

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



**UNA REPRESENTACIÓN TIPO WEIERSTRASS PARA
SUPERFICIES MÍNIMAS EN GRUPOS DE LIE**

Tesis para optar el grado de
Magíster en Matemáticas

JORGE EMILIANO CONDEÑA CAHUANA

Asesor

DR. CHRISTIAM BERNARDO FIGUEROA SERRUDO

Jurado

DR. PERCY BRAULIO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

DR. DIMAS PERCY ABANTO SILVA

Lima - Perú

Julio - 2019

UNA REPRESENTACIÓN TIPO WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES MÍNIMAS EN GRUPOS
DE LIE

Jorge Emiliano Condeña Cahuana

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo (asesor)

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez (presidente)

Dr. Dimas Percy Abanto Silva (miembro)

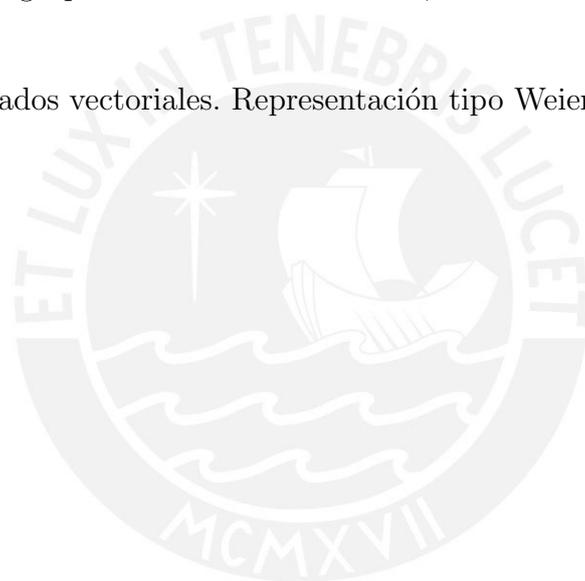
Lima - Perú

Julio - 2019

Resumen

En el presente trabajo se introduce el concepto de fibrados vectoriales reales, complejos y holomorfas para conseguir una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas e inmersas en grupos de Lie de dimensión 3, con una métrica riemanniana invariante a izquierda.

Palabras clave: Fibrados vectoriales. Representación tipo Weierstrass. Grupos de Lie. Métrica riemanniana.





... dedicado a mis padres.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Variedades riemannianas	3
1.2. Fibrados vectoriales reales	5
1.3. Conexión en fibrados vectoriales reales	8
1.4. Grupos de Lie	11
1.5. Aplicación armónica entre variedades riemannianas	19
2. Variedades complejas	21
2.1. Funciones holomorfas y variedades complejas	21
2.2. Estructura casi compleja	25
2.3. Fibrado tangente complexificado	28
2.4. Fibrados complejos y holomorfos	31
2.5. Conexión en fibrados holomorfos	34
3. Representación tipo Weierstrass en variedades riemannianas	46
3.1. Aplicación armónica desde superficies de Riemann	46
3.2. Representación tipo Weierstrass en variedades riemannianas	48
4. Representación tipo Weierstrass en grupos de Lie	53
4.1. Superficies mínimas en \mathbb{R}^3	56
4.2. Superficies mínimas en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3	60
4.3. Superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	67
4.4. Superficies mínimas en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3	70

Introducción

El presente trabajo de tesis muestra resultados relevantes sobre una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas e inmersas en una *variedad riemanniana*. La representación tipo Weierstrass clásica en \mathbb{R}^3 y su generalización en \mathbb{R}^n , hace uso del análisis complejo para describir una superficie mínima a partir de datos holomorfos. Tal herramienta resultó ser muy útil para construir superficies mínimas y estudiar las propiedades que se presentan en ellas (ver por ejemplo [11]).

En [12] se presenta un método para obtener una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas, simplemente conexas e inmersas en una variedad riemanniana M de dimensión n . En este caso, que la aplicación $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow M^n$ sea armónica coincide con el holomorfismo de la sección $\phi \in f^{-1}(TM) \otimes \mathbb{C}$, donde el holomorfismo de la sección está determinado por las ecuaciones

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

donde Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel de M .

Determinar soluciones explícitas de (1) en general es complicado; sin embargo, para el caso donde la variedad M sea un grupo de Lie dotado con una métrica invariante a izquierda, las ecuaciones se simplifican considerablemente, y esto nos permite obtener ejemplos de superficies mínimas inmersas en la variedad ambiente.

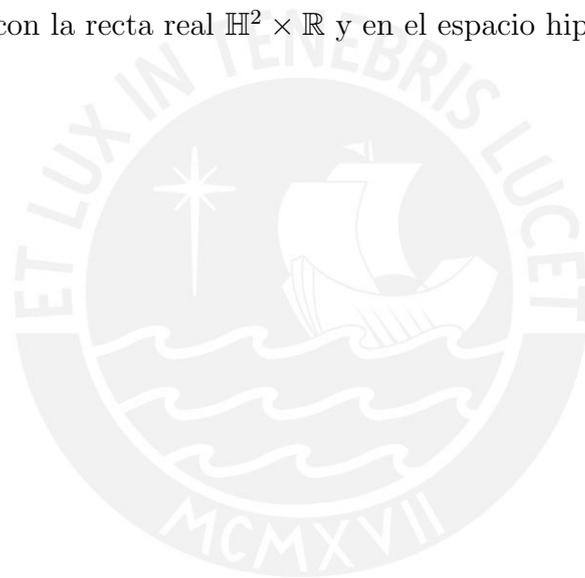
En el capítulo 1, se presentan conceptos básicos de *Geometría Riemanniana* que son usados a lo largo de la tesis. Este capítulo cubre algunos tópicos de variedades riemannianas, fibrados vectoriales reales, conexión en fibrados vectoriales, grupos de Lie y aplicación armónica entre variedades riemannianas.

El capítulo 2 es dedicado al estudio de variedades complejas, estructura casi compleja, fibrado tangente complexificado, fibrados vectoriales holomorfos y conexión en fibrados

holomorfos. Se culmina este capítulo estableciendo la relación de una conexión en un fibrado holomorfo, con la conexión *Levi-Civita* en TM . En este caso M es una *variedad de Kähler*.

En el tercer capítulo se presenta la aplicación armónica desde una superficie de Riemann a una variedad riemanniana, siguiendo como referencia a [7]. Además, se muestra la representación tipo Weierstrass en variedades riemannianas establecida en [12].

Finalmente, tomando como referencias principales a [12] y [14], en el capítulo 4 se muestra una representación tipo Weierstrass para grupos de Lie de dimensión 3, dotados con una métrica invariante a izquierda. Ostentando una manera de representar superficies mínimas inmersas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , el grupo de *Heisenberg* \mathcal{H}_3 , el producto del plano hiperbólico con la recta real $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .



Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se presentan conceptos básicos de *Geometría Riemanniana*, que usaremos a lo largo del trabajo.

1.1. Variedades riemannianas

En esta sección estableceremos los principales conceptos de variedades diferenciables y métrica riemanniana. Tomaremos como referencias principales a [1] y [7]. Además, supondremos que nuestros espacios topológicos son *Hausdorff* y con base numerable.

Definición 1.1. Una *estructura diferenciable* en un espacio topológico M es una familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, donde U_α son abiertos de M y $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ son homeomorfismos sobre abiertos de \mathbb{R}^n tales que:

- i.* $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$,
- ii.* para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ abiertos de \mathbb{R}^n entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ son aplicaciones C^∞ ,
- iii.* la familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es maximal relativamente a las condiciones anteriores.

Cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es llamado *carta o sistema de coordenadas* de M , y, a la colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ se le conoce como un *atlas* de M . Diremos que M es una *variedad diferenciable* de dimensión n si admite una estructura diferenciable.

Denotamos por $T_p M$ al *espacio tangente* de M en p , donde para cada sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en $p \in M$, se determina una base asociada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ en $T_p M$. Así, cada $v \in T_p M$ se expresa como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $v^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U .

Ejemplo 1. Sea M una variedad diferenciable y sea $\pi : TM \rightarrow M$ una aplicación C^∞ , definimos el espacio

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

conocido como el *fibrado tangente* de M . Vamos a demostrar que TM tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

En efecto, tomando $\varphi = (x_1, \dots, x_n) : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ una carta de M y definiendo $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \subset TM \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\tilde{\varphi}(p, v) = \left(x_1(p), \dots, x_n(p), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right), \text{ para } p \in U, v \in T_p M.$$

Se observa que la imagen de $\tilde{\varphi}$ es $V \times \mathbb{R}^n$, el cual es un abierto de \mathbb{R}^{2n} , y que además, $\tilde{\varphi}$ es biyectiva sobre su imagen. De esta manera se puede inducir la topología de $V \times \mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(U)$. De esto, $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^{2n} mediante $\tilde{\varphi}$.

Ahora, sean $\varphi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi = (y_1, \dots, y_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones coordenadas de M , tenemos que el cambio de coordenadas

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \rightarrow \psi(U \cap W)$$

es una aplicación C^∞ , ya que M es una variedad diferenciable. De la misma forma, sean $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\psi}$ dos cartas de TM , entonces el cambio de coordenadas

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap W) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap W) \times \mathbb{R}^n,$$

está dada por

$$\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \right) (\varphi(p), v) = \left(\psi(p), \sum_j \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} (\varphi(p)) v_j, \dots, \sum_j \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j} (\varphi(p)) v_j \right),$$

donde $\psi(p) = (\phi_1(\varphi(p)), \dots, \phi_n(\varphi(p)))$. Luego, como ϕ es C^∞ , se tiene que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ es siempre C^∞ . Por lo tanto, TM tiene una estructura de variedad diferenciable.

Definición 1.2. Un *campo de vectores* X en una variedad diferenciable M , es una aplicación $X : M \rightarrow TM$; es decir, para cada punto $p \in M$ se le asocia un vector $X(p)$ de T_pM . Decimos que el campo X es C^∞ cuando visto como aplicación es C^∞ . Considerando un sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n) : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, localmente el campo de vectores se escribe

$$X(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sobre U y $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base de T_pM , asociada al sistema de coordenadas. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos de vectores de clase C^∞ en M .

Definición 1.3. Sea M una variedad diferenciable real. Una *métrica riemanniana* en M , es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno en el espacio tangente,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

el cual varía diferenciablemente en el siguiente sentido: dado un sistema de coordenadas locales $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en $p \in M$, tal que para $v, w \in T_pM$ se tiene

$$\langle v, w \rangle_p = \left\langle v^i \frac{\partial}{\partial x_i}, w^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n) v^i w^j.$$

Entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}$ es una función diferenciable en U . Las funciones g_{ij} son llamadas expresión de la métrica riemanniana. Decimos que M es una *variedad riemanniana* si se puede definir una métrica riemanniana en ella.

Proposición 1.4. Toda variedad diferenciable posee una métrica riemanniana.

Demostración. Ver [1] (Proposición 2.10). □

Definición 1.5. Sea M una variedad diferenciable. Decimos que M es orientable si existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, el jacobiano del cambio de coordenadas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es positivo.

1.2. Fibrados vectoriales reales

En esta sección se describen las propiedades más relevantes de fibrados vectoriales reales. Como referencia principal tomaremos a [7].

Definición 1.6. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ una aplicación C^∞ , donde E (espacio total) y M (base del fibrado) son variedades diferenciables. Decimos que $\pi : E \longrightarrow M$ es un *fibrado vectorial real* si se cumple lo siguiente:

- i. $\pi^{-1}(\{p\})$ tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión n , para todo p en M .
- ii. Existe una cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de abiertos de M y difeomorfismos

$$(\pi, \varphi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

llamados trivializaciones del fibrado, dados por $(\pi, \varphi_\alpha)(v) = (\pi(v), \varphi(v))$, tales que

$$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}\{p\}} : \pi^{-1}(\{p\}) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $p \in M$.

Ejemplo 2. Sea M una variedad diferenciable, tenemos que $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un fibrado vectorial real, donde $M \times \mathbb{R}^n$ es visto como una variedad producto. Este fibrado es conocido como el *fibrado trivial*, ya que solo basta tomar (M, φ) una carta de M , obteniendo así una aplicación

$$I = (\pi, \varphi) : \pi^{-1}(M) = M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$$

tal que para cada $(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ se obtiene que $(\pi, \varphi)(p, v) = (\pi(p, v), \varphi(p, v)) = (p, v)$ es una trivialización del fibrado.

Ejemplo 3. En el ejemplo 1 probamos que TM tiene una estructura de variedad diferenciable, ahora demostraremos que $\pi : TM \rightarrow M$ es un fibrado vectorial real. En efecto, sea $\varphi = (x_1, \dots, x_n) : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas de M y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ una base de $T_p M$. Definiendo

$$(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \subset TM \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

por

$$(\pi, \varphi) \left(p, \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = (p, v_1, \dots, v_n).$$

Además, sea $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ una aplicación proyección tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{(\pi, \varphi)} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U \subset M & \end{array}$$

conmute, es decir, $\pi_1 \circ (\pi, \varphi) = \pi$. De esto, la composición

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{(\pi, \varphi)} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi \times I_{\mathbb{R}^n}} V \times \mathbb{R}^n$$

dada por $(\pi, \tilde{\varphi}) = \varphi \times I_{\mathbb{R}^n} \circ (\pi, \varphi)$ es un difeomorfismo, ya que φ es un difeomorfismo local. Y así, $\varphi \times I_{\mathbb{R}^n}$ también es un difeomorfismo local.

Por otro lado, del dato que $\pi = \pi_1 \circ (\pi, \varphi)$, tenemos que la aplicación

$$\varphi|_{\pi^{-1}(\{p\})} : \pi^{-1}(\{p\}) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

es biyectiva para todo $p \in U$. Por lo tanto, $\varphi|_{\pi^{-1}(\{p\})}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Finalmente, se concluye que TM es un fibrado vectorial.

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial real y $\{U_\alpha, (\pi, \varphi_\alpha)\}$ un atlas de fibrado. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tenemos las siguientes trivializaciones del fibrado

$$(\pi, \varphi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad (\pi, \varphi_\beta) : \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n$$

con $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$. Entonces, tomando $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, se tiene los siguientes isomorfismos

$$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}\{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \varphi_\beta|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}\{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tales que $f_{\alpha\beta}(p) = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta|_{\pi^{-1}(p)})^{-1}$ son las *funciones de transición* asociadas a $\{U_\alpha, (\pi, \varphi_\alpha)\}$. Estas funciones tienen las siguientes propiedades:

- i. $f_{\alpha\alpha}(p) = I$
- ii. $(f_{\alpha\beta}(p))^{-1} = f_{\beta\alpha}(p)$
- iii. Sea $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ entonces

$$f_{\alpha\beta}(p) \circ f_{\beta\gamma}(p) \circ f_{\alpha\gamma}(p) = I$$

para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

En consecuencia, dado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un atlas de M y funciones C^∞

$$f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}, n)$$

que satisfacen las propiedades (i), (ii) y (iii); entonces hay un único fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$ con funciones de transición $\{f_{\alpha\beta}\}$.

Definición 1.7. Sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow N$ dos fibrados vectoriales. Una aplicación f (C^∞) es un *morfismo de fibrados*, si para una aplicación h (C^∞) el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

conmuta, y para cada $p \in M$ la aplicación $f|_{\pi_1^{-1}(\{p\})} : \pi_1^{-1}(\{p\}) \rightarrow \pi_2^{-1}(\{h(p)\})$ es lineal. Asimismo, si $M = N$ el morfismo de fibrado $f : E_1 \rightarrow E_2$ es un *isomorfismo de fibrados* si $\pi_2 \circ f = \pi_1$.

