

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS



ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA EN UN PROCESO DE
MARKOV “ENFERMEDAD - MUERTE” APLICADO A
UNA BASE DE CLIENTES DE UNA AFP

TESIS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAGISTER EN
ESTADÍSTICA

Presentado por:

Genaro Requena Espinoza

Asesor: Dra. Elizabeth Doig Camino

Miembros del jurado:

Dr. Luis Valdivieso Serrano

Dr. Jorge Bazán Guzmán

Dra. Elizabeth Doig Camino

Lima, Febrero 2010

Dedicatoria

Dedico esta investigación en memoria de mi abuelita Romelia, por todo el amor y sabiduría que me entregó, y porque toda su vida fue ejemplo de lucha y sacrificio.

Dedico este éxito a mis padres Rubén y Carmen, porque me enseñaron a perseguir mis sueños y que nada es imposible. A mis hermanos Rubén, Eduardo y Carmencita porque hacen que mi vida este completa.

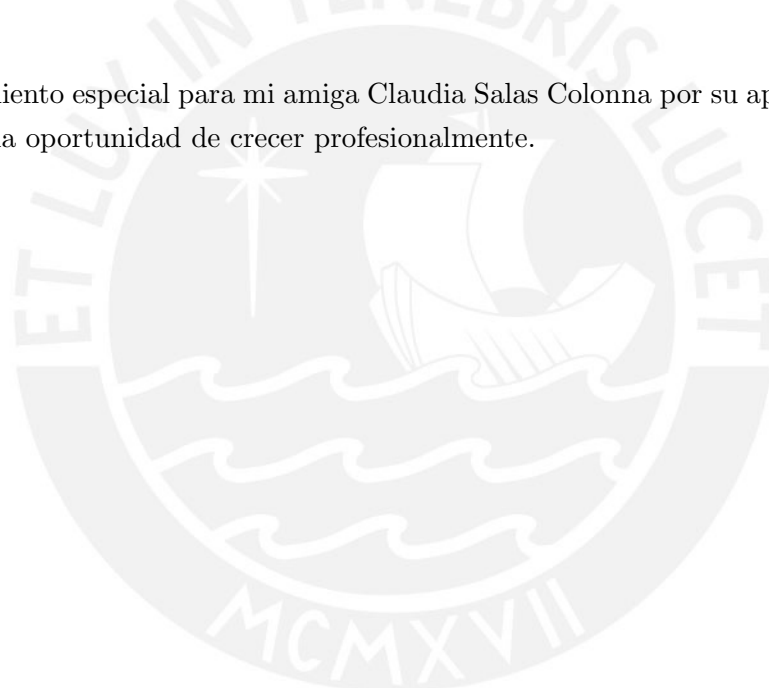


Agradecimientos

Le agradezco inmensamente a Dios por ser mi luz y guía en todas las etapas de mi vida y porque gracias a él descubrí que con amor se pueden lograr grandes cosas.

Mi agradecimiento eterno para mi asesora y amiga Elizabeth Doig Camino, por confiar en mi desde el comienzo, y por su invaluable aporte en el trabajo de investigación.

Un agradecimiento especial para mi amiga Claudia Salas Colonna por su apoyo incondicional y por darme la oportunidad de crecer profesionalmente.



Resumen de la Tesis

En el presente trabajo, se estudian las propiedades del método de estimación no paramétrica en un modelo de “Enfermedad - Muerte” de proceso de Markov. Este modelo posee tres estados 1, 2 y 3 correspondientes a “salud”, “enfermedad” y “muerte” respectivamente y solo admite las transiciones de $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ y $2 \rightarrow 3$, asimismo a este proceso se le denomina de Markov porque la probabilidad de transición de un estado a otro es independiente del tiempo de permanencia en el estado inicial.

Las funciones de tiempo de muerte y enfermedad, así como la función de riesgo de muerte dada la enfermedad son los parámetros del modelo “Enfermedad - Muerte”. Sin embargo la estimación de estas funciones del modelo no es directa pues existen dos formas de censura en los datos: los intervalos censurados y la pérdida de estados de transición; por lo que se utiliza un algoritmo de autoconsistencia para calcular estos estimadores.

Los intervalos censurados y la pérdida de estados de transición se generan porque los pacientes son evaluados periódicamente. En un intervalo censurado (t_1, t_2) se conoce que la enfermedad ocurrió entre un tiempo t_1 y t_2 pero no el momento exacto, mientras que para la pérdida de estados de transición se sabe que la enfermedad no ha ocurrido hasta la última medición pero se desconoce si la enfermedad ocurre entre esta última medición y el tiempo final del estudio.

En la aplicación del modelo “Enfermedad - Muerte” de proceso de Markov a una base de clientes de una administradora de fondos de pensiones (AFP) se consideran los intervalos censurados para los reclamos de los clientes, así como la pérdida de estados de transición para los traspasos. Modelar los tiempos de traspaso y de reclamo de los afiliados bajo un proceso de Markov “Enfermedad - Muerte” con intervalos censurados y pérdida de estados de transición intermedia, aumenta la precisión de los estimadores de las funciones de tiempo y riesgo.

Palabras-clave: Estimación no paramétrica, Modelo “Enfermedad - Muerte”, Intervalo censurado, Pérdida de estados de transición, Estimación autoconsistente.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos Preliminares	3
2.1. Análisis de Supervivencia	3
2.1.1. Función de Supervivencia y Función de Riesgo	3
2.1.2. Estimación no paramétrica de la función de supervivencia	4
2.1.3. Estimación no paramétrica de la función de riesgo	6
2.1.4. Datos en Intervalos Censurados	7
2.1.5. Pérdida de Estado de Transición	7
2.2. Proceso de Markov	8
2.2.1. Cadena de Markov	8
2.2.2. Matriz de Transición	9
2.2.3. Tasa de Intensidad	9
2.3. Estimación No Paramétrica, para datos en intervalos censurados	10
2.3.1. Estimación de Máxima Verosimilitud	10
2.3.2. Estimación Autoconsistente	13
2.4. Modelo de “Enfermedad - Muerte”	14
2.4.1. Modelos Multiestados	14
2.4.2. Modelo de “Enfermedad - Muerte”	14
3. Estimación No Paramétrica en un Proceso de Markov “Enfermedad-Muerte” con Intervalos Censurados y Pérdida de Estado de Transición Intermedia	16
3.1. Introducción	16
3.2. Descripción de los Datos	17
3.3. Función de Verosimilitud	19
3.4. Estimación de Máxima Verosimilitud	21
3.5. Algoritmo para la obtención de estimadores de Máxima Verosimilitud	22
4. Aplicación del Modelo “Enfermedad-Muerte” a una base de clientes de una AFP	26
4.1. Introducción	26
4.2. Descripción de los Datos	27
4.3. Cálculo de las Funciones de Tiempo y Riesgo	30
4.4. Análisis de los Resultados	33

4.5. Interpretación de las Gráficas	35
5. Conclusiones y Sugerencias Generales	39
5.1. Conclusiones en relación al modelo	39
5.2. Conclusiones en relación a la aplicación a la AFP	40
5.3. Sugerencias en relación al modelo	40
5.4. Sugerencias para continuar la investigación en la aplicación a la AFP	41
A. Resultados Teóricos	42
A.1. Definición de las Ecuaciones de Autoconsistencia	42
A.2. Demostración de la parte (a) del Teorema 2	43
A.3. Demostración de la parte (b) del Teorema 2	47
A.4. Algoritmo de autoconsistencia para el cálculo de EMV	51
A.5. Diagrama de Flujo para el Cálculo de F_{12} , F_{13} y Λ_{23}	58



Índice de figuras

2.1. Intervalo Censurado	7
2.2. Pérdida de Estado de Transición	7
3.1. Modelo de “Enfermedad - Muerte”	17
4.1. Modelo de “Enfermedad - Muerte” aplicado a una AFP	27
4.2. Tiempos de transición en el modelo	27
4.3. Afiliados tipo M y \tilde{N}	28
4.4. Afiliados tipo \tilde{K}	28
4.5. Afiliados tipo J	29
4.6. Afiliados tipo U	29
4.7. Afiliados tipo C	30
4.8. Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 1)	35
4.9. Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 1)	35
4.10. Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 2)	36
4.11. Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 2)	36
4.12. Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 3)	37
4.13. Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 3)	37

Índice de cuadros

4.1. Tipo de afiliado <i>premium</i> para el escenario 1	31
4.2. Tipo de afiliado <i>premium</i> para el escenario 2	31
4.3. Tipo de afiliado <i>premium</i> para el escenario 2	32
4.4. Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 1	33
4.5. Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 2	33
4.6. Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 3	34
4.7. Funciones del tiempo de trapaso $f_{13}(s)$ para cada escenario	38



Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo, se estudiarán las propiedades del método de estimación no paramétrico de un modelo de “enfermedad - muerte” de un proceso de Markov y se evaluará la teoría mediante una aplicación a una base de clientes de una Administradora de Fondo de Pensiones (AFP).

El modelo de “Enfermedad - Muerte” es muy usado en los estudios biomédicos para identificar el riesgo de un individuo, cuando se asumen riesgos de competencia entre la muerte y la enfermedad. El modelo posee tres estados, 1, 2 y 3 correspondientes a “salud”, “enfermedad” y “muerte” respectivamente, y donde no es posible la recuperación es decir la transición del estado 2 al estado 1. De manera particular, si la probabilidad de transición de un estado a otro es independiente del tiempo de permanencia en el estado inicial, al proceso se denomina de Markov.

El enfoque del modelo se centra en la estimación del tiempo de supervivencia hasta la ocurrencia de la muerte o desarrollo de la enfermedad, sin embargo la estimación del tiempo no es directa debido a que los pacientes son observados de forma periódica. El modelo de “Enfermedad - Muerte” considera dos formas de censura presente en este tipo de datos: la primera forma se debe a que los pacientes son observados en intervalos de tiempo, es decir no se puede determinar el tiempo exacto de ocurrencia del evento no fatal, especialmente si el evento es asintomático (ej. progreso del tumor) generándose intervalos censurados; la segunda forma se debe a que si el paciente no ha registrado la ocurrencia de un evento no fatal hasta la última medición, se desconocerá la ocurrencia del evento no fatal desde la última medición negativa hasta el final del estudio por muerte o censura, generándose pérdida de estados de transición.

Muchos investigadores han modelado en las últimas décadas diferentes tipos de censura, siendo Turnbull (1976) quien introduce la idea de autoconsistencia propuesta por Efron (1967) para la estimación no paramétrica de las funciones de distribución con datos en intervalos censurados, como una solución del algoritmo de maximización esperada. Frydman (1995) adapta inicialmente la idea de autoconsistencia para la estimación no paramétrica en modelos multiestados con datos en intervalos censurados, años más tarde Frydman (2008) extiende el algoritmo de estimación no paramétrico con datos en intervalos censurados para tratar la pérdida de estados de transición, bajo un modelo “Enfermedad - Muerte” de un proceso de Markov.

El interés del trabajo es la aplicación del modelo “enfermedad-muerte” de un proceso de Markov a una base de clientes de una administradora de fondos de pensiones (AFP) para estimar el tiempo de permanencia de un cliente en la administradora hasta que ocurra el reclamo o la pérdida por traspaso, así como conocer el riesgo de perder un cliente dado el reclamo. La metodología resulta de interés considerando que existen ambas formas de censura en los datos: primero cuando el cliente no presenta el reclamo en el momento en que ocurre el problema sino uno o varios meses después, se generan intervalos censurados y segundo cuando los clientes no presentan reclamos durante el periodo de estudio a pesar de existir el problema, se generan pérdidas de estados de transición.

El modelar los tiempos de reclamo y de traspaso de los afiliados bajo un proceso de Markov “enfermedad-muerte” que considera intervalos censurados y pérdida de estados de transición intermedia, permitirá una estimación más precisa de las funciones de tiempo y riesgo así como la reducción de la incertidumbre existente en este tipo de situaciones.

En el Capítulo 2, se introducen los conceptos previos para el desarrollo de la investigación, se estudia brevemente la teoría del análisis de supervivencia y de un proceso de Markov. También se describen los métodos de estimación no paramétrico para datos en intervalos censurados, así como el modelo de “Enfermedad-Muerte” y sus propiedades.

En el Capítulo 3, se plantea el problema de estudio, la justificación de la investigación y se define el modelo de “Enfermedad-Muerte” de un proceso de Markov. Se describen los datos y se define la función de verosimilitud, luego se desarrolla un algoritmo no paramétrico basado en las ecuaciones de autoconsistencia para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de las funciones de tiempo e intensidad del modelo.

En el Capítulo 4, se muestra la aplicación del modelo de “Enfermedad-Muerte” de un proceso de Markov a una base de clientes de una administradora de fondo de pensiones (AFP) con la finalidad de estimar las funciones de tiempo e intensidad de los reclamos. Se realizan los cálculos con ayuda del programa R, se presentan las soluciones de las ecuaciones de autoconsistencia y los estimadores no paramétricos de máxima verosimilitud. Así también se realiza un análisis e interpretación de dichos resultados.

Finalmente, en el Capítulo 5 se discuten algunas conclusiones obtenidas en este trabajo. Se analizan la ventajas y desventajas del método propuesto, se proponen algunas sugerencias para futuras investigaciones.

Es importante manifestar que es la primera vez que se realiza la aplicación de un modelo de “Enfermedad-Muerte” a una base de datos de una AFP.

En el anexo se presentan algunas demostraciones con más detalle (Apéndice A) y también el programa utilizado para la aplicación al conjuntos de datos reales.

Capítulo 2

Conceptos Preliminares

2.1. Análisis de Supervivencia

El análisis de supervivencia es una rama de la estadística que utiliza métodos cuantitativos para estudiar los tiempos de ocurrencia de un evento de interés, como puede ser la detección de una enfermedad, la falla de un equipo electrónico, la pérdida de un cliente, etc. En un comienzo estos métodos fueron utilizados en estudios de mortalidad lo cual explica el nombre de supervivencia, posteriormente su uso se extendió a diferentes ciencias, tanto naturales como sociales, con aplicaciones en campos tan diversos como la biología, ingeniería, economía, física, etc.

En el análisis de supervivencia, es necesario definir para cada observación el instante de origen, el instante en que ocurre el evento de interés y el tiempo transcurrido entre estos, lo que se conoce como tiempo de supervivencia. Sin embargo no siempre es posible definir estos instantes o conocer el tiempo exacto de supervivencia, produciéndose diferentes tipos de censura en las observaciones.

Para el análisis de supervivencia con observaciones censuradas se han desarrollado modelos y procedimientos especiales para tratar los diferentes tipos de censura. Estos modelos constan de una variable que mide el tiempo de supervivencia hasta la ocurrencia del evento de interés o la censura y de otra que indica el tipo de censura que se presenta, se trabaja además bajo el supuesto de que los tiempos de supervivencia y los de censura son independientes.

En general, para resumir los datos del análisis de supervivencia se tienen dos funciones básicas, la función de supervivencia y la función de riesgo.

2.1.1. Función de Supervivencia y Función de Riesgo

La función de supervivencia representa la probabilidad de que no haya ocurrido el evento de interés hasta un instante t , donde t puede tomar cualquier valor de la variable aleatoria no negativa T , asociada al tiempo de supervivencia. La función de supervivencia, $S(t)$, se define como la probabilidad de que la variable aleatoria T sea mayor o igual a un t ,

$$S(t) = P(T \geq t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

La función de supervivencia, $S(t)$, vale 1 al inicio y se aproxima a 0 a medida que el tiempo se acerca a infinito.

La función de riesgo representa la probabilidad instantánea de que ocurra el evento de interés en un instante t dado que no ha ocurrido hasta ese instante. La función de riesgo, $h(t)$, se define como la probabilidad de que la variable aleatoria T se encuentre entre t y $t + \delta t$, dado que T es mayor o igual que t ,

$$P(t \leq T < t + \delta t \mid T \geq t) \quad (2.2)$$

Matemáticamente la tasa de riesgo será el límite de la probabilidad de morir entre el t y $t + \delta t$ cuando δt tiende a cero dado que no ha ocurrido el evento de interés en t ,

$$h(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} P(t \leq T < t + \delta t \mid T \geq t) = f(t)/S(t) \quad (2.3)$$

donde $f(t)$ es la función de densidad de la variable aleatoria T y $S(t)$ es la función de supervivencia. Por esto bastará hallar la distribución de la variable aleatoria T , para poder caracterizar la tasa de riesgo. Por otro lado, cuando no se conoce la forma funcional de la variable aleatoria T es posible usar la función de riesgo acumulado, $H(t)$, a partir de una transformación de la función de supervivencia $S(t)$.

$$H(t) = -\ln S(t). \quad (2.4)$$

2.1.2. Estimación no paramétrica de la función de supervivencia

El análisis de los datos puede realizarse utilizando técnicas paramétricas o no paramétricas, sin embargo los métodos no paramétricos resultan una alternativa razonable si no se conoce con certeza el modelo paramétrico ya que no requieren información sobre la distribución de la variable T .

Cuando no hay censura en las observaciones, la estimación no paramétrica de la función de supervivencia $S(t)$, simplemente es la proporción de eventos de interés ocurridos en el instante t .

$$S(t) = \frac{\text{Número de eventos de interés observados hasta un instante } \geq t}{\text{Número total de observaciones}}$$

De igual forma, $S(t) = 1 - \hat{F}(t)$, donde $\hat{F}(t)$ es la función de distribución empírica. Esta función tiene forma de escalera en el que cada escalón es un instante t en que ocurre el evento y la altura del escalón es la probabilidad de ocurrencia del evento en un instante t .

Los métodos no paramétricos para estimar la función de supervivencia $S(t)$ cuando hay censura en las observaciones, se presentan continuación:

Estimación por tablas de vida

Este método se conoce también como de estimador actuarial, se comienza por dividir el periodo de observación en una serie de intervalos de tiempo, que pueden tener diferentes longitudes, y donde la cantidad de intervalos dependerá del número de individuos en el estudio .

Sea j el j -ésimo intervalo de m intervalos dados, que va desde t'_j hasta t'_{j+1} , con $j = 1, 2, \dots, m$, y sean d_j y c_j el número de eventos de interés ocurridos y el número de tiempos de supervivencia censurados, respectivamente, en este intervalo. Además n_j el número de individuos libres de la ocurrencia del evento y por lo tanto están en riesgo al inicio del j -ésimo intervalo. Bajo la asunción de que el proceso de censura es uniforme en todo el intervalo, se tiene que el número de individuos en riesgo durante el j -ésimo intervalo es $n'_j = n_j - c_j/2$. En el j -ésimo intervalo, la probabilidad de que ocurra el evento de interés puede ser estimada por d_j/n'_j , así tenemos que la probabilidad de supervivencia correspondiente es $(n'_j - d_j)/n'_j$.

Para estimar la probabilidad de que no ocurra un evento de interés hasta un tiempo t'_k donde $k = 1, 2, \dots, m$, es decir después del inicio del k -ésimo intervalo, se multiplican las probabilidades de que el individuo sobreviva en el k -ésimo intervalo por las probabilidades de supervivencia para cada intervalo anterior, así la función de supervivencia queda definida como:

$$S^*(t) = \prod_{j=1}^k ((n'_j - d_j)/n'_j)$$

La gráfica del estimador de la función de supervivencia por tablas de vida es de forma escalonada con valores constantes de la función en cada intervalo de tiempo.

