PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON ESTUDIANTES DE QUINTO DE SECUNDARIA POR MEDIO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

RAY WLADIMIR FLORES MANGHIERT

ASESORA:

Dra. KATIA VIGO INGAR

Abril, 2019

RESUMEN

La presente investigación se origina por la observación de diferentes dificultades y vacíos que presentan distintos estudiantes de quinto de secundaria al estudiar el concepto de función exponencial. Si bien, este objeto matemático está presente en el Currículo Nacional del Perú, hemos observado que no existen muchas investigaciones en nuestro país respecto a este tema; mucho menos las hay en el nivel secundario. Por ello, consideramos importante su estudio en este nivel; ya que permitirá, posteriormente, el desarrollo con mayor profundidad de este objeto matemático en el nivel superior.

Frente a esta problemática, nuestro objetivo de investigación es analizar las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria y, para ello, nos apoyamos en el referente teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. Asimismo, para darle una estructura a nuestra investigación, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica de Artigue.

La parte experimental de nuestra investigación se realizó con estudiantes de quinto de secundaria, cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años. La secuencia de actividades estuvo compuesta por tres situaciones problemas. Las acciones de los estudiantes ante estas situaciones problema permitieron movilizar conocimientos previos y construir otros nuevos, a partir de la formulación de hipótesis y posteriormente la justificación de sus resultados. Por ello, concluimos que las situaciones problemas contribuyen a la construcción del concepto de función exponencial.

En ese sentido, afirmamos que mediante esta propuesta los estudiantes lograron construir la función exponencial del tipo $f(x) = b.a^x$, siendo a y b constantes reales donde $b \neq 0, a > 0\ y\ a \neq 1$. Incluso, identificaron las propiedades de la función exponencial, respecto al crecimiento y decrecimiento de la misma. Por último, establecieron diferencias entre un modelo exponencial y un modelo lineal.

Palabras clave: Función exponencial; Teoría de Situaciones Didácticas; Situaciones Problemas; Ingeniería Didáctica.

ABSTRACT

The present investigation originates from the observation of different difficulties and gaps that different fifth-grade high school students presented when studying the concept of the exponential function. Despite of the fact that this mathematical object is present in the National Curriculum of Peru, we have observed that there are not many investigations regarding this subject in our country. Therefore, we consider it is crucial to study it at this level because it will allow a deeper development of this mathematical object in high school in the future. Facing this challenge, our research aims to analyze the contributions of a didactic sequence for the construction of the concept of the exponential function in fifth-grade high school students. Therefore, we rely on the theorical reference of the Theory of Didactical Situations of Brousseau. Likewise, to provide structure to our research, we used Artigue's Didactic Engineering as methodology basis. The experimental part of our research was carried out with fifth-grade high school students who are 15 or 16 years old. The sequence of activities consisted on three problem situations. The actions of the students in these situations allowed them to utilize previous knowledge and build some other new from the creation of hypotheses and the later justification of their results. Consequently, we conclude that the problem situations contributed to the construction of the exponential function. In this sense, we proved that through this proposal the students managed to build the exponential function type $f(x) = b.a^x$ being a y b real constants where $b \neq 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$. They even identified the properties of the exponential function regarding its growth and decrease. Lastly, they established differences between an exponential model and a linear model.

Keywords: Exponential Function; Theory of Didactical Situations; Problem Situation; Didactic Engineering.

A mi madre, Gladys, mi hermana Aissa y mi sobrina Juleysi

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora Dra. Katia Vigo Ingar, por haberme guiado en el desarrollo y culminación de esta investigación, por sus sugerencias, preocupación y empuje, así como también por transmitir permanentemente su entusiasmo por la investigación.

A los miembros del jurado Dr. Gabriel Loureiro de Lima y Mg. Flor Carrillo por sus correcciones y sugerencias en la presente investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, por contribuir en mi formación, en especial a la Mg. Nélida Medina, por sus clases tan motivadoras y llenas de entusiasmo.

A la I.E.P. “San Vicente de Paúl”, a cargo de miss Esther y miss Anita, por darme las facilidades para poder realizar la experimentación con el aula de quinto de secundaria.

A los estudiantes que participaron en esta investigación, por su interés en participar, pues sin ellos no se hubiera dado la experimentación.

A mi madre por siempre ser un ejemplo de bondad y amor, su apoyo permanente en mi desarrollo profesional y sobre todo por siempre confiar en mí.

ÍNDICE

RESUMEN ii
ÍNDICE vi
LISTA DE TABLAS..viii
LISTA DE CUADROS... ix
LISTA DE FIGURAS.. x
CONSIDERACIONES INICIALES 1
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA 3
1.1 Investigaciones de referencia..3
1.2 Justificación...21
1.3 Aspectos Teóricos...23
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación 32
1.5 Metodología de la investigación 33
1.5.1 Investigación cualitativa 33
1.5.2 Ingeniería didáctica..35
CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO..40
2.1 Un panorama histórico de la Función Exponencial 40
2.2 La Función Exponencial 42
2.3 Enseñanza de la Función Exponencial 47
CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN 55
3.1 Escenario donde se desarrolla la experimentación 55
3.2 Sujetos de Investigación 55
3.3 Variables macro-didácticas 56
3.4 Situaciones problemas 56
3.5 Análisis *a priori* y *a posteriori*..57

CONSIDERACIONES FINALES 104

REFERENCIAS 110

ANEXOS 113

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Primera tabla de logaritmos elementales 40

Tabla 2. Descripción del tipo de tareas del libro didáctico 51

Tabla 3. Sujetos de investigación 56

Tabla 4. Inducción a partir de los datos 58

Tabla 5. Organización de datos SP1-item a) 60

Tabla 6. Organización de datos SP1-item b) 60

Tabla 7. Organización de datos SP2-item a) 71

Tabla 8. Organización de datos SP2-ítem a) 73

Tabla 9. Diferencia de montos entre el banco y la cooperativa 87

Tabla 10. Aproximación para hallar el periodo de intersección de montos. 89

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Secciones del capítulo 8 42

Cuadro 2. Descripción de tipos de técnicas 52

Cuadro 3. Variables macro-didácticas 56

Cuadro 4. Variables micro-didácticas situación problema 1 59

Cuadro 5. Diferencias entre los modelos de la SP1 y la SP2 72

Cuadro 6. Variables micro-didácticas SP 2 73

Cuadro 7. Comparación a priori y a posteriori inciso c) grupo 1 81

Cuadro 8. Variables micro-didácticas SP3 86

Cuadro 9. Diferencias entre función exponencial y función afín 99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Dificultades - función exponencial 20
Figura 2. Definición de función exponencial. 24
Figura 3. Esquema dialéctica de acción 26
Figura 4. Esquema dialéctica de formulación 27
Figura 5. Esquema dialéctica de validación 28
Figura 6. Definición de función exponencial 29
Figura 7. Definición de función exponencial 43
Figura 8. Gráfica de la función exponencial 44
Figura 9. Caracterización de la función exponencial 45
Figura 10. Función del tipo exponencial 45
Figura 11. Caracterización de las funciones de tipo exponencial 45
Figura 12. Ejercicio encontrado en el texto 46
Figura 13. Definición de la función exponencial 47
Figura 14. Características de la función exponencial 48
Figura 15. Ejemplo de grafica de la función exponencial 49
Figura 16. Ejemplo utilizando crecimiento bacterial 50
Figura 17. Ejemplo utilizando el crecimiento poblacional 50
Figura 18. Problema utilizando el interés compuesto 53
Figura 19. Ejemplo utilizando la progresión geométrica 53
Figura 20. Problema utilizando el interés compuesto 54
Figura 21. Resolución grupo 1 ítem a)-SP1 62
Figura 22. Resolución grupo 2 ítem a)-SP1 63
Figura 23.Función cuadrática considerada-grupo 1 63
Figura 24. Utilización del tanteo-grupo 1 64

Figura 25. Reorganización de los datos-grupo 1. 64
Figura 26.Regla de correspondencia de la función exponencial-grupo 1 65
Figura 27. Modelación de la función exponencial-grupo 2. 66
Figura 28. Utilización regla de tres simple para hallar las equivalencias-grupo 1. 66
Figura 29. Reemplazo de valores en la función-grupo 2. 67
Figura 30. Características de la función hallada-grupo 1 68
Figura 31. Institucionalización local referente a la situación problema 1 69
Figura 32. Organización de datos ítem a)-grupo 1 75
Figura 33. Primera función hallada-grupo 1 75
Figura 34. Función exponencial construida-grupo 1..76
Figura 35. Reemplazo de los valores en la función-grupo 1......................................76
Figura 36. Organización de datos inciso a)-grupo2 77
Figura 37.Acciones para la obtención de la regla de correspondencia-grupo 2 77
Figura 38. Regla de correspondencia hallada-grupo 2..78
Figura 39. Uso de propiedades de la potenciación-grupo 1 79
Figura 40. Resolución ítem (a)-grupo 2...79
Figura 41. Características de la función correspondiente a la SP 2-grupo1..............80
Figura 42. Características de la función correspondiente a la SP2-grupo2...............80
Figura 43. Respuesta al ítem c)-grupo1. 81
Figura 44. Representación gráfica de la función que modela la SP2 83
Figura 45. Solución ítem c-SP3 85
Figura 46. Posible representación del inciso (c) 88
Figura 47. Montos del banco obtenidos-grupo 1 90
Figura 48.Identificación de la base de la función-grupo 1 90
Figura 49. Regla de correspondencia banco CONFIANZA-grupo 1 91
Figura 50. Montos de la cooperativa-grupo 1 91

Figura 51. Identificación que el cociente no es constante-grupo 1 92
Figura 52. Regla de correspondencia cooperativa UNIDOS-grupo 1 92
Figura 53.Respuesta al ítem a) SP 3-grupo1 93
Figura 54. Cálculos ítem a)-grupo 2 93
Figura 55. Respuesta ítem a)-grupo 2...94
Figura 56. Respuesta ítem b)-grupo 1...95
Figura 57. Respuesta ítem b)-grupo 2...96
Figura 58.Respuesta ítem c)-grupo 1 96
Figura 59. Proceso de hallar el intervalo para el ítem c)-grupo 1 97
Figura 60. Tabulación para el ítem c)-grupo 1..97
Figura 61. Respuesta ítem c)-grupo 2 98

CONSIDERACIONES INICIALES

El interés por investigar sobre la función exponencial, nace de observar las dificultades que presentan estudiantes de quinto de secundaria al estudiar este concepto. A estos, primero, se les explica la teoría y luego se les propone resolver ejercicios repetitivos, sin embargo, no se busca que los mismos la construyan y descubran sus diferentes características. Por ello consideramos que una secuencia didáctica contribuirá a alcanzar dicho logro, es decir, que los estudiantes construyan el concepto de función exponencial.

Tomando en cuenta lo planteado anteriormente, esta investigación tiene como objetivo general analizar las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria. Por ello, utilizamos como referencial teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y aspectos de la ingeniería Didáctica.

La secuencia didáctica estuvo compuesta por tres situaciones problemas. La primera y segunda tuvieron como propósito que los estudiantes construyan la función exponencial e identifiquen sus características; la última, tuvo como fin que los estudiantes utilicen los conocimientos adquiridos en las primeras situaciones problemas, además de identificar diferencias entre la función exponencial y la función afín.

Por estas razones, hemos estructurado en capítulos la investigación, de la siguiente forma:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación. En ella, hemos revisado los antecedentes relacionados con la función exponencial, la justificación de nuestro trabajo de investigación y presentamos como referencial teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986). Asimismo, formulamos nuestros objetivos y pregunta de investigación y como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

En el segundo capítulo, desarrollamos aspectos epistemológicos de nuestro objeto matemático: la función exponencial, así como su desarrollo histórico y matemático. También realizamos un estudio de dos libros de matemática; el primero, para observar cómo se desarrolla formalmente este objeto matemático; el segundo, para analizar el aspecto didáctico de su enseñanza, tomando como referencia el mismo libro de quinto de secundaria que utilizan los estudiantes en la institución educativa.

En el tercer capítulo, detallamos la parte experimental y el análisis, en el cual se incluye el escenario donde se desarrolla la investigación, descripción de los sujetos de estudio y de las situaciones problema, el respectivo análisis *a priori* y *a posteriori* de la producción de los dos grupos de estudiantes en el desarrollo de cada ítem, para luego confrontarlos como parte de la validación de nuestra metodología.

En las consideraciones finales mostramos los respectivos resultados obtenidos, donde afirmamos que los estudiantes pudieron construir la función exponencial del tipo $f(x) = b \times a^x$, además, de que lograron identificar y relacionar el crecimiento y decrecimiento de la función con la base de esta, es decir, cuando $a > 1$, la función es creciente y cuando $0 < a < 1$, la función es decreciente.

Finalmente, presentamos las recomendaciones para futuras investigaciones que involucre la investigación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentaremos la problemática de nuestro trabajo de investigación. En primer lugar, los antecedentes, donde se muestran diferentes investigaciones referentes a la función exponencial, ya sea en otros contextos y también en el nuestro. Asimismo, mostraremos los argumentos que justifican la pertinencia de esta investigación. Finalmente, expondremos la pregunta y los objetivos generales de investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

La importancia de realizar un levantamiento de investigaciones, radica en que nos permitirá tener un panorama sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, con el propósito de conocer qué dificultades se han presentado en este proceso y saber qué aspectos teóricos y metodológicos se están empleando en la búsqueda de dar solución a estas dificultades. Asimismo, permite que las dificultades percibidas en nuestra práctica docente sean entendidas como un problema de investigación.

Seleccionamos los principales trabajos relacionados con nuestro objeto de estudio y con las dificultades en los estudiantes. Para la búsqueda de las investigaciones, consideramos pertinente que sean tesis de doctorado, maestría y artículos científicos de revistas indexadas, en los cuales el objeto principal de estudio sea la función exponencial. Para ello, recurrimos al banco de tesis de la PUCP (Pontifica Universidad Católica del Perú) y a CAPES (Coordinación de Perfeccionamiento de Nivel Superior de Brasil). En este último, fue en donde encontramos la mayor cantidad de investigaciones respecto a la función exponencial. Además, recurrimos al repositorio de tesis de otras universidades de países vecinos como la UNICEN (Universidad del Centro de Buenos Aires) y la UDEA (Universidad de Antioquia). En la búsqueda de las producciones científicas, consideramos las palabras-clave relacionadas al objeto de investigación. Incluso, observamos que existe una cantidad de tesis e investigaciones que fundamentan y discuten de modo amplio la problemática, lo que demuestra la necesidad de estudiar con profundidad el objeto matemático. A continuación, desarrollaremos algunas de estas investigaciones.