Definición 1.8. Sean $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ y $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial sobre N . El *fibrado inducido o pull-back* de E mediante f , es el fibrado vectorial $\pi^f : f^{-1}(E) \rightarrow M$ tal que $\pi^f(p, v) = p$, donde

$$f^{-1}(E) = \{(p, v) \in M \times E : f(p) = \pi(v)\}.$$

Definición 1.9. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real y U un abierto de M . Una *sección local* del fibrado, es una aplicación $s : U \rightarrow E$ de clase C^∞ tal que $\pi \circ s = I_U$. Cuando $M = U$ diremos que s es una *sección global* o simplemente *sección* del fibrado. Denotaremos al espacio de todas las secciones de un fibrado por $\Gamma(E)$.

Definición 1.10. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial de rango k . Decimos que una colección $\{s_i\}_{i=1, \dots, k}$ de secciones locales es un *referencial local* sobre $U \subset M$, si el conjunto $\{s_1(p), \dots, s_k(p)\}$ forma una base de $\pi^{-1}(\{p\})$ para todo $p \in U$. Diremos que el fibrado es trivial si el referencial $\{s_i\}_{i=1, \dots, k}$ es global, esto es, $U = M$.

1.3. Conexión en fibrados vectoriales reales

Tomando como referencias principales a [7] y [13], en esta sección se presenta una definición de conexión en fibrados vectoriales reales.

Definición 1.11. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real. Una *conexión lineal* es una aplicación \mathbb{R} -bilineal

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

tal que cumple

$$i. \nabla_{fX} s = f \nabla_X s$$

$$ii. \nabla_X (fX) = X(f)s + f \nabla_X s$$

para todo $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ y $s \in \Gamma(E)$.

Ejemplo 4. Sea $\pi : TM \rightarrow M$ el fibrado tangente. Una conexión en TM se define por

$$\nabla_X \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum X(a_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Claramente esta conexión cumple las condiciones establecidas en la definición anterior.

Ejemplo 5. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado trivial de rango k . Entonces, existe un referencial global $\{s_1, \dots, s_k\}$ de E tal que $\{s_i(p)\}$ forma un base de $\pi^{-1}(\{p\})$ para todo $p \in M$. Así, para cada $s \in \Gamma(E)$ tenemos

$$s = \sum_i f_i s_i, \text{ con } f_i \in C^\infty.$$

Definiendo así una aplicación bilineal $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ dada por

$$\nabla_X s = \nabla_X \left(\sum_j f_j s_j \right) = \sum_i X(f_i) s_i.$$

Entonces ∇ es una conexión en el fibrado. En efecto, para $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \Gamma(TM)$, se tiene

$$\nabla_{fX} s = \nabla_{fX} \left(\sum_i f_i s_i \right) = \sum_i f X(f_i) s_i = f \sum_i X(f_i) s_i = f \nabla_X s,$$

y

$$\nabla_X (fs) = \nabla_X \left(f \sum_i f_i s_i \right) = X(f) \sum_i f_i s_i + f \sum_i X(f_i) s_i = X(f)s + f \nabla_X s.$$

Sean $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real y (U, φ) es un sistema de coordenadas de M tal que $E|_U$ es trivial; esto es, $E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $p \in U$ tenemos que $\{s_\alpha(p)\}$ es una base de $E_p = \pi^{-1}(p)$. Por lo tanto, para una conexión ∇^U , definimos $\Gamma_{ij}^\alpha \in C^\infty(U)$ por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^U s_j = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^\alpha s_\alpha,$$

donde estas funciones son los *símbolos de Christoffel* de la conexión, asociados al sistema de coordenadas φ y la base $\{s_\alpha\}$.

Ejemplo 6. Si ∇^E es una conexión lineal en el fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, se define la *conexión dual* en E^* como

$$(\nabla_X^* \sigma)(s) = X(\sigma(s)) - \sigma(\nabla_X^E s),$$

donde $\sigma \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ y $X \in \Gamma(TM)$.

Ejemplo 7. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ dos fibrados vectoriales sobre M , la *conexión producto tensorial* en $E_1 \otimes E_2$, está dada por

$$\nabla_X^\otimes (s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X^{E_1} s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^{E_2} s_2),$$

para $s_1 \in \Gamma(E_1)$, $s_2 \in \Gamma(E_2)$ y $X \in \Gamma(TM)$.

Ejemplo 8. Sean $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial con conexión ∇^E y $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ entre dos variedades diferenciables. Para $p \in M$, con $y = f(p) \in N$ y $X \in \Gamma(TM)$, se define la *conexión inducida o pull-back* en el fibrado $f^{-1}(E)$ como

$$\nabla_X^{f^{-1}(E)} (s \circ f) = f \circ (\nabla_{df(X)}^E (s)),$$

con $s \circ f \in \Gamma(f^{-1}(E))$ y $s \in \Gamma(E)$.

Definición 1.12. Una sección s de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es llamado paralelo (o constante) con respecto a la conexión ∇ en E si $\nabla(s) = 0$.

Sean $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial y ∇ una conexión lineal en el fibrado. Para $s \in \Gamma(E)$, la aplicación

$$\nabla(s) : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(E),$$

definida por $\nabla(s)(X) = \nabla_X s$ resulta ser el *diferencial covariante* de la sección s . Por la linealidad de $\nabla(s)$, se tiene que

$$\nabla(s) \in \Gamma(TM^* \otimes E),$$

es decir, es una sección del fibrado $TM^* \otimes E$. Más adelante, este diferencial covariante será útil para describir la aplicación armónica entre dos variedades riemannianas.

1.4. Grupos de Lie

El objetivo principal de esta sección es estudiar los grupos de Lie y álgebras de Lie, dando algunos ejemplos importantes que posteriormente se usarán en el estudio de superficies mínimas en grupos de Lie. Las referencias fundamentales aquí son [2] y [7].

Definición 1.13. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable \mathbf{G} , con una estructura de grupo, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son aplicaciones C^∞ .

En un grupo de Lie, las aplicaciones

$$\begin{aligned} L_g : \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G} & \text{y} & & R_g : \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ h &\longmapsto gh & & & h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

son difeomorfismos, para cada $g \in \mathbf{G}$. Estas aplicaciones son llamadas *traslación a izquierda* por g y *traslación a derecha* por g , respectivamente. Además, denotaremos por e al elemento identidad de \mathbf{G} .

Ejemplo 9. El conjunto \mathbb{R} de los números reales es un grupo de Lie, con una estructura de grupo con la suma, donde

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g, h) &\longmapsto g + h \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto -g\end{aligned}$$

son aplicaciones C^∞ .

Ejemplo 10. Sean \mathbf{G} y \mathbf{H} dos grupos de Lie, entonces $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ es un grupo de Lie con una estructura de variedad producto y con la estructura de producto directo de grupos

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2),$$

para $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ y $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$.

Ejemplo 11. La variedad $GL(\mathbb{R}, n)$ de las matrices de orden $n \times n$, con determinante diferentes de 0, es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices.

Definición 1.14. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos de vectores en una variedad diferenciable M , el *corchete de Lie* $[X, Y]$ es definido por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para una función f en $C^\infty(M)$. Decimos que los campos de vectores X e Y conmutan si $[X, Y] = 0$.

Definición 1.15. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial \mathcal{V} , con una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ que satisface

- i. $[X, Y] = -[Y, X]$,
- ii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,

para todo X, Y y Z en \mathcal{V} .

Ejemplo 12. Sea M una variedad diferenciable. El espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ de los campos C^∞ en M , es un álgebra de Lie. En efecto, si definimos $[X, Y]$ como en la definición 1.14. y para una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , se tiene

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Claramente esta operación cumple las condiciones de la definición 1.15.

Definición 1.16. Sea \mathbf{G} un grupo de Lie. Decimos que un campo de vectores X en \mathbf{G} es *invariante a izquierda*, si $d(L_g)_h(X_h) = X_{gh}$ para todo $g, h \in \mathbf{G}$.

Denotaremos por \mathcal{G} al conjunto de los campos invariantes a izquierda de un grupo de Lie \mathbf{G} . Además, tenemos que los campos invariantes a izquierda son completamente determinados por sus valores en el elemento identidad $e \in \mathbf{G}$; es decir,

$$d(L_g)_e(X_e) = X_g,$$

para todo $g \in \mathbf{G}$. Por lo tanto, cada elemento de $T_e\mathbf{G}$ determina un único campo invariante a izquierda. Asimismo, es claro que \mathcal{G} es un espacio vectorial.

Proposición 1.17. Sea \mathbf{G} un grupo de Lie. La aplicación $\mathcal{G} \rightarrow T_e\mathbf{G}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, si $X \in \mathcal{G}$, entonces X es diferenciable.

Demostración. Ver [2]. □

Proposición 1.18. Sea \mathbf{G} un grupo de Lie. Si $X, Y \in \mathcal{G}$, entonces $[X, Y] \in \mathcal{G}$; es decir, \mathcal{G} es un grupo de Lie.

Demostración. Ver [2]. □

Como \mathcal{G} es isomorfo a $T_e\mathbf{G}$, si tomamos una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_e\mathbf{G}$, con $n = \dim(\mathbf{G})$, se puede generar E_1, \dots, E_n campos en \mathcal{G} tales que

$$(E_i)_e = X_i.$$

Entonces, si $X \in \mathcal{G}$ se puede escribir como

$$X_e = \sum_{i=1}^n c_i (E_i)_e$$

de manera única, donde c_i son constantes. Entonces teniendo en cuenta que

$$X_g = d(L_g)_e X_e, \quad g \in \mathbf{G},$$

se concluye que,

$$X = \sum_{i=1}^n c_i E_i$$

de manera única, entonces $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base de \mathcal{G} .

En particular, dados dos campos de \mathcal{G} ,

$$X = \sum_{i=1}^n c_i E_i \text{ y } Y = \sum_{j=1}^n d_j E_j,$$

se tiene que

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n c_i d_j [E_i, E_j].$$

Además, como $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k$, se obtiene que

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n c_i d_j \left(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k \right).$$

Entonces para conocer el álgebra de Lie de \mathbf{G} , solo basta con conocer las constantes C_{ij}^k . Dichas constantes reciben el nombre de *constantes de estructura del álgebra de Lie* de \mathcal{G} .

Definición 1.19. Decimos que una métrica riemanniana en \mathbf{G} es invariante a izquierda si

$$\langle X, Y \rangle_h = \langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{L_g(h)}$$

para todo $g, h \in \mathbf{G}$ y $X, Y \in T_h \mathbf{G}$.

Ahora vamos a introducir una definición importante que relaciona un álgebra de Lie con un grupo de Lie.

Definición 1.20. Sea \mathbf{G} un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathcal{G} . Para $X \in \mathcal{G}$ se define la aplicación exponencial de \mathbf{G}

$$\exp : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{G}$$

como

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots$$

Para $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(tX) = I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^3}{3!}X^3 + \dots$$

luego, para $s, t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp((s+t)X) = \exp(sX) \exp(tX),$$

en particular, $\exp(x) \exp(-x) = I$. Por lo tanto, $\exp(X)$ siempre es invertible.

A continuación se presentan ejemplos sustanciales de grupos de Lie, que serán tomados como objetos de estudio en el capítulo 4. Asimismo, determinaremos la métrica riemanniana invariante a izquierda de cada uno.

Ejemplo 13. El *Grupo de Heisenberg* \mathcal{H}_3 es un subgrupo de $GL(\mathbb{R}, 3)$ dado por

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Además, el álgebra de Lie de \mathcal{H}_3 , está conformada por matrices de la forma

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

y el producto de Lie es el conmutador de matrices $[\ , \]$. Consecuentemente, la aplicación exponencial

$$\exp : \mathfrak{h}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_3$$

está dada por

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para $x, y, z \in \mathbb{R}$. A través del isomorfismo de espacios vectoriales dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto (x, y, z)$$

se puede incluir la estructura de álgebra de Lie de \mathfrak{h}_3 en \mathbb{R}^3 , denotada por $(\mathbb{R}^3, [\ , \])$. Así, la aplicación exponencial está dada de la siguiente manera

$$\exp((x, y, z)) = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Luego, la operación de grupo de \mathcal{H}_3 induce un producto vía la aplicación exponencial en \mathbb{R}^3 , dado por

$$(x, y, z) * (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(xb - ay)).$$

De esta manera, se puede considerar el grupo de Heisenberg como \mathbb{R}^3 junto con la operación $*$.

La traslación a izquierda

$$L_{(x,y,z)} : \mathcal{H}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_3$$

dada por

$$L_{(x,y,z)}(a, b, c) = (x, y, z) * (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(xb - ay)).$$

Entonces, la diferencial de la traslación a izquierda está dado por

$$(dL_p)_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } p = (x, y, z) \in \mathcal{H}^3.$$

Considerando el producto interno en $T_e\mathcal{H}_3$, de tal manera que la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 resulte ser una base ortonormal. Así, se puede obtener una base ortonormal para los campos invariantes a izquierda

$$\begin{cases} E_1 = (dL_p)_e(e_1) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ E_2 = (dL_p)_e(e_2) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ E_3 = (dL_p)_e(e_3) = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Es inmediato verificar que

$$[E_1, E_2] = E_3 \text{ y } [E_1, E_3] = 0 = [E_2, E_3].$$

Ahora si tomamos una métrica riemanniana invariante a izquierda tal que $\{E_i(p)\}$, con $p \in \mathcal{H}^3$ sea una base ortonormal de $T_p\mathcal{H}^3$. Luego en términos de los campos coordenados, la métrica está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la métrica invariante a izquierda es

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

Ejemplo 14. Sea \mathbb{H}^2 el *plano hiperbólico*, representado por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

Por otro lado, un elemento $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ puede identificarse con la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por $f(t) = yt + x$, con $y > 0$. Así, el plano hiperbólico admite una estructura de grupo, dada por la composición de funciones

$$(x, y) * (a, b) = (ay + x, by).$$

Entonces, la traslación a izquierda está dada por

$$L_{(x,y)}(a, b) = (x, y) * (a, b) = (ay + x, by), \text{ para } (x, y), (a, b) \in \mathbb{H}^2.$$

Luego, la diferencial de la traslación a izquierda es

$$(dL_p)_{(a,b)} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \text{ } p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$$

Entonces

$$(dL_p)^{-1}_{(a,b)} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

luego, tomando una base $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\mathbb{H}^2$, se obtiene una métrica invariante a izquierda

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Ejemplo 15. El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ es un grupo de Lie de dimensión 3 representado en $GL(\mathbb{R}, 4)$ por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x_3) \\ 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ y } x_3 > 0.$$

Por el producto de matrices tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x_3) \\ 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x'_3) \\ 0 & x'_3 & 0 & x'_1 \\ 0 & 0 & x'_3 & x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x_3 x'_3) \\ 0 & x_3 x'_3 & 0 & x_3 x'_1 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 x'_3 & x_3 x'_2 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, haciendo una correspondencia

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x_3) \\ 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que \mathbb{H}^3 tiene una estructura de grupo con la operación $*$, dado por

$$(x_1, x_2, x_3) * (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_3 x'_1 + x_1, x_3 x'_2 + x_2, x_3 x'_3), \quad (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{H}^3$$

Asimismo, la traslación a izquierda está dada por

$$L_{(x_1, x_2, x_3)}(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_3 x'_1 + x_1, x_3 x'_2 + x_2, x_3 x'_3).$$

Entonces, la diferencial de $L_{(x_1, x_2, x_3)}$ está dado por

$$(dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

y su inversa

$$(dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e^{-1} = \frac{1}{x_3^2} \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, tomando el producto interno en $T_e \mathbb{H}^3$ de tal manera que la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ resulte una base ortonormal, obteniendo así una base ortonormal de campos invariantes a izquierda

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2, x_3) = (dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e(e_1) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ E_2(x_1, x_2, x_3) = (dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e(e_2) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ E_3(x_1, x_2, x_3) = (dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e(e_3) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

Además, es fácil ver que

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = -E_1 \quad \text{y} \quad [E_2, E_3] = -E_2.$$

Por otro lado,

$$g_{ij} = \left\langle (dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e^{-1}(e_i), (dL_{(x_1, x_2, x_3)})_e^{-1}(e_j) \right\rangle$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Obteniendo así, la métrica invariante a izquierda

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

1.5. Aplicación armónica entre variedades riemannianas

En esta sección se presenta a la aplicación armónica como el trazo de su segunda forma fundamental, tal como se puede observar en [4].