Estimación por Kaplan-Meier

El estimador de Kaplan-Meier a diferencia del método de tablas de vida, calcula la probabilidad exacta de supervivencia cada vez que ocurre el evento de interés.

Dado un intervalo de tiempo que va desde $t_j - \delta t_j$ hasta t_j , donde δt_j es el intervalo infinitesimal de tiempo en el que ocurre el evento de interés. Se tiene que la probabilidad de ocurrencia del evento de interés en el intervalo de tiempo desde $t_j - \delta t_j$ hasta t_j , es d_j/n_j , donde d_j es el número de eventos de interés ocurridos y n_j el número de individuos en riesgo, en el tiempo t_j . Por lo que la probabilidad de supervivencia para ese intervalo es $(n_j - d_j)/n_j$. Dado que los eventos de interés ocurren de forma independiente unos de otros, se estima la función de supervivencia para un tiempo t , en el k -ésimo intervalo de tiempo construido como t_k hasta t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, r$, donde t_{r+1} se define como ∞ , es decir la probabilidad de supervivencia hasta t_k . La función de supervivencia estimada de Kaplan-Meier esta dada por:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^k ((n_j - d_j)/n_j)$$

para $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, r$, con $\hat{S}(t) = 1$ para $t < t_1$, y donde t_{r+1} tiende a ∞ .

La gráfica del estimador de la función de supervivencia por el método de Kaplan-Meier también es de forma escalonada, en la cual las probabilidades de supervivencia estimada son constantes para los tiempos inmediatos de ocurrencia del evento y decrecientes para poste-

riores tiempos de ocurrencia.

2.1.3. Estimación no paramétrica de la función de riesgo

Los datos de supervivencia pueden también ser resumidos a través de la función de riesgo $h(t)$, la cual muestra la dependencia del riesgo instantáneo de ocurrencia del evento de interés en un instante t . Existen diferentes maneras de estimar la función de riesgo, entre las más utilizadas se tienen las estimaciones por tablas de vida y por Kaplan-Meier:

Estimación por tablas de vida

Suponga que los tiempos de supervivencia observados han sido agrupados en una serie de m intervalos, como en la construcción del estimador actuarial de la función de supervivencia. Un estimador apropiado del riesgo promedio por unidad de tiempo para cada intervalo es el número de eventos observados en ese intervalo dividido por el tiempo promedio de supervivencia del intervalo. Esta última cantidad es el número promedio de individuos en riesgo en el intervalo, multiplicado por la longitud del intervalo.

Sea d_j , $j = 1, 2, \dots, m$ el número de eventos en el j -ésimo intervalo de tiempo y suponga que n'_j es el número promedio de individuos en riesgo en ese intervalo, asumiendo que la tasa de riesgo es constante durante el j -ésimo intervalo, el promedio del tiempo de supervivencia en ese intervalo es $(n'_j - d_j/2)t_j$, donde t_j es la longitud del j -ésimo intervalo de tiempo. La función de riesgo estimada por el método actuarial en el j -ésimo intervalo de tiempo está dado por:

$$h^*(t) = d_j / [(n'_j - d_j/2)t_j]$$

para $t'_j \leq t_j \leq t'_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Estimación por Kaplan-Meier

Una forma natural de estimar la función de riesgo para datos de supervivencia sin agruparlos es tomar la razón entre el número de eventos ocurridos en un tiempo y el número de individuos en riesgo en este tiempo. Bajo la asunción que la función de riesgo es constante entre tiempos sucesivos, el riesgo por unidad de tiempo puede ser hallado dividiendo por el intervalo de tiempo. Entonces si ocurren d_j eventos en el j -ésimo intervalo de tiempo, t_j , $j = 1, 2, \dots, r$ y n_j en riesgo en el tiempo t_j , la función de riesgo en el intervalo de t_j a t_{j+1} puede ser estimado por

$$h(t) = d_j / [n_j t_j]$$

para $t'_j \leq t_j \leq t'_{j+1}$, donde $t_j = t'_{j+1} - t'_j$. No es posible usar la ecuación para estimar el riesgo en el intervalo que comienza al final de evento ya que es de forma abierta. La ecuación

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS PRELIMINARES

se denomina de tipo Kaplan-Meier porque de ella se deriva el estimador Kaplan-Meier de la función de supervivencia.

2.1.4. Datos en Intervalos Censurados

La censura se define como la ocurrencia de un evento de interés “Y” en un tiempo en que el sujeto no está en observación, de manera particular cuando solo se conoce que un evento ocurrió entre los tiempos t_1 y t_2 pero no el momento exacto, se dice que el intervalo (t_1, t_2) es censurado.

El tiempo de supervivencia de un individuo pertenece a un intervalo censurado si se sabe que por lo menos es un valor t_1 pero no es mayor que un valor t_2 . Los intervalos censurados se generan cuando los individuos de estudio son evaluados de forma periódica en puntos fijos de tiempo a lo largo de un periodo de seguimiento (ver figura 2.1).

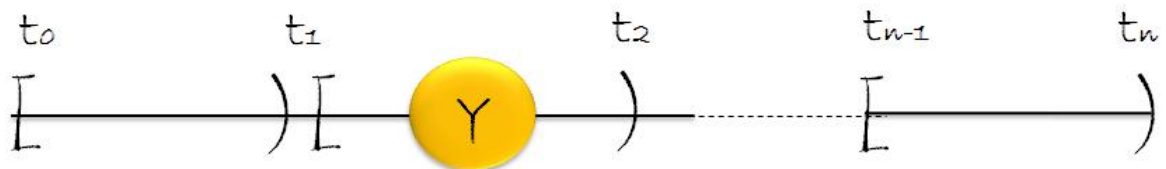


Figura 2.1: Intervalo Censurado

Los intervalos censurados son muy comunes en situaciones en que los individuos son observados periódicamente para detectar la ocurrencia de un evento, un individuo puede estar libre de la ocurrencia del evento en el tiempo t_1 pero luego haber ocurrido el evento cuando se observa el tiempo t_2 .

2.1.5. Pérdida de Estado de Transición

La pérdida de estado de transición se define como la pérdida de un evento de interés “Y” en un tiempo en que el sujeto no está en observación, es decir que se desconoce si el evento de interés ocurrió o no, hasta el final del estudio.

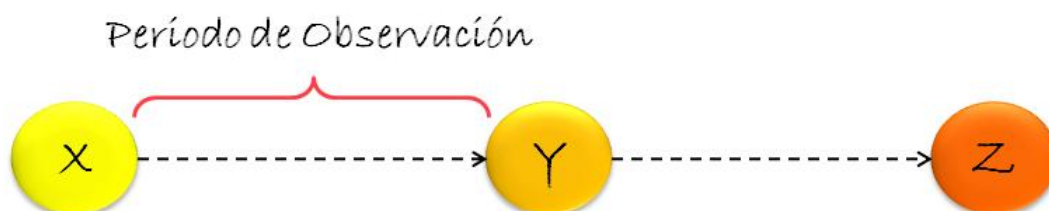


Figura 2.2: Pérdida de Estado de Transición

2.2. Proceso de Markov

Los procesos de Markov son procesos estocásticos útiles para estudiar el comportamiento de una variable en periodos sucesivos de tiempo cuando existe incertidumbre sobre el estado de la variable en determinados intervalos de tiempo.

La propiedad de Markov se cumple si en un proceso estocástico $X(t)$ con n “instantes” $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la probabilidad del estado “futuro” del proceso es independiente del estado “pasado”, dado su estado “presente”; esta se expresa como

$$P[X(t_n) \leq x_n / X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] = P[X(t_n) \leq x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \quad (2.5)$$

Las probabilidades condicionales $P[X(t_n) / X(t_{n-1})]$ se denominan probabilidades de transición del proceso. Las probabilidades de transición permiten describir la forma en que el proceso hace transiciones de un periodo al siguiente.

Los procesos de Markov discretos son conocidos como cadenas de Markov y tanto las cadenas finitas como las infinitas numerables, tienen interesantes aplicaciones.

2.2.1. Cadena de Markov

En bioestadística, un ejemplo común del uso de cadenas de Markov son los modelos de riesgo de competencia que estudia una o más causas de muerte para un grupo de individuos, en el que se usa un proceso de conteo para registrar el número total de muertes por cada causa; otra cadena de Markov importante en la investigación son los modelos de “Enfermedad - Muerte” de tres estados, donde el proceso de conteo consiste en registrar el número total de transiciones entre los estados.

Una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots cuyo rango se denomina espacio de estados, donde cada valor de X_n representa el estado del proceso en el instante n y la distribución de probabilidad condicional de X_n en estados pasados es una función de X_{n-1} por sí sola.

Las cadenas de Markov tienen la propiedad de que las transiciones entre los estados, sólo puede producirse entre estados vecinos, se llega al estado n desde el estado $n - 1$ ó de $n + 1$. Si en lugar de considerar una secuencia discreta $X_1, X_2, \dots, X_i..$ con i indexado al conjunto de números naturales, se consideran las variables aleatorias $X(t)$ con t que varía en un intervalo continuo del conjunto de números reales, se tendría lo que se conoce como una cadena en tiempo continuo.

La cadena de Markov se dice homogénea si la probabilidad de pasar de un estado i a otro j no depende del tiempo en el que se encuentra la cadena. Si para alguna pareja de estados y para algún tiempo n la propiedad antes mencionada no se cumple se dice que la cadena de Markov es no homogénea.

2.2.2. Matriz de Transición

Las probabilidades de transición de un proceso de Markov pueden ser ordenadas en una matriz de transición P que es una matriz estocástica de la forma.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1; \forall i$$

$$p_{ij} \geq 0; \forall ij$$

Cuando la probabilidad de transición de un estado i al estado j sucede en k pasos se denomina probabilidad de transición en k pasos, y se representa como $p_{i,j}^{(k)}$. Estas probabilidades son ordenadas en una matriz de transición de k pasos.

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & \cdots & p_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Además por teorema tenemos que si P es la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces la matriz de transición en k pasos es la k -ésima potencia de P .

$$P^{(k)} = P^k$$

2.2.3. Tasa de Intensidad

Cuando se requiere información sobre la progresión de un fenómeno, se realizan repetidas mediciones que son tomadas en diferentes instantes de tiempo, Diggle et al. (1994). Con esto se busca registrar el cambio de una respuesta de interés en el tiempo, que se conoce como la tasa de intensidad de transición, Bhat (1994), y sirve para identificar que factores se relacionan con el riesgo que un paciente o una unidad experimental transite a través de diferentes estados del proceso.

Es posible observar el patrón de transición de cada individuo evaluado a través de k estados previamente definidos bajo un proceso de Markov, con el interés de estimar las tasas de intensidad asociadas a los distintos estados del proceso. De manera formal, una tasa de intensidad para una transición de un estado i a un estado j se define como:

$$\alpha_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(X(t + \Delta t) = j | X(t) = i)}{\Delta t}$$

con $i, j = 1, \dots, k$ y $\alpha_{ij}(t) \geq 0$

donde $\alpha_{ij}(t)$ denota la probabilidad de un individuo que esta en el estado i justo antes del

tiempo t , haga una transición al estado j en un pequeño intervalo de tiempo $(t + \Delta t)$. La probabilidad de transición de un estado a otro puede ser estimado por uno menos el estimador de Kaplan-Meier. El estimador de Kaplan-Meier puede ser generalizado para una cadena de Markov arbitraria con un número finito de estados, Aalen et al. (2008).

Asumir la propiedad de Markov implica que las funciones de intensidad son funciones constantes en el tiempo, y por esto resulta apropiado llamarlas tasas de intensidad, Salazar et al. (2007).

2.3. Estimación No Paramétrica, para datos en intervalos censurados

La estimación no paramétrica de una variable aleatoria con intervalos censurados ha sido tratada por diferentes autores, siendo la contribución más importante la de Turnbull (1976), quien introduce la idea de autoconsistencia para la estimación de máxima verosimilitud de la función de supervivencia.

El estimador de la función de supervivencia para intervalos censurados, propuesto por Turnbull (1976), es una generalización del estimador de máxima verosimilitud, que puede ser derivado por un algoritmo de autoconsistencia. Actualmente existen técnicas de conteo de procesos para derivar estos resultados.

2.3.1. Estimación de Máxima Verosimilitud

Para una variable aleatoria X que sigue un proceso de Markov no homogéneo se tiene $\{X(t), t \geq 0, X(0) = 1\}$ con espacio de estados $\{i, j, k\}$, con función de distribución de tiempo F y función acumulada de intensidad de transición Λ . Se definen los conjuntos:

$$S = \{\text{tiempo que } X(t) \text{ permanece en el estado } i\}$$

$$V = \{\text{tiempo que } X(t) \text{ permanece en el estado } j\}$$

y $T = S + V$, donde S y V son variables dependientes porque la cadena no es homogénea. Se denota a la función de distribución de S como $F(s) = P(S \leq s)$, con $S \in A_m = [L_m, R_m]$ que es el intervalo de censura, y la función de supervivencia condicional de $V = T - S$ por $G_s(v) = P(V > v | S = s)$.

Sea v_s el máximo valor de V , tal que $G_s(v_s -) > 0$ y $G_s(v_s) = 0$. Entonces Λ_{jk} , la función acumulada de intensidad de transición del estado j al estado k , está definida en $(0, v_s]$ como

$$\Lambda_{jk}((s, v]) = - \int_{(0, v]} G_s(du) / G_s(u-)$$

y $G_s(v)$ es representada para todo $s \in (0, \bar{s}]$ como el producto integral de λ_j

$$G_s(v) = P_{(s, v+s]}(1 - d\Lambda_{jk}) = \prod_{s < u \leq v+s} [1 - \Lambda_{jk}(u)] \exp \{-\Lambda_{jk}^c((s, v + s])\} \quad (2.6)$$

donde Λ_{jk}^c es una parte continua de Λ_{jk} , denotada como

$$\Lambda_{jk}^c((s, v + s]) = \Lambda_{jk}((s, v + s]) - \sum_{s < u \leq v+s} \Lambda_{jk}(u) \quad (2.7)$$

Para la construcción de la función de verosimilitud, se definen tres tipos de datos según el comportamiento y censura de las observaciones, se tienen las observaciones J que se censuran en un tiempo S y que no ofrecen información del tiempo V , las observaciones M que realizan transición en un tiempo $S \in A_m$, de las cuales solo \tilde{N} realizan otra transición en un tiempo T .

La función de verosimilitud $L = L(F, \Lambda_{jk})$ será de la forma.

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^J P[S \geq s_j] \prod_{m=1}^{\tilde{N}} P[T = t_m, S \in A_m] \prod_{m=\tilde{N}+1}^M P[T > t_m, S \in A_m] \\ L &= \prod_{j=1}^J \{1 - F(s_j-)\} \prod_{m=1}^{\tilde{N}} \int_{L_m}^{R_m} P[T = t_m | S = s] dF(s) \prod_{m=\tilde{N}+1}^M \int_{L_m}^{R_m} P[T > t_m | S = s] dF(s) \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.6) y la propiedad multiplicativa del producto integral,

$$P[T > t_m | S = s] = P_{(s, R_m]}(1 - d\Lambda_{jk}) P_{(R_m, t_m]}(1 - d\Lambda_{jk})$$

$$P[T = t_m | S = s] = \Lambda_{jk}(\{t_m\}) P_{(s, t_m]}(1 - d\Lambda_{jk}) = \Lambda_{jk}(\{t_m\}) P_{(s, R_m]}(1 - d\Lambda_{jk}) P_{(R_m, t_m]}(1 - d\Lambda_{jk})$$

donde

$$\Lambda_{jk}(\{t_m\}) = P[V = t_m - s | V \geq t_m - s, S = s] = P[T = t_m | T \geq t_m]$$

esta última igualdad se deduce de la propiedad de Markov. Se sustituyen estas expresiones en la función de verosimilitud y además se define

$$B(F) = \prod_{j=1}^J \{1 - F(s_j-)\}$$

se tiene finalmente que

$$L = B(F) \prod_{m=1}^{\tilde{N}} \Lambda_{jk}(\{t_m\}) \prod_{m=1}^M \left[P_{G_m}(1 - d\Lambda_{jk}) \int_{A_m} P_{(s, R_m]}(1 - d\Lambda_{jk}) dF(s) \right]$$

donde

$$G_m = \begin{cases} (R_m, t_m) & \text{si } 1 \leq m \leq \tilde{N}, \\ (R_m, t_m] & \text{si } \tilde{N} < m \leq M. \end{cases}$$

De la función de verosimilitud, se tiene que Λ_{jk} que maximiza L posee una parte continua $\Lambda_{jk}^c \equiv 0$, $\Lambda_{jk}(t_m) > 0$ si $1 \leq m \leq \tilde{N}$ mientras que $\Lambda_{jk}(t_m) = 0$ si $\tilde{N} < m \leq M$. Por lo tanto $\lambda_n = \Lambda_{jk}(t_n^*)$ donde $T^* = \{t_n^*, 1 \leq n \leq N\}$ es el conjunto de tiempos distintos de falla y d_n la multiplicidad de t_n^* , tal que $\tilde{N} = \sum_{n=1}^N d_n$, se tiene que

$$L = B(F) \prod_{n=1}^N \lambda_n^{d_n} \prod_{m=1}^M \left\{ \prod_{G_m} (1 - \lambda_n) \int_{A_m} \prod_{(s, R_m]} (1 - \lambda_n) dF(s) \right\}$$

Para la obtención del cálculo de $\prod_{G_m} (1 - \lambda_n)$ se considera a E como un intervalo arbitrario y a $I\{A\}$ la función indicadora del evento A , obteniéndose

$$\prod_E (1 - \lambda_n) \equiv \prod_{n=1}^N (1 - \lambda_n I_{\{t_n^* \in E\}})$$

Además es necesario definir una partición en A_m para evaluar

$$I_{A_m} \equiv \int_{L_m} \prod_{(s, R_m]} (1 - \lambda_n) dF(s)$$

Sea τ_k^m el k -ésimo tiempo de falla en el intervalo $(L_m, R_m]$ y sea $k(m)$ el número de distintos tiempos de falla en $(L_m, R_m]$

$$L_m < \tau_1^m < \tau_2^m < \dots < \tau_{k(m)}^m \leq R_m$$

Por conveniencia de notación $\tau_0^m = L_m$. Entonces

$$\prod_{(s, R_m]} (1 - \lambda_n) = \begin{cases} \prod_{[\tau_k^m, R_m]} (1 - \lambda_n) \equiv a(k, m), & \text{si } s \in [\tau_{k-1}^m, \tau_k^m), 1 \leq k \leq k(m), \\ 1, & \text{si } s \in [\tau_{k(m)}^m, R_m] \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} I_{A_m} &= \sum_{k=1}^{k(m)} a(k, m) \{F(\tau_k^m -) - F(\tau_{k-1}^m -)\} + F(R_m) - F(\tau_{k(m)}^m -) \\ &= F(R_m) - \sum_{k=0}^{k(m)} F(\tau_k^m -) \{a(k+1, m) - a(k, m)\} \end{aligned}$$

donde $a(0, m) = 0$ y $a\{k(m) + 1, m\} = 1$. Se puede deducir que $a(k+1, m) - a(k, m) > 0$ para $0 \leq k \leq k(m)$.