Sureda (2012) en su trabajo de investigación señala que una dificultad que tienen los estudiantes al estudiar la función exponencial es el de utilizar modelos lineales para explicar modelos no lineales, debido a que los mismos suelen enfrentarse cotidianamente a situaciones que requieren de modelos lineales para su resolución. Asimismo, el objetivo de esta investigación es describir y analizar el proceso de conceptualización de los estudiantes de secundaria en el proceso de estudio de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) concerniente a la función exponencial. Para este fin, se apoya en la Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud y en las Actividades de Estudio e Investigación propuesto por Chevallard.

Además, Vergnaud (como se citó en Sureda 2012) señala que enseñar un concepto no es solo presentar la definición; sino que, para los estudiantes, la resolución de diferentes situaciones y problemas otorgan un sentido acerca de este concepto. Asimismo, se debe entender que el desarrollo del concepto no se puede presentar con un solo tipo de situaciones, sino que es necesario vincularlo con otros problemas diferentes tales como decaimiento radioactivo, interés compuesto, crecimiento poblacional, etc. La elaboración del concepto de la función exponencial no se puede dar de forma aislada, sino que necesita de otros conceptos, como la variación exponencial, logaritmo, potencia, progresión geométrica, etc.

En ese sentido, Vergnaud (como se citó en Sureda 2012) define al concepto como un triplete, formado por un conjunto de situaciones, de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y de formas simbólicas y lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto. Asimismo, la investigadora explica que los AEI son un conjunto de situaciones que permite a través de la dialéctica pregunta-respuesta construir el concepto matemático que se pretende estudiar, en este caso la función exponencial. En estas AEI, se considera el análisis de diferentes representaciones como el numérico, algebraico, gráfico y verbal.

La investigadora señala que este es un trabajo exploratorio, en donde se pretende analizar el proceso de conceptualización de estudiantes entre 15 y 16 años. Para ello, se presentaron tres actividades desde el año 2008 al 2011, una actividad por año. La primera, del 2009, constaba de 12 situaciones y una evaluación final; la segunda, del 2009 mantuvo la misma cantidad de situaciones y la tercera, del 2011, solo tuvo 4 situaciones. La investigación se centra en el análisis de las actividades del 2009 y 2011, comparando algunas situaciones.

Sureda (2012) afirma que la actividad del 2009, fue aplicada a estudiantes de cuarto año de secundaria. En ella, los estudiantes aun no disponían de estrategias graficas o algebraicas, pues recién estaban estudiando las funciones, pero los mismos ya tenían conocimientos de interés simple, así como el de porcentajes. En las situaciones del uno al tres, se pretende que los estudiantes construyan el modelo de interés compuesto. Para ello, se les presenta una actividad con el fin de que construyan el modelo matemático para poder responder a las preguntas propuestas. Adicional a esto, la investigadora busca que los estudiantes justifiquen las diferencias entre el modelo de interés compuesto y el modelo de interés simple.

En las situaciones del cuatro al seis, a partir de una actividad referida a la propagación de un virus, la investigadora busca que los estudiantes construyan el modelo de la función exponencial $f(t) = k.a^t$, siendo k la cantidad de infectados al inicio, a la tasa de infección y t la hora en la que se quiere conocer la cantidad de contagiados, este modelo es una extensión del modelo construido en el interés compuesto. Luego de estas situaciones, la autora plantea tareas de ejercitación para que los estudiantes consoliden lo aprendido.

En las situaciones del siete al nueve, se busca ampliar el modelo de la función exponencial como: $f(x) = k.a^{x+b}$ o $f(x) = k.a^x + b$. Para este fin, se vuelve a tomar el problema de interés compuesto, además estos modelos provocan que los estudiantes observen el desplazamiento de la representación gráfica, incitándolos al estudio del concepto de asíntota. Luego, continúa un segundo conjunto de tareas. En la situación diez, la autora pretende desarrollar las ecuaciones exponenciales; en las actividades once y doce, se busca sintetizar todos los aspectos vistos en las actividades anteriores y, finalmente, efectuar una evaluación escrita. La actividad implementada el 2011 fue de solo 4 situaciones, porque los estudiantes eran de quinto año de secundaria, además que ya tenían conocimientos de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales y racionales.

La investigadora asevera que los estudiantes lograron diferenciar una función exponencial en los sistemas de representación numérico, algebraico, gráfico y verbal. Asimismo, estos pudieron formular el dominio y la imagen de la función exponencial sobre todo en la representación gráfica, además llegaron a identificar la asíntota en la representación gráfica y algebraica. Con respecto a las ecuaciones exponenciales, la investigadora observó que los mismos tienen dificultades en la resolución cuando se planteaba algebraicamente; sin embargo, la representación gráfica ayudó a superar estas dificultades.

La investigación de Freitas (2015) señala a partir de su práctica docente, que una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas radica en la formación de los profesores que enseñan esta ciencia. Es, por ello, la motivación en la investigación sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas en el curso de Licenciatura. Además, la autora, quien se apoya en una investigación anterior que realizó, la cual tuvo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, señala que pudo observar algunas dificultades que presentan los estudiantes al estudiar la función exponencial. Si bien, estos dominan el concepto de función exponencial, así como su representación y manejo de las variables independientes y dependientes, aún presentan dificultades en problemas que involucran la conversión de registros como del figural al algebraico y viceversa. Además, presentan errores al resolver problemas que involucran crecimiento exponencial, pues ellos tratan de resolverlos como si se trataran de problemas cuyo crecimiento es constante.

En ese sentido, el objetivo principal es analizar las praxeologías realizadas por los practicantes, en el sentido de percibir cómo la organización didáctica puede interferir en la construcción de organizaciones matemáticas relacionadas con la función exponencial.

Los aspectos teóricos utilizados en esta investigación fueron la Teoría Antropológica de los Didáctico de Yves Chevallard, que le permitirá realizar el estudio praxeológico de los textos didácticos que abordan a la función exponencial y la Teoría de Situaciones Didácticas permitirá analizar el comportamiento de los sujetos de estudio respecto al conocimiento que se quiere enseñar en este caso la función exponencial. Además, se apoya para la construcción del concepto en la Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud. Asimismo, la metodología utilizada fue la Ingeniería Didáctica, siendo los sujetos de estudio ocho estudiantes de la Universidad Estatal de Bahía en el curso de Licenciatura en Matemáticas.

Freitas (2015) realizó un análisis de libros didácticos para la enseñanza media que son de ayuda al profesor elaborados por el Ministerio de Educación de Brasil. Los textos analizados fueron ocho, siendo analizados solo el capítulo referente a la función exponencial. Para ello, se utilizó la Teoría Antropológica de lo Didáctica y se procedió a organizar los contenidos en tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Todo este análisis le permitió conocer cómo es que se aborda la función exponencial y brindó el camino para la construcción de las situaciones problemas que se plantearon a los estudiantes de Licenciatura.

La investigadora manifiesta que, en el proceso de la aplicación de la secuencia de actividades, la actividad uno está compuesta por tres situaciones problemas. Su objetivo es analizar el concepto de función afín y función lineal, para que el estudiante pueda reconocer las diferencias entre una función afín y una función lineal, con respecto a la relación entre la representación algebraica y gráfica. Asimismo, la actividad dos tiene como objetivo relacionar el coeficiente b de la función $f(x) = ax + b$ con el comportamiento gráfico.

En la actividad tres y cuatro, la investigadora buscó que los estudiantes investiguen sobre la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y que construyan y visualicen la función $f(x) = e^x$. En la actividad cinco, los alumnos construyeron algebraica y gráficamente la función exponencial $f(x) = a.b^{kx}$, como un modelo referido al crecimiento o decrecimiento exponencial. Con respecto a la actividad seis, ellos a partir de funciones representadas gráficamente elaboran la representación algebraica. En el número siete, su objetivo fue que los mismos reconozcan la relación entre la función exponencial y la logarítmica por medio de una función inversa.

En la actividad ocho, se buscó que los estudiantes utilicen estrategias para encontrar la inversa de la función exponencial. En esta última actividad, se permitió a los estudiantes la libre elección de alguna tecnología como, por ejemplo, el Geogebra y de tablas de Excel. Finalmente, la Actividad 9 estuvo compuesta por dos situaciones problema. En la primera, se tuvo por objetivo que los estudiantes puedan discutir acerca de las concepciones que estos tienen acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Con respecto a la segunda situación, ellos debían proponer una introducción didáctica sobre la función exponencial con el objetivo de reducir los problemas de contexto presentados en la actividad.

Como parte de sus conclusiones, la investigadora manifiesta que la elección de la Ingeniería Didáctica como metodología permitió tener un panorama del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, esto como parte del análisis preliminar, es decir, del estudio de las investigaciones de referencia. Con respecto al uso de la TAD, la investigadora señala que este marco teórico permitió poder tener un mejor panorama de las situaciones problema que se emplearon en la investigación, todo esto a partir del análisis de los libros didácticos en términos de tareas o tipos de tarea.

Adicionalmente, Freitas (2015) afirma que el uso de la TSD contribuyó en analizar las diferentes estrategias y acciones utilizadas por los sujetos de estudio al resolver las situaciones problema planteadas. La autora manifiesta que a través de esta teoría, se logró superar diferentes dificultades como interpretar las situaciones problema o la de justificar sus resultados. Estas dificultades se superaron en las etapas *adidácticas* de acción, formulación y validación, pues en ellas, los sujetos de estudio mediante la lectura de actividades, discusión y validación de sus resultados, contribuyeron en mejorar el entendimiento de estas situaciones problemas, así como mejorar la capacidad de poder escribir sus resultados y justificarlos.

La investigación de Brucki (2011) utiliza la modelación como estrategia para la enseñanza de la función exponencial. Esto fue debido a ciertas dificultades que observó en los estudiantes, como al interpretar el significado de potenciación, el trabajar con exponentes negativos o racionales y, además, el hecho que el exponente sea una variable.

El objetivo principal de la investigación, es constatar si la utilización de la progresión geométrica como aprendizaje preparatorio y la modelación contribuyen en obtener un aprendizaje significativo de la función exponencial. Para ello, la investigación se enmarca en la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel (como se citó en Brucki 2011), quien afirma que el aprendizaje significativo es un procedimiento por el cual un nuevo concepto se relaciona con un aspecto importante de la estructura cognitiva del individuo. Esto justifica la utilización de la progresión geométrica como aprendizaje preparatorio en la construcción de la función exponencial. Asimismo, usó las concepciones de modelación de Barboza (como se citó en Brucki 2011), quien presenta tres casos, de los cuales la investigadora utilizó el primero de manera adecuada al nivel de enseñanza de la investigación. En este, el docente presenta una situación problemática, con información que consiste en contextualizar el problema y brindar datos necesarios para su formulación y resolución.

La investigación de Brucki (2011) es de naturaleza cualitativa y la metodología empleada, la modelación matemática. Los sujetos de estudio fueron catorce estudiantes entre 16 a 18 años del primer año de enseñanza media de la escuela pública Joaquim Moreira Bernardes en San Bernardo del Campo. Estos diferenciaron la función polinomial de primer grado con respecto a la de segundo grado y realizaron gráficos pertinentes de funciones. Sin embargo, no se ha trabajado con ellos la contextualización de los problemas con la realidad.

La autora realiza un análisis de las acciones esperadas. Afirma que la Situación de Aprendizaje muestra la necesidad del uso de la radiactividad en nuestras vidas y sugiere la relación que existe entre la progresión geométrica y la función exponencial. Por ello, el objetivo de la secuencia es que los estudiantes identifiquen la relación matemática que existe entre la función exponencial y la progresión geométrica, así como usen la modelación para crear un ambiente propicio para el desarrollo del aprendizaje de la función exponencial.

La investigadora indica que la situación de aprendizaje, como se mencionó anteriormente, trata de relacionar el nuevo concepto que se quiere enseñar con uno que ya conocen los estudiantes: la progresión geométrica. La situación realiza una descripción de los beneficios de los rayos x, radioterapia; el texto de la actividad planteada por la autora, explica que la radiación focalizada puede matar a las células cancerígenas, pues son más débiles que las normales. Para esto, se utilizan radiaciones de cobalto o cesio, en el que la vida media del cobalto es de cinco años. Esto quiere decir que una muestra de cobalto de 120 gramos después de 5 años tendrá solo 60 gramos. Este es un primer momento de la actividad, en el que se ha distribuido a los estudiantes en grupos de 2 personas, donde los mismos leerán el texto y el profesor no intervendrá.

En un segundo momento, se le proporciona otro texto y se mencionan los acontecimientos ocurridos en el 2011, es decir, el accidente de centrales nucleares en Japón. En este momento, se le formula una primera pregunta, ¿en el año 2071, la ciudad de Fukushima seguirá contaminada, ¿cuál es el porcentaje de material radiactivo, teniendo en cuenta solo el cesio 137? El objetivo de esta pregunta es que relacionen el tiempo de vida media del Cesio en el año 2071. La respuesta de una dupla fue por medio de la lectura. Ellos dijeron que las vidas medias del Cesio son de 30 años e infirieron que tienen que pasar 60 años. Por lo tanto, en los primeros 30 años, quedará el 50% y en los otros 30 años siguientes, el 25%.

En el inciso b, se les pide que elaboren una tabla, describiendo los periodos de semidesintegración del Cesio, sabiendo que empieza con el 100%. Esta pregunta tiene como objetivo relacionar el tiempo con el periodo de vida. En el inciso c, se les pregunta, ¿es posible asociar los resultados de la tabla, a una progresión aritmética o geométrica? En esta parte, los estudiantes no tuvieron dificultades para relacionar los resultados con una progresión aritmética o geométrica. En los siguientes incisos, se les hace preguntas como, ¿qué número puede ser considerado como el primero de la secuencia?, ¿qué cantidad de términos tiene la secuencia? e identifique una fórmula que represente los datos obtenidos en la tabla construida anteriormente. El propósito, en primera instancia, es relacionar la progresión geométrica con la función exponencial. En esta parte, una dupla logró relacionar la progresión geométrica y la función exponencial.

En un tercer momento, se les presenta otro elemento, el yodo, que tiene una vida media de 8 días. En esta parte, se les solicita resolver una nueva situación, parecida a la anterior, y después se les pide que realicen un gráfico de la desintegración del yodo con los datos obtenidos, relacionando la variable peso con el tiempo. Finalmente, se les propone considerar el último término de la secuencia como $f(x)$, donde el primer término es representado por el peso inicial y la razón por la vida media, ¿cuál sería la expresión algebraica para cualquier periodo de desintegración?