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ . Se sabe que el diferencial

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

es una transformación lineal. Así, $df_p \in T_p M^* \otimes T_{f(p)} N$. De esta manera df se puede ver como una sección en el fibrado $TM^* \otimes f^{-1}TN$ sobre M . Luego tenemos que el diferencial covariante de df es una aplicación bilineal en TM ; esto es,

$$\nabla(df) \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes f^{-1}TN),$$

donde ∇ es la conexión lineal.

Definición 1.21. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ entre dos variedades riemannianas. Se define la segunda forma fundamental de f como $\nabla(df)$.

Por otra parte, sean (φ_i, U_i) y (ψ_α, V_α) dos sistemas de coordenadas en p y $f(p)$, respectivamente. Además, tomando $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right\}$ los campos coordenados asociados a sus respectivas sistemas de coordenadas, tenemos que una expresión local del diferencial covariante de df está dado por

$$\nabla(df)_{ij} = \nabla(df) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_\lambda \left[(\nabla df^\lambda)_{ij} + \sum_{\alpha, \beta} f_j^\alpha f_i^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \right] \frac{\partial}{\partial y_\lambda},$$

donde $f_j^\alpha = \frac{\partial (f \circ y_\alpha)}{\partial x_j}$ y $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ son los símbolos de Christoffel de la conexión lineal en TN . Además, $\nabla(df)_{ij}^\lambda$ denota cada componente de la segunda forma fundamental de $\nabla(df)_{ij}$.

Definición 1.22. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ entre dos variedades riemannianas. Se define el *campo de tensiones de f* como

$$\tau(f) = Tr(\nabla(df)).$$

Definición 1.23. Sea $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ en una variedad riemanniana (M, g) . Sea (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas en $p \in M$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ la base asociada al sistema de coordenadas, entonces localmente el *Laplaciano* de h está representado por

$$\Delta h = \sum_{i,j} g^{ij} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} h \right),$$

donde ∇ es la conexión riemanniana y (g^{ij}) es la matriz inversa de g .

Por la compatibilidad de la conexión con el producto interno y la definición anterior, se tiene que

$$\Delta h = \sum_{i,j} g^{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \text{grad}(h), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \text{grad}(h), \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right]$$

Además, considerando el diferencial covariante del funcional dh , se obtiene

$$\Delta h = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\nabla dh \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) = \sum_{i,j} g^{ij} (\nabla dh)_{ij}.$$

Finalmente, la expresión local para el campo de tensiones de f , está dado por

$$\tau(f) = \sum \tau^\lambda \frac{\partial}{\partial y_\lambda},$$

donde

$$\tau^\lambda = \Delta f^\lambda + \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} f_j^\alpha f_i^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda g^{ij},$$

con $\alpha, \beta, \lambda = 1, \dots, \dim(N)$.

Definición 1.24. Sean $f : M \rightarrow N$ una aplicación C^∞ entre dos variedades riemannianas. Decimos que f es armónica si $\tau(f) = 0$.

Capítulo 2

Variedades complejas

Los objetivos principales de este capítulo son presentar algunos resultados sobre variedades complejas y casi complejas, fibrados vectoriales complejos y holomorfos. Finalmente, definir la conexión en un fibrado holomorfo, y establecer la relación que hay entre la conexión de Levi-Civita y la conexión de Chern.

2.1. Funciones holomorfas y variedades complejas

Se abre esta sección dando una definición de una función holomorfa en \mathbb{C}^n , posteriormente tomando este resultado, se presenta una definición de variedad compleja. Las referencias principales aquí son [9] y [13].

Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función, tal que $f = (f^1, \dots, f^n)$, donde $f^k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ posee una parte real y una imaginaria, esto es, $f^k = u^k + iv^k$. Por otro lado, identificando \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} podemos ver a f como una aplicación de la forma $f : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$f^k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = u^k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + iv^k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

Definición 2.1. Una función $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa si cumple las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* generalizadas

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_j} = \frac{\partial v^k}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u^k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v^k}{\partial x_j},$$

donde $k = 1, \dots, n$. Cuando $n = 1$ tenemos que $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si satisface

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.1}$$

donde $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. En consecuencia, definiendo las siguientes derivadas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2. Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y solo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Demostración. Sea $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

se ve que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ si y solo si se cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

Definición 2.3. Una *variedad compleja* es un espacio topológico M que posee un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ holomorfo; esto es, las aplicaciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ son homeomorfismos de abiertos U_α de M en abiertos de \mathbb{C}^n tal que:

i. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha,$

ii. para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de \mathbb{C}^n , y la función $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es holomorfa.

Cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es llamado carta compleja o sistema de coordenadas, y $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ el *cambio de coordenadas* o *funciones de transición*. Para el caso de $n = 1$, diremos que M es una *superficie de Riemann*.

Ejemplo 16. Sea $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, \varphi)$, con el atlas $\{(\mathbb{R}^2, \varphi)\}$, donde $\varphi(x, y) = x + iy$. Tenemos que \mathbb{C} es una superficie de Riemann.

Ejemplo 17. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria. Se define $\varphi_N : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varphi_N(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z},$$

y $\varphi_S : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varphi_S(x, y, z) = \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z}.$$

Si hacemos $w = u + iv$, tenemos que

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(w) = \frac{1}{w}$$

es holomorfo para todo $w \in \varphi_N((S_+^2 \cap S_-^2))$, donde

$$S_+^2 = S^2 - \{(0, 0, 1)\} \text{ y } S_-^2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\},$$

entonces $\{(S_+^2, \varphi_N), (S_-^2, \varphi_S)\}$ forma un atlas holomorfo para P^1 .

Proposición 2.4. Toda superficie de Riemann es orientable.

Demostración. Sea $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ un cambio de coordenadas holomorfo de M . Escribiendo

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $z = x + iy$. De esto, el jacobiano de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ está dado por

$$\det(d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dado que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es holomorfo, por la ecuación (2.1) se tiene

$$\det(d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 > 0,$$

lo cual demuestra que toda superficie de Riemann es orientable. \square

Teorema 2.5. Sea g una métrica riemanniana de clase C^2 en un entorno de 0 en \mathbb{R}^2 . Existe un cambio de coordenadas positivamente orientado $z = u(x, y) + iv(x, y)$ fijado en el origen tal que

$$g = a(x, y) (dx^2 + dy^2) = a(z) dz d\bar{z}.$$

Las coordenadas x e y son llamadas *isotérmicas*.

Demostración. Ver [15] \square

Proposición 2.6. Toda variedad riemanniana M orientada de dimensión 2 es una variedad compleja 1-dimensional; es decir, una superficie de Riemann.

Demostración. Fijando una métrica riemanniana g en M y sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ el atlas de M . Por la proposición anterior, tenemos que siempre existe un sistema de coordenadas locales $z = x + iy$ tal que

$$g = a(z)dzd\bar{z}.$$

De igual forma tomando otro sistema de coordenadas $w = u + iv$ en U_β en la misma orientación que la anterior tal que para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene

$$g = a(w)dwd\bar{w}.$$

Entonces, en $U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene la siguiente relación

$$a(z)dzd\bar{z} = a(w)dwd\bar{w}, \quad (2.3)$$

con $a(z)$ y $a(w)$ dos funciones positivas y C^∞ . Por otro lado, se sabe que

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \quad \text{y} \quad d\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}d\bar{z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}dz \quad (2.4)$$

y así, al reemplazar (2.4) en (2.3) se obtiene la siguiente relación

$$a(w)dwd\bar{w} = a(z) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) dzd\bar{z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} dzdz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} d\bar{z}d\bar{z} \right],$$

de esto, tenemos que necesariamente

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.5)$$

Si suponemos que se cumple la segunda condición de (2.5), las ecuaciones de Cauchy-Riemann estarían dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

entonces

$$\det \left(\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 < 0,$$

pero esto es una contradicción, porque M es una variedad orientable. Por lo tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0;$$

es decir, el cambio de coordenadas w , es una función holomorfa. Así, M es una variedad compleja de dimensión 1. \square

2.2. Estructura casi compleja

Para esta sección tomamos como referencias a [9] y [13]. Estableceremos algunos resultados previos antes de dar una definición de una variedad casi compleja.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión par n , una *estructura compleja* en V es un endomorfismo

$$J : V \longrightarrow V$$

tal que $J^2 = -I$, donde I es la identidad. Un espacio vectorial real V con una estructura compleja J , induce una estructura de espacio vectorial en V , definiendo la multiplicación por un escalar complejo como

$$(a + ib)v = av + bJv \text{ para todo } v \in V \text{ y } a, b \in \mathbb{R}.$$

Con esto, J transforma V en un espacio vectorial complejo de dimensión $\frac{n}{2}$.

Recíprocamente, dado un espacio vectorial complejo V de dimensión m , definimos al endomorfismo J de V por

$$Jv = iv \text{ para todo } v \in V.$$

Luego, si consideramos V como un espacio vectorial real de dimensión $2m$, obtenemos que J es una estructura compleja de V .

Proposición 2.7. Sea J una estructura compleja en un espacio vectorial real V de dimensión $2n$. Entonces existen elementos v_1, \dots, v_n de V tal que $\{v_1, \dots, v_n, Jv_1, \dots, Jv_n\}$ es una base de V .

Demostración. Ver [9] (pag. 114) □

En particular, el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^n puede ser identificado como un espacio vectorial real \mathbb{R}^{2n} ; esto es,

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_k = x_k + iy_k\}.$$

Así, cada $z = (z_1, \dots, z_n)$ se identifica con $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^{2n} , donde la estructura compleja J inducida por \mathbb{C}^n en \mathbb{R}^{2n} está dada por

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$$

En términos de la base canónica de \mathbb{R}^{2n} , tenemos

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n .

Ejemplo 18. Sea \mathbb{R}^2 el espacio vectorial real de dimensión 2, y J un estructura compleja tal que $J(x, y) = (-y, x)$, donde la multiplicación por un escalar complejo a todo elemento de \mathbb{R}^2 , está dado por

$$\begin{aligned} (a + ib)(x, y) &= a(x, y) + bJ(x, y) \\ &= a(x, y) + b(-y, x) \\ &= (ax - by, ay + bx), \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$. De esta manera (\mathbb{R}^2, J) es un espacio vectorial complejo.

Definición 2.8. Sea M una variedad diferenciable real. Una *estructura casi compleja* en M es un tensor J , el cual a cada punto p de M asocia un endomorfismo

$$J_p : T_p M \longrightarrow T_p M$$

tal que $J_p^2 = -I$; es decir, J_p es una estructura compleja en $T_p M$. Llamaremos *variedad casi compleja* al par (M, J) .

Proposición 2.9. Toda variedad compleja 1-dimensional, es una variedad casi compleja de dimensión 2.

Demostración. Sea M una variedad compleja. Dado $p \in M$, consideramos (U, φ) un sistema de coordenadas locales. Para $p \in U$ y $\varphi(p) = z(p) \in \mathbb{C}$, donde $z(p) = x(p) + iy(p)$; esto permite definir $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $\varphi(p) = (x(p), y(p))$. Luego, sea $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\}$ la base real de $T_p M$, dada por el sistema de coordenadas.

Si definimos

$$J_p : T_p M \longrightarrow T_p M,$$

una estructura compleja en $T_p M$, tal que

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \quad \text{y} \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p,$$

tenemos que $J_p^2 = -I$.

Además, la estructura compleja está bien definida en T_pM ; esto es, ella no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, sea $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ otro sistema de coordenadas en M tal que $p \in \widehat{U}$ y $\widehat{\varphi}(p) = u(p) + iv(p)$, y \widehat{J}_p otra estructura compleja tal que

$$\widehat{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \quad \text{y} \quad \widehat{J}_p \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = - \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p.$$

Escribiendo $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Como M es una variedad compleja, entonces el cambio de coordenadas $\widehat{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es holomorfo, y así, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \frac{\partial u}{\partial x} \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial y} \\ \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= \frac{\partial u}{\partial y} \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \widehat{J} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} = - \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Es decir, J y \widehat{J} coinciden en la base de T_pM . Por lo tanto $J = \widehat{J}$. □

Definición 2.10. Sea (M, J) y (N, J') dos variedades casi complejas. Una aplicación diferenciable $f : (M, J) \rightarrow (N, J')$ es casi compleja en $p \in M$, si el diferencial conmuta con las estructuras complejas. Esto es,

$$J'_{f(p)} \circ df_p = df_p \circ J_p$$

Se dice que f es casi holomorfa, cuando vale para todo $p \in M$.

Proposición 2.11. Sea $f : (\mathbb{R}^2, J) \rightarrow (\mathbb{R}^2, J)$ de clase C^∞ , donde $J(x, y) = (-y, x)$ es una estructura casi compleja de \mathbb{R}^2 . Entonces f es holomorfa si, y sólo si es casi-holomorfa.

Demostración. Si $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, el diferencial de f , esta dado por

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$J \circ df = df \circ J$ equivale a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

entonces f es una función holomorfa. □

2.3. Fibrado tangente complexificado

El propósito de esta sección es mostrar la complexificación del fibrado tangente. En secciones posteriores, este hecho será muy útil para establecer una definición de conexión en un fibrado holomorfo. Como referencias principales tenemos a [9] y [13]. No obstante, inicialmente observemos la complexificación de un espacio vectorial real cualquiera.

Sea V un espacio vectorial real, la complexificación de este espacio está dado por

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C} = \{v \otimes z : v \in V, z \in \mathbb{C}\},$$

donde por costumbre tenemos que $v = v \otimes 1$ y $v \otimes i = iv$. Entonces $V^{\mathbb{C}}$ tiene una estructura de espacio vectorial complejo, con el producto por un escalar complejo, definido por

$$w(v \otimes z) = v \otimes wz, \text{ para todo } v \in V, z, w \in \mathbb{C}.$$

Por otro lado, podemos identificar los elemento de $V^{\mathbb{C}}$ como $X + iY$ para $X, Y \in V$. En efecto, sea $v \in V$ y $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$v \otimes (a + ib) = (a + ib)(v \otimes 1) = a(v \otimes 1) + ib(v \otimes 1) = av \otimes 1 + bv \otimes i,$$

entonces

$$v \otimes z = X \otimes 1 + Y \otimes i = X + iY, \text{ para } X, Y \in V. \quad (2.6)$$

Para concluir, si suponemos que V tiene una estructura compleja J , entonces podemos extender esta estructura a $V^{\mathbb{C}}$, definiendo $J^{\mathbb{C}}$ como

$$J^{\mathbb{C}}(v \otimes z) = Jv \otimes z, \text{ para todo } v \in V, z \in \mathbb{C}$$

Además, por 2.6 y haciendo un cálculo análogo para $X, Y \in V$, se puede afirmar que,

$$J^{\mathbb{C}}(X + iY) = JX + iJY.$$

Definición 2.12. Sea (M, J) una variedad casi compleja. Definimos el *fibrado tangente complexificado* como

$$TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes \mathbb{C},$$

el cual es una complexificación de cada fibra $T_p M$. Entonces para cada $p \in M$, consideramos la estructura compleja extendida $J_p^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}} M \rightarrow T_p^{\mathbb{C}} M$ tal que $(J_p^{\mathbb{C}})^2 = -I$. Observemos que $J_p^{\mathbb{C}}$ es una complexificación de $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$. Asimismo, sean $T^{1,0} M$ y $T^{0,1} M$ los *autoespacios o autofibrados* de $TM^{\mathbb{C}}$ asociados a los autovalores i y $-i$ de $J_x^{\mathbb{C}}$, respectivamente.

Lema 2.13. Tenemos los siguientes resultados:

1. $T^{1,0} M = \{u - iJu : u \in TM\}$
2. $T^{0,1} M = \{u + iJu : u \in TM\}$
3. $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M$.

