra en un primer momento una formulación inicial P_0, que al ser incompleta requiere de otras dimensiones como las epistémicas, la ecológica y la económica.

Problemas docentes

Los denominados problemas docentes son los que el profesor se plantea cuando tiene que enseñar un cierto contenido matemático a sus estudiantes (Gascón, 2011). Dichos problemas docentes en el caso de la EBR en el Perú, se formulan con las nociones disponibles en el currículo por competencias.

Un problema docente genérico sería el siguiente:

> P_0 : ¿Qué tengo que enseñar a mis estudiantes en relación a las nociones trigonométricas seno y coseno y cómo se debe hacer?

Una formulación más específica; por ejemplo, para la modelización matemática lo encontramos en Barquero, Boch y Gascón (2013) cuando se plantean la siguiente interrogante: ¿Cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización, de tal forma que los contenidos matemáticos se organicen con base en los problemas que se deben resolver y a los proyectos que los estudiantes deben realizar?

Según Barquero et al. (2013), para que un problema docente genérico como P_0 sea formulado como un problema didáctico dentro de la TAD, es necesario empezar por cuestionar el Modelo Dominante de las instituciones escolares, del sistema educativo y hasta de las investigaciones en Educación Matemática.

En la TAD para que un problema didáctico sea considerado como tal se debe hacer explícita al menos su dimensión epistemológica.

Dimensión epistemológica

En la formulación de un problema didáctico, como lo afirman Barquero, Boch y Gascón (2013), el investigador en educación matemática siempre utiliza una descripción y una interpretación; es decir, un MER del ámbito matemático que se está analizando.

Gascón (2011) afirma que "el MER también es necesario para estudiar el saber matemático antes de que se transforme para ser enseñado" (p. 209). En consecuencia, no solo se podrá dar cuenta de la forma en que se interpretan las funciones trigonométricas, la trigonometría o la geometría dentro del sistema de enseñanza, sino también del porqué de la existencia de ciertos objetos matemáticos y no de otros.

El MER en una investigación didáctica debe ser explícito, ya que condicionará la amplitud del ámbito de las matemáticas, los fenómenos didácticos que pueden ser observados por el investigador, los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear y sus posibles explicaciones.

Las cuestiones que conforman a la dimensión epistemológica según Gascón (2011) son:

a) ¿Qué es el conocimiento matemático? Esto es, ¿Cómo se interpreta y cómo se describe el conocimiento matemático? ¿Cuáles son sus componentes y cómo se estructuran?

b) ¿Cómo pueden modelizarse, desde la posición del didacta, los conocimientos matemáticos (modelo epistemológico general) y cada uno de los ámbitos de la actividad matemática (modelos epistemológicos específicos)?

c) ¿Cuál es su razón de ser? Esto es, ¿Cuáles son las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que responde cada uno de los ámbitos de la actividad matemática?

d) ¿Qué se entiende por hacer matemáticas y por adquirir, comunicar, aprender, enseñar o explicar los conocimientos matemáticos?

e) ¿Cómo se generan y cómo se desarrollan los conocimientos matemáticos?

f) ¿Cuál es la amplitud del ámbito matemático más adecuada para plantear un problema didáctico determinado? (p. 210)

Dimensión económica

La dimensión económica plantea ciertas preguntas relacionadas con el resultado que ha producido la acción de *la transposición didáctica* (ver figura 44) en las diferentes praxeologías.

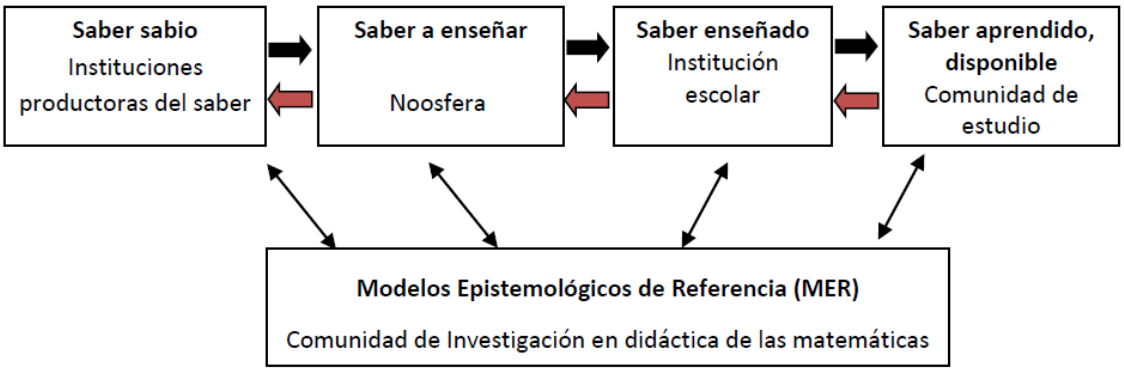


Figura 44. Etapas de la transposición didáctica.
Fuente: Tomado de Barquero, Boch y Gascón (2013, p. 16)

La teoría de la transposición didáctica considera diferentes tipos de saberes que son parte del objeto de estudio de la didáctica; por ejemplo, el "saber sabio" que es producido por los matemáticos, el "saber a enseñar" presente en los documentos curriculares y libros didácticos, el "saber enseñado" tal como es realmente llevado al aula de clase por los profesores, y por último el "saber aprendido" que los alumnos disponen al final de los procesos de enseñanza-aprendizaje (Lucas, 2015).

Estas nociones sobre los diferentes saberes permiten poner en evidencia las brechas que existen entre el saber matemático sabio y la porción del saber matemático que se propone para ser estudiada en las diferentes instituciones;

también evidencian la distancia entre lo que se tiene que enseñar y lo que realmente se logra implementar en las aulas de clase.

Dimensión ecológica

La dimensión ecológica gira en torno a la siguiente cuestión: ¿Por qué las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirán para que fuesen de otra forma dentro del universo posible? (Gascón 2011, p. 217)

Chevallard (2002a, 2013a), introduce los *niveles de codeterminación didáctica* (ver figura 45), para analizar las condiciones ecológicas que permiten la existencia de ciertos objetos y actividades dentro de la escuela.

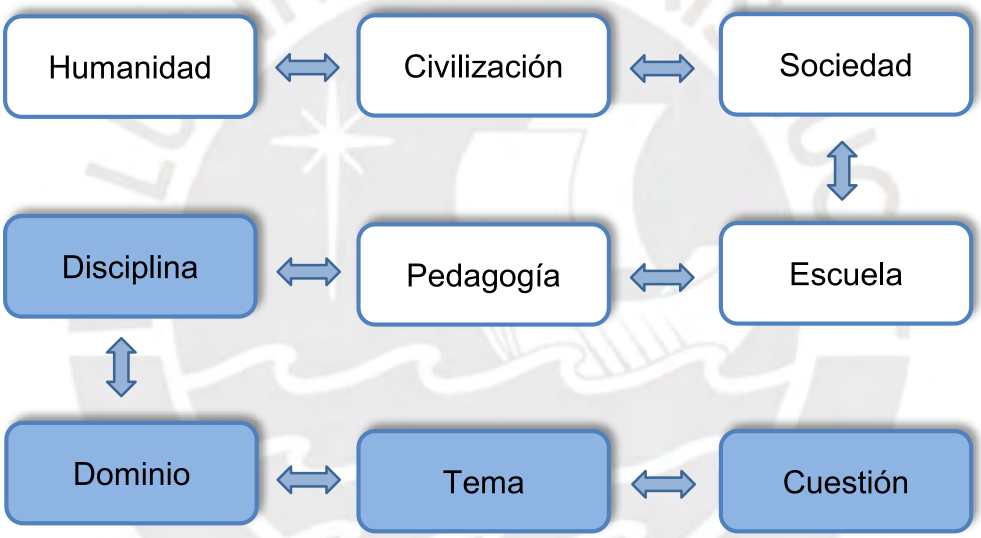


Figura 45. Escala de los niveles de codeterminación
Fuente: Adaptado de Chevallard (2002, p. 12)

En el nivel inferior de esta jerarquización encontramos a las cuestiones matemáticas y que forman parte de OMP; es decir, tareas que se trabajan bajo la misma técnica. Las cuestiones pasan a formar parte de un tema, de modo que estas cuestiones se trabajan bajo una misma tecnología; es decir, forman una OML. Los dominios, que agrupan diferentes temas bajo una misma teoría vienen a ser las OMR, que a su vez forman parte de un área (OMG). La agrupación de todas las OMG forman la llamada disciplina que en este caso serían las matemáticas.

Los niveles de codeterminación didáctica también son una herramienta útil para el análisis de procesos transpositivos como son los libros de texto, ya que permite observar el recorrido de los contenidos matemáticos.

Los momentos didácticos

Chevallard (1999) postula seis momentos didácticos para el análisis de una organización didáctica. Estos momentos pueden descritos bajo los siguientes rótulos: del primer encuentro, de la exploración, del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el de la institucionalización y último momento, que cierra el ciclo, que es la evaluación.

A continuación, se describe los seis momentos con base en Chevallard (1999):

El primer momento se refiere al primer encuentro con la organización matemática que será construida y modificada durante el proceso de estudio. Este encuentro puede suceder de diferentes maneras; en general, el primer momento no tiene la intención de explorar a profundidad el objeto matemático en estudio, eso se hará en los otros momentos de estudio. Este primer encuentro con una tarea problemática puede darse varias veces; es decir, estos momentos no son lineales.

El segundo momento consiste en la exploración de las tareas problemáticas y el inicio de la búsqueda de las formas de resolución; es decir, las técnicas. El centro de la actividad matemática pasaría a ser entonces la elaboración de técnicas y no la resolución de problemas aislados como se acostumbra hacer tradicionalmente. El estudio y la resolución de una tarea problemática genera al menos un embrión de técnica. Los problemas deberían buscar entonces que las técnicas se vuelvan cada vez más sofisticadas y con un mayor grado de alcance.

El tercer momento es la *constitución del entorno tecnológico-teórico*, relativo al trabajo con la técnica. En general, este momento está muy relacionado con los demás momentos. Desde el primer encuentro con una tarea problemática, existen elementos del entorno tecnológico-teórico siendo construidos. Es muy común que las direcciones de estudios tradicionales inicien su primera etapa de estudio con definiciones, axiomas, teoremas y postulados matemáticos aquí en este tercer momento, lo que puede caracterizar el abordaje didáctico como una secuencia de aplicación del bloque tecnológico-teórico.

El cuarto momento está reservado para el trabajo con la técnica, en el sentido de mejorarla y hacerla cada vez más eficaz, confiable y valorar los conocimientos que se tienen de ella, en el intento de realizar una tarea. Este es el momento de poner en prueba la técnica en uno o más tipos de tareas problemáticas, adecuados tanto cuantitativamente como cualitativamente. Esto es, esas tareas deben probar la técnica en diferentes momentos de estudio y en una diversidad de tipos de tareas, determinando la precisión y el alcance de la técnica, implicando o no el surgimiento de una nueva técnica.

El quinto momento está dedicado a la institucionalización de los objetos matemáticos que formarán parte de la organización matemática. En algunas praxeologías, ese momento ocurre articulado con el momento de la exploración del tipo de tareas y la elaboración de la técnica. Es el caso cuando la técnica se presenta con los elementos que la justifican. En general, el quinto momento ocurre cuando los conocimientos son oficializados de acuerdo con la institución en que se desarrolló la actividad. Así, este momento tiene por finalidad formalizar el conocimiento matemático en juego y que será parte del tema estudiado; así como, de los elementos que formarán parte de la organización matemática y de los que no son necesarios.

El sexto momento está relacionado con la evaluación de la praxeología que se articula con el quinto momento. Se caracteriza como un momento de reflexión de todo lo que se ha estudiado; se trata de hacer un balance sobre lo aprendido.

De acuerdo con Chevallard (1999), estos momentos no siguen un orden predeterminado; es decir, se da de forma helicoidal, pues ocurren repetidas veces y también de forma articulada, haciendo que no sea fácil precisar cuándo termina uno y cuándo inicia el otro; porque incluso pueden coincidir. Por ejemplo, podemos observar el primer momento coincidiendo con el tercero cuando el estudio de un determinado tema se inicia por medio de un enfoque axiomático.

La comprensión de cómo ocurren estos momentos y su identificación son fundamentales para el análisis de la organización didáctica.

3.2 Metodología y procedimiento

Las interacciones humanas, en la actualidad, son mucho más complejas debido a sus múltiples aristas, dando lugar a nuevos procedimientos metodológicos, como las metodologías cualitativas. Según Taylor y Bogdan (1987) una investigación que produce datos descriptivos; por ejemplo, las propias palabras de las personas, ya sean habladas o escritas, presentando una conducta observable es un indicador que se ha utilizado una metodología cualitativa.

El carácter poliédrico de las realidades humanas, al tener muchas caras, solo nos permite captar algunas de ellas. Por esta razón "la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones" (Martínez, 2006, p.128). El investigador cualitativo inicia su trabajo examinando el entorno social; es decir, con una recolección de información, luego procede con una sistematización de dicha información y finalmente con su interpretación.

La metodología para la presente investigación es el enfoque cualitativo y esta nos servirá de guía para alcanzar los objetivos planteados. En el desarrollo del trabajo, también se describen y analizan las Organizaciones Matemáticas propuestas en los libros de texto de la EBR referentes al estudio del seno y coseno. En este enfoque se considera relevante la forma como las personas perciben la realidad; cuando se analicen las tareas propuestas en los textos de la EBR y se propongan otras que complementen a las ya elaboradas, nos colocaremos en el lugar del estudiante y luego en el lugar del profesor.

Por otra parte, al trabajar con materiales ya elaborados, como los libros de texto y trabajos realizados en educación matemática; la investigación también se considera de corte bibliográfico. Al respecto, Fiorentini y Lorenzato (2006) señalan que la investigación bibliográfica se basa en la observación de las prácticas institucionales y en el análisis de documentos, como currículos, libros didácticos, materiales de consulta para profesores, materiales didácticos entre otros. Teniendo en cuenta lo anterior, y que se trabaja con algunos documentos curriculares como el CNEB (2016) y los libros de matemáticas para quinto de secundaria, utilizaremos algunos elementos propios de la TAD para el análisis de las praxeologías matemáticas relacionadas al estudio de seno y coseno en dichos materiales.

En el análisis de los libros de texto se toma como base la metodología elaborada por Chaachoua (2014) quien considera que los libros de texto son la fuente principal para analizar las cuestiones ecológicas y praxeológicas de las organizaciones matemáticas. Dicha metodología, que se explica a continuación, a su vez ha sido implementada y organizada por otros investigadores como Almouloud (2015) y Bittar (2017) quienes también nos servirán como referencia.

Chaachoua (2014) propone algunos elementos para el análisis de los libros de texto como son: el momento de publicación del libro didáctico, la representatividad de la obra, la estructura del libro, el análisis ecológico y el análisis praxeológico.

El momento de publicación del libro didáctico

Chaachoua (2014) afirma que debemos ver la enseñanza como un sistema dinámico, donde cada currículo define un estado de referencia para su funcionamiento.

La representatividad de la obra

En países donde existen diversos libros de texto, es importante proceder con la elección de uno o varios manuales y que sean lo más utilizados por el profesor (Almouloud, 2015). En nuestro trabajo tomaremos como libro de referencia el texto entregado por el Ministerio de Educación a los colegios del estado y otro texto que es trabajado en instituciones particulares.

La estructura del libro

El análisis de la estructura del manual nos da indicios sobre el lugar otorgado a las actividades, la presencia o no de ejercicios resueltos y comentarios eventuales de los autores (Chaachoua, 2014).

El análisis ecológico

Este análisis es organizado con base en dos conceptos: el hábitat, que significa donde se encuentra el objeto matemático y el nicho, que es la función que cumple ese objeto dentro del sistema de objetos.

Al respecto Almouloud (2015) señala que este análisis ecológico debe responder a ciertas cuestiones como: “¿El saber es parte de las recomendaciones curriculares para la educación básica? ¿Está presente en los libros didácticos? ¿Cómo se presenta y con qué finalidad?" (p.15). Si es trabajado con efectividad en la escuela, ¿bajo qué condiciones se realiza?, si no es así, ¿cuáles son los motivos que hacen que el objeto de saber se deje de lado?

El análisis praxeológico

En el análisis praxeológico se identifican los elementos de las organizaciones matemáticas asociadas al objeto matemático en estudio (Almouloud, 2015). En el caso de los libros didácticos, el análisis radica por lo general en identificar organizaciones matemáticas puntuales y locales.

El análisis de los libros didácticos según Almouloud (2015) se organiza a menudo bajo las siguientes etiquetas:

- **Identificación de los tipos de tareas:** Se analizan los ejemplos y las actividades del curso, los cuales pueden estar presentados como problemas resueltos o propuestos, estos a su vez permiten identificar en lugar que se les asigna dentro de la institución. La parte de "problemas" permite identificar el conjunto de todos los tipos de tareas.
- **Identificación de técnicas:** Una vez identificado las tareas, se procede a describir las técnicas que permiten resolver dichas tareas, considerando los problemas resueltos.
- **Identificación de tecnologías:** Se construye el bloque tecnológico a partir de la justificación teórica propuesta por los autores del texto.

Evaluación de las tareas, técnicas y tecnologías

Para la evaluación de las tareas Chevallard (1999) propone ciertos criterios explícitos tales como: el criterio de identificación, el criterio de las razones de ser y el criterio de la pertinencia. Estos criterios buscan verificar si los tipos de tareas están bien definidos, son representativos, correctamente explicitados y están acorde a las nuevas exigencias institucionales.

Las técnicas son evaluadas bajo los mismos criterios mencionados en los tipos de tareas. Además, las técnicas propuestas deben dar respuesta a ciertas cuestiones como: ¿Son elaboradas de forma eficiente, o solamente se mencionan? ¿Su rigurosidad es aceptable dadas unas ciertas condiciones de uso? ¿Son fáciles de comprender? (Chevallard, 1999).

Finalmente, la evaluación del bloque tecnológico-teórico según Chevallard (1999) debe responder a ciertas preguntas: ¿Las formas de justificación empleadas son justificaciones matemáticamente válidas?, ¿Se adaptan al problema planteado?, y ¿Los argumentos utilizados son científicamente válidos?

La evaluación de una praxeología matemática, es el punto de convergencia para la didáctica en las matemáticas y uno de motivos del avance y desarrollo de las investigaciones didácticas (Chevallard, 1999).

3.3 Modelo Praxeológico de Referencia

Según Serrano (2013) para poder observar, describir y analizar las praxeologías matemáticas se necesita un MER. En la presente investigación, a dicho modelo de referencia se le denomina Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) en consonancia con Gascón (2014) quien afirma que la evolución del MER son los MPR.

En esta misma línea, García y Sierra (2015) afirman que un MPR es un modelo teórico básico que el investigador debe construir para analizar la transposición didáctica; es decir, la transición y evolución de los saberes matemáticos. Este MPR es de carácter provisional y sirve como instrumento para deconstruir y reconstruir las praxeologías que se pretende analizar. Es decir, estos modelos constituyen hipótesis de trabajo y por lo tanto deben ser revisados y contrastados constantemente.

El didacta debe reflexionar y realizar su propia descripción del saber matemático, cuando se enfrenta a problemas que involucran un contenido matemático específico y justificar por qué serán estudiados ciertos objetos matemáticos y otros no, como las nociones trigonométricas seno y coseno en nuestro caso. En palabras de Serrano (2013) “este modelo tendría que tomar la forma de una arborescencia de praxeologías y de cuestiones problemáticas a las cuales estas praxeologías aportan una respuesta (parcial y progresiva)”. (p. 212).