Para maximizar L con respecto a F se debe hacer los valores $\{F(\tau_k^m -), 0 \leq k \leq k(m), 1 \leq m \leq M\}$ y $\{F(s_j -), 1 \leq j \leq J\}$ tan pequeños como sea posible, y los valores $\{F(R_m), 1 \leq m \leq M, F(\infty)\}$ tan grandes como sea posible, bajo la condición de que F es una función de distribución.

2.3.2. Estimación Autoconsistente

El concepto de estimador autoconsistente fue introducido por Efron (1967) para una función de distribución con datos censurados por la derecha, y extendido por Turnbull (1976) en datos con intervalos censurados. Las propiedades asintóticas de los estimadores autoconsistentes, para funciones de distribución con datos incompletos, han sido tratados por Tsai y Crowley (1985) y Chang y Yang (1987).

Se tiene que la estimación de máxima verosimilitud de (F, Λ_{jk}) es equivalente a la estimación de (z, λ) . El estimador autoconsistente de (z, λ) bajo un modelo de Markov con espacio de estados $\{i, j, k\}$ con D observaciones de las cuales m hacen transición del estado i al j en un intervalo de tiempo Q_l , donde $1 \leq m \leq M$ y $1 \leq l \leq L$, considera las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} N_{ij}(Q_l) &= \{\text{Nro. total de individuos con transición del estado } i \text{ al } j \text{ en el intervalo } Q_l\} \\ Y_j(t_m^* -) &= \{\text{Nro. total de individuos en el estado } j \text{ en el instante } t_m^* -\} \\ N_{jk}(t_m^*) &= \{\text{Nro. total de individuos con transición del estado } j \text{ al } k \text{ en el instante } t_m^*\} \end{aligned}$$

Debido a que existe censura en los datos, no es posible la observación directa de estas variables; por lo que se usan las siguientes relaciones con los esperados de (z, λ) :

$$\begin{aligned} E_{(z, \lambda)} N_{ij}(Q_l) &= N^* z_l \quad (1 \leq l \leq L); \\ E_{(z, \lambda)} N_{jk}(t_m^*) &= \lambda_m E_{(z, \lambda)} Y_j(t_m^*) \quad (1 \leq m \leq M) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se define como estimador autoconsistente de (z, λ) a una solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_{(z, \lambda)} [N_{ij}(Q_l) | D] &= N^* z_l \quad (1 \leq l \leq L); \\ E_{(z, \lambda)} [N_{jk}(t_m^*) | D] &= \lambda_m E_{(z, \lambda)} [Y_j(t_m^*) | D] \quad (1 \leq m \leq M) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Este sistema de ecuaciones se obtiene reemplazando los esperados simples por los esperados condicionales dado los datos D . La importancia del estimador autoconsistente se debe a que sus ecuaciones coinciden con las ecuaciones del logaritmo de la verosimilitud. Frydman (1992)

2.4. Modelo de “Enfermedad - Muerte”

2.4.1. Modelos Multiestados

Los modelos multiestados o de estados múltiples conforman una importante familia de herramientas estadísticas utilizadas para el análisis de datos longitudinales con respuesta categórica; por ejemplo, la progresión de una enfermedad incurable, la preferencia de un usuario por un servicio específico, etc. Este tipo de modelos han tenido una exitosa acogida en campos de la ciencia tan diversos como biología, física, farmacia, epidemiología, ciencias sociales y medicina, Salazar et al. (2007).

Los modelos multiestados pueden ser expresados como un proceso estocástico X en un tiempo continuo con espacio de estados finitos $i = \{0, 1, 2, \dots, k\}$. El espacio de estados posee los posibles estados de un individuo y $X(t) = i$ representa a un individuo en el estado i para el tiempo t . En general, en un modelo multiestado las transiciones a un estado futuro dependen en algún modo de su pasado. Sin embargo para el caso especial de una Cadena de Markov, el pasado y el futuro son independientes dado el estado presente, es decir las transiciones a un estado futuro dependen solo de su estado presente.

Existen dos modelos multiestados muy conocidos; el modelo de “Riesgos de Competencia” y el modelo de “Enfermedad - Muerte”.

2.4.2. Modelo de “Enfermedad - Muerte”

El modelo de “Enfermedad - Muerte” es un modelo de tres estados. Se define como un proceso estocástico $X(t) : t \geq 0$ con espacio de estados finito $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $X(t) \in \Omega$ con probabilidad 1, que satisface la propiedad de Markov, esto es:

$$P[X(t_3) \leq x_3 / X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2] = P[X(t_3) \leq x_3 / X(t_2) = x_2] \quad (2.10)$$

donde $t_1 < t_2 < t_3$, esto implica que el proceso no es homogéneo.

Además, se asume que el estado 3 es absorbente, y que t representa el tiempo transcurrido desde la primera visita, y solo se admiten las transiciones $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ y $2 \rightarrow 3$. Esta cadena de Markov se denomina absorbente dado que consta de dos estados transitorios y uno absorbente.

Los estados de este proceso se pueden escribir por medio de una matriz de transición dependientes del tiempo, Bhat (1994). Las intensidades de transición del modelo son denotados por $\alpha_{11}(t)$, $\alpha_{12}(t)$, $\alpha_{23}(t)$, y estas describen el riesgo instantáneo de transición entre los estados. La relación entre estas tasas de intensidad y las probabilidades de transición se establece a partir de un sistema de ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante, Bhat (1994),

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \times Q, \quad P(0) = I_{k+1}, \quad \text{con } Q = [\alpha_{ij}]$$

donde: $P(t)$ es la matriz de de probabilidades de transición, α_{ij} la tasa de intensidad del estado i al estado j y Q la matriz de tasas de intensidad. Cuando se considera el modelo de tres estados este sistema tiene una solución exacta dada por

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \exp(-(\alpha_{12} + \alpha_{13})t) \\ p_{12}(t) &= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{**}} [1 - \exp(-\alpha_{**}(t))] \exp(-\alpha_{23}(t)) \\ p_{13}(t) &= 1 - p_{11}(t) - p_{12}(t) \\ p_{22}(t) &= \exp(-\alpha_{23}(t)) \\ p_{23}(t) &= 1 - \exp(-\alpha_{23}(t)) \\ \alpha_{**} &= \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Estimación No Paramétrica en un Proceso de Markov “Enfermedad-Muerte” con Intervalos Censurados y Pérdida de Estado de Transición Intermedia

3.1. Introducción

En numerosos ensayos clínicos de cáncer, el interés de estudio se centra en la estimación no paramétrica del tiempo de ocurrencia de un primer evento para una situación con dos posibles eventos: la muerte o el evento no fatal relacionado a la enfermedad. Los pacientes son evaluados periódicamente para observar la ocurrencia del evento no fatal hasta el final del seguimiento o la muerte. La dificultad con la estimación se debe porque (i) los pacientes son evaluados de forma no continua, lo cual genera intervalos censurados para los tiempos de ocurrencia del evento no fatal, especialmente si el evento es asintomático (ej. progreso del tumor) y (ii) si la última evaluación previa a la muerte o a la censura por la derecha resulta negativa respecto a la ocurrencia de un evento no fatal, se desconocerá la ocurrencia de un evento no fatal entre el tiempo de la última evaluación y el final del seguimiento.

La primera forma de censura sucede cuando se asume que el tiempo de un evento no fatal observado es exacto y que su ocurrencia corresponde al tiempo de la primera medición. La segunda forma de censura depende del estado vital del paciente al final del seguimiento por muerte; si es sabido que el paciente sobrevivirá, el tiempo de ocurrencia del primer evento se censurará por la derecha luego de la última medición negativa, si es sabido que el paciente morirá, se asumirá la muerte luego de la última medición negativa.

En esta investigación se desarrolla un procedimiento de estimación no paramétrico de máxima verosimilitud (MV) que usa toda la información disponible de los pacientes, incluyendo su estado vital al final del seguimiento, así como un tratamiento apropiado de los intervalos censurados para el tiempo de ocurrencia de los eventos no fatales.

Se trabaja con una cadena de Markov de tres estados de tiempo continuo, también llamado Modelo de “Enfermedad - Muerte”. En este modelo (figura 3.1) bajo el contexto de un ensayo clínico, el estado 1 representa el inicio de la enfermedad, el estado 2 representa una complicación de la enfermedad (evento no fatal), y el estado 3 representa la muerte.

Se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de las dos funciones de subdistribución correspondientes a las transiciones $1 \rightarrow 2$ y $1 \rightarrow 3$ y la intensidad de transición $2 \rightarrow 3$, para los datos incompletos que se describen en la sección 3.2. Esta estimación esta sujeta a un

esquema de observación no informativo como se discutió en Gruger et al. (1991). Se muestra que los estimadores de máxima verosimilitud son estimadores auto-consistentes y a partir de esta propiedad se propone un algoritmo fácilmente aplicable para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros.

Efron (1967) introduce la idea de estimación auto-consistente como una versión del algoritmo de maximización esperada (EM). Turnbull (1976) extiende esta idea para la estimación de funciones de distribución con datos en intervalos censurados, luego Frydman (1995) la extiende para la estimación en modelos multi-estados y Hudgens et al. (2001) para los riesgos de competencia con tiempos de transición en intervalos censurados. En esta investigación, se desarrolla sustancialmente la metodología de máxima verosimilitud (MV) de Frydman (1995) y se incorporan observaciones con estados de eventos intermedios desconocidos.

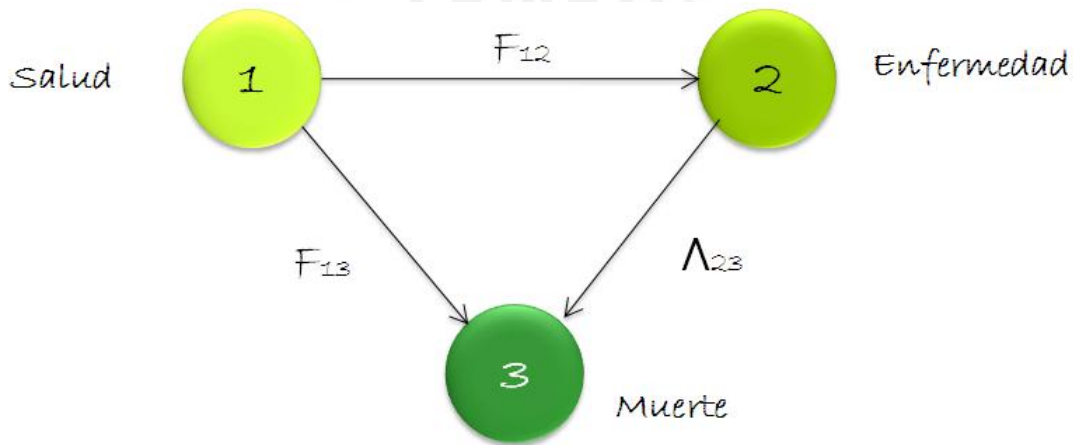


Figura 3.1: Modelo de “Enfermedad - Muerte”

3.2. Descripción de los Datos

El modelo (figura 3.1) es una cadena de Markov no homogénea de tres estados, con transiciones irreversibles, donde F_{12} , F_{13} y Λ_{23} representan las funciones de subdistribución de tiempo de $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ y la función de intensidad acumulada respectivamente. Se asume que todas las observaciones están en el estado 1 en el momento 0, sea S el tiempo de salida del estado 1 y sea T el tiempo de entrada al estado 3. Existen M observaciones en intervalos de tiempo censurado que hacen la transición de $1 \rightarrow 2$ de los cuales \tilde{N} observaciones hacen además la transición al estado 3 y las observaciones restantes son censuradas a la derecha para el estado 2:

$$\left\{ \delta_m = 1, L_m \leq S \leq R_m, T = t_m, m \leq \tilde{N} \right\} \cup \left\{ \delta_m = 1, L_m \leq S \leq R_m, T > t_m, \tilde{N} < m \leq M \right\} \quad (3.1)$$

Donde $L_m < R_m$ y $\delta_m = 1(0)$ indica que la transición de $1 \rightarrow 2$ ocurrió (no ocurrió). Una

m -ésima observación hace una transición de $1 \rightarrow 2$ en un intervalo $[L_m, R_m]$ y entra al estado 3 en el tiempo t_m si $1 \leq m \leq \tilde{N}$, pero es censurada a la derecha en t_m si $m > \tilde{N}$.

Existen \tilde{K} observaciones que hacen una transición directa de $1 \rightarrow 3$, en los tiempos

$$\{T = e_k, 1 \leq k \leq \tilde{K}\}, \quad (3.2)$$

y J observaciones que son censuradas a la derecha en el estado 1, en los tiempos

$$\{s_j, 1 \leq j \leq J\}. \quad (3.3)$$

La estimación de las intensidades de transición para los datos descritos, han sido tratadas antes por Frydman (1995). Pero en el presente capítulo además se consideraran a las observaciones con pérdida de estado de transición intermedia, así existen U observaciones de la forma $\{\delta_{M+u} = ?, X(L_{M+u}-) = 1, T = t_{M+u}, 1 \leq u \leq U$. Para la u -ésima observación dada se sabe que fue vista por última vez en el estado 1 en el tiempo $L_{M+u}-$ y posteriormente hizo una transición al estado 3 en el tiempo t_{M+u} , pero no se sabe si la transición ocurrió desde el estado 1 o el estado 2. Es posible representar a la u -ésima observación, $1 \leq u \leq U$, como el conjunto:

$$\{\delta_{M+u} = 1, L_{M+u} \leq S \leq t_{M+u}-, T = t_{M+u}\} \cup \{\delta_{M+u} = 0, T = t_{M+u}\} \quad (3.4)$$

Existen además C observaciones de la forma $\{\delta_{W+c} = ?, X(L_{W+c}-) = 1, T > t_{W+c}$, para $1 \leq c \leq C$ donde $W = M + U$. Para la c -ésima observación se sabe que fue vista por última vez en el estado 1 en el tiempo $L_{W+c}-$ y posteriormente fue censurada por la derecha en t_{W+c} , pero no se sabe si fue censurada en el estado 1 o en el estado 2. Es posible representar a la c -ésima observación, $1 \leq c \leq C$, como el conjunto:

$$\{\delta_{W+c} = 1, L_{W+c} \leq S \leq t_{W+c}, T > t_{W+c}\} \cup \{\delta_{W+c} = 0, T > t_{W+c}\} \quad (3.5)$$

Se consideran los conjuntos de tiempo de falla $\{t_m, 1 \leq m \leq \tilde{N}\} \cup \{t_{M+u}, 1 \leq u \leq U\}$. Entonces cada tiempo en el primer conjunto es el tiempo observado para la transición de $2 \rightarrow 3$ y cada tiempo en el segundo conjunto es el tiempo potencial de la transición de $2 \rightarrow 3$. Sea $T_1^* = \{t_n^*, 1 \leq n \leq N_1\}$ un conjunto de N_1 tiempos distintos del conjunto $\{t_m, 1 \leq m \leq \tilde{N}\}$ y $T_2^* = \{t_n^*, N_1 + 1 \leq n \leq N\}$ un conjunto de tiempos distintos de $\{t_{M+u}, 1 \leq u \leq U\}$ tal que $T_1^* \cap T_2^* = \emptyset$. Se tiene $T^* = T_1^* \cup T_2^* = \{t_n^*, 1 \leq n \leq N\}$ el conjunto de tiempos distintos (observado y potencial) de las transiciones de $2 \rightarrow 3$. Se define además d_n como la multiplicidad de los t_n^* .

Luego, se consideran los conjuntos $\{e_k, 1 \leq k \leq \tilde{K}\} \cup \{t_{M+u}, 1 \leq u \leq U\}$. Entonces cada tiempo en el primer conjunto es el tiempo observado para la transición de $1 \rightarrow 3$ y cada tiempo en el segundo conjunto es el tiempo potencial de la transición de $1 \rightarrow 3$.

Sea $E_1^* = \{e_k^*, 1 \leq k \leq K_1\}$ un conjunto de K_1 tiempos distintos del conjunto $\{e_k, 1 \leq k \leq \tilde{K}\}$ y $E_2^* = \{e_{K_1+1}^*, \dots, e_K^*\}$ un conjunto de tiempos distintos de $\{t_{M+u}, 1 \leq u \leq U\}$ tal que $E_1^* \cap E_2^* = \emptyset$. Se tiene $E^* = E_1^* \cup E_2^* = \{e_k^*, 1 \leq k \leq K\}$ el conjunto de tiempos distintos (ob-

servado y potencial) de las transiciones de $1 \rightarrow 3$. Se define además c_k como la multiplicidad de los e_k^* .

Finalmente, sea $N^* = M + U + C + \tilde{K} + J$ el número total de observaciones y $M' = M + U + C$.

3.3. Función de Verosimilitud

Sea S el tiempo de salida del estado 1, con función de distribución $F(s) = P(S \leq s)$ y funciones de subdistribución $F_{12}(s) = P(S \leq s, \delta = 1)$ y $F_{13}(s) = P(S \leq s, \delta = 0)$, tal que $F(s) = F_{12}(s) + F_{13}(s)$.

La función de verosimilitud del modelo queda expresada en términos de $F_{12}(s)$, $F_{13}(s)$ y de la función de intensidad de transición discreta $2 \rightarrow 3$, $\Lambda_{23}(\{t\}) = P(T = t | T \geq t, \delta = 1)$.

Para $t_n^* \in T^*$ se tiene $\lambda_n := \Lambda_{23}(\{t_n^*\})$ y se define la intensidad de transición acumulada $\Lambda_{23}(t) = \sum \Lambda_{23}(\{t_n^*\}) I(t_n^* \leq t)$ donde $I(\cdot)$ es una función indicadora.

De Frydman (1995) la verosimilitud de una m -ésima observación en (3.1) cuando $n \leq \tilde{N}$, es

$$\begin{aligned} P(T = t_m, S \in [L_m, R_m], \delta_m = 1) &= \int_{L_m}^{R_m} P(T = t_m | S = s, \delta_m = 1) dF_{12}(s) \\ &= \lambda_m \prod_{t_n^* \in (R_m, t_m)} (1 - \lambda_n) \int_{L_m}^{R_m} \prod_{t_n^* \in (s, R_m]} (1 - \lambda_n) dF_{12}(s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde para cualquier G dado, el producto $\prod_{t_n^* \in G} (1 - \lambda_n)$ es sobre todos los λ 's en los que $t_n^* \in G$. Para simplificar la notación de ahora en adelante $\prod G := \prod_{t_n^* \in G} (1 - \lambda_n)$ y se asume que $\prod G = 1$ si $G \cap T^* = \emptyset$.