Demostración.

1. Sea $W = \{u - iJu : u \in TM\}$, claramente W es un subespacio de $TM^{\mathbb{C}}$. Entonces

$$\begin{aligned} Z \in T^{1,0} M &\iff J^{\mathbb{C}}Z = iZ \\ &\iff -iJ^{\mathbb{C}}Z = Z \\ &\iff -iJ^{\mathbb{C}}Z = 2Z - Z \\ &\iff Z = \frac{1}{2}(Z - iJ^{\mathbb{C}}Z) \end{aligned}$$

luego, haciendo $Z = u + iv$, con $u, v \in TM$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{2}(u + iv - iJ^{\mathbb{C}}(u + iv)) \\
&= \frac{1}{2}(u + iv - i(Ju + iJv)) \\
&= \frac{1}{2}(u + Jv - iJ(u + Jv)) \quad , \text{ donde } J(u + Jv) = Ju - v \\
&= X - iJX
\end{aligned}$$

donde $X = \frac{1}{2}(u + Jv)$, $X \in TM$. Entonces tenemos que $T^{1,0}M \subset W$. Recíprocamente, vemos que, para $X \in TM$ e $Y = X - iJX \in W$, se tiene

$$\begin{aligned}
J^{\mathbb{C}}Y &= JX - iJ^2X \\
&= JX + iX \\
&= i(X - iJX) \\
&= iY
\end{aligned}$$

entonces $W \subset T^{1,0}M$. Por lo tanto $T^{1,0}M = \{u - iJu : u \in TM\}$. La demostración del segundo enunciado es similar a 1. □

Haciendo un pequeño abuso del lenguaje, a partir de ahora denotaremos a la extensión $J^{\mathbb{C}}$ por el mismo J .

Por otro lado, del lema 2.13, se tiene que $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}M$, donde $T^{1,0}M$ es el fibrado tangente holomorfo y $T^{0,1}M$ es el fibrado tangente antiholomorfo. Además, se observa que (TM, J) es isomorfo a $T^{1,0}M$; en efecto, basta considerar el isomorfismo

$$X \mapsto X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX),$$

donde $X \in TM$ y $X^{1,0} \in T^{1,0}M$.

Por otro lado, la descomposición del fibrado tangente complexificado induce una descomposición natural del fibrado cotangente complexificado $TM^* \otimes \mathbb{C}$ dado por

$$TM^* \otimes \mathbb{C} = (T^{1,0})^* \oplus (T^{0,1}M)^*.$$

Teorema 2.14. Sea (M, J) una variedad casi compleja. Entonces (M, J) es una variedad compleja si y solo si la distribución $T^{0,1}M$ es integrable; es decir,

$$[T^{0,1}M, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M.$$

Demostración. Demostraremos para el caso en que M es una variedad compleja de dimensión 1 entonces $T^{0,1}M$ es integrable. Para el caso recíproco ver [6].

Supongamos que (M, J) es una variedad compleja. Consideramos (U, φ_U) una carta de M y sea $z = x + iy$ tal que $\varphi(p) = z(p)$, $p \in U$. Entonces si $\{e_1, e_2\}$ son las bases canónicas de \mathbb{R}^2 , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = d(\varphi_U^{-1})(e_1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y} = d(\varphi_U^{-1})(e_2)$$

además,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{y} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}$$

asimismo, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - iJ\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + iJ\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$$

por lo tanto, por el lema 2.13,

$$\frac{\partial}{\partial z} \in T^{1,0}M \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \in T^{0,1}M$$

forman una base local de $TM^{\mathbb{C}}$ para cada $p \in U$. Ahora, sean X e Y dos secciones locales en $T^{0,1}M$, y reescribiendo estos en sus bases locales, tenemos

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{e} \quad Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

donde X_1, Y_1 son funciones complejas de M a \mathbb{C} . Entonces

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X) = X_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} Y_1\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - Y_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} X_1\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

lo que es lo mismo $[X, Y] \in T^{0,1}M$. Finalmente, la distribución es integrable. \square

2.4. Fibrados complejos y holomorfos

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades de fibrados vectoriales complejos y holomorfos, las cuales serán útiles para los siguientes capítulos. Las referencias principales en esta sección son [8], [9] y [13].

Del mismo modo que definimos un fibrado vectorial real, podemos definir un fibrado vectorial complejo.

Definición 2.15. Sea M una variedad diferenciable, no necesariamente compleja. Un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, se dice que es un *fibrado vectorial complejo* de rango n , si para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(\{p\})$ tiene una estructura de espacio vectorial complejo.

Definición 2.16. Sea M una variedad compleja y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo. Decimos que este fibrado es *holomorfo* si existe una cobertura abierta $\{U_\alpha\}$ de M tal que para cada $U \in \{U_\alpha\}$, la aplicación $(\pi, \varphi_U) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ es un biholomorfismo. Es decir, existe una trivialización del fibrado con funciones de transición holomorfas.

Ejemplo 19. El fibrado tangente de una variedad compleja es un fibrado holomorfo. En efecto, tomando un atlas holomorfo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ de M , se define

$$(\pi, \varphi_\alpha) : TM|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^m$$

como $(\pi, \varphi)(X_p) = (p, d\varphi_\alpha(X))$. Luego, tenemos las funciones de transición

$$f_{\alpha\beta}(p) : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{C}, m) \subset \mathbb{C}^{m^2}$$

dadas por $f_{\alpha\beta}(p) = d\varphi_\alpha \circ (d\varphi_\beta)^{-1}$, las cuales son claramente holomorfas. Entonces, TM es un fibrado holomorfo.

Definición 2.17. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo. Se define una 1-forma ω con valores en E , como una sección del fibrado $TM^* \otimes E$; esto es, la aplicación $\omega : TM \rightarrow E$ es tal que para cada $p \in M$ la aplicación $\omega_p : T_p M \rightarrow E_p$ es lineal. De manera similar, se define las k -formas ω como una sección del fibrado $\Lambda^k(E) = \Lambda^k(TM^*) \otimes E$. Denotamos por $\Omega^k(E) = \Gamma(\Lambda^k(TM^*) \otimes E)$ al espacio de todas las k -formas.

Simultáneamente, se puede considerar las k -formas con valores complejos, definidos como una sección del fibrado

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k E = \Lambda^k((TM^{\mathbb{C}})^*) \otimes E.$$

Denotando el espacio de secciones por $\Omega_{\mathbb{C}}^k(E)$. De manera particular se tiene

$$\Omega^0(E) = \Gamma(E) \text{ y } \Omega^1(E) = \Gamma(TM^* \otimes E).$$

Si M una variedad compleja, se define el conjunto de las (r, s) -forma como

$$\Omega^{r,s}(E) = \Gamma((\Lambda^r(T^{1,0}M)^* \otimes \Lambda^s(T^{0,1}M)^*) \otimes E).$$

Definición 2.18. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado holomorfo. Definimos el operador

$$\bar{\partial} : \Lambda^{r,s}(E) \longrightarrow \Lambda^{r,s+1}(E)$$

por

$$\bar{\partial}\omega = \sum_i \bar{\partial}\omega_i \otimes s_i$$

donde $\{s_i\}$ es un referencial local holomorfo de E sobre $U \subset M$ y $\omega_i \in \Lambda^{r,s}(U)$. Por construcción se tiene que $\bar{\partial}^2 = 0$ y $\bar{\partial}$ satisface la regla de Leibniz

$$\bar{\partial}(\omega \wedge s) = (\bar{\partial}\omega) \wedge s + (-1)^{r+s} \omega \wedge (\bar{\partial}s), \text{ para todo } \omega \in \Omega^{r,s}(M), s \in \Omega^{r,s}(E).$$

Proposición 2.19. El operador $\bar{\partial}$ no depende del referencial escogido.

Demostración. Sean $\{s_i\}$ y $\{s'_j\}$ dos referenciales locales en E sobre $U \in M$. Sea (f_{ij}) la matriz cambio base con entradas

$$f_{ij} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$s_i(p) = \sum_j f_{ij} s'_j(p), \quad p \in U.$$

Entonces, para $\omega \in \Omega_{r,s}(E)$ se tiene

$$\omega = \sum_i \omega_i \otimes s_i = \sum_i \otimes \left(\sum_j f_{ij} s'_j \right) = \sum_j \sum_i f_{ij} \omega_i \otimes s'_j.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\omega &= \bar{\partial}(\sum_i f_{ij} \omega_i) \otimes s'_j \\ &= \sum_j \sum_i f_{ij} \bar{\partial}\omega_i \otimes s'_j \\ &= \sum_i \bar{\partial}\omega_i \otimes \sum_j f_{ij} s'_j \\ &= \sum_i \bar{\partial}\omega_i \otimes s_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{\partial}$ no depende del referencial escogido. \square

Definición 2.20. Una estructura pseudo-holomorfa en un fibrado complejo $\pi : E \rightarrow M$, es un operador

$$\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(E) \longrightarrow \Omega^{r,s+1}(E)$$

que satisface la regla de Leibniz. Además, si $\bar{\partial}^2 = 0$, decimos que $\bar{\partial}$ es una estructura holomorfa. Una sección s en un fibrado pseudo-holomorfo $(E, \bar{\partial})$ es llamado holomorfo si $\bar{\partial}s = 0$.

Proposición 2.21. Un fibrado vectorial pseudo-holomorfo $(E, \bar{\partial})$ de rango k es holomorfo si, y solamente si E posee un referencial holomorfo sobre un abierto $U \in M$.

Demostración. Ver [13] (Lema 9.1). □

Proposición 2.22. Un fibrado vectorial complejo E es holomorfo si y sólo si tiene una estructura holomorfa $\bar{\partial}$.

Demostración. Ver [13] (Teorema 9.2). □

2.5. Conexión en fibrados holomorfos

Antes de presentar una definición de conexión en fibrados holomorfos, estableceremos una buena definición de métrica compatible con una estructura compleja. Las referencias principales en esta sección son [8] y [13].

Sea M una variedad compleja de dimensión n ($2n$ en el sentido real). Como una generalización de la proposición 2.9, se tiene que toda variedad compleja es una variedad casi compleja; esto es, para todo $p \in M$ se induce una estructura compleja en cada espacio tangente $T_p M$, que en su totalidad es un tensor $J : TM \rightarrow TM$ tal que $J^2 = -I$.

Definición 2.23. Sea g una métrica riemanniana en M , se dice que g es J -compatible, si J es una isometría; es decir,

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v), \text{ para todo } u, v \in T_p M.$$

De una métrica riemanniana en una variedad compleja M , siempre se puede definir una métrica J -compatible \mathbf{h} , haciendo

$$\mathbf{h}(\cdot, \cdot) = \frac{1}{2}[g(\cdot, \cdot) + g(J\cdot, J\cdot)].$$

En efecto, verificando la definición anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_p(J_p u, J_p v) &= \frac{1}{2}[g_p(J_p u, J_p v) + g_p(J_p^2 u, J_p^2 v)] \\ &= \frac{1}{2}[g_p(J_p u, J_p v) + g_p(u, v)] \\ &= \mathbf{h}_p(u, v), \end{aligned}$$

para todo $u, v \in T_p M$. Por lo tanto, \mathbf{h} es J -compatible. Finalmente, como toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana, entonces toda variedad compleja admite una métrica compatible con la estructura compleja.

Proposición 2.24. Sea M una variedad compleja. Entonces con respecto a cualquier métrica J -compatible en M , para $X \in TM$ se tiene que X y JX son ortogonales.

Demostración. Sea g una métrica J -compatible en M , se tiene

$$g(X, JX) = g(JX, J^2X) = g(JX, -X) = -g(X, JX),$$

entonces $g(X, JX) = 0$. Así, X y JX son ortogonales. \square

Si g es una métrica J -compatible se puede definir un *producto hermitiano* en cada espacio tangente como

$$\mathbf{h} = g(\cdot, \cdot) + ig(\cdot, J\cdot);$$

es decir, \mathbf{h} es una forma sesquilineal en (TM, J) . Recíprocamente, si \mathbf{h} es un producto Hermitiano en TM entonces, $g = \text{Re}(\mathbf{h})$ es una métrica J -compatible en M . Por lo tanto, de aquí en adelante toda métrica J -compatible designará un producto Hermitiano en (TM, J) .

Definición 2.25. Sea g una métrica J -compatible en una variedad compleja M . La *2-forma fundamental o forma de Kähler* de g , está dada por

$$\omega = g(J\cdot, \cdot).$$

Notemos que ω es antisimétrica y no degenerada. En efecto,

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) = -g(X, JY) = -g(JY, X) = -\omega(Y, X),$$

lo que indica que ω es antisimétrica. Ahora si $\omega(X, Y) = 0$ para todo Y , entonces

$$\omega(X, JX) = -\omega(JX, X) = -g(J^2X, X) = g(X, X) = 0,$$

así, $X = 0$. Por lo tanto, ω es no degenerado.

Sea g una métrica riemanniana en una variedad compleja M . Sean $\omega^{\mathbb{C}}$ y $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$ las extensiones \mathbb{C} -bilineales de la forma fundamental y la forma hermitiana $\mathbf{h} = g - i\omega$ en $TM^{\mathbb{C}}$, respectivamente. Dicha extensión satisface lo siguiente

i. $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(Z, W)}$, para todo $Z, W \in TM^{\mathbb{C}}$.

ii. $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(Z, \overline{Z}) > 0$, para cada Z no nulo en $TM^{\mathbb{C}}$.

iii. $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(Z, W) = 0$, para todo $Z \in T^{1,0}M$ y $W \in T^{0,1}M$.

Proposición 2.26. Sea M una variedad compleja de dimensión 1. En un sistema de coordenadas reales $\{u, v\}$, valen las siguientes relaciones:

$$1. \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) = \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \text{ y } \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = -\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

$$2. \mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \text{ y } \mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

Demostración. Sea J una estructura compleja tal que $J \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v}$.

1. Del producto hermitiano asociado a la métrica J - compatible, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) &= g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) + ig \left(\frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= g \left(J \frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial u} \right) + ig \left(J \frac{\partial}{\partial u}, J^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= g \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) + ig \left(\frac{\partial}{\partial v}, J \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &= g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) + ig \left(\frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= g \left(J \frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial v} \right) + ig \left(J \frac{\partial}{\partial u}, J^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= -g \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) - ig \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= - \left[g \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) + ig \left(\frac{\partial}{\partial v}, J \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] \\ &= -\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

2. Sean $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
4\mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) &= \mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&= \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) - i\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) - i\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) - \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&= \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) - i\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) + i\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) - \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De manera similar se tiene que $\mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0$. Por otro lado,

$$\mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) + i\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]$$

Luego, por la definición de producto hermitiano a partir de la métrica g compatible con la estructura compleja, se tiene

$$\mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left[2g \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) + 2ig \left(\frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] = \mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

□

De manera general para un sistema de coordenadas $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$, por la proposición anterior se observa que el 2-tensor $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$ se escribe

$$\mathbf{h}^{\mathbb{C}} = \sum_{ij} \mathbf{h}_{ij}^{\mathbb{C}} dz_i \otimes d\bar{z}_j,$$

donde $\mathbf{h}_{ij}^{\mathbb{C}} = \mathbf{h}^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)$ es una matriz hermitiana positiva definida. Además, como

$\frac{\partial}{\partial u_i}$ y $\frac{\partial}{\partial v_i}$ son vectores reales, tenemos

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) = -Im\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) = Im\mathbf{h}_{ij},$$

y

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right) = g \left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right) = Re\mathbf{h} \left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right) = Re\mathbf{h}_{ij}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
4\omega^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + i\omega \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right) - i\omega \left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) - \omega \left(\frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \\
&= -2Im(\mathbf{h}_{ij}) + 2iRe(\mathbf{h}_{ij}) = 2i(Re(\mathbf{h}_{ij}) + iIm(\mathbf{h}_{ij})) \\
&= 2i\mathbf{h}_{ij}.
\end{aligned}$$

De esto, la forma fundamental está dada por

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{ij} \mathbf{h}_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. La siguiente definición es una reformulación de la definición de *conexión* establecida en la definición 1.11.

