PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

FUNCIÓN POR TRAMOS: REPRESENTACIONES GRÁFICA Y ALGEBRAICA EN UNA SECUENCIA DIDÁCTICA MEDIADA POR EL GEOGEBRA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

CRISTIAN FÉLIX ROJAS HUAMÁN

ASESOR

Tito Nelson Peñaloza Vara

Setiembre, 2019

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra en una universidad privada en Lima, Perú. Para dicho trabajo, hemos revisado antecedentes de investigación, los cuales tienen relación con nuestro estudio abordando dos aspectos importantes: el objeto matemático la función por tramos y la mediación a través de un Software en el desarrollo de actividades que involucren la función por tramos. Todo lo mencionado ha ayudado a elaborar nuestras actividades, teniendo presente la importancia del Software en el desarrollo de las mismas como una herramienta de apoyo en la construcción de las actividades, en nuestro caso, el GeoGebra. Además, se justifica el desarrollo de nuestro trabajo de investigación en aspectos académicos, personales y profesionales para mostrar la importancia de la realización de la tesis de investigación. Se ha empleado, como marco teórico, aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) porque nos brindará las herramientas necesarias para nuestro trabajo en el aspecto de analizar las conversiones y tratamientos que se pueden dar entre distintos registros de representación. La metodología empleada en nuestro trabajo, dado a su corte cualitativo, se basa en describir lo realizado por nuestros sujetos de investigación y de esta forma alcanzar nuestro objetivo. Para la parte experimental, se ha seleccionado a dos estudiantes que han participado en las dos actividades, donde una de ellas es mediada por el GeoGebra. Finalmente, creemos que el Software GeoGebra, juega un rol importante al mostrar la formación de la representación gráfica a través de la simulación de la situación planteada y de esta forma se diferencia de las actividades tradicionales, cuyas representaciones gráficas son estáticas, y el marco teórico de la TRRS nos permite poder explicar cómo se realiza la conversión y tratamiento en las representaciones de un registro a otro.

Palabras clave: Modelación, Función por tramos, GeoGebra, Registro.

ABSTRACT

This paper aims to analyze how Humanities students perform transformations between graphical and algebraic records of the function by sections, in a sequence mediated by GeoGebra in a private university in Lima, Peru. For this work, we have reviewed research background, which are related to our study addressing two important aspects: the mathematical object the function by sections and the mediation through a Software in the development of activities that involve the function by sections. Everything mentioned has helped to elaborate our activities, bearing in mind the importance of the Software in the development of the same as a support tool in the construction of the activities, in our case, the GeoGebra. In addition, the development of our research work in academic, personal and professional aspects is justified to show the importance of conducting the research thesis. Aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS) have been used as a theoretical framework because it will provide us with the necessary tools for our work in the aspect of analyzing the conversions and treatments that can be given between different representation registers. The methodology used in our work, given its qualitative cut, is based on describing what has been done by our research subjects and thus achieving our objective. For the experimental part, two students have been selected who have participated in the two activities, where one of them is mediated by GeoGebra. Finally, we believe that the GeoGebra Software plays an important role in showing the formation of the graphic representation through the simulation of the situation and in this way it differs from the traditional activities, whose graphic representations are static, and the theoretical framework of the TRRS allows us to explain how the conversion and treatment is performed in the representations of one register to another.

Keywords: Modeling, Function by sections, GeoGebra, Registration.

AGRADECIMIENTOS

En este arduo camino de la elaboración de la tesis, cumplió un rol muy importante mi asesor, Mg. Tito Nelson Peñaloza Vara, y por ello toda mi gratitud por el trabajo brindado en el logro de este objetivo.

También agradecer a las integrantes del jurado. En primer lugar, a la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por el apoyo brindado para realizar la aplicación de las actividades, y a la Dra. Maria José Ferreira Da Silva, por brindar, en conjunto con la Dra. Flores, las observaciones respectivas para mejorar el trabajo realizado.

También agradecer infinitamente el apoyo brindado por mis padres Félix Rojas y Zenobia Huamán por motivarme a seguir creciendo profesionalmente.

Por último, agradecer a mi esposa, Elizabeth Martínez, por su paciencia y apoyo incondicional en estos dos años de estudio y a mis hijos Franco y Mateo, a pesar de haber sacrificado tiempo junto a ustedes en todo este proceso importante de aprendizaje.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

De acuerdo con la revisión de algunos textos didácticos para el presente trabajo, el tema de función por tramos se presenta generalmente a los estudiantes solo como una representación algebraica y esto podría ser una de las causas principales de problemas de aprendizaje en los estudiantes por no presentar a la función por tramos mediante otro tipo de representación, como, por ejemplo, una representación gráfica.

En ese sentido Carlson (citado por Garijo, 2014), menciona que las dificultades encontradas en relación al aprendizaje de la definición de función, por parte de los estudiantes, es considerarlo como una igualdad de dos expresiones y no como una relación funcional entre dos variables reales en la cual una es independiente y la otra dependiente.

Además Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols (citado en Garijo, 2014) mencionan que gran parte de los estudiantes asocian la noción de la regla de correspondencia de una función por medio de una sola expresión algebraica y esto trae como dificultad no identificar como función a una definida por tramos, así como no considerar como función a la función constante por la razón de no observar un cambio en la pendiente de su representación gráfica, puesto que las imágenes tendrán el mismo valor a medida que cambian los valores del dominio.

Por otro lado, Carlson y Oethrtman (citado por Garijo, 2014), mencionan que la dificultad más resaltante que se puede identificar en los estudiantes es la de confundir características de situaciones reales con características propias de la representación gráfica de la función, así éstos no identifican la relación que existe entre la variable independiente y dependiente o viceversa.

En ese sentido Carlson (citado por Garijo, 2014), plantea una figura que es el corte transversal de una montaña, donde un ciclista se desplazaba y se pide a los estudiantes bosquejar la gráfica que muestre la relación entre la velocidad y la posición del ciclista. En el resultado, los estudiantes ignoraron que la figura representaba el corte transversal de la montaña y copiaron la misma figura para la velocidad versus la posición y no relacionaron cómo afecta la velocidad del ciclista en el camino empinado o cuesta abajo.

También hemos notado dificultades en los estudiantes cuando se les brinda el gráfico de una función por tramos y al momento de indicar su respectivo dominio y rango e inclusive en el análisis de cada tramo, el estudiante no emplea la regla de correspondencia apropiada, según los subdominios que presenta la función.

Lo indicado anteriormente se presenta en la labor del docente, en ese sentido Blázquez y Ortega (citado por Córdoba *et al.*, 2013) mencionan que “en la enseñanza tradicional, se ha abusado del registro algebraico” y esto podría ser uno de los motivos por el cual los estudiantes no logran construir un conocimiento. Al respecto, Duval (2004) sostiene que, para propiciar la construcción de un conocimiento, no resulta suficiente trabajar en un solo sistema de representación, sino que es necesario realizar actividades que permitan la conversión de un tipo de registro de representación a otra.

Actualmente existen herramientas didácticas que pueden contribuir a superar algunas de estas dificultades tales como los softwares de representación dinámica como el GeoGebra, por su versatilidad y la ayuda que podría brindar a los estudiantes para la comprensión de situaciones concretas donde intervenga la función por tramos.

En ese sentido, el objetivo general de nuestra tesis es analizar cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra.

A continuación, describiremos los tres capítulos que estructuran la presente tesis de investigación:

En el capítulo I, presentaremos la problemática de la investigación y también mostraremos las justificaciones científicas que guardan relación con el objeto matemático en estudio, función por tramos y el software GeoGebra y plantearemos la justificación del estudio, la pregunta de la investigación, para finalmente presentar el objetivo general y específico.

También abordaremos el marco teórico en el que se fundamenta nuestra investigación, tomando aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), y en nuestro trabajo, nos centraremos en las dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la conversión y el tratamiento entre los registros de representación semiótica. Además, presentaremos aspectos metodológicos de una investigación cualitativa, que servirá de guía para la investigación.

En el capítulo II, se presentará cómo representar una función por tramos a través del GeoGebra y las limitaciones visuales o gráficas del software, aspectos históricos de cómo se construyó el concepto de función, así como la definición matemática del objeto en estudio y, por último, presentaremos aspectos del tema a investigar en una revisión didáctica de la función por tramos en los textos de Matemática.

En el capítulo III, se mostrará la parte experimental de la investigación, donde mostraremos las características de los sujetos de investigación y del escenario donde aplicamos los instrumentos de investigación.

Finalmente, presentaremos algunas consideraciones finales que se han podido extraer de nuestro trabajo de investigación cuyo objeto matemático en estudio es la función por tramos y también se brindará algunas sugerencias para futuros trabajos de investigación que podrían complementar el estudio realizado.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo, presentamos investigaciones relacionadas con el estudio de la función por tramos para obtener información relevante y conocer sobre los resultados que se han evidenciado, la justificación de nuestra investigación, el marco teórico, la pregunta y objetivos del trabajo realizado y el marco metodológico, las cuales nos permitirán tener un panorama amplio en nuestro trabajo.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta parte, consideramos importante revisar investigaciones sobre la función por tramos, con la finalidad de conocer los estudios más recientes en didáctica de la matemática en relación a la función por tramos, así como entender los resultados y conclusiones que lograron alcanzar, sus actividades y la forma en la cual fue estructurada la problemática de investigación, el marco teórico y la metodología empleada.

Hemos realizado la revisión de literatura en repositorios virtuales de tesis, artículos y reportes de investigación en el área de Educación Matemática, las cuales tienen estrecha relación con la función por tramos, y la mediación de recursos tecnológicos que permitieron a los autores diseñar actividades a los estudiantes para analizar los tipos de representaciones utilizados de manera algebraica, gráfica o tabular, así como los tipos de transformaciones en dichas representaciones, lo cual sería de suma utilidad en el diseño de nuestra etapa experimental. En varias de ellas se presentan investigaciones relacionadas con el tema de funciones donde emplean algún software mediador para el desarrollo de las actividades propuestas en la parte experimental, en nuestro caso emplearemos el GeoGebra para elaborar una de las actividades que se va a proponer y a la vez sirva como un medio para que el estudiante interactúe con la actividad y de esta forma la situación no sea del tipo tradicional puesto que habrá una simulación en tiempo real del problema propuesto.

En dicha búsqueda de literatura hemos encontrado publicaciones con la función por tramos, por ejemplo, en Brasil el trabajo de Xavier (2015) y Nascimento (2017) y en Colombia el de Saa y Trochez (2013), mientras que en Perú solo se pudo identificar un trabajo con el mismo objeto matemático y emplea como marco teórico al Enfoque Instrumental.

A continuación, como primer punto daremos a conocer investigaciones que tienen relación con el objeto matemático en estudio.

Córdoba, Díaz, Haye y Montenegro (2013) presentan un estudio descriptivo y exploratorio sobre las dificultades en la articulación de los registros gráfico y algebraico de la función lineal y cuadrática en 109 estudiantes de un primer curso de Matemática de la carrera de Ingeniería en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina, en la cual utilizaron, como marco teórico, elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) en el sentido de Duval (2004).

Los autores toman como referencia las observaciones más frecuentes realizadas por docentes de matemática en los resultados de sus evaluaciones por la cantidad de notas no aprobatorias y esto se debe no necesariamente por algo propio del tema trabajado, sino por dificultades que provienen de su enseñanza media. Además, las encuestas y pruebas diagnóstico que se realizan a todos los ingresantes revelan la misma situación en el déficit de su formación matemática.

Por ello, los investigadores elaboran una actividad para los estudiantes y de esta forma poder evidenciar los problemas de conversión entre diversas representaciones de funciones reales de variable real, en particular de la función lineal y cuadrática.

En la etapa experimental, los autores proponen actividades que permitan la articulación de representaciones relacionadas a los objetos matemáticos función lineal y cuadrática para que el estudiante realice la conversión de la representación gráfica a la algebraica y viceversa, además los respectivos tratamientos en el registro algebraico. En dichas actividades, los investigadores proponen dos actividades: La primera solo utiliza la representación algebraica de los objetos función lineal y cuadrática. Para ello, se presentan las funciones f y g, cuyas reglas de correspondencia vienen dadas por: $f(x) = ax + b$, donde $a > 0, b < 0$, y $g(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a > 0, c < 0\ y\ b \neq 0$, y el dominio de ambas funciones son los números reales. Se solicita a los estudiantes representar gráficamente dichas funciones expresadas en manera literal sin valores numéricos en ninguno de los coeficientes ni en las constantes.

Para el caso de la función lineal, 68 estudiantes iindicaron que la representación gráfica correspondía a una recta y 38 estudiantes no lograron identificar el intercepto con el eje Y. Para la función cuadrática, 76 estudiantes indicaron que la representación gráfica corresponde a una parábola, 47 de ellos identificó la concavidad de la función y 46 identificaron la intersección con el eje Y, mientras que 22 de ellos confundió el eje de simetría e indicaron que es el eje Y.

En la segunda actividad, Córdoba *et al.* (2013) presentan a los estudiantes las representaciones gráficas de una función lineal y de una función cuadrática respectivamente. Para la primera, se tiene como información el intercepto con el eje Y y también el ángulo de inclinación de la representación gráfica de la función lineal.

Para esta primera parte de la actividad, los estudiantes tenían que obtener la regla de correspondencia, donde 50 de éstos relacionó la representación gráfica con la representación algebraica $f(x) = ax + b$, mientras que 9 de ellos relacionó el ángulo de inclinación de la representación gráfica de la función lineal con la pendiente de la misma y 18 de ellos no logró identificar el valor de *b,* que representaba el intercepto con el eje Y.

En el caso de la representación gráfica de la función cuadrática, los investigadores brindan como información el vértice y los interceptos con el eje X, cuyas abscisas son números simétricos respecto del origen.

Para esta segunda parte de la actividad, los estudiantes, en forma análoga al caso anterior, también debían obtener la regla de correspondencia de f, donde 56 de ellos relacionó la gráfica de la función cuadrática con la siguiente representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$, 48 estudiantes identificó el valor de c y 33 estudiantes identificaron el valor de b, pero la mayor dificultad se evidenció al hallar el valor de a, puesto que 40 de los estudiantes solo identificó el signo, pero no hallaron el valor de dicha constante, mientras que 10 estudiantes relacionaron la gráfica de la función cuadrática con la siguiente representación algebraica $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. En este caso, los estudiantes que emplearon dicha expresión algebraica hallaron los valores de las raíces $r_1\ y\ r_2$, pero de forma similar al caso anterior la mayoría tuvo dificultades en encontrar el valor de a puesto que solo 3 de ellos indicaron el signo que le corresponde.

En ese sentido los resultados obtenidos por Córdoba *et al.* (2013) señalan que los estudiantes no tienen éxito en la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico. Debemos además considerar que las actividades presentadas por los autores fueron aplicadas como una prueba de entrada, lo cual implica que la finalidad del diseño de dichas preguntas es confirmar lo que los estudiantes del primer curso de matemática deben saber, pero no necesariamente aprendido de dicha forma, considerando que en la enseñanza media la forma en la cual los docentes enseñan el tema de funciones se realiza normalmente de una representación algebraica a la representación gráfica, en ese sentido.

La segunda investigación que presentamos fue realizada por Saa y Trochez (2013), dicho trabajo tiene relación con la función por tramos y además empleó como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) en el sentido de Duval (2004), la investigación se realizó con 24 estudiantes de educación básica de noveno grado del Colegio Bennettt en Santiago de Cali, Colombia.

Los investigadores diseñaron e implementaron una secuencia de situaciones para el estudio de la función por tramos apoyada en el uso de la tecnología, en particular el GeoGebra. Para dicha secuencia, los investigadores buscaron un recorte periodístico de entorno local, donde pueda encontrarse información matemática factible para ser representada gráficamente mediante una función por tramos.

En tal búsqueda, los investigadores encuentran una noticia referente al tema de los taxis en la ciudad de Cali, información que sirve a los autores para diseñar la secuencia didáctica constituida de tres actividades que a su vez emplea el GeoGebra como herramienta de apoyo para los estudiantes. Este apoyo consiste en brindar la gráfica de cada situación planteada, donde el estudiante pueda manipular la imagen del taxi que está presente en la ventana del GeoGebra e identificar el comportamiento de las unidades que marca el taxímetro versus el precio.

La primera actividad tiene como finalidad que los estudiantes obtengan el precio que cobrará el taxi A y B, según las unidades que marque el taxímetro. Dicha información es proporcionada en el gráfico, ya que para el taxi A corresponde a una función afín y para el taxi B corresponde a una función por tramos conformada por una función constante y afín.

La segunda actividad tiene por finalidad que los estudiantes identifiquen las variables que intervienen en la situación planteada, y relacionen el precio que se cobra en cierto caso específico para poder identificar la relación de dependencia entre dichas variables.

La tercera actividad presenta la misma información que la actividad anterior pero expresada en forma tabular, lo cual permite vincular los valores ubicados en las celdas de una hoja de cálculo con puntos sobre los gráficos, y tiene como objetivo específico que los estudiantes obtengan información necesaria del gráfico y la tabla para determinar la regla de correspondencia

En la parte metodológica, Saa y Trochez (2013) emplean algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID), para validar las respuestas por parte de los estudiantes al realizar un análisis *a priori* y *a posteriori* y luego confrontar dichos análisis según tal metodología.

En la parte experimental uno de los investigadores antes de iniciar cada una de las actividades se encargó de dar las indicaciones para desarrollar la actividad propuesta, mientras que el otro investigador se encargó de cuestionar a los estudiantes para que ellos reflexionen acerca de lo realizado en su trabajo. Posteriormente, se observa en las dos primeras actividades que los estudiantes no brindaron de manera satisfactoria su respuesta en forma de un par ordenado y no lo relacionaban con un intervalo determinado de la situación dada. En tanto, en la última actividad, se presentó la información mediante representaciones gráfica y tabular, y se observó que los estudiantes no tenían éxito al momento de buscar una expresión en el registro algebraico que describa dicho comportamiento en un determinado intervalo, a pesar que el 50% de los estudiantes había identificado la representación simbólica de la función afín que guardaba relación con la situación planteada, pero en los tratamientos realizados en el registro algebraico cometen ciertos errores que no les permiten realizar la conversión de las representaciones de dichos registros a la representación del registro algebraico.

Finalmente, los autores en base a lo observado en la aplicación de su trabajo y en los resultados obtenidos concluyen que los estudiantes mostraron disposición a las situaciones presentadas, porque provenían de su entorno y resaltaron la importancia del uso del GeoGebra en clase como medio de representaciones, ya que permite a los estudiantes visualizar el comportamiento de las situaciones propuestas.

En base a lo observado se puede indicar que, al proponer una actividad de carácter familiar a los estudiantes, el interés por parte de ellos va ser mayor que al presentar situaciones clásicas, las cuales se basan en problemas intra-matemáticos. También es importante resaltar el uso del software GeoGebra como apoyo para la elaboración de las actividades por parte de los investigadores, y en el caso de los estudiantes para que manipulen ciertos elementos presentados en la vista gráfica del GeoGebra, pero la representación gráfica de la situación planteada ya estaba dada, es decir, la gráfica se presenta de manera estática. Por ello consideramos que, en la etapa experimental de nuestro estudio, emplearemos el GeoGebra como mediador para elaborar una actividad donde la representación gráfica de la función por tramos se presente de manera visual conforme el estudiante manipule las herramientas del GeoGebra.

El artículo de Salazar y Chumpitaz (2013) muestra el desarrollo de una secuencia con el objeto función por tramos y que fue mediado por el GeoGebra con seis estudiantes de la carrera de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola del curso Análisis Matemático. Dicha secuencia tiene como objetivo específico identificar el dominio, rango, determinar la regla de correspondencia, los intervalos de monotonía y realizar transformaciones a la función por tramos.

Para nuestra investigación cuyo objeto es la función por tramos, nos enfocaremos en la actividad, que aborda el estudio de un proceso de instrumentalización en el aprendizaje de la función por tramos.

En ese sentido, los autores mencionan que “la instrumentalización es un proceso referido al surgimiento y evolución de los componentes artefacto del instrumento”. Se debe tener presente que al hablar de artefacto se hace referencia al computador y al mencionar instrumento se indica el artefacto en uso. Respecto a este proceso, Trouche (citado por Salazar y Chumpitaz, 2013) propone tres estadios: Estadio de descubrimiento y selección de las teclas y comandos relevantes, Estadio de personalización y Estadio de transformación.

Además, Salazar y Chumpitaz (2013) emplean como marco teórico, el Enfoque Instrumental y se utiliza como metodología la Ingeniería Didáctica, que ayuda confrontar el análisis a priori y a posteriori del ítem c de la actividad 6.

En la parte experimental, los autores agrupan a los estudiantes en dos equipos, cada uno conformado por tres integrantes. La actividad consiste en dar la representación gráfica de una función, que no es continua por presentar un par de saltos en su representación gráfica, y la finalidad de dicha actividad es obtener una función continua. Para ello, el estudiante deberá emplear la propiedad de arrastre del GeoGebra para poder realizar un tratamiento en el registro gráfico y formar una función que se pueda realizar de un solo trazo, siendo esto el análisis a priori de su estudio.

De acuerdo con los autores, en el análisis a posteriori del desarrollo del equipo 1, se observa que los estudiantes identificaron que la representación gráfica inicial no correspondía a la de una función continua. Por ello, los integrantes de dicho equipo emplearon la propiedad arrastre del GeoGebra para modificar la representación.

En uno de varios intentos, los estudiantes quisieron trasladar la representación del tramo 2, pero observaron que dicho objeto no podía moverse, puesto que se colocó en el GeoGebra la opción de objeto fijo. Por ello, los estudiantes del primer equipo vieron conveniente trasladar las representaciones de los tramos 1 y 2 sin modificar la forma de las mismas y de esta manera consiguieron representar la gráfica de una función que se podía esbozar de un solo trazo.

En tanto, los integrantes del equipo 2 lograron formar una función de un solo trazo, pero modificaron la forma de los tramos 1 y 3, ya que emplearon la propiedad de arrastre del GeoGebra, pero en un solo extremo de dicho tramo.

Los investigadores concluyen que el uso del GeoGebra, en la secuencia de aprendizaje, ayuda a mejorar la comprensión en los estudiantes en identificar el dominio de la función por tramos y a la vez a realizar transformaciones en el registro gráfico.

Por otro lado, Garijo (2014) presenta un trabajo cuyo marco metodológico se apoya en una investigación bibliográfica y además se apoya en un estudio de campo, y se divide en tres grandes grupos.

En la primera parte de la investigación, Garijo (2014) documenta la situación actual de los estudiantes referente al objeto matemático función. Esta documentación se realiza en base a las últimas pruebas dadas por los estudiantes en Barcelona - España, como por ejemplo la prueba Pisa, documentos propios del sector educación que hacen referencia a la organización de los contenidos trabajados durante el primer año de bachillerato y sus respectivos criterios de evaluación.

También, la autora realiza una recopilación de investigaciones anteriores sobre las causas que podrían estar presentes en los estudiantes cuando estudian las funciones, y en particular nuestro en aspectos relacionados a la interpretación gráfica de la función por tramos.

La investigadora menciona que, en la impartición de la clase de Matemática, en el tema de función, se observaron dificultades en los estudiantes al momento de comprender el concepto de dicho objeto matemático, la interpretación y su representación gráfica, uno de los motivos sería por impartir una clase tradicional ignorando que en la actualidad se cuenta con varias herramientas que pueden mejorar la comprensión de algunos temas en matemática, por ejemplo, el tema de funciones.

En la segunda parte del trabajo, la autora realiza un trabajo de campo con docentes de distintas instituciones en Barcelona, España mediante una encuesta para recabar información en tres aspectos: El primero sobre el nivel de conocimiento de Matemática por parte de los estudiantes; el segundo sobre las dificultades que los docentes han observado, por parte de los estudiantes, en el tema de funciones y, por último, si el docente emplea alguna herramienta tecnológica como apoyo para el desarrollo de sus clases.

Toda la información recopilada sirvió para que la investigadora organice y aplique una propuesta didáctica por medio del GeoGebra, como herramienta de apoyo para construir determinados conceptos de las funciones en general. El objetivo específico consiste en que los estudiantes lograran observar las características de ciertas funciones de una manera interactiva, como por ejemplo traslaciones en las representaciones gráficas de las distintas funciones, el dominio y rango respectivo.

El artículo de Ortega y Puig (2015) da a conocer la implementación de un modelo de enseñanza y aprendizaje para un grupo de 16 estudiantes de 1° de bachillerato, cuyas edades oscilan entre 16 a 17 años, donde estudian la función cuadrática.

Los investigadores mencionan que, aparte de buscar que los estudiantes encuentren un modelo matemático a la situación planteada, la cual consistía en analizar el comportamiento de la trayectoria de una pelota al soltarla de una cierta altura, también deben responder preguntas en base a la representación de la función que modelará el fenómeno planteado.

En el documento presentado por los autores, se da a conocer el análisis de tres preguntas de la actividad planteada. Éstas buscan que los estudiantes identifiquen la relación entre el tiempo y la altura cuando se suelta la pelota y para el análisis de la actividad, se les indica que consideren la primera vez que la pelota cae al suelo hasta la segunda vez que toca el suelo.

Los autores proponen como objetivos, dar énfasis al análisis cualitativo del fenómeno, por parte de los estudiantes, y a la vez los conocimientos previos que ellos han adquirido en temas tratados con anterioridad. Finalmente, los investigadores observan las actuaciones de los estudiantes al enfrentarse a una actividad propuesta que involucre a una situación real donde ellos tengan que identificar un modelo matemático que trate de evidenciar el comportamiento de dicho fenómeno planteado.

Sol, Giménez y Rosich (citado por Ortega y Puig, 2015) mencionan la importancia de introducir la modelización en la enseñanza, cuya finalidad es mostrar la relación que existe entre las Matemáticas y el mundo real. A pesar de lo mencionado, los autores señalan que es complicado introducir dicha forma de enseñanza a las aulas por diversos factores, por ejemplo, falta de recursos e infraestructura.

En la parte experimental, los investigadores agrupan a los estudiantes en duplas y lo relevante de esta actividad es que éstos se enfrenten, por primera vez, a una situación planteada de esa forma en el sentido de analizar el fenómeno de la caída de la pelota de una cierta altura.

La aplicación de la actividad se dividió en tres sesiones y cada una de ellas tenía una finalidad. La primera buscaba que las duplas de estudiantes analicen la situación planteada y relacionen el fenómeno del movimiento de la pelota con una función que ellos conocían y justifiquen la elección y a la vez realicen un esbozo de la gráfica de la situación planteada. Para ello, Sol, Giménez y Rosich (citado por Ortega y Puig, 2015) se apoyan en la herramienta gratuita, Video Physics, que les ayuda a grabar el fenómeno analizado y de esta manera poder obtener puntos donde cada coordenada de ese par ordenado indicaba el tiempo y la altura en la que se encontraba la pelota.

Las duplas de estudiantes argumentaron que la gráfica que describe el comportamiento de dicho fenómeno es una parábola, por lo cual la variable algebraica debía tener un exponente con valor igual a 2.

En la segunda sesión, los estudiantes emplearon los puntos obtenidos y lo ingresaron a otra herramienta gratuita llamada Data Analysis. Esta herramienta ayudó a las duplas a encontrar la gráfica de la función que mejor se ajustaba a los puntos y de esta forma encontrar un modelo matemático que pueda describir el fenómeno planteado.

Las duplas de estudiantes consideran que una expresión de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $x \in R$ podría describir el comportamiento de la trayectoria de la pelota. Una vez hallada la regla de correspondencia de la función que describía el fenómeno, respondieron las preguntas planteadas, donde ellos tenían que calcular la altura en la que se encontraba la pelota en determinado instante de tiempo y al obtener valores negativos para la altura las duplas de estudiantes identificaron que esos resultados eran absurdos, ya que la pelota no iba a ubicarse por debajo del suelo y de esta manera se evidenciaba que para dicho fenómeno la función iba a tener un dominio especifico, la cual estaría determinada por el primer y segundo golpe de la pelota al suelo.

La finalidad de la última sesión, según los autores, es analizar los argumentos que las duplas de estudiantes han dado para las tres preguntas planteadas y esto se pudo recabar a través de una entrevista que para los investigadores se ha dado en el transcurso de la actividad con las intervenciones de los estudiantes en el desarrollo de la actividad propuesta. Los autores concluyen que la implementación de dicho modelo de aprendizaje influye en el análisis cualitativo de los estudiantes al momento de recurrir a sus conocimientos previos y a la vez la modelización matemática es importante implementarlo en el proceso de enseñanza, ya que permite relacionar la Matemática con el mundo real y, por ello Ortega y Puig (2015) proponen, como futuros temas de investigación, generar actividades análogas con otras familias de funciones para la implementación de modelos de aprendizaje.

Por otro lado, la investigación de Xavier y Ferreira (2017), tiene como objetivo el estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto función real de una variable real por tramos, por ello el referencial teórico empleado es el de la Teoría de

Instrumentación de Rabardel. Los autores proponen trabajar fuera del ambiente tecnológico, pues los trabajos donde se ha utilizado la Teoría de Instrumentación están ligados sobre todo a herramientas como el GeoGebra, Cabri-3D o calculadoras, donde estas se toman como artefactos, sin embargo, Rabardel (como se citó en Xavier y Ferreira, 2017), señala que un artefacto puede ser material o simbólico, es por ello que los autores proponen como artefacto simbólico la función real de una variable real por tramos.

La metodología empleada para el desarrollo de la investigación, son aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue, el cual les ha permitido concebir, realizar, observar y analizar la secuencia de enseñanza propuesta, a 15 estudiantes del tercer y segundo año de enseñanza media los cuales fueron divididos en 6 parejas y un grupo de tres, siendo los sujetos de análisis estos últimos.

El objetivo principal de la investigación es comprender como el artefacto simbólico función de una variable real por tramos se transforma en instrumento en la resolución de problemas, para ello presentan una secuencia de actividades en donde se busca expresar el área de una determinada figura a partir del movimiento de un punto en la periferia de la figura, por ello para dar solución se hace necesario construir una función de variable real por tramos y asimismo, el estudiante estará movilizando diferentes esquemas.

Finalmente, los autores señalan que se puede comprobar la transformación del artefacto función de variable real por tramos en instrumento, cuando los sujetos de estudio resuelven de forma colectiva o individual la secuencia de actividades, en la investigación hubo estudiantes que mostraron una continuidad en el proceso de instrumentalización al utilizar la función adquirida para resolver otro tipo de problemas. Asimismo, el estudio permitió corroborar la movilización de los esquemas de uso, de acción instrumentada y acción colectiva instrumentada, lo que evidencio la presencia de la Génesis instrumental para los estudiantes, aunque no de forma equitativa.