De lo anterior se desprende, que las praxeologías se van ampliando generando posibles respuestas a nuevas cuestiones problemáticas. Cuando una técnica se vuelve obsoleta o muy costosa para resolver ciertas tareas, entonces emergen otras técnicas justificadas por un nuevo bloque tecnológico-teórico; constituyéndose así, una nueva OM.

Esta explicitación del MPR se completa con una descripción de su reconstrucción institucional para lo cual es necesario especificar los medios disponibles con los que se cuenta o se tendría que disponer, para la elaboración de las respuestas a las cuestiones (Serrano, 2013).

Los problemas didácticos relativos a procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, generan cuestiones relativas a la interpretación de la matemática en juego. Por ejemplo: ¿Qué es la trigonometría plana? ¿Para qué sirven las funciones trigonométricas? ¿Qué relación tienen la semejanza de triángulos con la trigonometría? ¿Qué papel juegan las nociones trigonométricas seno y coseno en la educación básica regular?, etc. Estas cuestiones se responden de manera más o menos explícitas por las distintas instituciones que intervienen en estos procesos didácticos.

Además, Serrano (2013) postula:

> El MER no toma en consideración la idiosincrasia de las personas ni las condiciones particulares que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión. Tampoco incluye de forma explícita las actividades concretas que se deberán implementar para estudiar este contenido por parte de los alumnos, aunque sí delimita las cuestiones que dan una *razón de ser* a este contenido (en una institución determinada) y la manera cómo este se conforma y evoluciona para dar respuesta a distintos tipos de problemas. El MER es únicamente un «esqueleto matemático» que, como hemos dicho, toma la forma de una arborescencia de praxeologías matemáticas. (p.36)

En consonancia con lo anterior, el MPR propuesto en el siguiente trabajo se desarrolla como una red de praxeologías que responden a ciertas cuestiones ($Q_1, Q_{2,} \dots, Q_5$), que a su vez pueden generar otras cuestiones ($Q_{11}, Q_{21,} \dots, Q_{56}$), en términos de tipos de tareas y tareas.

Chaachoua, Ferraton y Desmoulins (2017) manifiestan que la construcción de un MPR se compone de varias etapas: identificación de una OM a enseñar a partir de los programas oficiales como currículos y libros de texto, el estudio epistemológico del objeto matemático, la descripción del MPR y su reconstrucción y; por último, la validación mediante la confrontación de datos empíricos mediante el modelo. En el desarrollo de la presente investigación se toma como referencia esta propuesta metodológica y también los trabajos de Quijano (2015) y Martín (2015) quienes construyen Modelos Praxeológicos para el estudio de la geometría y los fractales respectivamente. Dichos modelos se construyen con base en Organizaciones Matemáticas Puntuales (OMP), a partir de las cuales se pueden construir Organizaciones Matemáticas Locales (OML).

CAPITULO IV: ANÁLISIS DE LOS LIBROS DIDÁCTICOS

En el presente capítulo, se realiza el análisis de dos libros de texto según la metodología propuesta por Chaachoua (2014), y a partir del análisis praxeológico de dichos libros, se identifica el Modelo Epistemológico Dominante.

4.1 El momento de publicación de los libros didácticos

Según Guadalupe (2017) en las últimas décadas el sistema educativo peruano ha experimentado una serie de reformas, como por ejemplo el Programa de Mejoramiento de la Calidad Educativa (MECEP) que se emprende en 1994, la Ley General de Educación 28044 (2003) y la aprobación del Proyecto Educativo Nacional al 2021 del año 2007.

El MECEP tuvo como objetivos centrales: mejorar la calidad de los procesos de aprendizaje, modernizar la administración educativa e invertir en infraestructura educativa. En el primer objetivo se encuentran subcomponentes como la consolidación curricular, materiales educativos y capacitación docente (Eguren, Belaunde y González, 2004). La presente investigación se centra en los libros de texto que estarían enmarcados dentro de los llamados materiales educativos.

Dentro de la consolidación curricular por ejemplo estaba la implantación de un nuevo currículo por competencias y ya no por objetivos. En cuanto a los materiales educativos, en el año 1996 se empieza a dotar de libros de texto a los colegios del estado.

4.2 La representatividad de la obra

En el Perú existen una gran variedad de libros de texto para la enseñanza de las matemáticas en quinto de secundaria, estas colecciones por lo general constan de dos libros, uno de consulta y otro denominado cuaderno de actividades o de trabajo. Dichos manuales están registrados en el Observatorio Nacional de Textos Escolares (OBNATE) que es el sistema aplicativo, a cargo del Ministerio de Educación, encargado de brindar información relativa sobre los textos escolares que se comercializan en el país. En el cuadro 11 se presentan las publicaciones registradas en la OBNATE en los dos últimos años.

Cuadro 11. *Colección de libros de textos registrados en el Ministerio de Educación*

Título	Autor	Editorial	Edición
Matemática secundaria V	Erlita Ojeda Zañartu	Ediciones Corefo S.A.C.	2018
Matemática	Alfonso Rojas Puémape	ETM	2018
Construye Matemática 5	Varios	Editorial Norma	2017
Matemática Vital 5	Asociación Fondo de Investigadores y Editores	Lumbreras editores	2017
Matemática 5	Varios	Santillana	2016

Fuente: Perú, Ministerio de Educación.

En la presente investigación para el análisis praxeológico y didáctico se tomará como referencia dos libros de textos. La primera pertenece a la colección Matemáticas 5 de la editorial Santillana y que son entregados por el ministerio de Educación a los colegios del estado de forma gratuita y la segunda pertenece a la colección Matemática vital 5 de la editorial Lumbreras.

Para la elección de dichos textos se tiene en cuenta algunos criterios; por ejemplo, el primero de ellos, Matemática 5, es uno de los más usados en las escuelas públicas del Perú y el segundo, Matemática vital 5, por ser un texto que se acerca más a nuestra propuesta, es decir presenta una organización matemática más completa.

4.3 La estructura del libro

Los libros de texto escogidos para nuestro análisis praxeológico pertenecen a dos colecciones. La primera colección titulada Matemática 5 (L_1) de la editorial Santillana (2016) está organizado en 12 capítulos, y cada capítulo en temas.

En el capítulo ocho titulado trigonometría (ver cuadro 12) del libro de consulta encontramos los siguientes temas:

Cuadro 12. *Sección analizada del texto Matemática 5*

Capítulo	Título del capítulo	Temas
8	Trigonometría	Razones trigonométricas de ángulos agudos. Razones trigonométricas de ángulos notables. Razones trigonométricas de un ángulo cualesquiera. Razones trigonométricas de ángulos

		complementarios y suplementarios. Funciones trigonométricas seno y coseno. Análisis de funciones senoidales y cosenoidales.

En el cuadro mostrado se observa que en el tránsito de las razones trigonométricas a las funciones no toma en cuenta temas que son de carácter articulador como son la circunferencia trigonométrica y las identidades trigonométricas.

En cambio en el libro de texto Matemática vital 5 (L_2) los contenidos de trigonometría aparecen en las unidades cuatro, cinco y seis y comprenden los temas que se muestran en el cuadro 13.

Cuadro 13. *Sección analizada del libro Matemática vital 5*

Unidad	Título de la unidad	Temas
4	Introducción a la trigonometría	Sistemas de medidas angulares. Razones trigonométricas de ángulos agudos. Razones trigonométricas de ángulos notables. Ángulos verticales. Resolución de triángulos rectángulos.
5	Razones trigonométricas en el plano cartesiano	Introducción a la geometría analítica. Ecuación de la recta. Ecuación de la circunferencia. Ecuación de la parábola. Ángulo en posición normal y sus razones trigonométricas. Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales.
6	Funciones trigonométricas y sus aplicaciones	Identidades trigonométricas fundamentales y auxiliares. Identidades de ángulos compuestos. Circunferencia trigonométrica: seno y coseno. Problemas con áreas e intervalos. Funciones trigonométricas. Representación gráfica de las funciones seno y coseno por tabulación.

Ambos libros de texto consideran temas de acuerdo a lo establecido por el CNEB (2016); sin embargo, el texto de Matemática vital 5 presenta otros temas que consideramos son transversales y de carácter articulador como por ejemplo las identidades trigonométricas.

4.4 Estudio ecológico didáctico sobre el seno y coseno

En esta sección se realiza el estudio ecológico didáctico del objeto matemático seno y coseno con la finalidad de comprender como este contenido se configura en sistema educativo peruano.

El seno y coseno en una problemática ecológica

La problemática ecológica según Artaud (1998) es un medio que permite cuestionar lo real, es decir discutir ciertas cuestiones como: ¿El seno y coseno forman parte del currículo para la Educación Básica Regular?, ¿Están presentes en los libros de texto?, ¿Esta el contenido efectivamente trabajado en quinto de secundaria?

Las nociones trigonométricas del seno y coseno si forman parte de los contenidos de matemáticas para ser enseñados en la EBR y están contemplados en el CNEB (2016) que fue modificado en el 2015. Sin embargo, consideramos que su desarrollo temático es muy escaso sobre todo en el libro de texto que se reparte a los colegios del estado, donde por ejemplo no se trabajan praxeologías articuladoras como las identidades trigonométricas.

4.5 Análisis praxeológico del libro de texto

En esta sección se presenta el análisis de las tareas, las mismas que han sido agrupadas por su género (G^x) y subdivididas en tipos de tareas (T_i^x) y tareas $\left(t_{ij}^x\right)$ específicas. También se estudia el trabajo con las técnicas y el desarrollo de los bloques tecnológico-teórico de las organizaciones didácticas y matemáticas de los libros de texto analizados.

Género de tareas (G^x)

En el cuadro 14 se presenta los géneros de tareas encontradas en los libros de texto analizados:

Cuadro 14. *Descripción de los géneros de tareas*

G^1	Calcular
G^2	Determinar
G^3	Hallar
G^4	Representar
G^5	Graficar
G^6	Expresar
G^7	Analizar
G^8	Simplificar
G^9	Escribir
G^{10}	Clasificar

Fuente: Elaboración propia

Tipos de tareas (T_i^x) y tareas (t_{ij}^x)

En esta sección se presenta los tipos de tareas y las tareas que corresponden al estudio del seno y coseno agrupados en tres grandes bloques como son el triángulo rectángulo, la circunferencia trigonométrica y las funciones trigonométricas.

En el cuadro 15 se presentan los tipos de tareas y tareas pertenecientes a la organización matemática del triángulo rectángulo.

Cuadro 15. *Descripción de los tipos de tareas y tareas a priori en el triángulo rectángulo*

Género (G^x)	Tipos de tareas (T_i^x)	Tareas (t_{ij}^x)
G^1	T_1^1: Calcular la longitud de los lados del triángulo rectángulo.	t_{11}^1: Calcular la longitud del cateto opuesto a un ángulo, dada la longitud de la hipotenusa y del cateto adyacente. t_{12}^1: Calcular la longitud del cateto adyacente a un ángulo, dada la longitud de la hipotenusa y del cateto opuesto. t_{13}^1: Calcular la longitud de la hipotenusa, dada la longitud de los catetos. t_{14}^1: Calcular la longitud de la hipotenusa en función del ángulo agudo y su cateto adyacente. t_{15}^1: Calcular la longitud de la hipotenusa en función del ángulo agudo y su cateto opuesto. t_{16}^1: Calcular la medida del cateto adyacente a

		un ángulo, dada la medida de la hipotenusa y de ese ángulo. t_{17}^{1}: Calcular la medida del cateto adyacente a un ángulo, dada la medida del cateto opuesto y de ese ángulo t_{18}^{1}: Calcular la medida del cateto opuesto a un ángulo, dada la medida de la hipotenusa y de ese ángulo. t_{19}^{1}: Calcular la medida del cateto opuesto a un ángulo, dada la medida del cateto adyacente y de ese ángulo. t_{110}^{1}: Calcular los lados de un triángulo rectángulo cuando éstos están en función de una constante.
	T_2^1: Calcular el valor de una razón trigonométrica.	t_{21}^{1}: Calcular el valor del seno de un ángulo, dada la medida del cateto opuesto, y la longitud de la hipotenusa. t_{22}^{1}: Calcular el valor del seno de un ángulo, dada la medida del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa. t_{23}^{1}: Calcular el valor del seno de un ángulo, dados los catetos. t_{24}^{1}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dada la medida del cateto adyacente, y la longitud de la hipotenusa. t_{25}^{1}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dada la medida del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa. t_{26}^{1}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dados los catetos.
	T_3^1: Calcular la medida de un ángulo.	t_{31}^{1}: Calcular la medida de un ángulo en función de los catetos t_{32}^{1}: Calcular la medida de un ángulo en función de uno de los catetos y de la longitud de la hipotenusa. t_{33}^{1}: Calcular la medida de un ángulo cuando se trabaja con triángulos notables.
	T_4^1: Calcular la medida del lado del polígono.	t_{41}^{1}: Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo cuando se conoce una razón trigonométrica. t_{42}^{1}: Calcular el perímetro de un rectángulo a partir de la razón entre la diagonal y uno de sus lados.
	T_5^1: Calcular el área de las regiones planas.	t_{51}^{1}: Calcular el área de un triángulo rectángulo cuando se conoce una razón trigonométrica y su perímetro.
	T_6^1: Calcular el valor de una	t_{61}^{1}: Calcular el valor de una expresión matemática cuando se tienen como datos los

	expresión matemática.	lados y los ángulos del triángulo rectángulo. t_{62}^{1}: Calcular el valor de una expresión a partir de los datos de un gráfico.
$\boldsymbol{G^2}$	T_1^2**:** Determinar el valor del seno.	t_{11}^{2}: Determinar el valor del seno 30°. t_{12}^{2}: Determinar el valor del seno 45°. t_{13}^{2}: Determinar el valor del seno 75°.
	T_2^2**:** Determinar el valor del coseno.	t_{21}^{2}: Determinar el valor del coseno 30°. t_{22}^{2}: Determinar el valor del coseno 45°. t_{23}^{2}: Determinar el valor del coseno 75°.
$\boldsymbol{G^3}$	T_1^3**:** Hallar la longitud.	t_{31}^{3}: Hallar la longitud de una escalera apoyada a una pared. t_{32}^{3}: Hallar la longitud de una pared en función de una escalera que se encuentra apoyada sobre ella y el ángulo que forma con el piso.

Fuente: Elaboración propia

A continuación, en la figura 46 se ilustra una de las tareas del género calcular, descrito en el cuadro 15.

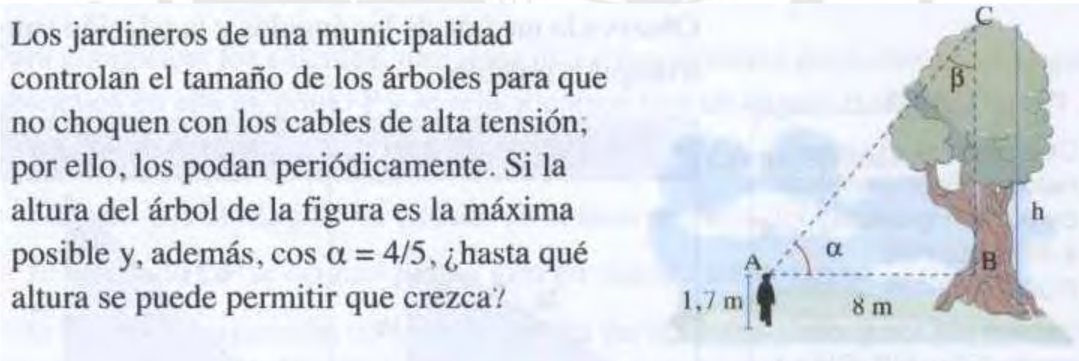

Los jardineros de una municipalidad controlan el tamaño de los árboles para que no choquen con los cables de alta tensión; por ello, los podan periódicamente. Si la altura del árbol de la figura es la máxima posible y, además, cos α = 4/5, ¿hasta qué altura se puede permitir que crezca?

Figura 46. Ejemplo de una tarea del libro Matemática 5
Fuente: Santillana (2016, p. 113)

En este enunciado la tarea es t_{19}^{1}: calcular la medida del cateto opuesto a un ángulo, dada la medida del cateto adyacente y de ese ángulo, que pertenece al tipo de tarea T_1^1**:** calcular la longitud de los lados del triángulo rectángulo.

En el siguiente cuadro 16 se presenta los tipos de tareas y tareas encontradas en los dos libros de texto analizados para el género calcular que es la más representativa.

Cuadro 16. *Tipos de tareas y tareas encontradas en los textos analizados*

Género (G^x)	Tipos de tareas (T_i^x)	Tareas (t_{ij}^x)	L_1	L_2	Total
G^1	T_1^1	t_{11}^1	1	2	3
		t_{12}^1	0	1	1
		t_{13}^1	1	6	7
		t_{14}^1	0	1	1
		t_{15}^1	1	0	1
		t_{16}^1	0	1	1
		t_{17}^1	0	1	1
		t_{18}^1	0	1	1
		t_{19}^1	0	4	4
		t_{110}^1	0	3	3
	T_2^1	t_{21}^1	1	1	2
		t_{22}^1	0	0	0
		t_{23}^1	1	1	2
	T_3^1	t_{31}^1	0	1	1
		t_{32}^1	0	0	0
	T_4^1	t_{41}^1	0	0	0
	T_5^1	t_{51}^1	0	1	1
	T_6^1	t_{61}^1	1	2	3
Total			5	18	23

Fuente: Elaboración propia

En el siguiente cuadro 17 se presenta las tareas y tipos de tareas para el bloque de la circunferencia trigonométrica.

Cuadro 17. *Descripción de los tipos de tareas y tareas a priori en la circunferencia trigonométrica.*

Género (G^x)	Tipos de tareas (T_i^x)	Tareas (t_{ij}^x)
G^1	T_5^1: Calcular el área de las regiones planas.	t_{52}^1: Calcular el área de una región triangular en la CT cuando el arco es un valor notable. t_{53}^1: Calcular el área de una región triangular en la CT en términos de θ. t_{54}^1: Calcular el área de una región triangular en la CT en términos de θ, utilizando determinantes.
	T_7^1: Calcular las coordenadas de un punto en la CT.	t_{71}^1: Calcular la ordenada de un punto en la CT, en función de un arco. t_{72}^1: Calcular la abscisa de un punto en la CT, en función de un arco. t_{73}^1: Calcular las coordenadas de un punto en la CT, cuando estos puntos forman figuras

		geométricas dentro de la CT.
$\boldsymbol{G^2}$	T_3^2**:** Determinar la variación en la CT.	t_{31}^2: Determinar la variación del seno de un arco en la CT, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$. t_{32}^2: Determinar la variación del coseno de un arco en la CT, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$. t_{33}^2: Determinar la variación de una expresión que depende del área de una región rectangular en la CT. t_{34}^2: Determinar la variación de la longitud de un segmento que une dos puntos en la CT. t_{34}^2: Determinar la variación de la longitud de un segmento que une dos puntos en la CT. t_{35}^2: Determinar la variación de una expresión que depende del seno de un arco en la CT. t_{36}^2: Determinar la variación de una expresión que depende del coseno de un arco en la CT. t_{37}^2: Determinar la variación de un arco θ en la CT para que se verifique una igualdad o una desigualdad. t_{38}^2: Determinar la variación numérica de una expresión con base en una desigualdad inicial donde interviene en seno de un arco θ en la CT.
$\boldsymbol{G^3}$	T_2^3**:** Hallar máximos y mínimos.	t_{21}^3: Hallar el máximo valor de una constante k para que se cumpla cierta igualdad que depende del seno de un arco en la CT. t_{22}^3: Hallar el mínimo valor de una constante k para que se cumpla cierta igualdad que depende del coseno de un arco en la CT.
	T_3^3**:** Hallar el valor de una razón trigonométrica en la CT.	t_{31}^3: Hallar el valor del seno de un arco en la CT. t_{32}^3: Hallar el valor del coseno de un arco en la CT. t_{33}^3: Hallar el valor de otras razones trigonométricas para un arco en la CT.
$\boldsymbol{G^4}$	T_1^4**:** Representar al seno y coseno CT.	t_{11}^4**:** Representar al seno de un arco en la CT. t_{21}^4**:** Representar al coseno de un arco en la CT.