Definición 2.27. Una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es un operador \mathbb{C} -lineal

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E),$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(f \cdot s) = d(f) \otimes s + f \cdot \nabla(s),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$, donde $\Omega^1(E)$ denota el espacio de 1-formas con valores en E ; esto, secciones de $\Lambda^1 M \otimes E = TM^* \otimes E$.

Dado un campo de vectores X definido localmente, entonces evaluando la 1-forma $\nabla(s)$ en X , se obtiene

$$\nabla(s)(X) = \nabla_X(s) \in \Gamma(E).$$

Así, $\nabla(s)(X)$ se puede interpretar como la derivada covariante de la sección s en la dirección de X . Luego, la regla de Leibniz queda dada por

$$\nabla_X(f \cdot s) = X(f) s + f \cdot \nabla_X(s).$$

Definición 2.28. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo de rango k , sobre una variedad diferenciable M . Una *estructura Hermitiana* H en E es un campo C^∞ de productos hermitianos en las fibras de E , esto es, para cada $p \in M$ la aplicación $H : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{C}$, satisface lo siguiente:

- i. $H(u, v)$ es \mathbb{C} -lineal en u , para todo $v \in E_p$
- ii. $H(u, v) = \overline{H(v, u)}$, para todo $u, v \in E_p$.
- iii. $H(u, u) > 0$, para todo $u \neq 0$.
- iv. $H(u, v)$ es una aplicación C^∞ en M , para $u, v \in \Gamma(E)$.

Un fibrado vectorial complejo dotado con una estructura hermitiana es llamado *fibrado vectorial hermitiano* denotado por (E, H) .

Asimismo, todo fibrado vectorial complejo admite una estructura hermitiana. En efecto, sea $(\pi, \varphi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ una trivialización del fibrado $\pi : E \longrightarrow M$, y una partición de la unidad (f_α) restringida a la cubierta $\{U_\alpha\}$. Entonces, para cada $p \in U_\alpha$, tenemos $(H_\alpha)_p$ la métrica hermitiana inducida de \mathbb{C}^k por la aplicación $\varphi_\alpha|_{E_p}$. Así,

$$H = \sum_{\alpha} f_{\alpha} H_{\alpha}$$

define una estructura hermitiana en E .

Se sabe que en geometría riemanniana el fibrado tangente de una variedad M , posee una única conexión llamada la conexión de *Levi-Civita*, la cual es compatible con la métrica riemanniana y libre de torsión. Experimentaremos que en un fibrado holomorfo con una estructura hermitiana H , existe una única conexión llamada *conexión de Chern*, determinada por la métrica y la estructura holomorfa.

Definición 2.29. Sea (E, H) un fibrado hermitiano. Decimos que una conexión ∇ en (E, H) es compatible con H si

$$d(H(s_1, s_2)) = H(\nabla(s_1), s_2) + H(s_1, \nabla(s_2))$$

para secciones $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. Equivalentemente, para todo vector tangente X , se tiene

$$X(H(s_1, s_2)) = H(\nabla_X(s_1), s_2) + H(s_1, \nabla_X(s_2)).$$

Diremos que ∇ es una conexión hermitiana o una H -conexión cuando sea compatible con la estructura hermitiana.

Consideremos un fibrado holomorfo $\pi : E \longrightarrow M$ sobre una variedad compleja M . Para cada conexión

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$$

en E , se escribe como $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$, donde

$$\nabla^{1,0} : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^{1,0}(E) \text{ y } \nabla^{0,1} : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^{0,1}(E)$$

tales que satisfacen la regla de Leibniz, esto es,

$$\nabla^{1,0}(f \cdot s) = \partial f \otimes s + f \cdot \nabla^{1,0}s$$

y

$$\nabla^{0,1}(f \cdot s) = \bar{\partial}f \otimes s + f \cdot \nabla^{0,1}s$$

para $f \in C^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$. Por supuesto, $\nabla^{0,1}$ es una estructura pseudo-holomorfa en E para cada conexión ∇ . Entonces, como el fibrado es holomorfo, tenemos que por la proposición 2.22, $\nabla^{0,1}$ es una estructura holomorfa, y así, $(\nabla^{0,1})^2 = 0$. De esto, se da la siguiente definición.

Definición 2.30. Una conexión en un fibrado holomorfo es compatible con la estructura holomorfa $\bar{\partial}$, si $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

Teorema 2.31. Para cada estructura Hermitiana H en un fibrado vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ con una estructura holomorfa $\bar{\partial}$, existe una única H -conexión ∇ tal que $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

Demostración. Ver [13] (Teorema 10.3). □

Definición 2.32. Sea M una variedad compleja y g una métrica compatible con la estructura compleja inducida J . Decimos que g es una métrica de Kähler si la 2-forma fundamental $\omega = g(J \cdot, \cdot)$ es cerrada; es decir, $d\omega = 0$. Decimos que M es una variedad de Kähler si admite una métrica de Kähler.

Proposición 2.33. Sea g una métrica J -compatible en una variedad compleja M con una conexión de Levi-civita ∇ . Entonces

$$(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_XJ)Y, \text{ para todo } X, Y \in TM,$$

donde $J : TM \rightarrow TM$ es una estructura compleja inducida.

Demostración. Sea el tensor $A(X, Y, Z) = g(J(\nabla_XJ)Y - (\nabla_{JX}J)Y, Z)$. Basta demostrar que $A(X, Y, Z) = 0$. En efecto, el tensor de Nijenhuis asociado a la estructura compleja J , está dado por

$$N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY], \quad X, Y \in TM.$$

Como J es la estructura compleja inducida, entonces $N^J = 0$ (ver [13] proposición 8.2). Además, como ∇ es libre de torsión, tenemos

$$N^J(X, Y) = [J(\nabla_XJ)Y - (\nabla_{JX}J)Y] - [J(\nabla_YJ)X - (\nabla_{JY}J)X] = 0$$

Entonces,

$$J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X,$$

esto es, el tensor $A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$. Por otro lado, también se verifica que

$$A(X, Y, Z) = -A(X, Z, Y).$$

En efecto, para todo $X \in TM$

$$\begin{aligned} J(\nabla_X J)Y + (\nabla_X J)JY &= J(\nabla_X J)Y + J^2\nabla_X Y + \nabla_X Y + (\nabla_X J)JY \\ &= J(\nabla_X(JY)) + \nabla_X Y + (\nabla_X J)JY - J(\nabla_X JY) \\ &= J(\nabla_X JY) - J(\nabla_X JY) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, J y $\nabla_X J$ son anticonmutativos. Además, como $g(JY, Z) = -g(Y, JZ)$, se tiene

$$g(JY, Z) + g(Y, JZ) = 0.$$

Luego, derivando en la dirección de X y por la compatibilidad de la conexión con la métrica, se tiene

$$\begin{aligned} Xg(JY, Z) + Xg(Y, JZ) &= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z) + g(Y, (\nabla_X J)Z) = 0 \end{aligned}$$

entonces $g((\nabla_X J)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X J)Z)$, es decir, el operador $(\nabla_X J)$ es antisimétrico. Por lo tanto, por este último resultado y la anticonmutatividad de J y $\nabla_X J$, se obtiene

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z) &= g(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z) \\ &= g(J(\nabla_X J)Y, Z) - g((\nabla_{JX} J)Y, Z) \\ &= -g((\nabla_X J)JY, Z) + g(Y, (\nabla_{JX} J)Z) \\ &= g(JY, (\nabla_X J)Z) + g(Y, (\nabla_{JX} J)Z) \\ &= -g(Y, J(\nabla_X J)Z) + g(Y, (\nabla_{JX} J)Z) \\ &= -[g(Y, J(\nabla_X J)Z) - g(Y, (\nabla_{JX} J)Z)] \\ &= g(J(\nabla_X J)Z - (\nabla_{JX} J)Z, Y) = -A(X, Z, Y). \end{aligned}$$

Finalmente, culminando la demostración de la proposición, tenemos que

$$A(X, Y, Z) = -A(Y, Z, X) = A(Z, X, Y) = -A(X, Y, Z),$$

obteniendo así $A(X, Y, Z) = 0$. □

Proposición 2.34. Sea g una métrica J -compatible en una variedad compleja M . Entonces, g es de Kähler si, y solamente si J es paralelo con respecto a la conexión Levi-Civita de g .

Demostración. Para demostrar que J es paralelo, es decir, $\nabla J = 0$, se considera el tensor

$$B(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z).$$

Basta con mostrar que $B = 0$. En efecto, por la demostración anterior, se sabe que J y $\nabla_X J$ anticonmutan, entonces

$$B(X, Y, JZ) = B(X, JY, Z). \quad (2.7)$$

Además, de la proposición anterior se ve que $B(X, Y, JZ) = -B(JX, Y, Z)$; esto es,

$$B(X, Y, JZ) + B(JX, Y, Z) = 0. \quad (2.8)$$

Juntando (2.7) y (2.8), se observa que

$$B(X, JY, Z) + B(JX, Y, Z) = 0$$

Por otro lado, de la fórmula intrínseca para el diferencial exterior, tenemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \end{aligned}$$

y escribiendo esto al tensor B ,

$$d\omega(X, Y, Z) = B(X, Y, Z) + B(Y, Z, X) + B(Z, X, Y).$$

Como g es de Kähler, entonces $d\omega = 0$, y así, se obtiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y) = 0 \\ B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY) = 0 \end{cases}$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones y usando (2.7) y (2.8), se observa que

$$2B(X, Y, JZ) = 0, \text{ para todo } X, Y, Z \in TM.$$

Por lo tanto, $B = 0$.

Recíprocamente, como ∇ es compatible con la métrica, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} X\omega(Y, Z) = g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) \\ Y\omega(X, Z) = g(\nabla_Y JX, Z) + g(JX, \nabla_Y Z) \\ Z\omega(X, Y) = g(\nabla_Z JX, Y) + g(JX, \nabla_Z Y) \end{cases}$$

Además, por dato tenemos que J es paralelo con respecto a la conexión de Levi-Civita, esto es,

$$\nabla_X JY = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y = J\nabla_X Y,$$

y como ∇ es libre de torsión, tenemos la siguiente relación

$$X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) = \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X).$$

Luego, por la fórmula intrínseca para el diferencial exterior, se concluye que $d\omega = 0$, es decir, g es de Kähler. \square

Ejemplo 20. Toda superficie de Riemann es una variedad de Kähler. En efecto, en la proposición 2.6 hemos visto que toda superficie de Riemann es una variedad riemanniana orientable de dimensión 2. Entonces, cualquier métrica compatible con la estructura compleja en Σ , se tiene que $d\omega$ es una 3-forma y por lo tanto $d\omega = 0$. Así, toda métrica J -compatible en Σ es de Kähler.

Sea (M, g) una variedad de Kähler, $J : TM \rightarrow TM$ una estructura compleja inducida y ∇ la conexión de Levi-Civita en TM . La conexión se puede ver como una aplicación $\nabla : TM \rightarrow \Omega^1(TM)$ \mathbb{R} -lineal, que satisface la regla de Leibniz y es compatible con la métrica.

Podemos extender ∇ de manera \mathbb{C} -bilineal $\widehat{\nabla} : TM^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^1(TM^{\mathbb{C}})$. Dado que g es de Kähler se tiene que $\widehat{\nabla}$ es paralelo con J , esto es, $\widehat{\nabla}$ y J conmutan, y por tanto $\widehat{\nabla}$ preserva los autoespacios $T^{1,0}M$ y $T^{0,1}M$ de J . En particular, podemos restringir $\widehat{\nabla}|_{T^{1,0}M} : T^{1,0}M \rightarrow \Omega^1(T^{1,0}M)$. Es obvio que $\widehat{\nabla}$ es una conexión en $T^{1,0}M$.

Ahora, considerando el isomorfismo $TM \simeq T^{1,0}M$ dado por

$$Z \longmapsto Z^{1,0} = \frac{1}{2}(Z - iJZ).$$

Además, como $\mathbf{h}(\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot) - i\omega(\cdot, \cdot)$ es J -sesquilineal; esto es,

$$\mathbf{h}(JX, Y) = i\mathbf{h}(X, Y) \quad \text{y} \quad \mathbf{h}(X, JY) = -i\mathbf{h}(X, Y).$$

Consecuentemente, tomando el isomorfismo, se puede definir un producto hermitiano $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$ en $T^{1,0}M$. Luego, como g es compatible con la conexión Levi-Civita y J es paralela con respecto a la misma conexión, tenemos que la conexión $\widehat{\nabla}$ es compatible con $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$. Abusando de la notación, de ahora en adelante denotaremos también por \mathbf{h} a la extensión del producto hermitiano.

El fibrado $T^{1,0}M$ también admite una estructura de fibrado holomorfo (ver [8] ejemplo 3.5) y por lo tanto posee una estructura holomorfa. De esto, se puede estudiar la conexión de Chern en $(T^{1,0}M, \mathbf{h})$.

Proposición 2.35. Sea $Z^{1,0} = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$ una sección local de $T^{1,0}M$, decimos que $Z^{1,0}$ es holomorfa si y solamente si $[Z, JW] = J[Z, W]$ para todo $W \in TM$.

Demostración. Ver [8] (Lema 5.28). □

Proposición 2.36. La conexión $\widehat{\nabla} : T^{1,0}M \rightarrow \Omega^1(T^{1,0}M)$ inducida por la conexión de Levi-Civita en TM coincide con la conexión de Chern de $(T^{1,0}M, \mathbf{h})$.

Demostración. Como $\widehat{\nabla}$ es compatible con \mathbf{h} , solo falta verificar que

$$\widehat{\nabla}^{0,1} : T^{1,0} \rightarrow \Omega^{0,1}(T^{1,0}M)$$

coincide con la estructura holomorfa $\bar{\partial}$ de $T^{1,0}M$, o lo que es equivalente a demostrar que $\widehat{\nabla}^{0,1}Z^{1,0} = 0$ si y solamente si $Z^{1,0}$ es una sección holomorfa de $T^{1,0}M$. Como la conexión de Levi-Civita es libre de torsión, tenemos que para todo $W \in TM$, se cumple

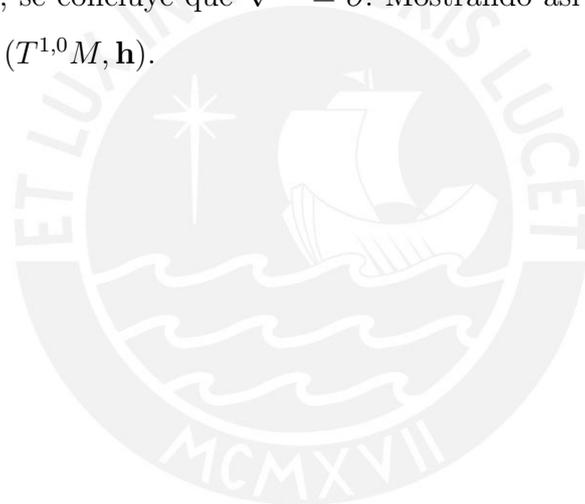
$$\begin{aligned} [Z, JW] &= J[Z, W] \\ \nabla_Z JW - \nabla_{JW} Z &= J(\nabla_Z W - \nabla_W Z) \\ (\nabla_Z J)W + J\nabla_Z W - \nabla_{JW} Z &= J\nabla_Z W - J\nabla_W Z \\ \nabla_{JW} Z &= J\nabla_W Z. \end{aligned}$$

Entonces, de la proposición anterior decimos que la sección $Z^{1,0}$ es holomorfa si, y solo si $\nabla_{JW} Z = J\nabla_W Z$ para todo $W \in TM$.