Brucki (2011), señala que, en la utilización de la modelación, surgieron acciones que necesitaron de un control como, por ejemplo, la elección de un modelo no necesariamente motiva de forma inmediata a los estudiantes. Además, la investigadora invirtió un tiempo adicional para hacerles entender lo que significa vida media, pues esto significó una dificultad en el transcurso de la actividad. Asimismo, esta menciona que la modelación se debería utilizar en temas puntuales, pues demanda mucho tiempo la aplicación del mismo. Además, ella pudo constatar que, al utilizar la modelación matemática, los estudiantes se interesaron más por el tema, sobre lo que transcurría y sobre las relaciones matemáticas que descubrieron. Es más, la mayoría de los estudiantes. pudo establecer relaciones entre la desintegración del cesio y el yodo con la función exponencial.

Finalmente, se hace necesario elaborar actividades que detallen una relación más crítica en cuanto al papel de las matemáticas en la realidad. Por ello, la propuesta es realizar actividades que involucren la modelación y otras disciplinas, como en este caso fue la Física (radioactividad), la Química (la vida media del cesio y el yodo) y la Matemática (la función exponencial).

Obando y Sánchez (2014) plantean el uso de la modelización matemática como herramienta para poder vincular el objeto matemático que se pretende estudiar con situaciones extraescolares, siendo los sujetos de estudio cinco estudiantes del décimo grado del municipio de Andes Antioquia entre los 15 a 17 años. Para los autores, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Colombia, 1998) son un referente importante, pues insertan la modelización en la enseñanza y aprendizaje de los alumnos. Es, por ello, que los investigadores se plantean como objetivo de investigación describir el procedimiento de modelación matemática realizado por los alumnos en la reproducción de la broca hembra y macho en el ámbito cafetero, la cual es una de las plagas que más afectan el cultivo del café.

La investigación estuvo enmarcada por la modelación, modelo y contexto. Los autores indican que la modelación permite la creación del modelo matemático de la reproducción de la broca. Esto permitirá que los estudiantes puedan construir el modelo matemático necesario que responda a los datos obtenidos en relación con la matemática que se les ha enseñado y su contexto (cafetero). Asimismo, la investigación es de naturaleza cualitativa, siendo el método de investigación que proponen los autores el estudio de casos basado en la teoría de Stake, el que señala que un estudio de casos de tipo instrumental se revela en las investigaciones cuando el propósito del caso no es solamente centrarse en la comprensión del caso particular, sino que este pueda servir de instrumento para estudiar el objeto de estudio.

En el proceso de la actividad con los estudiantes, los investigadores pretendieron que los alumnos supieran más sobre la broca del café, para ello se les brindó una lectura con datos estadísticos referentes a la reproducción de la broca, para luego realizar la siguiente pregunta *¿cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año* *si se comienza con una sola hembra?* Esto hizo que los estudiantes matematicen la situación y relacionen las variables, para luego de utilizar sus conocimientos previos, puedan construir dos funciones que, por su particularidad, sean funciones exponenciales sin ser identificadas por los estudiantes, las cuales representarían la reproducción de la broca macho y hembra.

Además, Obando y Sánchez (2014) plantean en la parte experimental un primer momento, donde los estudiantes construyen modelos matemáticos de la reproducción de la broca basándose en los resultados obtenidos en el artículo que se les presentó. En un segundo momento se analizó el modelo matemático que surgió de experiencia misma, pues los estudiantes buscan determinar la cantidad de brocas que se reproducen, estas actividades se dan en un laboratorio.

Los investigadores destacan la importancia de la salida al campo en la investigación, pues los estudiantes identificaron situaciones cercanas a su realidad. Ello despertó el interés por el caso particular de la reproducción de la broca, que luego sería modelizado matemáticamente. Asimismo, los nuevos conocimientos adquiridos por los estudiantes en su salida al campo, formaron un conglomerado de ideas que les permitió relacionar procedimientos aritméticos, luego algebraicos con la reproducción de la broca y concluyó en la realización de modelos matemáticos (función exponencial) que representen la reproducción de la broca.

Rozanski (2015), en su investigación, menciona algunas dificultades encontradas en su práctica docente con respecto a las funciones, es decir, el significado de función y la variable dependiente e independiente. Además, observó que los profesores exponen el tema, desarrollan algunos ejemplos, para que después los estudiantes resuelvan los problemas de forma mecánica. Por ello, la investigadora presenta una propuesta metodológica para la enseñanza de la función exponencial, que posibilite el desarrollo de la creatividad por parte de los estudiantes y de sus habilidades interpretativas, teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. Incluso, se basó en algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, de manera particular, el tránsito del registro lengua natural al registro algebraico.

La metodología empleada fue la Ingeniería Didáctica. Los sujetos de estudio fueron doce estudiantes del primer año de enseñanza media del Colegio José de Anchieta ubicado en un barrio de la Ciudad de Dos Vecinos, Paraná. La autora señala que su investigación es de naturaleza cualitativa y que tanto el estudiante como el profesor están constantemente en una situación didáctica reflexiva. La construcción de la secuencia didáctica se desenvuelve en las siguientes etapas: análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori, las cuales fueron realizadas en siete encuentros. A continuación, detallaremos los de nuestro interés.

Rozanski (2015) manifiesta que el primer encuentro consta de tres situaciones. En la primera, se les pidió a los estudiantes que indiquen todo lo que saben sobre la palabra función. En esta, se podía utilizar gráficos y diseños. A pesar de ser una prueba de diagnóstico, se formuló como una situación didáctica, respetando las fases de acción, formulación, validación e institucionalización. En el análisis a priori, se espera que los estudiantes expresen alguna idea de función, utilizando cualquier registro. En la experimentación, los estudiantes describieron las funciones empleando diferentes registros tales como el simbólico, utilizando el $f(x) = y$, o el gráfico. Finalmente, se institucionalizó el concepto a partir de los registros expuestos por los estudiantes. En el análisis a posteriori, no se pudo predecir en la investigación cuando se les pidió que señalaran todo lo que saben sobre la palabra función. Algunos estudiantes no lo relacionaron al aspecto matemático, sino a las actividades que puede desempeñar una persona.

En la segunda situación, se pide a los estudiantes que mencionen todo lo que saben sobre la palabra exponencial. Al ser similar a la actividad anterior, pueden utilizar diferentes registros. Algunos recurrieron al diccionario, y mediante preguntas por parte de los estudiantes y del profesor, se llegó a relacionar la palabra exponencial con el exponente. Aquí, la investigadora, pudo evidenciar que se transitó de un lenguaje natural a un lenguaje matemático.

Por otro lado, en la tercera situación, se pide a los estudiantes que, en forma reducida, escribieran a partir del primer y segundo momento, lo que significa función exponencial, donde la tendencia fue expresarlo como una función cuadrática o se vieron expresiones como: $4^4 + 5^4 = x$. Por lo tanto, no expresaron la función exponencial con la característica de la variable independiente como exponente.

En el segundo encuentro, se les presentó una actividad que consistía en doblar un papel por la mitad y observar el número de rectángulos al realizar esa operación continuamente. Debían colocar los resultados en una tabla, en la cual se relacionaban el número de dobladuras con el número de rectángulos resultantes. El propósito de esta actividad es que los estudiantes puedan generalizar en número de rectángulos para n dobladuras. En el análisis a posteriori, la investigadora observó que cinco estudiantes lograron generalizarla, expresándola como una función exponencial, y otros confundieron la letra n por la x, en otras palabras, representaron la función como $f(x) = 2^n$, cuando debió de ser $f(n) = 2^n$.

Por otra parte, en el tercer encuentro, se le vuelve a pedir a los estudiantes que escriban lo que significa función exponencial. Con ello, se espera que ellos redefinan su concepto. Aquí, se observó que hubo un avance, pues ningún estudiante relacionó a la función exponencial con una función cuadrática.

Para el cuarto encuentro, se pide a los estudiantes que inventen un problema que pueda ser representado por una función exponencial. Se espera, con ello, que los estudiantes reflexionen nuevamente sobre el concepto de función exponencial.

En el análisis a posteriori, se observó que se cumplieron las expectativas trazadas, pues los estudiantes propusieron problemas donde se utilizó la función exponencial, aunque algunos tuvieron dificultades al expresarla matemáticamente. Sin embargo, se evidencia que los estudiantes entendieron las características de la función exponencial.

En el quinto encuentro, Rozanski (2015) propone una actividad grupal referente a la descomposición radioactiva de un elemento químico y a la cantidad presente de un antibiótico en el organismo de una persona, luego de un determinado tiempo. El propósito de esta actividad es que los estudiantes interaccionen entre ellos y se apoyen para superar algunos obstáculos con respecto a la situación planteada. Asimismo, reflexionar sobre el comportamiento de la función exponencial decreciente.

Con relación al sexto encuentro, se plantea a los estudiantes que definan una función exponencial y comenten sus características, además de inventar un problema, que en su resolución se necesite de la regla de correspondencia de la función exponencial. Con esto, se espera que los mismos mejoren el concepto que tienen de función exponencial. En el análisis a posteriori, se observó que hubo una mayor cantidad de estudiantes que hallaron una función matemática para representar el problema propuesto por ellos mismos.

En el último encuentro, se plantea un problema acerca de redes sociales. En estas, la gente comparte dos veces la información de ese año y, el próximo, el doble del año anterior. Con esta actividad, se pretende que los estudiantes utilicen todos los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores. En el análisis a posteriori, se verificó que la mayoría de estudiantes logró resolver el problema planteado.

Además, la Rozanski (2015) señala que el plantear una clase bajo el marco teórico de las situaciones didácticas permite reflexionar sobre la interacción entre el estudiante, el medio, el profesor y el objeto matemático. Además, las situaciones didácticas permitieron que los estudiantes percibieran las características de este objeto matemático, como que la variable independiente se encuentra en el exponente.

Con la secuencia didáctica, la autora observó que los estudiantes se apropiaron del concepto función exponencial. Además, la creación de problemas por parte de los estudiantes permitió reforzar el concepto. Asimismo, la metodología empleada, las situaciones didácticas, el análisis de los registros, así como la observación de los errores y obstáculos son de vital importancia en la práctica del profesor y decisiva en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Por último, la sugerencia por parte de la autora en investigaciones futuras es dar continuidad a esta metodología, pero trabajando la representación gráfica de la función exponencial.

Por otro lado, Advíncula (2010) realizó una investigación con siete grupos de estudiantes de la carrera de Humanidades de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, matriculados en el curso de Matemática, con un promedio de cincuenta estudiantes por grupo. Dos de estos grupos observados oscilaban entre 16 y 17 años; mientras que las edades de los otros cinco grupos observados oscilaban entre los 18 y 20 años. La investigación tiene como objetivo principal proponer una situación didáctica que permita construir el concepto de la función exponencial. El marco teórico utilizado en la investigación fue el de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau. En la investigación, se utiliza como metodología la Ingeniería Didáctica, la cual está asociada al marco teórico mencionado anteriormente. Sin embargo, debemos señalar que en la investigación no se realiza el proceso de validación.

La autora realiza un análisis preliminar, donde menciona algunos obstáculos y dificultades por parte de los estudiantes al estudiar la función exponencial como son el elevar bases a exponentes de números irracionales o racionales. Otra dificultad se presenta cuando se pide a los estudiantes que interpreten el comportamiento de la función exponencial de una determinada situación, o sea, ir del registro de lengua natural a su respectiva representación simbólica.

Advíncula (2010), afirma que la aparición del fenómeno de no congruencia se presenta en la función exponencial. Ocurre cuando los estudiantes piensan que al representar gráficamente la función $g(x) = 2^{x+1}$, esta se debe trasladar una unidad a la derecha respecto a la representación gráfica de $g(x) = 2^x$. Esto evidencia que existe un fenómeno de no congruencia entre el traslado del registro algebraico al gráfico, lo que podría generar un obstáculo que dificultaría la construcción de la función exponencial.

También, la investigadora diseñó una situación didáctica que está dividida en cuatro actividades, cada una con su respectiva situación propuesta, para que los estudiantes inicialmente fueran movilizando sus saberes previos, pero después esas mismas estrategias resultaron inútiles, lo que los llevaría a utilizar otras estrategias. Se presentó a los estudiantes dos tipos de contextos. Las tres primeras situaciones están relacionadas con la cantidad de medicamento que permanece en el cuerpo luego de un tiempo t, en horas y la cuarta, se relacionó con el monto de dinero acumulado en un banco luego de un tiempo t en años.

En la primera situación, se tuvo como objetivo que los estudiantes determinen cómo disminuye la cantidad de un medicamento suministrado a una persona, además de que determinen la variación porcentual en un intervalo de tiempo t, colocando los resultados en una tabla para luego realizar la representación gráfica. Toda esta situación estaría en la fase de acción de la TSD. Para la segunda situación, se tuvo como objetivo que los estudiantes establezcan una expresión que permita hallar la cantidad de medicamento en el organismo de esta persona luego de un tiempo t, además de representarlo gráficamente. Esta situación se encontraría en la fase de formulación de la TSD.

En la tercera situación, se pretende que los estudiantes determinen expresiones matemáticas a partir de realizar cambios a la segunda situación, además que los alumnos enuncien algunos teoremas y los validen mediante procedimientos gráficos o analíticos. Esta situación siguiendo la TSD se encontraría en la fase de formulación y validación. Finalmente, en la cuarta situación, la autora espera que los estudiantes puedan determinar expresiones matemáticas a una nueva situación, representarlos gráficamente y que enuncien algunos teoremas y los validen utilizando determinados procedimientos, como los analíticos o gráficos. Esta situación estaría también en la fase de formulación y validación.

Advincula (2010) manifiesta que luego del análisis a *priori* y la puesta en práctica de las situaciones, realiza algunos cambios a la situación didáctica original, con el fin de ofrecer toda la información necesaria para lograr la construcción de la función exponencial.

Observamos que el análisis preliminar realizado desde las dimensiones, cognitiva, epistémica y didáctica, favorece al diseño de la situación didáctica y otorga información importante sobre los obstáculos que se podrían presentar por parte de los estudiantes al aprender la función exponencial.

Además, se destaca el uso de la progresión geométrica, la cual es una característica propia de la función exponencial para resolver cada situación propuesta, lo que permite la construcción de la función exponencial al utilizarla como estrategia de solución.