Por último, el artículo de Pereira y Nascimento (2018), tiene como objetivo el constatar si construcciones dinámicas en GeoGebra aplicadas a una secuencia didáctica, contribuyen al aprendizaje de la función definida por tramos en intervalos reales. Los investigadores citan a algunos autores como Markovits, que presenta un trabajo donde se manifiestan posibles estrategias para superar dificultades en el aprendizaje del concepto de función por medio del uso de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Es por ello que Pereira y Nascimento (2018) proponen una secuencia didáctica basándose en el ambiente computacional Imagiciel, el cual es de investigadores franceses y donde se desarrollan situaciones diferentes de las comúnmente observadas en los textos escolares.

Asimismo, la secuencia fue analizada y organizada teniendo como referencial teórico la Dialéctica Herramienta-Objeto de Douady la cual, mediante un proceso cíclico, donde los estudiantes utilizan sus conocimientos antiguos como herramientas para poder desarrollar nuevos conocimientos llamados objetos, los que después se convertirán en herramientas.

La metodología empleada fueron aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue que permitió, mediante los estudios preliminares, conocer las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función, lo cual contribuyó en la organización de la secuencia didáctica para posteriormente realizar el análisis a priori y finalmente el análisis a posteriori, y asi validar la investigación. Los sujetos de estudio estuvieron conformados por 6 estudiantes del primer año de enseñanza media los cuales fueron divididos en parejas teniendo cada uno de ellos acceso a una computadora en la sala de informática.

Los autores presentan la actividad 6 en este artículo, que es la actividad final de la secuencia didáctica, en ella se busca que los estudiantes movilicen nuevos conocimientos referente a una función real donde los tramos estén compuestos por funciones cuadráticas. Además de que lleguen a la séptima fase de la Dialéctica Herramienta-Objeto, la cual propone el reutilizar los nuevos conocimientos adquiridos en actividades anteriores, para dar solución a actividades más complejas.

Como parte de las consideraciones finales, Pereira y Nascimento (2018) señalan que la Dialéctica Herramienta-Objeto contribuyo en la construcción de los conceptos deseados, en este caso específicamente el de función definida por tramos polinomiales de segundo grado en intervalos reales, además de permitir la movilización de conocimientos anteriores. Asimismo, el cambio de cuadros apoyado en la tecnología, permitió que los estudiantes reflexionaran sobre el concepto de función, partiendo de conocimientos intuitivos, como el caso de la dependencia e independencia de las variables.

Los autores proponen que puede realizarse más investigaciones basados en reconstrucciones del Imagiciel, que permitan el cambio de cuadros abordando otros tipos de funciones como, la función exponencial, funciones trigonométricas, etc.

En las investigaciones y artículos revisados en la primera parte, los resultados evidencian problemas por parte de los estudiantes, al presentarles la representación gráfica de una función y a partir de ella realizar alguna interpretación o cambio de registro, como por ejemplo una transformación del registro gráfico al registro algebraico.

También, en dichos trabajos, los investigadores, mediante el GeoGebra, diseñaron una secuencia de actividades que ayudaron a los estudiantes a identificar las dificultades al querer encontrar una expresión algebraica de una situación cuando se les presenta gráficos de funciones.

Después de haber revisado investigaciones, actas de congreso y artículos relacionados a nuestra investigación, presentaremos aspectos relacionados con la justificación de nuestra tesis.

1.2 Justificación de la investigación

En las investigaciones de Córdoba *et al.* (2013) y Salazar y Chumpitaz (2013), se evidencia que los estudiantes no tienen éxito al tratar de realizar una transformación de una representación gráfica a la algebraica, pero también se menciona la importancia del uso de alguna herramienta tecnológica que permita al estudiante comprender ciertos conceptos, por ejemplo, el dominio y rango de la función por tramos o comportamientos en las familias de funciones.
Además, según Saa y Trochez (2013), las causas que podrían complicar el aprendizaje de funciones se deben a la enseñanza tradicional que se imparte en las aulas al dar énfasis en las representaciones algebraicas, y restar importancia a las representaciones gráficas, no permitiendo al estudiante que relacione e interprete propiedades en ambos tipos de representaciones.

En nuestro caso, se pretende lograr que los estudiantes realicen la conversión en la representación del registro gráfico al algebraico a través de situaciones modeladas por medio de una función definida por tramos, y a la vez identificar si un estudiante, que tiene éxito en interpretar o realizar dicha transformación en una función de dos tramos, conlleve a que tenga éxito en realizar la misma transformación en una función definida por tres o más tramos.

Por ello, creemos necesario plantear situaciones problemáticas mediadas en un entorno de trabajo donde los estudiantes puedan observar distintos tipos de representaciones, por ejemplo, representaciones gráficas y algebraicas dinámicas al tener como medio de apoyo al GeoGebra, el cual permitirá que los estudiantes puedan ver el comportamiento en las representaciones de la función en tiempo real en la actividad que se pretenda mostrar a través del uso de herramientas tales como una casilla de verificación, animación, zoom y otros.

También hemos podido identificar que el tema de función por tramos es fundamental en el desarrollo académico de los estudiantes de primer ciclo en distintas carreras de humanidades, puesto que en los siguientes ciclos estudian temas de formación profesional, por ejemplo, en la carrera de Economía estudian nociones como Oferta y demanda, Elasticidad, Eficiencia y equidad, Utilidad y demanda, etc. Cada una de dichas nociones se expresa matemáticamente como una función real de varias variables reales, y para un estudio inicial se expresan en términos de una sola variable, por ello es fundamental aprender la función lineal, cuadrática y, en otros casos, la función por tramos, como se puede apreciar en el libro de Economía de Michael Parkin (2009) que se emplean en distintas universidades privadas de Lima metropolitana.

En nuestro caso, nos enfocaremos en carreras de negocios y, en particular, la de Gestión, donde la función por tramos es importante en el desarrollo profesional de los estudiantes. Por ejemplo, en los primeros ciclos, les permiten representar matemáticamente costos, ingresos y utilidades en situaciones del mundo real, mientras que en cursos de carrera y propios de su formación profesional les ayuda a enfrentar situaciones que son abordadas en Economía e inclusive en Estadística.

En los siguientes cuadros 1, 2 y 3, se observa la malla curricular de dichas casas de estudio, donde el tema de función por tramos o función seccionada forma parte del silabo del primer curso de Matemática Básica de estudios generales que llevan los estudiantes y esto evidencia la importancia del estudio de dicho objeto matemático para distintas carreras profesionales en su desarrollo académico.

Cuadro 1. Malla curricular de la carrera de Gestión y Alta Dirección de la PUCP

Gestión y Alta Dirección	Gestión de Organizaciones	
	Matemática 1	
	Matemática 2	MAT124
	Economía	
	Lógica	
	Estadística	MAT124

Fuente: www.pucp.edu.pe

En el cuadro 1, podemos observar que el primer curso de Matemática 1 es prerrequisito para el siguiente curso de Matemática 2, a la vez el tema de función por tramos, que está en el sílabo de Matemática 1, servirá para siguientes cursos generales, como Economía, donde emplearán algunos aspectos de la función por tramos.

A continuación, presentamos la malla curricular de la Universidad de Lima en la carrera de Administración que tiene relación con la carrera anterior.

Cuadro 2. Malla curricular de la carrera de Administración de la Universidad de Lima

NIVEL I	NIVEL II
Desarrollo Personal y Social 3 créditos	Economía y Empresa 3 créditos
Lenguaje y Comunicación I 5 créditos	Lenguaje y Comunicación II 3 créditos
Metodologías de Investigación 3 créditos	Procesos Sociales y Políticos 3 créditos
Globalización y Realidad Nacional 4 créditos	Temas de Filosofía 3 créditos
	Estadística Básica para los Negocios 3 créditos
Matemática Básica 5 créditos	Matemática Aplicada a los Negocios 5 créditos

Fuente: Adaptado de www.admision.ulima.edu.pe

Como se puede observar en el cuadro 2, el primer curso que llevan los estudiantes es Matemática Básica, donde se le proporciona información sobre el tema de funciones que serán empleados en situaciones aplicadas en el curso de Matemática Aplicada a los Negocios.

Por último, en el cuadro 3 presentamos la malla curricular de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas en la carrera de Hotelería y Administración que tiene relación con las carreras anteriores de las otras casas de estudio.

Cuadro 3. Malla curricular de la carrera de Hotelería y Administración de la UPC

CICLO 1 CRD 22									
Introducción a la Hotelería	3	CARRERA					1		
Selección, sanidad e higiene de alimentos y bebidas	3	CARRERA						1	
Introducción al Turismo	3	CARRERA							
Globalización: apertura y tendencias	4	GENERAL		1					
Fundamentos para el cálculo	5	GENERAL				1			
Comprensión y producción de lenguaje I	4	GENERAL	1						

Fuente: pregrado.upc.edu.pe

En el cuadro 3, el primer curso de Matemática que llevan los estudiantes tiene por nombre Fundamentos para el cálculo, cuya finalidad es brindar conocimientos específicos como, por ejemplo, el tema de funciones que les ayudará a estudiar nociones de oferta, demanda, costos, ingreso y utilidad. Además, les ayudará a tener conocimientos sobre funciones y, en particular, la función por tramos que serán útiles en el curso de matemática financiera.

Como se pudo observar en los cuadros 1, 2 y 3, el estudio de la función por tramos es pertinente en la formación académica del estudiante que lleva alguna carrera afín a negocios. Pensamos que es de suma relevancia, para nuestros propósitos, proponer en la etapa experimental de nuestro estudio situaciones que no solo estén expresados en un contexto intra-matemático, sino también en un contexto extra-matemático. Además, dichas situaciones deberían estar conectadas o relacionadas con el entorno cotidiano o laboral donde los estudiantes puedan hallar una regla de correspondencia que exprese matemáticamente distintas situaciones, y a partir de ella realizar representaciones de distintos tipos tales como algebraicos, gráficos y tabulares, así como realizar transformaciones en cada uno de ellos, lo cual permitió a los investigadores de nuestros antecedentes lograr sus objetivos propuestos.

Hemos observado en nuestra labor docente que, el estudiante, al enfrentarse a una situación donde ellos deben encontrar la regla de correspondencia o interpretar una situación real como lo menciona Garijo (2014), con frecuencia se evidencian obstáculos ya que los estudiantes no comprenden que cada parte de la representación gráfica de la función está asociada a una representación algebraica distinta al tener un subdominio en cada tramo, y tratan de encontrar una sola expresión algebraica para dicha función. Esta dificultad de no identificar los subdominios, conlleva a no poder realizar una adecuada representación gráfica de la función a partir de su representación algebraica y, por último, en la correcta interpretación de la situación que pueda presentárseles.

Consideramos el estudio de la función por tramos como uno de los temas más importantes en el tema de funciones puesto que en su entorno profesional muchas situaciones se pueden determinar una regla de correspondencia a través de una relación funcional pero otras tendrán comportamientos que podrán ser descritas por más de una expresión algebraica para ciertos valores que pueda tomar la variable independiente, así como la inserción de la tecnología en el proceso de aprendizaje de dicho objeto y de esta forma suplir ciertos vacíos que puedan presentar nuestros estudiantes de primer ciclo de la carrera de Gestión en el curso de Matemática básica. En nuestro caso, emplearemos el GeoGebra como medio de apoyo para diseñar actividades en nuestra etapa experimental porque nos ayudará a alcanzar los objetivos de nuestra investigación cuyo objeto matemático es la función por tramos, como lo fue para los autores de las investigaciones presentadas como antecedentes de nuestro trabajo, ya que facilitaría la labor de realizar transformaciones en las representaciones gráficas de la función por tramos y de esta manera apoyaría a los estudiantes en la parte visual de las situaciones que se presentarán en nuestro estudio.

Por otro lado, en la búsqueda de información local en repositorios virtuales sobre la función por tramos, se pudo encontrar un estudio sobre el mismo objeto matemático que fue realizado por Chumpitaz (2013), donde emplea como marco teórico, el Enfoque Instrumental, pero no hemos encontrado estudios en educación matemática con otros marcos teóricos de referencia tal como la Teoría de Registros de

Representación Semiótica (TRRS), mientras que si se evidencia una producción ligeramente mayor en otros países tal como se presentó en nuestros antecedentes.

Por ello, creemos necesario realizar un estudio de dicho objeto matemático con el marco teórico de la TRRS y tener como herramienta de apoyo al GeoGebra en el diseño de actividades para la etapa experimental, y de esta forma contribuir con la comunidad local en Educación Matemática al presentar un enfoque distinto con la función por tramos al estudiar las transformaciones que los estudiantes realizan cuando cambian una representación gráfica a la algebraica.

Al haber mostrado la pertinencia del presente estudio, a través de la relevancia académica, personal y profesional, vemos pertinente realizar el presente estudio con la mediación del GeoGebra.

Al tener en cuenta las investigaciones de referencia presentadas y la justificación de la investigación, presentaremos el marco teórico que nos servirá en nuestro estudio.

1.3 Registros de Representación Semiótica

Según Duval (2004), "No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (p. 25). Además, el autor menciona que la noción de representación tiene tres momentos distintos a través de los años: La primera por los años 1924 – 1926 se denomina *representación mental* que hace referencia a la "evocación de los objetos ausentes"; en un segundo momento, por los años 1955 – 1960, se presenta la *representación interna o computacional* que hace referencia a una codificación de la información y, por último, el tercer momento, por el año 1985, aparece la *representación semiótica* como referente a la adquisición de conocimientos matemáticos y las posibles dificultades que esta puede ocasionar en los estudiantes.

En ese sentido, el autor menciona que un *registro de representación* es un sistema semiótico. Además, el autor menciona que los sistemas semióticos deben permitir que se desarrollen las tres actividades fundamentales que están ligadas a la semiosis (representaciones), estas son:

Formación: Hace referencia para enunciar una representación mental o para llamar algún objeto real dentro de un registro de representación en particular.

Por ejemplo, una formación de una representación semiótica para la función por tramos que esté formado para dos expresiones y el punto (x_0, y_0) divida a los dos

tramos, siendo este el punto final del tramo lineal cuyo dominio sea $< -\infty; 0]$ y a la vez dicho punto sea inicio para el tramo cuadrático cuyo dominio sea $< 0: +\infty >$. En dicho caso, el tramo lineal puede ser representado por la siguiente expresión $f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$ donde (x_0, y_0) es un punto de paso de la función lineal f, y m es la pendiente, también el tramo lineal puede ser representado de la siguiente forma $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(y_1) - f(y_0)}$ donde (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son puntos de paso de dicho tramo lineal.
Para el caso del tramo cuadrático, se puede representar por las siguientes expresiones: $g(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y $c \in \mathbb{R}$, en dicha expresión, c representa el intercepto con el eje Y, también el tramo cuadrático se puede representar por la siguiente expresión $g(x) = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) representa el vértice de la función cuadrática y, por último, también podemos pensar en la siguiente representación $g(x) = a(x - r_1)\,(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 son las abscisas de los interceptos de g con el eje X. Así mismo, el signo del coeficiente del término cuadrático a brinda información sobre el sentido de la concavidad de su gráfica, y si el valor de k corresponde a un máximo o mínimo de la función g.
Como se pudo observar, para el tramo lineal, se muestran dos formas para poder representar dicho tramo, pero esto no quiere decir que representan objetos diferentes, sino que son distintas formas de representar un mismo objeto matemático. De manera análoga, el tramo cuadrático puede ser expresado de tres formas algebraicas distintas.

De acuerdo con Duval (2004), el aporte de un software mediador a través de una computadora es otra manera de realizar la formación de una representación semiótica. Para poder realizar dichas representaciones es necesario que el sujeto conozca y comprenda los comandos básicos en dicho medio, también debe tener conocimiento de las nociones matemáticas que va a emplear para poder realizar una representación adecuada. En ese, sentido el GeoGebra nos va a permitir que el estudiante en nuestra actividad pueda ver el comportamiento de la representación gráfica de la función por tramos. Según el autor, "las computadoras constituyen un modo fenomenológico de producción radicalmente nueva" (Duval, 2011, p. 137).

Para manifestar la formación de una representación gráfica de una función por tramos, empleando la vista gráfica del GeoGebra, se tiene que tener en cuenta la relación del sujeto con el software. El sujeto, por medio de los comandos del GeoGebra ingresará la secuencia lógica que el software ejecutará y mostrará en la pantalla del ordenador, específicamente en la vista Gráfica, la representación gráfica de una función por tramos, por ejemplo, para formar una representación gráfica de la función C, cuya regla de correspondencia está dada por:

$$C(x) = \begin{cases} x + 15, si\ 0 \leq x < 100 \\ 0.1(x-90)^2, si\ x \geq 100 \end{cases},$$

se escribirá en la barra de entrada el siguiente comando:

Si(0 ≤ x < 100, x + 15, Si(x ≥ 100, 0.1(x - 90)²))

luego presionamos la tecla Enter y el GeoGebra generará la representación de dicha función en la vista gráfica, tal como se observa en la figura 1.

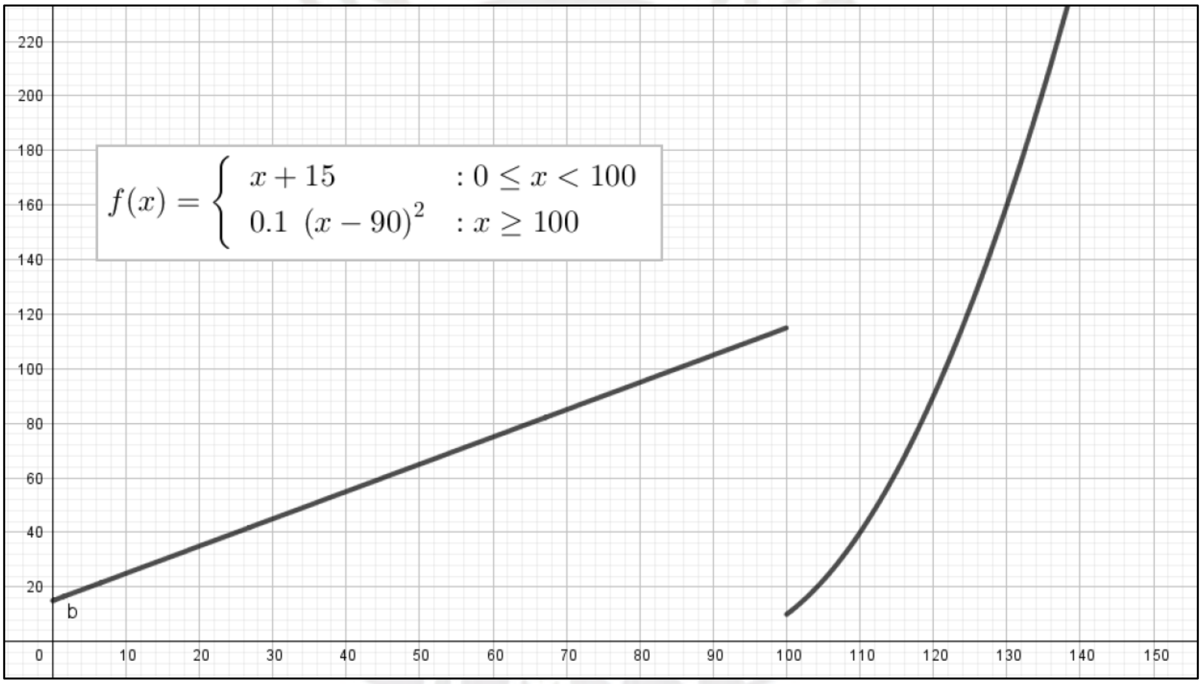


Figura 1. Formación de una representación gráfica en GeoGebra

También podemos formar otra representación gráfica de la función C definida anteriormente empleando el GeoGebra, pero en este caso mediante uso de un deslizador para que el sujeto pueda observar el comportamiento de la función conforme la variable independiente toma los valores del dominio asociados a dicho deslizador.

Para ello, elegimos la opción de ocultar cuadrícula que se encuentra en la zona superior izquierda de la ventana de la vista gráfica, después se busca en la barra de herramientas el penúltimo ícono y seleccionamos el comando deslizador "*a*" colocando los valores que pueda tomar *x,* que en nuestro caso será de 0 a 300 porque dicha opción no admite ingresar la expresión $+\infty$, además al deslizador se le asignará un incremento de 0,1 por cuestiones visuales. Luego, digitamos en la casilla de Entrada el siguiente comando

Si(0 ≤ a < 100, a + 15, Si(a ≥ 100, 0.1(a - 90)²))

luego, en la casilla de entrada, se definirá un punto de la siguiente forma $(a, C(a))$. A continuación, se hará anti-clic al punto que se muestra en la ventana gráfica y se activará la opción rastro y, finalmente, se hará anti-clic al deslizador y seleccionamos la opción animación, lo cual dará inicio a la creación de la representación gráfica de la función C, tal como se observa en la figura 2.

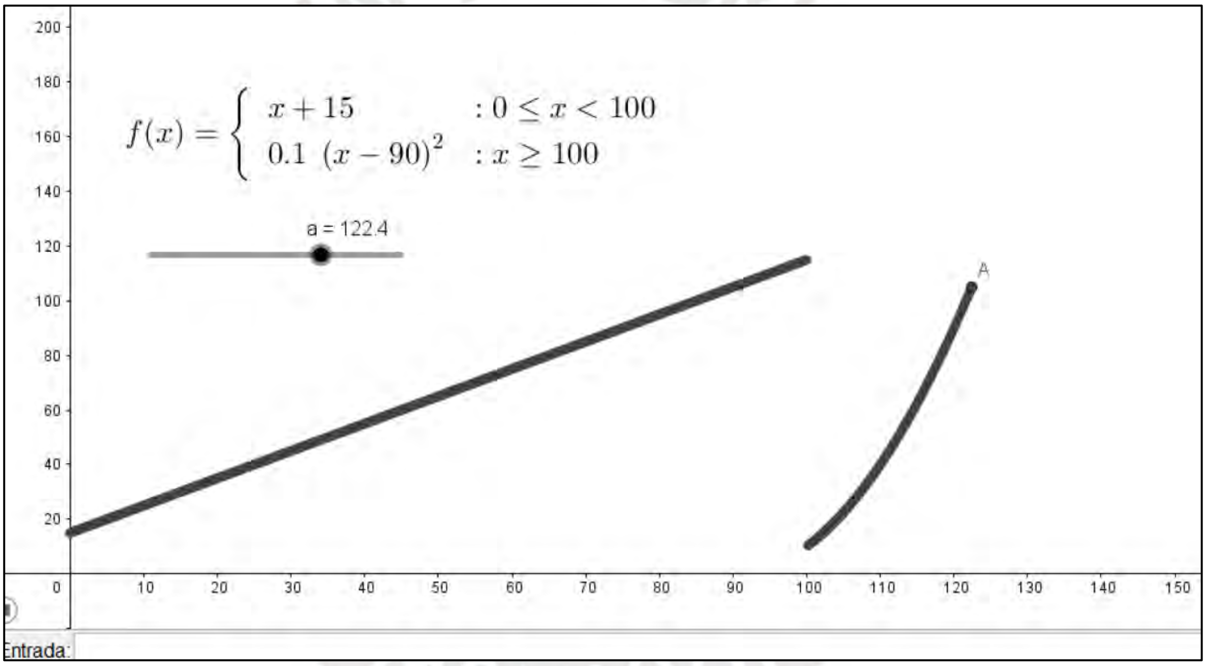


Figura 2. Formación de una representación gráfica de la función por tramos en el GeoGebra mediante el deslizador

En los dos casos anteriores se ha presentado la función por tramos con un dominio acotado, esto con la finalidad de tener presente que las actividades que se van a trabajar hacen referencia a situaciones de un entorno profesional donde el dominio siempre será un subconjunto de $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Tratamiento, según Duval (2004), hace referencia cuando se realiza una transformación de una representación en un mismo registro.

Por ejemplo, en la función por tramos si uno de los tramos de dicha función está dada por un tramo cuadrático que tiene como vértice (2,3) y pasa por el punto (1,1), entonces la regla de correspondencia de dicha función se puede encontrar empleando la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ porque nos da información sobre el vértice V(*h, k*) de la función cuadrática, de esta manera estaremos empleando la representación algebraica.

Para ello, reemplazamos las coordenadas del vértice que corresponde a (*h, k*) en la expresión de la forma canónica y después se empleará el punto de paso (1,1) para poder determinar el valor de "a". Al final de realizar dichas operaciones, se presentará la regla de correspondencia de la función cuadrática en su forma canónica.

$$f(x) = a(x-2)^2 + 3$$

Reemplazando el punto de paso (1,1) para poder encontrar el valor de "a".

$$f(1) = a(1-2)^2 + 3 = 1$$

$$a(-1)^2 + 3 = 1$$

$$a(1) = 1 - 3$$

$$a = -2$$

La representación de la función cuadrática quedaría de la siguiente forma:

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 3$$

También dicha representación de la función cuadrática se puede expresar mediante la forma general $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$. Para ello se deberá realizar tratamientos en la representación algebraica, como se muestra a continuación.

$$f(x) = -2(x^2 - 4x + 4) + 3$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 8 + 3$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

En cuanto a lo presentado, podemos observar que, en el tratamiento de dicha representación algebraica, se usaron algunos cálculos algebraicos y aritméticos, por ejemplo: al resolver una ecuación de primer grado, al desarrollar un binomio al cuadrado y al realizar operaciones de sumas y restas.

Conversión, según Duval (2004), se refiere cuando se realiza una transformación de una representación de un tipo de registro a otro distinto.

Por ejemplo, en la figura 3, se muestran representaciones de la función por tramos, en cuatro tipos de representación diferentes. En primer lugar, se muestra una información en el registro lenguaje natural y a través de tratamientos en el registro algebraico podemos obtener la regla de correspondencia que describe lo mencionado en nuestro enunciado. Luego de la misma forma se realizan tratamiento en el registro numérico que nos permite poder obtener la representación de la situación propuesta en el registro gráfico.

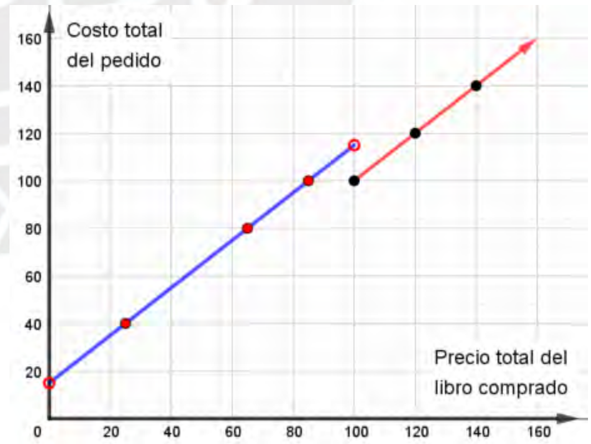
Representación de lenguaje natural	**Representación algebraica**
Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100, pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total *x* del libro comprado.	$C(x)=\begin{cases} x+15 \ , & si \ \ x<100 \\ x \ , & si \ \ x \geq 100 \end{cases}$
Representación par ordenado	**Representación gráfica**
$(25; 40)$ $\downarrow \quad \downarrow$ $(x\ ;\ y)$ Donde: x: Precio total del libro comprado y: Costo total del pedido	

*Figura 3. R*epresentaciones de la función por tramos

En la figura 3 se puede observar que, en la representación de lenguaje natural, es necesario mencionar la información del precio del pedido que es igual a \$100, pues ese valor nos indica que la función va a tener un comportamiento distinto antes y después de dicho valor. A continuación, se realiza el análisis de algunos casos específicos al realizar pedidos cuyos costos sean menores o mayor e igual a \$100 y analizar el comportamiento del costo total de dicho pedido para después poder realizar una generalización, a través de tratamientos en el registro algebraico, y, de esta forma, obtener la función costo C y finalmente poder representar la función en el registro gráfico.

Según Duval (2004), si un sistema semiótico permite las tres actividades fundamentales descritas anteriormente entonces podremos hablar de un **registro de representación semiótica**, por ejemplo, en esta investigación trabajaremos con estos registros de representación semiótica: lenguaje natural, algebraico, gráfico y par ordenado.

Además, para Duval (2004), los registros de representación semiótica “Constituyen el margen de libertad con que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo de una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor” (p. 30).

También el investigador menciona que no se hace una diferencia entre las actividades de tratamiento y de conversión de las representaciones. Para ello, el autor afirma que un tratamiento es una transformación que se realiza en un mismo registro, mientras que la conversión hace una transformación de la representación de un tipo de registro a otro.

Asimismo, el investigador presenta dos clasificaciones de los diferentes tipos de representación, para lo cual primero recurre a la oposición consciente/no-consciente “Es la oposición entre, de una parte, lo que aparece ante un sujeto y él observa y, de otra, lo que a él se le escapa y no puede observar” (p. 33), mientras que el paso de lo no-consciente a lo consciente hace referencia a un proceso de objetivación para el sujeto toma consciencia, a este proceso de objetivación el autor menciona que consiste en el descubrimiento por el mismo sujeto de algo que hasta el momento no sospechaba. En ese sentido, las representaciones conscientes presentan un carácter intencional.

La segunda clasificación que el autor menciona es la oposición externo/interno que “Es la oposición entre lo que, de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, al contrario, no lo es” (p. 34). Además, las representaciones externas son elaboradas por un sujeto o un sistema, mientras que las representaciones internas pertenecen a un sujeto y no son comunicadas a otro.

Además, el investigador menciona que toda actividad cognitiva humana se fundamenta en la complementación de los dos siguientes tratamientos: Cuasi-instantáneo e intencional. El tratamiento cuasi-instantáneo hace referencia a la familiaridad o la experiencia de una larga práctica, mientras que el tratamiento intencional necesariamente, para ser ejecutado, requiere al menos un tiempo de un control consciente.

Tomando en cuenta algunos aspectos de la TRRS presentamos la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos y la metodología de la investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de investigación:

¿Cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra?

Para responder la pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra.

Con el propósito de lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

- *Identificar los diferentes registros de representación semiótica de la función por tramos que los estudiantes de Humanidades utilizan en una secuencia mediada por el GeoGebra.*
- *Determinar las conversiones de la representación de la función por tramos del registro gráfico al registro algebraico realizada por los estudiantes de Humanidades en una secuencia mediada por el GeoGebra.*
- *Establecer los tratamientos en el registro algebraico realizado por los estudiantes de Humanidades en una secuencia mediada por el GeoGebra.*

1.5 Aspectos metodológicos

En esta sección, se mostrará la metodología que se empleará en la investigación, que es de corte cualitativo. Además, se mostrará la pertinencia y relevancia.