Observamos que, $\widehat{\nabla}^{0,1}Z^{1,0} = 0$ si y solamente si $\widehat{\nabla}_{W^{0,1}}Z^{1,0} = 0$ para todo $W^{1,0} \in T^{1,0}M$. En efecto, sea $Z^{1,0} = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$ y $W^{0,1} = \frac{1}{2}(W + iJW)$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{W^{0,1}}Z^{1,0} &= \widehat{\nabla}_{\frac{1}{2}(W+iJW)}\left(\frac{1}{2}(Z - iJZ)\right) \\
&= \frac{1}{4}[\nabla_W Z + \nabla_{JW}JZ + i(\nabla_{JW}Z - \nabla_WJZ)] \\
&= \frac{1}{4}[\nabla_W Z + (\nabla_WJ)Z + J\nabla_{JW}Z + i(\nabla_{JW}Z - (\nabla_WJ)Z - J\nabla_WZ)] \\
&= \frac{1}{4}[\nabla_W Z + J\nabla_{JW}Z + i(\nabla_{JW}Z - J\nabla_WZ)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{\nabla}_{W^{0,1}}Z^{1,0} = 0$ para todo $W^{0,1} \in T^{0,1}M$ si, y solamente si se cumple $\nabla_{JW}Z = J\nabla_WZ$ para todo $W \in TM$, es decir, si y solo si $Z^{1,0}$ es una sección holomorfa de $T^{1,0}M$. Finalmente, se concluye que $\widehat{\nabla}^{0,1} = \bar{\partial}$. Mostrando así que $\widehat{\nabla}$ coincide con la conexión de Chern de $(T^{1,0}M, \mathbf{h})$. \square



Capítulo 3

Representación tipo Weierstrass en variedades riemannianas

3.1. Aplicación armónica desde superficies de Riemann

En esta sección se presenta la aplicación armónica desde una superficie de Riemann a una variedad riemanniana. Tomando como referencias principales a [7] y [12].

Del capítulo anterior se tiene que una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión 1. Entonces, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1. Una métrica riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ en una superficie de Riemann Σ es llamada *conforme o isotérmica*, si para un sistema de coordenadas $z = u + iv$ de Σ , localmente se escribe como

$$g = \lambda^2(z) dz \otimes d\bar{z},$$

para alguna función $\lambda(z)$ positiva.

Para el sistema de coordenadas $z(p) = u(p) + iv(p)$ de Σ , tenemos las siguientes 1-formas

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) &= 1 = d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ dz \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) &= 0 = d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

De este último resultado, la definición 3.1 es equivalente a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle &= \lambda^2(z). \end{aligned}$$

Expresado en sus coordenadas reales,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \lambda^2(z), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Definición 3.2. Sea Σ una superficie de Riemann, M una variedad riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$. Una aplicación $f : \Sigma \rightarrow M$ de clase C^1 es llamada conforme si

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle_M &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_M, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_M &= 0. \end{aligned}$$

Proposición 3.3. Sea Σ una superficie de Riemann con una métrica conforme g . Entonces el operador de *Laplace-Beltrami* está dado por

$$\Delta = \frac{4}{\lambda^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Demostración. Tomando un sistema de coordenadas isotérmicas $z = u + iv$ en $p \in \Sigma$, y $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ la base asociada a la coordenada isotérmica. Por la definición 1.23 del capítulo 1, se tiene que el operador de Laplace-Beltrami está dado por

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{g} g^{21} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{g} g^{12} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{g} g^{22} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right].$$

Como g es una métrica conforme, se tiene

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{21} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0 \text{ y} \\ \lambda^2(z) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = g_{11} = g_{22}, \end{aligned}$$

luego,

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2(z)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) = \frac{4}{\lambda^2(z)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \right].$$

Por lo tanto, el operador de Laplace-Beltrami queda determinado por

$$\Delta = \frac{4}{\lambda^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

□

Sea Σ una superficie de Riemann con una métrica conforme $\lambda^2(z)$, M una variedad riemanniana con tensor métrico (g_{ij}) y $f : \Sigma \rightarrow M$ una aplicación C^∞ . Entonces, para un sistema de coordenadas locales (φ, U) de M tal que $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$, el campo de tensiones de f descrito en la definición 1.22. está dado por

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^n \left[\Delta f_i + \frac{4}{\lambda^2(z)} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(f(z)) \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ son los campos coordenados asociados al sistema de coordenadas de M .

Definición 3.4. Sea $f : \Sigma \rightarrow M$ una aplicación C^∞ , con Σ una superficie de Riemann y M una variedad riemanniana de dimensión n . Decimos que f es una aplicación armónica si, y solo si

$$\Delta f_i + \frac{4}{\lambda^2(z)} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(f(z)) \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

3.2. Representación tipo Weierstrass en variedades riemannianas

En esta sección se muestra una representación tipo Weierstrass para una superficie de Riemann, simplemente conexa e inmersa en una variedad Riemanniana. Para esta sección tomamos como referencia principal a [12].

Sea (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional, Σ una superficie de Riemann y $f : \Sigma \rightarrow M$ una aplicación C^∞ . Sea $f^{-1}TM$ el fibrado inducido que posee una métrica y una conexión compatible, inducidas por la métrica riemanniana y la conexión de Levi-Civita de M , respectivamente. Finalmente, sea $\mathbb{E} = f^{-1}TM \otimes \mathbb{C}$ el fibrado complejo sobre Σ . La métrica riemanniana g se extiende a \mathbb{E} de dos maneras:

i. como una forma bilineal compleja $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$,

ii. como una métrica hermitiana $\mathbf{h}^{\mathbb{C}} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$,

donde estas dos extensiones se relacionan por

$$\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(V, W) = (V, \overline{W}).$$

Por otro lado, la conexión pull-back se extiende a una conexión compleja en \mathbb{E} , que es H -compatible con respecto a la métrica $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.5. Sea $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow \Sigma$ un fibrado vectorial complejo con una métrica hermitiana y $\widehat{\nabla}$ es una H -conexión en \mathbb{E} . Entonces, existe una única estructura holomorfa en \mathbb{E} tal que si ϕ una sección de \mathbb{E} , es holomorfa si y solamente si $\nabla^{0,1}\phi = 0$.

Demostración. Ver [10]. □

Del teorema anterior y la proposición 2.36. del capítulo 2, se puede afirmar que, una sección $\phi \in \Gamma(\mathbb{E})$ es holomorfa si, y solo si

$$\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi = 0,$$

donde $\widehat{\nabla}$ es la conexión pull-back extendida.

Proposición 3.6. Para una sección $\phi \in \Gamma(\mathbb{E})$, dada por

$$\phi(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(p)}{\partial u} - i \frac{\partial f(p)}{\partial v} \right),$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_p = df_p \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_p = df_p \left(\frac{\partial}{\partial v} \right),$$

se cumple las siguientes propiedades:

i. f es una inmersión si, y solo si $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(\phi, \phi) \neq 0$,

ii. si f es una inmersión, entonces f es conforme si, y solamente si $(\phi, \phi) = 0$.

Demostración. Para $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ una base de $T_p \Sigma$,

i. tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(\phi, \phi) &= \mathbf{h}^{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una inmersión si, y solo si $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}(\phi, \phi) \neq 0$.

ii. Notemos que

$$\begin{aligned}(\phi, \phi) &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - ig\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) - ig\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2 - 2ig\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right),\end{aligned}$$

luego, $(\phi, \phi) = 0$ si y solo si $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2$ y $g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$; es decir, f es conforme. □

Sea $f : \Sigma \rightarrow M$ una inmersión conforme y $z = u + iv$ un sistema de coordenada conforme de Σ . La métrica inducida está dada por

$$ds^2 = \lambda^2(u, v) (du^2 + dv^2) = \lambda^2(z) dzd\bar{z}.$$

Por otro lado, sea (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas locales en un abierto U de M tal que $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$. Entonces en un abierto $\Omega \subset \Sigma$, la sección $\phi \in \Gamma(\mathbb{E})$ se escribe

$$\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

para algunas funciones $\phi_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}$ los campos coordenados asociados.

Con respecto a esta última descomposición de ϕ , el campo de tensiones de f se expresa de la siguiente manera

$$\tau(f) = 4\lambda^{-2}(z) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi_i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(f(z)) \bar{\phi}_j \phi_k \right] \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel de M .

Tomando estos resultados, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.7. Para la sección $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right)$, se cumple

$$\tau(f) = 4\lambda^{-2}(z) \left(\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi \right).$$

Demostración. Para $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tau(f) = 4\lambda^{-2}(z) \left(\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi \right)$. □

De la proposición 3.7 se puede afirmar que, ϕ es holomorfa si, y solo si

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Entonces decimos que $f : \Sigma \rightarrow M$ es armónica si, y solamente si ϕ es una sección holomorfa en \mathbb{E} .

Desde que una aplicación conforme de una superficie a una variedad Riemanniana es armónica si, y solo si es una inmersión mínima (ver [3]), se puede concluir que una inmersión conforme es mínima si, y solamente si ϕ es una sección holomorfa en \mathbb{E} .

Finalmente, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 3.8. (*Representación tipo Weierstrass en variedades Riemannianas*). Sean (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional y (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas locales de M . Sean $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, soluciones de la ecuación 3.1, para $i = 1, \dots, n$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Entonces la aplicación f

$$f_i(u, v) = 2\text{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_i dz \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

con $z_0 \in \Omega$, está bien definida y esta define una inmersión mínima conforme si, y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:

$$i. \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \bar{\phi}_k \neq 0$$

$$ii. \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0.$$

Demostración. Para demostrar que f está bien definida, se debe mostrar que la integral de ϕ_i sobre cualquier curva cerrada es igual a 0. En efecto, sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y $\partial D = \gamma$ una curva cerrada, entonces para $z = u + iv$, se tiene

$$\oint_{\gamma} \phi_i dz = \oint_{\gamma} Re(\phi_i) du - Im(\phi_i) dv + i \oint_{\gamma} Re(\phi_i) dv + Im(\phi_i) du,$$

luego,

$$Re \oint_{\gamma} \phi_i dz = \int_{\gamma} Re(\phi_i) du - Im(\phi_i) dv.$$

Entonces por el teorema de Green, tenemos que

$$Re \oint_{\gamma} \phi_i dz = - \int \int_D \left(\frac{\partial}{\partial v} Re(\phi_i) + \frac{\partial}{\partial u} Im(\phi_i) \right) dudv.$$

Por otro lado, la ecuación 3.1 se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j \neq k} \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

como $\bar{\phi}_j \phi_k + \bar{\phi}_k \phi_j = 2Re(\bar{\phi}_j \phi_k)$, entonces

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j>k} \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \text{ } i = 1, \dots, n.$$

De esto se concluye que $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$, además,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v} \right),$$

consecuentemente,

$$\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v} = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$Re \oint_{\gamma} \phi_i dz = 0;$$

es decir, la aplicación f está bien definida.

Finalmente, por la proposición 3.6 es inmediato que f es una inmersión mínima conforme. \square

Capítulo 4

Representación tipo Weierstrass en grupos de Lie

En este capítulo, se estudiará las aplicaciones $f : \Sigma \longrightarrow \mathbf{G}$, donde la variedad ambiente \mathbf{G} es un grupo de Lie de dimensión n , con una métrica invariante a izquierda g . Seguidamente, se presentan ejemplos de representación tipo Weierstrass en algunos grupos de Lie de dimensión 3.

Sean $\{E_i\}_{i=1,\dots,n}$ una base de los campos de vectores ortonormales invariantes a izquierda y $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1,\dots,n}$ los campos de vectores asociados a un sistema de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_n))$ de \mathbf{G} . Entonces en algún abierto $\Omega \subset \Sigma$ la sección

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} \in \Gamma(f^{-1}T\mathbf{G} \otimes \mathbb{C}),$$

se puede descomponer ya sea con respecto a los campos coordenados o con respecto a los campos invariantes a izquierda; esto es,

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \psi_j E_j,$$

donde $\phi_i, \psi_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Más aun, existe una matriz cambio de base $A = (A_{ij})$, con entradas

$$A_{ij} : f(\Omega) \cap U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.1}$$

Sean C_{ij}^k las constantes de estructuras del álgebra de Lie de \mathbf{G} , dadas por

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k.$$

Asimismo, por la fórmula de Koszul para la conexión Levi-Civita, se observa que

$$2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j := L_{ij}^k. \quad (4.2)$$

En efecto, como los campos invariantes a izquierda son ortonormales y por la fórmula de Koszul para la conexión, tenemos que

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= g\left(\sum_{\gamma=1}^n C_{ij}^\gamma E_\gamma, E_k\right) - g\left(\sum_{\gamma=1}^n C_{jk}^\gamma E_\gamma, E_i\right) + g\left(\sum_{\gamma=1}^n C_{ki}^\gamma E_\gamma, E_j\right) \\ &= C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \frac{L_{ij}^k}{2} E_k$, entonces

$$2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = 2g\left(\sum_{k=1}^n \frac{L_{ij}^k}{2} E_k, E_k\right) = L_{ij}^k.$$

Obteniendo así, la ecuación 4.2.

Como ϕ puede ser expresado con respecto a los campos invariantes a izquierda, tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left(\sum_{i=1}^n \psi_i E_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \nabla_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j \nabla_{E_j} E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} L_{ij}^k E_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk}^i \psi_k \bar{\psi}_j \right) E_i. \end{aligned}$$

Entonces $\phi \in \Gamma(f^{-1}T\mathbf{G} \otimes \mathbb{C})$ es holomorfa si, y solamente si

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk}^i \psi_k \bar{\psi}_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

De (4.3) y del teorema 3.8. se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.1. Sean $\psi_j : \Omega \longrightarrow \mathbf{G}$, $i = 1, \dots, n$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo tal que satisfacen las siguientes condiciones:

- i. $\sum_{i=1}^n \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$,
- ii. $\sum_{i=1}^n |\psi_i|^2 = 0$,
- iii. ψ_i son soluciones de (4.3).

Entonces la aplicación $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{G}$, definida por

$$f_i(u, v) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

es una inmersión mínima conforme, donde (A_{ij}) es la matriz cambio de base de los campos invariantes a izquierda.

Como en el caso de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 , se puede dar una descripción geométrica de algunas soluciones de la ecuación

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0, \quad (4.4)$$

cuando el grupo de Lie \mathbf{G} es tridimensional. En efecto, de la ecuación (4.4), se puede observar que

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -\psi_3^2.$$

De esta manera, podemos definir dos funciones complejas

$$G := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_1 - i\psi_2)}, \quad H := \sqrt{-\frac{1}{2}(\psi_1 + i\psi_2)}, \quad (4.5)$$

que satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} \psi_1 = G^2 - H^2, \\ \psi_2 = i(G^2 + H^2), \\ \psi_3 = 2GH. \end{cases} \quad (4.6)$$

Por otro lado, en términos de G y H , la métrica inducida está dada por

$$ds^2 = \lambda^2(u, v) (du^2 + dv^2) = 4(|G|^2 + |H|^2)^2 (du^2 + dv^2).$$

Ahora determinando la aplicación normal de Gauss N , términos de G y H , se tiene

$$N = \frac{1}{\left|\frac{H}{G}\right|^2 + 1} \left[2\operatorname{Re} \left(\frac{H}{G} \right) E_1 + 2\operatorname{Im} \left(\frac{H}{G} \right) E_2 + \left(\left| \frac{H}{G} \right|^2 - 1 \right) E_3 \right]$$

Sea $\pi : \mathbb{S}^2(1) - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el polo norte, entonces tenemos que

$$\pi \circ N = \left(\operatorname{Re} \left(\frac{H}{G} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{H}{G} \right) \right).$$

Si se identifica \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} y extendemos π a $\hat{\pi} : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, con $\hat{\pi}(0, 0, 1) = \infty$, se tiene

$$\pi \circ N = \frac{H}{G}.$$

Lo que significa que $\frac{H}{G}$ puede ser identificado con la aplicación normal de Gauss de f .