También se tiene

$$I(A_m) := \int_{l_m}^{R_m} \left(\prod (s, R_m] \right) dF_{12}(s), 1 \leq m \leq M' \quad (3.7)$$

donde $A_m := [L_m, R_m]$, para $M < m \leq M + U$, $R_{M+u} = t_{M+u-}$, y para $W < m \leq M'$, $R_{W+c} = t_{W+c}$. Luego la verosimilitud de una m -ésima observación en (3.1), según la notación dada, cuando $m \leq \tilde{N}$, es $\lambda_m (\prod (R_m, t_m)) I(A_m)$. Por consiguiente la verosimilitud de las observaciones en la ecuación (3.1) toma la siguiente forma:

$$\prod_{n=1}^{N_1} \lambda_n^{d_n} \prod_{m=1}^M \left(\prod G_m \right) I(A_m)$$

donde $G_m = (R_m, t_m)$ si $m \leq \tilde{N}$, y $G_m = (R_m, t_m]$ si $m > \tilde{N}$.

La función de verosimilitud, L_1 , para las observaciones con transición de estados conocidos $1 \rightarrow 2$ incluyendo también a las observaciones definidas en (3.2) y (3.3), es:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \prod_{n=1}^{N_1} \lambda_n^{d_n} \prod_{m=1}^M \left(\prod G_m \right) I(A_m) \prod_{k=1}^{K_1} \{F_{13}(e_k^*) - F_{13}(e_k^*-)\}^{c_k} \\
 &\times \prod_{j=1}^J \{1 - F_{12}(s_{j-}) - F_{13}(s_{j-})\}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

La función de verosimilitud, L_2 , para las observaciones definidas en (3.4) y (3.5) con transición de estados desconocidos $1 \rightarrow 2$, según la notación utilizada, es:

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \prod_{u=1}^U [F_{13}(t_{M+u}) - F_{13}(t_{M+u-}) + \lambda_{M+u} I(A_{M+u})] \\
 &\times \prod_{c=1}^C [1 - F_{12}(t_{W+c}) - F_{13}(t_{W+c}) + I(A_{W+c})]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para $1 \leq m \leq M'$, se tiene

$$\begin{aligned}
 I(A_m) &= \sum_{k=1}^{k(m)} a(k, m) \{F_{12}(\tau_k^m-) - F_{12}(\tau_{k-1}^m-)\} + F_{12}(R_m) - F_{12}(\tau_{K(m)}^m-) \\
 &= F_{12}(R_m) - \sum_{k=0}^{k(m)} F_{12}(\tau_k^m-) [a(k+1, m) - a(k, m)],
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde, para $1 \leq k \leq k(m)$, $a(k, m) \equiv \prod[\tau_k^m, R_m]$, $a(0, m) = 0$, $a(k(m) + 1, m) = 1$, y $\{\tau_k^m \in T^*, 0 < k \leq k(m)\}$ es una partición de $(L_m, R_m]$ para los tiempos de transición de $2 \rightarrow 3$ y se define a $\tau_0^m \equiv L_m$. Así reemplazando la ecuación (3.10) en la ecuación (3.9), el segundo factor de L_2 toma la siguiente forma

$$\prod_{c=1}^C \left\{ 1 - F_{13}(t_{W+c}) - \sum_{k=0}^{k(W+c)} F_{12}(\tau_k^{W+c-}) [a(k+1, W+c) - a(k, W+c)] \right\} \tag{3.11}$$

Finalmente se observa que para $0 \leq k \leq k(m)$, $a(k+1, m) - a(k, m) > 0$ y que la función $L = L_1 L_2$. Entonces de las ecuaciones (3.8 - 3.11), para maximizar la función de verosimilitud L con respecto a F_{12} se deberán hacer los valores $\{F_{12}(\tau_k^m-), 0 \leq k \leq k(m), 1 \leq m \leq M'\}$, y $\{F_{12}(s_{j-}), 1 \leq j \leq J\}$ tan pequeño como sea posible, y los valores $\{F_{12}(R_m), 1 \leq m \leq W\}$ tan grande como sea posible, sujeto a la condición que F_{12} es una función de subdistribución. Por lo tanto, se forman dos conjuntos de tiempos

$$\bar{L} = \{L_m, 1 \leq m \leq M'\} \cup \{T^* \cap A\} \cup \{S_j \cap A\} \cup \{s_{max} : s_{max} > R_{max} \vee e_{max}^*\}$$

$$\bar{R} = \{R_m, 1 \leq m \leq W\} \cup \{\infty\}$$

donde $A \equiv \cup_{m=1}^{M'} A_m$, $s_{max} = \max(s_j, 1 \leq j \leq J)$, $R_{max} = \max(R_m, 1 \leq m \leq W)$, y $e_{max}^* = \max(e_k^*, 1 \leq k \leq K)$.

De estos conjuntos de tiempos se construyen intervalos cerrados disjuntos cuyos límites izquierdo y derecho pertenecen a los conjuntos \bar{L} y \bar{R} respectivamente, y que no contienen ningún otro miembro de \bar{L} y \bar{R} . Sea $\{Q_i := [l_i, r_i], 1 \leq i \leq I\}$ esos intervalos donde $l_1 \leq r_1 \leq l_2 \leq r_2 < \dots < l_I \leq r_I \leq \infty$, y $Q = \cup Q_i$. El término $\{\infty\}$ es incluido en \bar{R} para asegurar que los intervalos queden definidos cuando $s_{max} > R_{max}$. Se observa que F_{12} , que maximiza L , puede crecer solo sobre Q . A continuación se muestra el teorema de la forma de L :

Teorema 1

- F_{13} crece para cada tiempo de E_1^* y puede crecer para un subconjunto de tiempos de E_2^* . Si $s_{max} > R_{max} \vee e_{max}^*$ entonces F_{13} es indefinida en $s \geq s_{max}$.
- F_{12} puede crecer solo sobre Q . Para valores fijos de $F_{12}(r_i)$ y $F_{12}(l_i-)$, $1 \leq i \leq I$, la verosimilitud es independiente del comportamiento de F_{12} sobre $[l_i, r_i]$. Si $s_{max} > R_{max} \vee e_{max}^*$ entonces F_{12} es indefinida en $s \geq s_{max}$.
- $\Lambda_{23}(\{t_n^*\}) > 0$ para $t_n^* \in T_1^*$, y $\Lambda_{23}(\{t_n^*\}) \geq 0$ para $t_n^* \in T_2^*$

3.4. Estimación de Máxima Verosimilitud

Se reformula la función de verosimilitud $L_1 L_2$ expresándola en términos de $\{\lambda_n, 1 \leq n \leq N\}$, $\{z_i, 1 \leq i \leq I\}$ y $\{z_i, I < i \leq I'\}$, para poder estimar $\Lambda_{23}(t)$, F_{12} y F_{13} respectivamente; el primer conjunto representa las intensidades de transición discreta $2 \rightarrow 3$, el segundo conjunto las probabilidades en los intervalos Q_i que son el soporte de F_{12} , y el tercer conjunto las probabilidades en los instantes de tiempo $\{e_k^*, 1 \leq k \leq K\}$ que son el soporte de F_{13} .

Para $1 \leq i \leq I - 1$, se tiene que $z_i = F_{12}(r_i) - F_{12}(l_i-)$, si $r_I < \infty$, entonces $z_I = F_{12}(r_I) - F_{12}(l_I-)$, y si $r_I = \infty$, entonces $z_i = 1 - F(s_{max}-)$. Donde z_i representa la probabilidad de transición $1 \rightarrow 2$ en el intervalo de tiempo Q_i , de manera particular si $r_I = \infty$ el intervalo será $[s_{max}, \infty]$.

Para $I < i \leq I + K \equiv I'$, con $Q_i = \{e_{i-I}^*\}$, se tiene que $z_i = F_{13}(e_{i-I}^*) - F_{13}(e_{i-I}^*-)$. Donde z_i representa la probabilidad de transición $1 \rightarrow 3$ en el instante de tiempo Q_i .

De esta manera, la probabilidad de transición del modelo queda definida como $z = \{z_i, 1 \leq i \leq I'\}$, tal que $\sum_{i=1}^{I'} z_i = 1$.

Luego, para $1 \leq i \leq I'$, y $1 \leq j \leq J + C$, se construye la función indicadora

$\alpha_{ij} = I(Q_i \subset [s_{J+c}, \infty])$, donde $\{s_{J+c}, 1 \leq c \leq C\} = \{t_{W+c}, 1 \leq c \leq C\}$. Así mismo, para $1 \leq i \leq I$, y $1 \leq m \leq M'$, se construye la función indicadora $\beta_{im} = I(Q_i \subset A_m)$.

A partir de esta notación el $\ln L_1$ está dado por:

$$\begin{aligned} \ln L_1 = & \sum_{n=1}^{N_1} d_n \ln \lambda_n + \sum_{m=1}^M \ln(\prod G_m) + \sum_{m=1}^M \ln \sum_{i=1}^I (\prod (r_i, R_m]) \beta_{im} z_i \\ & + \sum_{i=I+1}^{K_1} c_{i-I} \ln z_i + \sum_{j=1}^J \ln \sum_{i=1}^{I'} \alpha_{ij} z_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

y el $\ln L_2$ por:

$$\begin{aligned} \ln L_2 = & \sum_{u=1}^U \ln \left\{ \sum_{i=I+1}^{I'} I(t_{M+u} = e_{i-I}^*) z_i + \lambda_{M+u} \sum_{i=1}^I (\prod (r_i, t_{M+u}-]) \beta_{i, M+u} z_i \right\} \\ & + \sum_{c=1}^C \ln \left\{ \sum_{i=1}^{I'} \alpha_{i, J+c} z_i + \sum_{i=1}^I (\prod (r_i, t_{W+c}]) \beta_{i, W+c} z_i \right\} \\ =: & \sum_{u=1}^U \ln L_u^U + \sum_{c=1}^C \ln L_c^C \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para maximizar $\ln L$ respecto a (z, λ) sujeto a $\sum_{i=1}^{I'} z_i = 1$, $(z_i \geq 0, 1 \leq i \leq I')$, y $(0 \leq \lambda_n \leq 1, 1 \leq n \leq N)$. El lagrangiano para este problema es $H =: H(z, \lambda) = \ln L(z, \lambda) - a(\sum_{i=1}^{I'} z_i - 1) + \sum_{i=1}^{I'} b_i z_i + \sum_{n=1}^N h_n(1 - \lambda_n) + \sum_{n=1}^N f_n \lambda_n$, donde para $1 \leq i \leq I'$ y $1 \leq n \leq N$,

$$b_i z_i = 0, \quad h_n(1 - \lambda_n) = 0, \quad f_n \lambda_n = 0, \quad a, b_i, h_n, f_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{I'} z_i = 1 \quad (3.14)$$

El estimador de máxima verosimilitud de (z, λ) es una solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq I'), \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_n} = 0, \quad (1 \leq n \leq N) \quad (3.15)$$

3.5. Algoritmo para la obtención de estimadores de Máxima Verosimilitud

Para la estimación de la intensidad y de la probabilidad de transición del modelo, se introduce el estimador de autoconsistencia de (z, λ) y se muestra su relación con el estimador de máxima verosimilitud de (z, λ) en el Teorema 2. Se define un estimador de autoconsistencia como aquel que satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_{(z, \lambda)}[N_{12}(Q_i)|D]/N^* &= z_i \quad 1 \leq i \leq I, \\ E_{(z, \lambda)}[N_{13}(Q_i)|D]/N^* &= z_i \quad I \leq i \leq I', \\ E_{(z, \lambda)}[N_{23}(t_n^*)|D]/E_{(z, \lambda)}[Y(t_n^* -)|D] &= \lambda_n \quad 1 \leq n \leq N \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i \leq I$, $N_{12}(Q_i)$ es el número de observaciones que hacen una transición de

$1 \rightarrow 2$ en el intervalo Q_i , y para $I \leq i \leq I'$, $N_{13}(Q_i)$ es el número de observaciones que hacen la transición de $1 \rightarrow 3$ en el intervalo Q_i . Además, para $1 \leq n \leq N$, $Y(t_n^*-)$ es el número de observaciones que están en el estado 2 en el instante t_n^* , y $N_{23}(t_n^*)$ es el número de observaciones que hacen la transición de $2 \rightarrow 3$ en el instante t_n^* . Los esperados de las transiciones se calculan bajo el valor real de (z, λ) , condicionados a la información disponible de los datos D . Para llegar a la forma explícita de estas ecuaciones se introducen los siguientes expresiones:

$$\mu_{mi} = \frac{\beta_{im} z_i (\prod(r_i, R_m])}{\sum_{p=1}^I \beta_{pm} z_p (\prod(r_p, R_m])}, \quad (1 \leq i \leq I), (1 \leq m \leq M) \quad (3.16)$$

$$\bar{\mu}_{ji} = \frac{\alpha_{ij} z_i}{\sum_{p=1}^{I'} \alpha_{pj} z_p}, \quad (1 \leq i \leq I'), (1 \leq j \leq J) \quad (3.17)$$

$$\eta_{ui} = \begin{cases} \lambda_{M+u} (\prod(r_i, t_{M+u})) \beta_{i, M+u} z_i / L_u^U, & (1 \leq i \leq I), (1 \leq u \leq U) \\ I(t_{M+u} = e_{i-I}^*) z_i / L_u^U, & (I \leq i \leq I'), (1 \leq u \leq U) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\gamma_{ci} = \begin{cases} \alpha_{i, J+c} z_i / L_c^C + (\prod(r_i, t_{W+c})) \beta_{i, W+c} z_i / L_c^C, & (1 \leq i \leq I), (1 \leq c \leq C) \\ \alpha_{i, J+c} z_i / L_c^C, & (I \leq i \leq I'), (1 \leq c \leq C) \end{cases} \quad (3.19)$$

Cada expresión en las ecuaciones (3.16) - (3.19) representa la probabilidad condicional de una observación que hace la transición $1 \rightarrow 2$ en el intervalo Q_i con $1 \leq i \leq I$, o la transición $1 \rightarrow 3$ en el instante $Q_i = e_{i-I}^*$ con $I \leq i \leq I'$. Cada probabilidad condicional es calculada bajo el valor real de (z, λ) condicionados a la información disponible de los datos contenidos respectivamente según las ecuaciones (3.1), (3.3), (3.4) y (3.5). También se consideran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \rho_{mn} &= I(t_m \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \subset [L_m, t_n^*]), \quad 1 \leq m \leq M, \\ \pi_{un} &= I(t_{M+u} \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(Q_i \subset [L_{M+u}, t_n^*]), \quad 1 \leq u \leq U, \\ \sigma_{cn} &= I(t_{W+c} \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(Q_i \subset [L_{W+c}, t_n^*]), \quad 1 \leq c \leq C, \end{aligned} \quad (3.20)$$

las cuales representan respectivamente la probabilidad condicional que una m -ésima observación en la ecuación (3.1), una u -ésima observación en la ecuación (3.4), y una c -ésima observación en la ecuación (3.5) estén en riesgo de transición $2 \rightarrow 3$ en el instante t_n^* . Todas

estas ecuaciones son demostradas en el apéndice A · 1.

Teorema 2

(a) Las ecuaciones de auto-consistencia en (3.16)-(3.16) toman la siguiente forma explícita:
para $1 \leq i \leq I$

$$z_i = \frac{\sum_{m=1}^M \mu_{mi} + \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}}{N^*} \quad (3.21)$$

para $I < i \leq I'$

$$z_i = \frac{c_{i-I} + \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}}{N^*} \quad (3.22)$$

y para $1 \leq n \leq N$

$$\lambda_n = \frac{I(n \leq N_1)d_n + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui}}{\sum_{m=1}^M \rho_{mn} + \sum_{u=1}^U \pi_{un} + \sum_{c=1}^C \sigma_{cn}} \quad (3.23)$$

(b) El estimador de máxima verosimilitud de (z, λ) será un estimador auto-consistente de (z, λ) .

La demostración de la parte (a) del Teorema 2 esta dada en el apéndice A · 2, y de la parte (b) en el apéndice A · 3.

Las ecuaciones (3.21)-(3.23) sugieren un algoritmo para obtener el estimador de máxima verosimilitud de (z, λ) . Se evalúan estas ecuaciones para un valor inicial $(z^{(0)}, \lambda^{(0)})$ generando un nuevo valor $(z^{(1)}, \lambda^{(1)})$, con el cual se repite el paso anterior. El proceso se detendrá cuando el criterio de convergencia este satisfecho.

El estimador de máxima verosimilitud siempre será una solución de las ecuaciones de auto-consistencia, pero las ecuaciones de autoconsistencia pueden tener múltiples soluciones que no corresponden al estimador de máxima verosimilitud, es decir que no satisfacen las condiciones en (3.14). Entonces, uno debe empezar el algoritmo con diferentes valores iniciales del parámetro y en caso de múltiples soluciones, verificar cual de las soluciones satisface (3.14), es decir la que maximice la función de verosimilitud.

Sea $(\hat{z}, \hat{\lambda})$ el estimador de máxima verosimilitud de (z, λ) . Para $r_I < \infty$ el estimador de máxima verosimilitud de F_{12} es

$$\hat{F}_{12}(s) = \begin{cases} 0 & (s < l_1) \\ \sum_{p=1}^i \hat{z}_p & (r_i \leq s \leq l_{i+1}, 1 \leq i \leq I - 1) \\ \sum_{p=1}^I \hat{z}_p & (s \geq r_I) \end{cases}$$

e indefinido de otra forma, y el estimador de máxima verosimilitud de F_{13} está dado por $\hat{F}_{13}(s) = \sum_{p=I+1}^{I'} \hat{z}_p I(Q_p \leq s)$. Entonces $F(s)$ queda definido como $\hat{F}(s) = \hat{F}_{12}(s) + \hat{F}_{13}(s)$.

El estimador de máxima verosimilitud de $\Lambda_{23}(t) = \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n I(t_n^* \leq t)$ está definido para $t \leq t_{max}$ pero indefinido para $t > t_{max}$.

También es posible calcular las intensidades acumuladas $\hat{\Lambda}_{12}$ y $\hat{\Lambda}_{13}$, que son los estimadores de máxima verosimilitud de Λ_{12} y Λ_{13} usando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{12}(s) &= \int_{(0,s]} F_{12}(du) \{1 - F(u-)\}^{-1} \\ \hat{\Lambda}_{13}(s) &= \int_{(0,s]} F_{13}(du) \{1 - F(u-)\}^{-1}\end{aligned}$$

Se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{12}(s) &= \sum_{r_i \leq s} z_i \{1 - \hat{F}(l_i-)\}^{-1} \\ \hat{\Lambda}_{13}(s) &= \sum_{e_k^* \leq s} z_{I+k} \{1 - \hat{F}(e_k^*-)\}^{-1}\end{aligned}$$

Por otro lado, para $r_I = \infty$ (implica que $s_{max} \geq R_{max}$) entonces, para $s < s_{max}$, los estimadores $\hat{F}_{12}(s)$ y $\hat{F}_{13}(s)$ quedan definidas como antes, mientras que para $s \geq s_{max}$, se tienen dos situaciones:

Si $s \geq s_{max} > R_{max} \vee e_{max}^*$ entonces, por el Teorema 1, las dos funciones $\hat{F}_{12}(s)$ y $\hat{F}_{13}(s)$ quedan indefinidas sobre $Q_I = [s_{max}, \infty]$.