Investigación cualitativa

Las características de esta investigación al ser de corte cualitativo se basaron en los fundamentos de Creswell (2010), teniendo en cuenta las estrategias de la investigación y análisis de datos que se realizaran. Tales características serán examinadas y discutidas a continuación. En el campo de la investigación en Educación Matemática, generalmente hay una cantidad significativa de investigaciones cualitativas.

Además, Bogdan y Biklen (1994) confirman el hecho de que la influencia de los métodos cualitativos en el estudio de distintos contenidos educativos está creciendo. Según los autores, muchos de los investigadores educativos manifiestan una actitud positiva hacia los cambios en las estrategias de investigación, considerando el enfoque cualitativo tanto en el nivel pedagógico como en el nivel de condición de investigador.

Este suceso puede explicarse en mucho de los casos por algunas características peculiares de este tipo de investigación, por ejemplo, la flexibilidad con respecto a los métodos y procedimientos usados, que pueden variar de acuerdo con las estrategias empleadas por el investigador.

Creswell (2010) menciona: “a pesquia qualitativa pode ser compreendida como um meio de exporar e entender o significado que os individuos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano” (p. 26), es decir, que una investigación cualitativa ayuda a comprender las razones que una persona o grupo de personas puedan señalar a un problema social o humano.

Otra característica de la investigación cualitativa, según el autor, está referida al papel que cumple el investigador al relacionar el significado de un fenómeno a partir del punto de vista de los participantes, por medio de un proceso inductivo y como instrumento para la recolección de datos. Se pueden emplear preguntas abiertas, imagen y entrevistas, en nuestro estudio emplearemos una actividad que estará conformada por cinco preguntas que deberán ser respondidas por nuestros participantes.

Además, Creswell (2010) presenta otras cinco características que presenta una investigación cualitativa:

- El ambiente natural es el espacio donde uno puede recolectar los datos y donde los participantes van a participar en el problema. Esta información recolectada a través de un contacto directo entre el investigador y participante es una característica importante de la investigación cualitativa.
- Los investigadores cualitativos son la herramienta fundamental para la recolección de datos y se realizan a través de documentos, observación, entrevistas u otros medios que permitan obtener los datos.
- Los investigadores cualitativos con frecuencia recuerren a distintas fuentes de datos, como documentos, observaciones y entrevistas, de esa forma no depende de una sola fuente.
- En una investigación cualitativa, el investigador debe dar importancia en comprender el significado que los participantes dan sobre el problema y no estar pendiente en los significados que él u otros investigadores aportan al estudio.
- La investigación cualitativa es interpretativa, donde los investigadores mencionan lo que ven, oyen y entienden. Además, dichas interpretaciones no pueden estar alejadas de sus orígenes, contexto o alcances anteriores.

Por otro lado, el investigador cualitativo debe dar énfasis por cómo se presenta su objeto de investigación en las actividades elaboradas.

En ese sentido es importante tener en cuenta la metodología de nuestra investigación así como nuestro marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica para el desarrollo de nuestro estudio.

Variables didácticas

Antes de mencionar que es una variable didáctica se debe definir primero qué es una variable cognitiva. En ese sentido Almouloud (2017), indica que es un parámetro que está presente en una situación que al cambiar los valores que se les pueda asignar origina un cambio en el conocimiento necesario para la resolución del problema o proceso de aprendizaje.

Además, Almouloud (2017), menciona que una variable didáctica es una variable cognitiva y ésta puede ser manipulada por el profesor originando un cambio en el orden de las estrategias resolución, es decir, que esto generará ciertos comportamientos de aprendizaje en los estudiantes y a la vez provocorá distintas respuestas por parte de ellos. En ese sentido, el autor indica que es importante la elección de estas variables porque dependerá de ellas provocar un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes. Por ello, se requiere la identificación de dichas variables por parte del profesor y realizar una evaluación de los cambios de los valores en cada una de ellas. Según Almouloud (2017) la correcta definición de dichas variables influenciará en los conocimientos que uno quiere que los estudiantes movilicen y en las estrategias que ellos puedan en la resolución de las tareas que puedan enfrentar.

Por último, es importante considerar que el autor distingue dos tipos de variables, macro didácticas y micro didácticas, la primera hace referencia a la organización integral secuencia de actividades mientras que la segunda esta relacionada con la organización local de la secuencia de actividades.

En ese sentido, en nuestra investigación dichas variables están relacionadas con el ambiente donde se aplicará la actividad, en la forma cómo van a trabajar los estudiantes y en la forma de entrega de las actividades haciendo referencia a las variables macro didácticas; mientras que nuestras variables micro didácticas estarán presentes, por ejemplo, en la cantidad de tramos que estará conformada nuestra función.

CAPITULO II: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo, mostraremos cómo el GeoGebra nos puede brindar un apoyo en el desarrollo de nuestra investigación y también se revisará dos textos didácticos que nos permitirá comprender cómo se transmite o enseña a los estudiantes el tema de función por tramos.

2.1 Función por tramos en GeoGebra

En esta sección, mostraremos las distintas formas de realizar representaciones gráficas de una función por tramos empleando el software dinámico GeoGebra, así como sus alcances y limitaciones de tipo visual o gráfico.

Además de ser un ambiente de representaciones dinámicas y de fácil manipulación que se puede instalar en un celular, Tablet, Laptop, trabajarlo de manera Online o mediante su versión portable, el GeoGebra permitirá que los estudiantes puedan interactuar a través de la casilla de verificación que le brindará casos distintos donde puedan analizar ciertos comportamientos y de esa manera obtener información para la resolución de la tarea o actividad propuesta.

También se mostrará la secuencia a seguir para realizar la representación gráfica de una función por tramos en la vista gráfica del GeoGebra, identificando dos situaciones para su dominio correspondiente, la primera situación, será cuando la unión de los subdominios de cada tramo de la función sea igual al conjunto de los números reales o la segunda situación, será cuando la unión de los subdominios de cada tramo de la función sea un subconjunto del conjunto de los números reales.

Como primer caso, en la figura 4, se presentará la forma de ingresar la regla de correspondencia de una función definida por dos tramos. Para ello, se empleará el comando condicional *Si*, cuya sintaxis viene dada por:

Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)

que está presente en los comandos que forman la parte del grupo Lógica y que se deberá ingresar en la barra de entrada, está secuencia lógica nos permitirá obtener la representación de la función por tramos en el registro algebraico.

Para poder ingresar la siguiente representación de la función por tramos que está en el registro algebraico al GeoGebra:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \leq 2 \\ 9 - x^2, x > 2 \end{cases}$$

Se debe emplear el comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)**

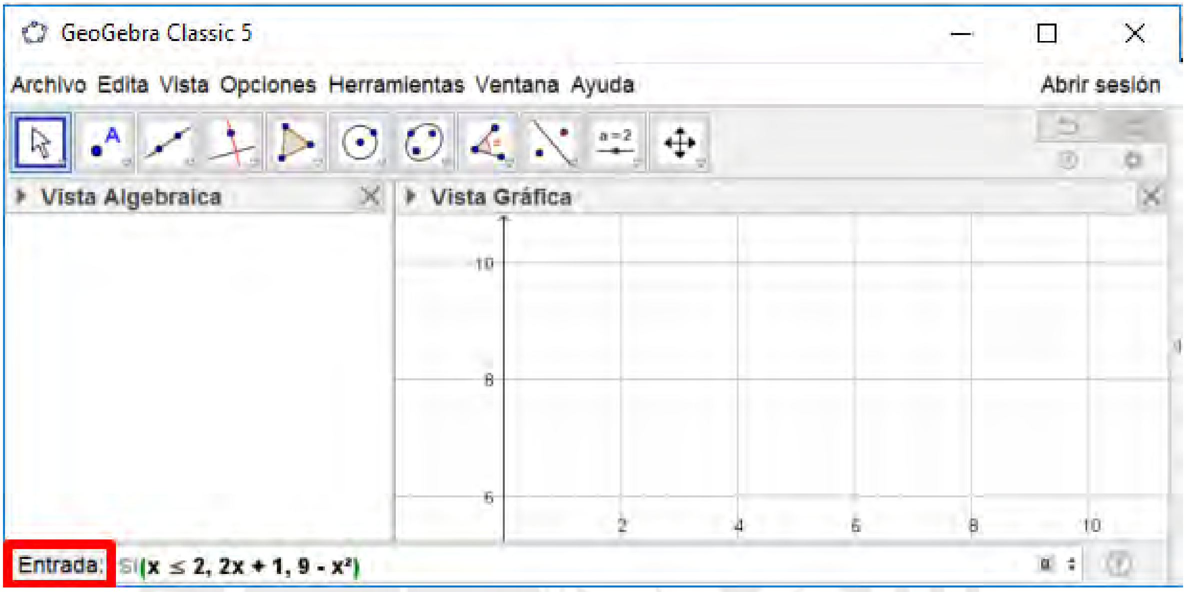


Figura 4. Representación algebraica de una función con dos tramos en el GeoGebra

En la figura 4, se puede observar que el comando Lógica **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** que es ingresado en la barra de entrada ahora tiene la siguiente forma Si($x \leq 2$, $2x + 1$, $9 - x^2$). Para ello, debemos tener en cuenta que cada una de las tres partes de dicha secuencia lógica corresponde a una expresión algebraica específica. Por ejemplo, el espacio que corresponde a <Condición> hace referencia al subdominio que empleará el primer tramo de la función, la expresión algebraica del primer tramo se ingresará en el lugar de <Entonces> y en la ubicación de <Si no> irá la expresión algebraica del segundo tramo de la función que tendrá como subdominio al complemento del subdominio del primer tramo que se escribió en el espacio de <Condición>.

Al seguir dicho orden se obtiene la expresión de la función por tramos en la familia del algebra del software y al dar Enter se obtiene la representación de la función por tramos en el registro gráfico como se muestra en la figura 5.

Al finalizar de escribir la expresión algebraica en la barra de entrada, se presionará la tecla “Enter” para poder observar la representación gráfica de la función por tramos en la ventana del GeoGebra.

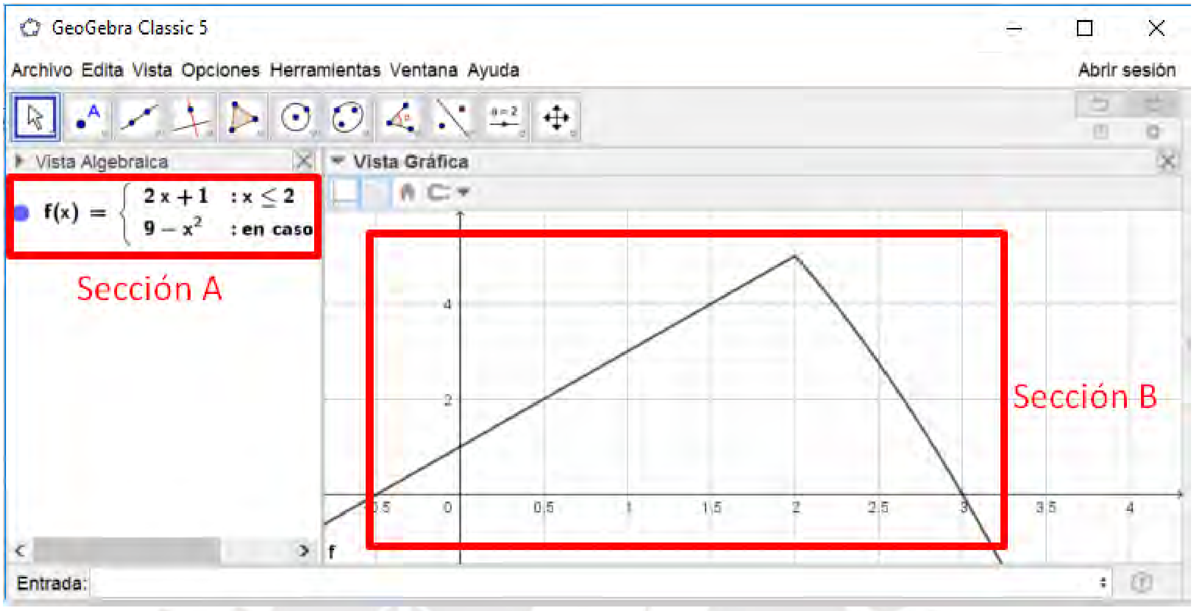


Figura 5. Gráfica de una función definida en dos tramos

Luego de haber seguido la secuencia para el primer caso de la función por tramos se puede observar en la figura 5 que se obtiene dos secciones en la ventana gráfica del GeoGebra, por ejemplo, en la sección A corresponde a la vista gráfica y se puede observar la representación de la función por tramos en el registro algebraico y acá hay que tener en cuenta la forma de presentar el subdominio del tramo cuadrático “en caso” que hace referencia a $x > 2$ que es el complemento del subdominio del tramo lineal, mientras que en la sección B corresponde a la vista gráfica y en esta se puede apreciar una parte de la representación de la función por tramos en el registro gráfico.

Como segundo caso, en la figura 6, se presentará la secuencia lógica que nos permitirá obtener una función definida por tres tramos. Para ello, se empleará dos veces el comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** pero una de ellas estará en forma anidada, específicamente en el lugar de <Si no> quedando la expresión general para la función por tramos de la siguiente forma **Si(<Condición>, <Entonces>, Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>))**.

Para poder ingresar la siguiente representación de la función por tramos que está en el registro algebraico al GeoGebra:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x \leq 3 \\ 4, 3 < x \leq 5 \\ x-1, x > 5 \end{cases}$$

Se empleará dos veces el comando Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)

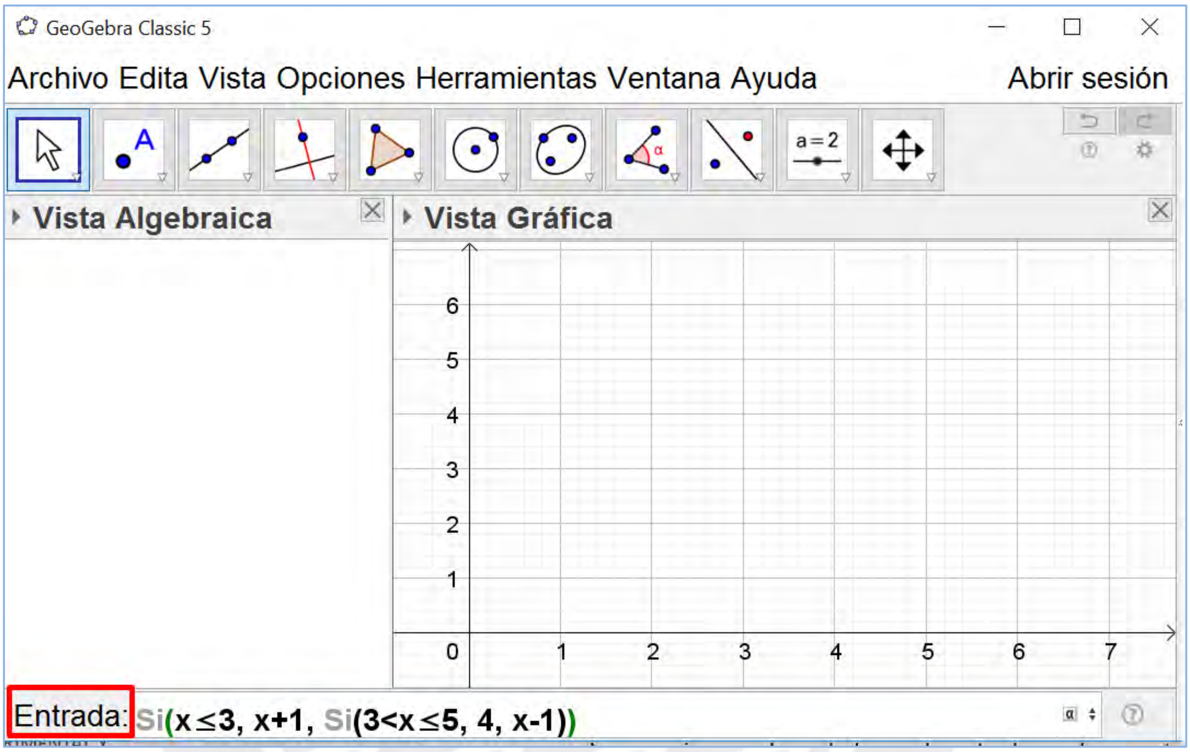


Figura 6. Secuencia Lógica para representar la regla de correspondencia de una función con tres tramos en el GeoGebra

En la figura 6, se muestra el comando Lógica **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** que es ingresado en la barra de entrada en dos oportunidades. Para ello, debemos tener en cuenta que el espacio que corresponde a <Condición> hace referencia al subdominio que empleará el primer tramo de la función que se ingresará en el lugar de <Entonces> y en lugar de <Si no> se escribirá nuevamente el comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** para poder definir el segundo y tercer tramo de la función, en esta última, el espacio que corresponde a <Condición> hace referencia al subdominio que empleará el segundo tramo de la función que será ingresado en el lugar de <Entonces> y en lugar de <Si no> irá la expresión algebraica del tercer tramo que tendrá como subdominio al complemento de la unión de los subdominios de los dos tramos anteriores.

Al finalizar el ingreso de información en cada una de las partes del comando lógica Si, se obtendrá la representación de la función por tramos en el álgebra del software, tal como se muestra en la casilla de entrada de la figura 6. A continuación, se procede a dar “Enter” y de esta forma se obtendrá dos representaciones, algebraica y gráfica, de la función por tramos en ambas vistas del GeoGebra, tal como se muestran en la figura 7.

Al finalizar de escribir el texto en la barra de entrada, se presionará la tecla “Enter” para poder observar la gráfica de la función por tramos en la ventana del GeoGebra.

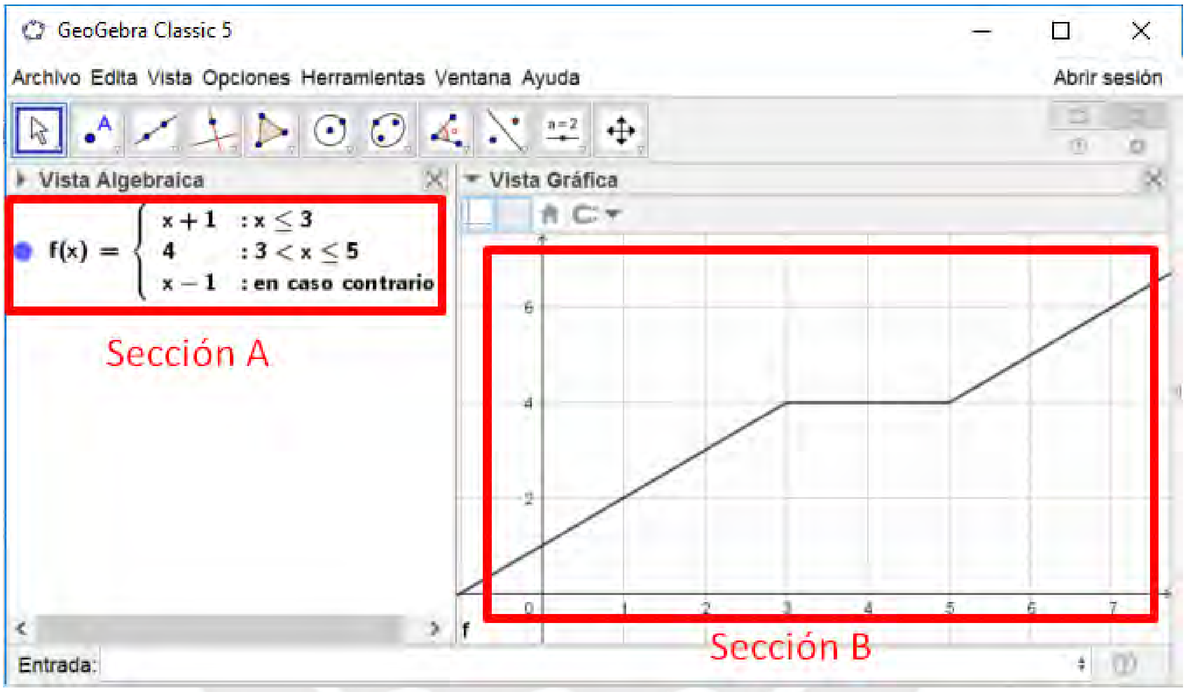


Figura 7. Gráfica de una función definida en tres tramos

En la figura 7 se puede identificar dos grandes secciones en la ventana del GeoGebra, por ejemplo, en la sección A se puede observar la representación de la función por tramos en el registro algebraico donde se puede identificar que el subdominio del tercer tramo está representado por “en caso contrario” que hace referencia al complemento de la unión de los subdominios de los dos tramos anteriores, mientras que en la sección B se puede observar una parte de la representación de la función por tramos en el registro gráfico.

La forma en el ingreso del comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** en la barra de entrada, nos permitirá representar gráfica y algebraicamente en GeoGebra una función con más de dos tramos, siempre y cuando realicemos el mismo procedimiento del uso del comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** en lugar de **<Si no>**, es decir en forma anidada. También se pudo observar en las figuras 5 y 7 que la unión de los subdominios resulta el conjunto de los números reales, y por ello es necesario tener en cuenta que también dichas representaciones de la función por tramos se puedan realizar en un determinado dominio que sea un subconjunto de los números reales, el cual tendrá relevancia para nuestro estudio, al querer realizar las gráficas que modelen situaciones reales cuyo dominio sea un subconjunto de los números reales, en particular el eje X positivo incluido el cero.

A continuación, en la figura 8, se muestra la representación de una función por tramos en el registro algebraico, cuya unión de subdominios no resulta el conjunto de los números reales.

Para poder ingresar la siguiente representación de la función por tramos que está en el registro algebraico al GeoGebra:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, 0 < x \leq 2 \\ 16 - x^2, 3 < x < 4 \end{cases}$$

Se empleará el comando Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>) la cual tendrá un cambio en su notación.

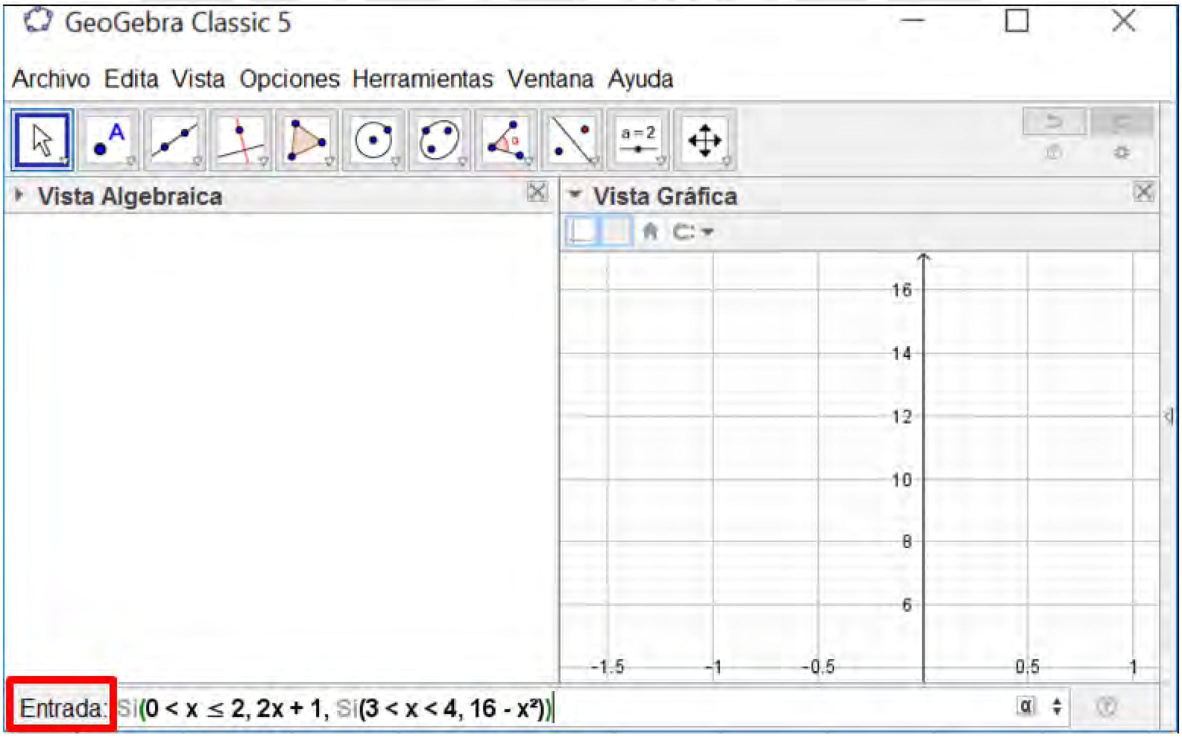


Figura 8. Función por tramos con dominio acotado

En la figura 8 se puede observar que a comparación del trabajo realizado en la figura 4 y 6 al ingresar el comando Lógica **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** en la barra de entrada se debe tener en cuenta que en la parte de <Condición> va el subdominio del primer tramo que en este caso será expresado a través de un intervalo acotado de la expresión algebraica que se ubicará en el lugar de <Entonces>, en la ubicación de <Si no> es donde se realiza la modificación en la forma de ingresar la nueva secuencia lógica a comparación de la figura 4 y 6, en este caso se escogerá el comando lógica **Si(<Condición>, <Entonces>)** puesto qué en <Condición> se escribirá el segundo subdominio acotado de la expresión algebraica que corresponde al segundo tramo de la función que se escribirá en el lugar de <Entonces> y de esta forma nos ayudará a tener un dominio acotado para la función por tramos.

A continuación, en la figura 9, se muestra la representación de la función por tramos en el registro gráfico cuyo dominio es un intervalo acotado.

Luego de presionar la tecla "Enter", se puede observar la gráfica de la función por tramos cuyo dominio es un subconjunto de los números de reales.

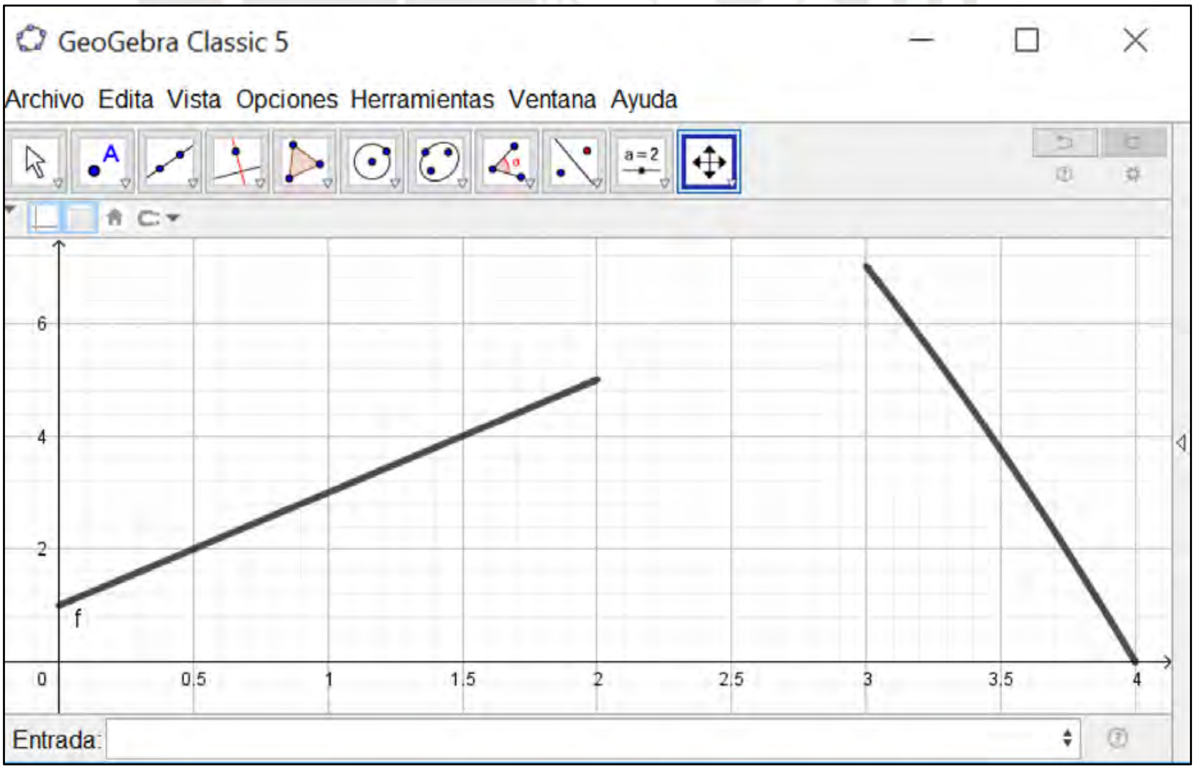


Figura 9. Gráfica de una función por tramos con dominio acotado

Asimismo, el comando **Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)** tiene una limitación visual al obtener la representación de la función por tramos en el registro gráfico, ya que, en primer lugar, no se puede diferenciar en el gráfico cuál de los puntos cuya abscisa $x = 3$ es abierto y cual es el cerrado, tal como lo podemos apreciar en la figura 10.

En la siguiente gráfica, se puede observar que en el intervalo $x < 3$ no se evidencia que dicho punto $(3{,}9)$ de la función afín no se muestra como un punto abierto, puesto que *x* no toma el valor de 3.