En la investigación de Bonotto y Bisognin (2015), se realiza un estudio que tiene por finalidad analizar la contribución de un Objeto de Aprendizaje (OA) para la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial. Para tal fin, sabiendo que las tecnologías de información y comunicación (TIC) están presentes ahora en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, los investigadores proponen apoyarse en los Objetos de Aprendizaje, que según Willey (citado por Bonotto y Bisognin 2015), señala lo siguiente “son considerados cualquier recurso digital que pueda ser reutilizado para apoyar la enseñanza”. En la investigación, el Objeto de Aprendizaje reutilizable será un mediador en la asimilación de los significados con respecto a los conceptos matemáticos referentes a la función exponencial. Este objeto aborda a la función exponencial, presentando problemas contextualizados en las matemáticas financieras. Este contexto de simulaciones, gráficos, figuras permite el transitar entre diferentes representaciones. Es, por ello, que en el análisis de los resultados se utilizó como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

Los autores señalan que su investigación es de naturaleza cualitativa, en ella participan 20 estudiantes de la enseñanza media de una escuela pública, siendo realizada las actividades en el laboratorio de informática. Para ello los estudiantes utilizaron el Objeto de Aprendizaje "Potencializando sus Conocimientos", el cual presentaba situaciones-problema, por medio de actividades interactivas, relacionadas a la compra de determinados productos, inicialmente tenían que elegir comprar un computador entre dos opciones. El OA ayudó a realizar preguntas por parte de las investigadoras, como ¿es posible obtener una expresión que permita calcular lo que se debe pagar luego de un tiempo t?, en la discusión de resultados se puede construir $M = C(1+i)^t$, donde M es el importe, t el tiempo, i la tasa y C el capital.

Así mismo Bonotto y Bisognin (2015) proponen utilizar el software GeoGebra para simular el comportamiento de la función $f(x) = b(a)^{cx}$, cuando los parámetros a, b y c varían, a partir de ejemplos específicos los estudiantes pudieron generalizar propiedades, expresándolas en forma algebraica y gráfica, esto propicio la conversión entre estos registros. Las investigadoras afirman que el uso del Objeto de Aprendizaje favoreció la construcción del objeto matemático función exponencial, pues permitió superar algunas dificultades con respecto al interés y la comprensión de los estudiantes, también dificultades al transitar del registro algebraico al gráfico, ya que les permitió resolver situaciones del mundo real, generalizar, validar sus conjeturas y por medio de las simulaciones apoyados en el GeoGebra pudieron describir el comportamiento gráfico de la función exponencial.

En la investigación de Barroso (2009), se propone estudiar en qué medida favorece el estudio de las funciones exponenciales, en estudiantes del tercer año de enseñanza media, a partir de dos Objetos Digitales de Aprendizaje, La Torre de Hanói y el software libre GeoGebra, la utilización de estos Objetos de Aprendizaje (OA) tiene por objetivo promover la interacción entre el estudiante y el profesor, analizar de qué manera contribuyen estas herramientas digitales en el aprendizaje de la función exponencial y fomentar el uso de la informática en la transposición didáctica de los conceptos para las clases de matemática.

En el primer encuentro, se utilizó el OA Torre de Hanói, el cual consistía en trasladar siete discos en forma decreciente de un lugar a otro utilizando un tercer lugar de paso, con la característica que un disco mayor no puede estar sobre un disco menor. Se les pidió a los estudiantes que encontraran el número mínimo de movimientos. Como estos no lo lograban, el profesor les pidió que empezaran con tres discos, después cuatro y que colocaran esos resultados en una tabla. Después de ello, se les pidió a ellos que establecieran una relación matemática entre el número de discos y la cantidad de movimientos mínimos. En las interacciones con los estudiantes, lograron concluir que el modelo era $2^n - 1$, donde n es el número de discos.

Para el segundo encuentro Barroso (2009), propone unas actividades donde el estudiante va familiarizándose con el uso del GeoGebra ingresando datos, pero la actividad de nuestro interés se produce cuando se les pide que inserten un deslizador denominado a con valores entre -5 y 5, luego ingresar en la barra de entrada la función $f(x) = a^x$. A continuación, mover el parámetro a y observar qué sucede con el gráfico. El investigador propone una serie de preguntas para que los estudiantes puedan construir la definición, tales como: ¿qué ocurre cuando se varia el valor de a?, ¿qué sucede cuando a toma el valor de 1?, ¿qué sucede cuando el valor de a es cero?, ¿qué sucede cuando el valor de a es un numero negativo?, ¿es posible que la función pase por todos los cuadrantes? y ¿cuál es el dominio y rango de la función?

Para consolidar los dos objetos de aprendizaje, el autor les pide a los estudiantes que ingresen en la entrada del GeoGebra la función obtenida en la experiencia de las Torres de Hanói, $f(x) = 2^x - 1$, y lo comparen con el grafico de la función $g(x) = 2^x$, todo en un mismo plano. Aquí se les preguntó ¿por qué la primera función intercepta al eje de las abscisas? Los estudiantes respondieron que la gráfica se movió una unidad hacia abajo. Asimismo, se les presentó otra actividad que consistía en ingresar en la entrada del GeoGebra las funciones $g(x) = 2^x$, $h(x) = 2^{x+1}$, $k(x) = 2^x + 1$, todos en un mismo plano, para luego preguntarles ¿qué sucede con las gráficas de esta funciones? Los estudiantes respondieron que la función $h(x) = 2^{x+1}$ se desplaza una unidad hacia arriba y la función, $k(x) = 2^x + 1$ se desplazó una unidad a la izquierda con respecto a la función $g(x) = 2^x$.

El investigador, señala que los OA utilizados en esta experiencia contribuyeron en la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, tanto en la práctica de ejercicios, como en la construcción del concepto. La Torre de Hanói permitió explorar distintos contenidos matemáticos, además el software permitió corregir errores cuando se buscaba el menor número de movimientos. Con respecto al GeoGebra, su utilización permitió que los estudiantes realicen conjeturas al manipular los valores de la función exponencial e infieran resultados con respecto a la gráfica. Aunque el investigador no lo mencione, consideramos que en el uso del software está presente la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Básicamente se realizó y analizó la conversión de registros, del algebraico al gráfico mediados por el GeoGebra.

Podemos observar en las investigaciones mencionadas anteriormente que existen dificultades, vacíos comunes, las cuales sintetizaremos y mostraremos en la figura 1.

Figura 1. Dificultades - función exponencial
Fuente: Realizado por el investigador

Frente a estas dificultades de los estudiantes, hemos agrupado las recomendaciones de los investigadores siguiendo dos criterios. En primer lugar, las investigaciones sin uso de software como las de Brucki (2011); Obando y Sánchez (2014); Advíncula (2010); Rozanski (2015); Sureda (2012); Freitas (2015). En segundo término, las investigaciones que utilizaron software como las de Bonotto y Bisognin (2015); Barroso (2009). Las teorías presentes en los trabajos de los autores son la TSD, la TAD y la Teoría de Campos Conceptuales. En relación a la metodología, son de tipo cualitativo en particular el estudio de casos y la ingeniería didáctica. Además, hemos observado que todas las investigaciones buscan modelizar matemáticamente distintas situaciones con respecto a la función exponencial.

A continuación, presentamos la justificación de nuestra tesis, la cual permite ver la relevancia de nuestra investigación en el área de la educación matemática.

1.2 Justificación

Nuestra investigación es necesaria, pues si bien se han hecho estudios de la función exponencial en el nivel superior como es la investigación de Advincula (2010). No se han realizado en nuestro país investigaciones de este objeto matemático en el nivel secundario. Esta afirmación la hacemos basados en el hecho de que, a nivel de nuestro país, la única universidad con maestría en la enseñanza de las matemáticas es la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Sin embargo, este objeto matemático sí se encuentra presente en el currículo nacional (Perú, 2016). Esto se manifiesta en la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, ubicándose en el nivel 7 que corresponde a estudiantes del cuarto y quinto año de educación secundaria, donde se espera que los estudiantes al terminar ese nivel, estén en la capacidad de establecer “la diferencia entre una función lineal, función cuadrática, función exponencial y sus parámetros”. (p.139).,

Además, nuestro interés radica en analizar cómo una secuencia didáctica puede contribuir en construir el concepto de función exponencial en estudiantes del quinto año de educación secundaria. Para ello, hemos presentado investigaciones de referencia que tienen el objeto matemático que nos interesa investigar. Es importante señalar que, en casi todos estos trabajos a excepción de la tesis de Advincula (2010), los sujetos de estudio se asemejan al nivel en que queremos desarrollar nuestra investigación.

En la investigación de Sureda (2012) se propone un conjunto de actividades utilizando en algunas de ellas el interés compuesto como nexo para construir un modelo de función exponencial. Asimismo, utiliza la Teoría de Campos Conceptuales, para dar sustento a la concepción de la función exponencial. Sin embargo, en esta investigación no se utilizó la teoría de situaciones didácticas para la construcción y análisis de estas actividades, siendo este marco teórico parte de nuestro interés. Para la autora la importancia de estudiar este objeto matemático radica, en que este ha ido teniendo mayor relevancia en la modelización de situaciones más cercanas a las personas, como es el saber que tanto puede crecer una deuda que genera el interés de un préstamo o el caso de la propagación de una epidemia.

En el trabajo de Freitas (2015), se utiliza la teoría antropológica de lo didáctico para realizar un análisis de los libros didácticos, lo cual contribuyó en la construcción de la secuencia de actividades. Consideramos que podemos utilizar como en el trabajo de la investigadora aspectos de la TAD para el análisis de los libros didácticos. Además, la investigadora se apoya en el referencial teórico que es de nuestro interés, el de la teoría de situaciones didácticas para el análisis de las acciones de los estudiantes respecto al estudio de la función exponencial. Para Freitas (2015), es relevante el estudio de la función exponencial, pues los estudiantes de licenciatura en educación matemática no disponen de conocimientos solidos de la función exponencial y siendo ellos los futuros docentes se hace necesario que consoliden este objeto matemático.

Las investigaciones de Rozanski (2015) y Advincula (2010) utilizan la teoría de situaciones didácticas y la ingeniería didáctica, las cuales son de nuestro interés para nuestra investigación, pero no utilizan tecnología como apoyo en las actividades propuestas. Rozanski (2015) señala que el estudio de la función exponencial es importante pues existen dificultades en el aprendizaje de este, como es la relación entre la variable dependiente e independiente, específicamente que en su regla de correspondencia la variable independiente se encuentre en el exponente. Para Advincula (2010), el estudio de la función exponencial es relevante pues este, se encuentra dentro del campo de la matemática y fuera de ella, esto es, en otros campos, como la química, la economía, la medicina o la física, además, que existen dificultades en el aprendizaje de este concepto en estudiantes del primer ciclo de la universidad, específicamente estudiantes de las carreras de humanidades.

Asimismo, los trabajos de Brucki (2011), Obando y Sanchez (2014) utilizan la modelación matemática en sus actividades. Ellas contribuirán en nuestra investigación, pues en la actividad que pensamos realizar se encuentra presente la modelación, pero teniendo como referente la teoría de situaciones didácticas.

Para Brucki (2011) la función exponencial es un objeto matemático poco estudiado en la enseñanza media, es decir, que no se hace un estudio a profundidad y solo se estudia el crecimiento y decrecimiento, de manera analítica, sin ninguna aplicación práctica, esto conlleva al poco interés de los estudiantes por aprender este concepto, es por esto que la autora manifiesta la importancia de su estudio.

Obando y Sanchez (2014), señalan la importancia de relacionar lo que sucede en el contexto del estudiante con la matemática, este es el caso de la propagación de una plaga que ocurre en la comunidad de los estudiantes participes de esta investigación, cuyo modelo está asociado a la función exponencial.

Bonotto y Bisognin (2015) y Barroso (2009) usan la tecnología como eje fundamental en sus actividades. Dentro de las mismas, se utiliza el GeoGebra. Sin embargo, no utilizan la teoría de situaciones didácticas ni la ingeniería didáctica, que son parte de nuestro interés, lo cual no disminuye la importancia de estos trabajos.

En cuanto a estas investigaciones, podemos afirmar que la tecnología es un medio que permitiría para nuestro caso transitar entre diferentes representaciones, del algebraico al gráfico y viceversa, por lo cual consideramos que el software libre GeoGebra podría contribuir en nuestra investigación. Este permitiría que los estudiantes puedan observar diferentes propiedades y cómo se comporta la gráfica al cambiar diferentes valores, como la base o el adicionar a la variable independiente algún valor.

Además, es importante el estudio de la función exponencial, pues este concepto matemático es útil para modelar fenómenos en otras áreas como, por ejemplo, la economía, la química, la biología, y en el nivel secundario se encuentra presente en otros temas matemáticos como el interés compuesto, la progresión geométrica, etc.; como también en otras materias del mismo nivel como Historia y CTA (Ciencia, Tecnología y Ambiente).

Con todo esto, pensamos que nuestra investigación es importante, pues no se han hecho estudios en el nivel secundario, que es la base para un buen desempeño en los niveles superiores.

1.3 Aspectos Teóricos

En esta parte, trabajamos nuestro referencial teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986), puesto que busca crear un modelo de interacción entre el aprendizaje, el saber y el *milieu*. Presentamos los fundamentos de esta teoría, así como también especificamos y discutimos las nociones de situación didáctica, *milieu* y contrato didáctico.

Brousseau (2011) señala que la teoría de situaciones matemáticas nace en el año 1970 como un método sencillo de descripción e interrogación matemática de instrumentos didácticos y psicológicos. La teoría de situaciones matemáticas busca modelar las circunstancias necesarias para que el sujeto aprenda, comunique y reconozca el conocimiento matemático. Asimismo, estas condiciones están modeladas por sistemas llamados situaciones. El autor manifiesta que hoy en día distingue dos tipos de situaciones que son las siguientes: las “situaciones matemáticas” y las “situaciones didácticas”.

Según el autor, las situaciones matemáticas son aquellas en las cuales no se prevé una intervención didáctica. Tienen como propósito representar las condiciones necesarias para explicar o justificar la implementación de una declaración matemática por parte de un agente o grupo de agentes, sin ninguna intervención didáctica externa. Asimismo, las situaciones matemáticas más simples que se utilizan en la educación y que se ha utilizado durante siglos son los siguientes: los ejercicios y los problemas.

Por ejemplo, una situación matemática seria que resuelvan el ejercicio mostrado en la figura 2.

Trace la gráfica de la función exponencial representada por $f(x) = 2^x$, haciendo uso de una tabla de valores

Figura 2. Definición de función exponencial.
Fuente: Adaptado de Stewart, J., Redlin, L., & Saleem, W. (2012, p.308)

Teoría de Situaciones Didácticas

La TSD fue desarrollada por Guy Brousseau en el intento de configurar el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, conduciendo y modificando los comportamientos de los estudiantes mediante una serie de situaciones reproducibles, teniendo tiene como eje central la situación didáctica (Almouloud 2014).