Si $e_{max}^* \geq s_{max}$, entonces para $s \geq s_{max}$, la función $\hat{F}_{12}(s) = \sum_{p=1}^{I-1} z_p$, por lo que \hat{F}_{12} no crece en Q_I , a diferencia de \hat{F}_{13} que si crece.

Capítulo 4

Aplicación del Modelo “Enfermedad-Muerte” a una base de clientes de una AFP

4.1. Introducción

En la actualidad, el sistema privado de pensiones está conformado por cuatro empresas privadas encargadas de administrar los fondos de pensiones, conocidas como AFP's. La AFP tiene como único fin la administración de los aportes de los afiliados y otorgar los servicios de Jubilación, Invalidez, Sobrevivencia y Gastos de Sepelio a sus afiliados.

Cualquier afiliado del sistema privado de pensiones puede trasladarse de una AFP a otra, a través de lo que se denomina un Traspaso, sin embargo el Traspaso de un afiliado de una AFP a otra implica una serie de costos administrativos y económicos para la AFP. Por ello resulta muchas veces más rentable para la administradora retener a sus afiliados que captar a nuevos afiliados, a largo plazo.

Existen criterios específicos que el afiliado considera para evaluar a una AFP, como son el respaldo, la comisión, el costo de la prima del seguro, los servicios de asesoría y la información que le brinda.

Una de las estrategias de la AFP es lograr niveles extraordinarios de servicio en asesoría e información que permitan la retención y captación de nuevos afiliados. Es decir alcanzar un nivel de servicio extraordinario que proporcione a los afiliados mayor satisfacción, de manera que se evite los traspasos por mala atención.

La AFP cuenta con canales de atención al cliente que garantizan la solución y respuesta de los reclamos de los afiliados. Estos reclamos son registrados en una base de datos y a cada reclamo se le asigna un responsable que analiza la información recibida, efectúa las consultas, acciones y coordinaciones hasta la solución del reclamo.

La AFP posee un segmento de afiliados *premium* que son la unidad de observación del estudio, por ser afiliados con ingresos mensuales superiores a los diez mil soles, cuya retención resulta altamente rentable para la AFP. Para la investigación se identificaron los principales motivos de reclamo de estos afiliados, como la falta de asesoría e información, los errores o diferencias en los datos registrados, la demora en los trámite, así como disconformidades con el estado de cuenta.

Con la finalidad de estimar el riesgo de traspaso de un afiliado *premium* dado el reclamo, así como los tiempos de permanencia del afiliado hasta la ocurrencia del reclamo o el traspaso,

se realizó la aplicación del modelo “enfermedad-muerte” de un proceso de Markov (descrito en el capítulo 3) a una base de afiliados *premium* de una AFP (ver figura 4.1).

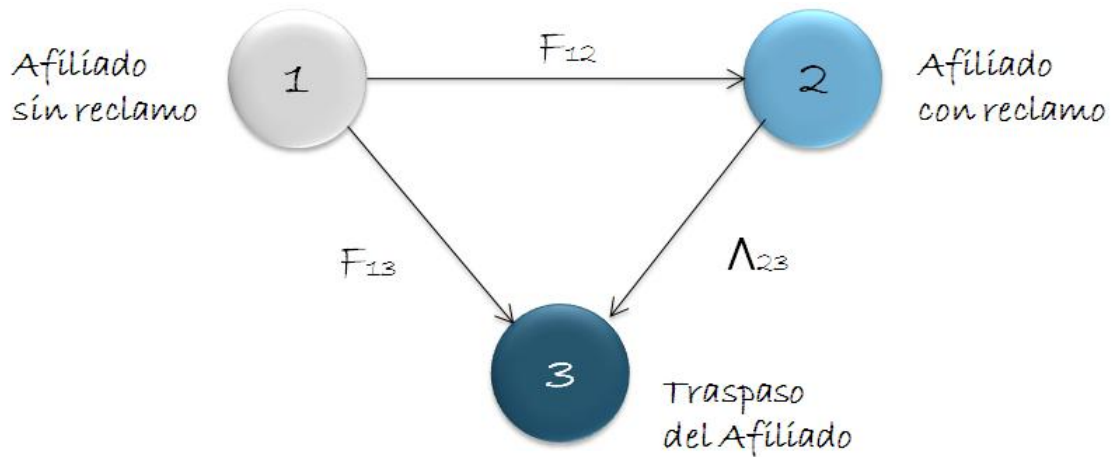


Figura 4.1: Modelo de “Enfermedad - Muerte” aplicado a una AFP

El modelo propuesto permite controlar dos formas de censura existente en este tipo de estudios. La primera forma de censura se da porque el afiliado no realiza el reclamo en el instante exacto en que ocurre el problema sino un tiempo posterior, generándose intervalos censurados. La segunda forma de censura se da porque el afiliado no siempre realiza el reclamo en el periodo de estudio, generándose pérdida de estado de transición, es decir el afiliado puede trasladarse o no a otra AFP, sin conocerse si realizó o no reclamo en algún momento.

4.2. Descripción de los Datos

Para la aplicación del modelo, se asume que todos los afiliados *premium* parten de un estado inicial “sin reclamo” en un tiempo 0, luego abandonan este estado inicial en un tiempo S , y posteriormente realizan su traspaso a otra AFP en el tiempo T (ver figura 4.2).

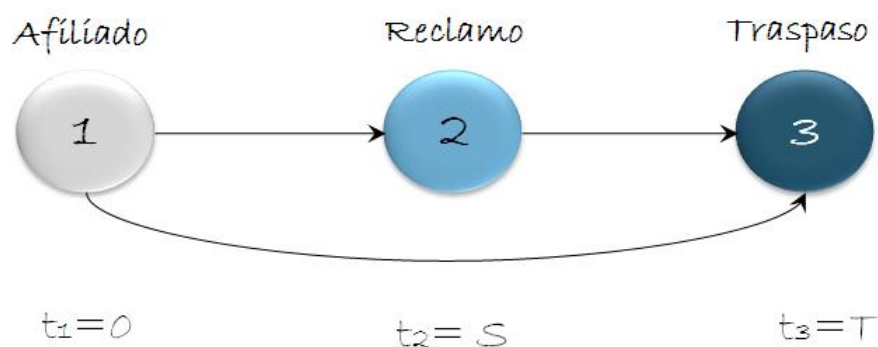


Figura 4.2: Tiempos de transición en el modelo

Se tienen M afiliados *premium* que realizan reclamos, de los cuales \tilde{N} afiliados además deciden trasladarse a otra AFP (ver figura 4.3).

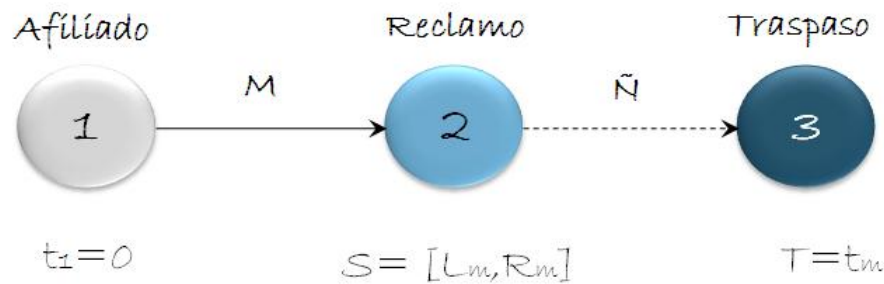


Figura 4.3: Afiliados tipo M y \tilde{N}

Se define:

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{indica que el afiliado } \textit{premium} \text{ realiza el reclamo} \\ 0, & \text{indica que el afiliado } \textit{premium} \text{ no realiza el reclamo} \end{cases}$$

Supóngase que un m -ésimo afiliado realiza un reclamo en un intervalo censurado $[L_m, R_m]$ donde $L_m < R_m$, luego se traspassa a otra AFP en el tiempo t_m para $1 \leq m \leq \tilde{N}$, o no se traspassa en t_m para $m > \tilde{N}$, interpretándose este suceso como:

$$\{\delta_m = 1, L_m \leq S \leq R_m, T = t_m, m \leq \tilde{N}\} \cup \{\delta_m = 1, L_m \leq S \leq R_m, T > t_m, \tilde{N} < m \leq M\}$$

También existen \tilde{K} afiliados *premium* que se traspassan a otra AFP de manera directa, es decir sin realizar reclamo (ver figura 4.4) ; donde un k -ésimo afiliado realiza su traspaso en el tiempo e_k :

$$\{T = e_k, 1 \leq k \leq \tilde{K}\},$$

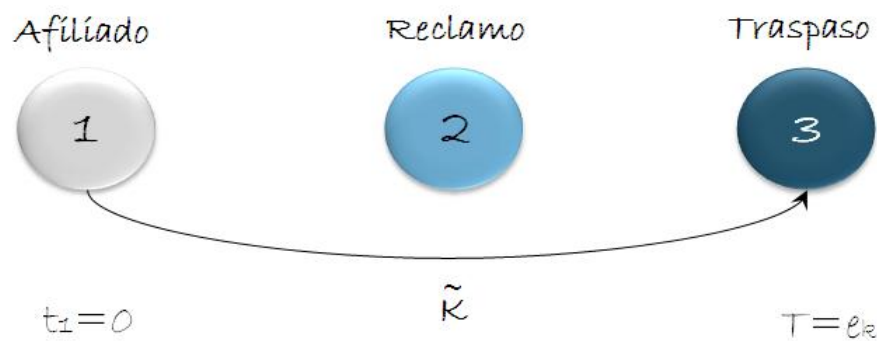


Figura 4.4: Afiliados tipo \tilde{K}

Por otro lado, existen J afiliados *premium* que no realizaron reclamo ni traspaso (ver figura 4.5); donde un j -ésimo afiliado permanece en el estado inicial para un tiempo s_j , es decir se censura:

$$\{s_j, 1 \leq j \leq J\}.$$

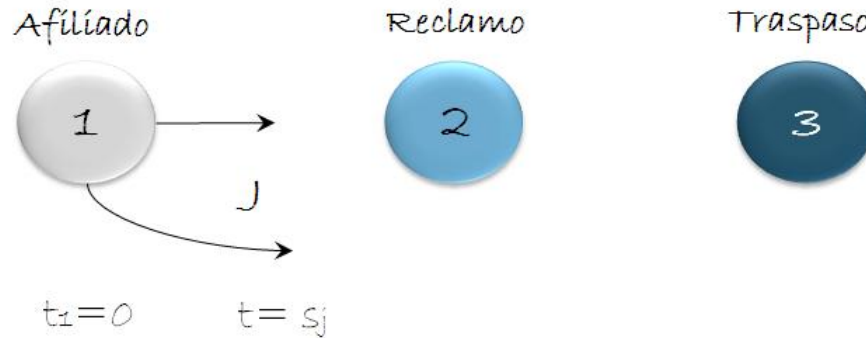


Figura 4.5: Afiliados tipo J

En el modelo, además se consideran U afiliados *premium* que se traspasan a otra AFP, pero se desconoce si realizaron reclamo o no, generándose pérdida de estado de transición intermedia (ver figura 4.6).

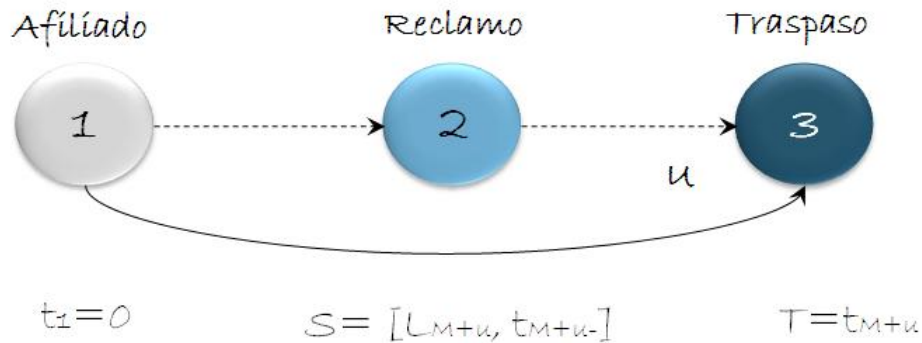


Figura 4.6: Afiliados tipo U

Supóngase un u -ésimo afiliado sin reclamo en el tiempo $L_{M+u}-$, que hace su traspaso a otra AFP en el tiempo t_{M+u} , y se desconoce si realizó reclamo o no en el intervalo censurado $[L_{M+u}, t_{M+u}-]$, interpretándose este suceso como:

$$\{\delta_{M+u} = 1, L_{M+u} \leq S \leq t_{M+u}-, T = t_{M+u}\} \cup \{\delta_{M+u} = 0, T = t_{M+u}\}$$

Por último, existen C afiliados *premium* que no se traspasan pero se desconoce si realizaron reclamo o no, generándose pérdida de estado de transición intermedia (ver figura 4.7).

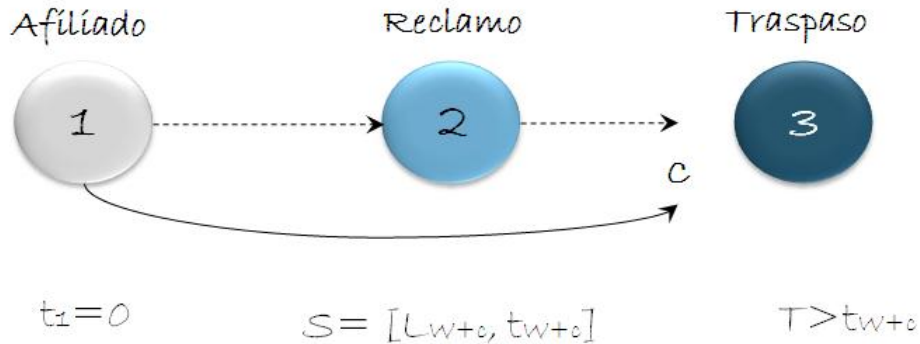


Figura 4.7: Afiliados tipo C

Supóngase un c -ésimo afiliado sin reclamo en el tiempo L_{W+c} y posteriormente censurado en el tiempo t_{W+c} donde $W = M + U$, por lo que se desconoce si fue censurado en el estado sin reclamo o con reclamo, interpretándose este suceso como:

$$\{\delta_{W+c} = 1, L_{W+c} \leq S \leq t_{W+c}, T > t_{W+c}\} \cup \{\delta_{W+c} = 0, T > t_{W+c}\}$$

En resumen, se tienen 5 tipos de afiliados *premium*: M, \tilde{K}, J, U y C , que se diferencian en la forma en que hacen las transiciones por los estados del modelo.

Finalmente, se tiene que el número total de afiliados atendidos por la AFP es

$$N^* = M + U + C + \tilde{K} + J$$

4.3. Cálculo de las Funciones de Tiempo y Riesgo

Para el cálculo de las funciones de tiempo de reclamo, de traspaso y la función de riesgo, se trabajó con una base de datos de afiliados del segmento *premium* que fueron atendidos por la AFP, y a quienes se les hizo seguimiento durante siete meses. Para la estimación de los parámetros del modelo se utilizó el algoritmo de autoconsistencia descrito en la sección (3.5), lo que condujo al diseño de un diagrama de flujo (ver apéndice A.5) y a la elaboración de un programa en lenguaje R (ver apéndice A.4) para el cálculo de los estimadores de máxima verosimilitud.

Se realizó la aplicación del modelo “enfermedad-muerte” bajo tres escenarios distintos, manteniéndose el periodo de tiempo de siete meses en cada caso, con el propósito de comparar el comportamiento de los afiliados y recomendar acciones correctivas. Con la ayuda del software R project, se realizaron 30 iteraciones para los valores iniciales $z^{(0)}$ y $\lambda^{(0)}$ generándose las

funciones acumuladas de tiempo y riesgo según el escenario.

Escenario 1: Reclamos y Traspasos Enero - Julio

En enero del 2009 se registraron 732 afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP, de los cuales 125 realizaron reclamos. Posteriormente, a todos los afiliados se les hizo seguimiento hasta julio del 2009 registrándose 94 traspasos a otra AFP.

Reclamo	Tipo	Traspaso		
		Si	No	Total
Si	M		113	125
	Ñ	12		
No	Ñ̃	34		607
	J		425	
	U	48		
	C		100	
Total		94	638	732

Cuadro 4.1: Tipo de afiliado *premium* para el escenario 1

En el escenario 1 (ver cuadro 4.1), se tienen *M* afiliados ($n = 113$) que presentan reclamo, *Ñ* afiliados ($n = 12$) que realizan reclamo y traspaso a otra AFP, *Ñ̃* afiliados ($n = 34$) que solo realizan traspaso a otra AFP, *J* afiliados ($n = 425$) que no presentan reclamo ni realizan traspaso a otra AFP, *U* afiliados ($n = 48$) que realizan traspaso a otra AFP sin embargo se desconoce si presentaron o no reclamo, y finalmente *C* afiliados ($n = 100$) que no realizaron traspaso a otra AFP y además se desconoce si presentaron o no reclamo.

Escenario 2: Reclamos y Traspasos Febrero - Agosto

En febrero del 2009 se registraron 752 afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP, de los cuales 145 realizaron reclamos. Posteriormente, a todos los afiliados se les hizo seguimiento hasta Agosto del 2009 registrándose 93 traspasos a otra AFP.

Reclamo	Tipo	Traspaso		
		Si	No	Total
Si	M		134	145
	Ñ	11		
No	Ñ̃	29		607
	J		425	
	U	53		
	C		100	
Total		93	659	752

Cuadro 4.2: Tipo de afiliado *premium* para el escenario 2

En el escenario 2 (ver cuadro 4.2) , se tienen M afiliados ($n = 134$) que presentan reclamo, \tilde{N} afiliados ($n = 11$) realizan reclamo y traspaso a otra AFP, \tilde{K} afiliados ($n = 29$) que solo realizan traspaso a otra AFP, J afiliados ($n = 425$) que no presentan reclamo ni realizan traspaso a otra AFP, U afiliados ($n = 53$) que realizan traspaso a otra AFP sin embargo se desconoce si presentaron o no reclamo, y finalmente C afiliados ($n = 100$) que no realizaron traspaso a otra AFP y además se desconoce si presentaron o no reclamo.

Escenario 3: Reclamos y Traspasos Marzo - Setiembre

En marzo del 2009 se registraron 775 afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP, de los cuales 165 realizaron reclamos. Posteriormente, a todos los afiliados se les hizo seguimiento hasta setiembre del 2009 registrándose 95 traspasos a otra AFP.

Reclamo	Tipo	Traspaso		
		Si	No	Total
Si	M		155	
	\tilde{N}	10		165
No	\tilde{K}	19		
	J		425	
	U	66		
	C		100	610
Total		95	680	775

Cuadro 4.3: Tipo de afiliado *premium* para el escenario 2

En el escenario 3 (ver cuadro 4.3), se tienen M afiliados ($n = 155$) que presentan reclamo, de los cuales \tilde{N} afiliados ($n = 10$) realizan traspaso a otra AFP, \tilde{K} afiliados ($n = 19$) que solo realizan traspaso a otra AFP, J afiliados ($n = 425$) que no presentan reclamo ni realizan traspaso a otra AFP, U afiliados ($n = 66$) que realizan traspaso a otra AFP sin embargo se desconoce si presentaron o no reclamo, y finalmente C afiliados ($n = 100$) que no realizaron traspaso a otra AFP y además se desconoce si presentaron o no reclamo.