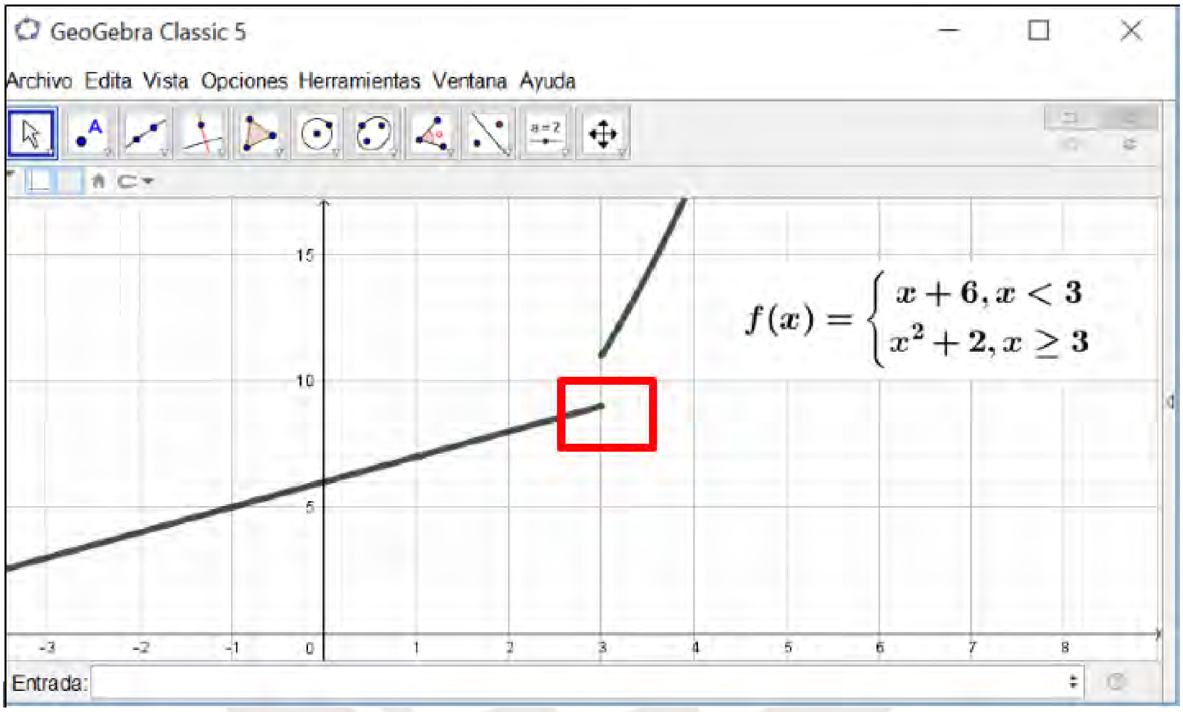


Figura 10. Limitación visual de la representación gráfica de una función por tramos que resulta ser discontinua

Al seguir revisando el entorno dinámico del GeoGebra, se logra identificar que hay otra manera de poder ingresar una función por tramos en dicho entorno y así obtener una representación de la función en el registro gráfico, puesto que en el registro algebraico no se logra poder ingresar si el valor del subdominio será abierto y por defecto todos los valores salen en un intervalo cerrado, esto se da al crear una lista de funciones, al escribir en el cuadro de entrada entre llaves la opción de **Función(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>)** la cantidad de veces que sea necesaria según los tramos que estará conformado nuestra función teniendo en cuenta que cada una de ellas deberá estar separada por una coma y de esta manera se estará creando una lista cuyos elementos son un grupo de funciones donde se indica el valor inicial y final de sus subdominios, tal como se muestra en la figura 11.

Para poder ingresar la siguiente expresión de la función por tramos que está representado en el registro algebraico al GeoGebra:

$$f(x) = \begin{cases} x, -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 8, 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Se empleará una lista de la siguiente forma:

{ Función(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>), Función(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>)}

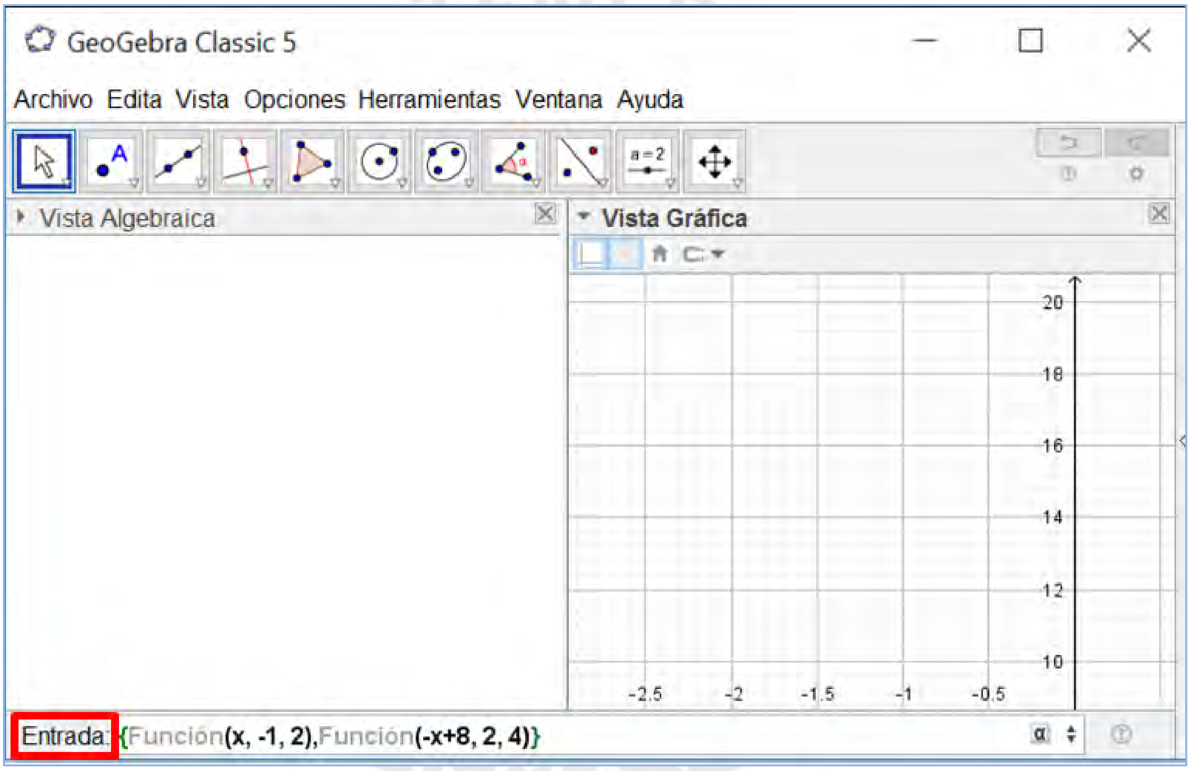


Figura 11. Función por tramos empleando una lista de funciones

En la figura 11, se muestra que al crear una lista se puede agregar más de una función empleando el comando **Función (<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>)** en la cual uno debe tener en cuenta que deberá ir en cada una de las partes de dicho comando, por ejemplo, en <Función> va la representación algebraica del tramo de la función que se desea, en <Valor inicial> se escribe el valor de la abscisa donde uno quiere que empiece dicho tramo y en <Valor final> se escribe la abscisa donde el tramo termina, dichos valores conforman el subdominio para dicho tramo y de esa manera obtenemos la representación de una función por tramos.

A continuación, en la figura 12, se presenta la representación de la función por tramos en el registro gráfico y también en el álgebra del software.

Al finalizar de escribir la lista donde se insertó el comando Función(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>) y presionar la tecla “Enter”, se puede observar la siguiente gráfica.

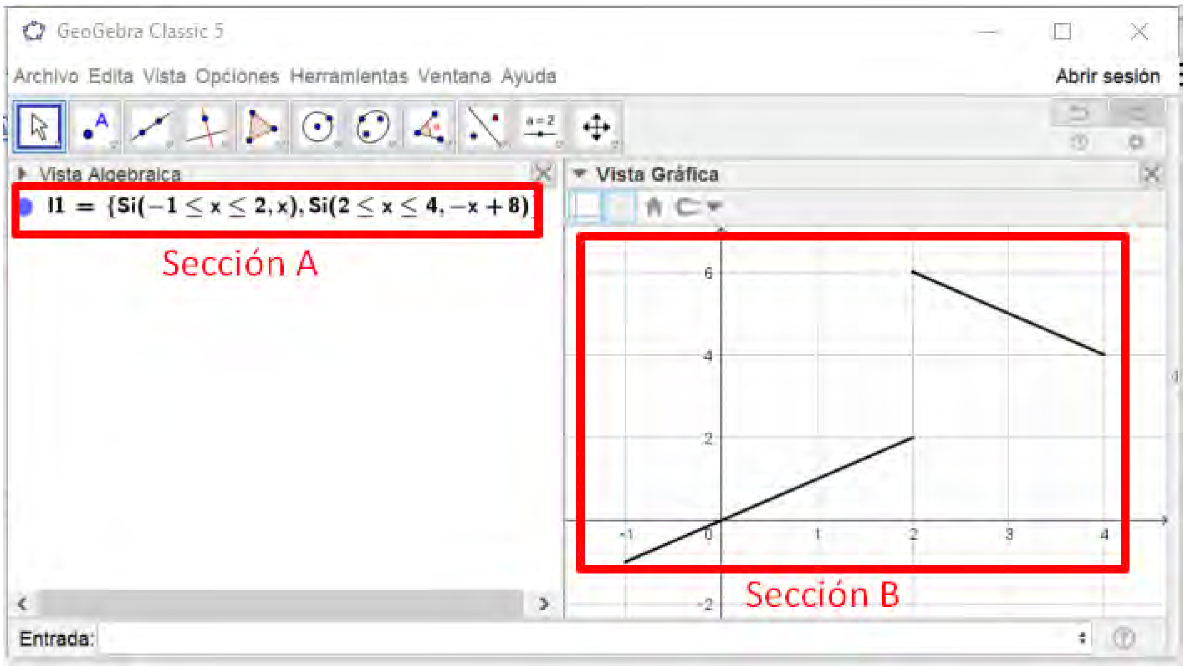


Figura 12. Gráfica de una función por tramos empleando una Lista

En la figura 12 se puede observar que en la sección A se muestra la representación de la función por tramos en la vista algebraica aunque no de la forma convencional que uno está acostumbrado a ver y además hay una limitación en la secuencia lógica para los valores de los extremos en el intervalo puesto que no permite colocar en en uno de ellos menor o mayor, mientras que en la sección B que corresponde a la vista gráfica se muestra la representación de la función por tramos en el registro gráfico y respecto a esta representación de la función por tramos en el GeoGebra, presenta una limitación visual, ya que en este caso los valores considerados entre los extremos de los intervalos serán siempre valores que estarán incluidos en los subdominios, esto se da porque en esta forma de ingresar la representación de una función por tramos no se admite en los subdominios colocar intervalos abiertos.

Este tipo de representaciones es útil solo para fines gráficos, elaboración de figuras e imágenes en preguntas, evaluaciones, textos, etc., mas no constituye en sí la representación de una función por tramos ya que es una lista en la cual se incluye dos funciones distintas, y al tener un mismo valor en ambas reglas de correspondencia no cumple la restricción de cada subdominio de una función por tramos ya que la intersección de éstos debe ser el conjunto vacío.

Por otro lado, en situaciones que implique algún enunciado y que a partir de ella se origine la necesidad de poder encontrar la regla de correspondencia que describa el comportamiento del fenómeno a analizar y que a partir de ella se pueda predecir situaciones específicas que se solicite, podemos recurrir a la representación tabular, como lo mencionan Saa y Trochez (2013) en su investigación, donde se tendrá que analizar casos específicos según la información brindada y a partir de ella poder emplear la Hoja de Cálculo del GeoGebra, tal como se puede apreciar en la figura 13.

Figura 13. Ventana de GeoGebra - Hoja de Cálculo

En la figura 13, se muestra que para acceder a la Hoja de Cálculo del GeoGebra se debe ir primero a la herramienta Vista y activar la Hoja de Cálculo, luego automáticamente se abrirá la siguiente ventana que se muestra en la figura 14.

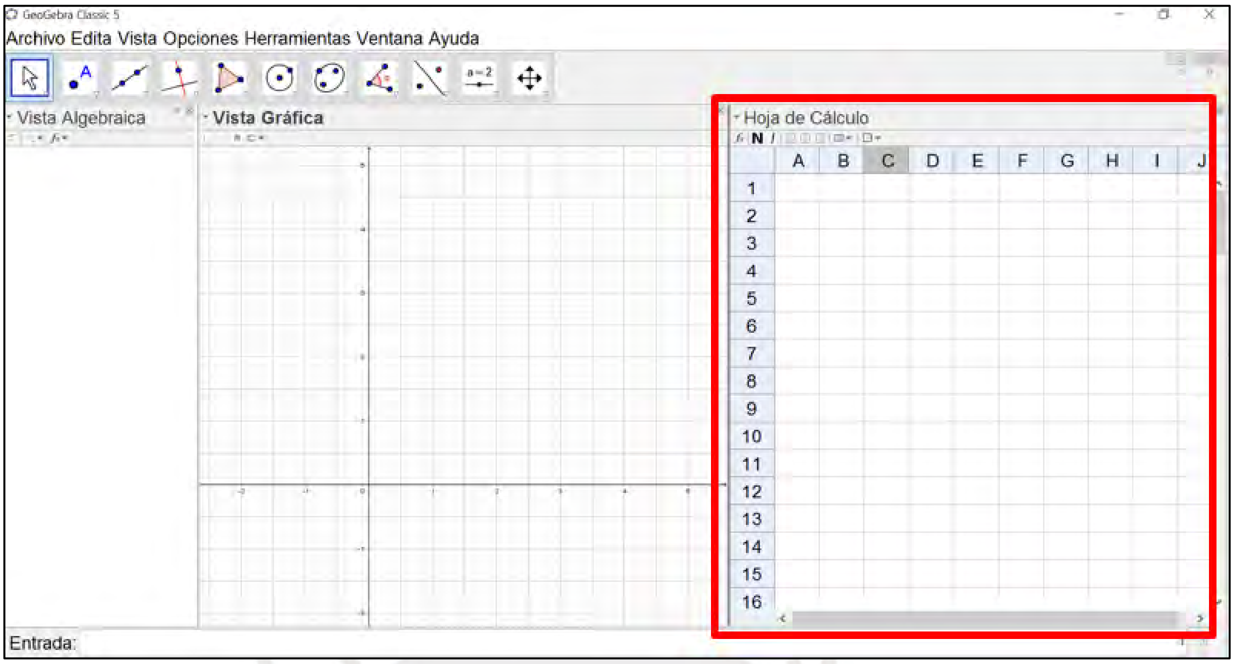


Figura 14. Ventana de Hoja de Cálculo

A continuación, mostraremos cómo se puede utilizar dicha opción del GeoGebra para poder encontrar puntos específicos que describan el comportamiento de la situación a analizar. Por ejemplo, “Un minorista puede comprar naranjas al mayorista a los precios siguientes: S/ 3.5 por kilo si adquiere 20 kilos o menos; S/ 3 por kilo en el caso de cantidades por encima de 20 kilos y hasta de 50 kilos y S/ 2.5 por kilo para cantidades mayores de 50 kilos. Determine el costo C(x) de adquisición de x kilos de naranjas, donde $x \in \mathbb{R}^{+}$.” (Adaptado de Arya y Lardner 2009, p.186).

Para dicha situación, se tendrá que ubicar en la columna “A” la cantidad de kilogramos de naranjas que va a comprar, según dicha cantidad se tomará en cuenta el precio por cada kilogramo que se ubicará en la columna “B” y de esta manera se podrá calcular el costo de adquisición que se colocará en la columna “D” y por último, en la columna “E”, se escribirá los pares ordenados que tienen como primera coordenada a la cantidad de kilogramos y la segunda coordenada al costo de adquisición, esto porque el costo depende de la cantidad de kilogramos que va adquirir el minorista. Todo lo mencionado se muestra en la figura 15.

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E
1	Cantidad de kilogramos	Precio por Kilogramo		Costo	Punto
2	1	3.5	=1.(3.5)	3.5	(1, 3.5)
3	3	3.5	=3 .(3.5)	10.5	(3, 10.5)
4	5	3.5	=5.(3.5)	17.5	(5, 17.5)
5	10	3.5	=10(3.5)	35	(10, 35)
6	20	3.5	=20.(3.5)	70	(20, 70)
7	21	3	=21.(3)	63	(21, 63)
8	25	3	=25.(3)	75	(25, 75)
9	35	3	=25.(3)	105	(35, 105)
10	50	3	=50.(3)	150	(50, 150)
11	51	2.5	=51.(2.5)	127.5	(51, 127.5)
12	53	2.5	=52.(2.5)	132.5	(53, 132.5)
13	55	2.5	=55.(2.5)	137.5	(55, 137.5)
14	65	2.5	=65.(12)	162.5	(65, 162.5)
15	75	2.5	=75.(12)	187.5	(75, 187.5)

Figura 15. Representación tabular en la Hoja de Cálculo del GeoGebra

En la figura 15, se puede apreciar que se ingresaron valores a la columna de cantidad de kilogramos y a cada una de ellas le corresponde un precio por kilogramo, según la condición dada en el ejemplo anterior. Luego se encontró el valor del costo que se obtiene al escribir en la celda el siguiente comando “=A2*B2” y al dar Enter se obtiene el valor correspondiente y, finalmente, se selecciona dicha celda y se arrastra hasta la fila 15 para poder completar los costos en cada uno de los casos analizados.

En todo este proceso el sujeto que va desarrollar el ejercicio primero tuvo que identificar cierta información que se nos ha brindado en el registro de lenguaje natural, esto se puede apreciar en las columnas A y B que hacen referencia al peso con el respectivo precio por kilogramo. Posteriormente se obtiene el costo de haber adquirido cierta cantidad de naranja como se muestra en la columna D y para ello se ha realizado tratamientos en el registro numérico. Finalmente, se identifica el peso de la compra con su respectivo costo de adquisición y para esa parte se emplea el registro de pares ordenados como se puede apreciar en la columna E.

A partir del registro de pares ordenados se puede obtener una representación de la situación planteada en el registro gráfico, esto se puede observar al obtener los puntos cuyas coordenadas están representados por la cantidad de kilogramos y el costo de adquisición. Dichos puntos se obtuvieron al ingresar en la celda de la columna “E” la siguiente expresión “(A2,D2)” y al dar Enter se origina el punto correspondiente a ese caso particular y para completar toda la columna, nuevamente se selecciona dicha celda y se arrastra hasta la última fila y de esta manera, en la ventana de la Vista Gráfica del GeoGebra, aparece una representación de los pares ordenados que se muestran en el registro gráfico del ejemplo planteado, tal como se muestra en la figura 16, donde lo único que se observa son los puntos que se acaban de obtener.

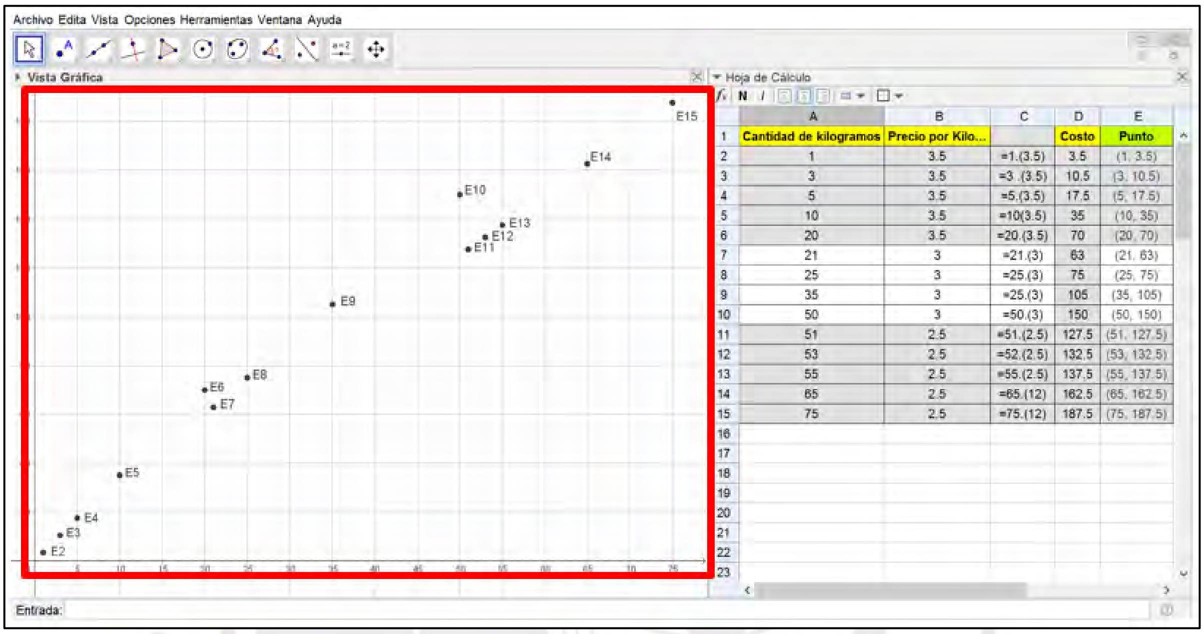


Figura 16. Representación tabular a la representación del gráfico discreto

En la figura 16, en la vista gráfica del GeoGebra se pueden apreciar los puntos que se han obtenido al relacionar la cantidad de kilogramos y el costo de adquisición para cada caso analizado, originando un gráfico discreto por haber considerado una cantidad entera de kilogramos a pesar que el dominio pertenece a los reales positivos, es decir, se podría considerar una cantidad en gramos. Dicha representación tabular nos puede ayudar a encontrar una expresión algebraica, al analizar el comportamiento que se puede observar, y que dicha expresión sería la generalización de cada caso, según la cantidad de kilogramos de naranja que se logre adquirir, y el precio que le corresponde, según las condiciones dadas. Para ello, se tendrá que emplear conceptos que el sujeto debe haber adquirido con anterioridad en los temas trabajados que correspondan a funciones como, por ejemplo, función lineal y cuadrática.

Además, se puede realizar representaciones gráficas interactivas en el entorno dinámico del GeoGebra haciendo uso de la herramienta Deslizador que ayudará en presentar al estudiante una situación dinámica. Para ello, en la figura 17, se muestra dónde se puede ubicar la propiedad de deslizador en dicho entorno dinámico.

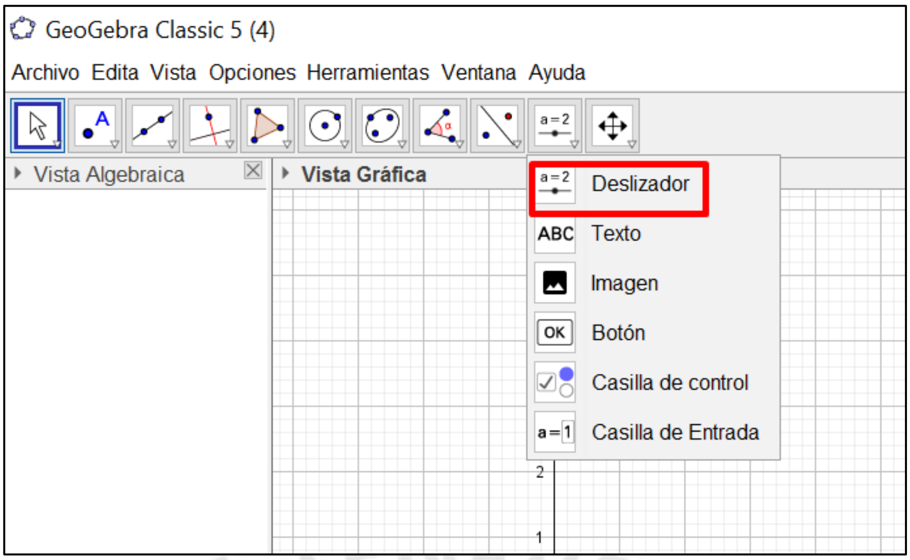


Figura 17. Ubicación del deslizador en el GeoGebra

Luego de haber identificado la ubicación, se procede a crear un deslizador dando clic a dicho icono, después se da clic en la ventana de vista gráfica del GeoGebra y se realiza la configuración del deslizador, tal como se muestra en la figura 18.

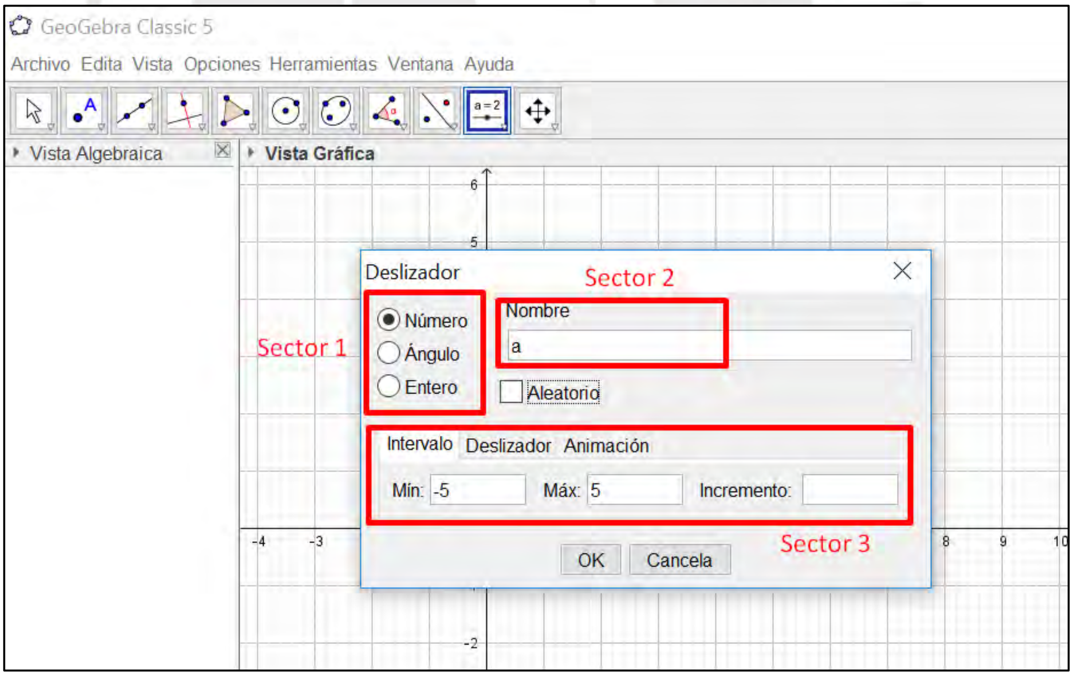


Figura 18. Opciones de configuración para el deslizador

Como se puede observar en la figura 18, se diferencia tres grandes sectores, por ejemplo, en el Sector 1, se puede escoger entre las opciones de **número, ángulo y entero**, es decir los posibles valores que el deslizador va a tomar; en el Sector 2, tenemos un espacio para personalizar nuestra casilla de verificación colocando algún

nombre o etiquetarlo de alguna forma y, por último, en el Sector 3, tenemos la pestaña de **Intervalo** que nos indica qué valores va a tomar la casilla de verificación.

En la pestaña de **Deslizador**, se puede escoger la manera en cómo se va a mostrar en la ventana de la vista gráfica del Geogebra, ya sea de manera horizontal o vertical, y en la última pestaña, que corresponde a **Animación,** se puede configurar la velocidad con la cual va a cambiar los valores asignados para el deslizador e inclusive seleccionar la manera de cómo quiere uno que se repita los valores del deslizador que estarán presente en el intervalo programado.

Finalmente, cuando ya se tiene el deslizador creado, se procede a generar alguna expresión de la función que dependa de dicho valor que asigne al deslizador, tal como se muestra en la figura 19.

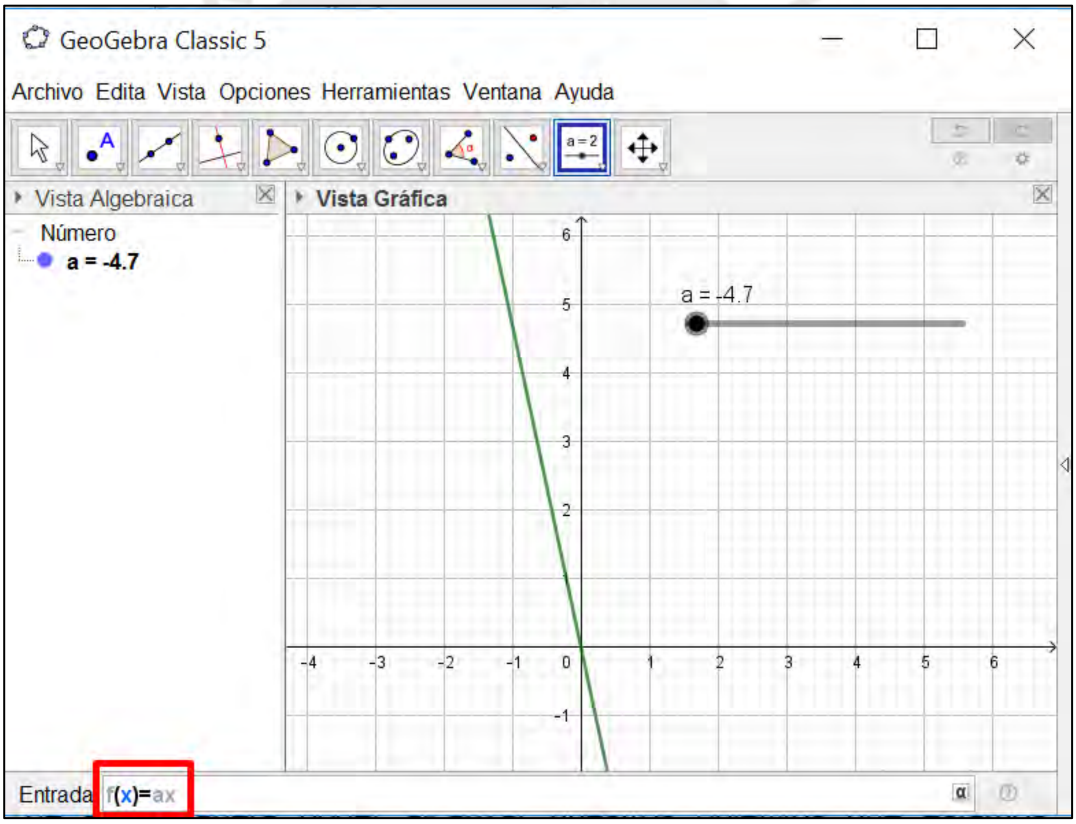


Figura 19. Función lineal cuya pendiente está dada por un deslizador

Como se observa en la figura 19, en la representación gráfica de la función lineal, su pendiente está representada por el parámetro "a" cuyo valor corresponde al deslizador creado, y esto implica que al manipular los valores del dial del deslizador se obtiene distintas representaciones de la función lineal en el registro gráfico, esto va cambiando porque la pendiente puede tomar valores a partir de -5 a 5 generando una inclinación distinta en cada una de ellas. En ese sentido creemos que al emplear el Deslizador y al dar la Animación al punto representado, cuya primera coordenada depende del valor del deslizador y la segunda coordenada sea el valor de la función evaluado en dicho valor, se generará la representación gráfica en el GeoGebra mostrada en la segunda actividad de nuestro trabajo de investigación cuyo objeto es la función por tramos.

Nuestra investigación pretende aportar a la comunidad en educación matemática un estudio en el cual en una de las actividades de la etapa experimental se emplee el GeoGebra como mediador, donde la actividad propuesta genere una representación en el registro gráfico conforme el estudiante active la animación del caso propuesto.