Fuente: Elaboración propia

En el siguiente cuadro 18 se presenta los tipos de tareas y tareas encontradas en los dos libros de texto analizados para el bloque de la CT.

Cuadro 18. *Tipos de tareas y tareas encontradas en los textos analizados*

Género (G^x)	**Tipos de tareas (T_i^x)**	**Tareas (t_{ij}^x)**	L_1	L_2	**Total**
G^1	T_3^2	t_{31}^2	0	1	1
		t_{32}^2	1	5	6
		t_{33}^2	0	0	0
	T_7^1	t_{71}^1	0	1	1
		t_{72}^1	0	4	4
		t_{73}^1	0	1	1
G^2	T_3^2	t_{31}^2	0	1	1
		t_{32}^2	0	1	1
		t_{33}^2	0	1	1
		t_{34}^2	0	1	1
		t_{35}^2	0	2	2
		t_{36}^2	0	1	1
		t_{37}^2	0	1	1
		t_{38}^2	0	1	1
G^3	T_2^3	t_{21}^3	0	1	1
		t_{22}^3	0	1	1
	T_3^3	t_{31}^3	1	1	2
		t_{32}^3	1	1	2
		t_{33}^3	1	1	2
G^4	T_1^4	t_{11}^4	0	0	0
		t_{12}^4	0	1	1
Total			4	27	31

Fuente: Elaboración propia

En el siguiente cuadro 19 se presenta las tareas y tipos de tareas para el bloque de las funciones trigonométricas.

Cuadro 19. *Descripción de los tipos de tareas y tareas a priori para las funciones trigonométricas.*

Género (G^x)	**Tipos de tareas (T_i^x)**	**Tareas (t_{ij}^x)**
G^1	T_8^1: Calcular coordenadas a partir de las gráficas de funciones trigonométricas.	t_{81}^1: Calcular la ordenada de un punto a partir de la regla de correspondencia de la función seno. t_{82}^1: Calcular la abscisa de un punto a partir de la regla de correspondencia de la función coseno.
G^2	T_4^2: Determinar la regla de correspondencia de una función trigonométrica.	t_{41}^2: Determinar la regla de correspondencia para funciones donde interviene el seno. t_{42}^2: Determinar la regla de correspondencia para funciones donde interviene el coseno.

$\boldsymbol{G^3}$	T_4^3: Hallar el dominio de una función trigonométrica.	t_{41}^3: Hallar el dominio de una función que involucra al seno. t_{42}^3: Hallar el dominio de una función que involucra al coseno.
	T_5^3: Hallar el rango de una función trigonométrica.	t_{51}^3: Hallar el rango de una función que involucra al seno. t_{52}^3: Hallar el rango de una función que involucra al coseno.
	T_6^3: Hallar el periodo de una función trigonométrica.	t_{61}^3: Hallar el periodo de una función que involucra al seno. t_{62}^3: Hallar el periodo de una función que involucra al coseno.
$\boldsymbol{G^5}$	T_1^5: Graficar una la función trigonométrica.	t_{11}^5: Graficar la función seno. t_{21}^5: Graficar la función coseno.

Fuente: Elaboración propia

En el siguiente cuadro 20 se presenta los tipos de tareas y tareas encontradas en los dos libros de texto analizados para para el bloque de las funciones trigonométricas.

Cuadro 20. *Tipos de tareas y tareas encontradas en los textos analizados*

Género (G^x)	**Tipos de tareas (T_i^x)**	**Tareas (t_{ij}^x)**	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	**Total**
$\boldsymbol{G^1}$	T_8^1	t_{81}^1	0	1	1
		t_{82}^1	0	1	1
$\boldsymbol{G^2}$	T_4^2	t_{41}^2	0	2	2
		t_{42}^2	0	0	0
$\boldsymbol{G^3}$	T_4^3	t_{41}^3	0	2	2
		t_{42}^3	0	2	2
	T_5^3	t_{51}^3	0	4	4
		t_{52}^3	0	1	1
	T_6^3	t_{61}^3	0	3	3
		t_{62}^3	0	2	2
$\boldsymbol{G^5}$	T_1^5	t_{11}^5	4	2	6
		t_{12}^5	2	1	3
Total			6	21	27

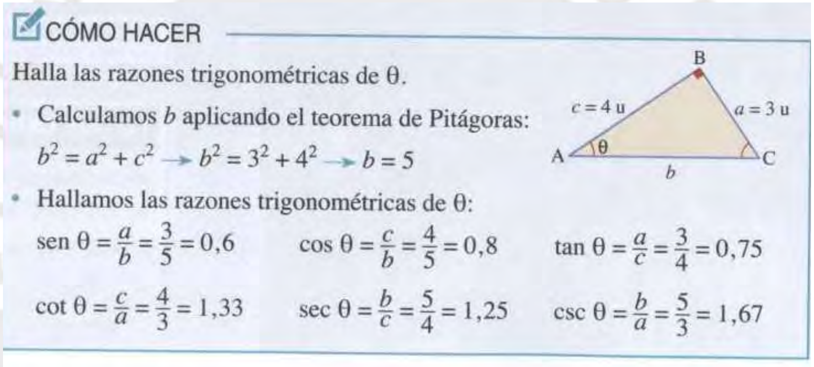
Fuente: Elaboración propia

El libro de texto (L_1) presenta 14 tareas en los bloques analizados mientras que el libro de texto (L_2) un promedio de 66 tareas específicas, observándose una diferencia muy marcada en la cantidad de tareas. Asimismo, no se aprecian algunas tareas que consideramos importante para una mejor organización del conocimiento matemático como son: indicar los lados del triángulo rectángulo.

Análisis de las Técnicas (τ_i) encontradas en los libros de texto analizados

El bloque de las tareas analizadas se resuelve mediante la movilización de una o más técnicas. A continuación, presentamos las técnicas que identificamos en la resolución de las tareas de los libros de texto analizados.

Las técnicas que justifican la resolución de las tareas t_{11}^1: Calcular la longitud del cateto opuesto a un ángulo agudo, dada la longitud de la hipotenusa y del cateto adyacente y t_{21}^1: Calcular el valor del seno de un ángulo agudo, dada la medida del cateto opuesto, y la longitud de la hipotenusa para el texto (L_1) son las que se observa en la figura 47.



CÓMO HACER

Halla las razones trigonométricas de θ.

- Calculamos b aplicando el teorema de Pitágoras:

$b^2 = a^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow b = 5$

- Hallamos las razones trigonométricas de θ:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad \cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\quad \tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

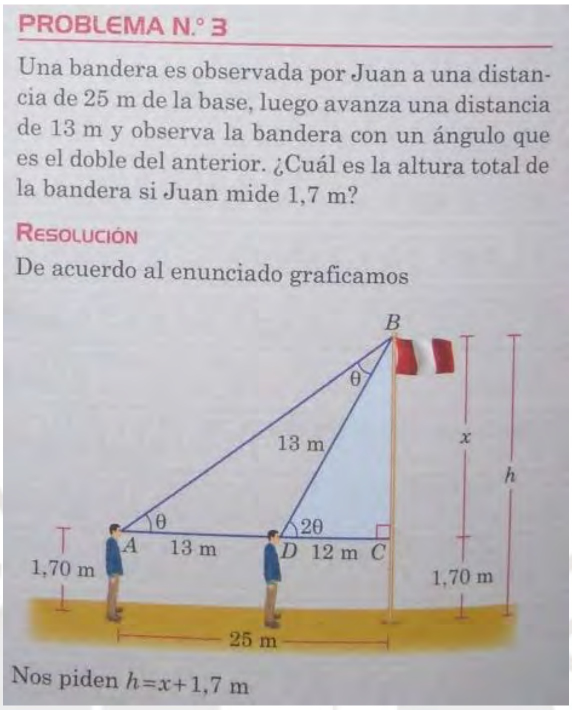
$\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} = 1{,}33$ $\quad \sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ $\quad \csc\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3} = 1{,}67$

Figura 47. Tarea propuesta en el libro Matemática 5
Fuente: Santillana (2016, p. 112)

Las técnicas utilizadas en el desarrollo de dicha tarea son dos, primero τ_1: *sustituir la longitud de los catetos en la relación pitagórica para encontrar la longitud de la hipotenusa* y segundo τ_2: *reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo.*

Además en dicha figura 45 también se aprecia otra tarea como es t_{24}^1: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dada la medida del cateto adyacente, y la longitud de la hipotenusa. Dicha tarea estaría justificada por la siguiente técnica τ_3: *reemplazar la longitud del cateto adyacente y de la hipotenusa en la definición del coseno, para calcular el valor del coseno del ángulo agudo.*

En cambio en el libro de texto (L_2) estos tipos de tareas generan otras técnicas complementarias como se aprecia en la figura 48.


PROBLEMA N.° 3

Una bandera es observada por Juan a una distancia de 25 m de la base, luego avanza una distancia de 13 m y observa la bandera con un ángulo que es el doble del anterior. ¿Cuál es la altura total de la bandera si Juan mide 1,7 m?

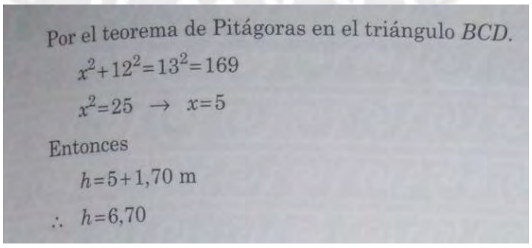
RESOLUCIÓN

De acuerdo al enunciado graficamos

Nos piden $h=x+1{,}7$ m

Figura 48. Tarea y técnica propuesta en el texto Matemática vital 5.
Fuente: Lumbreras (2017, p. 146)

Una de las primeras técnicas que emergen de esta tarea es τ_4: construir triángulos rectángulos que relacionen los datos del problema y que a su vez generen nuevos triángulos. La segunda técnica $\tau_{5:}$ Reconocer el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual como el ángulo de elevación. Finalmente estas técnicas se complementan con la técnica τ_1 que relaciona al teorema de Pitágoras, figura 49.


Por el teorema de Pitágoras en el triángulo BCD.

$x^2+12^2=13^2=169$

$x^2=25 \rightarrow x=5$

Entonces

$h=5+1{,}70$ m

$\therefore\ h=6{,}70$

Figura 49. Ejemplo de una técnica propuesta en el texto Matemática vital 5.
Fuente: Lumbreras (2017, p. 147)

Se presentan a continuación en el cuadro 21 las técnicas movilizadas en la resolución de los tipos de tareas T_1^1 y T_2^1.

Cuadro 21. *Técnicas movilizadas para la resolución de las tareas* T_1^1 y T_2^1.

Nomenclatura	**Descripción de la técnica**	
	T_1^1	T_2^1
τ_1	Sustituir la longitud de los catetos en la relación pitagórica para encontrar la longitud de la hipotenusa.	
τ_2		Reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno.
τ_3		Reemplazar la longitud del cateto adyacente y de la hipotenusa en la definición del coseno.
τ_4	Construir triángulos rectángulos que relacionen los datos del problema y que a su vez generen nuevos triángulos.	
τ_5	Reconocer el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual como el ángulo de elevación	
τ_6	Factorizar mediante el aspa simple una ecuación de segundo grado.	
τ_7	Utilizar la tabla trigonométrica para encontrar la medida de un ángulo (o el valor de una razón trigonométrica) definida por la razón trigonométrica asignada (en relación a un ángulo dado).	Utilizar la tabla trigonométrica para encontrar la medida de un ángulo (o el valor de una razón trigonométrica) definido por la razón trigonométrica asignada (respecto a un ángulo dado).
τ_8	Utilizar la calculadora para calcular el valor de la razón trigonométrica (o la medida de un ángulo)	Utilizar la calculadora para calcular el valor de la razón trigonométrica (o la medida de un ángulo)
τ_9		Calcular el valor de una razón trigonométrica
τ_{10}	Utilizar relaciones métricas en el triángulo para encontrar la medida de la altura relativa a la base del triángulo (o hipotenusa).	

Fuente: Elaboración propia

Estas técnicas están justificadas por tecnologías como las siguientes θ_1: Teorema de Pitágoras, θ_2: Definición de la razón trigonométrica seno, θ_3: Definición de la razón trigonométrica coseno, θ_4: Definición de triángulos notables exactos, θ_5: Identidad fundamental trigonométrica. Estas tecnologías a su vez pertenecen al bloque teórico Θ_1: semejanza de triángulos y Θ_2: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. A continuación, en la tabla 22 se presenta un resumen de las principales tareas, tecnologías, tecnologías y teorías encontradas en los libros analizados.

Cuadro 22. *Descripción de la organización praxeológica*

Tareas (*T*)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías ($\boldsymbol{\theta}$)**	**Teorías ($\boldsymbol{\Theta}$)**
T_1^1	τ_1	θ_1	Θ_1
T_3^1	$\tau_2,\ \tau_3, \tau_4, \tau_5$	$\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$	Θ_1, Θ_2
T_4^2	$\tau_3,\ \tau_4$	θ_3, θ_4	Θ_1, Θ_2
T_1^3	$\tau_2,\ \tau_3$	θ_2, θ_3	Θ_1
T_3^3	$\tau_2,\ \tau_3, \tau_4$	$\theta_2, \theta_3, \theta_4$	Θ_1, Θ_2

Fuente: Elaboración propia

4.6 Evaluación de las tareas, técnicas y tecnologías

En el primer libro de texto analizado (L_1) un primer encuentro con la trigonometría se da en el capítulo 8 con una breve introducción, donde se enfatiza el estudio de las razones trigonométricas y el de las funciones trigonométricas.

El primer tema abordado en dicho texto son las razones trigonométricas de ángulos agudos, el cual inicia con un comentario sobre los orígenes de la trigonometría. En este breve comentario del libro de texto se hace hincapié en lo que viene a ser una de las aplicaciones de la trigonometría como es el cálculo de distancias inaccesibles, figura 50.

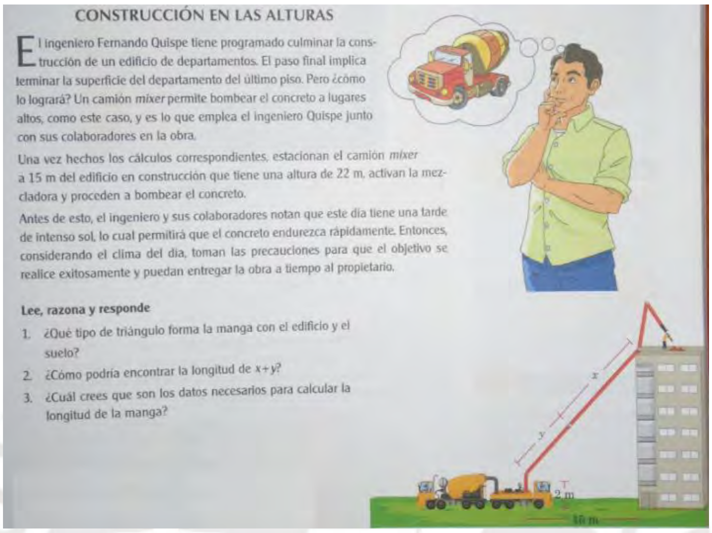
Razones trigonométricas
de ángulos agudos

En sus inicios, la trigonometría se enfocó únicamente a la topografía, la navegación y la astronomía. Con el avance de la ciencia, se extendió a otros campos, como la arquitectura y la ingeniería civil. En estos contextos, el estudio de la trigonometría te ofrecerá la posibilidad de calcular medidas de lugares inaccesibles.

Complejo arqueológico de Tantamayo, región Huánuco.

Figura 50. Primer encuentro con la trigonometría.
Fuente: Santillana (2016, p. 112)

Por su parte en el libro de texto Matemática vital 5 el primer encuentro con el tema de las razones trigonométricas se da con una situación del contexto denominado construcción en las alturas y luego del cual se pide que se respondan ciertas interrogantes como se observa en la figura 51.



CONSTRUCCIÓN EN LAS ALTURAS

El ingeniero Fernando Quispe tiene programado culminar la construcción de un edificio de departamentos. El paso final implica terminar la superficie del departamento del último piso. Pero ¿cómo lo logrará? Un camión *mixer* permite bombear el concreto a lugares altos, como este caso, y es lo que emplea el ingeniero Quispe junto con sus colaboradores en la obra.

Una vez hechos los cálculos correspondientes, estacionan el camión *mixer* a 15 m del edificio en construcción que tiene una altura de 22 m, activan la mezcladora y proceden a bombear el concreto.

Antes de esto, el ingeniero y sus colaboradores notan que este día tiene una tarde de intenso sol, lo cual permitirá que el concreto endurezca rápidamente. Entonces, considerando el clima del día, toman las precauciones para que el objetivo se realice exitosamente y puedan entregar la obra a tiempo al propietario.

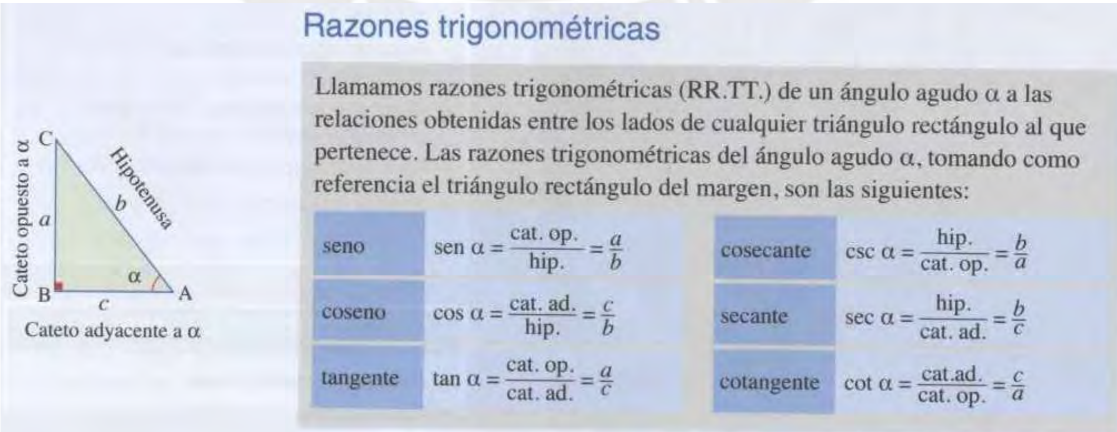
Lee, razona y responde

1. ¿Qué tipo de triángulo forma la manga con el edificio y el suelo?
2. ¿Cómo podría encontrar la longitud de $x+y$?
3. ¿Cuál crees que son los datos necesarios para calcular la longitud de la manga?