4.4. Análisis de los Resultados

Para el escenario 1 (ver cuadro 4.4), se puede observar por ejemplo que para el mes de marzo la probabilidad acumulada de que un afiliado *premium* atendido realice reclamo es de 0.17, mientras que la probabilidad acumulada de que se traspase es de 0.06, con una tasa de riesgo acumulada de 0.05 afiliados.

Mes	$F_{12}(s)$	$F_{13}(s)$	$F(s)$	$f(s)$	Λ_{23}	λ_{23}
Enero	0.067850	0.010457	0.078307	0.078307	0.013625	0.013625
Febrero	0.117486	0.022408	0.139894	0.061587	0.040757	0.027132
Marzo	0.170765	0.062916	0.233681	0.093787	0.054383	0.013626
Abril	0.170766	0.129325	0.300092	0.066411	0.115580	0.061197
Mayo	0.170767	0.219864	0.390632	0.090540	0.237854	0.122274
Junio	0.170768	0.286282	0.457051	0.066419	0.319490	0.081636
Julio	0.170776	0.340623	0.511399	0.054348	0.380747	0.061257

Cuadro 4.4: Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 1

De estos resultados, se puede interpretar que para los afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP entre enero y marzo 2009, la probabilidad de reclamo fue casi 3 veces mayor que la probabilidad de traspaso, observándose poco riesgo de que un afiliado se traspase dado que realizó reclamo.

Para el escenario 2 (ver cuadro 4.5), se puede observar por ejemplo que para el mes de abril la probabilidad F_{12} de que un afiliado *premium* atendido realice reclamo es de 0.28, mientras que la probabilidad F_{13} de que se traspase es de 0.10, con una tasa de riesgo Λ_{23} de 0.10 afiliados.

Mes	$F_{12}(s)$	$F_{13}(s)$	$F(s)$	$f(s)$	Λ_{23}	λ_{23}
Febrero	0.054853	0.014939	0.0697928	0.069793	0.0210827	0.021082
Marzo	0.110372	0.052003	0.1623758	0.092583	0.0362838	0.015201
Abril	0.289813	0.100861	0.3906747	0.228299	0.1088516	0.072567
Mayo	0.324216	0.179031	0.5032472	0.112573	0.2336294	0.124777
Junio	0.324216	0.232776	0.5569929	0.053746	0.3289988	0.095369
Julio	0.324216	0.276750	0.6009666	0.043974	0.3956848	0.066686
Agosto	0.324222	0.310950	0.6351725	0.034206	0.4530515	0.057366

Cuadro 4.5: Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 2

De estos resultados, se puede interpretar que para los afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP entre febrero y abril 2009, la probabilidad de reclamo fue casi 3 veces mayor que la probabilidad de traspaso, observándose bajo riesgo de que un afiliado se traspase dado que realizó reclamo.

Para el escenario 3 (ver cuadro 4.6), se puede observar por ejemplo que para el mes de mayo la probabilidad F_{12} de que un afiliado *premium* atendido realice reclamo es de 0.40, mientras que la probabilidad F_{13} de que se traspase es de 0.17, con una tasa de riesgo Λ_{23} de 0.16

afiliados.

Mes	$F_{12}(s)$	$F_{13}(s)$	$F(s)$	$f(s)$	Λ_{23}	λ_{23}
Marzo	0.051618	0.040503	0.092121	0.092121	0.012241	0.012241
Abril	0.199490	0.093529	0.293019	0.200898	0.062614	0.050373
Mayo	0.406716	0.178367	0.585085	0.292066	0.169942	0.107328
Junio	0.406717	0.236698	0.643415	0.058330	0.238677	0.068735
Julio	0.406718	0.284422	0.691140	0.047725	0.291405	0.052728
Agosto	0.406718	0.326842	0.733560	0.042420	0.341778	0.050373
Setiembre	0.406720	0.395774	0.802494	0.068934	0.415687	0.073909

Cuadro 4.6: Funciones del tiempo y riesgo para el escenario 3

De estos resultados, se puede interpretar que los afiliados *premium* que fueron atendidos por la AFP entre marzo y mayo 2009, la probabilidad de reclamo fue 2.3 veces mayor que la probabilidad de traspaso, observándose bajo riesgo que un afiliado se traspase dado que realizó reclamo.

En resumen, de los tres escenarios se tiene que la probabilidad de reclamo de un afiliado en el mes de mayo es superior que en los meses de marzo y abril, pudiéndose atribuir este comportamiento de reclamo al hecho de que los afiliados reciben su estados de cuenta en el mes de mayo, esto les brindaría información actual para realizar un reclamo.

Es posible observar que la tasa de riesgo para los tres escenarios es baja, esto se interpreta como que el número esperado de afiliados que se traspasan dado que realizan reclamo no llega a un afiliado. Es decir que los reclamos serían factores de protección, resultando conveniente para la AFP que un afiliado reclame, dado que un reclamo no solo ayuda a corregir las deficiencias de la AFP, sino también es una oportunidad para establecer un contacto directo con el afiliado, conocerlo, escuchar sus inquietudes, disconformidades y buscar soluciones que permitan afianzar la fidelidad de los afiliados, que se traduce en menor cantidad de traspasos.

4.5. Interpretación de las Gráficas

Se muestran las gráficas correspondientes a la función conjunta acumulada de transición $F(s) = F_{12}(s) + F_{13}(s)$ y la función acumulada de riesgo Λ_{23} . En el escenario 1, se observa que la probabilidad que un afiliado, atendido entre enero y julio, realice reclamo o se traspase alcanza el 51.13 %.

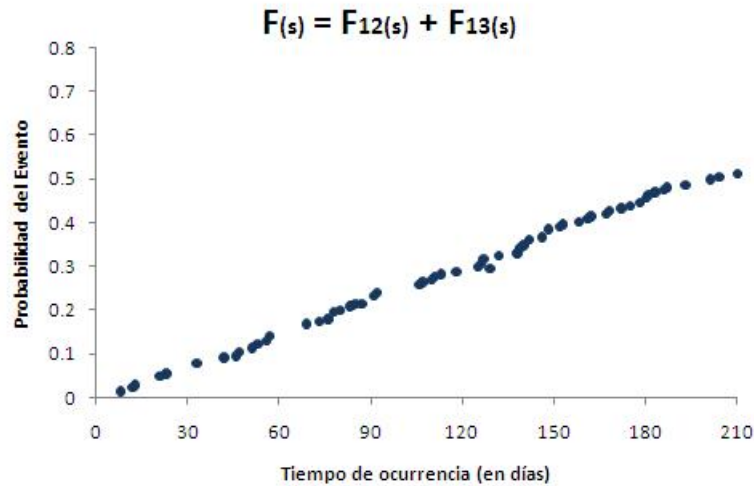


Figura 4.8: Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 1)

En el escenario 1, la función acumulada de riesgo Λ_{23} presenta una mayor pendiente entre los días 138 y 152, que se interpreta como una mayor intensidad de traspasos dado el reclamo, durante la segunda quincena del mes de mayo.

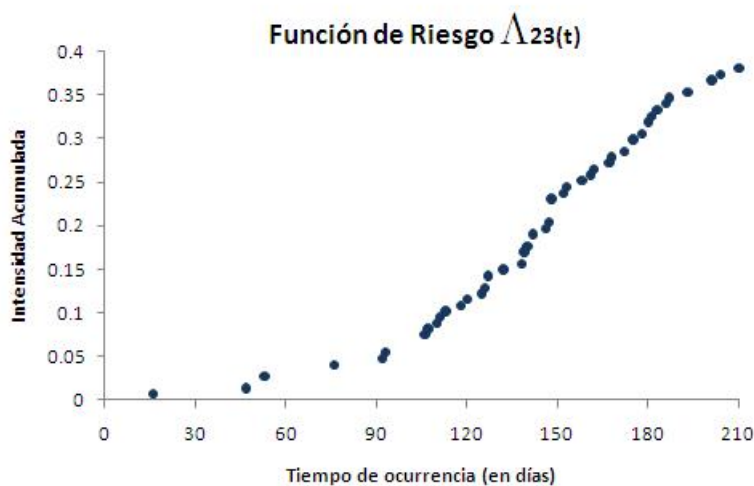


Figura 4.9: Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 1)

En el escenario 2, se observa que la probabilidad que un afiliado, atendido entre febrero y agosto, realice reclamo o se traspase alcanza el 63.51%; con un incremento de reclamos a partir del día 76.

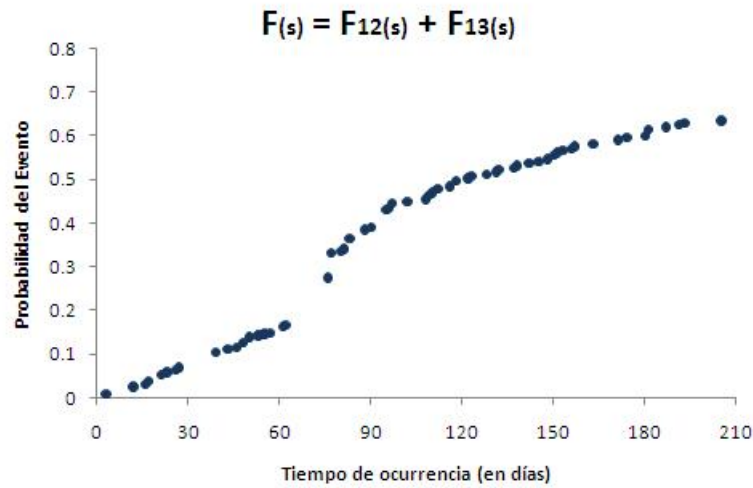


Figura 4.10: Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 2)

De igual forma, se observa que la función acumulada de riesgo Λ_{23} presenta una mayor pendiente entre los días 108 y 122, que se interpreta como una mayor intensidad de traspasos dado el reclamo, durante la segunda quincena del mes de mayo.

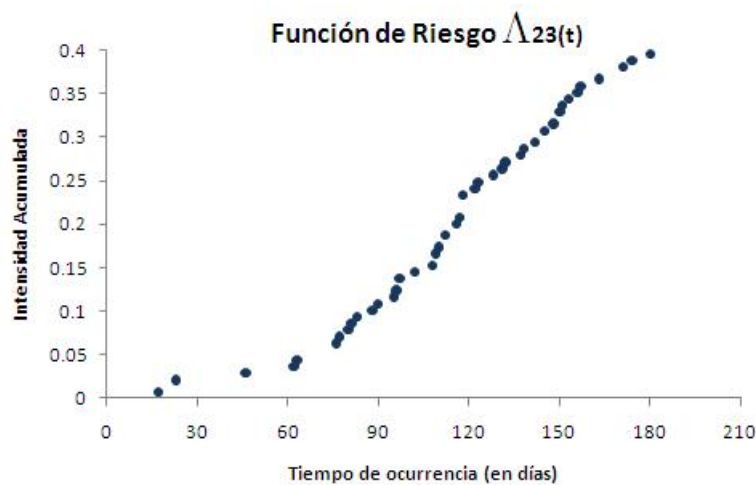


Figura 4.11: Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 2)

En el escenario 3, se observa que la probabilidad que un afiliado, atendido entre marzo y setiembre, realice reclamo o se traspase alcanza el 80.24 %; con un incremento de reclamos a partir del día 46.

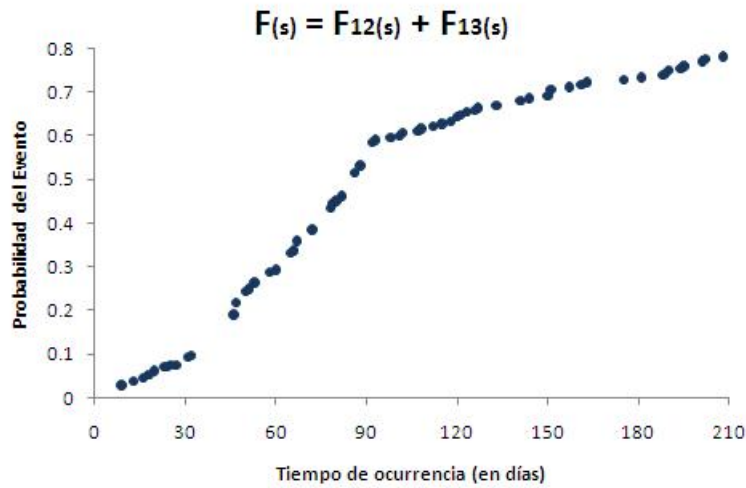


Figura 4.12: Función acumulada de tiempo $F(s)$ (Escenario 3)

Finalmente, se observa que la función acumulada de riesgo Λ_{23} presenta una mayor pendiente entre los días 78 y 92, que se interpreta como una mayor intensidad de traspasos dado el reclamo, durante la segunda quincena del mes de mayo.

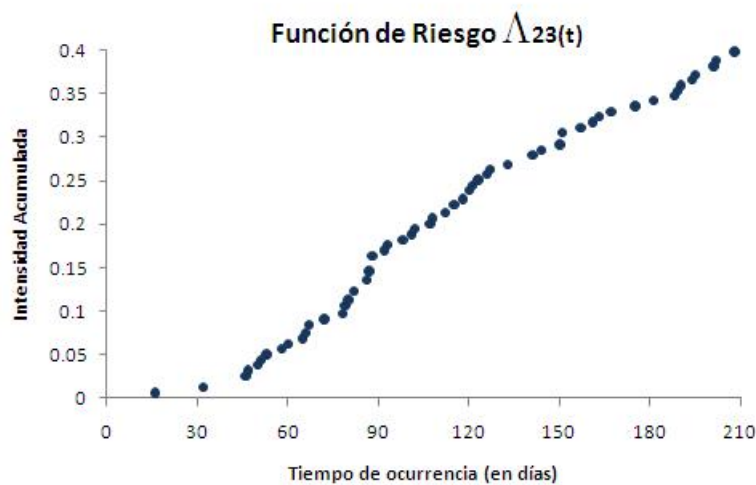


Figura 4.13: Función acumulada de riesgo $\Lambda_{23}(s)$ (Escenario 3)

Se mantiene una semejanza de comportamiento en las curvas de los tres escenarios, siendo este comportamiento más similar en el caso de las gráficas de Λ_{23} , mientras que en las gráficas de $F(s)$ el comportamiento está afectado por el mes de inicio del estudio y por el periodo del escenario, ya que a medida que avanza el año (mayor número de meses) se presenta casi la totalidad de reclamos. Así se puede notar que en el escenario 2 y 3, el valor de F_{12} es mayor en relación al escenario 1, lo que afecta a $F(s)$.

Las gráficas de Λ_{23} de los tres escenarios presentan un patrón de comportamiento similar, en todas estas hay un segmento de curva que muestra una pendiente pronunciada durante el mes de mayo.

Por otro lado, observar que los valores obtenidos de f_{13} presentan un valor máximo en el mes de mayo para cada escenario, tal como se muestra en el siguiente cuadro 4.7:

Escenario 1		Escenario 2		Escenario 3	
Mes	$f_{13}(s)$	Mes	$f_{13}(s)$	Mes	$f_{13}(s)$
Enero	0.010457	Febrero	0.014939	Marzo	0.040503
Febrero	0.011951	Marzo	0.037064	Abril	0.053026
Marzo	0.040508	Abril	0.048858	Mayo	0.084838
Abril	0.066409	Mayo	0.078170	Junio	0.058331
Mayo	0.090539	Junio	0.053745	Julio	0.047724
Junio	0.066418	Julio	0.043974	Agosto	0.042420
Julio	0.054341	Agosto	0.034200	Setiembre	0.068932

Cuadro 4.7: Funciones del tiempo de traspaso $f_{13}(s)$ para cada escenario

De este último análisis, se deduce que tanto la intensidad de traspasos como la probabilidad de que ocurra un traspaso sin haber hecho reclamo, es máxima en el mes de mayo.

La forma de las gráficas de $F(s)$ del escenario 1 y del escenario 2 son parecidas y ambas difieren del escenario 3. En el escenario 3, se nota que hay un crecimiento marcado entre el día 45 y 90, debido a un incremento de la F_{12} , lo que se interpreta como un mayor número de reclamos en el mes de mayo.

Capítulo 5

Conclusiones y Sugerencias Generales

5.1. Conclusiones en relación al modelo

- El modelo “Enfermedad - Muerte” está orientado al análisis de datos en individuos que se encuentran en situaciones extremas como el desarrollo de una enfermedad terminal o en procesos en los que no existe retorno a un estado anterior como la pérdida de un cliente.
- El modelo “Enfermedad - Muerte” obedece a un proceso de Markov el cual permite analizar el comportamiento de individuos en diferentes estados y tiempos. Las variables consideradas en el modelo no tienen distribuciones conocidas, no poseen una forma definida, por lo que se trabaja de forma empírica.
- El algoritmo de estimación autoconsistente es una herramienta adecuada para el cálculo de estimadores de máxima verosimilitud en modelos no paramétricos, con tiempos en intervalos censurados y pérdida de estados intermedios, porque facilita los cálculos proporcionando fórmulas que resultan explícitas.
- De la aplicación del modelo, se tiene que no siempre es posible conocer el tiempo exacto en que un cliente hace la transición a un estado de reclamo. Considerar estos tiempos como exactos podrían sobrestimar la función de intensidad de pérdida de clientes por reclamo. El uso de intervalos censurados resulta conveniente para el tratamiento de este tipo de datos censurados, debido a que mejora la precisión del estimador.
- Asimismo, la pérdida de información del estado intermedio hace que la intensidad de pérdida de clientes se vea afectada, pudiendo aumentar o disminuir. El modelo considera tiempos potenciales de transición para controlar la pérdida de información que ocurre cuando los clientes no formalizan su reclamo.

5.2. Conclusiones en relación a la aplicación a la AFP

- La probabilidad de traspaso $f_{13}(s)$ estimada a partir del modelo muestra mayor magnitud en el mes de mayo, pudiéndose explicar este comportamiento al hecho de que en ese mes los afiliados reciben el estado de cuenta, lo que les permitiría contar con información real para tomar decisiones.
- El comportamiento de la función conjunta de reclamos y traspasos $F(s) = F_{12}(s) + F_{13}(s)$ está afectada por el mes de inicio del estudio, observándose que en los meses con mayor probabilidad de reclamo la curva $F(s)$ presenta pendiente pronunciada.
- La tasa de riesgo Λ_{23} estimada a partir del modelo es pequeña, interpretándose esta como el esperado de que un afiliado que realiza reclamo se traspase a otra AFP; los reclamos resultarían más bien un factor de protección, pudiendo ser hasta favorable para la AFP que un afiliado reclame.
- El comportamiento de la función de riesgo Λ_{23} también posee un segmento de curva donde la pendiente es máxima, lo que estaría explicado por un incremento en el riesgo de traspasos dado el reclamo, durante el mes de mayo.