Para nuestro propósito no solo será el uso del deslizador y la animación, sino que deberá ir acompañado de la opción **rastro** que se le dará a un objeto matemático en la ventana gráfica del GeoGebra, que en nuestro caso será la representación de un par ordenado. En ese sentido, lo primero que se debe realizar es crear un deslizador, luego escribir un par ordenado cuya abscisa este representado por la etiqueta del deslizador y la ordenada será el valor de $f(x) = 2x - 1$ evaluado en el valor que adopte el deslizador, es decir, en vez de escribir la variable "x" se escribirá la letra "a" que hace referencia al deslizador creado y en vez de escribir "$f(x)$" se escribirá "$f(a)$ o $2(a) - 1$" como se muestra en la figura 20.

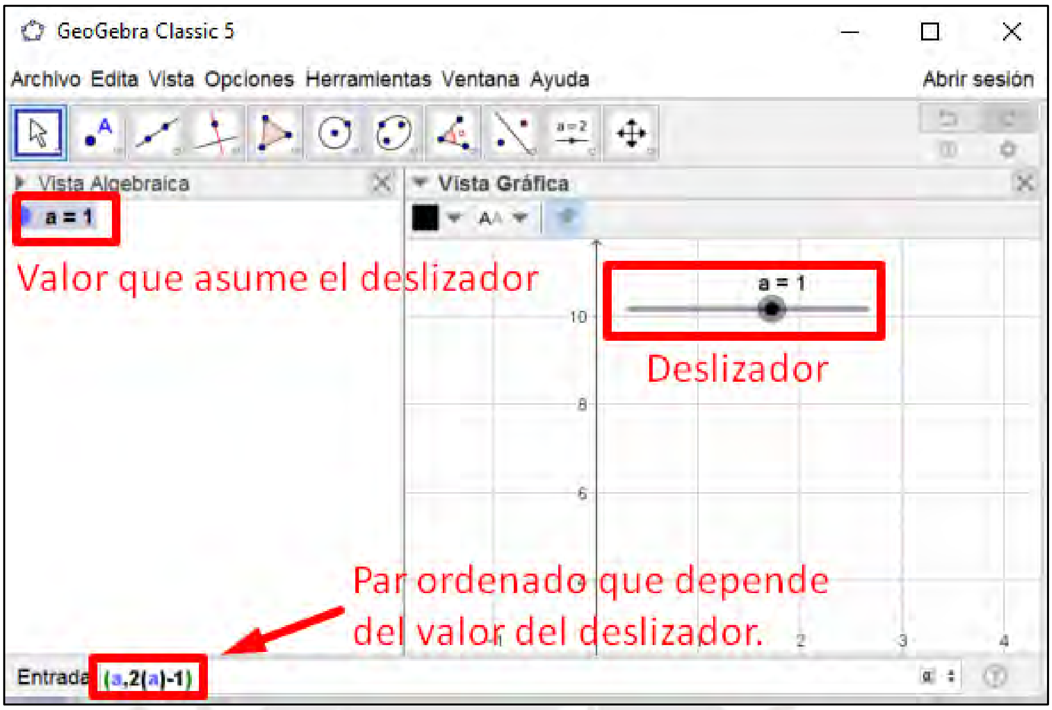


Figura 20. Par ordenado que depende del valor de un deslizador

En la figura 20 se puede observar el deslizador “a”, el valor del deslizador que está asumiendo en ese momento y el par ordenado cuyas coordenadas dependen del valor que asume el deslizador, y de esta forma al dar “Enter” obtendremos un par ordenado y para activar la opción Rastro se deberá dar anti clic encima del punto y escoger la opción de Rastro como se muestra en la figura 21.

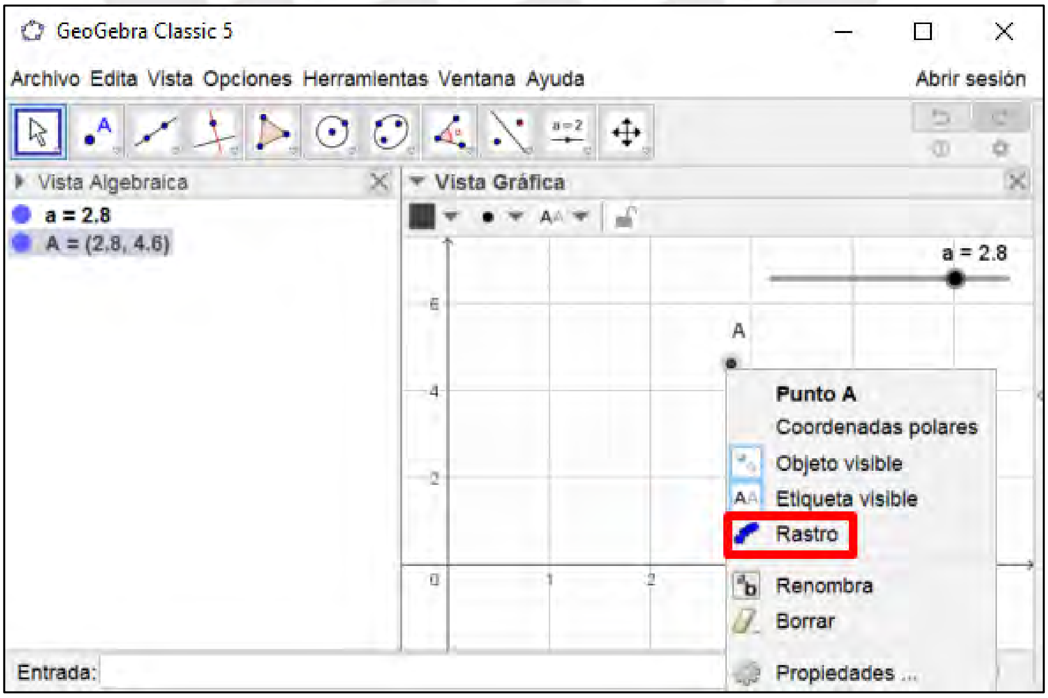


Figura 21. Activación de la opción rastro

Luego de haber activado la opción rastro se procederá a activar la opción de animación en el deslizador con la finalidad que aparezca la representación de la función lineal "$2x - 1$" en el registro gráfico como se puede observar en la figura 22.

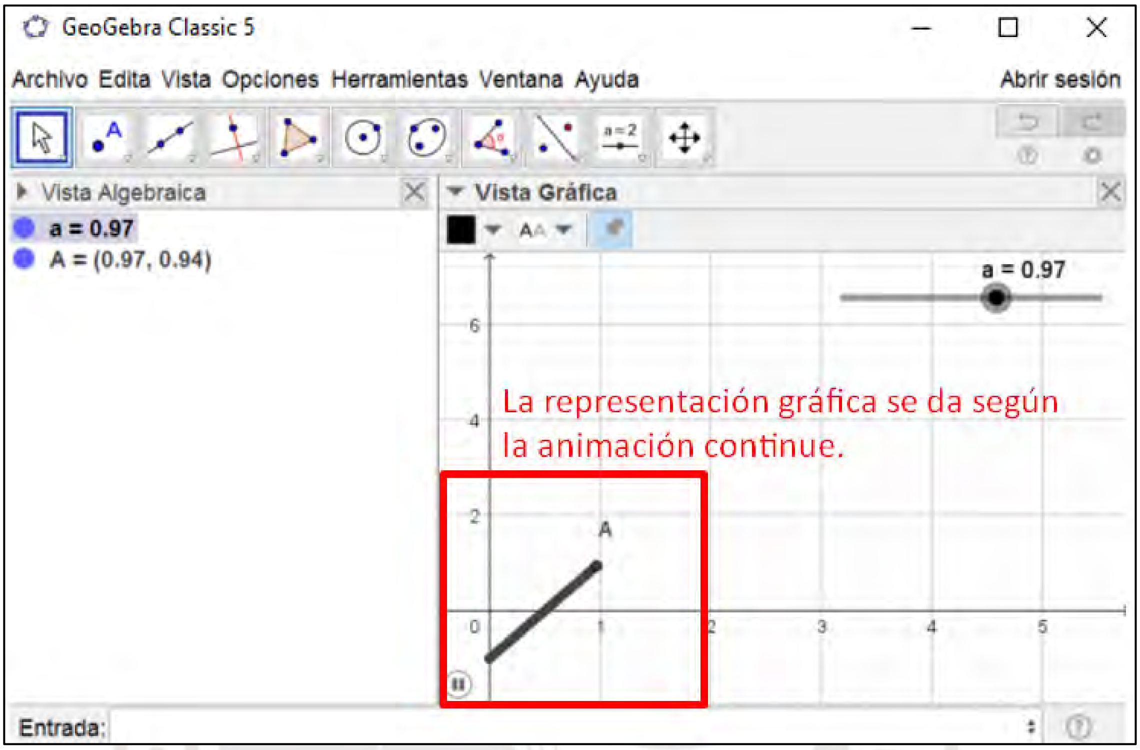


Figura 22. Representación de la función lineal en el registro gráfico según los valores del deslizador

Otro punto importante de dicho entorno dinámico es la versatilidad que tiene en el aspecto de decidir qué objetos uno desea que se pueda ver en la vista gráfica del GeoGebra, por ejemplo, el deslizador se puede ocultar al hacer anti clic sobre el objeto y luego seleccionar la opción de objeto visible, es decir, lo que en realidad se estaría realizando es desactivar la opción visibilidad, tal como se muestra en la figura 23.

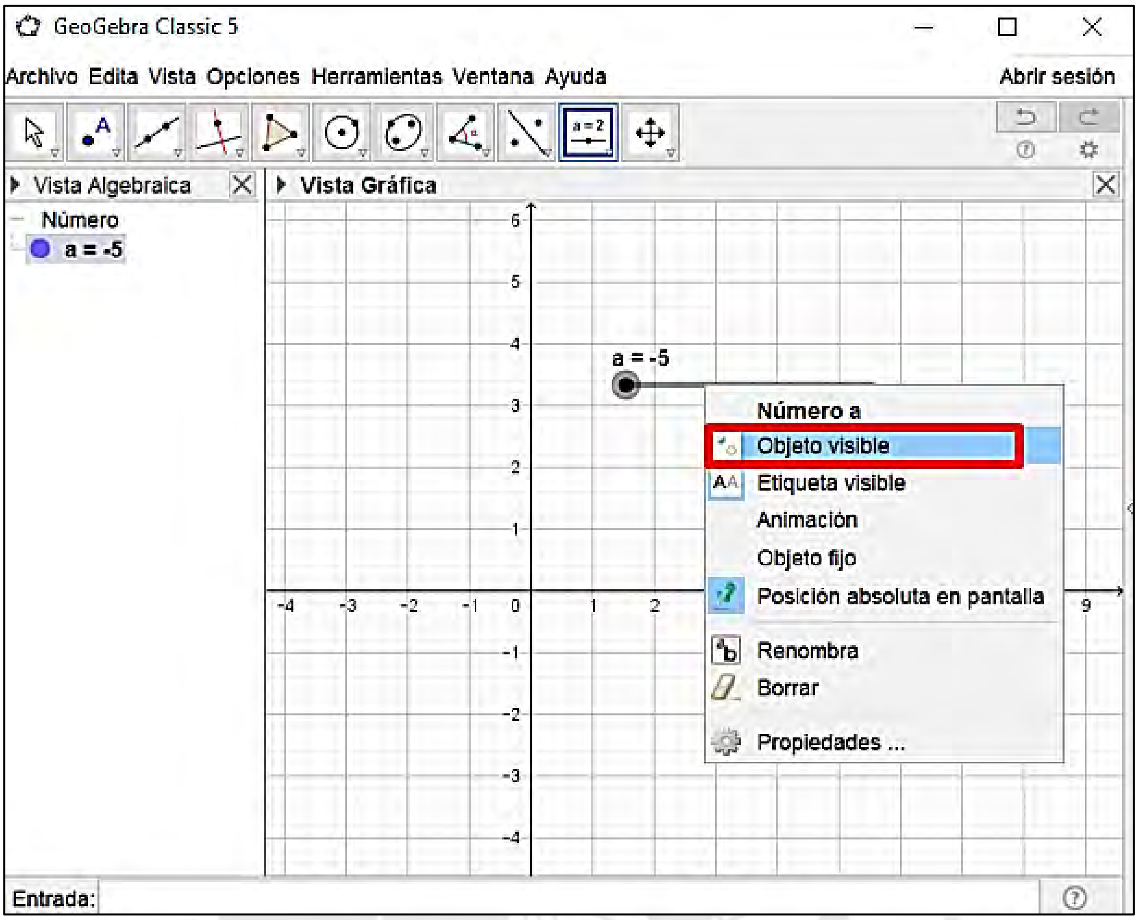


Figura 23. Herramienta para que el objeto sea visible

Como se puede observar en la figura 23, al dar clic a la opción de objeto visible, el deslizador va a desaparecer de la vista gráfica y de esta manera no va a formar parte de lo que realmente queremos mostrar o medir.

También estaremos empleando la herramienta de Casilla de control que nos permite escoger qué objetos se quiere que funcionen en una determinada actividad, a dicha opción se le acopla otras herramientas que ya están establecidas y que son de nuestro interés para la elaboración de nuestra segunda actividad que será mediada por el GeoGebra.

En la figura 24 se puede apreciar donde se puede ubicar dicha herramienta y poder emplearlo en la ventana de la vista gráfica del GeoGebra.

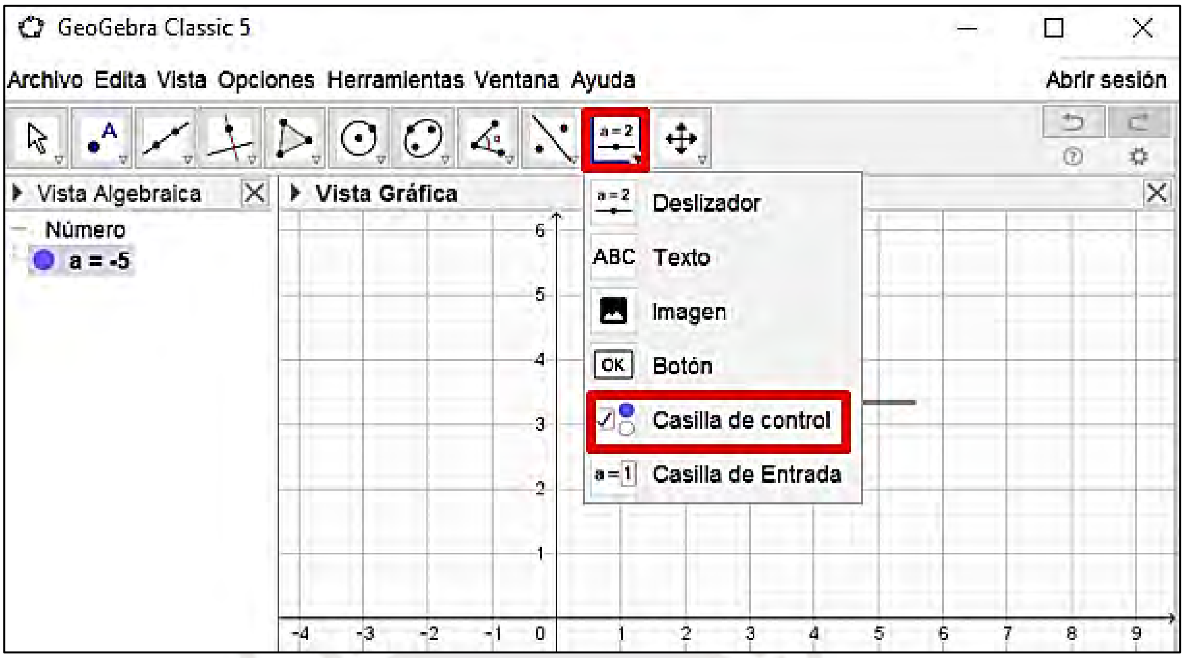


Figura 24. Ubicación de la Casilla de control

Como se puede observar en la figura 24, la opción de **Casilla de control** se encuentra en el mismo grupo que el deslizador. Al escoger esta nueva herramienta y al dar clic en la vista gráfica del GeoGebra, aparecerá, de manera automática, una ventana, tal como se muestra en la figura 25, donde uno deberá escoger qué herramientas quiere acoplar a dicha casilla.

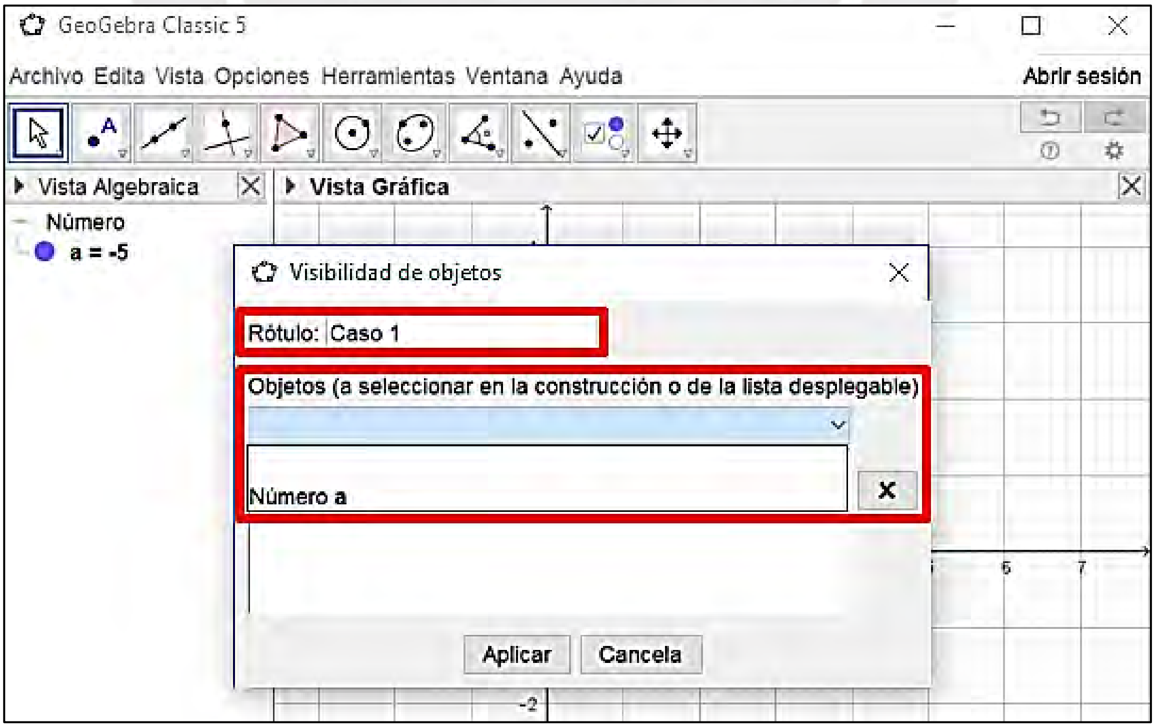


Figura 25. Ventana de visibilidad de objetos

En la figura 25, se puede observar dos sectores, el primero tiene como nombre **Rótulo** y aquí se deberá escribir el nombre de la situación que se quiere plantear, por ejemplo, Caso 1 o Caso 2; en el segundo sector aparece una **lista desplegable** donde uno tiene la posibilidad de escoger qué objetos quiere que se activen al escoger dicha casilla de verificación. Esto tiene mucha importancia para nuestra investigación puesto que en nuestra segunda actividad que será mediada con el GeoGebra se presentará un archivo que contenga tres situaciones distintas donde los estudiantes tendrán que activar cada una de ellas según las indicaciones que se proporcione en el documento impreso.

De esta forma, al explicar las funcionalidades de las herramientas de este entorno, se puede personalizar las actividades que se quiere plantear en nuestra investigación y de esta manera tener el control de lo que realmente uno desea que el estudiante manipule.

Por todo lo expuesto, vemos que el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra, como mediador, permitirá, en nuestro estudio realizar distintas representaciones que nos ayudará a plantear nuestras actividades y de esta manera poder alcanzar nuestros objetivos propuestos en nuestra investigación.

2.2 Aspectos históricos y matemáticos

En esta sección de nuestro estudio, mostraremos cómo se empezó a construir el concepto de función durante varios momentos de la historia de la matemática hasta haber obtenido el concepto actual y la expresión simbólica $f(x)$ que se emplea para hacer referencia a una función. Para ello, respaldaremos lo mencionado con la investigación de Ruiz-Higueras (1994) que indica que “El concepto de función, tal y como se define actualmente en Matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años” (p. 147).

En tal sentido, la investigadora realiza un estudio de algunos momentos de la historia referente a la noción de función para identificar los distintos momentos que ayudaron a desarrollar dicha noción y a la vez comparte en su investigación las dificultades que se dieron en aquellas épocas al concebir la noción de función, y de esta forma tendremos una visión amplia para nuestra investigación.

A continuación, presentaremos las etapas que identifica Ruiz-Higueras (1994) en algunos momentos de la historia para la noción de función.

La autora hace referencia a dos culturas antiguas: los babilonios y los griegos. Para los babilonios, el principal interés sobre la noción de la función se encontraba en la Astronomía, mientras que en los griegos tenían una idea de relación de variabilidad entre magnitudes, aunque eso pudo ser un obstáculo al considerar la concepción de variabilidad como algo específico de las magnitudes físicas y de esta manera lo consideraban como valores fijos de ciertas situaciones.

Mientras que, en la edad media, la autora menciona que los árabes no realizaron algún aporte nuevo en relación a la noción de funcionalidad, pero lo que sí se debe destacar es la separación del Álgebra y la Trigonometría dentro de las Matemáticas, ya que para ambas ciencias lo que faltó fue una buena simbolización para tener el aspecto analítico. Esta época se caracteriza porque el pensamiento que se aborda era “La idea de explicitación racional de los fenómenos” (p. 155), en particular a “Fenómenos sujetos al cambio y movimiento” (p. 156).

Según la investigadora, en esta época se realizaron dos métodos para expresar las relaciones funcionales: La primera realizaban las generalizaciones utilizando letras del alfabeto y la segunda a través de gráficos.

Por otro lado, la autora menciona que en los siglos XV y XVI se puede identificar dos caminos importantes para las Matemáticas, la primera en perfeccionar los símbolos algebraicos y la segunda en la creación definitiva de la Trigonometría. Ambos caminos benefician a la evolución de la noción de función, respecto a la simbolización y la otra respecto a las funciones trigonométricas. Además, la investigadora indica que en esta etapa se realiza una diferencia entre variable e incógnita, donde la primera hace referencia a una función y la segunda a una ecuación.

En el siglo XVII Youschkevitch (citado en Ruiz-Higueras, 1994), menciona que “El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat (1601 - 1605) y a Descartes (1586 - 1650) el descubrimiento del mundo de la “Representación analítica” (p. 165). De acuerdo con Boyer (citado en Ruiz-Higueras, 1994), esto permitió imaginar figuras que se pudieran definir por expresiones de la forma $P(x, y) = 0$ y además esto permitió convertir cualquier problema geométrico en uno algebraico.

Mientras que, en el siglo XVIII, Ruiz-Higueras (1994) indica sobre la definición dada por Bernoulli en el aspecto que no evidencia la manera de formar las funciones a partir de la variable independiente, pero en esta época la mayoría concebían las funciones como expresiones analíticas.

También en esta época la autora menciona que Euler fue el primero en emplear f(x) que hace referencia al concepto de función. Además, Euler distinguía la noción de función que estaba relacionada con la noción de curva, esto al mencionar la existencia de dos clases de ellas: Curvas continuas y discontinuas o mixta.

Según la investigadora, Euler en esa época analiza una situación sobre la vibración de una cuerda sonora dando origen a la necesidad de tener en cuenta a “Funciones más generales que las funciones analíticas: Las “funciones arbitrarias” (p. 178). Para dicha situación, Euler define a dicha función a una compuesta por dos trozos tal como se muestra en la figura 26.

$y = x$ en $[0, \pi/2]$

$y = \pi - x$ en $[\pi/2, \pi]$

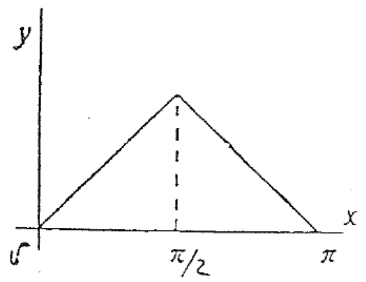


Figura 26. Función compuesta por trozos de dos funciones

Fuente: Ruiz-Higueras (1994, p. 179)

Según la autora, esta representación gráfica, que se muestra en la figura 26 de la situación analizada, no necesariamente estaba definida por una expresión analítica sino al contrario por el hecho de haberse realizado por el trazo libre de la mano, según palabras de Euler (citado en Ruiz-Higueras, 1994).

Asimismo, la investigadora menciona que la idea de función mixta dada por Euler tuvo sus primeras críticas en 1780. Por ejemplo, Charles mencionó que hay algunas expresiones analíticas diferentes en regiones distintas que se pueden expresar por una sola expresión, pero esto recién se pudo observar en el año 1844 por Cauchy que planteó el siguiente ejemplo que se muestra en la figura 27.

"*Consideremos la función*

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sería discontinua en el sentido de Euler, pero al mismo tiempo, también puede ser representada por una sola ecuación $\sqrt{x^2}$ *para todo* $-\infty < x < +\infty$*, de tal modo que sería así "continua".* De esta manera tan simple Cauchy hizo insostenible la discriminación de Euler entre funciones continuas y mixtas.

Figura 27. Ejemplo propuesto por Cauchy

Fuente: Ruiz-Higueras (1994, p. 181)

En la figura 27, se muestra el caso que refutaba la definición del concepto de función mixta por Euler, al tener dicha función mixta representada por dos expresiones algebraicas que al final se podían representar con una sola expresión.

Según lo observado en la figura 26 y 27 en esta época se emplea el término de función pero se emplea la variable "y" para representarlo haciendo referencia a un objeto de la geometría analítica y esto pudo haber sido un obstáculo para esta época al confundir dos cosas que eran totalmente distintas, esto evidencia que en realidad en aquellos años la forma como representaban una función no describía un comportamiento funcional, al contrario hace referencia a la representación geométrica del objeto que hace referencia.

En el siglo XIX Ruiz-Higueras (1994) menciona que Dirichlet presentó en el año 1837 una definición distinta para la función de las que se venían dando hasta el momento, esta era más amplia y general: "Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuye un valor numérico a *x* hay una regla, según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*" (Dirichlet citado por Boyer, 1987. p. 687).
Para evidenciar que en la regla de correspondencia pueda ser algo arbitrario, presentó el siguiente ejemplo que representa a una función inusitada: Para dos números reales distintos *c* y *d,* se presenta la siguiente regla de correspondencia que se muestra en la figura 28.

$$f(x) = \begin{cases} c & Cuando\ x\ es\ racional \\ d & Cuando\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

Figura 28. Ejemplo de una función inusual

Fuente: Chumpitaz (2013, p. 44)

Por último, en el siglo XX Ruiz-Higueras (1994) menciona que, en la actualidad, las definiciones que manejamos respecto al concepto de función se basan en la que propuso Dirichlet, sin dejar de lado las ideas que ayudaron en su elaboración, por ejemplo, la correspondencia, la noción de grafo y la de aplicación.

Al haber realizado esta breve descripción de cómo ha evolucionado la noción de función, se pudo observar que en la medida de querer formalizar el concepto de función fue necesario mencionar a la función discontinua o mixta, que en la actualidad las conocemos como función por tramos. Por tal motivo, al no tener la claridad en cómo se dio la epistemología de la función por tramos y que esta apareció con el objetivo de refutar la idea que tenían en que una función solo se podía expresar con una sola expresión algebraica, pensamos que ese mismo caso puede ocasionar actualmente conflictos en la construcción del concepto de función por tramos en los estudiantes al condierar la idea que una función normalmente estará expresada por una sola expresión algebraica.

Además, es necesario tener conocimiento de una definición matemática formal de la función por tramos. En ese sentido, se pudo encontrar en el trabajo de Chumpitaz (2013) la siguiente definición:

> Al inicio, se debe fijar una familia de funciones $F \subset \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, la cual la denomina funciones básicas, cuya familia Y de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, $Y \subset P(\mathbb{R})$.
>
> Definición: Una función $f: A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$ es una función definida por tramos si existe una colección o familia de funciones $\{f_i: A_i \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$ de la forma $f_i = f|_{A_i}$, donde $f \in F$ y $A_i \in Y$, $i \in I$, donde I es un conjunto de índices contable, de modo que:
>
> I. $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$, $i \in I$. (Propiedad de la regla por tramos)
>
> II. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. (Propiedad del dominio)
>
> III. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i, j \in I$, $i \neq j$. (Propiedad del no solapamiento)
>
> IV. Dados $i, j \in I$, $i \neq j$, $f_i = f|_{A_i}$, $f_j = g|_{A_j}$ con $f, g \in F$, se tiene que $f \neq g$. (Propiedad de la no redundancia) (Chumpitaz, 2013, p. 45)

Según lo revisado podemos ver que la función por tramos en sus inicios no estaba definida, sino que se fue definiendo conforme paso la historia y en ese proceso contribuyó Chumpitaz (2013).

2.3 Aspectos de la función por tramos en los libros didácticos

En esta sección, revisaremos dos textos de consulta para estudiantes que se muestran en las referencias bibliograficas del sílabo del curso de Matemática Básica para la carrera de Gestión de una universidad privada de Lima. A continuación, en el cuadro 4, se presenta la información de cada uno de estos libros.

Cuadro 4. Libros de consulta de los estudiantes

LIBROS DIDÁCTICOS		
Autores	**Título**	**Capítulo**
Jagdish C. Arya Robin W. Lardner	Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía Quinta edición - 2009	**5 - Funciones y sus gráficas** 5 – 1 Funciones 5 – 2 Funciones cuadráticas y parábolas 5 – 3 Más funciones elementales y sus gráficas
James Stewart	*Precálculo* Séptima edición - 2007	**Funciones y sus gráficas** 1.1 Modelación y resolución de ecuaciones 1.2 Funciones y sus propiedades 1.3. Doce funciones básicas

La información a revisar en cada libro tiene por finalidad evidenciar la forma en la cual los docentes enseñanzan la función por tramos, y de esa manera poder identificar en la organización del tema los puntos que podrían ocasionar futuras dificultades a los estudiantes en el momento de trasladar la información hacia ellos.

En la revisión del libro de Arya y Lardner (2009) sobre la función por tramos, se puede mencionar lo siguiente:

- Se presenta la representación de una función por tramos en el registro gráfico como un ejemplo de la página 177 que es empleado para explicar la Prueba de la línea vertical, aunque no la definen como tal, solo es una representación gráfica como se puede observar en la figura 29.