Figura 51. Primer encuentro con la trigonometría en el texto Matemática vital 5.
Fuente: Lumbreras (2017, p. 143)

Luego de esta breve presentación en ambos textos analizados, se inicia la construcción del bloque tecnológico-teórico de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente que viene a ser el tercer momento descrito por Chevallard (2009).

En la figura 52 se observa la construcción del bloque tecnológico-teórico que aparece en el libro de texto Matemática 5.



Razones trigonométricas

Llamamos razones trigonométricas (RR.TT.) de un ángulo agudo α a las relaciones obtenidas entre los lados de cualquier triángulo rectángulo al que pertenece. Las razones trigonométricas del ángulo agudo α, tomando como referencia el triángulo rectángulo del margen, son las siguientes:

seno	$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{a}{b}$	cosecante	$\csc \alpha = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}} = \frac{b}{a}$
coseno	$\cos \alpha = \frac{\text{cat. ad.}}{\text{hip.}} = \frac{c}{b}$	secante	$\sec \alpha = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. ad.}} = \frac{b}{c}$
tangente	$\tan \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}} = \frac{a}{c}$	cotangente	$\cot \alpha = \frac{\text{cat.ad.}}{\text{cat. op.}} = \frac{c}{a}$

Figura 52. Construcción del bloque tecnológico-teórico en el texto Matemática 5.
Fuente: Santillana (2016, p. 112)

En esta construcción del bloque tecnológico-teórico se puede observar de manera implícita las definiciones del seno, coseno y demás razones trigonométricas; sin embargo, no aparecen las definiciones de ángulos, de triángulos rectángulos y razones, que consideramos importantes para una adecuada organización matemática. Esta construcción está incompleta porque no se muestra la justificación de las razones trigonométricas que debería ser a través del discurso tecnológico teórico de la semejanza de triángulos.

En todo el desarrollo del libro de texto no se trabaja las praxeologías asociadas con la semejanza de triángulos, en el capítulo 3 se desarrolla el tema de proporciones más no de razones. Esto pone en evidencia una desarticulación entre los objetos matemáticos en torno al cual se desarrolla las razones trigonométricas, que podría dificultar más adelante su estudio y comprensión.

El estudio epistemológico sobre el seno y coseno sugiere una construcción partiendo de conceptos que históricamente dieron origen a las razones trigonométricas como son la noción de ángulos, sistemas de medición angular, la semejanza de triángulos y los triángulos rectángulos.

En el texto Matemática vital 5 la construcción del bloque tecnológico-teórico aparece como se muestra en la figura 53.

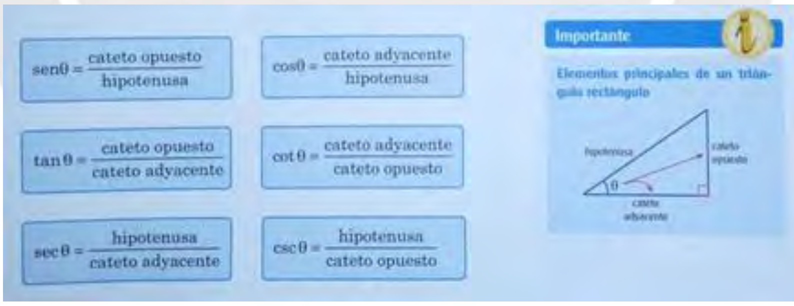


Figura 53. Construcción del bloque tecnológico-teórico en el texto Matemática vital 5.
Fuente: Lumbreras (2017, p. 143)

En la construcción propuesta por dicho texto se menciona definiciones cuando se presenta las razones trigonométricas, a diferencia del texto Matemática 5 éste si presenta en un capitulo anterior las definiciones de ángulos y sistemas de medición Sin embargo al igual que en el anterior texto analizado no se muestra la justificación de las razones trigonométricas en el discurso tecnológico teórico de la semejanza de triángulos.

Por lo general en la gran mayoría de libros de textos de nuestro medio cuando se trabajan las razones trigonométricas, éstas no son justificadas bajo el discurso tecnológico teórico de la semejanza de triángulos a diferencia de los libros de texto de otros países como en Brasil (figura 54), donde sí se aprecia una adecuada justificación para dicho tema.

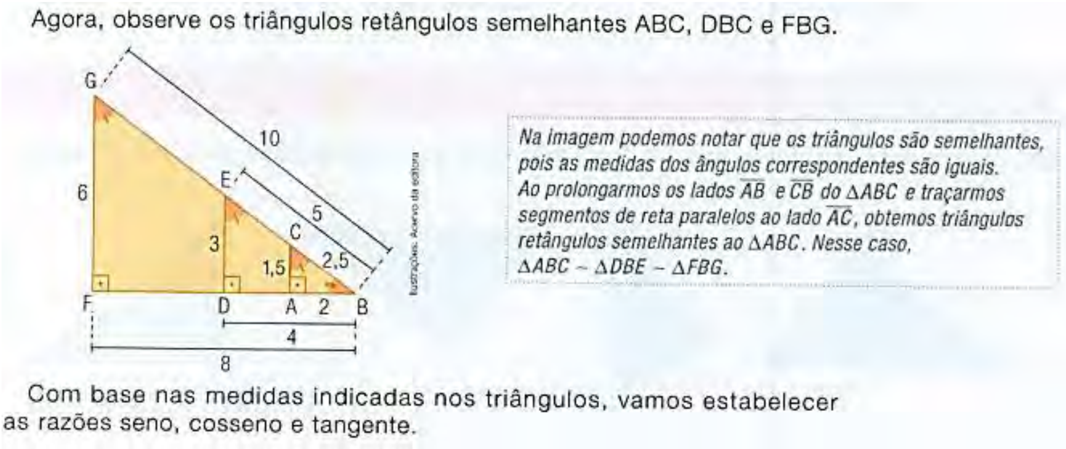


Figura 54. Bloque tecnológico-teórico de las razones trigonométricas.
Fuente: Ramalho (2016, p. 53)

El segundo momento que viene a ser la exploración de las tareas y la construcción de las técnicas si está presente en ambos textos analizados. Por ejemplo, en la figura 55 se aprecia este momento para el texto Matemática 5.

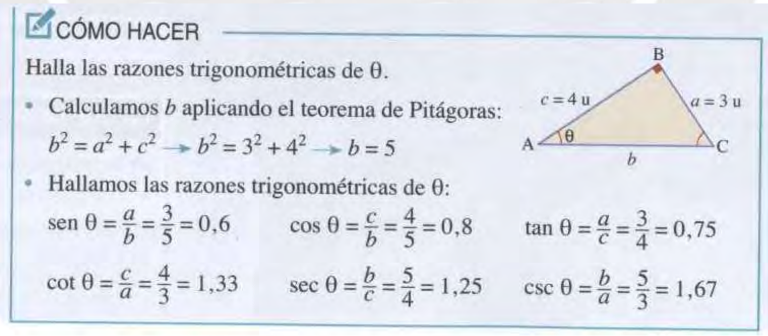


Figura 55. Segundo momento didáctico.
Fuente: Santillana (2016, p. 112)

Una de las tareas que se puede observar en la figura 49 es $T_{1,1}^{1}$: determinar el valor del seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo cuando se conocen las longitudes de sus catetos. Las técnicas utilizadas en el desarrollo de dicha tarea son dos, primero τ_1: *sustituir la longitud de los catetos en la relación pitagórica para encontrar la longitud de la hipotenusa* y segundo τ_2: *reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno* *del ángulo agudo.* Estas dos técnicas pertenecen al bloque tecnológico del teorema de Pitágoras (θ_1) y a las definiciones de razones trigonométricas (θ_2) respectivamente. Las cuales a su vez se sustentan en la teoría de la semejanza de triángulos (Θ).

Luego se presentan otras tareas en el libro de texto con el trabajo de sus respectivas técnicas y se realiza una ampliación del bloque tecnológico teórico con las razones trigonométricas para los ángulos notables como se observa en la figura 56.

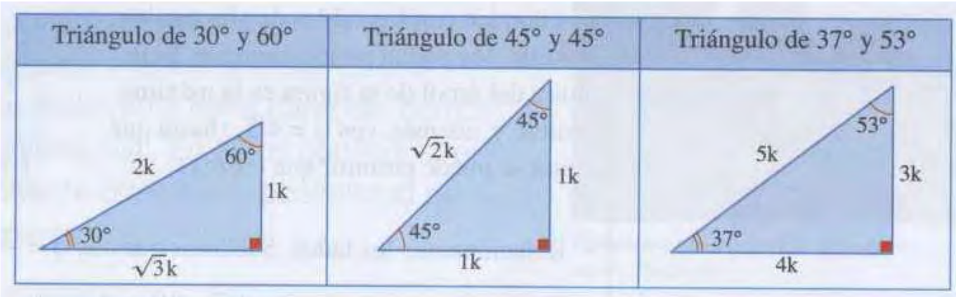


Figura 56. Retomando el tercer momento didáctico.
Fuente: Santillana (2016, p. 114)

En esta construcción teórica se omite las demostraciones, es decir de que figuras geométricas se obtienen dichos triángulos. Sin embargo, se muestra una tabla (figura 57) con las razones trigonométricas para dichos ángulos notables y que resume el bloque tecnológico-teórico.

Razón \ α	30°	60°	45°	37°	53°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tan α	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
cot α	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
sec α	$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
csc α	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

Figura 57. Retomando el bloque tecnológico teórico.
Fuente: Santillana (2016, p. 114)

Así, con la figura 57 ocurre el quinto momento didáctico, con la institucionalización de los valores de las razones trigonométricas para los ángulos notables. No obstante, no se observa el sexto momento de la evaluación, lo cual sí se aprecia en el texto Matemática vital con la etiqueta: ahora comprueba tu aprendizaje. Asimismo, en dicho texto la institucionalización de las razones trigonométricas para ángulos notables si muestra las demostraciones de donde se obtienen dichos triángulos, figura 58.

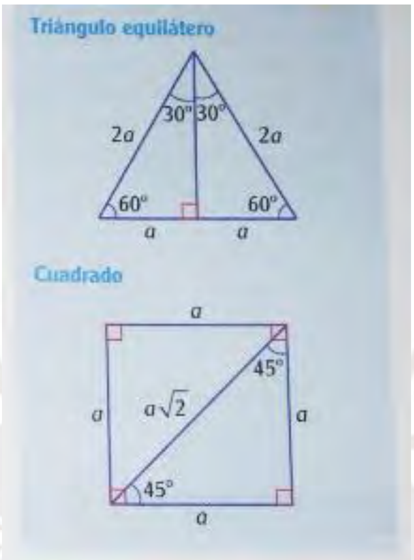


Figura 58. Momento de la institucionalización.
Fuente: Lumbreras (2017, p. 149)

En ambos textos analizados se observan los momentos didácticos, pero con ciertas variaciones. En el libro Matemática 5 se podría afirmar que la organización matemática está de acuerdo a los lineamientos curriculares; sin embargo, consideramos que se debería incluir otros temas como las identidades trigonométricas para articular las praxeologías relativas a las razones y las funciones trigonométricas y que son los temas ejes para la EBR. En cambio, el texto Matemática Vital 5, presenta una OM más completa en cuanto a la temática, los tipos de tareas están acorde a lo que se debería estudiar en quinto de secundaria, existe un trabajo tecnológico - teórico en el desarrollo de los temas y esto conlleva a que se puedan construir OML con un mayor grado de completitud.

En este análisis no se considera a la organización matemática de las identidades trigonométricas, debido a que solo aparece en el texto de Matemática vital 5 y no en el libro de texto de la EBR, razón por la cual creemos que no se tendría punto de comparación entre ambos textos.

CAPITULO V: PROPUESTA DE UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DEL SENO Y COSENO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

En este capítulo, se presenta la construcción y reconstrucción del MPR, con base en la revisión de otras investigaciones como las de Da Fonseca (2015), Chevallard (2000), Chaachoua, Ferraton y Desmoulins (2017), Quijano (2015) y Martín (2015).

5.1 Construcción de un modelo praxeológico de referencia para el estudio del seno y coseno en la educación secundaria

En esta sección se presenta la construcción del MPR con base en la estructura propuesta por Chaachoua, Ferraton y Desmoulins (2017).

5.1.1 Análisis del programa del currículo nacional de educación básica

Las nociones trigonométricas seno y coseno aparecen en la selección de contenidos de matemáticas para ser enseñados en la EBR del Perú, dentro de la competencia *actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización,* contemplados en el CNEB (2016). La misma que fue aprobada mediante la Resolución Ministerial N° 199-2015 del Ministerio de Educación del Perú que resolvía modificar parcialmente el DCN (2009) de la Educación Básica Regular, que estaba organizado por competencias y capacidades como se observa en el cuadro 23, incorporándose indicadores de desempeño para cada grado o ciclo.

Cuadro 23. *Competencias y capacidades del área de matemáticas*

<table>
<tr><th>Área</th><th>Competencia</th><th>Capacidad</th></tr>
<tr><td rowspan="4">MATEMÁTICA

(Ciclos II, III, IV, V, VI y VII)</td><td>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad.</td><td rowspan="4">• Matematiza situaciones
• Comunica y representa ideas matemáticas
• Elabora y usa estrategias
• Razona y argumenta generando ideas matemáticas</td></tr>
<tr><td>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.</td></tr>
<tr><td>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización.</td></tr>
<tr><td>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre.</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Resolución Ministerial N°199-2015 (2015)

Los temas de trigonometría, específicamente, el estudio de las nociones trigonométricas seno y coseno aparecen en el ciclo VII que corresponden a tercero, cuarto y quinto año de la educación secundaria, dentro de la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma movimiento y localización, ver cuadro 24.

Cuadro 24. *Indicadores de desempeño de la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma movimiento y localización*

	3°	4°	5°
Matematiza Situaciones	Contrasta modelos basados en relaciones métricas, razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras, y ángulos de elevación y depresión al vincularlos a situaciones.	Examina propuestas de modelos referidos a relaciones métricas de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras, ángulos de elevación y depresión al plantear y resolver problemas.	Examina propuestas de modelos referidos a razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios al plantear y resolver problemas.
Comunica y representa ideas matemáticas	Expresa las propiedades de un triángulo de 30° y 60° y 45° usando terminologías, reglas y convenciones matemáticas.	Expresa las relaciones métricas de un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras).	Presenta ejemplos de razones trigonométricas con ángulos agudos notables, complementarios y suplementarios en situaciones de distancias inaccesibles, ubicación de cuerpos y otros. Describe trayectorias empleando razones trigonométricas.
Elabora y usa estrategias	Aplica el teorema de Pitágoras para determinar longitudes de los lados desconocidos en triángulos rectángulos. Emplea razones trigonométricas para resolver problemas. Adopta y combina estrategias heurísticas y emplea procedimientos relacionadas a ángulos, razones trigonométricas.	Adopta y combina estrategias heurísticas relacionadas a ángulos, razones trigonométricas y proporcionalidad al resolver problemas con mapas o planos, con recursos gráficos y otros. Emplea procedimientos con datos de amplitud, periodo y rango para resolver problemas que involucran construir la gráfica de una función trigonométrica. Desarrolla y aplica la definición de las funciones seno y coseno para resolver problemas de ángulos.	Selecciona la estrategia más conveniente para resolver problemas que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios. Resuelve problemas considerando una gráfica de función seno y coseno y otros recursos.

Razona y argumenta	Explica deductivamente la congruencia, semejanza y la relación pitagórica empleando relaciones geométricas.	Explica la relación entre la semejanza de triángulos, teorema de Thales y proporcionalidad geométrica.	Emplea conjeturas al demostrar el teorema de Pitágoras.

Fuente: Adaptado de Resolución Ministerial N°199-2015 (2015, p. 69-86)

Dentro de este saber matemático "a enseñar", es decir, tal como se designa oficialmente en el CNEB (2016), el seno y coseno aparecen en 3° de secundaria como razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y transita por 4° y 5° de secundaria, dejando de lado a organizaciones matemáticas articuladoras, como es el caso de las identidades trigonométricas. Esto podría explicarse considerando lo señalado por Bosch y Gascón (2004) "La matemática a enseñar no se le presenta al profesor como una OM estructurada y provista de una "razón de ser", sino más bien como un conjunto de materiales praxeológicos (tareas, técnicas y elementos tecnológicos) bastante desarticulados". (p. 16). Es decir, se presenta el conocimiento matemático como un conjunto de temas, como un conocimiento terminado sin tener en cuenta sus articulaciones, cambios y posibles transformaciones. Así, se produce lo que Chevallard (2013) llama el fenómeno de la monumentalización de las organizaciones matemáticas, en donde las obras matemáticas son visitadas por los alumnos, pero no tienen la oportunidad de participar en su construcción.

5.1.2 Síntesis del estudio epistemológico

En el capítulo II del presente trabajo de investigación se realiza un estudio histórico-epistemológico de las nociones trigonométricas seno y coseno de donde se desprenden las siguientes conclusiones:

- La trigonometría evoluciona desde las antiguas civilizaciones de occidente, como fueron la egipcia y la babilónica, donde se encontraron papiros y tablillas de arcilla que contienen ciertos rudimentos trigonométricos.
- Los egipcios usaban la noción de seket para mantener la pendiente constante de las caras de las pirámides; sin embargo, no se puede ubicar en su matemática el nacimiento de la trigonometría, debido a que su cálculo era netamente numérico y aun no se tenía una noción de ángulo.

- La noción del seno nace ligado al estudio de la medición de cuerdas utilizado como una herramienta para cálculos astronómicos; por ejemplo, en los trabajos de Hiparco y Ptolomeo, quienes construyen las primeras tablas trigonométricas y donde aparece la relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del arco de una circunferencia.
- La cultura hindú introduce el equivalente a la función seno para reemplazar las tablas de cuerdas griegas y desarrollan nuevas identidades trigonométricas para calcular el seno de cualquier ángulo.
- La cultura árabe introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y trabaja al seno en triángulos rectángulos donde aparecen nuevas relaciones trigonométricas como la tangente y la cotangente. Se resuelven algunas ecuaciones cúbicas con la ayuda de las identidades trigonométricas del ángulo triple y se calcula el $sen 1°$. Además, se desarrollan e introducen nuevas identidades trigonométricas para transformar productos de cosenos a sumas.
- La trigonometría de Viète, así como su álgebra, tienen como característica principal la generalidad. Él fue el fundador de un enfoque analítico generalizado para la trigonometría, introdujo el triángulo polar en el estudio de la trigonometría esférica.
- La transición de las razones trigonométricas a las funciones periódicas que comenzó con Viète en el siglo XVI, tuvo un nuevo impulso con la aparición del cálculo Infinitesimal en el siglo XVII y culminó con los trabajos de Euler.