Situación didáctica. Situación a-didáctica

Con respecto a la situación didáctica, Brousseau (como se citó en Almouloud 2014) la define como

> El conjunto de relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos, un cierto *milieu* (conteniendo eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (el profesor) para que esos alumnos adquieran un saber constituido o en constitución. (p.33)

Brousseau (1986), señala que el estudiante aprende al adaptarse a un *milieu*, que es factor de contradicciones, de desequilibrios, de dificultades, donde este conocimiento, resultado de la adaptación del estudiante, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la comprobación del aprendizaje.

Además, la enseñanza moderna pide al profesor que proponga problemas que provoquen en el estudiante la necesidad de hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. A su vez, el profesor rehúsa intervenir en el tránsito entre que el estudiante asume el problema como suyo y manifiesta su respuesta. Tal situación propuesta por el investigador es la situación adidáctica.

> El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica. (p.14)

Asimismo, Brousseau (1986) señala que cada conocimiento se puede caracterizar por una o más situaciones adidácticas que van a mantener su sentido. A estas situaciones le llama situaciones fundamentales. Al respecto, Almouloud (2014) destaca que son situaciones que permiten introducir conocimientos en el salón de clase, desde una epistemología científica.

Situación Problema

Siguiendo lo anterior, Almouloud (2017) define a la situación problema como parte de la situación adidáctica, conformada por un conjunto de preguntas abiertas o cerradas, formuladas en un contexto aproximadamente matemático. Su objetivo principal es la utilización primero implícita y después explicita de nuevos conocimientos matemáticos. Además, el estudiante debe percatarse que sus conocimientos previos son insuficientes para poder resolver el problema de forma inmediata.

En este sentido, Almouloud (2014) afirma que la forma de proponer esos problemas a los estudiantes es llamado devolución.

Devolución

Al respecto, Brousseau (1997), afirma que la devolución es el acto en el cual el profesor hace aceptar al estudiante la responsabilidad de la situación de aprendizaje (adidáctica) o problema y aceptando las consecuencias de esa transferencia. En nuestra investigación, la devolución sería el momento en el cual le entregamos las actividades a los estudiantes.

Para poder analizar el desarrollo del aprendizaje, la TSD descompone ese aprendizaje en cuatro situaciones diferentes. Tres de ellas son de acción, de formulación, de validación, las cuales se encuentran en la situación adidáctica y una última fase de institucionalización que es parte de la situación didáctica.

Dialéctica de acción

Brousseau (1997), afirma que un estudiante se encuentra en situación de acción cuando manifiesta su conocimiento en su interacción con el *milieu* antagonista, de acuerdo con “reglas” o como parte de una situación. Además, si el *milieu* reacciona con cierta regularidad, el estudiante podrá ser llevado a anticipar sus respuestas y considerarlas en sus propias acciones.

Al respecto, Almouloud (2014), señala que una situación de acción no es solo una situación de manipulación libre donde esté estipulado una serie de instrucciones para su desenvolvimiento, sino que ella debe permitir que el estudiante pueda juzgar los resultados de sus acciones y esto conlleve a que pueda ajustar lo que sea necesario, sin necesidad de la intervención del profesor. Todo esto gracias a la retroalimentación del *milieu*. Este esquema se puede observar en la figura 3.

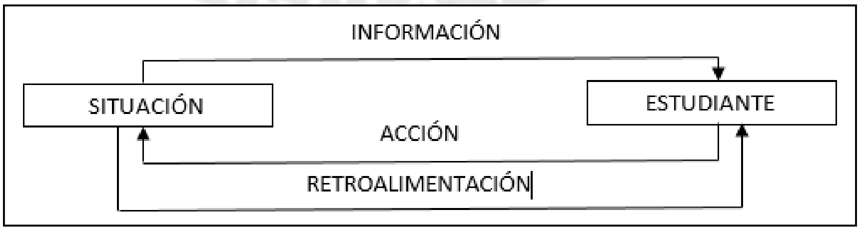


Figura 3. Esquema dialéctica de acción
Fuente: Adaptado de Almouloud (2014, p.37)

En la figura 3, se observa que hay una relación dialéctica entre la situación y el estudiante, pues este trata de resolver la situación planteada y esta le brinda la información necesaria para poder resolverla. Sin embargo, puede darse el caso que el estudiante no pueda seguir avanzando en la resolución del problema, aquí surge una retroalimentación que la da el profesor, pero en función de la situación planteada.

En nuestra experimentación, colocamos en situación de acción, cuando los estudiantes leen, subrayan, señalan, anotan, al enfrentarse a la situación-problema.

Dialéctica de formulación

Para Brousseau (1997), la formulación de un conocimiento corresponde a la capacidad que tiene el sujeto para reconocerlo, descomponerlo y restaurarlo en un sistema lingüístico. Asimismo, el *milieu* debe incluir a otro sujeto para que el primero pueda enviarle información, pero si se quiere determinar el contenido de esa comunicación, es necesario que los dos sujetos cooperen en el dominio de su medio externo de modo que ninguno de los dos pueda hacerlo solo y que la única forma de que tengan éxito es obtener del otro la formulación de su conocimiento.

En ese sentido, Almouloud (2014), señala que el estudiante intercambia información de manera escrita u oral con uno o más estudiantes, que a su vez serán emisores y receptores de la información. Estos mensajes pueden estar en un lenguaje matemático o natural, dependiendo del emisor. Esto permite crear un modelo explicito que puede ser formulado por signos y reglas ya conocidas o nuevas. Este esquema se observa en la figura 4.

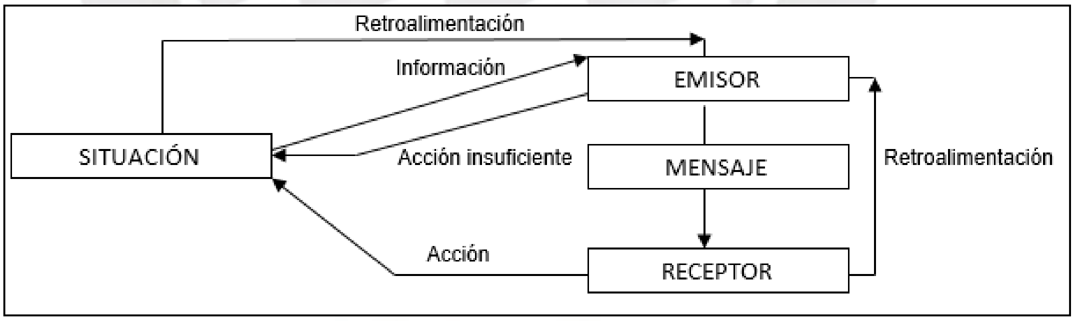


Figura 4. Esquema dialéctica de formulación
Fuente: Adaptado de Almouloud (2014, p.38)

El esquema presentado en la figura 4 describe el proceso de formulación, luego que la situación y el medio generan en el emisor una hipótesis de resolución. Este interacciona con el receptor haciéndole llegar su hipótesis, pero el receptor también puede hacer el papel de emisor y , a su vez, también puede exponer sus formulaciones con respecto a la misma situación.

Por ejemplo, en nuestra investigación, la situación de formulación se produce en el momento en que los estudiantes, a partir de la recolección y organización de los datos obtenidos de la situación problema, conjeturan que la función $f(x) = 5.2^x, x \in \mathbb{Q}^+$ crece, pues la base es positiva y mayor que uno.

Dialéctica de validación

Según Brousseau (1997), los esquemas de acción y formulación implican procesos que garantizan la pertinencia, adaptación y conformidad del conocimiento que se ha puesto en juego, pero la modelización permite diferenciar un nuevo tipo de formulación. Se supone que los sujetos tienen la misma información y se disponen a cooperar en la búsqueda de vincular el conocimiento a un saber ya establecido, pero esto no quita que se opongan tan pronto como haya dudas. Asimismo, todos pueden tomar posición en una declaración o pedir a los otros estudiantes que justifiquen sus argumentos si aún hay desacuerdo.

En relación a la validación, Almouloud (2014), afirma que en esta etapa el estudiante debe justificar la validez del modelo por el construido. Por un lado, el emisor debe de argumentar la pertinencia de su modelo, si es posible, una validación semántica o sintáctica. A su vez, el receptor puede pedir más explicaciones si no entiende la justificación o aún está en discordia, esto se puede observar en la figura 5. Esto ayuda al debate científico entre los estudiantes como medio para establecer pruebas o refutarlas.

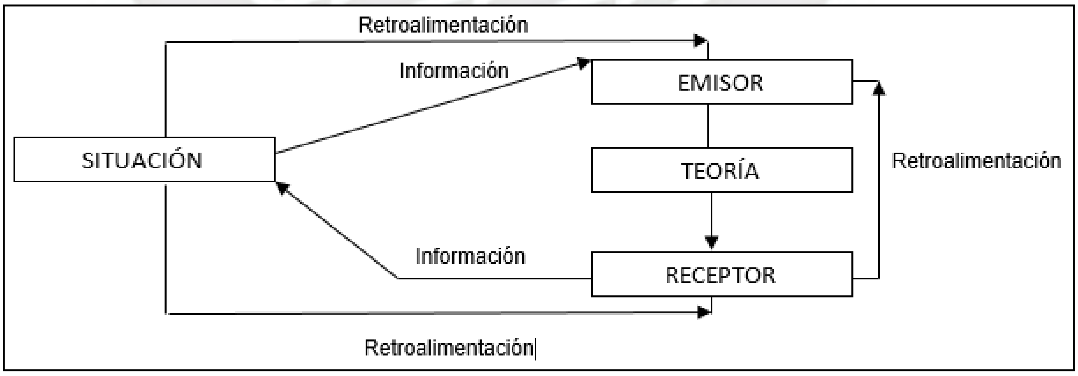


Figura 5. Esquema dialéctica de validación
Fuente: Adaptado de Almouloud (2014, p.39)

En la figura 5, se observa la interacción que se produce en la situación de validación. En esta etapa, ya se construye un modelo, del cual se tiene que justificar su validez por parte del emisor hacia el receptor. Puede darse el caso que el receptor no esté conforme con la justificación y pida una aclaración o prueba del modelo en discusión, esto permitirá que el modelo crezca.

Por ejemplo, en nuestra investigación, los estudiantes están en la situación de validación cuando afirman que la función es creciente para cuando dos números reales diferentes a, b donde $a < b$ la imagen de a es menor que la imagen de b , es decir, $f(a) < f(b)$.

Dialéctica de institucionalización

Brousseau (1997), afirma que en esta fase se otorgan a ciertos conocimientos el estatus cultural de "saber". Al respecto, Almouloud (2014), menciona que en esta situación el profesor fija convencional y explícitamente el estatuto cognitivo de saber. Este saber oficial debe ser incorporado por parte de los estudiantes en sus esquemas mentales, para que puedan ser utilizados en la resolución de problemas matemáticos.

Es decir, en esta dialéctica, es el profesor quien asume la responsabilidad, pues le manifiesta al estudiante explícitamente lo que debe aprender respecto al conocimiento que ha movilizado, es decir, le da el estatus de saber. Este, en un momento próximo, formará parte de sus conocimientos, para luego utilizarlos en otros problemas. En nuestra investigación, la institucionalización es como la mostrada en la figura 6.

Sea a un número real positivo, siempre diferente de 1. La *función exponencial de base* a, $f: R \to R^{+}$, indicada por la notación $f(x) = a^{x}$, debe ser definida de modo que tenga las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y \in R$:

1) $a^{x}.a^{y} = a^{x+y}$;
2) $a^{1} = a$;
3) $x < y \implies a^{x} < a^{y}$ cuando $a > 1$; y
   $x < y \implies a^{y} < a^{x}$ cuando $0 < a < 1$.

Figura 6. Definición de función exponencial
Fuente: Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000, p.170)

Lo expuesto en la figura 6 es el momento en que nosotros como parte de la dialéctica de institucionalización, asumimos la responsabilidad del proceso de enseñanza del conocimiento y mostramos a los estudiantes la definición formal de la función exponencial, que no era explícita en las situaciones anteriores.

Milieu

Almouloud (2014), señala que el *milieu* es uno de los puntos más importantes dentro de la teoría de situaciones didácticas, pues analiza, por un lado, las relaciones entre los estudiantes, los conocimientos y las situaciones; y, por otro lado, las relaciones entre los propios conocimientos y entre las propias situaciones. Asimismo, el profesor es el responsable de la organización del juego entre el estudiante y el *milieu*, pues él selecciona las situaciones *adidacticas* convenientes con los cuales el estudiante debe interaccionar para encaminar el proceso de aprendizaje.

Con respecto al *milieu,* Perrin-Glorian (como se citó en Almouloud 2014) distingue tres componentes:

i) El componente material, conformado por los materiales e instrumentos.
ii) El componente cognitivo, conformado por los conocimientos que se disponen para la resolución de un problema, que no necesariamente son institucionalizados.
iii) El componente social, conformado por los otros individuos que pueden intervenir en la resolución de un problema. Pueden ser el profesor y otros estudiantes.

Por ejemplo, en nuestra investigación, el *milieu* estaría conformado por las fichas en las cuales estará la situación-problema que se les entregaran a los estudiantes. Este sería el componente material. El componente cognitivo sería cuando los estudiantes empiecen a analizar la situación planteada utilizando sus saberes con los que disponen y el componente social estaría relacionado con el profesor responsable de implementar la secuencia de actividades, además de los estudiantes que forman parte de la actividad.

Contrato Didáctico

Brousseau (como se citó en Kuzniak 2005), manifiesta que los hábitos de los profesor que esperan los estudiantes y las actitudes de los estudiantes que esperan los profesor es el contrato didáctico. Además, Kuzniak (2005) señala que el contrato didáctico no se debe pensar como un documento que tiene ciertas cláusulas, donde se especifique lo que se quiere enseñar.

Al respecto, Almouloud (2014), destaca algunas observaciones importantes con respecto al contrato didáctico:

i. El contrato didáctico se diferencia del contrato pedagógico, en que el primero es especifico de los conocimientos en juego, los cuales pueden cambiar, teniendo en cuenta que los saberes cambian, se transforman y evolucionan; a diferencia del segundo, que ve a los conocimientos como estáticos y le da énfasis a las relaciones sociales.
ii. Los diferentes contextos de enseñanza y aprendizaje influyen en el funcionamiento del contrato didáctico.
iii. El principal objetivo del contrato didáctico es la adquisición de los saberes por parte de los estudiantes.
iv. Una incorrecta administración del contrato didáctico por parte de los estudiantes o del profesor pueden generar dificultades en el correcto aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

En nuestra investigación, la ruptura del contrato didáctico se producirá cuando se les plantee a los estudiantes las reglas para el desenvolvimiento de la clase, es decir, ellos asumirán la responsabilidad de resolver las situaciones problemas de la secuencia didáctica, sin la intervención directa del profesor. Esto es una ruptura, pues los estudiantes comúnmente esperan a que el profesor empiece la clase explicando la parte teórica, para luego continuar con la resolución de problemas.