5.3. Sugerencias en relación al modelo

- El modelo de estudio resulta limitado, no permite el retorno de un estado intermedio a un estado inicial, solo la transición a un estado final. En la realidad, en enfermedades como el cáncer o el VIH, los pacientes desarrollan eventos no fatales (enfermedades oportunistas) que pueden recuperarse y posteriormente retornar a un estado inicial, por lo que se podría ampliar el presente estudio, incluyendo esta posibilidad.
- Joly et al.(2002) desarrolló un método de estimación de máxima verosimilitud penalizado con el objeto de obtener estimadores suavizados, para las intensidades de transición que no consideran las pérdidas de estados. Un tema interesante para una futura investigación sería adicionar en la función de verosimilitud estudiada por Joly et al. las pérdidas de transición definidas por Frydman (2008).
- Uno de los puntos débiles del modelo es que considera una población cerrada, lo que no está acorde con la realidad y afecta al cálculo de los estimadores. Por esta razón, sería apropiado diseñar un modelo en el cual la población no es cerrada y evaluar la sensibilidad de los estimadores.

5.4. Sugerencias para continuar la investigación en la aplicación a la AFP

Se recomendarían las siguiente sugerencias:

- Dar mayor información al afiliado sobre los distintos canales que tiene para reclamar como la agencia, telemarketing, la pagina web, el correo electrónico, etc., de manera que estos reclamos se conviertan en una oportunidad para conocer mejor a los clientes y estar atento a sus necesidades. Esta sugerencia se basa en el hecho de que los reclamos han resultado ser un factor de protección para la empresa
- Adicionar a la entrega del estado de cuenta una encuesta simple que detecte el grado de satisfacción del afiliado y que a la vez sirva como un reclamo automático. Esta sugerencia nace a partir de que el mayor número de traspasos ocurre en el mes de mayo, cuando el afiliado recibe el estado de cuenta.
- Completar el estudio para un periodo anual, dividiendo a los datos según la entrega cuatrimestral de los estados de cuenta, con el objetivo de hacer una comparación en el movimiento de los clientes y recomendar propagandas o publicidad en los meses en que el riesgo de traspasos por reclamo sea mayor.
- Replicar el cálculo de F_{12} , F_{13} , Λ_{23} según el motivo de reclamo, con la finalidad de buscar soluciones en cada caso; así como de investigar la importancia de cada motivo de reclamo respecto del traspaso.

Apéndice A

Resultados Teóricos

A.1. Definición de las Ecuaciones de Autoconsistencia

Se definen las siguientes cantidades y se derivan estas expresiones para hallar las ecuaciones en (3.16-3.19).

Para, $1 \leq m \leq \tilde{N}$, y $1 \leq i \leq I$; se puede demostrar la misma expresión para $\tilde{N} < m \leq M$.

$$\begin{aligned}
 \mu_{mi} &= : P(S \in Q_i | T = t_m, S \in A_m) = P(S \in Q_i, T = t_m) / P(S \in A_m, T = t_m) \\
 &= \beta_{im} z_i \left(\prod (r_i, t_m) \right) / \sum_{p=1}^I \beta_{pm} z_p \left(\prod (r_p, t_m) \right) \\
 &= \beta_{im} z_i \left(\prod (r_i, R_m) \right) / \sum_{p=1}^I \beta_{pm} z_p \left(\prod (r_p, R_m) \right),
 \end{aligned}$$

Para, $1 \leq i \leq I'$, y $1 \leq j \leq J$,

$$\bar{\mu}_{ji} =: P(S \in Q_i | S \geq s_j) = \frac{\alpha_j z_i}{\sum_{p=1}^{I'} \alpha_p z_p}$$

Para, $1 \leq i \leq I$, y $1 \leq u \leq U$

$$\begin{aligned}
 \eta_{ui} &= : P(S \in Q_i | \{\delta_{M+u} = 1, L_{M+u} \leq S \leq t_{M+u}^-, T = t_{M+u}\} \cup \{\delta_{M+u} = 0, S = t_{M+u}\}) \\
 &= \frac{P(S \in Q_i, \delta_{M+u} = 1, T = t_{M+u})}{\lambda_{M+u} \int_{L_{M+u}}^{t_{M+u}^-} \left(\prod (s, t_{M+u}) \right) dF_{12}(s) + F_{13}(t_{M+u}) - F_{13}(t_{M+u}^-)} \\
 &= \lambda_{M+u} \left(\prod (r_i, t_{M+u}) \right) \beta_{i, M+u} z_i / L_u^U,
 \end{aligned}$$

y para, $I \leq i \leq I', 1 \leq u \leq U$

$$\begin{aligned}
 \eta_{ui} &= : P(S = e_{i-I}^* | \{\delta_{M+u} = 1, L_{M+u} \leq S \leq t_{M+u}^-, T = t_{M+u}\} \cup \{\delta_{M+u} = 0, S = t_{M+u}\}) \\
 &= I(t_{M+u} = e_{i-I}^*) z_i / L_u^U,
 \end{aligned}$$

Finalmente, para $1 \leq i \leq I, 1 \leq c \leq C$

$$\begin{aligned} \gamma_{ci} &= : P(S \in Q_i | \{\delta_{W+c} = 1, L_{W+c} \leq S \leq t_{W+c}, T > t_{W+c}\} \cup \{\delta_{W+c} = 0, S > t_{W+c}\}) \\ &= P(S \in Q_i, \delta_{W+c} = 1, T > t_{W+c})/L_c^C + P(S \in Q_i, \delta_{W+c} = 0, S > t_{W+c})/L_c^C \\ &= \alpha_{i, J+c} z_i / L_c^C + \left(\prod (r_i, t_{W+c}) \right) \beta_{i, W+c} z_i / L_c^C, \end{aligned}$$

donde γ_{ci} es la probabilidad condicional para una c -ésima observación en (3.5) que hace una transición al estado 2, en el intervalo Q_i y es censurada por la derecha en el estado 2, en t_{W+c} , o es censurada por la derecha en el estado 1, en Q_i .

Para $I \leq i \leq I'$, y $1 \leq c \leq C$

$$\begin{aligned} \gamma_{ci} &= : P(S = e_{i-I}^* | \{\delta_{W+c} = 1, L_{W+c} \leq S \leq t_{W+c}, T > t_{W+c}\} \cup \{\delta_{W+c} = 0, S > t_{W+c}\}) \\ &= P(S = e_{i-I}^*, \delta_{W+c} = 0, S > t_{W+c})/L_c^C \\ &= \alpha_{i, J+c} z_i / L_c^C, \end{aligned}$$

donde γ_{ci} es la probabilidad para una c -ésima observación en (3.5) que es censurada por la derecha en el estado 1, en t_{W+c} y hará una transición final al estado 3, en el tiempo e_{i-I}^* .

A continuación, se definen las expresiones para las cantidades en (3.20), las cuales son:

$$\begin{aligned} \rho_{mn} &= : \begin{cases} I(t_m \geq t_n^*) P(S < t_n^* | T = t_m, S \in A_m), & 1 \leq m \leq \tilde{N} \\ I(t_m \geq t_n^*) P(S < t_n^* | T > t_m, S \in A_m), & \tilde{N} < m \leq M \end{cases} \\ \pi_{un} &= : I(t_{M+u} \geq t_n^*) P(S < t_n^*, \delta_{M+u} = 1 | T = t_{M+u}, S \geq L_{M+u}), & 1 \leq u \leq U \\ \sigma_{cn} &= : I(t_{W+c} \geq t_n^*) P(S < t_n^*, \delta_{W+c} = 1 | T > t_{W+c}, S \geq L_{W+c}), & 1 \leq c \leq C, \end{aligned}$$

dadas las definiciones de μ_{mi} , η_{ui} y γ_{ci} .

A.2. Demostración de la parte (a) del Teorema 2

Se consideran las funciones indicadoras I_{ji}^J , I_{mi} , $I_{M+u,i}$ y $I_{W+c,i}$, tales que

$$I_{ji}^J = : \begin{cases} 1, & \text{si una } j\text{-ésima observación en 3.3 hace una transición } 1 \rightarrow 2 \text{ en } Q_i, \\ 0, & \text{si no hace la transición} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq I'$. Las otras variables indicadoras tienen similar definición, con respecto a las

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

observaciones en (3.1), (3.4) y (3.5), respectivamente. Luego

$$E(N_{12}(Q_i)|D) = E\left(\sum_{j=1}^J I_{ji}^J + \sum_{m=1}^M I_{mi} + \sum_{u=1}^U I_{M+u,i} + \sum_{c=1}^C I_{W+c,i}\right), (1 \leq i \leq I)$$

$$E(N_{13}(Q_i)|D) = E\left(\sum_{j=1}^J I_{ji}^J + \sum_{m=1}^M I_{mi} + \sum_{u=1}^U I_{M+u,i} + \sum_{c=1}^C I_{W+c,i}\right), (I < i \leq I')$$

Para, $1 \leq i \leq I$, y usando (3.16-3.19) se tiene

$$E\left(\sum_{j=1}^J I_{ji}^J\right) = P(S \in Q_i | S \geq s_j) = \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_{ij} z_i}{\sum_{p=1}^{I'} \alpha_{pj} z_p} = \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji}$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{m=1}^M I_{mi}\right) &= E\left(\sum_{m=1}^{\tilde{N}} I_{mi}\right) + E\left(\sum_{m=\tilde{N}+1}^M I_{mi}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\tilde{N}} P(S \in Q_i | T = t_m, S \in A_m) + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M P(S \in Q_i | T > t_m, S \in A_m) \\ &= \frac{(\prod(r_i, R_m)) \beta_{im} z_i}{\sum_{p=1}^I (\prod(r_p, R_m)) \beta_{pm} z_i} = \sum_{m=1}^M \mu_{mi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{u=1}^U I_{M+u,i}\right) &= \sum_{u=1}^U P(S \in Q_i | \{\delta_{M+u} = 1, T = t_{M+u}, S \in A_{M+u}\} \cup \{\delta_{M+u} = 0, T = t_{M+u}\}) \\ &= \sum_{u=1}^U \frac{P(\delta_{M+u} = 1, T = t_{M+u}, S \in Q_i)}{P(\delta_{M+u} = 1, T = t_{M+u}, S \in A_{M+u}) + P(\delta_{M+u} = 0, T = t_{M+u})} \\ &= \sum_{u=1}^U \frac{\lambda_{M+u} (\prod(r_i, t_{M+u}^-)) \beta_{i,M+u} z_i}{L_u^U} = \sum_{u=1}^U \eta_{ui} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{c=1}^C I_{W+c,i}\right) &= \sum_{c=1}^C P(S \in Q_i | \{\delta_{W+c} = 1, T > t_{W+c}, S \in A_{W+c}\} \cup \{\delta_{W+c} = 0, T > t_{W+c}\}) \\ &= \sum_{c=1}^C \frac{P(\delta_{W+c} = 1, T > t_{W+c}, S \in Q_i) + P(\delta_{W+c} = 0, T > t_{W+c}, S \in Q_i)}{P(\delta_{W+c} = 1, T > t_{W+c}, S \in Q_i) + P(\delta_{W+c} = 0, T > t_{W+c})} \\ &= \sum_{c=1}^C \frac{\alpha_{i,J+c} z_i + (\prod(r_i, t_{W+c}^-)) \beta_{i,W+c} z_i}{L_c^C} = \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} \end{aligned}$$

Entonces, para $1 \leq i \leq I$,

$$E[N_{12}(Q_i)|D] = \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{m=1}^M \mu_{mi} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}$$

a partir de $EE[N_{12}(Q_i)|D] = N * z_i$, se tiene la ecuación (3.21). Para $I < i \leq I'$,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^J I_{ji}^J\right) &= P(S \in Q_i | S \geq s_j) = \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_{ij} z_i}{\sum_{p=1}^{I'} \alpha_{pj} z_p} = \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} \\ E\left(\sum_{u=1}^U I_{M+u,i}\right) &= \sum_{u=1}^U \frac{\sum_{p=I+1}^{I'} I(t_{M+u} = e_{p-I}^*) z_p}{L_u^U} = \sum_{u=1}^U \eta_{ui} \\ E\left(\sum_{c=1}^C I_{W+c,i}\right) &= \sum_{c=1}^C \frac{\alpha_{i,J+c} z_i}{L_c^C} = \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} \end{aligned}$$

así entonces,

$$E[N_{13}(Q_i)|D] = c_{i-I} \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}$$

a partir de $EE[N_{13}(Q_i)|D] = N * z_i$, se tiene la ecuación (3.22). Finalmente, se tiene que el conjunto de ecuaciones en (3.16) toman la forma explicita dada en (3.23). Para $1 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} E[N_{23}(t_n^*)|D] &= I(n \leq N') d_n + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m < t_n^*) P(S < t_n^*, T = t_n^* | T > t_m, S \in A_m) \\ &+ \sum_{j=1}^J P(S < t_n^*, T = t_n^* | S \geq s_j) \\ &+ \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) P(\delta_{M+u} = 1 | S \geq L_{M+u}, T = t_{M+u}) \\ &+ \sum_{c=1}^C I(t_{W+c} < t_n^*) P(\delta_{W+c} = 1, S < t_n^*, T = t_n^* | T > t_{W+c}, S \geq L_{W+c}) \\ &+ \sum_{c=1}^C P(S < t_n^*, T = t_n^* | S > t_{W+c}) \end{aligned}$$

se tiene que,

$$\sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) P(\delta_{M+u} = 1 | S \geq L_{M+u}, T = t_{M+u}) = \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui}$$

Luego se considera,

$$\begin{aligned}
 E[Y_2(t_n^* -) | D] &= I(n \leq N') d_n + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} I(t_m > t_n^*) P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | T = t_m, S \in A_m) \\
 &+ \sum_{m=\tilde{N}+1}^M P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | T > t_m, S \in A_m) \\
 &+ \sum_{j=1}^J P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | S \geq s_j) + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} \\
 &+ \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} > t_n^*) P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | T = t_{M+u}, S \geq L_{M+u}) \\
 &+ \sum_{c=1}^C P(S < t_n^*, T \geq t_n^*, \delta_{W+c} = 1 | T > t_{W+c}, S \geq L_{W+c}) \\
 &+ \sum_{c=1}^C P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | S \geq t_{W+c})
 \end{aligned}$$

y se comparan los términos en la expresión para $E[N_{23}(t_n^*) | D]$ con los de la expresión para $E[Y_2(t_n^* -) | D]$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^J P(S < t_n^*, T = t_n^* | S \geq s_j) &= \lambda_n \sum_{j=1}^J P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | S \geq s_j) \\
 \sum_{c=1}^C P(S < t_n^*, T = t_n^* | S \geq t_{W+c}) &= \lambda_n \sum_{c=1}^C P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | S \geq t_{W+c}) \\
 I(n \leq N') d_n + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m < t_n^*) P(S < t_n^*, T = t_n^* | T > t_m, S \in A_m) \\
 &= \lambda_n \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m < t_n^*) P(S < t_n^*, T \geq t_n^* | T > t_m, S \in A_m) \\
 &= \lambda_n \sum_{c=1}^C I(t_{W+c} < t_n^*) P(\delta_{W+c} = 1, S < t_n^*, T = t_n^* | T > t_{W+c}, S \geq L_{W+c}) \\
 &= \lambda_n \sum_{c=1}^C I(t_{W+c} < t_n^*) P(S < t_n^*, T \geq t_n^*, \delta_{W+c} = 1 | T > t_{W+c}, S \geq L_{W+c})
 \end{aligned}$$

Se introduce la notación en (3.20)

$$\begin{aligned}
 E[N_{23}(t_n^*)|D] - \lambda_n E[Y_2(t_n^*)|D] &= I(n \leq N')d_n + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} \\
 -\lambda_n \left[\sum_{m=1}^M \rho_{mn} + \sum_{u=1}^U \right. \\
 \left. \pi_{un} + \sum_{c=1}^C \sigma_{cn} \right] &= 0
 \end{aligned}$$

que son las ecuaciones en (3.23). Esto completa la prueba de la parte (a) del Teorema 2.

A.3. Demostración de la parte (b) del Teorema 2

Se consideran las ecuaciones de (3.14)

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \frac{\partial \log L}{\partial z_i} - a + b_i = 0 \quad (1 \leq i \leq I')$$

se multiplica la expresión por z_i y se hace la sumatoria respecto de i

$$\sum_{i=1}^{I'} \frac{\partial \log L}{\partial z_i} = a$$

A continuación se demuestra que $a = N^*$. Para $1 \leq i \leq I$, de (3.12) y (3.13)

$$\begin{aligned}
 z_i \frac{\partial \log L}{\partial z_i} &= \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_{ij} z_i}{\sum_{p=1}^{I'} \alpha_{pj} z_p} + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_{im} z_i (\prod (r_i, Rm))}{\sum_{p=1}^{I'} \beta_{pm} z_p (\prod (r_p, Rm))} \\
 &+ \sum_{u=1}^U \frac{\lambda_{M+u} (\prod (r_i, t_{M+u})) \beta_{i, M+u} z_i}{L_u^U} \\
 &+ \sum_{c=1}^C \frac{\alpha_{i, J+c} z_i + (\prod (r_i, t_{W+c})) \beta_{i, W+c} z_i}{L_c^C} \\
 &= \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{m=1}^M \mu_{mi} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}
 \end{aligned}$$

para $I < i \leq I'$

$$z_i \frac{\partial \log L}{\partial z_i} = c_{i-I} \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_{ij} z_i}{\sum_{i=1}^{I'} \alpha_{ij} z_i} + \sum_{u=1}^U \frac{I(t_{M+u} = e_{i-I}^*) z_i}{L_u^U} + \sum_{c=1}^C \frac{\alpha_{i, J+c} z_i}{L_c^C}$$

$$= c_{i-I} + \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci}$$

Por lo tanto, en efecto

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{I'} z_i \frac{\partial \log L}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^I z_i \frac{\partial \log L}{\partial z_i} + \sum_{i=I+1}^{I'} z_i \frac{\partial \log L}{\partial z_i} \\ &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{m=1}^M \mu_{mi} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} \right) \\ &+ \sum_{i=I+1}^{I'} \left(c_{i-I} + \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} \right) \\ &= J + \tilde{K} + M + U + C \equiv N^* \end{aligned}$$