Consideramos que la razón de ser de las nociones trigonométricas seno y coseno son las identidades trigonométricas porque están presentes en la génesis de la trigonometría, y porque han permitido el avance de esta ciencia logrando ser el ente articulador entre las diferentes etapas de su desarrollo, razón por la cual su estudio debería estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

5.1.3 Modelo Praxeológico de Referencia para el estudio del seno y coseno

El MPR que se propone, se centra en las nociones trigonométricas asociadas al seno y coseno y se compone de diferentes Organizaciones Matemáticas en las cuales se vinculan el estudio geométrico-proporcional con el analítico-funcional. Dicho modelo busca de alguna manera articular el estudio de las praxeologías relativas al seno y coseno en la Educación secundaria. El MPR se origina a partir de la siguiente cuestión generatriz Q_0: ¿Cuáles son las nociones trigonométricas asociadas al seno y coseno?.

Para dar respuesta a esta cuestión inicial se requiere transitar por diferentes Organizaciones Matemáticas; es decir, por un conjunto de tareas, técnicas, definiciones, representaciones, teoremas, identidades y propiedades que permiten describir y justificar el presente estudio. Dado que esta cuestión inicial no se puede responder inmediatamente, entonces se requiere el planteamiento de nuevas cuestiones derivadas que deben ser estudiadas como un problema didáctico; es decir, a través de la construcción y reconstrucción de Organizaciones Matemáticas Puntuales (OMP). Para lo cual se considera la siguiente notación:

Q_i: Representa a la pregunta i.

Q_{ij}: Representa a la pregunta j derivada de la pregunta i.

T_{ij}: Representa al tipo de tarea j asociada a la pregunta Q_i.

t_{ijk}: Representa la tarea k correspondiente al tipo de tarea j asociada a la pregunta Q_{ij}.

Donde: $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $j \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ y $k \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$.

τ: Es la técnica que justifica los tipos de tareas.

θ: Es la tecnología que justifica las técnicas.

Θ: Es la teoría que justifica la tecnología.

Al intentar responder Q_0, en un primer momento, surge la necesidad de conocer las diferentes definiciones, representaciones y significados asociados al seno y coseno; es decir, como una razón trigonométrica en el triángulo rectángulo, como coordenadas de un punto en la circunferencia trigonométrica y como un número real en el campo de las funciones trigonométricas.

El estudio de las razones trigonométricas demanda conocer la teoría de la semejanza de triángulos, para lo cual se podría plantear la siguiente pregunta ¿Cuáles son los criterios de la semejanza de triángulos? Al investigar sobre los criterios de semejanza se evidencia la existencia de tres criterios, derivándose una nueva pregunta ¿Cuál es el criterio de la semejanza de triángulos que da origen a las razones trigonométricas?, con lo cual se inicia el estudio de las nociones trigonométricas seno y coseno, desde un dominio geométrico como en sus orígenes.

Asimismo, el seno y coseno pueden ser estudiados en el plano cartesiano lo cual puede dar lugar a nuevas preguntas ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares?, ¿Cuándo un ángulo está en posición normal?, ¿Cómo se definen el seno y coseno para un ángulo en posición normal?, ¿Cómo se definen el seno y coseno en la circunferencia trigonométrica? y ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas seno y coseno?

En la figura 59 se presenta el MPR en relación a las nociones trigonométricas asociadas al seno y coseno.

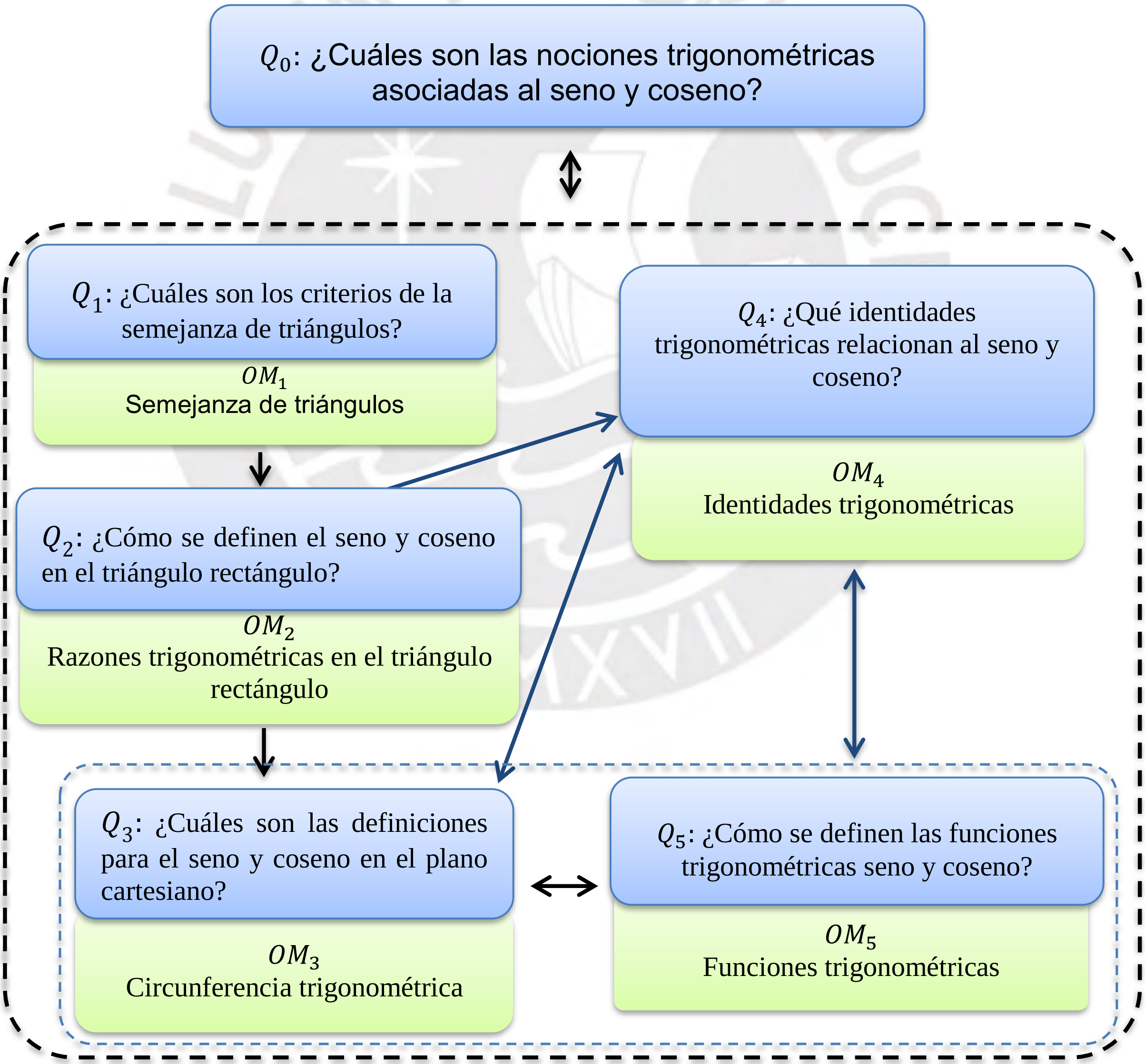


Figura 59. Modelo Praxeológico de Referencia.
Fuente: Elaboración propia

El MPR está conformado por cinco grandes bloques, el estudio de los criterios de semejanza de triángulos que constituyen el bloque teórico para la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, las definiciones del seno y coseno como coordenadas de un punto en la circunferencia trigonométrica, el estudio de las identidades trigonométricas que son el bloque articulador entre las diferentes praxeologías y el estudio de las funciones trigonométricas.

Organización Matemática 1 (OM_1)

La presente OM se genera a partir de la siguiente cuestión Q_1: ¿Cuáles son los criterios de la semejanza de triángulos? y está cuestión genera nuevas cuestiones Q_{11} y Q_{12} que tienen relación con los criterios de semejanza de triángulos, como se observa en la figura 60.

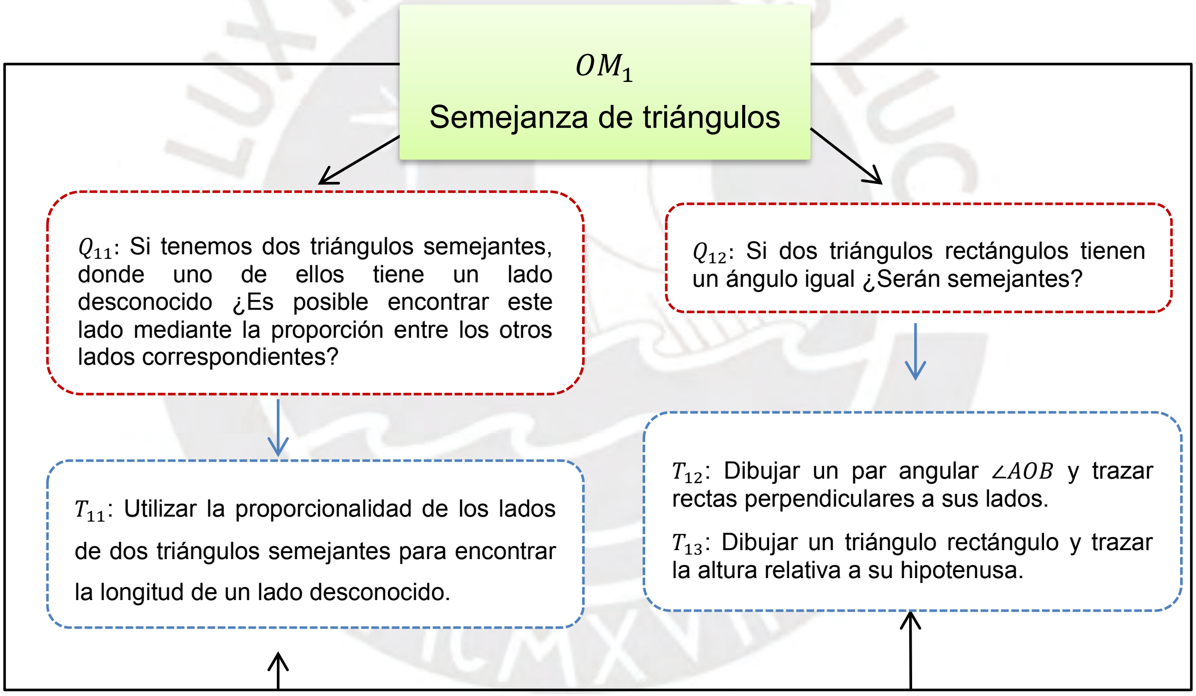


Figura 60. Organización Matemática 1 (OM_1)
Fuente: Elaboración propia

Esta OM_1 nos conduce al estudio de la semejanza de triángulos de triángulos; en un primer momento para criterios generales, y luego al criterio particular Ángulo-Ángulo en el triángulo rectángulo a través de cuestiones como la siguiente: Q_{11}: Si tenemos dos triángulos semejantes, donde uno de ellos tiene un lado desconocido ¿Es posible encontrar este lado desconocido mediante la proporción entre los otros lados correspondientes?

Dicha cuestión genera los siguientes tipos de tareas T_{11}: Utilizar la proporcionalidad de los lados de dos triángulos semejantes para encontrar la longitud de un lado desconocido.

Q_{12}: Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo igual ¿Serán semejantes?

Esta pregunta puede ser resuelta por tipos de tareas como las siguientes T_{12}: Dibujar un par angular $\angle AOB$ y trazar rectas perpendiculares a sus lados y T_{13}: Dibujar un triángulo rectángulo y trazar la altura relativa a su hipotenusa.

Estas tareas pueden ser resueltas mediante las técnicas relacionadas con los criterios de semejanza de triángulos. De acuerdo con Muniz (2013), existen tres casos para la semejanza de triángulos:

Caso 1: Ángulo, Ángulo (AA). Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

Caso 2: Lado, Lado, Lado (LLL). Dos triángulos son semejantes, si los lados son respectivamente proporcionales.

Caso 3: Lado, Ángulo, Lado (LAL). Para que dos triángulos sean semejantes, es suficiente que ellos tengan dos lados respectivamente proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados congruentes.

Los triángulos ABB', ACC', ADD' y AEE', ilustrados en la Figura 61, son triángulos rectángulos, ya que los ángulos $A\widehat{B'}B$, $A\widehat{C'}C$, $A\widehat{D'}D$ y $A\widehat{E'}E$ son ángulos rectos. Como el ángulo α es agudo, $0° < \alpha < 90°$, y es común a todos los triángulos, por el caso (AA) los triángulos son semejantes. Por lo tanto, la razón entre la longitud de los lados es constante (Carneiro, 2014).

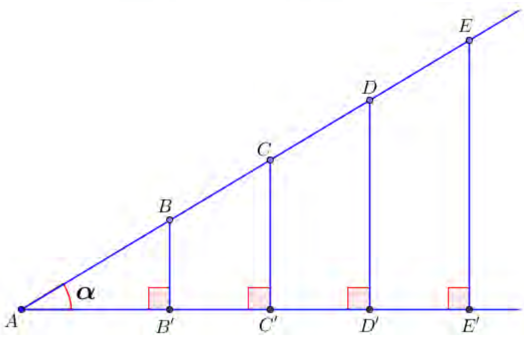


Figura 61. Triángulos rectángulos.
Fuente: Adaptado de Oliveira (2014, p. 18)

A partir de la figura 61, se establecen las siguientes razones $k = \frac{\overline{BB\prime}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC\prime}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD\prime}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE\prime}}{\overline{AE}}$ que dependen del ángulo α y no de las longitudes de los lados de los triángulos involucrados, y es conocida como seno del ángulo α y denotada por $sen\alpha$, es decir:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}}$$

De forma análoga:

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$$

El caso AA permite ampliar en un primer momento la OM de la semejanza de triángulos rectángulos a las razones que dependen del ángulo agudo "α" y no de las longitudes de los lados del triángulo, para luego asignarle un nombre a dicha razón constante como una razón trigonométrica.

Entonces se construye el bloque tecnológico-teórico que justifica el estudio de las razones trigonométricas seno y coseno, donde la teoría es la semejanza de triángulos, específicamente, la semejanza de triángulos rectángulos (Θ_1) y que se resume en el cuadro 25.

Cuadro 25. *Organización Matemática para la semejanza de triángulos*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{11}: Utilizar la proporcionalidad de los lados de dos triángulos semejantes para encontrar la longitud de un lado desconocido. T_{12}: Dibujar un par angular $\angle AOB$ y trazar rectas perpendiculares a sus lados. T_{13}: Dibujar un triángulo rectángulo y trazar la altura relativa a su hipotenusa.	τ_1: Plantear ecuaciones derivadas de la proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes	θ_1: Criterios de la semejanza de triángulos.	Θ_1: Semejanza de triángulos.

Fuente: Elaboración propia

Estas tareas son resueltas por una misma técnica, la misma que se justifica en la tecnología de los criterios de semejanza.

Organización Matemática 2 (OM_2)

Esta OM se genera a partir de la cuestión Q_2: ¿Cómo se definen el seno y coseno en el triángulo rectángulo?, y está conformado por cinco Organizaciones Matemáticas Puntuales (OMP), como se observa en la figura 62.

Esta cuestión Q_2 a su vez genera nuevas cuestiones como Q_{21}, Q_{22} y Q_{23} que están estrechamente ligadas con algunos elementos constitutivos de la OM_2 como son por ejemplo, el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras. Además, se debe considerar que la definición del triángulo rectángulo y sus elementos como catetos e hipotenusa deben ser parte del equipamiento praxeológico del estudiante, así como también la relación pitagórica, las definiciones de ángulos y sistemas de medición angular (sexagesimal y radial).

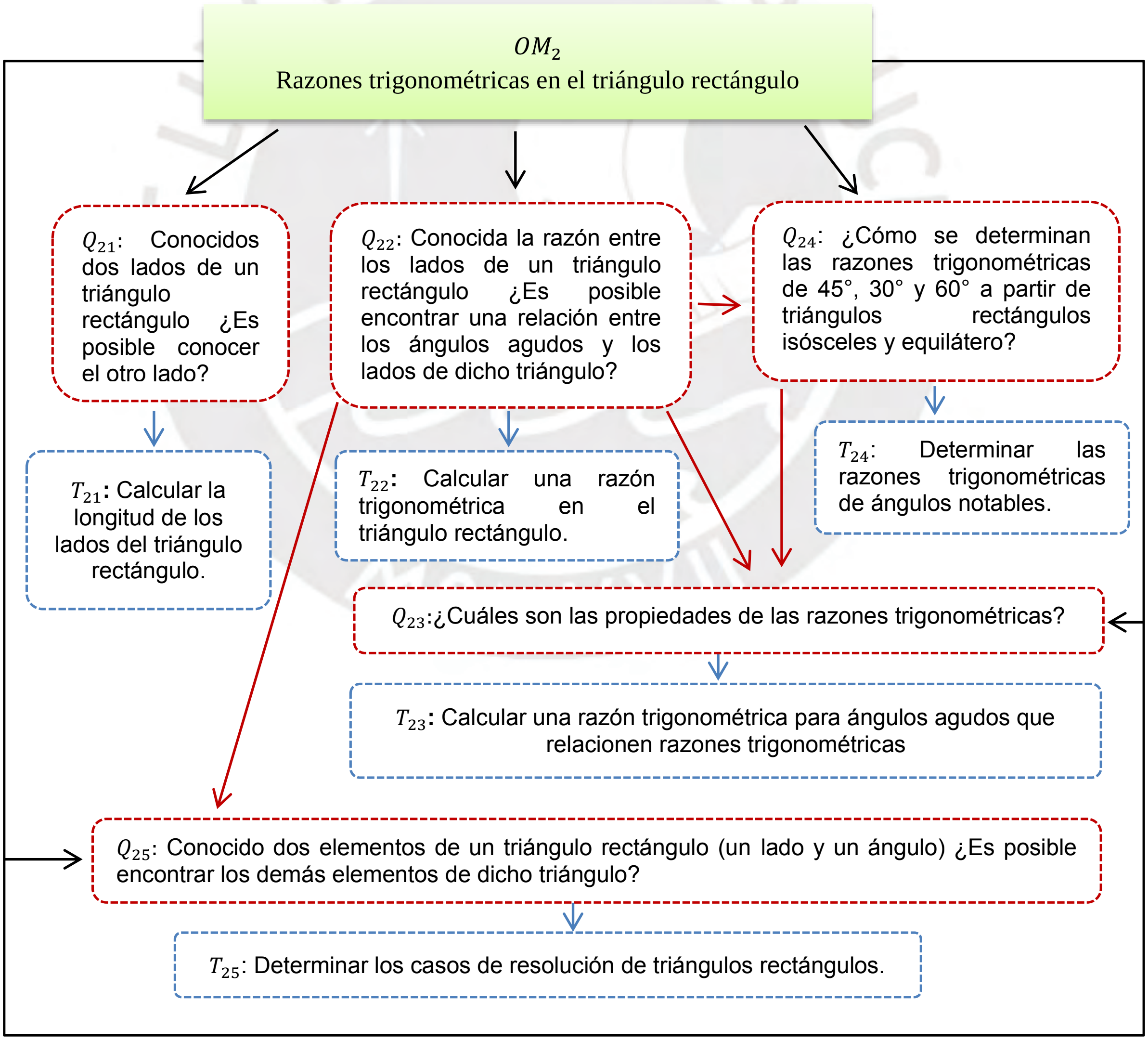


Figura 62. Organización Matemática 2 (OM_2)
Fuente: Elaboración propia

La OM relativa a las razones trigonométricas, inicia con una cuestión relacionada al teorema de Pitágoras $\boldsymbol{Q_{21}}$: **Conocidos dos lados de un triángulo rectángulo ¿Es posible conocer el otro lado?** y se puede responder con el siguiente tipo de tareas T_{21}**:** *Calcular la longitud de los lados del triángulo rectángulo,* y está constituida por las siguientes tareas:

> t_{211}: Calcular la longitud del cateto opuesto a un ángulo, dada la longitud de la hipotenusa y del cateto adyacente.
>
> t_{212}: Calcular la longitud del cateto adyacente a un ángulo, dada la longitud de la hipotenusa y del cateto opuesto.
>
> t_{213}: Calcular la longitud de la hipotenusa, dada la longitud de los catetos.
>
> t_{214}: Calcular los lados de un triángulo rectángulo cuando éstos están en función de una constante.