Variables didácticas

Para poder entender lo que es una variable didáctica, se hace necesario primero definir lo que es una variable cognitiva. Al respecto, Almouloud (2017), señala que una *variable cognitiva* es un parámetro de una determinada situación, la cual, al ser alterada, provoca también una alteración en los conocimientos necesarios en la resolución de un problema o en el proceso de aprendizaje. Asimismo, el autor define una *variable didáctica* de una situación como una variable cognitiva que puede ser modificada por el profesor, cuya alteración puede modificar los comportamientos de los estudiantes referidos al aprendizaje. Además, la buena elección de esas variables puede permitir hacer emerger en los estudiantes nuevos conocimientos que pueden ser utilizados después como herramientas en la resolución de otra situación.

Almouloud (2017), manifiesta que las variables didácticas son sumamente importantes en la construcción de las situaciones-problema, pues con ellas, por lo expuesto líneas arriba, se podrá variar las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Con respecto a la construcción, análisis y experimentación de las situaciones-problema, el autor, señala dos tipos de variables, las *macro didácticas*, referentes a la organización integral de la secuencia didáctica; y las *micro didácticas*, referentes a la organización local de las secuencias didácticas, como la organización de una sesión.

Por ejemplo, en nuestra investigación, algunas de las variables macro didácticas son el ambiente de experimentación, organización de los estudiantes, formato de entrega de las actividades; y como variables micro didácticas tenemos la regla de correspondencia de la función exponencial, la base de la función exponencial y el tiempo.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Después de haber descrito aspectos de nuestro marco teórico, así como expuesto nuestros antecedentes y la justificación de nuestra investigación, es que en esta sección nos planteamos la pregunta de investigación y los objetivos.

¿Cuáles son las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria?

Para poder responder la pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria.

Para alcanzar el objetivo general de nuestra investigación, pretendemos precisar los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar las estrategias que los estudiantes de quinto de secundaria utilizan en la situación problema al construir la función exponencial.
- Determinar la contribución de una situación problema para que los estudiantes de quinto de secundaria identifiquen las condiciones de crecimiento o decrecimiento de una función exponencial.
- Estudiar el aporte de la situación problema para fortalecer los saberes de los estudiantes de quinto de secundaria respecto a la función exponencial.

Con respecto al primer objetivo, estudiamos las estrategias de los estudiantes desde nuestro marco teórico, la TSD, pues a través de ella podemos analizar las acciones, formulaciones o validaciones que realizan los estudiantes al resolver las situaciones problemas planteadas. El segundo objetivo se cumple cuando mediante las situaciones problemas, los estudiantes consiguen construir la regla de correspondencia de la función exponencial e identifiquen una relación entre la base de la función y el crecimiento o decrecimiento. Con respecto al tercer objetivo, estudiamos el aporte de otra situación problema perteneciente a la secuencia didáctica, que permite fortalecer los conocimientos adquiridos en las situaciones problemas anteriores. Esto se produce cuando los estudiantes movilizan estos conocimientos al resolver la situación planteada.

Todo esto nos permitirá conseguir nuestro objetivo general y con esto poder responder la pregunta de investigación. Así podemos conocer las contribuciones de la secuencia didáctica, la cual no es un conjunto de actividades cualesquiera, sino que está conformada por situaciones problemas, las que nos permiten construir el objeto matemático. Resaltamos que usamos el término de concepto en el sentido de Vergnaud (como se citó en Sureda 2012), quien lo define como un triplete, formado por un conjunto de situaciones, de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto), de formas simbólicas y lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto.

1.5 Metodología de la investigación

En este apartado, expondremos la metodología de la presente investigación, que es de corte cualitativo. Asimismo, mostraremos su pertinencia y relevancia.

1.5.1 Investigación cualitativa

Para Creswell (2010), la investigación cualitativa es el medio por el cual se puede averiguar y entender el significado que le pueden dar a un problema social, humano, individual o grupal. Además, este proceso está envuelto en una serie de cuestiones y procedimientos, que surgen de la recolección de datos provenientes del entorno del sujeto implicado.

Al respecto, Bogdan y Biklen (1994), señalan que la investigación cualitativa posee cinco características:

i) La fuente directa de datos es el ambiente natural y el instrumento principal es el investigador. Los datos son recogidos en la misma situación y se complementan por la información que se obtiene a través del contacto directo.
ii) La investigación cualitativa es descriptiva. Los datos recogidos se manifiestan mediante la palabra, videos, documentos personales, entrevistas, fotografías u otros medios que permitan recolectar los datos.
iii) Los investigadores cualitativos se interesan más por los procesos, que simplemente por los productos. Aquí lo importante es analizar las actividades, los procedimientos y las interacciones con el medio.
iv) Los investigadores cualitativos se inclinan en analizar los datos en forma inductiva. La recolección de datos no es con el fin de confirmar hipótesis, sino que se va construyendo la investigación a medida que se van recogiendo y examinando los datos.
v) En la investigación cualitativa, el significado es de vital importancia. Los investigadores cualitativos en educación están continuamente cuestionando a los sujetos de estudio con la finalidad de entender lo que experimentan y cómo lo interpretan.

Los ítems i) y ii) se ven reflejados en nuestra investigación cuando obtenemos información de las acciones de los estudiantes al enfrentarse a la situación problema. Estos datos los recolectamos mediante fichas de observación y grabaciones de video. Además, los ítems iii) y iv) se evidencian, pues nosotros buscamos analizar los procesos de construcción de la función exponencial bajo la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas. Finalmente, el ítem v) estará a lo largo de toda la experiencia, pues se buscará cuestionar a los estudiantes para entender cómo actúan frente a determinada situación problema e influyéndolos a justificar sus resultados. Es por estas razones que nuestra investigación es de naturaleza cualitativa.

En ese sentido, radica la importancia de elegir un método que nos sirva de guía para cumplir nuestro objetivo y darle una estructura a nuestro trabajo. Es por ello, que contemplamos utilizar la Ingeniería Didáctica de Michelle Artigue, puesto que esta metodología es propia de la Teoría de Situaciones Didácticas, siendo esto último el marco teórico que emplearemos en el presente trabajo. A continuación, explicaremos los fundamentos de esta metodología.

1.5.2 Ingeniería didáctica

Artigue (1995), señala que la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se caracteriza por ser un esquema experimental fundamentado en las "realizaciones didácticas" que se dan en el salón de clase, esto es, la creación, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Adicionalmente, tiene la característica de realizar validaciones internas a diferencia de otros tipos de investigación que también realizan experimentación en clase y validaciones externas. Esta validación interna se basa en una comparación entre el análisis *a priori* del *a posteriori*. En ese sentido Brousseau (2013), menciona:

> La ingeniería didáctica se preocupa por crear modelos coherentes y relevantes y producir dispositivos de enseñanza de un conocimiento preciso, destinados a describir o predecir y explicar los eventos observables de un episodio de enseñanza particular (situaciones o plan de estudios) observados o previstos: 1) observado, con el fin de recopilar la información que hará posible explicar a posteriori su progreso y sus resultados, y permitir su reproducción 2) previsto para determinar las condiciones reproducibles (factible y comunicable) de su progreso y sus resultados observables.(p.4)

Al respecto, Artigue (1995), describe cuatro fases en el proceso experimental de la Ingeniería Didáctica:

Análisis preliminar

La autora afirma que en el análisis preliminar se debe considerar lo siguiente:

- El análisis epistemológico de los contenidos considerados a enseñar.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus consecuencias.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes con respecto al objeto matemático en estudio,
- El análisis de los obstáculos y dificultades que delimitan la evolución de las concepciones por parte de los estudiantes.
- El análisis de las restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

La investigadora señala una serie de dimensiones que distinguen a la Ingeniería Didáctica. Estas son las siguientes: *dimensión epistemológica* asociada a las características del saber en juego; *dimensión cognitiva* asociada a las características cognitivas de los sujetos a que va dirigida la enseñanza; *dimensión didáctica* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Al respecto, Almouloud (2014), considera que el análisis preliminar puede contener los siguientes aspectos:

a) Estudio de la organización matemática
   - Estudiar la génesis histórica del objeto matemático en estudio, así como los obstáculos epistemológicos.
   - Analizar la estructura matemática del objeto matemático.

     Estos puntos están dentro de la *dimensión epistemológica*.

b) Análisis de la organización didáctica del objeto matemático que se pretende investigar
   - Analizar y estudiar la evolución del tratamiento del concepto en las diferentes instituciones donde se enseñanza el objeto matemático que se pretende investigar.
   - Hacer un análisis de las propuestas curriculares. En nuestra investigación, es analizar el Currículo Nacional.
   - Analizar los libros didácticos. En nuestra investigación, este tópico es tratado al analizar los libros con los que trabajan nuestros sujetos de estudio.

     Debemos señalar que estos puntos están en la *dimensión didáctica.*
   - Estudiar las concepciones de los estudiantes y profesores con respecto al saber que está en juego

     Este punto está dentro de la *dimensión cognitiva*.

   En nuestra investigación, con respecto a la *dimensión epistemológica,* nos apoyamos en la tesis doctoral de Sureda (2012). Además, para la estructura matemática, nos basamos en libros matemáticos, en los cuales se dé una definición formal y rigurosa de la función exponencial, pues en ella se realiza un estudio epistemológico de la función exponencial. De acuerdo a la *dimensión didáctica*, un referente en nuestra investigación es la ubicación de este objeto matemático en el Currículo Nacional. Asimismo, respecto a la *dimensión cognitiva,* está en nuestros antecedentes, pues ahí se identifican las dificultades encontradas por parte de los estudiantes al estudiar la función exponencial.

c) Definición de la pregunta(s) de investigación

Almouloud (2014), manifiesta que los estudios realizados en los incisos a) y b) ayudan al investigador en la definición de la pregunta e hipótesis de la investigación que se desea realizar. Antes de delimitar la pregunta de investigación, se deben considerar algunos aspectos:

- Hacer un resumen de los problemas relacionados con la enseñanza y estudio del objeto matemático que se quiere estudiar.
- Destacar los principales resultados de las investigaciones realizadas sobre el objeto de estudio.
- Definir las cuestiones de investigación y justificarlas.
- Definir los fundamentos teóricos y metodológicos que serán la guía en la fase experimental.

También, Almouloud (2014), afirma que los análisis preliminares deben permitir al investigador identificar posibles variables didácticas que serán manipuladas en las siguientes fases.

Concepción y análisis *a priori*

Almouloud (2014), señala que en esta fase el investigador debe elaborar la secuencia de enseñanza, que está formada por situaciones-problema y analizar las posibles respuestas de los estudiantes (análisis *a priori*).

Para Almoulud (2014),

> una situación problema es la elección de cuestiones abiertas y / o cerradas en una situación más o menos matematizada, involucrando un campo de problemas colocados en uno o varios dominios de saber y de conocimientos. Sus funciones principales son la utilización implícita, y luego explicita, de nuevo objetos matemáticos, por medio de cuestiones planteadas por los alumnos en el momento de la resolución del problema. (p. 174)

Además, el investigador señala que una situación-problema debe estar construida pensando en las variables didácticas que pueden permitir los cambios necesarios respecto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático que se desea estudiar. Todo esto es el objetivo del análisis *a priori.*

Artigue (1995), menciona que el investigador debe actuar sobre las variables que considera pertinentes con respecto al objeto de estudio. Estos tipos de variables son las siguientes:

- Las *variables macro-didácticas o globales*, relativas a la organización global de la ingeniería.
- Las variables *micro-didácticas o locales*, concernientes a la organización de una secuencia o fase.

Con respecto a nuestra investigación, estamos en un nivel micro-didáctico, pues queremos que los estudiantes construyan el concepto de la función exponencial mediante una o más situaciones problema, de las cuales manipularemos las variables didácticas que nos permitan cumplir nuestro objetivo.

Artigue (1995), señala que el objetivo principal del análisis *a priori* es determinar cómo las elecciones efectuadas de las variables permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y esclarecer su significado. Además, este análisis *a priori* está conformado por una parte predicativa y descriptiva que tiene las siguientes características:

- Describir las selecciones de las variables locales y las características de la situación didáctica que se pretende desarrollar.
- Analizar que podría estar en juego para los estudiantes en función de las posibilidades de acción, de selección, de tomas de decisión, de control y validación. Además, el profesor debe estar aislado de la puesta en práctica.
- Prever los comportamientos posibles por parte de los estudiantes y demostrar como el análisis anterior permite controlar los comportamientos esperados.

El análisis *a priori* en nuestra investigación se produce cuando analizamos las posibles respuestas de los estudiantes al enfrentarse a las situaciones problemas para que construyan la función exponencial.

Experimentación

Al respecto, Almouloud (2014), afirma que en esta fase se pone en funcionamiento todo el instrumento construido, modificando las variables locales (micro-didácticas) cuando sea necesario, lo que implica un regreso al análisis a priori. En esta fase, se recogen datos mediante observaciones hechas a los sujetos de estudio y de los resultados obtenidos dentro o fuera del aula. Estos datos se pueden complementar con entrevistas o cuestionarios. En nuestra investigación, la fase experimental comienza en el preciso momento en que se proporcionan las instrucciones a los estudiantes y ellos asumen la responsabilidad de resolver la situación planteada.

Análisis *a posteriori* y validación

Para Almouloud (2014),

> El análisis *a posteriori* de una sesión es un conjunto de resultados que se puede obtener de los datos recogidos y que contribuye para la mejora de los conocimientos didácticos que se tienen sobre las condiciones de trasmisión del saber que está en juego. (p.177)

El análisis *a posteriori* depende de herramientas técnicas (grabaciones, material didáctico, etc.) o teóricas (teoría de situaciones, contrato didáctico, etc.). Estas herramientas permiten construir la forma en la que se debe realizar la investigación.

Según Artigue (1995), la fundamentación de la validación radica en la confrontación del análisis *a priori* y *a posteriori*. Esta es de esencia interna. En nuestra investigación, el proceso de validación se produce cuando comparemos los resultados de los estudiantes y las respuestas esperadas producto de nuestro análisis *a priori.*

En nuestra investigación, el análisis *a posteriori* se observa cuando analizamos los datos obtenidos de las fichas de observación, grabaciones y las separatas, cuyo contenido son las situaciones problemas que resuelven y donde realizan anotaciones que también analizaremos. Luego de esto, comparamos los resultados obtenidos en esta fase con nuestro análisis *a priori*. En este momento, estamos en la fase de validación.