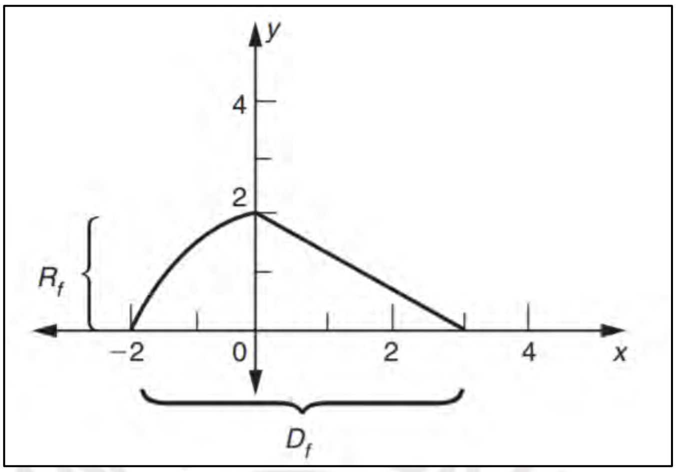


Figura 29. Ejemplo de una función que cumple la prueba de la línea vertical
Fuente: Arya y Lardner (2009, p. 178)

- Según Arya y Lardner (2009, p. 181), “Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión”, haciendo referencia a una función por tramos. Referente a lo mencionado por la autora creemos que esto se debe al modelar ciertos fenómenos que están en nuestro entorno no siempre seguirá un único comportamiento si no que esto podría cambiar a través de ciertas restricciones que uno pueda encontrar.
- En el libro se presenta un primer ejemplo que modela una situación real que se presenta en forma de enunciado y está presentado en el registro lenguaje natural, al desarrollar dicho ejemplo realizando la conversión del registro de lenguaje natural al registro algebraico con sus respectivos tratamientos, el autor termina el ejemplo presentando dicha información en el registro gráfico donde se evidencia dos tramos lineales. A pesar que el objetivo del ejemplo es encontrar la representación de la función en el registro algebraico que describa la información brindada en el enunciado, también se mostró la representación de la función en el registro gráfico, tal como se muestra en la figura 30.

EJEMPLO 11 ***(Función de costo de la electricidad)*** La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10¢ por unidad para las primeras 50 unidades y a 3¢ por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determine la función $c(x)$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

Solución Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x) = 10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x = 50$, obtenemos $c(50) = 500$; el costo de las primeras 50 unidades es igual a 500¢. Si $x > 50$, el costo total es igual al de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es $x - 50$, y cuestan 3¢ cada una, por lo que su costo es de $3(x - 50)$ centavos. Así que la tarifa total cuando $x > 50$ es

$$c(x) = 500 + 3(x - 50) = 500 + 3x - 150 = 350 + 3x$$

Podemos escribir $c(x)$ en la forma

$$c(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } x \leq 50 \\ 350 + 3x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

La gráfica de $y = c(x)$ se aprecia en la figura 8. Obsérvese cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x = 50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra. ☛ 9

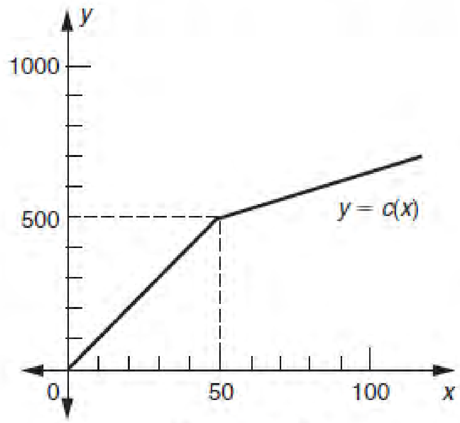


FIGURA 8

Figura 30. Ejemplo 11 y solución propuesta por el autor

Fuente: Arya y Lardner (2009, p. 181)

En la figura 30 (figura 8 en el texto) observamos la notación $y = c(x)$ para la designación de una función, lo cual implica que Arya y Lardner (2009) tratan indistintamente a la regla de correspondencia de una función f con la ecuación y en términos de x es decir $y = f(x)$, lo cual en el ámbito de didáctica de la matemática no es correcto ya que las funciones y las ecuaciones son objetos completamente distintos: en una ecuación en dos variables no se identifica cual es la independiente y cual es la dependiente, lo cual no sucede en una función.

- Luego se presenta un segundo ejemplo, donde la representación de la función está en el registro algebraico y además está formada por dos expresiones algebraicas y lo que se pide es realizar el gráfico de dicha función. Arya y Lardner (2009) presenta como solución del problema lo siguiente: Se empieza a realizar algunas operaciones empleando el registro numérico y de esta forma poder obtener la abscisa y ordenada en distintos casos analizados para posteriormente apoyarse en el registro par ordenado, luego dichos puntos los ubica en el plano cartesiano y finalmente consigue la representación de la función en el registro gráfico, tal como se muestra en la figura 31.

EJEMPLO 12 Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica $f(x) = 4 - x$, mientras que si $x > 4$, está definida por la expresión $f(x) = \sqrt{x-4}$. Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 3 y la gráfica de esta función aparece en la figura 9. Consta de dos segmentos: si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y = 4 - x$. ☛ **10**

TABLA 3

x	0	2	4	5	8	13
$y = f(x)$	4	2	0	1	2	3

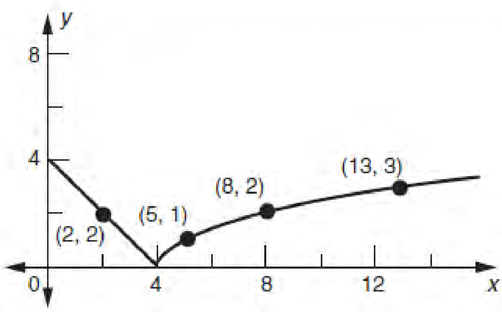


Figura 31. Ejemplo 12 y solución propuesta por el autor

Fuente: Arya y Lardner (2009, p. 182)

- El libro, no brinda una definición sobre la función por tramos, así como tampoco presenta un ejemplo donde el problema inicial se dé a conocer a través de una representación gráfica de la función por tramos al contrario solo se ha empleado el registro de lenguaje natural y el registro algebraico para dar inicio al problema que se va a trabajar, en ese sentido nuestra investigación que tiene como objeto de estudio a la función por tramos va incidir en presentar el problema a través del registro gráfico.

En la revisión del libro Stewart (2007) sobre la función por tramos, se puede mencionar lo siguiente:

- En la figura 32, el autor muestra el ejemplo 6, que forma parte de la sección 1.3 “Doce funciones básicas” donde hace referencia de cómo identificar si una función está definida por partes. El objetivo de dicho ejemplo es identificar a qué función básica corresponde la expresión algebraica y obtener como respuesta a $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 6 Identificación de una función definida por partes

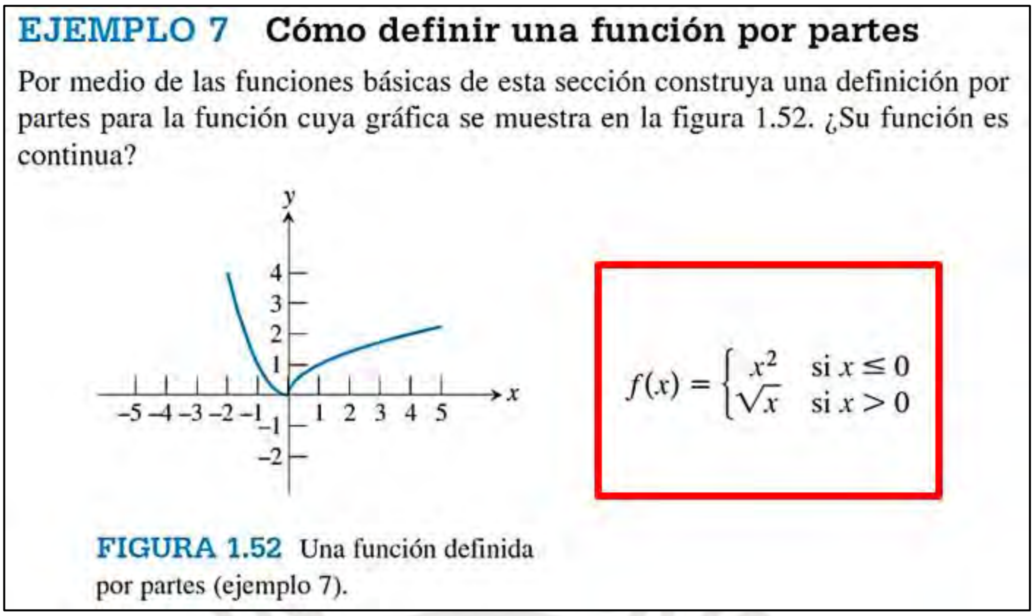
¿Cuál de las doce funciones básicas tiene la definición **por partes** siguiente, en intervalos separados de su dominio?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Figura 32. Ejemplo 6 y la expresión algebraica de la gráfica

Fuente: Stewart (2007, p. 111)

- Luego, en la figura 330, Stewart (2007) presenta el ejemplo 7 donde la información que el estudiante debe tener presente está en el registro lenguaje natural y además debe apoyarse en la representación de la función por tramos que se brinda en el registro gráfico (figura 1.52) para poder identificar las dos expresiones algebraicas de dicha función definida por partes y obtener como respuesta la representación de la función definida por partes en el registro algebraico que se muestra en el recuadro de color rojo y de esta forma poder indicar si la función es continua o no.


EJEMPLO 7 Cómo definir una función por partes

Por medio de las funciones básicas de esta sección construya una definición por partes para la función cuya gráfica se muestra en la figura 1.52. ¿Su función es continua?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

FIGURA 1.52 Una función definida por partes (ejemplo 7).

Figura 33. Ejemplo 7 y su representación algebraica de la gráfica

Fuente: Stewart (2007, p. 112)

En este último texto no se brinda más ejemplos para poder entender mejor el concepto de la función por tramos pero lo que si se resalta es que a comparación del texto anterior cuyo autor es Arya y Lardner (2009), se presenta el ejemplo donde la información que el estudiante debe identificar se encuentra en el registro gráfico aunque en la explicación para encontrar dicha representación de la función en el registro algebraico Stewart (2007) menciona “Ésta parece ser la gráfica de $y = x^2$ a la izquierda de $x = 0$ y la gráfica de $y = \sqrt{x}$ a la derecha de $x = 0$” (p. 112), esto nos muestra que en realidad el autor solo está solicitando que relacione la representación gráfica de cada tramo con alguna función que el estudiante ya ha estudiado, y de esta forma pueda escribir la representación de la función en el registro algebraico, es decir, la regla de correspondencia.

Luego de realizar la revisión de ambos textos que sirven de apoyo a los estudiantes, podemos mencionar que la función por tramos, en ambos libros, solo aparece en un par de ejemplos y no se brinda mayor información respecto al tema, por ejemplo, la necesidad de realizar dichas representaciones gráficas y algebraicas de esa función o de qué manera se pueden generar la conversión de un registro a otro (gráfico al algebraico y viceversa).

Además, la única definición para la función por tramos que se menciona en ambos textos por Arya y Lardner (2009) y Stewart (2007) es que dicha función es por tramos cuando se puede expresar por más de una expresión algebraica.

Luego de haber revisado la información brindada en ambos textos sobre la función por tramos reafirmamos nuestra idea de plantear actividades donde el punto de inicio sea una representación de la función por tramos en el registro gráfico y de esta forma poder lograr los objetivos de nuestra investigación.

CAPITULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección, detallaremos las características del escenario de investigación, los sujetos que formarán parte de nuestro trabajo, los recursos que serán necesarios para poner en marcha la parte experimental de nuestro estudio, así como para la recolección de datos y se mostrará la relación de cada actividad con los objetivos específicos de la tesis.

3.1 Escenario de la investigación

La parte experimental de la investigación está destinada a estudiantes de las carreras de Humanidades que llevan un curso de Matemática básica en una universidad privada de Lima. Dicho curso, está conformado por 65 estudiantes entre varones y mujeres, cuyas edades están comprendidas entre los 17 y 19 años. Los estudiantes tienen conocimientos previos de funciones, dominio, rango y gráfica de la función constante, lineal y cuadrática y sus respectivas interpretaciones en situaciones intra-matemáticos y extra-matemáticos, lo cual creemos que es importante para nuestro estudio.

Entre los estudiantes del curso referido, según especialidad, cuatro de ellos son estudiantes de Artes Escénicas, 56 de otras carreras de letras, cinco son de Gestión y uno de Economía. Por ello, vemos conveniente considerar a los estudiantes de Gestión, tanto para la actividad individual como la grupal, por tener la misma formación académica al llevar los mismos cursos y de estos estudiantes se puede diferenciar dos grupos, uno de ellos está conformado por dos estudiantes que cursan el curso por primera vez y un segundo grupo de tres personas que cursan el curso más de una vez.

De dichos grupos, se ha elegido a una estudiante del primer grupo (Tatiana) y del segundo grupo también se eligió a una estudiante (Selene), que serán nuestros sujetos de investigación, quienes de manera voluntaria han decidido participar en nuestra investigación convirtiéndose, de esta manera, en sujetos de investigación. La selección realizada también se basa en el aspecto de tener a una persona que está llevando por primera vez el curso que en este caso es Tatiana y la segunda persona es Selene quien lleva el curso por segunda vez, pero en su trabajo anterior no ha empleado algún software en el desarrollo del tema.

De esta manera el trabajo que se va a realizar en las actividades propuestas es analizar los tratamientos y conversiones entre el registro gráfico y el registro algebraico que puedan realizar en la actividad de la función por tramos mediada por el GeoGebra. También las razones de selección de Tatiana y Selene se basan en el simple hecho de estar presentes en las dos sesiones donde se desarrollarán las actividades propuestas que nos servirán para tener información a analizar. Las actividades serán trabajadas dentro y fuera de la sesión de clase con los 65 estudiantes (previa coordinación con el docente del curso), pero solo se analizará las actividades de los dos sujetos de investigación.

El primer encuentro se lleva a cabo en el aula tipo taller, donde se desarrolla la primera actividad que será realizada a lápiz y papel a través de una hoja proporcionada a los estudiantes (Ver anexo 1) y el segundo encuentro dará lugar a la segunda actividad que tendrá como apoyo al GeoGebra donde se podrá observar el comportamiento de la función por tramos (Ver anexo 2), ambas actividades serán realizadas por los sujetos de investigación.

Para la recolección de datos, se debe tener presente dos escenarios respecto a las dos actividades: La primera actividad se trabajará dentro de la sesión de clase de manera individual donde cada uno de ellos recibirá la actividad de manera impresa. En cambio la segunda actividad se realizará fuera de la sesión de clase, en una actividad colaborativa con nuestros sujetos de investigación que estarán trabajando en grupos distintos, para ello se le proporcionará dos archivos a través de la plataforma virtual, una de ellas será el archivo de GeoGebra en la cual encontrarán los tres casos a manipular y el segundo archivo es un documento en pdf que tendrán que imprimir y además le servirá a los integrantes del grupo como guía para la manipulación de los casos en el archivo de GeoGebra y a la vez según se le solicite información respecto a la actividad propuesta empiecen a completar sus respuesta en cada una de ellas.

En la aplicación de la primera actividad, al ser desarrollada en los últimos 40 minutos de la clase, el investigador no estará presente durante el desarrollo de la misma, por ende, tampoco podrá intervenir en el sentido de dar indicaciones puesto que se desea que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos sobre función lineal y

cuadrática, es decir, los estudiantes se desenvolverán con naturalidad en el desarrollo de la misma.
En la primera actividad, a ser desarrollada por lápiz y papel se proporcionará a los estudiantes la actividad impresa donde se les presentará un caso cuya representación gráfica está ya dada, además el escenario que se empleará para la actividad es un aula con capacidad para 65 estudiantes y su ambiente cuenta con una pizarra acrílica, plumones, mota, regla, además se cuenta con el apoyo del profesor del curso y de sus dos asistentes con el propósito de dar las pautas iniciales que servirán para el desarrollo de la actividad que son nuestros instrumentos de recolección de datos.
Los archivos a ser utilizados en la segunda actividad, al ser un trabajo colaborativo o grupal la cual requiere el uso del GeoGebra, se les proporcionará a los estudiantes por medio de la plataforma virtual que emplea la universidad privada en mención, el primero será el archivo de GeoGebra y el segundo la ficha en formato pdf que contiene las preguntas de la segunda actividad donde los estudiantes completarán sus respuestas y luego devolverán al profesor, facilitando al investigador una fotocopia de las mismas.
Las actividades propuestas se llevarán a cabo durante dos semanas, una por semana, y de manera correlativa, teniendo en cuenta que en actividad 1 tendrá un tiempo de duración de 40 minutos, mientras que el desarrollo de la actividad 2 se entregará en la segunda sesión de clase a la profesora a cargo del curso.

3.2 Análisis de las actividades

En esta sección, mostraremos la organización, descripción y análisis de nuestras actividades teniendo en cuenta el marco teórico de nuestra investigación, es decir, aspectos de la teoria de Registros de representación semiótica.

En el cuadro 5, presentamos la organización de las actividades de manera correlativa.

Cuadro 5. Actividades de la parte experimental

Actividad	Medio	Descripción
1	Lápiz y papel	Dado la representación gráfica que describe la actividad propuesta, se tendrá que realizar la conversión de dicha representación al registro algebraico realizando tratamientos en dicho registro.
2	GeoGebra	Se le presentará la actividad donde encontrará la animación de una función por tramos que se empieza a formar conforme el tiempo pasa, además está conformada por un tramo lineal y cuadrático.

En ambas actividades, se busca que los sujetos de investigación movilicen sus conocimientos previos de los temas trabajados en su primer curso de matemática teniendo en cuenta que una de ellas ya llevó el curso en una oportunidad anterior. En ese sentido, el investigador, el profesor a cargo y sus dos asistentes de aula no tendrán intervención alguna en el desarrollo de la misma.

A continuación, se mostrará la primera actividad que está conformada por cinco preguntas que se agruparán en tres ítems por conveniencia.

ACTIVIDAD 1

En la siguiente figura, se muestra el comportamiento de la utilidad de una empresa a través del tiempo desde su conformación en 1985. En un determinado año, el comportamiento de la utilidad de la empresa empezó a cambiar, como se puede apreciar en la gráfica, debido a reformas por parte del gobierno de turno. Por ello, la empresa tomó acciones drásticas para contrarrestar dicha situación buscando el menor tiempo posible para su repunte en el mercado.

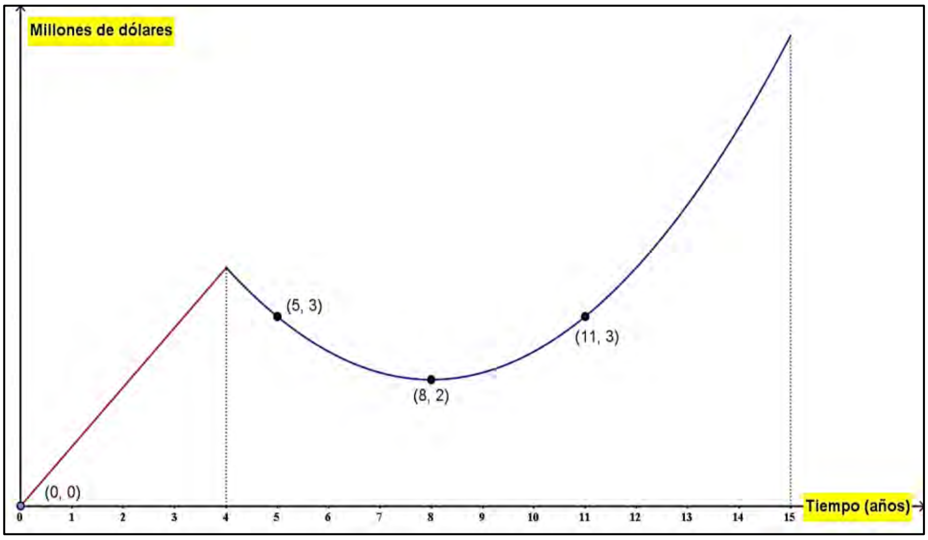


Figura. Comportamiento de la utilidad de la empresa a través de los años

Según la información brindada, responda las siguientes preguntas.

a) ¿A partir de qué año el valor de la utilidad de la empresa empezó a devaluarse? Justifique su respuesta
b) ¿Qué significado le puede dar al punto (8, 2) entorno a la situación planteada?

d) ¿Entre qué años el valor de la utilidad de la empresa aumenta? Justifique su respuesta.

e) Si se desea obtener la expresión que representa el valor de la utilidad de la empresa a través de los años, ¿Con cuál de los dos escenarios empezaría a trabajar? Justifique su respuesta.

f) Determine la regla de correspondencia para la situación planteada.

Las variables didácticas asociadas a la actividad 1 y sus respectivos valores de la variable son:

- El número de tramos con el que está formado la función: 2
- Cantidad de puntos en cada tramo de la función: 1 o 3
- Cuadrícula en la vista gráfica: Sí o No

A continuación, en la figura 34, presentamos el ítem 1 de la primera actividad (Anexo 1) que está conformado por las preguntas (a) y (b), el objetivo de dicho ítem es identificar las coordenadas de los pares ordenados que representan los datos de la actividad.

a) ¿A partir de qué año la utilidad de la empresa empezó a devaluarse? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué significado le puede dar al punto (8, 2) entorno a la situación planteada?

Figura 34. Ítem 1 de la primera actividad

Anexo 1

Respuesta de Tatiana

Tatiana lleva el curso por primera vez y podemos observar en la figura 35 que al responder la pregunta (a) ella identificó la información que se brindó en el registro de lenguaje natural. Lo que significa que Tatiana entiende el término devaluación y la relaciona con el hecho de que la curva decrece, es decir, la representación gráfica de la utilidad es decreciente.

Sin embargo, como observamos, Tatiana no lo expresa de manera correcta, o sea utilizando el término corrrecto, sino que usa un término coloquial “la parábola baja”. Lo que evidencia que Tatiana confunde el objeto matemático con su representación, puesto que una función cuadrática no es una parábola.

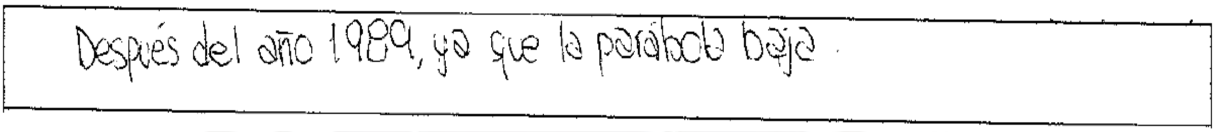

Despúes del año 1989, ya que la parábola baja.

Figura 35. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (a) de Tatiana

Por otro lado, en la segunda pregunta, se observa que Tatiana, utiliza el registro par ordenado para representar el año y la utilidad. Sin embargo, observamos en la figura 36 que solo hace referencia a la primera coordenada del par ordenado y no a la segunda, lo que significa, que Tatiana no relaciona la segunda coordenada con la variable utilidad, es decir que no moviliza la noción de función, de variable dependiente e independiente.

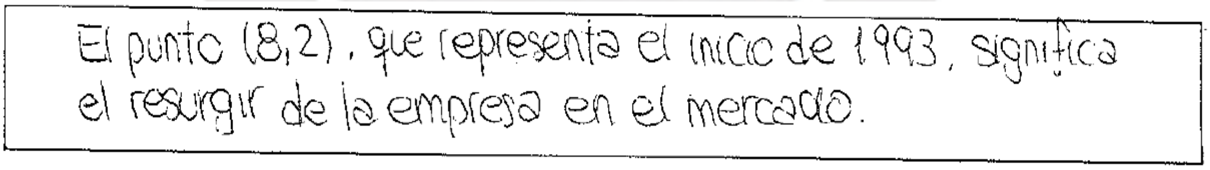

El punto (8,2), que representa el inicio de 1993, significa el resurgir de la empresa en el mercado.

Figura 36. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (b) de Tatiana

Finalmente, para Tatiana afirmamos que el objetivo del primer ítem no se cumplió.

Respuesta de Selene

Selene que ya llevó el curso anteriormente al responder la primera pregunta, colocó los años correspondientes a cada abscisa presente en el eje X según el enunciado de la primera actividad propuesta, esto evidencia que identifcó la información brindada que está presente en el registro de lenguaje natural con la primera coordenada de los pares ordenados que se ubican en la representación gráfica de la función utiidad, es decir en el registro gráfico. Esta acción que realiza Selene es el punto de partida para poder dar respuesta a lo que se solicita en el inciso (a), tal como se puede observar en la figura 37.

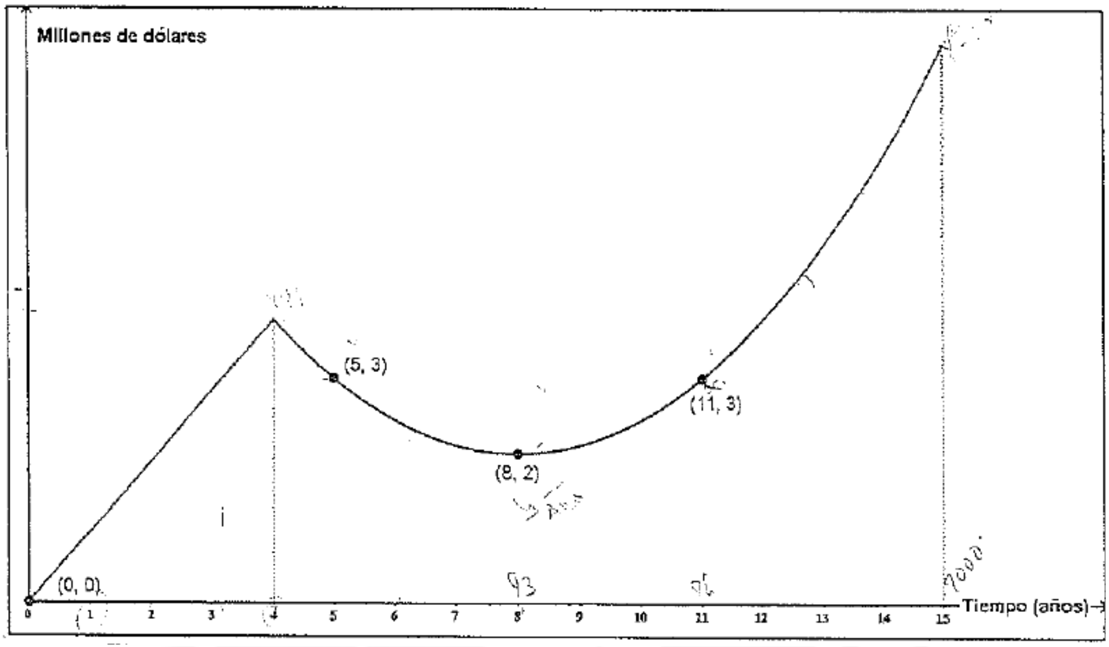


Figura 37. Actividad 1 – Reproducción de Selene

A pesar que Selene ha identificado y relacionado la información de manera correcta tal como se observó en la figura 37, al dar respuesta a la primera pregunta, no logró expresar de manera correcta en el registro de lenguaje natural lo que realmente expresa el valor de la abscisa, es decir, no brinda el año que corresponde a la primera coordenada de dicho par ordenado pero sí relaciona el término "devaluarse" con el decrecimiento de la representación gráfica, a pesar de ello evidencia que moviliza sus conocimientos sobre función decreciente tal como se muestra en la figura 38.

Como se puede apreciar en la imagen el valor de la empresa empezó a devaluarse a partir del año cuatro hasta el año ocho y ello se debió a las reformas por parte del gobierno.

Figura 38. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (a) de Selene

En la segunda pregunta, Selene, al dar su respuesta, trabaja con el registro par ordenado e identifica el valor de la primera coordenada mencionando que "sería el último año" y el valor de la segunda coordenada representa "los millones de dólares" evidenciado que sí identifica la información que se brinda en el registro de lenguaje natural con el registro par ordenado, pero no lo relaciona con el año de referencia que se da en el contexto planteado, es decir, el año 1993. Además, se equivoca al indicar que la primera y segunda coordenada es un punto evidenciando que no moviliza sus conocimientos previos sobre par ordenado, tal como se observa en la figura 39.

> El punto (8) vendría a representar el último año donde la empresa tuvo una devaluación ya que después como se puede ver la empresa tomo acciones drásticas y empieza a contrarrestar esa situación; y el punto (2) representa los millones de dólares que la empresa tuvo como ingreso en ese tiempo.

Figura 39. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (b) de Selene

Finalmente, para Selene afirmamos que el objetivo del primer ítem no se cumplió.

Por último, hay que mencionar para este primer ítem que Tatiana respondió mejor a las dos preguntas a comparación de Selene, teniendo en cuenta que Tatiana está llevando el curso por primera vez, en cambio, Selene presentó inconvenientes al relacionar la información del registro de lenguaje natural con el registro par ordenado, esto se pudo haber dado al presentarle la actividad de una manera distinta que quizás Selene no ha trabajo con anterioridad.

A continuación, en la figura 40, presentamos el ítem 2 de la primera actividad (Anexo 1) que está conformado por las preguntas (c) y (d), el objetivo de dicho ítem es identificar los diferentes registros de representación semiótica de la función por tramos.

c) ¿Entre qué años el valor de la utilidad de la empresa aumenta? Justifique su respuesta.

d) Si se desea obtener la expresión que representa el valor de la utilidad de la empresa a través de los años, ¿Con cuál de los dos escenarios empezaría a trabajar? Justifique su respuesta.

Figura 40. Ítem 2 de la primera actividad

Respuesta de Tatiana

Como se puede observar en la figura 41, Tatiana al responde la pregunta (c), representa en el registro de lenguaje natural los años en que la utilidad se incrementa. Es decir, solo realiza una lectura del registro gráfico más no realiza una conversión. Lo que quiere decir, que Tatiana a partir de la representación gráfica moviliza sus conocimientos de función creciente.

Desde su conformación en 1985 hasta 1989 y desde
después de 1993, porque la función sube en esos tramos

Figura 41. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (c) de Tatiana

En la figura 42, observamos que Tatiana al responder la pregunta (d) identificó los pares ordenados representados en el registro gráfico y señaló que esos pares ordenados son necesarios y suficientes para representar la función cuadrática en el registro algebraico. Además, afirmó que dicho registro algebraico ayuda a encontrar el segundo punto de paso de la función lineal y así permitirá formar la representación algebraica de la función lineal. Esto significa que Tatitana moviliza sus conocimientos de funciones de variable real.