Estas tareas son resueltas mediante una sola técnica τ_2: *sustituir la longitud de dos lados conocidos en la relación pitagórica para encontrar la longitud del lado desconocido*, que a su vez está justificada por la tecnología del teorema de Pitágoras (θ_2) perteneciente al bloque teórico de la semejanza de triángulos (Θ_1), como se observa en el cuadro 26.

Cuadro 26. *Organización Matemática para el teorema de Pitágoras*

Tipo de tareas (T)	Técnicas (τ)	Tecnologías (θ)	Teoría (Θ)
T_{21}**:** Calcular la longitud de los lados del triángulo rectángulo.	τ_2: Sustituir la longitud de dos lados conocidos en la relación pitagórica para encontrar la longitud del lado desconocido.	θ_2: Teorema de Pitágoras.	Θ_1: Semejanza de triángulos.

Fuente: Elaboración propia

Esta OM_2 se podría ampliar al trabajar con otros tipos de triángulos como los triángulos oblicuángulos a través de la siguiente cuestión Q_{211}: Conocidos dos lados de un triángulo oblicuángulo y el ángulo comprendido entre esos lados ¿Es posible conocer el otro lado?, sin embargo, la técnica τ_2 fracasa debido a que solo se puede trabajar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo, lo cual hace necesario pensar en nuevas técnicas relacionadas con el teorema de cosenos, permitiendo así ampliar esta OM_2 al estudio de la resolución de triángulos oblicuángulos.

La segunda cuestión guarda relación con las definiciones de las razones trigonométricas $\boldsymbol{Q_{22}}$: **Conocida la razón entre los lados de un triángulo rectángulo ¿Es posible encontrar una relación entre los ángulos agudos y los lados de dicho triángulo?**

La cuestión Q_{22} nos conduce al estudio de las definiciones del seno y coseno como razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, al relacionar dos lados con un ángulo agudo, y se responde por el tipo de tareas T_{22}***:*** *Calcular una razón trigonométrica en el triángulo rectángulo.*

Para el estudio de esta tarea se requiere del entorno tecnológico-teórico que emerge de la OM_1 que se encuentra relacionada con la semejanza de triángulos. Las tareas que comprenden esta OMP son las siguientes:

> t_{221}: Calcular el seno de un ángulo agudo, dada la longitud del cateto opuesto, y la longitud de la hipotenusa.
>
> t_{222}: Calcular el seno de un ángulo agudo, dada la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa.
>
> t_{223}: Calcular el valor del seno de un ángulo, dados los catetos.
>
> t_{224}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dada la medida del cateto adyacente, y la longitud de la hipotenusa.
>
> t_{225}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dada la medida del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa.
>
> t_{226}: Calcular el valor del coseno de un ángulo, dados los catetos.
>
> t_{227}: Calcular el valor del seno a partir del coseno de dicho ángulo.

Las tareas t_{221}, t_{222}, t_{223} pueden ser trabajadas con la técnica τ_3: reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo.

En cambio el bloque de tareas t_{224}, t_{225}, t_{226} también son trabajadas con la técnica τ_2, pero se necesita del complemento de una nueva técnica τ_4: reemplazar la longitud del cateto adyacente y de la hipotenusa en la definición del coseno, para calcular el valor del coseno del ángulo agudo.

Estas nuevas técnicas permiten ampliar la OM a las definiciones de las nociones trigométricas como razones trigonométricas. El nuevo bloque tecnológico estaría conformado por la definición de la razón seno (θ_3) y la definición de la razón coseno (θ_4), las mismas que están justificadas por el bloque teórico de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (Θ_2), como se aprecia en el cuadro 27.

Cuadro 27. *Organización Matemática de las razones trigonométricas seno y coseno*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{22}: Calcular una razón trigonométrica en el triángulo rectángulo.	τ_2: Sustituir la longitud de dos lados conocidos en la relación pitagórica para encontrar la longitud del lado desconocido. τ_3: Reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo. τ_4: Reemplazar la longitud del cateto adyacente y de la hipotenusa en la definición del coseno, para calcular el valor del coseno del ángulo agudo.	θ_2: Teorema de Pitágoras. θ_3: Definición de la razón seno. θ_4: Definición de la razón coseno.	Θ_1: Semejanza de triángulos. Θ_2: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Fuente: Elaboración propia

A su vez, para responder la tarea t_{227} la técnica del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas se vuelve muy costosa, dando paso a nuevas técnicas relacionadas con las propiedades de las razones trigonométricas y a la identidad trigonométrica fundamental.

La tercera cuestión da inicio al estudio de las propiedades de las razones trigonométricas Q_{23}: **¿Cuáles son las propiedades de las razones trigonométricas?**

A continuación mostramos un ejemplo de una de las tareas del tipo de tareas T_{23}: *Calcular una razón trigonométrica para ángulos agudos que relacionen razones trigonométricas*, donde las técnicas mencionadas anteriormente fracasan, haciendo que la OM se amplíe con el estudio de las propiedades de las razones trigonométricas.

t_{231}: Si $(2y+z)^{\circ}$, $(x+y)^{\circ}$ y $(3y+x)^{\circ}$ son ángulos agudos tales que $sen(2y+z)^{\circ} = cos(x+y)^{\circ}$ y $tan(3y+x)^{\circ}\cot(2y+z)^{\circ} = 1$, calcule $sen\,(x+2y)°$.

Resolución

Paso 1: de los datos tenemos

$$\begin{cases} sen(2y+z)^{\circ} = cos(x+y)^{\circ} \\ tan(3y+x)^{\circ}\cot(2y+z)^{\circ} = 1 \end{cases}$$

Paso 1: Por las propiedades de ángulos complementarios y razones recíprocas tenemos

$$\begin{cases} (2y+z)^{\circ} + (x+y)^{\circ} = 90° \\ (3y+x)^{\circ} = (2y+z)^{\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z = 90 \ldots (I) \\ y+x = z \ldots (II) \end{cases}$$

Paso 1: Reemplazando (II) en (I)

$$x+3y+(y+x) = 90$$

$$2x+4y = 90$$

$$x+2y = 45$$

Por lo tanto, $sen\,(x+2y)° = sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Las técnicas que resuelven esta tarea son τ_5: Reconocer que las razones trigonométricas seno y coseno son complementarias y τ_6: Reconocer que si el producto de dos razones trigonométricas es igual a la unidad entonces estas razones son recíprocas.

Además, dichas técnicas están justificadas por las tecnologías de las razones trigonométricas de ángulos complementarios (θ_5) y las razones trigonométricas recíprocas (θ_6) que pertenecen al bloque teórico de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (Θ_2) como se puede observar en el cuadro 28.

Cuadro 28. *Organización Matemática de las propiedades de las razones trigonométricas*

Tipo de tareas (T)	Técnicas (τ)	Tecnologías (θ)	Teoría (Θ)
T_{23}: Calcular una razón trigonométrica para ángulos agudos que relacionen razones trigonométricas	τ_5: Reconocer que las razones trigonométricas seno y coseno son complementarias. τ_6: Reconocer que si el producto de dos razones trigonométricas es igual a la unidad entonces estas razones son recíprocas.	θ_5: Razones trigonométricas de ángulos complementarios. θ_6: Razones trigonométricas recíprocas.	Θ_2: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Fuente: Elaboración propia

Las razones trigonométricas recíprocas se relacionan con el siguiente teorema: si $\alpha + \beta = 90°$ entonces $sen\alpha = cos\beta$ y $cos\alpha = sen\beta$. También en este bloque emergen tipos de tareas que se resuelven mediante técnicas asociadas a la tecnología de las identidad trigonométrica fundamental $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (θ_7).

La cuarta cuestión está relacionada con triángulos rectángulos notables **Q_{24}: ¿Cómo se determinan las razones trigonométricas de ángulos agudos notables a partir de triángulos rectángulos equilátero e isósceles?**

Las razones trigométricas de algunos notables se pueden obtener a través de construcciones geométricas en algunos polígonos regulares y están relacionadas con el siguiente tipo de tareas:

T_{24}: *Determinar las razones trigonométricas de ángulos agudos notables a partir de triángulos rectángulos isósceles y equiláteros.*

Esta OMP es en torno a deducir las razones trigonométricas para ángulos que son notables y para su desarrollo se puede usar algún entorno tecnológico donde el uso de softwares como Geogebra podría ser de gran utilidad. Las tareas que conforman esta organización matemática son las siguientes:

t_{241}: Determinar el valor del $sen45°$.

t_{242}: Determinar el valor del $sen30°$.

t_{243}: Determinar el valor del $sen60°$.

t_{244}: Determinar el valor del $cos45°$.

t_{245}: Determinar el valor del $cos30°$.

t_{246}: Determinar el valor del $cos60°$.

En la resolución de estas tareas t_{242}, t_{243}, t_{245} y t_{246} emerge una nueva técnica, τ_8: las construcciones geométricas en el triángulo rectángulo, que se encuentra justificada por la tecnología de los polígonos regulares (θ_8). También se utiliza una segunda técnica τ_2: sustituir la longitud de la hipotenusa y del cateto adyacente en la relación pitagórica para encontrar la longitud del cateto opuesto, y una tercera técnica τ_3: reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo, ver cuadro 29.

Cuadro 29. *Organización Matemática para las razones trigonométricas de ángulos notables de 45°, 30° Y 60°*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{24}: Establecer las razones trigonométricas de ángulos notables a partir de triángulos rectángulos isósceles y equiláteros.	τ_8: Las construcciones geométricas en el triángulo rectángulo. τ_2: Sustituir la longitud de dos lados conocidos en la relación pitagórica para encontrar la longitud del lado desconocido. τ_3: Reemplazar la longitud del cateto opuesto y de la hipotenusa en la definición del seno, para calcular el valor del seno del ángulo agudo.	θ_8: Polígonos regulares. θ_2: Teorema de Pitágoras. θ_3: Definición de la razón seno.	Θ_2: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Θ_3: Geometría plana.

Fuente: Elaboración propia

Esta OM se amplía con la siguiente cuestión ¿Cuál es el valor del sen75°?, las técnicas de las construcciones geométricas se hacen muy costosas y surge la necesidad de un nuevo bloque tecnológico como son las identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos.

Así mismo, las técnicas de las construcciones geométricas y de las razones trigonométricas tienen sus limitaciones o fracasan cuando se tiene que resolver tareas que involucran ángulos que no sean agudos; por ejemplo, calcular el valor del seno de 120°. Lo cual conduce al estudio de las nociones trigonométricas en el plano cartesiano.

La quinta cuestión se relaciona con la resolución de triángulos rectángulos $\boldsymbol{Q_{25}}$: **Conocidos dos elementos de un triángulo rectángulo (un lado y un ángulo) ¿Es posible encontrar los demás elementos de dicho triángulo?**

Esto conduce al estudio de la resolución de triángulos rectángulos donde se relacionan, por ejemplo, un lado desconocido con un lado conocido en función de un ángulo agudo. El tipo de tarea que se propone para resolver esta cuestión es la siguiente T_{25}*: Determinar los casos de resolución de triángulos rectángulos*. Algunas tareas de este tipo se mencionan a continuación

> t_{251}: Determinar la medida del cateto opuesto a un ángulo agudo, dada la medida de la hipotenusa y de ese ángulo.
>
> t_{252}: Determinar la medida del cateto adyacente a un ángulo agudo, dada la medida de la hipotenusa y de ese ángulo.
>
> t_{253}: Determinar la medida del cateto opuesto a un ángulo, dada la medida del cateto adyacente y de ese ángulo.
>
> t_{254}: Determinar la longitud de la hipotenusa en función del ángulo agudo y su cateto adyacente.
>
> t_{255}: Determinar la medida del cateto adyacente a un ángulo, dada la medida del cateto opuesto y de ese ángulo.
>
> t_{256}: Determinar la longitud de la hipotenusa en función del ángulo agudo y su cateto opuesto.

Estas tareas se resuelven mediante una sola técnica que sería τ_9: Utilizar el método de la resolución de triángulos según corresponda. Su tecnología es la resolución de triángulos rectángulos (θ_9) que a su vez se justifica en la teoría (Θ_2).

Como ya se mencionó líneas arriba, las técnicas asociadas a las razones trigonométricas tienen sus limitaciones cuando el ángulo no es agudo, por ejemplo, al calcular seno para ángulos mayores a 180°, de ángulos negativos, ángulos cuadrantales o mayores a una vuelta. Ante estas limitaciones surge una nueva OM para aportar respuestas a estas nuevas cuestiones.

Organización Matemática 3 (OM$_3$)

La OM_3 se genera a partir de la cuestión Q_3: ¿Cuáles son las definiciones para el seno y coseno en el plano cartesiano? Esta cuestión a su vez, nos lleva a plantearnos otras cuestiones como las que se observa en la figura 63.

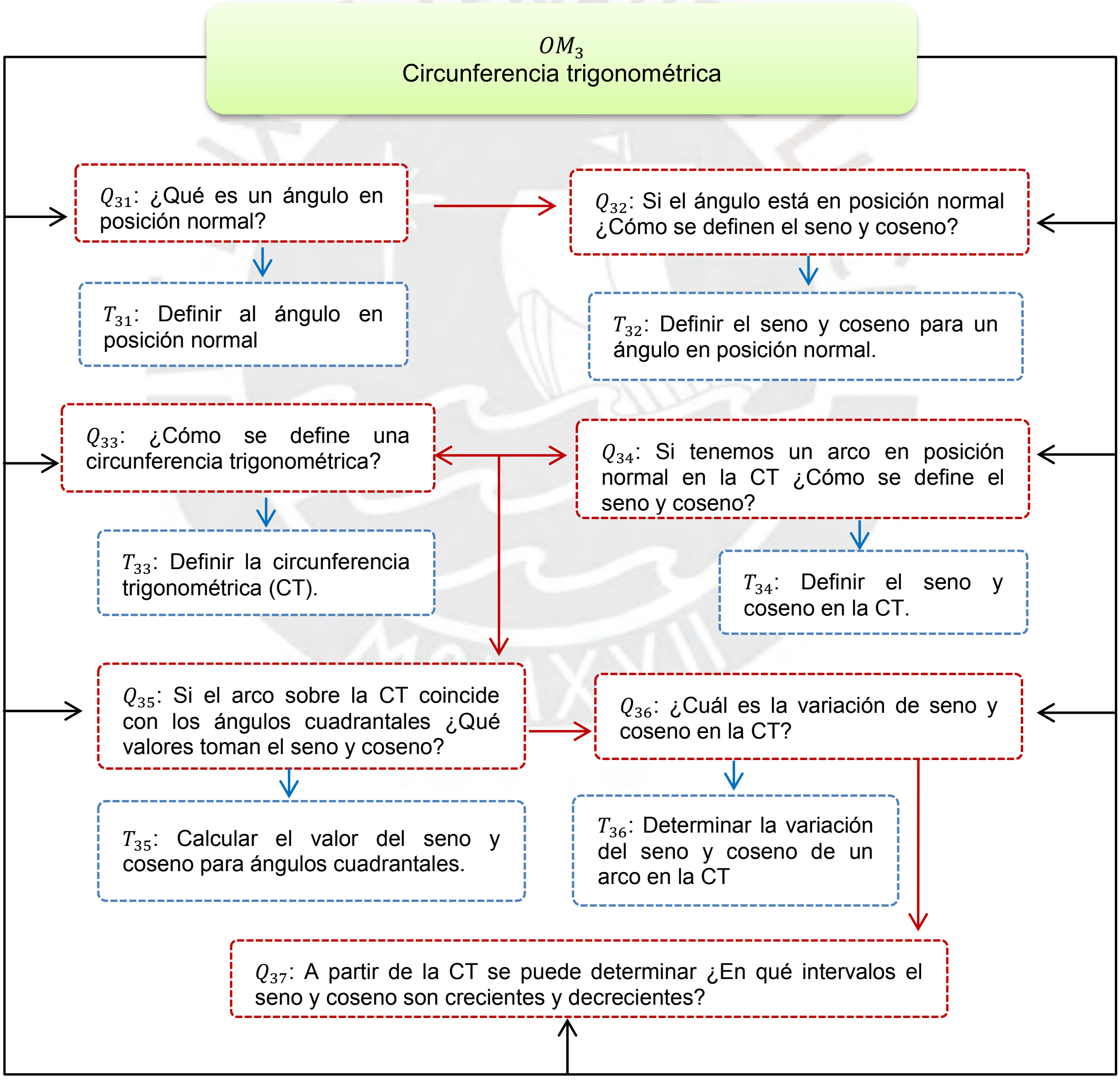


Figura 63. Organización Matemática 3 (OM$_3$)
Fuente: Elaboración propia

En esta OM se define el seno y coseno a partir del ángulo en posición normal y de la circunferencia trigonométrica (CT) los mismos que se sustentan en el bloque teórico de la geometría analítica. En ese sentido será necesario definir algunos elementos constitutivos del bloque tecnológico como son la recta numérica, el sistema de coordenadas rectangulares y las coordenadas de un punto.

La primera cuestión de esta OM nos conduce a la definición del ángulo en posición normal.

Q_{31}: ¿Qué es un ángulo en posición normal?

Un tipo de tarea que resuelve esta cuestión sería T_{31}: *Definir al ángulo en posición normal*.

Ángulo en posición normal. Es aquel ángulo cuyo lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas, su vértice se encuentra en el origen del plano cartesiano y su lado terminal está en uno de los cuadrantes de dicho plano.

Q_{32}: Si el ángulo está en posición normal ¿Cómo se definen el seno y coseno?

T_{32}: *Definir el seno y coseno para un ángulo en posición normal.*

De acuerdo con Zill y Dewar (2012), sea θ cualquier ángulo en posición normal, donde $P(x, y)$ es cualquier punto, excepto $(0,0)$, en el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre $(0,0)$ y $P(x, y)$, las razones trigonométricas se definen como sigue:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \rightarrow csc\theta = \frac{r}{y}, r \neq 0, y \neq 0$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow sec\theta = \frac{r}{x}, r \neq 0, x \neq 0$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow cot\theta = \frac{x}{y}, x \neq 0, y \neq 0$$

Una de las limitaciones de las técnicas relacionadas con las razones trigonométricas que habíamos encontrado en la OM_2 era el de poder calcular el seno para ángulos que no sean agudos por ejemplo él $sen120°$, para lo cual se hace necesario ampliar la OM al estudio de las nociones trigonométricas en el plano cartesiano específicamente en la CT.

La transición de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo (variable angular) al plano cartesiano se da mediante la CT (variable real). Para la siguiente tarea "calcular el $sen(2rad)$". Lo cual nos lleva a ampliar la OM con el estudio de los números reales en la CT.

Q_{33}: ¿Qué es una circunferencia trigonométrica?

T_{33}: *Definir la circunferencia trigonométrica.*

Una circunferencia trigonométrica (CT) es aquella circunferencia cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas rectangulares y su radio es igual a la unidad.