Presentamos a continuación el estudio epistemológico de la función exponencial, así como un análisis de los libros didácticos, en los cuales se estudia este objeto matemático.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En el presente capítulo, se realiza un estudio histórico de la función exponencial con el propósito de conocer cómo se introduce este concepto en épocas anteriores a la actual. Luego presentamos la función exponencial, sus propiedades, así como los teoremas de caracterización. Finalmente, realizamos un análisis didáctico de un texto perteneciente al quinto año de secundaria, el cual es utilizado por los sujetos de estudio.

2.1 Un panorama histórico de la Función Exponencial

En esta primera parte, mostramos aspectos históricos de cómo se inició el estudio de la función exponencial, para poder observar si esa forma como se presentaba ese objeto matemático aún prevalece en nuestros tiempos. Para ello, nos apoyamos en las investigaciones de Sureda (2012) y Freitas (2015).

Si bien es cierto que, en la actualidad, precisamente en el nivel secundario, se enseña primero la función exponencial y después la función logarítmica como su inversa, en la antigüedad, esto no sucedía. Fue Euler en 1748, quien define a la función exponencial como la inversa de la función logarítmica, Sureda (2012). Asimismo, la autora señala en su investigación que, al inicio, la función exponencial estuvo conectada al cálculo del logaritmo como una vinculación entre una progresión geométrica y una aritmética, lo cual permite transformar las divisiones en restas y los productos en sumas.

Sureda (2012), manifiesta que esta asociación fue desenvuelta por el matemático Miguel Stifel en el año 1544, en su obra "Arithmética Integra". En ella, se expresa la relación entre la progresión geométrica: $1, r, r^2, r^3, r^4, \ldots$; y la progresión aritmética: $0,1,2,3,4, \ldots$; además en esta misma obra aparece la primera tabla de logaritmos elementales respecto a las potencias de 2 (tabla 1).

Tabla 1. Primera tabla de logaritmos elementales

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Fuente: Adaptado de Sureda (2012)

Con respecto a la tabla 1, Sureda (2012), menciona que, a los elementos de la sucesión de la parte superior, el autor los denomina exponentes, y que el producto de dos términos de la progresión geométrica obtiene como resultado un número, el cual tiene como exponente la suma de los términos correspondientes de la progresión aritmética. Asimismo, para la división de dos elementos de la progresión geométrica, se obtiene como resultado un número, cuyo exponente es la diferencia de los términos respectivamente de la progresión aritmética.

En esas secuencias, se interesó y reflexionó John Napier (1550-1617), y con ella realizó la invención de los logaritmos, así lo señala Boyer (2003).

> Para conseguir que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estén muy próximos unos a otros, es necesario tomar un número muy próximo a uno. En consecuencia, Napier decidió tomar $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ como el número dado; entonces los términos de la progresión (decreciente) de potencias enteras crecientes, están ciertamente muy próximos entre sí, demasiado próximos de hecho. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplicó Napier todas las potencias por 10^7. Entonces, si $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, L será el "logaritmo " de Napier del número N; así pues, el logaritmo de 10^7 será 0, el logaritmo de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 9999999$ será 1, etc. Si dividiéramos tanto los números como los logaritmos por 10^7, tendríamos prácticamente un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, puesto que $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ no se diferencia demasiado del $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. (p.396)

De acuerdo a esto, Freitas (2015), afirma que la expresión N tiene la forma de la función exponencial. Es por ello que se destaca el hecho de asociar a los logaritmos como una operación inversa de la función exponencial. También, la autora, señala que Napier desconocía el concepto de base de un logaritmo.

Cabe mencionar también a otro científico que contribuyó en la Matemática, Leonhard Euler (1707-1783), quien fue el más prolijo en la invención de notaciones matemáticas. Al respecto, Boyer (2003), manifiesta que Euler ya usaba la letra e para representar la base de un sistema de logaritmos naturales, además que tal vez vino sugerido de la palabra "exponencial", que fue utilizada por primera vez en su obra *Mechanica.* Asimismo, Maor (como se citó en Rozanski 2015) señala que fue Euler quien empezó a pensar en la función exponencial como una función y no solamente como la inversa de la función logarítmica.

Adicionalmente, Roque (como se citó en Freitas 2015), señala que en esa época se suponía que se podía escribir como una serie de potencia cualquier función como, por ejemplo, la función exponencial $f(x) = e^x$, mediante la serie de Taylor en torno de $a = 0$, definido por: $e^x = 1 + \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Boyer (2003), manifiesta que se le suele asignar a Jean Bernoulli (1667-1748) el cálculo exponencial, pues además de estudiar las curvas $f(x) = a^x,$ también estudio las de forma $g(x) = x^x$. Con respecto a esta última función, pudo encontrar el área bajo la curva desde $x = 0\ a\ x = 1$, mediante la siguiente serie: $\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$; este resultado lo obtuvo escribiendo $x^x = e^{xlnx}$.

Nos percatamos que el nacimiento de la función exponencial se produjo como la inversa de la función logarítmica y es Euler quien empieza a estudiar a este objeto matemático como función, con sus propiedades que lo caracterizan y dichas propiedades son estudiadas en la actualidad.

2.2 La Función Exponencial

En este apartado, se realiza el estudio de la estructura matemática de la función exponencial con el fin de conocer sus características, así como sus representaciones. Lages et al. (2000) desarrolla este objeto matemático en el capítulo 8 titulado “Funciones Exponenciales y Logarítmicas”, el cual está subdividido en once secciones, como se observa en el Cuadro 1, para finalmente culminar con diez ejercicios.

Cuadro 1. Secciones del capítulo 8

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS		
8.1 Introducción	8.2 Potencias de exponente racional	8.3 La función exponencial
8.4 Caracterización de la función exponencial	8.5 Funciones exponenciales y progresiones	8.6 Función inversa
8.7 Funciones logarítmicas	8.8 Caracterización de las funciones logarítmicas	8.9 Logaritmos naturales
8.10 La función exponencial de base e	8.11 Como verificar que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depende solo de h	Ejercicios

En la introducción, Lages et al. (2000), señalan que las únicas funciones que puedan representar el modelo matemático para describir la variación de un capital impuesto a interés fijo en función del tiempo debe de tener la forma $c(t) = c_o . a^t$, siendo c_o el capital, a la tasa de interés fijo y t el tiempo. Asimismo, el autor manifiesta que esta situación también ocurre en la desintegración de los átomos de una determinada sustancia radioactiva, pues ahí la cantidad de materia que se desintegra es proporcional a la masa de la sustancia que aún queda. Además, se menciona que los científicos denominan *vida media* a las sustancias radiactivas que se desintegran en la mitad de su masa al cabo de un tiempo determinado.

Luego, el autor antes de definir la función exponencial hace una revisión de las potencias de exponente racional, pero antes de ello realiza el estudio para exponente natural, como se muestra en la figura 7.

Sea a un número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, la potencia a^n, de base a y exponente n está definida como el producto de n factores iguales a a. Para $n = 1$, como no hay producto de un solo factor, se pone $a^1 = a$, por definición.

La definición inductiva de a^n es: $a^1 = a$ y $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Para$m, n\mathbb{N}$ cualesquiera se tiene

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Figura 7. Definición de función exponencial
Fuente: Lages et al. (2000, p.165)

Además, el autor partiendo de esta definición empieza a señalar algunas características que más adelante serán de la función exponencial, pues manifiesta que si $a > 1$ entonces multiplicando a ambos miembros por a^n, se obtiene $a^{n+1} > a^n$, por lo que se puede deducir que $1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots$; lo que sería una sucesión creciente. Análogamente, realiza el análisis para $0 < a < 1$, obteniendo que $1 > a > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$; la cual es una sucesión decreciente.

Con respecto a la definición de la función exponencial, Lages et al. (2000), la presenta utilizando representaciones algebraicas de la siguiente forma:

> Sea a un número real positivo, que supondremos siempre diferente de 1. La *función exponencial de base* a, $f: R \to R^+$, indicada por la notación $f(x) = a^x$, debe ser definida de modo que tenga las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y \in R$:

1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;
2) $a^1 = a$;
3) $x < y \implies a^x < a^y$ cuando $a > 1$; y $x < y \implies a^y < a^x$ cuando $0 < a < 1$. (p. 170)

Se puede observar, aunque no lo menciona, que el dominio de la función es $]-\infty; +\infty[$ y que el rango es $]0; +\infty[$. Lo que si menciona el autor es que la propiedad 1) transforma sumas en productos, $f(x+y) = f(x).f(y)$. En la propiedad 3), se menciona que la función es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.

Además, el autor presenta las siguientes propiedades

4) La función $f: R \to R^+$ definida por $f(x) = a^x$, es ilimitada superiormente.
5) La función exponencial es continua.
6) La función exponencial $f: R \to R^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$, es sobreyectiva. (p. 172)

Con respecto a la propiedad 4), el autor señala que si $a > 1$ entonces a^x crece sin límites cuando $x > 0$ es muy grande. Y si $0 < a < 1$, entonces a^x se vuelve arbitrariamente grande (el valor absoluto es grande cuando $x < 0$). Para la propiedad 6), se sigue el concepto de sobreyectividad. Por ello, el autor manifiesta que para todo número real $b > 0$ existe algún $x \in R$ tal que $a^x = b$.

El autor muestra la representación gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ cuando $a > 1$ y $0 < a < 1$, como se muestra en la figura 8.

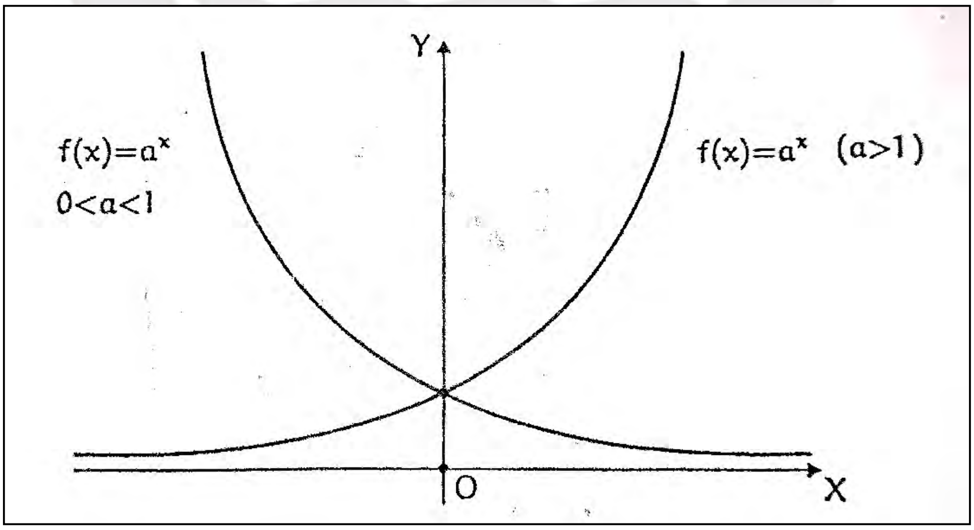


Figura 8. Gráfica de la función exponencial
Fuente: Lages et al. (2000, p.173)

Posteriormente, Lages et al. (2000), presentan la caracterización de la función exponencial, pues se precisa saber cuáles son las “propiedades características” de este objeto matemático que la diferencia de otras funciones como la afín o la cuadrática. Para presentar dicha caracterización, el autor presenta un teorema como se observa en la figura 9.

Teorema:(Caracterización de la función exponencial.) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente). Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, donde* $a = f(1)$*;*

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para cualquier* $x, y \in \mathbb{R}$.

Figura 9. Caracterización de la función exponencial
Fuente: Lages et al. (2000, p.175)

Luego, en el texto, Lages et al. (2000) mencionan las funciones del tipo exponencial y estas son de nuestro interés, puesto que son las más utilizadas en problemas de modelamiento matemático. La definición de este tipo de función exponencial se observa en la figura 10.

Decimos que una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de *tipo exponencial* cuando se tiene $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde a y b son constantes positivas. Si $a > 1$, g es creciente y si $0 < a < 1$ g es decreciente.

Figura 10. Función del tipo exponencial
Fuente: Lages et al. (2000, p.175)

Seguidamente, el autor señala que la función g siendo del tipo exponencial, se cumple:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad y \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \quad \text{; siendo } x, h \in \mathbb{R}$$

Asimismo, como se mencionó anteriormente, la caracterización de una función exponencial, muestra la caracterización de la función del tipo exponencial mediante un teorema, como se observa en la figura 11.

Teorema: (Caracterización de las funciones de tipo exponencial.) *Sea* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente) tal que, para cada* $x, h \in \mathbb{R}$ *cualesquiera, el incremento relativo* $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ *depende apenas de* h*, y no de* x*. Entonces, si* $b = g(0)$ *y* $a = g(1)/g(0)$*, se tiene* $g(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Figura 11. Caracterización de las funciones de tipo exponencial
Fuente: Lages et al. (2000, p.176)

Este teorema es importante, pues a partir de la utilización de este se pueden hallar los valores del coeficiente y de la base de la función $f(x) = b.a^x$, la cual utilizamos en nuestra secuencia de actividades.

En el apartado de los ejercicios, el autor presenta diez en la cual algunos son para probar matemáticamente ciertos enunciados, sin embargo, hay un ejercicio como se muestra en la figura 12, presentado en lengua natural que se podría considerar una situación problema.

8. Observaciones a lo largo del tiempo muestran que, después de períodos de la misma duración, la población de la tierra queda multiplicada por el mismo factor. Sabiendo que esa población era de 2,68 billones en 1956 y 3,78 billones en 1972, se pide:

(a) El tiempo necesario para que la población de la tierra duplique de valor.

(b) La población de la tierra para el año 2012.

(c) En que año la población de la tierra era de 1 billón.

Figura 12. Ejercicio encontrado en el texto
Fuente: Lages et al. (2000, p.203)

En este ejercicio, analizado desde nuestro marco teórico, podemos observar que se puede dar la *situación de acción*, pues los estudiantes pueden leer la situación problema y buscar relacionarla a un lenguaje matemático. También, la *situación de formulación* estaría presente, pues los estudiantes podrían buscar un modelo matemático que permita resolver el problema, apoyándose a su vez en los logaritmos. Asimismo, en esta fase, también los estudiantes podrían intercambiar información. La *situación de validación* se presentaría cuando los estudiantes justifiquen las operaciones matemáticas, así como las propiedades utilizadas que le permitieron la resolución del problema.