Ahora se multiplica la i -ésima ecuación del primer conjunto de (3.14) por z_i dando las siguientes ecuaciones para z_i , $1 \leq i \leq I$

$$\sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{m=1}^M \mu_{mi} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} - N^* z_i = 0$$

y para z_i , $I < i \leq I'$

$$c_{i-I} + \sum_{j=1}^J \bar{\mu}_{ji} + \sum_{u=1}^U \eta_{ui} + \sum_{c=1}^C \gamma_{ci} - N^* z_i = 0$$

que son las ecuaciones en (3.21) y (3.22). A continuación se consideran las ecuaciones de (3.14) para λ_n , $1 \leq n \leq N$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \lambda_n} &- h_n + f_n = \frac{d_n}{\lambda_n} I(n \leq N_1) - (1 - \lambda_n)^{-1} \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) \\ &- (1 - \lambda_n)^{-1} \sum_{m=1}^M \frac{\sum_{i=1}^I (\prod(r_i, R_m)) I(t_n^* \in (r_i, R_m)) \beta_{im} z_i}{\sum_{i=1}^I (\prod(r_i, R_m)) \beta_{im} z_i} \\ &+ \sum_{u=1}^U \frac{I(\lambda_{M+u} = \lambda_n) \sum_{i=1}^I (\prod(r_i, t_{M+u})) \beta_{i, M+u} z_i}{L_u^U} \\ &- (1 - \lambda_n)^{-1} \sum_{u=1}^U \frac{I(\lambda_{M+u} \neq \lambda_n) \lambda_{M+u} \sum_{i=1}^I (\prod(r_i, t_{M+u})) \beta_{i, M+u} z_i I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u}))}{L_u^U} \\ &- (1 - \lambda_n)^{-1} \sum_{c=1}^C \frac{\sum_{i=1}^I (\prod(r_i, t_{W+c})) \beta_{i, W+c} z_i I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}))}{L_c^C} - h_n + f_n = 0 \end{aligned}$$

se multiplica la n -ésima ecuación por $(1 - \lambda_n)\lambda_n$ resultando

$$\begin{aligned}
 (1 - \lambda_n)d_n I(n \leq N_1) & - \lambda_n \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) - \lambda_n \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(t_n^* \in (r_i, R_m]) \\
 & + (1 - \lambda_n) \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} = \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} \\
 & - \lambda_n \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} \neq \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u})) \\
 & - \lambda_n \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}]) = 0
 \end{aligned}$$

y luego se despeja

$$\begin{aligned}
 \lambda_n & = \left[1(n \leq N')d_n + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} \right] \\
 & \times \left[1(n \leq N')d_n + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} + \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) \right. \\
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(t_n^* \in (r_i, R_m]) \\
 & + \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} \neq \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u})) \\
 & \left. + \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}]) \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

(A.@2)

Se puede demostrar que el denominador en la n -ésima ecuación tratada, es la misma que la de la n -ésima ecuación en (3.23) , se prueban las siguientes tres igualdades:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \rho_{mn} & = 1(n \leq N')d_n + \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(t_n^* \in (r_i, R_m]) \\
 \sum_{u=1}^U \pi_{un} & = \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} = \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} + \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} \neq \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u})) \\
 \sum_{c=1}^C \sigma_{cn} & = \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}])
 \end{aligned}$$

se usan las expresiones para ρ_{mn} , π_{un} y σ_{cn} , dadas en (3.20). Se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \rho_{mn} &= \sum_{m=1}^M I(t_m \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &= \sum_{m=1}^M I(t_m = t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) + \sum_{m=1}^M I(t_m > t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &= \sum_{m=1}^{\tilde{N}} I(t_m = t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m = t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &+ \sum_{m=1}^{\tilde{N}} I(t_m > t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m > t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &= 1(n \leq N')d_n + \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(t_m \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &+ \sum_{m=1}^{\tilde{N}} I(t_m > t_n^*) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*))
 \end{aligned}$$

Se sustituyen las igualdades $I(t_m \geq t_n^*) = I(R_m < t_n^* < t_m) + I(t_n^* \leq R_m)$ y $I(t_m > t_n^*) = I(R_m < t_n^* < t_m) + I(t_n^* \leq R_m)$ en las últimas expresiones dadas, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \rho_{mn} &= 1(n \leq N')d_n + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} I(R_m < t_n^* < t_m) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &+ \sum_{m=\tilde{N}+1}^M I(R_m < t_n^* \leq t_m) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &+ \sum_{m=1}^M I(t_n^* \leq R_m) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &= 1(n \leq N')d_n + \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) + \sum_{m=1}^M I(t_n^* \leq R_m) \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(Q_i \in [L_m, t_n^*)) \\
 &= 1(n \leq N')d_n + \sum_{m=1}^M I(t_n^* \in G_m) + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \mu_{mi} I(r_i < t_n^* \leq R_m)
 \end{aligned}$$

lo cual prueba la primera igualdad. De forma similar, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \eta_{ui} I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u})) &= \eta_{ui} I(Q_i \in [L_{M+u}, t_n^*)) I(t_{M+u} > t_n^*) \\
 \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c})) &= \gamma_{ci} I(Q_i \in [L_{W+c}, t_n^*)) I(t_{W+c} \geq t_n^*)
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} &= \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} + \sum_{u=1}^U I(\lambda_{M+u} \neq \lambda_n) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(t_n^* \in (r_i, t_{M+u})) \\
 &= \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} = t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} + \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} > t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I(Q_i \in [L_{M+u}, t_n^*)) \\
 &= \sum_{u=1}^U I(t_{M+u} \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \eta_{ui} I() = \sum_{u=1}^U \pi_{un} I(Q_i \in [L_{M+u}, t_n^*))
 \end{aligned}$$

y

$$\sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}]) = \sum_{c=1}^C I(t_{W+c} \geq t_n^*) \sum_{i=1}^I \gamma_{ci} I(t_n^* \in (r_i, t_{W+c}]) = \sum_{c=1}^C \sigma_{cn}$$

lo cual demuestra que el denominador es en efecto el mismo denominador de (3.23). Esto completa la prueba de la parte (b) del Teorema 2.

A.4. Algoritmo de autoconsistencia para el cálculo de EMV

Para importar los datos del archivo afiliados.txt

```
afp <- read.table("C:/Users/Genaro/Desktop/Afiliados.txt", header=TRUE,
sep="\t", na.strings="", dec=".", strip.white=TRUE)
```

Para asignar las variables M, Ñ, J, Kt, U, C.

```
D=length(afp[,1])
```

```
i=1
```

```
lm=0
```

```
rm=0
```

```
tm=0
```

```
for(d in 1:D){
```

```
if(afp[d,1]=="M"|afp[d,1]=="N"){
```

```
lm[i]=afp[d,6];rm[i]=afp[d,8];tm[i]=afp[d,9];M=i;i=i+1;} else i=i
```

```
}
```

```
i=1
```

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

```

lu=0
ru=0
tmu=0

for(d in 1:D){
if(afp[d,1]=="U"){
lu[i]=afp[d,6];ru[i]=afp[d,8];tmu[i]=afp[d,9];U=i;i=i+1}else i=i
}

i=1
lc=0
rc=0
twc=0

for(d in 1:D){
if(afp[d,1]=="C") {
lc[i]=afp[d,6];rc[i]=afp[d,8];twc[i]=afp[d,9];C=i;i=i+1}else i=i
}

i=1
ek=0
for(d in 1:D){
if(afp[d,1]=="K"){ek[i]=afp[d,9];Kt=i;i=i+1}else i=i
}

i=1
sj=0
for(d in 1:D){
if(afp[d,1]=="J"){sj[i]=afp[d,7];J=i;i=i+1}else i=i
}

```

Observaciones 1: M, Ñ, Kt, J, U, C

W=M+U

Mt=M+U+C

Ne=M+U+C+Kt+J

Conjunto de tiempos distinto

t=c(tm,tmu)

e=c(ek,tmu)

eke=as.integer(levels(factor(e)))

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

```
tne=as.integer(levels(factor(t)))
```

Multiplicidades

```
dn=as.integer(table(t))
```

```
ck=as.integer(table(e))
```

Observaciones 2

```
K=length(cke)
```

```
N=length(tne)
```

```
k1=as.integer(levels(factor(ek)))
```

```
n1=as.integer(levels(factor(tm)))
```

```
K1=length(k1)
```

```
N1=length(n1)
```

Cantidad de intervalos Q_i

```
I=round(Mt/2)
```

```
It=I+K
```

Generando los límites de intervalos Q_i

```
L=c(lm,lu,lc,tne,sj)
```

```
R=c(rm,ru,rc,tne,sj)
```

```
amplitud=1
```

```
l=0
```

```
r=0
```

```
for(i in 1:I){
```

```
  if(i<I) {
```

```
    r[i]=l[i]+amplitud;
```

```
    l[i+1]=r[i]+1}
```

```
  else
```

```
    r[i]=l[i]+amplitud
```

```
  }
```

Cálculo de Alfa (Indicadora del tiempo de salida "S")

```
sjc= c(sj,twc)
```

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

JC=J+C

```

a<-array(dim=c(It,JC))
I1=I+1
for(j in 1:JC){
for(i in 1:I){if(sjc[j]<=l[i]) a[i,j]=1 else a[i,j]=0}
for(i in I1:It){if(sjc[j]<=eke[i-I]) a[i,j]=1 else a[i,j]=0}
}

```

```

lmt=c(lm,lu,lc)
rmt=c(rm,ru,rc)

```

Cálculo de Beta (Indicadora del tiempo de salida "S")

```

b<-array(dim=c(I,Mt))
for(m in 1:Mt){
for(i in 1:I){
if(lmt[m]<=l[i] & r[i]<=rmt[m]) b[i,m]=1 else b[i,m]=0}
}

```

Valores iniciales

```

z=c(rep(1/It,It))
lambda=c(rep(0.5,W))

```

```

sum(z)

```

Creando la Función F= Prod(1 - Lambda)

```

F<-function(I,N,M,tne,rm){
g<-array(dim=c(M,N,I))
G<-array(dim=c(M,I))

for (m in 1:M){
for (i in 1:I){
for (n in 1:N){
if(r[i]<tne[n] & tne[n]<= rm[m]) g[m,n,i]=1-lambda[n]
else g[m,n,i]=1
}
}
G[m,i]=prod(g[m,1:N,i])
}
}

```

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

```
G
}
```

```
P=30
z1<-array(dim=c(P,It))
lambda1<-array(dim=c(P,N))
```

```
X<-function(z,lambda){
```

```
for (p in 1:P){
```

Cálculo de la función producto (ri,Rm], (ri,tmu], (ri,twc]

```
RM=F(I,N,M,tne,rm)
TMU=F(I,N,U,tne,tmu)
TWC=F(I,N,C,tne,twc)
```

Cálculo de LUu

```
I1=I+1
LU<-array(dim=c(U))
for (u in 1:U){
LU[u]=sum(z[I1:It])+lambda[M+u]*sum(TMU[u,1:I]*b[1:I,M+u]*z[1:I])}
```

Cálculo de LCc

```
LC<-array(dim=c(C))
for (c in 1:C){
LC[c]=sum(a[1:It,J+c]*z[1:It])+sum(TWC[c,1:I]*b[1:I,W+c]*z[1:I])}
```

Matrices de almacenamiento 1

```
mu<-array(dim=c(M,I))
for(m in 1:M){
for(i in 1:I){
mu[m,i]=(b[i,m]*z[i]*RM[m,i])/(sum(b[1:I,m]*z[1:I]*RM[m,1:I]))}
}
```

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

```

mus<-array(dim=c(J,It))
for(j in 1:J){
for(i in 1:It){
mus[j,i]=(a[i,j]*z[i])/(sum(a[1:It,j]*z[1:It]))}
}

eta<-array(dim=c(U,It))
I1=I+1
for(u in 1:U){
for(i in 1:I){
eta[u,i]=(lambda[M+u]*TMU[u,i]*b[i,M+u]*z[i])/LU[u]}
for(i in I1:It){
eta[u,i]=(z[i])/LU[u]}
}

gamma<-array(dim=c(C,It))
for(c in 1:C){
for(i in 1:I){
gamma[c,i]=(a[i,J+c]*z[i])/LC[c]+(TWC[c,i]*b[i,W+u]*z[i])/LC[c]}
for(i in I1:It){
gamma[c,i]=(a[i,J+c]*z[i])/LC[c]}
}

```

Matrices de almacenamiento 2

```

rho<-array(dim=c(M))
for(m in 1:M){rho[m]= sum(mu[m,1:I])}

phi<-array(dim=c(U))
for(u in 1:U){phi[u]= sum(eta[u,1:I])}

sigma<-array(dim=c(C))
for(c in 1:C){sigma[c]= sum(gamma[c,1:I])}

```

Algoritmo de Autoconsistencia z,lambda

```

for(i in 1:I){
z[i]= (sum(mu[1:M,i])+sum(mus[1:J,i])+sum(eta[1:U,i])+
sum(gamma[1:C,i]))/Ne
z1[p,i]=z[i]}

```



```

for(i in I1:It){
z[i]= (ck[i-I] +sum(mus[1:J,i])+sum(eta[1:U,i])+
sum(gamma[1:C,i]))/Ne
z1[p,i]=z[i]}

for(n in 1:N){
lambda[n]= (dn[n] +sum(eta[1:U,1:I]))/(sum(rho[1:M])+
sum(phi[1:U])+ sum(sigma[1:C])) lambda1[p,n]=lambda[n]}
}

print(z1)
print(lambda1)
print(sum(z1[P,1:It]))

print("F12(s)")
for(i in 1:I){print(sum(z[1:i]))}

Y=I+1
print("F13(s)")
for(i in Y:It){print(sum(z[161:i]))}

print("Lambda 23(t)")
for(i in 1:N){print(sum(lambda[1:i]))}
}

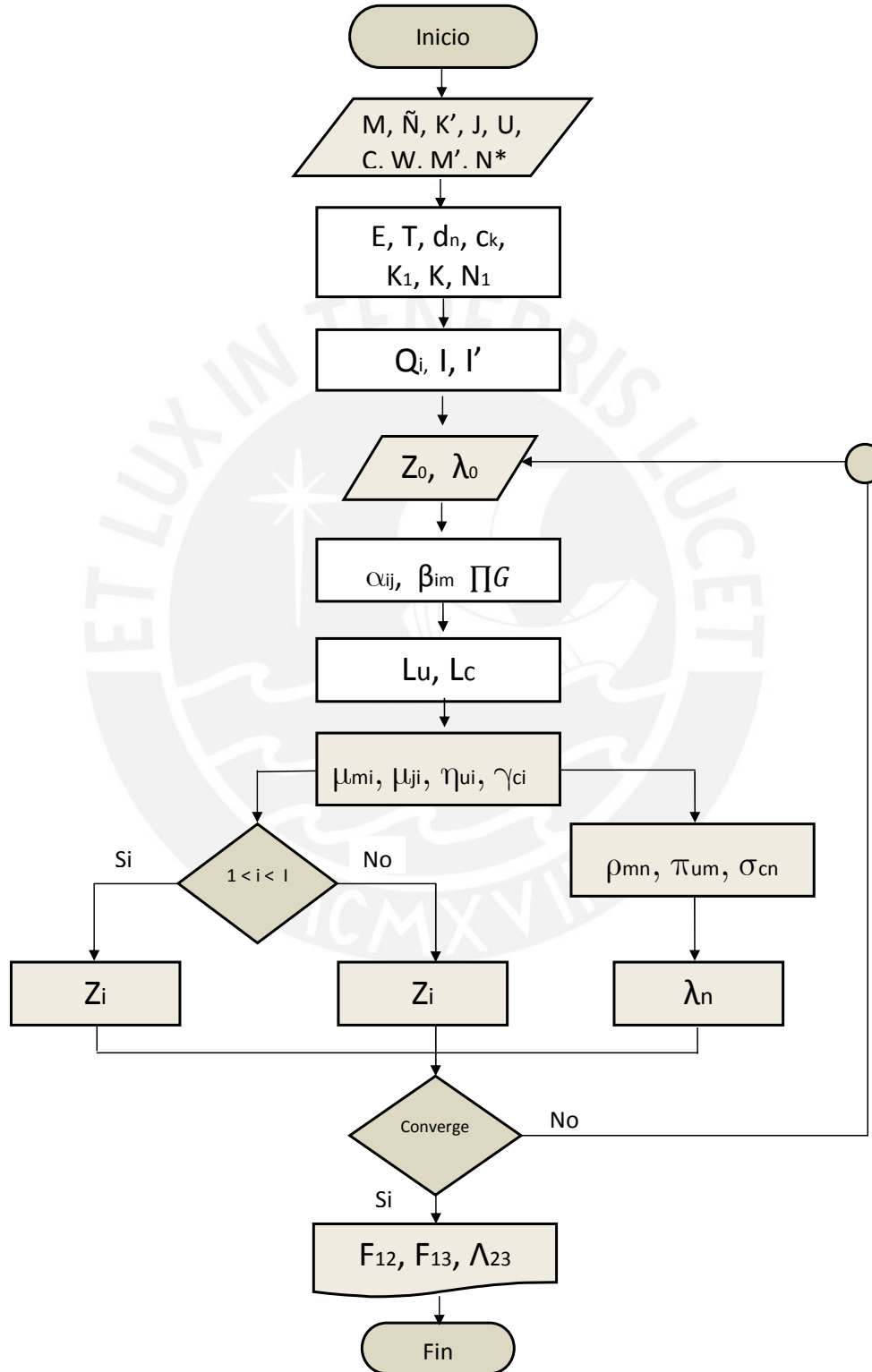
```

Algoritmo de autoconsistencia para calcular EMV

X(z,lambda)

APÉNDICE A. RESULTADOS TEÓRICOS

A.5. Diagrama de Flujo para el Cálculo de F_{12} , F_{13} y Λ_{23}



Bibliografía

- Aalen, O., Borgan, O. y K.Gjessing, H. (2008). *Survival and Event History Analysis*, Springer.
- Bhat, U. N. (1994). *Elements of Applied Stochastic Processes, 2nd Edition*, New york, Wiley.
- Chang, M. N. y Yang, G. L. (1987). Strong consistency of nonparametric estimator of the survival function with doubly censored data, *Ann, Statist.* **15**: 1536–1547.
- Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K. Y. y Zeger, S. (1994). *Analysis of Longitudinal Data, 2nd Edition*, Oxford University Press Inc., New York.
- Efron, B. (1967). The two sample problem with censored data, *In Proceedings of the 5th Berkley Symposium* **4**: 831–853.
- Frydman, H. (1992). A nonparametric estimation procedure for a periodically observed three state markov process, with application to aids, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **54**: 853–866.
- Frydman, H. (1995). Nonparametric estimation of a markov “illness - death” process from interval - censored observations, with application to diabetes survival data, *Biometrika* **82**: 773–789.
- Frydman, H. (2008). Nonparametric estimation in a markov “illness - death” process from interval - censored observations, with missing intermediate transition status, *Biometrika* **82**: 773–789.
- Gruger, J., Kay, R. y Schumacher, M. (1991). The validity of inferences based on incomplete observations in disease state models, *Biometrics* **47**: 595–605.
- Hudgens, M. G., Satten, G. A. y Longini, I. M. (2001). Nonparametric maximum likelihood estimation for competing risks survival data subject to interval censoring and truncation, *Biometrics* **57**: 74–80.
- Salazar, J. C., Palomino, R. I., Calvo, E., Rojas, A., Hincapie, M. E., Anaya, J. M. y Diaz, F. J. (2007). Modelo de markov de tres estados: comparación de parametrizaciones de la tasa de intensidad de transición. aplicación a datos de artritis reumatoidea, *Revista Colombiana de Estadística* **30**: 213–229.
- Tsai, W. Y. y Crowley, J. (1985). A large sample study of generalized maximum likelihood estimators from incomplete data via self-consistency, *Ann, Statist.* **13**: 1317–1334.
- Turnbull, B. W. (1976). The empirical distribution function with arbitrary grouped censored and truncated data, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **38**: 290–295.