Se debe iniciar desde el segundo tramo, es decir, la parte
cuadrática, porque muestra puntos de paso completos. para
poder elaborar la regla de correspondencia de esa parte
con eso, se puede encontrar el punto de paso de la función
lineal y así, su regla de correspondencia

Figura 42. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (d) de Tatiana

Por lo expuesto, Tatiana identifica las distintas representaciones de la función por tramos de manera satisfactoria teniendo en cuenta que es la primera vez que está llevando el curso y además sí identificó la información brindada en los distintos registros de representación semiótica. Hecho que nos permite afirmar que el primer objetivo de nuestra investigación fue logrado.

Respuesta de Selene

En la figura 43, se observa la respuesta de la pregunta (c), por parte de Selene, en la que se puede apreciar que solo identificó el subdominio del tramo cuadrático donde el valor de la utilidad de la empresa empieza a incrementar, pero no consideró el subdominio del tramo lineal. A pesar de ello, su respuesta dada en el registro de lenguaje natural no es correcta, puesto que solo brinda los valores de las abscisas donde la utildad incrementa olvidando la información dada en el registro de lenguaje natural, pero si moviliza sus conocimientos sobre función creciente al indicar que “empieza nuevamente a aumentar”.

El valor de la empresa aumenta entre los años 8 y 11, ya que como se puede ver en la gráfica a partir del año 8 el valor de la empresa empieza nuevamente a aumentar generando más ingresos y así va subiendo sucesivamente en los siguientes años.

Figura 43. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (c) de Selene

Para la pregunta (d), Selene mencionó que, para encontrar la regla de correspondencia de la función utilidad representada en el registro algebraico, debe iniciar el análisis con el segundo escenario, que corresponde al tramo cuadrático, argumentando que “tiene mayor información”. Esto evidencia que moviliza sus conocimientos previos sobre función cuadrática identificando la información que se ha brindado en el registro gráfico que son necesarios para poder realizar la representación gráfica del segundo tramo, por ejemplo, los puntos de paso de dicha función cuadrática.

A continuación, en la figura 44, se muestra lo mencionado por Selene.

Para obtener la expresión que representa el valor de la utilidad de la empresa a través de los años empezaría a trabajar con el segundo escenario; debido a que tengo más información y datos para poder resolver la interrogante; luego continuaría con el 2do escenario.

Figura 44. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (d) de Selene

Según lo observado en las respuestas de Selene al segundo ítem de la actividad 1, se puede afirmar que sí identificó elementos, pero no lo relacionó con la información brindada en el registro de lenguaje natural y esto evidenció en la pregunta (c), pero en la pregunta (d) en el registro gráfico si identifcó lo necesario para obtener la representación de la función utilidad en el registro algebraico.

Finalmente, para Selene afirmamos que el objetivo del primer ítem no se cumplió.

Luego de haber visto las respuestas proporcionadas por ambas estudiantes nuevamente se ve reflejado que Tatiana moviliza mejor sus conocimientos previos para el tema de función por tramos a pesar que ella está llevando el curso por primera vez, en cambio con Selene aún se sigue evidenciando las dificultades que se han dado en los ítem (a) y (b) teniendo en cuenta que el curso para ella no es nuevo, esto se podría estar dando por la manera cómo se le está proponiendo la actividad, al ser quizás distinta a lo que ya se le ha presentado en la primera oportunidad que llevo el curso.

A continuación, en la figura 45, presentamos el ítem 3 de la primera actividad (Anexo 1) que está conformado por la pregunta (e), el objetivo de dicho ítem es determinar las conversiones de las representaciones y establecer los tratamientos en el registro algebraico de la función por tramos.

e) Determine la regla de correspondencia para la situación planteada.

Figura 45. Ítem 3 de la primera actividad

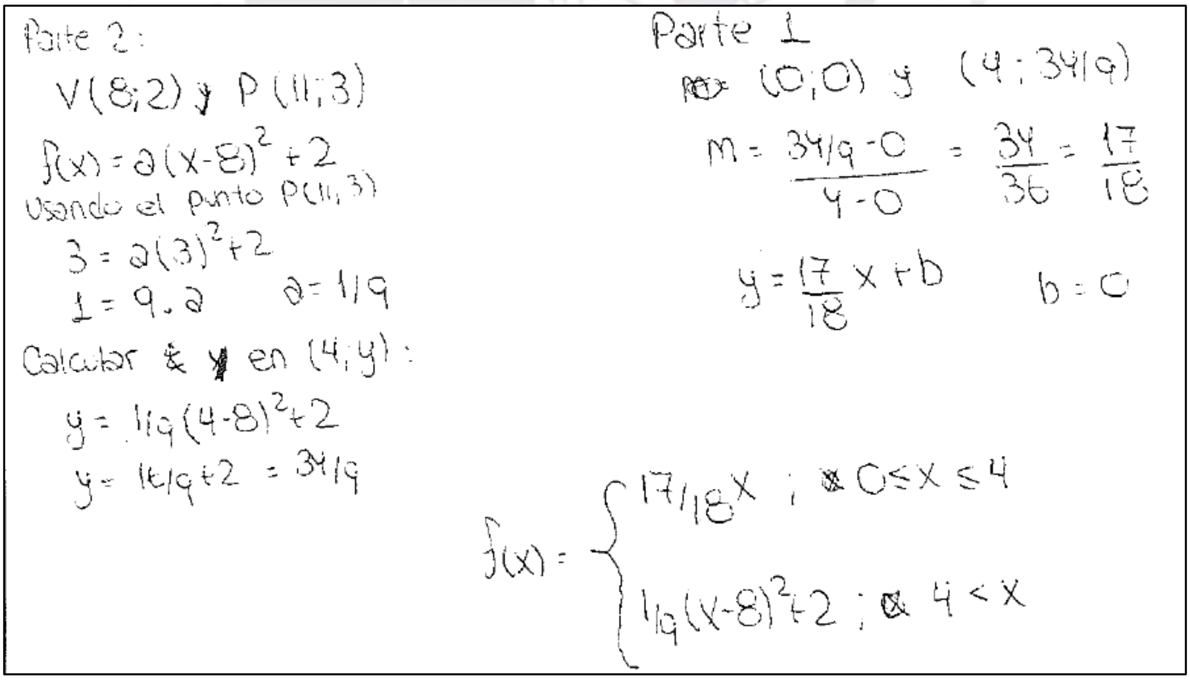
<u>Respuesta de Tatiana</u>

Tatiana en el registro gráfico identificó la cantidad de tramos de la función utilidad de la empresa y realizó la conversión en la representación de la función cuadrática del registro gráfico al registro algebraico. Además, realizó tratamientos en este último registro y así obtuvo la representación algebraica de la función cuadrática, es decir, determinó la regla de correspondencia.

En ese sentido, Tatiana escogió un par de puntos de paso en dicha representación del tramo cuadrático que se encuentran en el registro gráfico, donde uno de ellos es el vértice de la función cuadrática y empleó en el registro algebraico la representación de la función cuadrática en la forma canónica para expresar la regla de correspondencia, es decir, Tatiana movilizó sus conocimientos previos sobre la función cuadrática. Por último, realizó tratamientos en el registro algebraico para determinar el valor del coeficiente a.

Luego de haber determinado en el registro algebraico la representación del tramo cuadrático, Tatiana identificó que es necesario determinar la ordenada del punto que vincula ambos tramos, cuya abscisa es 4. Para ello, se apoyó en la representación algebraica del tramo cuadrático que ya había determinado y a través de tratamientos en el registro numérico de diferencia, potencia, producto y suma pudo determinar el valor de la ordenada cuya abscisa es igual 4, de esta manera recién pasó a determinar en el registro algebraico la representación del tramo lineal, es decir, la regla de correspondencia para la función lineal. Para ello, determinó la pendiente de dicho tramo y luego consiguió el valor del término independiente al tener presente el punto que está ubicado en el origen de las coordenadas cartesianas, todo esto se pudo realizar a través de tratamientos en el registro algebraico.

Además, en el registro algebraico para el primer tramo, Tatiana señaló de manera correcta el subdominio y en el segundo tramo identificó que, al colocar el intervalo cerrado en la abscisa igual a 4 del primer tramo, entonces para el segundo tramo, en dicho valor, debe ser abierto, es decir, que Tatiana moviliza sus conocimientos previos sobre la condición que debe cumplir una función pero olvidó el contexto que está representado en el registro gráfico y no escribió el valor final de x para la situación propuesta, tal como se muestra en la figura 46.



Parte 2:

$V(8;2)$ y $P(11;3)$

$f(x) = a(x-8)^2 + 2$

Usando el punto $P(11;3)$

$3 = a(3)^2 + 2$

$1 = 9 \cdot a \qquad a = 1/9$

Calcular ~~x~~ y en $(4;y)$:

$y = 1/9(4-8)^2 + 2$

$y = 16/9 + 2 = 34/9$

Parte 1

$(0;0)$ y $(4;34/9)$

$m = \dfrac{34/9 - 0}{4 - 0} = \dfrac{34}{36} = \dfrac{17}{18}$

$y = \dfrac{17}{18}x + b \qquad b = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 17/18\,x & ; 0 \leq x \leq 4 \\ 1/9(x-8)^2 + 2 & ; 4 < x \end{cases}$$

Figura 46. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (e) de Tatiana

Según lo mostrado en la figura 46, podemos mencionar que Tatiana logró realizar la conversión de la representación del registro gráfico al registro algebraico, además ha realizado tratamientos en este último registro al desarrollar la ecuación que se formuló para determinar el valor del coeficiente principal en la expresión algebraica del tramo cuadrático. Posteriormente determinó la regla de correspondencia del tramo lineal donde realiza tratamientos en el registro numérico al determinar el valor de la pendiente del tramo lineal, finalmente escribe la regla de correspondencia de la situación propuesta en el registro algebraico.

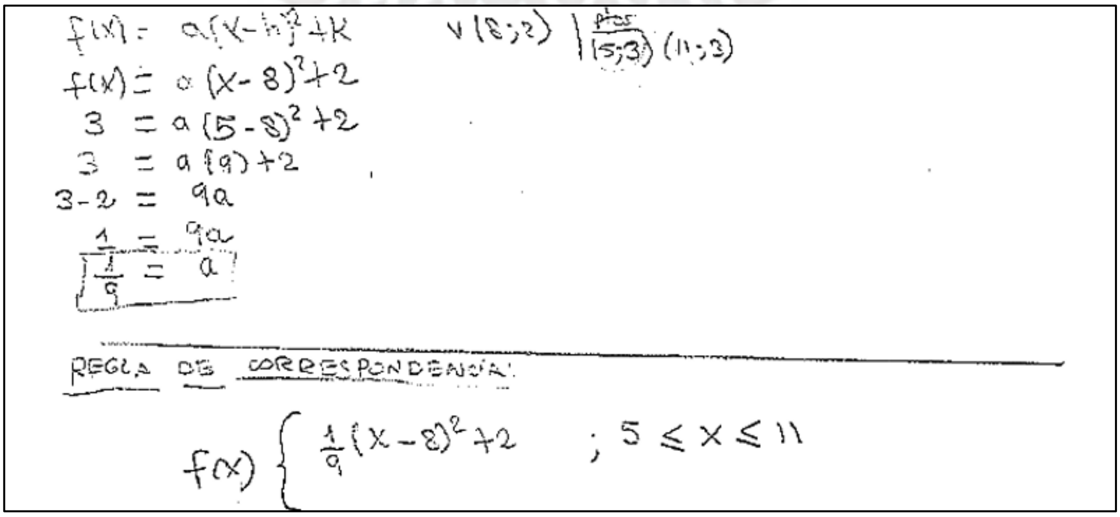
Por ello, podemos afirmar que se ha logrado alcanzar nuestro segundo y tercer objetivo de nuestra investigación.

<u>Respuesta de Selene</u>

Selene, al resolver la pregunta (e), pudo encontrar en el registro algebraico la representación para el segundo tramo, lo que evidencia la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico y a la vez realiza los tratamientos respectivos en este último registro de representación, con la finalidad de determinar el valor del coeficiente a que se obtiene al desarrollar la ecuación que obtuvo al reemplazar el segundo punto (5; 3). Esto se pudo dar porque movilizó sus conocimientos previos sobre la función cuadrática e identificó la información que es necesaria, por ejemplo, el par ordenado que representa el vértice de la función y al haber empleado en el registro algebraico la representación de la función cuadrática donde interviene el vértice, es decir, la forma canónica de la función cuadrática, pero no logró identificar el subdominio del tramo cuadrático.

Por otro lado, para el primer tramo, no logró encontrar la expresión algebraica que describa la situación planteada.

A continuación, se muestra el desarrollo realizado por Selene en la figura 47.



$f(x) = a(x-h)^2+k \qquad v(8;2) \quad \overset{\text{ptos}}{(5;3)} \; (11;3)$

$f(x) = a(x-8)^2+2$

$3 = a(5-8)^2+2$

$3 = a(9)+2$

$3-2 = 9a$

$\frac{1}{9} = \frac{9a}{9}$

$\boxed{\frac{1}{9} = a}$

REGLA DE CORRESPONDENCIA:

$f(x) \begin{cases} \frac{1}{9}(x-8)^2+2 & ; 5 \leq x \leq 11 \end{cases}$

Figura 47. Actividad 1 – Reproducción de la respuesta del inciso (e) de Selene

Según lo observado en la figura 47, podemos mencionar que Selene no realizó la conversión del registro gráfico al registro algebraico de la función utilidad porque no presenta las dos representaciones algebraicas correspondientes a la función, pero sí consigue la regla de correspondencia del tramo cuadrático realizando la conversión del registro gráfico al registro algebraico y los tratamientos respectivos en este último registro, por ejemplo, al desarrollar la ecuación que formula para poder obtener el valor del coeficiente principal a del tramo cuadrático.

En ese sentido Selene no consiguió cumplir con nuestros objetivos planteados para este ítem.

Luego de haber revisado el desarrollo de la primera actividad por parte de nuestros dos sujetos de investigación, se puede mencionar que en el caso de Tatiana se consiguió alcanzar los objetivos de dicha actividad, teniendo en cuenta que ella está llevando el curso por primera vez. En cambio, en el caso de Selene no se logró cumplir los objetivos a pesar que ella ya trabajó dicho tema, puesto que lleva el curso de matemática básica por segunda vez y esto se podría haber dado por la manera en la cual se presentó la actividad referente a la función por tramos siendo distinta a las que quizás haya trabajado con anterioridad.

Por último, al finalizar la actividad las personas involucradas en la aplicación de la primera actividad procedieron a mostrar el desarrollo de cada una de las preguntas con la finalidad de aclarar algunas dudas que puedan haber surgido en el desarrollo de la misma y de esta forma poder aplicar nuestra segunda actividad según lo planificado.

A continuación, se mostrará la segunda actividad que está conformada por cinco preguntas que se agruparán en tres ítems por conveniencia.

ACTIVIDAD 2

En el año 2005, la empresa “Sin Paltas” empezó a exportar dos variedades de este fruto, siendo estas la Palta Hass (Caso 1) y Fuerte (Caso 2). En el primer año (2005), la cantidad anual exportada para ambos frutos fueron distintas, dando una mayor preferencia a la Palta Hass y esto empezó a variar a través de los años hasta que en un determinado momento se igualaron las cantidades anuales exportadas para ambos productos.

A partir de un determinado año, la plantación de dichos frutos fue contagiada por una plaga que obligó a la empresa en disminuir la cantidad anual exportada viendo la necesidad, después de unos años, de cerrar la empresa por cuestiones económicas.

Dichas situaciones se representan gráficamente en el siguiente archivo Pregunta 1.ggb **que descargará de la Plataforma Virtual.**

Al abrir el archivo, deberá encontrar la siguiente ventana, como se muestra en la figura. Si no tiene la misma vista del GeoGebra, entonces deberá de emplear la rueda del mouse para poder ampliar o reducir la imagen, según sea conveniente, y también podrá mover la imagen en la vista gráfica haciendo clic derecho sobre cualquier parte de la ventana del GeoGebra y sin dejar de presionar deberá arrastrar la gráfica hasta encontrar la imagen que se quiere trabajar como se muestra en la figura.

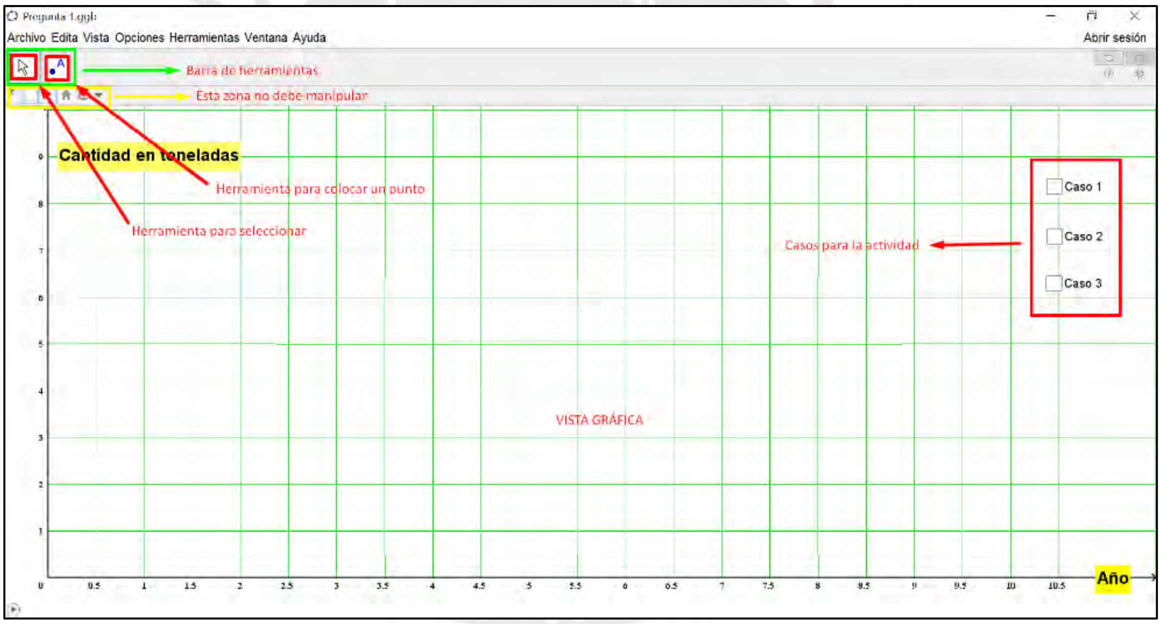


Figura. *Ventana de la pregunta en el* GeoGebra

Para el desarrollo de la **PREGUNTA,** va a emplear las herramientas que están en los cuadros de color rojo, el Botón para Seleccionar se empleará para poder escoger el caso a trabajar y también para seleccionar la opción de Punto, que está en la barra de herramienta, dicha opción le permitirá colocar puntos en la vista gráfica y, si desea eliminar algún de ellos que colocó de manera errónea, deberá hacer anti clic sobre el punto y escoger la opción de Borrar.

Luego, para salir de la herramienta Punto , deberá hacer clic nuevamente a la herramienta Seleccionar . Finalmente, al activar cada uno de los casos para la actividad, según indique las preguntas propuestas, usted verá la relación que existe entre el año y la cantidad exportada en toneladas de Palta.

a) Active el caso 1 y luego el caso 2 y responda: ***¿Cuántas toneladas de Palta de cada variedad se exportaron en el año 2005? Justifique su respuesta.***

b) Active el caso 3 y responda: ***¿A partir de qué año las exportaciones de cada tipo de Palta son iguales? Justifique su respuesta.***

c) Active el Caso 1 y observe la gráfica de la exportación de Palta Hass en toneladas a través de los años, luego active la opción PUNTO , que se ubica en la parte superior de la ventana del GeoGebra, y coloque encima de la gráfica la cantidad de puntos necesarios que nos permita determinar una expresión que represente la exportación de color azul.
En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

   Luego, justifique su respuesta.

d) Active el Caso 2 y observe la gráfica de la exportación de Palta Fuerte en toneladas a través de los años, luego active la herramienta PUNTO , que se ubica en la Barra de herramientas, y ubique en la gráfica la cantidad de puntos necesarios para determinar una expresión que represente la exportación de color azul.
En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

   Luego, justifique su respuesta.

e) Encuentre una expresión que represente el Caso 2.

Las variables didácticas asociadas a esta actividad y sus respectivos valores de la variable son:

- El número de tramos que está formada la función: 2
- El color del rastro en la animación de la situación planteada: Rojo o Azul
- Relación entre X e Y: 1:2
- Cuadrícula en la vista gráfica: Sí o No

A continuación, en la figura 48, presentamos el ítem 1 de la segunda actividad (Anexo 2) que está conformado por las preguntas (a) y (b), el objetivo de dicho ítem identificar las coordenadas de los pares ordenados que representan los datos de la actividad.

a) Active el caso 1 y luego el caso 2 y responda: ***¿Cuántas toneladas de Palta de cada variedad se exportaron en el año 2005? Justifique su respuesta.***

b) Active el caso 3 y responda: ***¿A partir de qué año las exportaciones de cada tipo de Palta son iguales? Justifique su respuesta.***

Figura 48. Ítem 1 de la segunda actividad

<u>Respuesta de Tatiana</u>

En la respuesta brindada por Tatiana se puede observar que relaciona la información brindada en el registro de lenguaje natural y utiliza el registro par ordenado para representar los años y la cantidad de toneladas, esto se evidencia al escribir el año 2005 relacionándolo con la abscisa igual a cero y la vez mencionando la cantidad de toneladas exportadas. Además, esto se da para ambos casos propuestos en la actividad, es decir, identifica el registro par ordenado que se encuentra en el registro gráfico, tal como se muestra en la figura 49.

En el año 2005, caso 1, se exportaron 2 toneladas de palta Hass. Se aprecia en la gráfica que el punto inicial (donde se inicia a exportar palta) es (0;2). Por el otro lado, se exportaron 3 toneladas de palta fuerte. Se nota en la gráfica que el punto inicial es (0;3)

Figura 49. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (a) de Tatiana

En la pregunta (b), Tatiana identificó la información brindada en el lenguaje natural para ambos casos, lo que significa que comprende el término “las exportaciones son iguales”. Para ello se apoya en la representación de la función cantidad de paltas exportadas que se encuentra en el registro gráfico y relaciona de manera correcta el año donde la función empieza a tener la misma cantidad de paltas exportadas, es decir, ambas representaciones de la función cantidad de paltas exportadas son iguales, aunque ella lo menciona con sus propias palabras al escribir que “ahí se intersecan ambas funciones”. Además, en su respuesta brinda el año 2009 y esto demuestra que Tatiana identificó la información pertinente sobre el año de referencia y lo relacionó con la abscisa correspondiente igual a cero, tal como se muestra en la figura 50.

2009, porque ahí se intersectan ambas funciones

Figura 50. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (b) de Tatiana

Según lo presentado en la figura 49 y 50, podemos decir que Tatiana logró alcanzar nuestro objetivo para esta pregunta.

Respuesta de Selene

Selene, al dar respuesta a la pregunta (a), se puede observar que sí identifica la información brindada en el lenguaje natural para el caso 1, por ejemplo, relacionar el año de referencia con el valor de la abscisa igual a cero pero comete un error al mencionar la cantidad de paltas exportadas para el caso 1, esto evidencia que no moviliza sus conocimientos respecto a par ordenado donde se relaciona el año con la cantidad exportada, mientras que en el caso 2 si identificó en el registro de lenguaje natural, de manera satisfactoria, la cantidad de paltas exportadas.
En ese sentido, Tatiana no brinda una respuesta correcta teniendo en cuenta el contexto presentado en la actividad, tal como se muestra en la figura 51.

- Podemos obrervar que en el año 2005 la exportación de palta Hass fue de 3 tonelados. Y lo mismo se puede obervar que para exportación de palta Fuerte donde la cantidad fue de 3 toneladas.

Figura 51. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (a) de Selene

En la segunda pregunta, Selene no identifica la información brindada en el registro de lenguaje natural y esto se evidencia al no relacionar de manera correcta la abscisa correspondiente donde la cantidad de paltas exportadas son iguales e indica como respuesta que dicha cantidad de palta exportada será igual a partir del año 2007, tal como se muestra en la figura 52.

Como observamos en el geogebra ambos exportaciones de palta Fuerte y Hass son iguales apartir del año 2007.

Figura 52. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (b) de Selene

Por lo tanto, se puede mencionar que Selene no logró alcanzar nuestro objetivo para este ítem a pesar que ella está llevando el curso por segunda vez.

A continuación, en la figura 53 y 54, presentamos el ítem 2 de la segunda actividad (Anexo 2) que está conformado por las preguntas (c) y (d), el objetivo de dicho ítem es identificar los diferentes registros de representación de la función por tramos.

c) Active el Caso 1 y observe la gráfica de la exportación de Palta Hass en toneladas a través de los años, luego active la opción PUNTO, que se ubica en la parte superior de la ventana del Geogebra, y coloque encima de la gráfica la cantidad de puntos necesarios que nos permita determinar una expresión que represente la exportación de color azul.

En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

Luego, justifique su respuesta.

Figura 53. Ítem 2 de la segunda actividad – pregunta (c)

d) Active el Caso 2 y observe la gráfica de la exportación de Palta Fuerte en toneladas a través de los años, luego active la herramienta PUNTO, que se ubica en la Barra de herramientas, y ubique en la gráfica la cantidad de puntos necesarios para determinar una expresión que represente la exportación de color azul.

En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

Luego, justifique su respuesta.

Figura 54. Ítem 2 de la segunda actividad – pregunta (d)

Respuesta de Tatiana

Tatiana, al dar respuesta a la pregunta (c), ubicó tres puntos de paso en el registro gráfico, es decir, en la representación gráfica de la función por tramos que describe el problema planteado. Uno de estos puntos es el $(0;\ 2)$ y para representarlos emplea el registro par ordenado, además dicho punto no corresponde al tramo de color azul que fue el solicitado en la pregunta (c), es decir, no corresponde al tramo de la función cuadrática, tal como se muestra en la figura 55.

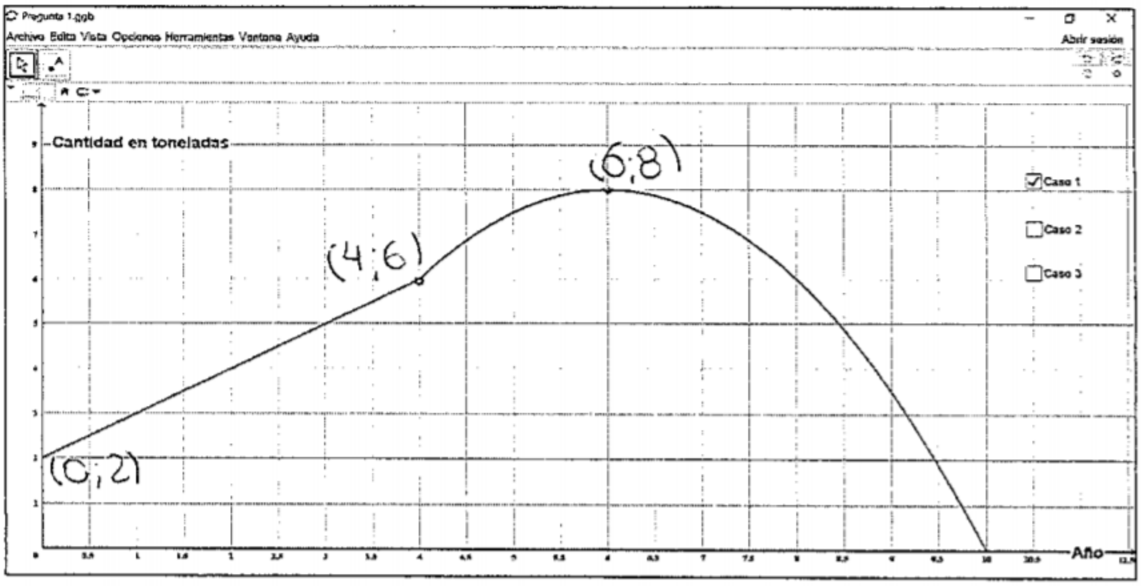


Figura 55. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (c) de Tatiana

A pesar de haber empleado el registro par ordenado, identificando el punto $(0;\ 2)$ en la representación gráfica, teniendo en cuenta que era innecesario para determinar la representación del tramo cuadrático en el registro algebraico que fue lo solicitado en la pregunta (c), Tatiana sí logró identificar, en la representación gráfica, otros dos puntos que son necesarios y suficientes para determinar en el registro algebraico la representación de la función cuadrática, es decir, tuvo presente sus conocimientos previos sobre función cuadrática.

Además el par ordenado $(6;\ 8)$ es importante al representar el vértice para el tramo cuadrático y esto nos demuestra que Tatiana empleará la representación de la forma canónica de la función cuadrática en el registro algebraico, tal como se puede observar en la figura 56.

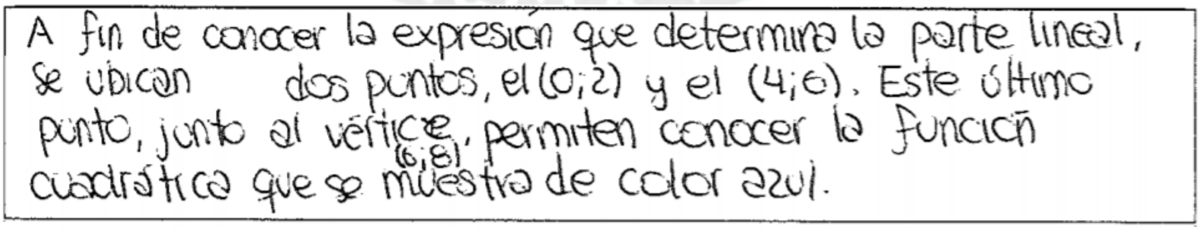

A fin de conocer la expresión que determina la parte lineal, se ubican dos puntos, el (0;2) y el (4;6). Este último punto, junto al vértice (6;8), permiten conocer la función cuadrática que se muestra de color azul.

Figura 56. Actividad 2 – Justificación de la respuesta del inciso (c) de Tatiana

En la figura 56, Tatiana mencionó que es suficiente tener el punto $(4;\ 6)$ y el vértice $(6;\ 8)$ para poder determinar en el registro algebraico la representación de la función cantidad exportada, es decir, determinar la regla de correspondencia del tramo de color azul.

Por otro lado, Tatiana, al responder la pregunta (d), ubicó, en la representación gráfica, de manera correcta los puntos necesarios para poder determinar en el reistro algebraico larepresentación de la regla de correspondencia del tramo de color azul que hace referencia al tramo lineal en el segundo caso propuesto que esta presente en el archivo de GeoGebra, tal como se muestra en la figura 57, pero Tatiana asumió que la ordenada que corresponde a la abscisa 3 es 3,5 a pesar que no hay alguna evidencia que dicha ordenada sea 3,5.