4.1. Superficies mínimas en \mathbb{R}^3

Sea $(\mathbb{R}^3, +)$ un grupo de Lie bajo la operación adición. Entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$ se tiene $L_x(y) = x + y$ la traslación a izquierda por x y el diferencial de la traslación a izquierda es

$$(dL_x)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para } x \in \mathbb{R}^3.$$

Tomando la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ para $T_0\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, encontramos una base ortonormal para los campos invariantes a izquierda, dados por

$$\begin{cases} E_1 = (dL_x)_0(e_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ E_2 = (dL_x)_0(e_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ E_3 = (dL_x)_0(e_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \quad (4.7)$$

Rápidamente se observa que,

$$[E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0,$$

y así, las constantes de estructuras son todas nulas. De esto, tenemos que los L_{ij}^k 's también son todos nulos.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión C^∞ , y considerando

$$\phi = \frac{\partial}{\partial z} f = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \psi_i E_i.$$

De los campos invariantes a izquierda dados en (4.7), se tiene

$$\phi_i = \sum_j^3 A_{ij} \psi_j,$$

donde $A = (A_{ij})$ es la matriz cambio de base, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la ecuación (4.3) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Entonces, tenemos que ϕ es una sección holomorfa si, y solo si las funciones complejas ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son holomorfas. Con este resultado, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.2. (Representación tipo Weierstrass en \mathbb{R}^3). Sean ψ_1, ψ_2 y ψ_3 funciones complejas definidas en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que satisfacen las siguientes condiciones

- i. $\sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$,
- ii. $\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0$,
- iii. ψ_i son holomorfas.

Entonces la aplicación $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(z) = 2 \left(\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{1j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{2j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{3j} \psi_j dz \right) \right)$$

es una inmersión mínima conforme.

El sistema (4.8) puede ser escrito en términos de las variables G y H definidas en (4.5). Esto es,

$$\begin{cases} G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0 \\ i \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \\ H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Se observa que, multiplicando por i a la primera y restando esta con la segunda ecuación, se obtiene

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0,$$

es decir, G es una función holomorfa. De manera similar, se obtiene que H es una función holomorfa. Por lo tanto, el teorema 4.2 puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema 4.3. Sean G y H funciones complejas definidas en un dominio abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que

- i.* G y H no son idénticamente nulas,
- ii.* G y H funciones holomorfas.

Entonces la aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida como

$$\begin{cases} f_1(z) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (G^2 - H^2) dz \right), \\ f_2(z) = 2\operatorname{Re} \left(i \int_{z_0}^z (G^2 + H^2) dz \right), \\ f_3(z) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (2GH) dz \right), \end{cases}$$

es una inmersión mínima conforme en \mathbb{R}_3 .

Por otro lado, como la aplicación normal de Gauss está dada por

$$g = \frac{H}{G},$$

donde H y G son funciones complejas definidas en (4.5). Entonces

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{-\frac{(\psi_1 + i\psi_2)}{(\psi_1 - i\psi_2)}} \\ &= \sqrt{-\frac{(\psi_1 + i\psi_2)(\psi_1 - i\psi_2)}{(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 - i\psi_2)}} \\ &= \sqrt{\frac{\psi_3^2}{(\psi_1 - i\psi_2)^2}} \\ &= \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}. \end{aligned}$$

Además, definiendo una función holomorfa h como

$$h = 2G^2 = \psi_1 - i\psi_2,$$

tenemos que $g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}$ es una función meromorfa. Luego, en términos de g y h , los ψ_i con $i = 1, 2, 3$ se expresan como

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{h}{2}(1 - g^2), \\ \psi_2 &= \frac{ih}{2}(1 + g^2), \\ \psi_3 &= gh.\end{aligned}$$

De este modo, la inmersión mínima conforme dada en el teorema 4.2, queda determinada como

$$f(z) = 2 \left(\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \frac{h}{2}(1 - g^2) dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \frac{ih}{2}(1 + g^2) dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z gh dz \right) \right),$$

donde esta es la representación tipo Weierstrass clásica para superficies mínimas en \mathbb{R}^3 (ver [11]).

Ahora, se muestra un ejemplo de superficie mínima usando las funciones holomorfas H y G .

Ejemplo 21. (Superficie de Scherk). Sea el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y tomando $\Omega = \mathbb{D}$, $H(z) = \sqrt{\frac{z^2}{1 - z^4}}$ y $G(z) = \sqrt{\frac{1}{1 - z^4}}$, tenemos que H y G son holomorfas en \mathbb{D} . Luego,

$$\begin{aligned}f_1(z) &= 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (G^2 - H^2) dz \right) \\ &= 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \left(\frac{1}{1 - z^4} - \frac{z^2}{1 - z^4} \right) dz \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \left(\frac{i}{z + i} - \frac{i}{z - i} \right) dz \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(i \log \left(\frac{z + i}{z - i} \right) \right).\end{aligned}$$

De manera similar, se obtiene

$$\begin{aligned}f_2(z) &= \operatorname{Re} \left(i \log \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) \right), \\ f_3(z) &= \operatorname{Re} \left(i \log \left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right) \right).\end{aligned}$$

4.2. Superficies mínimas en el grupo de Heisenberg

\mathcal{H}_3

Considerando el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 de dimensión 3, representado en $GL(\mathbb{R}, 3)$ por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Dotando a \mathcal{H}_3 con una métrica Riemanniana invariante a izquierda

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + \left(dx_3 + \frac{x_2}{2}dx_1 - \frac{x_1}{2}dx_2 \right)^2,$$

(\mathcal{H}_3, g) tiene su grupo de isometrías de dimensión 4, el cual es la máxima dimensión posible para una métrica de curvatura no constante en una variedad 3-dimensional.

Una base ortonormal de campos vectoriales invariantes a izquierda, con respecto a los campos coordenados, se expresan como

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Por otro lado, en el capítulo 1 se vio que los corchetes de Lie están dados por

$$[E_1, E_2] = E_3, [E_1, E_3] = 0 = [E_2, E_3].$$

Entonces las únicas constantes de estructura no nulas son:

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1.$$

En efecto, como $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k$, se tiene

$$\begin{cases} E_3 = [E_1, E_2] = C_{12}^1 E_1 + C_{12}^2 E_2 + C_{12}^3 E_3 \\ 0 = [E_1, E_3] = C_{13}^1 E_1 + C_{13}^2 E_2 + C_{13}^3 E_3 \\ 0 = [E_2, E_3] = C_{23}^1 E_1 + C_{23}^2 E_2 + C_{23}^3 E_3. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{cases} C_{12}^1 = C_{12}^2 = 0 \text{ y } C_{12}^3 = 1 \\ C_{13}^1 = C_{13}^2 = C_{13}^3 = 0 \\ C_{23}^1 = C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0 \\ C_{21}^1 = C_{21}^2 = 0 \text{ y } C_{21}^3 = -1. \end{cases}$$

Por otro lado, los L_{ij}^k 's no nulos dados por $L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j$, son

$$L_{32}^2 = L_{23}^1 = L_{12}^3 = 1 \text{ y } L_{21}^3 = L_{13}^2 = L_{31}^2 = -1.$$

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_3$ una inmersión C^∞ ; y considerando

$$\phi = \frac{\partial}{\partial z} f = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \psi_i E_i.$$

De los campos invariantes a izquierda dados en (4.10), se tiene

$$\phi_i = \sum_j^3 A_{ij} \psi_j$$

donde $A = (A_{ij})$ es la matriz cambio de base, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, de la ecuación (4.3), se tiene

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^i \psi_k \bar{\psi}_j = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para $i = 1$, y reemplazando los valores de L_{ij}^k 's determinados anteriormente, se obtiene

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} [\psi_3 \bar{\psi}_2 + \psi_2 \bar{\psi}_3] = \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\psi_3 \bar{\psi}_2) = 0.$$

De manera similar para $i = 2, 3$ obteniendo así el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\psi_3 \bar{\psi}_2) = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\psi_1 \bar{\psi}_3) = 0 \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - i \operatorname{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Finalmente, ϕ es holomorfa si y solamente si se cumple (4.11). Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.4. (Representación tipo Weierstrass en \mathcal{H}_3). Sean ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 funciones complejas definidas en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que satisfacen las siguientes condiciones

$$i. \sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0,$$

$$ii. \sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0,$$

iii. ψ_i son soluciones del sistema (4.11).

Entonces la aplicación $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_3$, definida por

$$f(z) = 2 \left(\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{1j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{2j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{3j} \psi_j dz \right) \right)$$

es una inmersión mínima conforme.

El sistema (4.11) puede ser escrito en términos de las variables G y H definidas en (4.5). Esto es, al reemplazar (4.6) en (4.11), se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \operatorname{Im}(G\bar{H})(|G|^2 - |H|^2) \\ i \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = \operatorname{Re}(G\bar{H})(|G|^2 - |H|^2) \\ H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2}(|G|^4 - |H|^4) \end{cases} \quad (4.12)$$

Se observa que, la tercera ecuación de (4.12) es una combinación de las dos primeras.

En efecto, multiplicando por i a la primera y tomando la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{cases} i \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = i \operatorname{Im}(G\bar{H})(|G|^2 - |H|^2) \\ i \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = \operatorname{Re}(G\bar{H})(|G|^2 - |H|^2) \end{cases}$$

Ahora si sumamos estas dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$2i \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 - |H|^2) \bar{H}. \quad (4.13)$$

De manera similar, restando i -veces la primera ecuación con la segunda de 4.12,

$$2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 - |H|^2) \bar{G}. \quad (4.14)$$

Finalmente, si multiplicamos por H y G a (4.13) y (4.14) respectivamente, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2iH \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 |H|^2 - |H|^4) \\ 2iG \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = (|G|^4 - |H|^2 |G|^2) \end{cases} \quad (4.15)$$

Es claro que si sumamos las ecuaciones de (4.15), se obtiene la tercera ecuación de (4.12). Por lo tanto, el teorema 4.4 se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 4.5. Sean G y H funciones complejas definidas en un dominio abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que

- i.* G y H no son idénticamente nulas,
- ii.* G y H son soluciones de (4.15).

Entonces la aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathcal{H}_3$, definida como

$$\begin{cases} f_1(z) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (G^2 - H^2) dz \right), \\ f_2(z) = 2\operatorname{Re} \left(i \int_{z_0}^z (G^2 + H^2) dz \right), \\ f_3(z) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \left(2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) + i \frac{f_1}{2}(G^2 + H^2) \right) dz \right), \end{cases} \quad (4.16)$$

es una inmersión mínima conforme en \mathcal{H}_3 .

A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 22. (Planos verticales). Sean G y H soluciones holomorfas de (4.15), esto es,

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Entonces de (4.15) se sabe que $|G| = |H|$, de esto, G y H difieren por un número unitario complejo, es decir,

$$H = e^{i\theta}G, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Reemplazando este resultado en (4.16), se tiene

$$\begin{cases} f_1(z) = 2\operatorname{Re} \left((1 - e^{2i\theta}) \int_{z_0}^z G^2 dz \right), \\ f_2(z) = 2\operatorname{Re} \left(i(e^{2i\theta} + 1) \int_{z_0}^z G^2 dz \right), \\ f_3(z) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \left(2e^{i\theta}G^2 - \frac{f_2}{2}(e^{2i\theta} - 1)G^2 + i \frac{f_1}{2}(e^{2i\theta} + 1)G^2 \right) dz \right), \end{cases}$$

De esto, es fácil verificar que $f_1 \cos(\theta) + f_2 \operatorname{sen}(\theta) = 0$ y, por tanto, la imagen de la inmersión está contenida en un plano paralelo al eje x_3 , el cual forma un ángulo θ con el plano $x_1 = 0$. Para este ejemplo la aplicación normal Gauss $g = H/G = e^{i\theta}$ tiene rango cero. Estas son las únicas superficies mínimas de \mathcal{H}_3 con la aplicación de rango cero.

Ejemplo 23. (Superficies tipo silla). Supongamos que las funciones complejas G y H son imaginarias puras y dependen de un solo parámetro, esto es,

$$G(u, v) = il(v) \text{ y } H(u, v) = ih(v), \quad (4.17)$$

donde l y h son funciones C^∞ definidas en un abierto de \mathbb{R} . Se observa que en el caso anterior se tenía que $|G| = |H|$, entonces si suponemos que $|G| \neq |H|$ y por (4.15) se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \bar{G} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \bar{H}. \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.17) en (4.18), se obtiene

$$l(v)l'(v) = h(v)h'(v),$$

es decir,

$$\frac{d}{dv} (l^2(v) - h^2(v)) = 0.$$

Luego, existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$l^2(v) - h^2(v) = 2a.$$

Ahora, considerando una función $q(v)$ tal que $l(v) = \sqrt{q+a}$ y $h(v) = \sqrt{q-a}$. La función q es determinada por la condición de que G y H satisfacen (4.15), esto es,

$$q'(v) = 4a\sqrt{q^2(v) - a^2}. \quad (4.19)$$

Entonces

$$\begin{cases} \phi_1 = G^2(u, v) - H^2(u, v) = (il(v))^2 - (ih(v))^2 = -2a, \\ \phi_2 = i(G^2(u, v) + H^2(u, v)) = (il(v))^2 + (ih(v))^2 = -2iq, \end{cases}$$

integrando, se obtiene

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2\operatorname{Re} \left(\int -2adz \right) = -4au, \\ f_2(u, v) = 2\operatorname{Re} \left(\int -2iqdz \right) = 4Q(v), \end{cases}$$

donde $Q(v)$ es una primitiva de $q(v)$.

Para determinar f_3 , se observa que al integrar (4.19), se obtiene

$$\sqrt{q^2(v) - a^2} = 4aQ(v).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) + i\frac{f_1}{2}(G^2 + H^2) \\ &= -2\sqrt{q^2(v) - a^2} + 4aQ(v) + 4iauaq(v) \\ &= -4aQ(v) + 4iauaq.\end{aligned}$$

Luego, la inmersión correspondiente $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_3$ está dada por

$$\begin{cases} f_1(u, v) = -4au \\ f_2(u, v) = 4Q(v) \\ f_3(u, v) = -8auQ(v). \end{cases}$$

En este caso, la imagen de la inmersión f está contenida en el gráfico de la función $x_3 = \frac{x_1x_2}{2}$; es decir, una superficie reglada tipo silla. Además, la aplicación normal de Gauss $g = H/G = h(v)/l(v)$ tiene rango 1, porque la aplicación depende solamente de un parámetro.

Ejemplo 24. (Helicoides). Considerando las funciones complejas G y H definidas por

$$G(u, v) = l(u)e^{-i\frac{v}{2}}, \quad H(u, v) = ih(u)e^{i\frac{v}{2}},$$

donde l y h son funciones $C^\infty(I)$, con I un abierto de \mathbb{R} . Como $|H| \neq |G|$ y de la ecuación (4.18), se obtiene

$$\frac{1}{2}l(u)l'(u) + \frac{1}{4}l^2(u) = \frac{1}{2}h(u)h'(u) - \frac{1}{4}h^2(u),$$

y así,

$$l^2(u) + (l^2(u))' = (h^2(u))' - h^2(u). \quad (4.20)$$

Entonces, existe una función $\rho(u)$ tal que las funciones

$$l(u) = \frac{\sqrt{\rho'(u) - \rho}}{2}, \quad h(u) = \frac{\sqrt{\rho'(u) + \rho}}{2},$$

son soluciones de (4.20). Usando las ecuaciones de (4.15), se obtiene que ρ es solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\rho'' - \rho = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2},$$

la cual es equivalente a

$$\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\phi_1 = (l(u)e^{-i\frac{v}{2}})^2 - (ih(u)e^{i\frac{v}{2}})^2 = \frac{\rho'}{2} \cos(v) + i\frac{\rho}{2} \operatorname{sen}(v)$$

$$\phi_2 = i \left((l(u)e^{-i\frac{v}{2}})^2 + (ih(u)e^{i\frac{v}{2}})^2 \right) = \frac{\rho'}{2} \operatorname{sen}(v) - i\frac{\rho}{2} \cos(v),$$

consecuentemente,

$$\phi_3 = i\frac{c}{2}.$$

Entonces, integrando obtenemos la inmersión mínima correspondiente $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{H}_3$, con coordenadas

$$\begin{cases} f_1(u, v) = \rho(u)\cos(v), \\ f_2(u, v) = \rho(u)\operatorname{sen}(v), \\ f_3(u, v) = cv + b, \quad b \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Si $c \neq 0$, se tiene que (4.21) representa una parametrización mínima de un helicoides, mientras que, si $c = 0$, (4.21) es la parametrización mínima de un plano horizontal $x_3 = b$.