Q_{34}: Si tenemos un arco dirigido en la CT ¿Cómo se define el seno y coseno?

T_{34}: Definir el seno y coseno en la CT.

El seno en la CT se define como la ordenada del extremo del arco y el coseno como la abscisa del extremo de dicho arco.

A partir de esta definición se pueden resolver otras tareas como las siguientes:

t_{341}: Ubicar arcos en la circunferencia trigonométrica.

t_{342}: Calcular el área de regiones planas en la CT.

Q_{35}: Si el arco sobre la CT coincide con los ángulos cuadrantales ¿Qué valores toman el seno y coseno?

T_{35}: Calcular el valor del seno y coseno para ángulos cuadrantales.

t_{351}: Calcular el seno para el ángulo cuadrantal de $90°$

Resolución

Paso 1: Ubicar un punto en la CT que coincida con el arco de $90°$

$P(x; y) = (0; 1)$

Paso 2: Por definición de seno y coseno en la CT

$sen90° = y \wedge cos90° = x$

Paso 3: Reemplazando

Por lo tanto, $sen90° = 1 \wedge cos90° = 0$

La técnica que resuelve esta tarea es τ_{10}: Reemplazar las coordenadas del punto de la CT en la definición del seno y coseno, la que se justifica en la tecnología de la definición del seno y coseno en la CT (θ_{10}) que pertenece al bloque teórico de la geometría analítica (Θ_4).

Q_{36}: ¿Cuál es la variación de seno y coseno en la CT?

El estudio de la variación del seno y coseno está ligado a la OM de las funciones trigonométricas. El dominio de la función se relaciona con los valores que asumen la variable angular en la CT y el rango con la variación del seno en la CT. Un tipo de tareas que resuelve la cuestión planteada sería la siguiente T_{36}: *Determinar la variación del seno y coseno de un arco en la CT*, de la cual se desprenden otras tareas como:

t_{361}: Determinar la variación del seno de un arco en la CT en el IC.

t_{362}: Determinar la variación del seno de un arco en la CT en el IIC.

t_{363}: Determinar la variación del seno de un arco en la CT en el IIIC.

t_{364}: Determinar la variación del seno de un arco en la CT en el IVC.

t_{365}: Determinar la variación del coseno de un arco en la CT en el IC.

t_{366}: Determinar la variación del coseno de un arco en la CT en el IIC.

t_{367}: Determinar la variación del coseno de un arco en la CT en el IIIC.

t_{368}: Determinar la variación del coseno de un arco en la CT en el IVC.

Estas tareas pueden ser resueltas mediante la técnica τ_{11}: ubicar arcos en la CT y proyectarlos en una recta real, donde se debe considerar el máximo y mínimo valor que toma el seno y coseno, la tecnología para la variación del seno y coseno en la CT (θ_{11}) son justificadas por la teoría de la geometría analítica (Θ_4) . A continuación, se presenta una tarea que también pertenece a este bloque y que dará paso al desarrollo de nuevas OM como las identidades trigonométricas y las funciones trigonométricas, que son desarrolladas más adelante.

t_{369}: Determinar la variación de la expresión $f_{(x)} = \frac{\cos(3x)}{\sqrt{3}sen(x)+\cos(x)}$, si $x\epsilon \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

Resolución

Paso 1: Por identidades de ángulos compuestos $\sqrt{3}sen(\theta) + \cos(\theta) = 2sen\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

$$f_{(x)} = \frac{\cos(3x)}{2sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)};\ sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{\pi}{6}$$

Paso 2: Por identidades de reducción al primer cuadrante $\cos(3x) = sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f_{(x)} = \frac{sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)}{2sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{sen\left[3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{2sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

Paso 3: Por identidades del ángulo triple $\frac{\text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta} = 2\cos2\theta + 1$

$$f_{(x)} = \frac{1}{2}\left[2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right]$$

Paso 4: Ordenando la expresión

$$f_{(x)} = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

Paso 5: Del dato formamos el arco

$$-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow 0 < 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$$

Paso 6: En la CT

$$-\frac{1}{2} \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$$

Paso 7: A partir de la variación de la CT formamos la expresión sumando 1/2

$$0 \leq \underbrace{\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}}_{f_{(x)}} < \frac{3}{2}$$

Paso 7: Luego

Por lo tanto, $f_{(x)} \in \left[0; \frac{3}{2}\right[$

En la resolución de esta tarea emergen nuevas técnicas relacionadas con nuevos bloques tecnológicos como las identidades trigonométricas para ángulos compuestos, las identidades para el ángulo triple, la reducción al primer cuadrante y también se puede observar que la técnica de la CT va a presentar ciertas limitaciones, como por ejemplo, al tener que representar arcos y analizar su variación en intervalos donde la función es decreciente, sería mucho más económica usar la definición de función decreciente para encontrar la variación del coseno lo cual nos lleva a pensar en una nueva OM como son las funciones trigonométricas. En el cuadro 30 se resume la OM correspondiente a esta tarea.

Cuadro 30. *Organización Matemática para la circunferencia trigonométrica*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{36}: Determinar la variación del seno y coseno de un arco en la CT	τ_{11}: Ubicar arcos en la CT y proyectarlos en una recta real, donde se debe considerar el máximo y mínimo valor que toma el seno y coseno τ_{12}: Reemplazar en la identidad de la suma para ángulos compuestos. τ_{14}: Método de la reducción al primer cuadrante para ángulos menores a una vuelta. τ_{15}: Utilizar las identidades para el ángulo triple.	θ_{11}: Variación del seno y coseno en la CT θ_{12}: Identidades para el ángulo compuesto. θ_{14}: Reducción al primer cuadrante. θ_{15}: Identidades para el ángulo triple.	Θ_4: Geometría analítica Θ_5: Identidades trigonométricas.

Fuente: Elaboración propia

Q_{37}: A partir de la CT se puede determinar ¿En qué intervalos el seno y coseno son crecientes y decrecientes?

Para responder esta cuestión las técnicas relacionadas con CT se vuelven muy costosas sobre todo en cuadrantes donde el seno y coseno sean negativos como por ejemplo el tercer cuadrante o cuando los arcos son negativos, razón por la cual esta OM se amplía con el estudio de las gráficas de funciones que pertenecen al bloque teórico de las funciones trigonométricas.

Organización Matemática 4 (OM_4)

La OM_4 se genera a partir de la cuestión Q_4: ¿Qué identidades trigonométricas relacionan al seno y coseno? y está conformado por seis OM puntuales (OMP), como se observa en la figura 64.

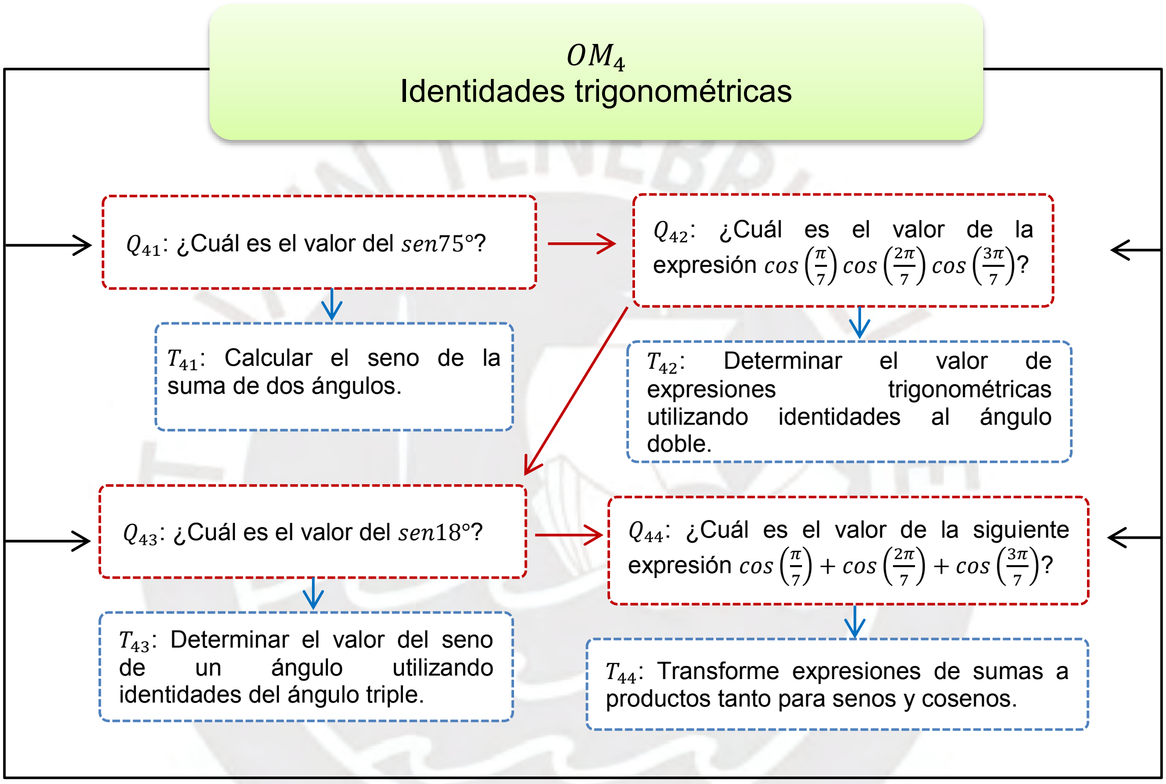


Figura 64. Organización Matemática 4 (OM_4)
Fuente: Elaboración propia

Una de las primeras identidades fundamentales (θ_7) se generó en la OM_2 que permite resolver tareas que relacionan al seno y coseno en el triángulo rectángulo y luego ésta se amplía al ser trabajado también en la circunferencia trigonométrica.

Mediante las técnicas de las construcciones geométricas se puede obtener las razones trigonométricas para algunos ángulos notables como los de 30° y 45°, sin embargo, para otros ángulos notables como 75°, estas técnicas se vuelven muy costosas, razón por la cual es necesario pensar en otras técnicas asociadas a las identidades de ángulos compuestos.

Q_{41}: ¿Cuál es el valor del $sen75°$?

Esta cuestión nos introduce al estudio de las identidades para ángulos compuestos de la suma y diferencia de dos ángulos, con los siguientes tipos de tareas:

T_{41}*: Calcular el seno de la suma de dos ángulos.*

t_{411}: Calcular el $sen75°$ por ángulos compuestos.

t_{412}: Calcular el seno de $sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ por ángulos compuestos.

t_{413}: Calcular el seno de $sen135°$ por ángulos compuestos.

T_{42}: *Calcular el seno de la diferencia de dos ángulos.*

t_{421}: Calcular el seno de $sen16°$ por ángulos compuestos.

t_{422}: Calcular el seno de $sen8°$ por ángulos compuestos.

t_{423}: Calcular el seno de $sen\left(\frac{45°}{2}\right)$ por ángulos compuestos.

El $sen75°$ se puede calcular mediante la suma de dos ángulos notables cuyas razones trigonométrica son conocidas. La tarea que responde nuestra cuestión inicial para esta OM es resuelta mediante la siguiente tarea t_{411}: Calcular el seno de $\mathrm{sen}75°$

Resolución

Paso 1: Expresar al ángulo como la suma de dos ángulos notables

$$sen(75°) = sen(45° + 30°)$$

Paso 2: Por identidades de ángulos compuestos $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$

$$sen(75°) = sen45°cos30° + cos45°sen30°$$

Paso 3: Reemplazando los valores de las razones trigonométricas

$$sen(75°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Paso 4: Por el producto de radicales

$$sen(75°) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Paso 5: Por suma de fracciones homogéneas

Por lo tanto, $sen(75°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

De esta tarea emerge una nueva técnica τ_{12}: Reemplazar en la identidad de la suma para ángulos compuestos, en el cuadro 31 se muestra su OM.

Cuadro 31. *Organización Matemática para las identidades de ángulos compuestos*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{41}: Calcular el seno de la suma de dos ángulos.	τ_{12}: Reemplazar en la identidad de la suma para ángulos compuestos.	θ_{12}: Identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos.	Θ_5: Identidades trigonométricas.

Fuente: Elaboración propia

Esta OM se amplía cuando las técnicas asociadas a las identidades de ángulos compuestos se vuelven muy costosas para resolver cuestiones como la siguiente:

Q_{42}: ¿Cuál es el valor de la expresión $cos\left(\frac{\pi}{7}\right) cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$?

Una tarea asociada a esta cuestión es la siguiente T_{42}: *Determinar el valor de expresiones trigonométricas utilizando identidades al ángulo doble*. La misma que genera otras tareas:

t_{421}: Determinar el valor de la siguiente expresión $cos\left(\frac{\pi}{7}\right) cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

Utilizando la técnica de los ángulos compuestos se podría pensar en expresar cada término como una suma o diferencia por ejemplo $cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ se podría expresar como $cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)$ pero la técnica se hace cada vez más costosa y fracasa, lo cual nos lleva a ampliar el bloque tecnológico con el estudio de las identidades para el ángulo doble.

A continuación, se presenta la resolución de dicha tarea y el entorno tecnológico-teórico que se genera.

Resolución

Paso 1: De la identidad para el ángulo doble $cos\theta = \frac{sen2\theta}{2sen\theta}$

$$M = \left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right]\left[\frac{sen\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)}\right]\left[\frac{sen\left(\frac{6\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}\right]$$

Paso 2: Por reducción al primer cuadrante $sen\left(\frac{4\pi}{7}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$, $sen\left(\frac{6\pi}{7}\right) = sen\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$M = \left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right]\left[\frac{sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)}\right]\left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}\right]$$

Paso 3: Cancelando términos comunes en el numerador y denominador

Por lo tanto, $M = \frac{1}{8}$.

Las técnicas que resuelven esta tarea son dos, la primera τ_{13}: Reemplazar en la identidad del seno del ángulo doble y la segunda τ_{14}: Método de la reducción al primer cuadrante para ángulos menores a una vuelta. Estas técnicas se justifican por el bloque tecnológico de las identidades trigonométricas para el ángulo doble (θ_{13}) y la reducción al primer cuadrante (θ_{14}).

Q_{43}: ¿Cuál es el valor del $sen18°$?

Para dar respuesta a esta cuestión se requiere ampliar el bloque tecnológico de las identidades para ángulos compuestos al estudio de las identidades del ángulo triple con tareas como T_{43}: Determinar el valor del seno de un ángulo utilizando identidades del ángulo triple.

t_{431}: Determinar el seno de $sen18°$ utilizando identidades del ángulo triple.

Resolución

Paso 1: Si $sen3x = cos2x$, entonces $3x + 2x = 90°$

$5x = 90° \Rightarrow x = 18°$

Paso 2: Por identidades del ángulo triple $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$

$3senx - 4sen^3x = cos2x$

Paso 3: Por identidades del ángulo doble $cos2\theta = 1 - 2sen^2\theta$

$3senx - 4sen^3x = 1 - 2sen^2x$

Paso 4: Ordenando la expresión

$4sen^3x + 2sen^2x - 3senx - 1 = 0$

Paso 5: Factorizando

$$(senx + 1)(4sen^2x - 2senx - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (4sen^2x - 2senx - 1) = 0$$

Paso 6: Resolviendo la ecuación por fórmula general $y = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$senx = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2(4)}$$

$$senx = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Paso 7: Por la variación del seno; $-1 \leq senx \leq 1$

$$senx = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Paso 8: Reemplazando x por 18°

Por lo tanto, $sen18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

La técnica emergente de esta tarea es τ_{15}: Utilizar las identidades para el ángulo triple, que a su vez se justifica en la tecnología de las identidades para el ángulo triple (θ_{15}).

Q_{44}: ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}$?

Pensar en las técnicas de ángulo doble y triple sería una primera opción; es decir, se podría expresar a dicha sumatoria en función de un solo ángulo

$$M = cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right)$$

Luego con las identidades del ángulo doble y triple tenemos:

$$M = cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + 4cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) - 3cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$M = 4cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 2cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1$$

Ordenando la expresión se obtiene una expresión cúbica, entonces las técnicas relacionadas con el ángulo doble y triple fracasan originando una nueva OM de las identidades trigonométricas de transformación que engloban este tipo de tareas T_{44}: Transforme expresiones de sumas a productos tanto para senos y cosenos.

t_{441}: Hallar el valor de la siguiente expresión $cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Resolución

Paso 1: Agrupando convenientemente

$$M=\left[cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right]+cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

Paso 2: Por identidades de transformación $cos\alpha+cos\beta=2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$M=2cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

Paso 3: Factorizando

$$M=cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\left[2cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+1\right]$$

Paso 4: Por identidades auxiliares para el ángulo triple $2cos2\theta+1=\frac{sen3\theta}{sen\theta}$

$$M=cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\left[\frac{sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right]$$

Paso 5: Por reducción al primer cuadrante $cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)=-cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$$M=-cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\left[\frac{sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right]$$

Paso 6: Multiplicando por dos a toda la opresión

$$M=\frac{-2sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

Paso 6: Por la identidad del ángulo doble $sen(2\theta)=2sen\theta cos\theta$

$$M=\frac{-sen\left(\frac{6\pi}{7}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

Paso 6: Por reducción al primer cuadrante $sen\left(\frac{6\pi}{7}\right) = sen\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Por lo tanto, $M = -\frac{1}{2}$.

En el cuadro 32 se presenta la OM relativa a las identidades trigonométricas para la transformación de suma a producto.

Cuadro 32. *Organización Matemática para las identidades de transformación*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{44}: Transforme expresiones de sumas a productos tanto para senos y cosenos.	τ_{13}: Reemplazar en la identidad del seno del ángulo doble. τ_{14}: Método de la reducción al primer cuadrante para ángulos menores a una vuelta. τ_{15}: Utilizar las identidades para el ángulo triple. τ_{16}: Reemplazar en la identidad de transformación de suma a producto para cosenos.	θ_{13}: Identidades para el ángulo doble. θ_{14}: Reducción al primer cuadrante. θ_{15}: Identidades para el ángulo triple. θ_{16}: Transformaciones trigonométricas de suma a producto.	Θ_5: Identidades trigonométricas

Fuente: Elaboración propia

Otras cuestiones que también se generan en esta OM serían las siguientes:

Q_{42}: ¿Cuáles son las identidades de transformación de productos a suma?

Q_{43}: ¿Es posible encontrar la suma de senos para n términos?

Q_{44}: ¿Es posible encontrar la suma de cosenos para n términos?

Organización Matemática 5 (OM5)

La OM_5 se genera a partir de la cuestión Q_5: ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas seno y coseno?. Está cuestión nos conduce al estudio analítico funcional del seno y coseno como funciones reales de variable real, respondiendo a nuevas cuestiones, como se observa en la figura 65.