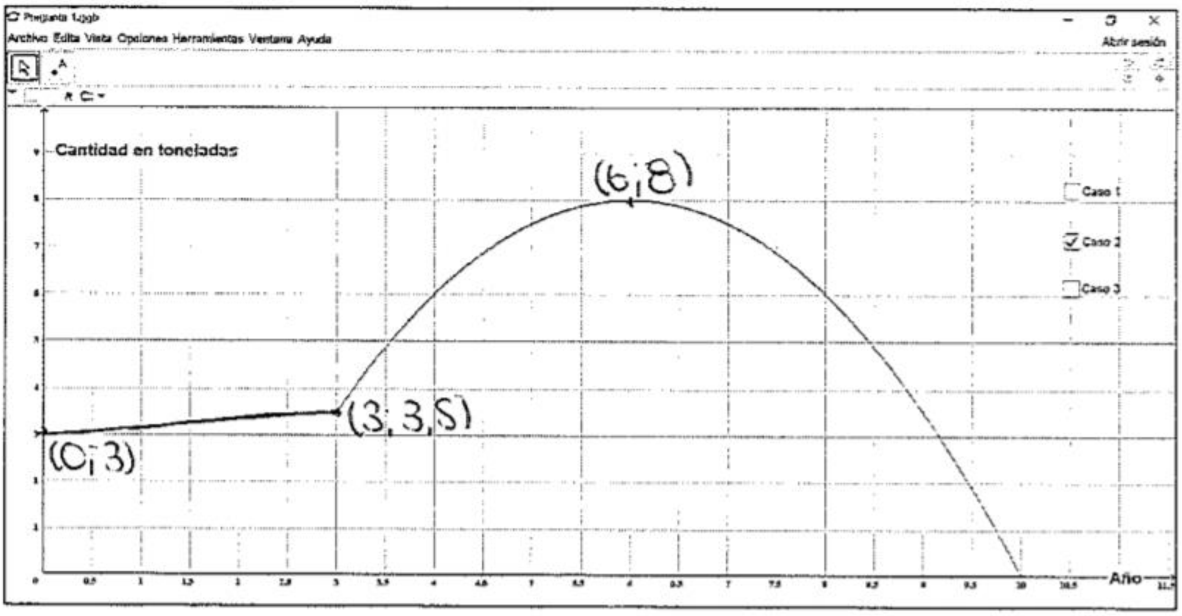


Figura 57. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (d) de Tatiana

Además, Tatiana mencionó en su justificación que solo es necesario contar con dos puntos para poder determinar en el registro algebraico la representación de la función, es decir, la representación de la regla de correspondencia del primer tramo al tratarse de un tramo lineal pero asume la ordenada 3,5 a pesar de dicha suposición se evidencia que si identifica la representación de la función lineal en el registro algebraico, es decir, moviliza sus conocimientos previos sobre función lineal tal como se muestra en la figura 58.

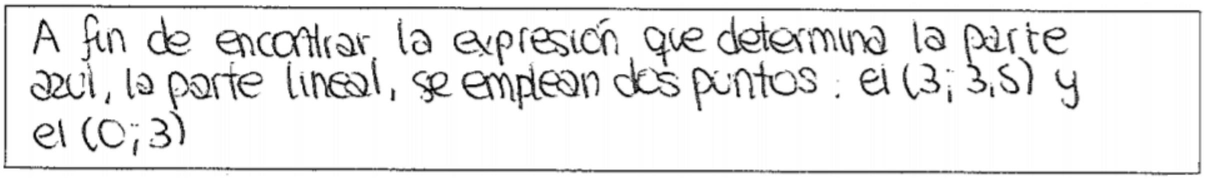


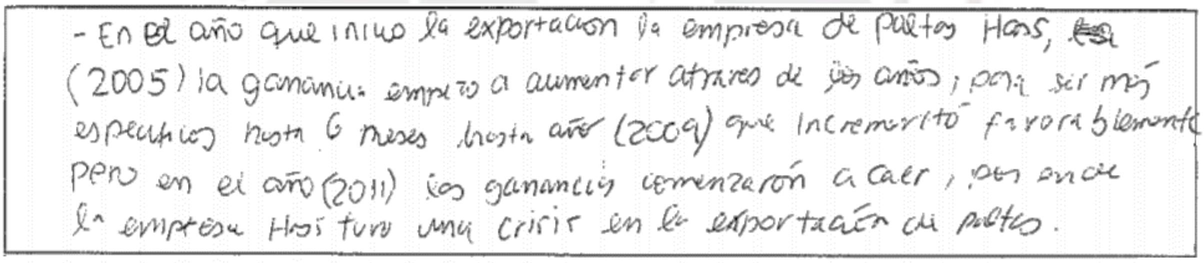
Figura 58. Actividad 2 – Justificación de la respuesta del inciso (d) de Tatiana

Según lo observado en las respuestas presentadas por Tatiana se puede asumir que, si identifica en el registro gráfico de la función lineal y cuadrática los pares ordenados que son necesarios para poder determinar en el registro algebraico la representación de la función cantidad exportada, es decir, Tatiana moviliza sus conocimientos respecto a ambas funciones.

Finalmente, Tatiana ha logrado alcanzar nuestro primer objetivo de nuestra investigación.

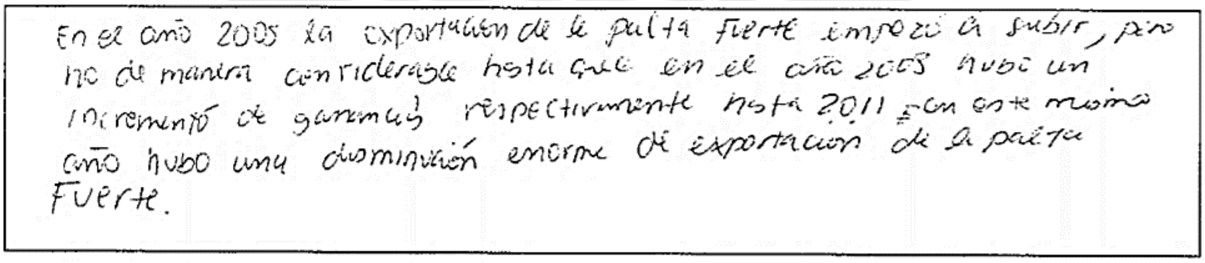
Estudiante Selene

Selene, al responder las preguntas (c) y (d), no logró colocar la imagen que se solicitaba ni tampoco logró identificar, en la representación de la función que se encuentra en el registro gráfico, los puntos necesarios para poder determinar en el registro algebraico la representación de la función cantidad exportada, es decir, la regla de correspondencia, tanto para el del primer caso, que hace referencia al tramo cuadrático, y tanto para el segundo caso, que está representado por un tramo lineal, tal como se muestra en la figura 59 y 60 respectivamente.



- En el año que inicio la exportación la empresa de Paltas Hass, (2005) la ganancia empezó a aumentar através de los años; para ser más específicos hasta 6 meses hasta año (2009) que incrementó favorablemente pero en el año (2011) las ganancias comenzarón a caer, por ende la empresa Hass tuvo una crisis en la exportación de paltas.

Figura 59. Actividad 2 – Justificación de la respuesta del inciso (c) de Selene



En el año 2005 la exportación de la palta fuerte empezó a subir, pero no de manera considerable hasta que en el año 2008 hubo un incremento de ganancias respectivamente hasta 2011 en este mismo año hubo una disminución enorme de exportación de la palta Fuerte.

Figura 60. Actividad 2 – Justificación de la respuesta del inciso (d) de Selene

En ese sentido, las respuestas brindadas por Selene demuestran que no identificó los elementos que son necesarios para la representación del tramo lineal y cuadrático en el registro algebraico.

Según lo mencionado, Selene no ha logrado alcanzar nuestro objetivo propuesto para este ítem de la actividad.

A continuación, en la figura 61, presentamos el ítem 3 de la segunda actividad (Anexo 2) que está conformado por la pregunta (e), el objetivo de dicho ítem es determinar las conversiones de las representaciones y establecer los tratamientos en el registro algebraico de la función por tramos.

e) Encuentre una expresión que represente el Caso 2.

Figura 61. Ítem 2 de la segunda actividad

<u>Estudiante Tatiana</u>

Tatiana, al trabajar en la respuesta de la pregunta (e), solo realizó la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico del tramo lineal, esto nos muestra que para dicho tramo identificó los elementos necesarios que nos permite determinar la representación de la función lineal en el registro algebraico, es decir, Tatiana moviliza sus conocimientos previos sobre función lineal e identifica su respectivo subdominio. Para ello, consideró los dos puntos que ubicó en la representación gráfica y procedio a calcular la pendiente de la función lineal realizando tratamientos de resta y cociente en el registro numérico, luego determinó el valor del término independiente de la expresión algebraica realizando tratamientos en el registro algebraico al desarrollar la ecuación de primer grado, pero no consideró el tramo cuadrático en su solución, es decir, hay una confusión en que la representación de la función cantidad exportada corresponde a una función por tramos que está conformada por dos representaciones algebraicas, tal como se muestra en la figura 61.

$$m = \frac{3{,}5-3}{3-0} = \frac{0{,}5}{3} = 1/6$$

$P(0;3)$ $\quad \rightarrow f(x) = 1/6x + 3 \;;\; 0 \le x \le 3$

$y = 1/6x + b$

$3 = 0 + b$

$b = 3$

Figura 62. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (e) de Tatiana

Como observamos en la figura 61, Tatiana no logró realizar la conversión entre la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico para el tramo cuadrático y esto conlleva o no obtener en el registro algebraico la representación de la función cantidad exportada. Finalmente, podemos decir que no se logró alcanzar nuestro segundo y tercer objetivo para nuestro trabajo de investigación.

<u>Estudiante Selene</u>

Selene, al responder el inciso (e), no logró realizar la conversión entre la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico para el tramo lineal, puesto que identificó, de manera errónea, el punto $(3;\ 3)$, pero sí logró identificar, de manera correcta, el punto $(0;\ 3)$, que es el intercepto con el eje Y. En cambio, para el tramo cuadrático, sí empleó los puntos que son necesarios para poder determinarlo, es decir identificó el vértice $(6;\ 8)$ de la función cuadrática y un punto de paso $(10;\ 0)$ y de esta forma realizó la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico y a la vez realizó los tratamientos necesarios en este último registro para poder encontrar el valor del coeficiente principal a que es necesario para la regla de correspondencia de la función cuadrática. En la figura 63, se muestra lo mencionado.

$$f(x) = mx + b \qquad 3 = b \qquad f(x) = x + 3$$

$$(0;3)\ (3;3)$$

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$
$$f(x) = a(x-6)^2 + 8$$
$$0 = a(10-6)^2 + 8$$
$$0 = a(16) + 8$$
$$\frac{-8}{16} = a$$
$$a = \frac{-1}{2}$$

$$f(y)\begin{cases} x+3\ ;\ 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{-1}{2}(x-6)^2 + 8;\ 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Figura 63. Actividad 2 – Reproducción de la respuesta del inciso (e) de Selene

En ese sentido, podemos afirmar que Selene realizó la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico del tramo cuadrático, indicando el subdominio de manera correcta y a la vez realizó tratamientos en el registro algebraico. Mientras que en el tramo lineal no tuvo éxito en la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico por haber asumido de manera errónea el segundo punto $(3;3)$ del tramo lineal.

Finalmente, Selene no logró nuestro segundo y tercer objetivo de nuestro trabajo de investigación.

En conclusión, para esta segunda actividad realizada con nuestros sujetos de investigación que tuvo como herramienta de mediación al GeoGebra, Tatiana obtuvo mejores resultados a comparación que Selene, pero en ambos casos solo se logró el primer objetivo de investigación mientras que el segundo y tercer objetivo no se lograron concretar.

CONSIDERACIONES FINALES

El estudio de las transformaciones entre la regla de correspondencia y el gráfico de la función por tramos mediada por el GeoGebra, que es el tema tratado en nuestra tesis, conllevó a estructurar el marco teórico considerando aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), el cual brinda los recursos adecuados para nuestro análisis, enfocandonos en la conversión entre distintos registros de representación semiótica y a la vez los tratamientos que los estudiantes realizan ante una situación propuesta.

En este sentido, lo que se esperaba en los sujetos de investigación fue que identifiquen información importante brindados en un texto (no en forma directa) y de forma gráfica, este último tipo de representación es de suma importancia puesto que muestra información relevante para el desarrollo de toda la actividad. Al final de ambas actividades se tenía que realizar una conversión entre el registro gráfico al registro algebraico realizando en este último, tratamientos respectivos al encontrar la regla de correspondencia de la función solicitada.

El software GeoGebra, como herramienta mediadora en nuestro estudio, tuvo como finalidad presentar la segunda actividad de una manera distinta al poder observar cómo la representación gráfica de la función se formaba según el tiempo transcurrido y no introducirlo de la manera tradicional donde la representación gráfica ya estaría dada, puesto que una de las posibles dificultades, según Saa y Trochez (2013), era enseñar el tema de funciones de la manera tradicional. De esta forma, para nuestra investigación, el aporte de dicho Software es presentar la simulación del enunciado propuesto en la segunda actividad y a partir de ella se generarán las interrogantes, dado que muchos fenómenos económicos tales como la oferta, demanda, utilidades, etc., varian conforme transcurre el tiempo y, según la tendencia que siguen pueden generar actitudes en los sujetos tales como toma de decisiones, con el propósito de mazimizar utilidades.

Esta situación se da porque, según Córdoba *et al.* (2013) y Salazar y Chumpitaz (2013), es importante usar alguna herramienta que ayude al estudiante a entender ciertos conceptos o comportamientos en la función y, por último, se presenta la actividad modelada que haga referencia a un contexto de su entorno, la finalidad de las actividades no es solo buscar en los estudiantes un trabajo intra-matemático, sino también que puedan realizar un trabajo extra-matemático al relacionar los elementos que puedan estar tanto en el registro de lenguaje natural como en registro gráfico de la función por tramos que se le puede brindar en el enunciado de la actividad propuesta.

A continuación, mencionaremos las consideraciones finales sobre aspectos que apreciamos relevantes en relación con los objetivos específicos propuestos en la investigación.

Con respecto a nuestro primer objetivo específico, ***"Identificar los diferentes registros de representación semiótica de la función por tramos que los estudiantes de Humanidades utilizan en una secuencia mediada por el GeoGebra.",*** podemos mencionar que sí se logró alcanzar dicho objetivo con la estudiante Tatiana quien estuvo llevando el curso por primera vez, y también comprendió muy bien las actividades propuestas, puesto que identificó en la representación gráfica que el objeto matemático involucrado era una función por tramos, y también brindó la representación algebraica de dicha función. Mientras que Selene tuvo dificultad en ambas actividades al no identificar de manera correcta las funciones por tramos en sus representaciones gráficas y algebraicas para el tramo lineal y cuadrático, pensamos que esto sucedió porque al estar llevando el curso por segunda vez le resultó confuso la nueva forma de evaluación del tema, ya que en anteriores oportunidades las actividades eran de forma tradicional y probablemente eso era lo que ella esperaba.

Esto último puede comprobarse en la pregunta (e) de la actividad 1 en la solución propuesta por Tatiana, al representar la función por tramos en el registro algebraico, como se puede observar en la figura 46 (página 77), pero el trabajo previo que realizó fue el identificar el número de tramos de dicha función, y a la vez reconocer qué tipo de funciones son las que participan para poder representar algebraicamente los tramos lineal y cuadrático, y por cuál de los tramos debe iniciar su análisis según los puntos que eran necesarios para obtener la regla de correspondencia, como se puede observar en las figuras 41 y 42 (página 74).

Con respecto al segundo objetivo específico de esta tesis, ***"Determinar las conversiones de la representación de la función por tramos del registro gráfico al registro algebraico realizada por los estudiantes de Humanidades en una***

secuencia mediada por el GeoGebra.", en la primera actividad se puede observar que el desarrollo propuesto por Tatiana, como se muestra en la figura 46 (página 77), evidencia la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico. Esto se debe por haber identificado la expresión algebraica adecuada para cada tramo de la función que le servía para encontrar la regla de correspondencia, pero Selene mostro cierta dificultad al realizar la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico, ya que solo determinó un solo tramo y suponemos que esto se dio por no tener el segundo punto que era necesario para poder determinar la regla de correspondencia del tramo lineal.

Esta situación reafirma nuestra posición la cual es integrar en la enseñanza de las funciones actividades que tengan como punto de inicio cualquier otro tipo de representación que no sea la forma tradicional, es decir la representación algebraica, y por el contrario este último sea lo que se pida a los estudiantes. A pesar de ello, en la experimentación las dos estudiantes han realizado tratamientos en la representación algebraica de manera adecuada.

Por otro lado, en la actividad 2, Tatiana logró realizar la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico solo del tramo lineal, tal como se puede observar en la figura 62 (página 89).

En cambio, Selene solo determinó la regla de correspondencia del tramo cuadrático, no pudo determinar la regla de correspondencia del tramo lineal por haber determinado de manera errónea el segundo punto de paso que era necesario para poder determinar el valor de la pendiente y de esta manera conseguir la representación de la función en el registro algebraico, tal como se puede observar en la figura 63 (página 90).

Por último, en nuestro tercer objetivo específico, ***"Establecer los tratamientos en el registro algebraico realizado por los estudiantes de Humanidades en una secuencia mediada por el GeoGebra.",*** se pudo observar en ambas actividades que las estudiantes Tatiana y Selene desarrollaron la pregunta (e), puesto que al tratar de determinar la representación de la función propuesta para ambos casos primero realizaban la conversión de la representación del registro gráfico al registro algebraico, y en este último registro se realizaban tratamientos para poder determinar la regla de correspondencia de la función utilidad o cantidad exportada, tal como se muestra en la solución propuesta por Tatiana en las figuras 46 y 62 (página 77 y 89) y por parte de Selene en las figuras 62 y 63 (página 89 y 90)

Al lograr los objetivos específicos de investigación, podemos afirmar que se logró concretar el objetivo general:

"Analizar cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra."

La experimentación de las actividades se realizó a través del análisis de las respuestas brindadas por cada una de nuestros sujetos de investigación empleando nuestro referencial teórico, la Teoría de Registros de Representación Semiótica, esto al ser una investigación cualitativa, Creswell (2010).

Al lograr el objetivo general de investigación, se pudo responder la pregunta de investigación:

"*¿Cómo los estudiantes de Humanidades realizan transformaciones entre los registros gráfico y algebraico de la función por tramos, en una secuencia mediada por el GeoGebra?"*

En ese sentido, se ha logrado evidenciar que emplear un Software para el desarrollo de una actividad favorece a los estudiantes en movilizar distintos registros de representación semiótica, teniendo en cuenta que esto se dio con la estudiante Tatiana que llevaba el curso por primera vez. Por ello, creemos que es importante elaborar actividades que permitan a los estudiantes movilizarse entre distintos registros de representación semiótica, las cuales refuercen la conversión de la representación del registro gráfico a la representación del registro algebraico y a la vez se empleé un Software como medio de interacción, en nuestro caso el GeoGebra, en la función por tramos y a la vez que estas funciones no necesariamente estén conformadas por dos tramos, sino que también presenten más de dos tramos e inclusive trabajar con funciones que no necesariamente tengan un tramo lineal o cuadrática.

Además, creemos importante que el docente presente actividades en clase durante la enseñanza de otros objetos matemáticos, además de las funciones, representados en forma algebraica y gráfica tales como la derivada, integrales de funciones, cálculo vectorial, etc., ya que eso permite que los estudiantes interpreten y articulen distintas representaciones de un mismo objeto, ya que al transitar ente varios tipos de representación, según Duval (2004) se logra el aprendizaje, pero al no indicarse el sentido de la conversión y dado que en forma tradicional se realiza del registro algebraico al gráfico, y según nuestro análisis cualitativo, es importante reforzar el otro sentido: del registro gráfico al registro algebraico.

REFERENCIAS

Almouloud, S.A. (2017). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *11*(2), 109-141.

Arya, J. y Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y Economía.* México, D.F. Pearson Educación.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos (María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho, trad.) Portugal: Porto Editora.

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos, mediado por el Software GeoGebra, con estudiantes de Ingeniería.* (Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4514

Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNION,* (41), 20-38. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revista41.php

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (3a ed., Magda Lopes, Trad.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 2003)

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM.

Garijo, L. (2014). *Enseñanza de funciones y gráficas en 1º Bachillerato basado en el uso de GeoGebra.* (Tesis de maestría, Universidad Internacional de la Rioja, *España). Recuperado de http://reunir.unir.net/handle/123456789/2432*

Pereira, C. y Nascimento, H. (2018, marzo). Proposta de estudo de função mediada pelo GeoGebra. *Acta Scientiae,* 20(1), 75 - 94.

Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú (2018). *Plan de Estudios Generales de Letras,* Facultad de Gestión y Alta Dirección. Recuperado de http://facultad.pucp.edu.pe/generales-letras/informacion-para-estudiantes/requisitos-para-pasar-a-facultad/

Perú, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2018). *Malla curricular, Facultad de Administración en Hotelería y Turismo*. Recuperado de https://pregrado.upc.edu.pe/carrera-de-hoteleria-y-administracion/malla-curricular

Perú, Universidad de Lima (2018). *Plan de estudios de Administración, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas*. Recuperado de http://www.ulima.edu.pe/sites/default/files/administracion_encarte_malla_curricular_v.2017.10.26.pdf

Ruíz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral, Universidad de Granada, España). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2013/09/La-noci%C3%B3n-de-funci%C3%B3n.-An%C3%A1lisis-epistemol%C3%B3gico-y-did%C3%A1ctico-TESIS-DOCTORAL-Luisa-Ruiz-Higueras_1aParte.pdf

Saa, A. y Trochez, Á. (2013). *Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y GeoGebra* (Tesis de pregrado, Universidad del Valle, Colombia). Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6774/1/CD-0395402.pdf

Salazar, J. V. F. y Chumpitaz, D. (2013). Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos. Actas del *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática – VII CIBEM.* Sociedad de Educación Matemática del Uruguay, pp. 6863 – 6870.

Stewart, J. (2007). *Cálculo de una variable Conceptos y contextos*. México: Cengage Learning.

Ortega, M. y Puig, L. (2015). El aprendizaje de la función cuadrática con Tabletas a través del proceso de modelización. *Actas del XIX Congreso de Investigación en Educación Matemática*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática - Universidad de Alicante, pp. 451-458. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51551/1/2015-Actas-XIX-SEIEM_44.pdf

Xavier, A. y Ferreira, M. (2017, diciembre). Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital. *Unión* (51), 107-125.

ANEXOS

FICHAS DE LAS DOS ACTIVIDADES REALIZADAS EN TRES ENCUENTROS DE APLICACIÓN PARA LA FASE EXPERIMENTAL DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN.

1. Ficha de la Actividad Individual

En la siguiente figura, se muestra el comportamiento de la utilidad de una empresa a través del tiempo desde su conformación en 1985. En un determinado año, el comportamiento de la utilidad de la empresa empezó a cambiar, como se puede apreciar en la gráfica, debido a reformas por parte del gobierno de turno. Por ello, la empresa tomó acciones drásticas para contrarrestar dicha situación buscando el menor tiempo posible para su repunte en el mercado.

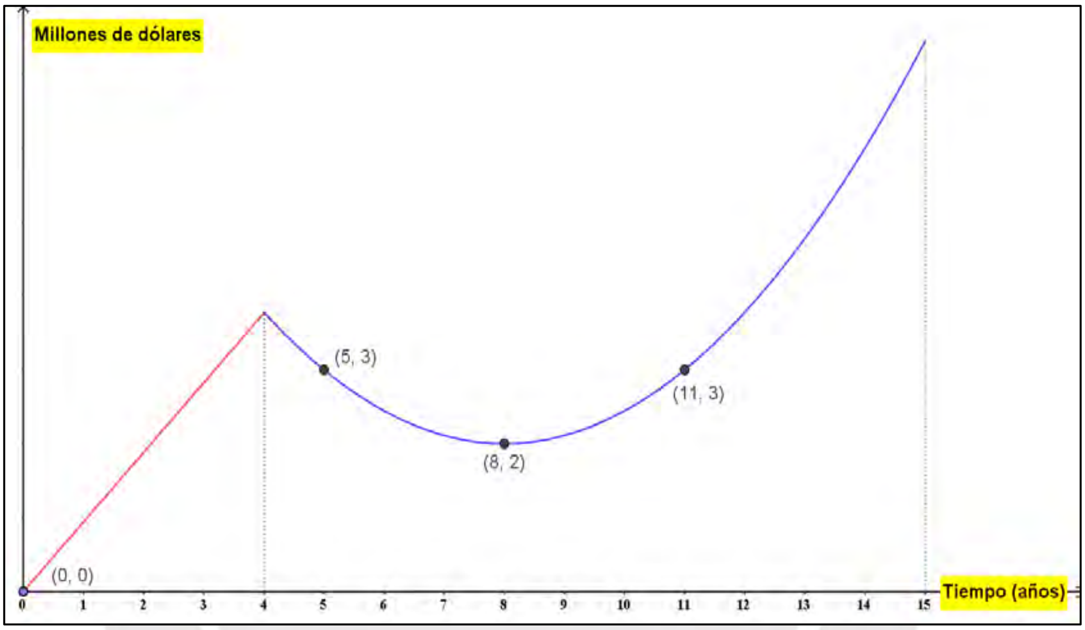


Figura. Comportamiento de la utilidad de la empresa a través de los años

Según la información brindada, responda las siguientes preguntas.

a) ¿A partir de qué año el valor de la utilidad de la empresa empezó a devaluarse? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué significado le puede dar al punto (8, 2) entorno a la situación planteada?

c) ¿Entre qué años el valor de la utilidad de la empresa aumenta? Justifique su respuesta.

d) Si se desea obtener la expresión que representa el valor de la utilidad de la empresa a través de los años, ¿Con cuál de los dos escenarios empezaría a trabajar? Justifique su respuesta.

e) Determine la regla de correspondencia para la situación planteada.

2. Ficha de la Actividad Colaborativa en GeoGebra

PREGUNTA:

En el año 2005, la empresa “Sin Paltas” empezó a exportar dos variedades de este fruto, siendo estas la Palta Hass (Caso 1) y Fuerte (Caso 2). En el primer año (2005), la cantidad anual exportada para ambos frutos fueron distintas, dando una mayor preferencia a la Palta Hass y esto empezó a variar a través de los años hasta que en un determinado momento se igualaron las cantidades anuales exportadas para ambos productos.

A partir de un determinado año, la plantación de dichos frutos fue contagiada por una plaga que obligó a la empresa en disminuir la cantidad anual exportada viendo la necesidad, después de unos años, de cerrar la empresa por cuestiones económicas.

Dichas situaciones se representan gráficamente en el siguiente archivo Pregunta 1.ggb **que descargará de la Plataforma Virtual.**

Al abrir el archivo, deberá encontrar la siguiente ventana, como se muestra en la figura. Si no tiene la misma vista del GeoGebra, entonces deberá de emplear la rueda del mouse para poder ampliar o reducir la imagen, según sea conveniente, y también podrá mover la imagen en la vista gráfica haciendo clic derecho sobre cualquier parte de la ventana del GeoGebra y sin dejar de presionar deberá arrastrar la gráfica hasta encontrar la imagen que se quiere trabajar como se muestra en la figura.

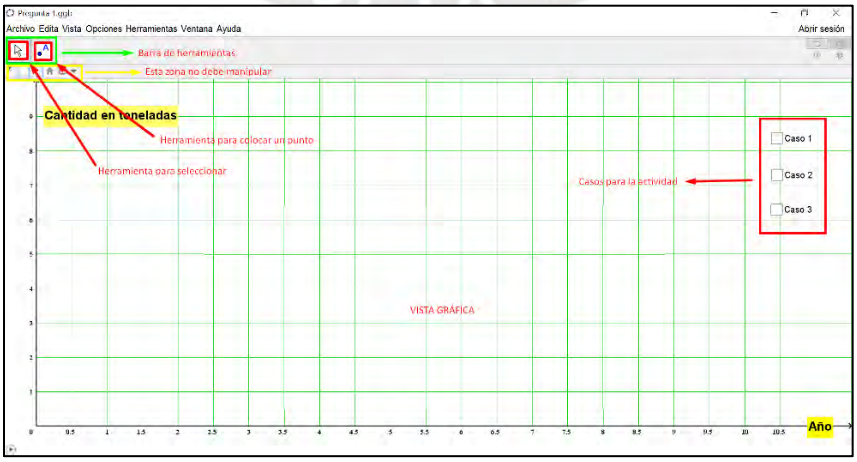


Figura. *Ventana de la pregunta en el* GeoGebra

Para el desarrollo de la **PREGUNTA,** va a emplear las herramientas que están en los cuadros de color rojo, el Botón para Seleccionar  se empleará para poder escoger el caso a trabajar y también para seleccionar la opción de Punto , que está en la barra de herramienta, dicha opción le permitirá colocar puntos en la vista gráfica y, si desea eliminar algún de ellos que colocó de manera errónea, deberá hacer anti clic sobre el punto y escoger la opción de Borrar.

Luego, para salir de la herramienta Punto , deberá hacer clic nuevamente a la herramienta Seleccionar . Finalmente, al activar cada uno de los casos para la actividad, según indique las preguntas propuestas, usted verá la relación que existe entre el año y la cantidad exportada en toneladas de Palta.

a) Active el caso 1 y luego el caso 2 y responda: ***¿Cuántas toneladas de Palta de cada variedad se exportaron en el año 2005? Justifique su respuesta.***

b) Active el caso 3 y responda: ***¿A partir de qué año las exportaciones de cada tipo de Palta son iguales? Justifique su respuesta.***

c) Active el Caso 1 y observe la gráfica de la exportación de Palta Hass en toneladas a través de los años, luego active la opción PUNTO, que se ubica en la parte superior de la ventana del GeoGebra, y coloque encima de la gráfica la cantidad de puntos necesarios que nos permita determinar una expresión que represente la exportación de color azul.

En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

Luego, justifique su respuesta.

d) Active el Caso 2 y observe la gráfica de la exportación de Palta Fuerte en toneladas a través de los años, luego active la herramienta PUNTO , que se ubica en la Barra de herramientas, y ubique en la gráfica la cantidad de puntos necesarios para determinar una expresión que represente la exportación de color azul.

En esta sección, coloque la captura de pantalla de la imagen que dé respuesta a lo solicitado.

Luego, justifique su respuesta.

e) Encuentre una expresión que represente el Caso 2.