Ejemplo 25. (Superficie tipo catenoide). En este ejemplo se presenta las funciones de Weierstrass G y H para la superficie tipo catenoide, descrita en [5].

Sea

$$h = \sqrt{\frac{g^2 + 4}{g^2 - 4}}, \quad g^2 > 4,$$

donde $g = g(u)$ es una función real la cual es una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$(g')^2 = \frac{g^2(g^4 - 16) - 4}{g^2 - 4}.$$

Entonces, las funciones

$$H = \frac{1}{2}e^{i(v+\frac{1}{2})} \sqrt{g' + 2g \left(1 + i\frac{l'}{2}\right)},$$

$$G = \frac{1}{2}e^{-i(v+\frac{1}{2})} \sqrt{g' - 2g \left(1 + i\frac{l'}{2}\right)},$$

son soluciones de (4.15) si $l' = \frac{2h}{g^2 + 4}$, donde $l = l(u)$ es una función real.

Luego,

$$\phi_1 = G^2 - H^2 = \frac{1}{2}[g'\cos(l + 2v) + 2ig\operatorname{sen}(l + 2v) - gl'\operatorname{sen}(l + 2v)]$$

$$\phi_2 = i(G^2 + H^2) = \frac{1}{2}[g'\operatorname{sen}(l + 2v) - 2ig\cos(l + 2v) + gl'\cos(l + 2v)]$$

Integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= g(u)\cos(l(u) + 2v), \\ f_2(u, v) &= g(u)\sen(l(u) + 2v). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 2GH - \frac{f_2}{2}\phi_1 + i\frac{f_1}{2}\phi_2 \\ &= \frac{2h}{g^2 + 4} + \frac{g^2h}{2(g^2 + 4)} \\ &= \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, integrando esta última ecuación, obtenemos las coordenadas de las inmersión mínima f ,

$$\begin{cases} f_1(u, v) = g(u)\cos(l(u) + 2v) \\ f_2(u, v) = g(u)\sen(l(u) + 2v) \\ f_3(u, v) = \tilde{h}, \end{cases}$$

donde \tilde{h} es una primitiva de h .

Después de un cambio de parámetros, f representa la parametrización de la catenoide de revolución alrededor del eje x_3 descrito en [5].

4.3. Superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sea \mathbb{H}^2 el plano hiperbólico, dado por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\},$$

dotado con la métrica Riemanniana de curvatura constante -1 ,

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}.$$

En el capítulo 1, vimos que \mathbb{H}^2 es un grupo de Lie y la métrica $g_{\mathbb{H}^2}$ es invariante a izquierda. Ahora, considerando la estructura producto

$$(x_1, x_2, x_3) * (a, b, c) = (ax_2 + x_1, x_2b, x_3 + b),$$

se tiene que, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es un grupo de Lie con la métrica invariante a izquierda dada por

$$g = g_{\mathbb{H}^2} + dx_3^2.$$

Con respecto a g , una base ortonormal de campos invariantes a izquierda es

$$E_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

En este caso, la matriz cambio de base definida en (4.1), es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$[E_1, E_2] = E_1(E_2) - E_2(E_1) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = -E_1.$$

De manera similar, se tiene que

$$[E_1, E_3] = 0 = [E_2, E_3].$$

Así, las constantes de estructura no nulas del álgebra de Lie de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, son

$$C_{21}^1 = C_{21}^2 = C_{21}^3 = 1 \text{ y } C_{21}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^3 = -1.$$

De este modo, los L_{ij}^k 's no nulos son

$$L_{11}^2 = 2 \text{ y } L_{12}^1 = -2.$$

Finalmente, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.6. (Representación tipo Weierstrass en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$). Sean ψ_1, ψ_2, ψ_3 funciones complejas definidas en un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que las siguientes condiciones son satisfechas

i. $\sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$

ii. $\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0$

iii. ψ_3 es holomorfa y ψ_1, ψ_2 son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \|\psi_1\|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Entonces, la aplicación $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(u, v) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{ij} \psi_j dz \right)$$

define una inmersión mínima conforme.

Demostración. De acuerdo a (4.3), la sección $\phi = \psi E_1 + \psi_2 E_2 + \psi_3 E_3$ es holomorfa si, y solamente si

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \|\psi_1\|^2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases}$$

Entonces, el teorema es un resultado directo del teorema 4.1. □

Se observa que, si

$$\tilde{f}_2 = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \psi_2 dz \right),$$

la inmersión mínima se escribe como

$$f(u, v) = \left(2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z e^{\tilde{f}_2} \psi_1 dz, e^{\tilde{f}_2}, 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right)$$

Ejemplo 26. Si ψ_2 es una función holomorfa, entonces por la segunda ecuación de de (4.22), se tiene que ψ_1 es idénticamente nula, y así, la inmersión correspondiente es una parametrización mínima del plano vertical $x_1 = c$ con c constante.

Ahora, si ψ_1 y ψ_2 no son holomorfas, entonces $\psi_1^2 + \psi_2^2$ es holomorfa. En efecto, si se multiplica por ψ_1 y ψ_2 a la primera y segunda ecuación de (4.22), respectivamente, se obtiene

$$\begin{cases} \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \|\psi_1\|^2 \psi_2 = 0 \\ \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \|\psi_1\|^2 \psi_2 = 0, \end{cases}$$

y así,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\psi_1^2 + \psi_2^2) = 0.$$

Entonces, $\psi_1^2 + \psi_2^2 = a$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Examinando los siguientes casos:

1. Si $a = 0$, y como $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$, entonces $\psi_3^2 = 0$, así, la inmersión mínima corresponde a la parametrización de planos horizontales $x_3 = \text{constante}$.

2. Si $a = -1$. En este caso, descomponiendo ψ_1 y ψ_2 en sus partes reales e imaginarias, se tiene

$$\begin{aligned}\psi_1(u, v) &= a_1(u, v) + ia_2(u, v) \\ \psi_2(u, v) &= a_3(u, v) + ia_4(u, v),\end{aligned}$$

y como $\psi_1^2 + \psi_2^2 = -1$, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 = -1 \\ a_1a_2 + a_3a_4 = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Escogiendo una solución de la segunda ecuación de (4.23)

$$\begin{cases} a_1(u, v) = \operatorname{sen}(2v)a_4(u, v), \\ a_3(u, v) = -\operatorname{sen}(2v)a_2(u, v), \end{cases}$$

y usando (4.22), se tiene que a_1 y a_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \right) = 4a_1a_2.$$

Una solución de esta ecuación es

$$a_1 = \frac{2(\cos(2u) + \operatorname{sen}(2v))\tan(2v)}{2 - \operatorname{sen}(2u - 2v) + \operatorname{sen}(2u + 2v)}, \quad a_2 = \frac{2\operatorname{sen}(2u)}{-2 + \operatorname{sen}(2u - 2v) - \operatorname{sen}(2u + 2v)}.$$

Finalmente, integrando se tiene que la inmersión f tiene coordenadas

$$\begin{cases} f_1(u, v) = \frac{2\operatorname{sen}(2u)\tan(v)}{\operatorname{sen}^2(2u)\tan^2(v) + (1 + \cos(2u)\tan^2(v))^2}, \\ f_2(u, v) = \frac{1 - \tan^2(v)}{2\operatorname{sen}^2(2u)\tan^2(v) + (1 + \cos(2u)\tan^2(v))^2}, \\ f_3(u, v) = 2u. \end{cases}$$

4.4. Superficies mínimas en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ dotado con la métrica de curvatura constante -1 dada por

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

\mathbb{H}^3 es un grupo de Lie de dimensión 3 representado en $GL(\mathbb{R}, 4)$ por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln(x_3) \\ 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ y } x_3 > 0.$$

En el capítulo 1, vimos que \mathbb{H}^3 tiene una estructura de grupo con la operación $*$, dado por

$$(x_1, x_2, x_3) * (a, b, c) = (x_3a + x_1, x_3b + x_2, x_3c), \quad (x_1, x_2, x_3), (a, b, c) \in \mathbb{H}^3.$$

Además, una base de campos invariantes a izquierda con respecto a la métrica está dada por

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ E_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ E_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

con

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = -E_1 \quad \text{y} \quad [E_2, E_3] = -E_2.$$

Ahora, como $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k$, se tiene

$$\begin{cases} 0 = [E_1, E_2] = C_{12}^1 E_1 + C_{12}^2 E_2 + C_{12}^3 E_3 \\ -E_1 = [E_1, E_3] = C_{13}^1 E_1 + C_{13}^2 E_2 + C_{13}^3 E_3 \\ -E_2 = [E_2, E_3] = C_{23}^1 E_1 + C_{23}^2 E_2 + C_{23}^3 E_3. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{cases} C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^3 = 0 \\ C_{13}^2 = C_{13}^3 = 0 \text{ y } C_{13}^1 = -1 \\ C_{23}^1 = C_{23}^3 = 0 \text{ y } C_{23}^2 = -1 \\ C_{21}^1 = C_{21}^2 = C_{21}^3 = 0 \\ C_{31}^2 = C_{31}^3 = 0 \text{ y } C_{31}^1 = 1 \\ C_{32}^1 = C_{32}^3 = 0 \text{ y } C_{32}^2 = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, hallando los L_{ij}^k 's dados por $L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j$,

$$\begin{aligned}
L_{11}^1 &= C_{11}^1 - C_{11}^1 + C_{11}^1 = 0 \\
L_{12}^1 &= C_{12}^1 - C_{21}^1 + C_{11}^2 = 0 \\
L_{13}^1 &= C_{13}^1 - C_{31}^1 + C_{11}^3 = -2 \\
L_{21}^1 &= C_{21}^1 - C_{11}^2 + C_{11}^2 = 0 \\
L_{22}^1 &= C_{22}^1 - C_{21}^2 + C_{12}^2 = 0 \\
L_{23}^1 &= C_{23}^1 - C_{31}^2 + C_{12}^3 = 0 \\
L_{31}^1 &= C_{31}^1 - C_{11}^3 + C_{13}^1 = 0 \\
L_{32}^1 &= C_{32}^1 - C_{21}^3 + C_{13}^2 = 0 \\
L_{33}^1 &= C_{33}^1 - C_{31}^3 + C_{13}^3 = 0
\end{aligned}$$

De manera similar, se hallan los L_{ij}^k restantes. Y así, tenemos que las constantes no nulas son

$$L_{23}^2 = L_{13}^1 = -2 \quad \text{y} \quad L_{11}^3 = L_{22}^3 = 2$$

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión C^∞ , considerando ϕ una sección del fibrado $f^{-1}T\mathbb{H}^3 \otimes \mathbb{C}$ como

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

De los campos invariantes a izquierda, se tiene

$$\phi_i = \sum_j^3 A_{ij} \psi_j,$$

donde $A = (A_{ij})$ es la matriz cambio de base, dada por

$$A = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Entonces, reemplazando los valores de los L_{ij}^k 's en la ecuación (4.3), se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_3 = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_2 \psi_3 = 0 \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Finalmente, la sección ϕ es holomorfa si, y solo si se cumple (4.25). Entonces, se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.7. (Representación tipo Weierstrass en \mathbb{H}^3). Sean ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 funciones complejas definidas en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que satisfacen las siguientes condiciones

i. $\sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$,

ii. $\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0$,

iii. ψ_i son soluciones del sistema (4.25).

Entonces la aplicación $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$, definida por

$$f(z) = 2 \left(\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_{j=1}^3 A_{1j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_{j=1}^3 A_{2j} \psi_j dz \right), \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_{j=1}^3 A_{3j} \psi_j dz \right) \right)$$

es una inmersión mínima conforme.

Se observa que, por la matriz (4.24) la tercera componente de la inmersión es

$$f_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_3 dz,$$

así, se obtiene

$$f_3 = e^{2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz}.$$

Entonces, en términos de los ψ_j , la inmersión queda expresada por

$$f(z) = \left(2 \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z f_3 \psi_1 dz \right), 2 \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z f_3 \psi_2 dz \right), f_3 \right).$$

Por otro lado, el sistema (4.25) puede ser escrito en términos de las funciones G y H definidas en (4.5), de la siguiente manera

$$\begin{cases} G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} - (\bar{G}H|G|^2 - G\bar{H}|H|^2) = 0 \\ G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + \bar{G}H|G|^2 + G\bar{H}|H|^2 = 0 \\ H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + |G|^4 + |H|^4 = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Además, se observa que la tercera ecuación del sistema (4.26) es una combinación de las dos primeras. En efecto, si sumamos y restamos ambas ecuaciones, y para $G, H \neq 0$ se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \bar{H}|H|^2 = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + \bar{G}|G|^2 = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Entonces, multiplicando por H y G (no nulos) a la primera y segunda ecuación, respectivamente, se obtiene

$$\begin{cases} H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + |H|^4 = 0, \\ G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + |G|^4 = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Claramente, al sumar las ecuaciones de (4.28) se logra obtener la tercera ecuación de (4.26). Así, el teorema 4.7 se escribe del siguiente modo.

Teorema 4.8. Sean G y H funciones complejas definidas en un dominio abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que

- i.* G y H no son idénticamente nulas,
- ii.* G y H son soluciones de (4.28).

Entonces la aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^3$, definida como

$$f(z) = \left(2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z f_3(G^2 - H^2) dz \right), 2\operatorname{Re} \left(i \int_{z_0}^z f_3(G^2 + H^2) dz \right), f_3 \right),$$

es una inmersión mínima conforme en \mathbb{H}^3 , donde $f_3 = e^{2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (2GH) dz}$.

Bibliografía

- [1] M.P. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projecto Euclides, (1988).
- [2] M.P. Do Carmo, *Notas de um Curso de Grupos de Lie*, Rio de Janeiro, (1974).
- [3] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, AMS regional conference series in mathematics 50, (1983).
- [4] C. B. F. Serrudo, *Introducción a las aplicaciones armónicas*. Pro Mathematica, 23(45-46), 113-125. (2009).
- [5] C. B. Figueroa, F. Mercuri, R.H.L. Pedroza, *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 177, 173-194, (1999).
- [6] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* 3rd edn, Amsterdam, North-Holland (1990).
- [7] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, UniversiText. Springer-Verlag, Berlin (2011).
- [8] L. Kaufman Sacchetto, *Fundamentos da Geometria Complexa: aspectos geométricos, topológicos e analíticos*. arXiv:1205.6028v1, (2012).
- [9] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry volume II*, Interscience Publishers, (1969).
- [10] J. L. Koszul and B. Malgrange, *Sur certaines fibrées complexes*, Arch. Math. 9, 102-109, (1958).
- [11] J. Lucas, M. Barbosa and A. G. Colares, *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , Lectures Notes in Math, 1195, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1986).

- [12] F. Mercuri, S. Montaldo and P. Piu, *A Weierstrass representation formula for minimal surfaces in \mathbb{H}_3 and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Mathematica Sinica, 22(6), 1603-1612, (2006).
- [13] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry* École Polytechnique, Paris (2007).
- [14] I. I. Onnis, *Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais*, Ph.D. Thesis, University of Campinas (2005). Available online at <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vts000364041>.
- [15] Dror Varolin. *Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2011).