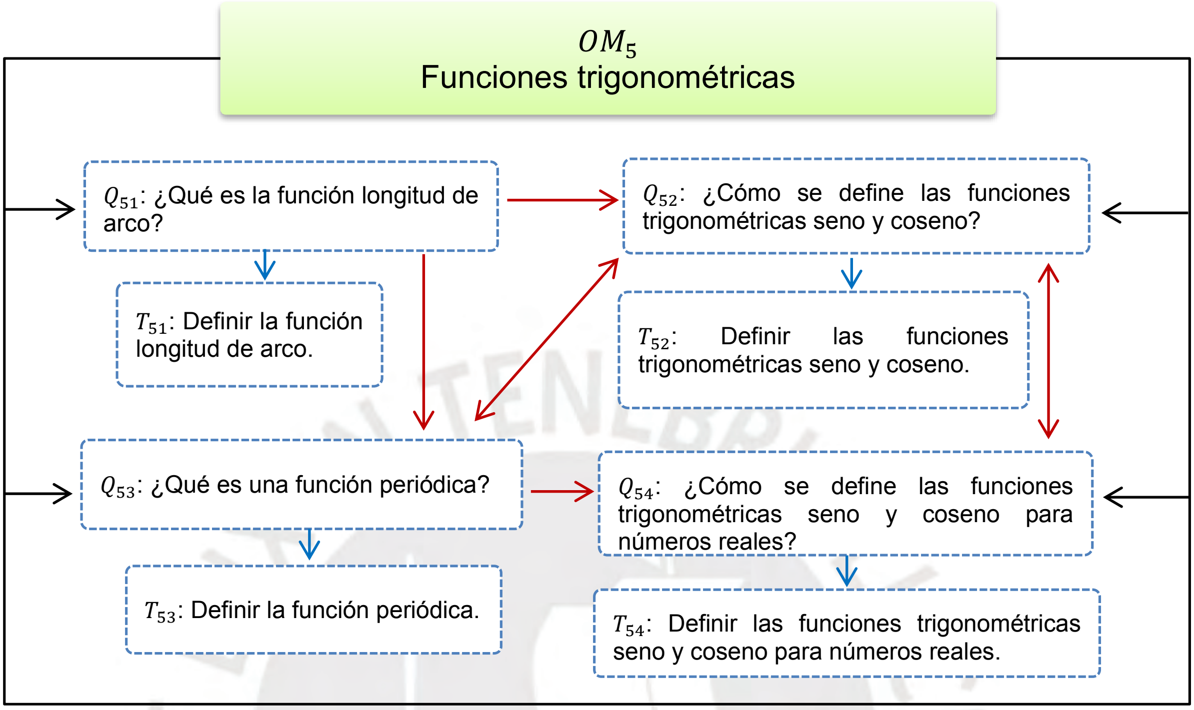


Figura 65. Organización Matemática 5 (OM_5)
Fuente: Elaboración propia

El seno y coseno como objetos matemáticos en sí viven dentro de las funciones trigonométricas, las mismas que son estudiadas en el análisis matemático. A continuación, desarrollamos cada una de las nuevas cuestiones que aparecen en la figura 65, asociadas a los tipos de tareas que las representan y para lo cual se tomará como base nuestro estudio del objeto matemático desarrollado en el capítulo II de la presente investigación.

Q_{51}: ¿Qué es la función longitud de arco?

T_{51}: Definir la función longitud de arco.

De acuerdo con Figueroa (2014) se denomina función longitud de arco a la correspondencia L que asocia a cada longitud de arco α un único punto $P(x, y) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$. Esto es:

$$L: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$$
$$\alpha \rightarrow (x, y), x^2 + y^2 = 1$$

Denotamos por $\mathcal{C}$ a la circunferencia, que llamaremos circunferencia trigonométrica o unitaria. Tenemos por lo tanto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Donde las coordenadas de todo punto en $\mathcal{C}$ están entre -1 y 1, es decir, si $(x, y) \in \mathcal{C}$, entonces $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$ (Lima, 2013).

A la función longitud, Lima (2013) la denomina función de Euler $E: \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ (figura 33) la cual hace corresponder a todo número real t el punto (x, y) de $\mathcal{C}$, de manera que:

- Como $0 \in \mathbb{R}$ y coincide con el punto $A = (1,0)$ de $\mathcal{C}$, es decir, $E(0) = (1; 0)$;
- Dado un número real t, los puntos de $\mathcal{C}$ se desplazan en el sentido positivo si $t > 0$ y en sentido negativo si $t < 0$, una longitud igual a t y $E(t)$ (Lima, 2013).

Q_{52}: ¿Cómo se define las funciones trigonométricas seno y coseno?

T_{52}: Definir las funciones trigonométricas seno y coseno.

A partir de la función de Euler las funciones seno y coseno para cada $t \in \mathbb{R}$ quedarían definidas así $E(t) = (cost, sent)$, donde $x = cost$ y $y = sent$; es decir son la abscisa y la ordenada respectivamente del punto $E(t)$ de la circunferencia trigonométrica (Lima, 2013).

Q_{53}: ¿Qué es una función periódica?

T_{53}: Definir la función periódica.

Según Lima (2013) una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si existe un número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si esto ocurre, entonces $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$. El menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se denomina periodo de la función f. Las funciones trigonométricas seno y coseno son periodicas, de periodo 2π.

Siendo la periodicidad una de las caracteristicas principales de la funciones trigonometricas nos disponemos a definir la funcion seno y coseno con la siguiente cuestión:

Q_{54}: ¿Cómo se define las funciones trigonométricas seno y coseno para números reales?

Esta pregunta puede ser resuelta con la siguiente tarea:

T_{54}: Definir las funciones trigonométricas seno y coseno para números reales.

Según Swokowski (2009) "El valor de una función trigonométrica de un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, siempre que exista ese valor" (p. 429).

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces: $sent = y$ y $\cos t = x$.

Una de las tareas que están relacionadas con esta OM de las funciones trigonométricas y que permite ejemplificar sus diferentes praxeologías sería la siguiente:

t_{541}: Se define la función f por medio de la regla de correspondencia

$f_{(x)} = sen(9x)cot(3x) - 2cos(3x)$, calcular el rango de la función $f_{(x)}$.

Resolución

Paso 1: Por existencia de la $cot(3x)$

$$3x \neq n\pi \rightarrow x \neq \left\{\frac{n\pi}{3}\right\}; n \in \mathrm{Z}$$

Paso 2: Se define el dominio de la función

$$Domf = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{3}\right\}$$

Paso 3: Por la identidad del ángulo triple $sen3\theta = sen\theta(2cos2\theta + 1)$

$$f_{(x)} = sen(3x)(2cos6x + 1)\left(\frac{cos3x}{sen3x}\right) - 2cos(3x)$$

Paso 4: Reduciendo y ordenando la expresión

$$f_{(x)} = 2cos(6x)cos(3x) + cos(3x) - 2cos(3x)$$

Paso 5: Por identidades de transformación $2cosAcosB = cos(A + B) + cos(A - B)$

$$f_{(x)} = cos(9x) + cos(3x) - cos(3x) \rightarrow f_{(x)} = cos(9x)$$

Paso 6: Del dominio

$$x \neq \left\{\frac{n\pi}{3}\right\} \rightarrow 9x \neq \{3n\pi\}$$

Paso 6: Luego

Por lo tanto, $Ranf = [-1; 1]$.

Las técnicas que resuelven esta tarea y el bloque tecnológico-teórico que justifica estas técnicas se presentan en el cuadro 33.

Cuadro 33. *Organización Matemática para funciones trigonométricas*

Tipo de tareas (T)	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teoría (Θ)**
T_{54}: Definir las funciones trigonométricas seno y coseno para números reales.	τ_{17}: Reemplazar en la identidad de transformación de producto suma a para cosenos. τ_{15}: Utilizar las identidades para el ángulo triple. τ_{18}: Criterios para el cálculo del dominio de una función trigonométrica. τ_{19}: Criterio de simplificación a un único operador.	θ_{17}: Transformaciones trigonométricas de producto a suma. θ_{15}: Identidades para el ángulo triple. θ_{18}: Dominio de una función trigonométrica. θ_{19}: Rango de una función trigonométrica.	Θ_5: Identidades trigonométricas Θ_6: Funciones trigonométricas directas

Fuente: Elaboración propia

La construcción del MPR en torno a las nociones trigométricas seno y coseno nos permite observar una riqueza de organizaciones matemáticas que pueden ser articuladas a través de las identidades trigométricas tanto en el triángulo rectángulo como en el plano cartesiano. La semejanza de triángulos constituye el bloque teórico para el estudio del seno y coseno en el triángulo rectángulo, siendo la razón trigonométrica la técnica privilegiada para la resolución de las tareas, ésta a su vez se amplía cuando se define al seno y coseno en el plano cartesiano, en un inicio con el ángulo en posición normal y luego con la circunferencia trigonométrica donde el seno y coseno se definen para todo número real.

CONSIDERACIONES FINALES

Con base en los antecedentes y la construcción del Modelo Praxeológico de Referencia se puede afirmar que el estudio de las nociones trigonométricas seno y coseno aparecen en la Educación Básica Regular del Perú y en los libros de texto, de forma desarticulada y sin una razón de ser, donde la técnica privilegiada en la resolución de las tareas problemáticas es la razón trigonométrica en el triángulo rectángulo.

El estudio epistemológico de las nociones trigonométricas seno y coseno pone en evidencia algunos objetos matemáticos que deben estar presentes en toda Organización Matemática tales como; las nociones de ángulos, la longitud de arco, la semejanza de triángulos y las identidades trigonométricas, que dan origen al estudio de la medición de cuerdas en la circunferencia y tienen un papel articulador en el desarrollo de la trigonometría.

Con respecto a la pregunta de investigación ¿Cómo la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia articula las diferentes organizaciones matemáticas del seno y coseno en quinto de secundaria?, se puede afirmar lo siguiente:

Se logra responder la pregunta de investigación porque durante la construcción del modelo praxeológico de referencia encontramos una organización matemática articuladora como son las identidades trigonométricas, que pueden ser estudiadas en el triángulo rectángulo (en grados), en el plano cartesiano (en radianes) y en la circunferencia trigonométrica para cualquier número real.

En cuanto al objetivo general: Proponer un Modelo Praxeológico de Referencia que articule las diferentes organizaciones matemáticas del seno y coseno en la educación básica regular, se logra la construcción de este modelo que permite tener una estructura para cuestionar la organización didáctica dominante en los libros de texto, reconocer rupturas epistemológicas y una base para generar nuevos diseños didácticos.

El modelo praxeológico de referencia muestra una riqueza de organizaciones matemáticas que pueden ser articuladas a través de las identidades trigonométricas, constituyendo una herramienta para comprender la potencialidad y el dominio de ciertas técnicas, así como de las tecnologías asociadas.

La construcción praxeológica del seno y coseno se fundamenta teóricamente en el análisis matemático. A partir de él, se define el seno y coseno como funciones reales de variable real. Siendo dicho modelo, la referencia para la organización del seno y coseno en la educación secundaria, así como en la educación superior. Sin embargo, al ser el foco de atención en la educación básica regular se descuida otras praxeologías que tienen un carácter articulador como son la semejanza de triángulos y las identidades trigonométricas.

En los textos analizados, el Modelo Epistemológico Dominante es la razón trigonométrica en el triángulo rectángulo que se fundamenta teóricamente en la trigonometría plana. No obstante, algunos investigadores hablan de coordenadas en la circunferencia trigonométrica al referirse al seno y coseno. Por ejemplo, Bressoud (2010) sugiere iniciar el estudio del seno y coseno con la circunferencia trigonométrica debido a que históricamente estos conceptos nacen asociados a la medición de cuerdas en la circunferencia. Se vislumbra así una nueva forma de estudio para el seno y coseno, que vendría a ser un posible Modelo Epistemológico Alternativo.

Del estudio realizado, se concluye que la razón de ser de las nociones trigonométricas seno y coseno son las identidades trigonométricas porque están presentes en la génesis de la trigonometría, y porque han permitido el avance de esta rama de las matemáticas, logrando ser el ente articulador entre las diferentes etapas de su desarrollo, razón por la cual su estudio debe estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

De manera prospectiva la presente investigación puede dar inicio a Actividades de Estudio e Investigación (AEI) y su posterior implementación en un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para las nociones trigonométricas seno y coseno.

REFERENCIAS

Abonía, L. y Miranda, W. (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula.* (Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali). Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/bitstream/handle/10893/10479/CB-0565995.pdf?sequence=1

Almouloud, S. (2015). Teoria Antropológica do Didáctico: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN*. 42, 09-34.

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Brown, S. A. (2006, July). The trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine. *In Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 228).

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112.

Byers, P. (2010). Investigating Trigonometric Representations in the Transition to College Mathematics. *College Quarterly*, *13*(2), n2.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9 – 28.

Caballero, O. (2013). *Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas* (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia).

Chaachoua, H. (2014). *Le role de l'analyse des manuels dans la theorie anthropologique du didactique.* Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339

Chaachoua, H., y Desmoulins, C. (2014, April). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *3e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

Chaachoua, H., Ferraton, G. y Desmoulins, C. (2017). Utilisation d'un modèle praxéologique de référence dans un EIAH. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 301-324). Recuperado de https://citad4.sciencesconf.org

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2000). Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, 54, pp. 51-78.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182.

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas.* Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Da Fonseca, L. (2015). *Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França*. (Tesis doctoral, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo). Recuperado de https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-teses/84604e9554dbd9030885a9411ed0cd25.pdf

Da Silva, A. (2015). *A trigonometría do ciclo trigonométrico: uma análise da transposição didática realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio à luz da teoria antropológica do didático*. (Tesis de maestría en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas, Universidade Federal Rural de Pernambuco). Recuperado de http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/5899/2/Aline%20Oliveira%20da%20Silva%20Barbosa.pdf

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, *16*(2),19-22.

Demir, Ö. (2012). *Students' concept development and understanding of sine and cosine functions*. (Thesis submitted for MSc in Mathematics and Science Education, Universiteit van Amsterdam). Recuperado de https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f107257570.pdf

Eguren, M., De Belaunde, C., y González, N. (2004). Repensando el texto escolar desde su uso: un diagnóstico para la escuela urbana. *Centro Investigación Económica y Social. Perú: Recuperado de http://cies. org. pe/investigaciones/educacion/textos-escolares/diagnostico*.

Esteban, Ibañez y Ortega (1998). *Trigonometría.* Primera edición, editorial SINTESIS.

Fonseca, C., Gascón, J., Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318.

Fernández, M., Ruiz, J. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 51-71. doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. Autores associados.

García, F. J., y Sierra, T. A. (2015). *Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil.*

Gascón, J. (2011b). Las tres dimensiones de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 14(2), 203-231

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, *25*, 99-123.

Gel'fand, I. M., y Saul, M. (2001). *Trigonometry*. Birkhäuser, Boston, MA.

Gonzáles, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma, 32,* 103-130. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

Guadalupe, C., Rodríguez, J. S., León, J., y Vargas, S. (2017). Estado de la educación en el Perú: análisis y perspectivas de la educación básica.

Hobson, E. W. (1957). A treatise on plane and advanced trigonometry.

Illana J. (2012). Matemáticas en el antiguo Egipto. *Suma, 71*, 47-61. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/71/047-061.pdf

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Kendal, M. y Stacey, K. (1997). *Teaching trigonometry*. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/bb94/fd29c031628ec911645d6ebf68c480ead42d.pdf

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. NY: Oxford University Press.

Lérida, M. (2013). *Análisis y propuestas de organización didáctica en torno a la trigonometría en la asignatura de matemáticas, 4to de la ESO (opción B)*. (Máster Universitario de Didáctica de la Matemática, Universidad Internacional de la Rioja). Recuperado de https://reunir.unir.net/123456789/2120

López Sancho, J. M., Refolio Refolio, M. D. C., Rubio Bernal, J., y Moreno Gómez, E. (2007). Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna.

Lima, E. (2013). *Números y funciones reales.* PROFMAT.

Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.

Martín, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. (Máster Universitario de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada). Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Enrique_Martin____.pdf

Martín, N. B. (2015). *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico?* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil). Recuperado de http://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/554/Tesis%20%20Mart%C3%ADn%20Nadia%20B..pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *IIPSI, 9*(1), 123-146.

Matemática Vital 5 (2017). Asociación Fondo de Investigadores y Editores. Lumbreras editores.

Meléndez, J. (1999). *Cómo midió Aristarco la Luna y el Sol*, en Curso de humanidades “Las ideas de la ciencia”. Madrid: Universidad Carlos III.

Montiel, G. (2005) Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis de Doctorado no publicada, CICATA-IPN, México. Recuperado de www.researchgate.net/publication/275155006_Estudio_socioepistemologico_de_la_funcion_trigonometrica/link/5534249a0cf2f2a588b244cd/download

Montiel, G. (2007). *Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría.* En Cecilia Rita Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 590-595).* Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2011). Construcción del conocimiento trigonométrico. Un Estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.

Morey, B. (2003). Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes. *Editora SBHMat, Rio Claro*.

Neto, A.C.M, Geometría Rio de Janeiro: SBM. 2013.

Oliveira, C. (2014). Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. (Tesis de Maestría, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande). Recuperado de http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/bitstream/riufcg/2169/1/CARLOS%20ANDR%C3%89%20CARNEIRO%20DE%20OLIVEIRA%20%E2%80%93%20DISSERTA%C3%87%C3%83O%20%28PPGMat%29%202014.pdf

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de educación básicaregular*. Recuperado de file:///C:/Users/admin/Downloads/DCN%202009%20final%20-%20%C3%BAltima%20versi%C3%B3n%20(5).pdf

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Porras, J. (2017). *Ternas Pitagóricas*. Recuperado de www.researchgate.net/publication/321919987_Ternas_Pitagoricas

Quijano, M. (2015). *El estudio de lugares geométricos en la escuela secundaria: desarrollo de un modelo praxeológico de referencia desde la geometría* *euclidiana y no euclidiana*. (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil).

Quijano, M., y Corica, A. R. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. *REDIMAT*, *6*(2), 192-220. doi: 10.17583/redimat.2017.228. Recuperado de http://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2228/pdf

Quintaneiro, W. (2010). *Representações e Definições formais em Trigonometria no Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro). Recuperado de http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/download/disserta%C3%A7%C3%B5es/mestrado_profissional/2011/disserta%C3%A7%C3%A3o2011-CiceroDaSilvaPereira.pdf

Raiol, E. (2014). O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas. (Tesis de maestría, universidad federal do pará, Belém). Recuperado de http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8551

Ramalho, L. V. (2016). *Trigonometria em livros didáticos do 9º do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática*. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Serrano, L. (2013) *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* (Tesis Doctoral, Universitat Ramon Llull, Barcelona). Recuperado de https://www.mdx.cat/bitstream/handle/10503/30517/Tesis_Serrano_2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Springer, Dordrecht.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Critica.

Sullivan, J. (2006). *Álgebra y trigonometría*. Pearson Educación.

Swokowski, E. W., y Cole, J. A. (2009). Algebra y trigonometría con geometría analítica. *Thomson, décimo segunda edición*.

Tavera, F. A. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.* (Tesis de maestría, Universidad de Medellín, Medellín). Recuperado de http://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/71/El%20pensamiento%20variacional%20en%20los%20libros%20de%20texto%20de%20matem%C3%A1ticas.%20El%20caso%20de%20las%20relaciones%20trigonom%C3%A9tricas.pdf?sequence=1

Tavera, F. y Villa-Ochoa, J. (2016). Sobre las razones y las funciones trigonométricas: ¿qué tratamiento hacen los libros de texto? En Mariscal, Elizabeth (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 105-114).* Recuperado de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/2459/1/Tavera_Villa-ochoa_2016.pdf

Taylor, S.G. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós, Barcelona.

Usón, C. y Ramírez, A. (2002). Un gran matemático. *Suma, 40*, 129-132. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/40/129-132.pdf

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press.

Vontade de Saber Matemática (2013). Editorial FTD, Brasil.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics teacher*, *102*(2), 144-150.

Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). *Algebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw Hill.