Efectuando un contraste con nuestro estudio histórico, podemos observar que el abordaje de este objeto matemático se produce tal como lo propuso Euler al estudiar la función exponencial como función y no como la inversa de la función logarítmica. Desde nuestro marco teórico, hemos podido observar que hay una sola situación problema que puede permitir a los estudiantes formular conjeturas y validar. Sin embargo, creemos que es insuficiente, pues hay otras aplicaciones como el crecimiento bacterial, o el interés compuesto. Además, podemos observar que el libro no provoca una ruptura de contrato didáctico, pues se presenta el título del tema, definición y ejercicios.

2.3 Enseñanza de la Función Exponencial

Para saber cómo se enseña la función exponencial en las instituciones educativas, realizaremos un análisis del libro de actividades “Matemática 5” perteneciente a la editorial Santillana. Debemos señalar que también se utiliza un libro denominado “texto escolar”, en el cual solo está el resumen del aspecto teórico que también se encuentra en el libro de actividades. Por ello, solo nos centraremos en este último. La elección de este libro se debe a que se utiliza en la institución educativa donde se realizó la investigación con estudiantes de 5to año de secundaria. Analizamos la función exponencial en el libro desarrollada en tres capítulos, “función exponencial”, “función exponencial y logarítmica natural” y “modelos exponenciales y logarítmicos”.

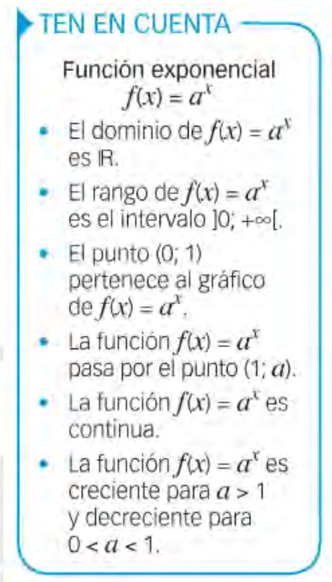
Organizamos el análisis del texto tomando como referencia el trabajo de Freitas (2015), en el que se destacan dos bloques para el análisis, uno de tarea/técnica, relacionado al saber hacer; y otro tecnológico/teórico relacionado a la justificación o modificación del primero.

Antes de organizar las actividades, mostraremos cómo se introduce la función exponencial en el libro de actividades, como lo podemos observar en la figura 13.

> Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.
>
> La condición establecida sobre la base ($a > 0$ y $a \neq 1$) hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor; por lo tanto, el dominio de la función es IR y su rango $IR^+ =]0; +\infty[$.
>
> El que la base sea mayor o menor que 1 va a condicionar que la función sea creciente o decreciente. En los casos de base mayor que 1, cuando mayor sea la base, más rápido será el crecimiento de la función.

Figura 13. Definición de la función exponencial
Fuente: Santillana (2016, p. 320)

Como se observa en la figura 13, se introduce el tema partiendo de la definición, tal cual lo presenta la sociedad matemática, solo que a diferencia del texto de Lages et al. (2000), se presenta en su mayoría el uso del lenguaje natural por ser un texto didáctico. Además, no se plantea una situación problema que pueda permitir al estudiante realizar conjeturas que le permitan construir la función exponencial. Con respecto a las características de la función exponencial el libro las menciona en un cuadro ubicado en el margen de la presente página tal como se observa en la figura 14.



TEN EN CUENTA

Función exponencial
$f(x) = a^x$

- El dominio de $f(x) = a^x$ es $\mathbb{R}$.
- El rango de $f(x) = a^x$ es el intervalo $]0; +\infty[$.
- El punto (0; 1) pertenece al gráfico de $f(x) = a^x$.
- La función $f(x) = a^x$ pasa por el punto $(1; a)$.
- La función $f(x) = a^x$ es continua.
- La función $f(x) = a^x$ es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$.

Figura 14. Características de la función exponencial
Fuente: Santillana (2016, p. 320)

De forma similar a la presentación de la definición de la función exponencial, se enseñan las características de la misma. Sin embargo, en este apartado se hace uso en su mayoría de la representación algebraica. Asimismo, el texto no busca que los estudiantes puedan mediante una situación problema descubrir estas características.

El texto presenta una serie de ejercicios resueltos con el título de ejemplos. En el primero, se describe la gráfica de la función exponencial, como se observa en la figura15.

EJEMPLO 21

Analiza los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (1/2)^x$.

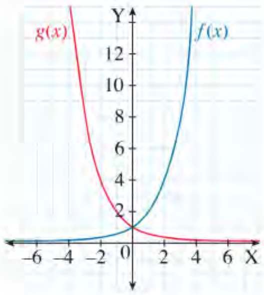
- Elaboramos la tabla de valores de cada una de las funciones y las graficamos:

$a > 1$

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$f(x)$	...	1/4	1/2	1	2	4	...

$0 < a < 1$

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$g(x)$	...	4	2	1	1/2	1/4	...



- Como podemos observar, las representaciones gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas con respecto al eje Y.
- La curva siempre se mantiene por encima del eje X, porque las funciones exponenciales siempre toman valores positivos.

Figura 15. Ejemplo de grafica de la función exponencial
Fuente: Santillana (2016, p. 320)

Como observamos en la figura 15, el texto hace uso de una tabla donde se asignan determinados valores para la variable x y $f(x)$, pero no señala que esos valores se han obtenido al reemplazarlos en la función. Además, el conjunto de puntos es discreto y la representación gráfica la presenta continua. Consideramos que esto provoca que el estudiante cometa un error al representar la función, aunque en las propiedades se señala que la función exponencial es continua. Se debió indicar esa propiedad en el ejemplo para que tenga coherencia la representación gráfica. Asimismo, el ejemplo muestra una propiedad que no es mencionada anteriormente, es decir, la simetría con respecto al eje y de una función del tipo $f(x) = a^x$ y una función $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

También debemos mencionar que en ninguna de las actividades del libro se propone realizar la representación gráfica de la función exponencial. Los siguientes ejemplos son de crecimiento bacterial asociado a la progresión geométrica como se observa en la figura 16.

EJEMPLO 23

El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora duplica su número. Escribe la función que represente el número de bacterias luego de x horas si se inicia el cultivo con 1000 bacterias.

- Registramos el experimento en una tabla:

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	1000	2000	4000	8000	16 000	32 000

- Expresamos el número de bacterias de la siguiente forma:

  $1000 \cdot 2^0$; $1000 \cdot 2^1$; $1000 \cdot 2^2$; $1000 \cdot 2^3$; $1000 \cdot 2^4$; ...

Luego de x horas habrá $1000 \cdot 2^x$ bacterias.

¿Al cabo de cuántas horas se tendrán más de 2 millones de bacterias?

Figura 16. Ejemplo utilizando crecimiento bacterial
Fuente: Santillana (2016, p. 321)

El ejemplo de la figura 16 se considera un problema que permitiría a los estudiantes construir la función exponencial de la forma $f(x) = b.a^x$, pues en sus saberes previos tienen los conocimientos de progresión geométrica, así como inducción y con esos saberes podrían haber deducido la regla de correspondencia. Claro está que, en ese proceso, los estudiantes pudieron haber hecho una serie de formulaciones. Sin embargo, al mostrar el ejemplo ya resuelto consideramos que les resta a los estudiantes la posibilidad de realizar conjeturas futuras, pues cuando se enfrenten a un problema de ese tipo solo harán los mismos procedimientos que el ejemplo y mucho menos validarán sus resultados.

Un ejemplo de crecimiento poblacional y modelos de crecimiento poblacional se puede distinguir en la figura 17.

EJEMPLO 25

El distrito de Huallanca, en el callejón de Huaylas, tiene 1200 habitantes. Si su población crece anualmente en un 4%, ¿cuántos habitantes tendrá aproximadamente dentro de 8 años?

- Observamos que interpretando el problema se trata de un crecimiento poblacional, que es una función exponencial. Por dato: $P_o = 1200$

  $P = P_o(1 + i)^t \longrightarrow P = 1200(1 + 0{,}04)^8 = 1642{,}28$ habitantes.

  Dentro de 8 años tendrá, aproximadamente, 1642 habitantes.

Si su población crece en un 3%, ¿cuántos habitantes tendrá el distrito de Huallanca dentro de 10 años?

Figura 17. Ejemplo utilizando el crecimiento poblacional
Fuente: Santillana (2016, p. 321)

En la figura 17, se puede apreciar que se trata de un problema referido al crecimiento poblacional, pero no explica el texto como se construye el modelo $P = P_O(1 + i)^t$ y solo se limita a reemplazar valores, sin buscar explicar un método que permita deducir el modelo presentado. A continuación, hemos agrupado las tareas del libro de actividades en tipos de tareas y técnicas, guiándonos del trabajo de Freitas (2015), además debemos de señalar que el texto no cuenta con muchas tareas.

Tabla 2. Descripción del tipo de tareas del libro didáctico

Tarea (T)	**Descripción del tipo de tarea**	**Libro de actividades de SANTILLANA**
T_1	Representar algebraicamente una función exponencial, a partir de un modelo de interés compuesto.	1
T_2	Representar algebraicamente una función exponencial, a partir de una progresión geométrica.	3
T_3	Construir la gráfica de la función exponencial a partir de su expresión algebraica.	0
T_4	Construir la representación algebraica a partir de su representación gráfica.	0
T_5	Resolver situaciones problema a partir de la manipulación de las variables dependiente e independiente.	3
T_6	Interpretación gráfica del crecimiento o decrecimiento de la función exponencial.	0
T_7	Resolver situaciones problema de aplicación de la función exponencial, donde se hace necesario la utilización de los logaritmos.	3

Fuente: Adaptado de Freitas (2015)

Como se observa en la tabla 2, los tipos de tareas que más aparecen son las de representación algebraica, esto quiere decir de hallar la regla de correspondencia de la función exponencial utilizando implícitamente la progresión geométrica. Asimismo, se observa que no hay actividades en los que se priorice la representación gráfica, ya sea a partir de una expresión algebraica o viceversa. Además, hay también una preponderancia en los tipos de tareas que consiste en reemplazar valores sin tener la necesidad de realizar un análisis del problema planteado.

Para cada tipo de tareas, se asocia una técnica o varias técnicas (cuadro 2) que permiten el desarrollo de cualquier tipo de tarea. En nuestro caso, estas técnicas nos permiten tener un mejor panorama para la construcción de nuestras situaciones problemas partiendo de nuestro maco teórico, por ejemplo en la $\boldsymbol{\tau_1}$ lee e interpreta(acción), y a partir de ello forma una progresión geométrica (formulación), para luego generalizarla, en la justificación de esa generalización (validación)

Cuadro 2. Descripción de tipos de técnicas

Técnica $(\boldsymbol{\tau})$	**Descripción de tipos de técnicas**
$(\boldsymbol{\tau_1})$	Lee e interpreta una situación –problema, expresada en lenguaje natural y a partir de ello formar una progresión geométrica para luego generalizarla en una función exponencial.
$(\boldsymbol{\tau_2})$	Leer e interpretar problemas de interés compuesto, identificando los valores del monto, interés, periodo como elementos de una función exponencial.
$(\boldsymbol{\tau_3})$	Reemplazar valores adecuados en la variable independiente, para luego encontrar los valores correspondientes de la variable dependiente, luego colocarlo en una tabla, definiéndolos como pares ordenados, para despiués colocarlos en el plano cartesiano, y unir los puntos observando la curva de la función exponencial.
$(\boldsymbol{\tau_4})$	Identificar los pares ordenados de la gráfica, para luego reemplazarlos en la función exponencial $f(x) = a^x$, y luego de resolver la ecuación, encontrar la ley general de la función.
$(\boldsymbol{\tau_5})$	Sustituir valores adecuados para las variables dependientes e independientes en una función exponencial del tipo $f(x) = a^x$.
$(\boldsymbol{\tau_6})$	Analizar e interpretar el crecimiento o decrecimiento de la gráfica de una función exponencial, analizando los valores de la variable independiente a medida de que aumente o disminuya los valores de la variable dependiente.
$(\boldsymbol{\tau_7})$	Resolver ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos.

Fuente: Adaptado de Freitas (2015)

A continuación, presentaremos y analizaremos algunas de las actividades del texto, como la que se observa en la figura 18, la cual está asociada a un tipo de tarea T_1 .

10 Si Juan deposita S/ 30 000 en una cuenta de ahorros que le da un interés del 10% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuánto recibirá anual después de 5 años?

Figura 18. Problema utilizando el interés compuesto
Fuente: Santillana (2016, p. 323)

Como se ve en la figura 18, este problema de función exponencial está ligado al concepto de interés compuesto. Sin embargo, no se busca que los estudiantes generen formulaciones a tratar de construir la regla de correspondencia del citado problema. Es más, para dar respuesta a la pregunta no es necesario tener la regla de correspondencia para hallar el monto al cabo de 5 años.

El siguiente problema está asociada al tipo de tarea T_2, como se ve en la figura 19.

11 Las bacterias en una solución se duplican cada minuto. Si hay 10^4 bacterias al comienzo, da una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t. ¿Cuántas bacterias hay después de una hora? ¿Después de qué tiempo habrá 10 240 000 bacterias?

Figura 19. Ejemplo utilizando la progresión geométrica
Fuente: Santillana (2016, p. 323)

A diferencia del problema anterior, en este si se pide hallar la regla de correspondencia, pero consideramos que el problema sería más rico para movilizar los saberes previos del estudiante, si en vez de pedir la función para un tiempo t, se busque la necesidad de que el estudiante construya esta función. Por ejemplo, preguntándole un estimado de bacterias no para una hora exacta, sino tal vez en horas con minutos.

Por último, mostramos un problema correspondiente al tipo de tareas T_5, como se observa en la figura 20. En este problema, ya está expresada la fórmula y para resolver el inciso a) solo basta con reemplazar la variable independiente, en este caso el tiempo de 10 años. Con respecto al inciso b), de igual forma solo basta con reemplazar los datos.

2 Un torno no digital se compra a S/ 20 000 y se deprecia de manera continua desde la fecha de compra. Su valor después de t años está dado por la fórmula $V(t) = 20\,000e^{-0,2t}$.

a) Determina el valor del torno después de 10 años.

b) ¿Después de cuántos años el torno costará la mitad de su precio?

Figura 20. Problema utilizando el interés compuesto
Fuente: Santillana (2016, p. 325)

Podemos concluir este análisis desde nuestro marco teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas, que los problemas presentados en el texto didáctico no introducen a los estudiantes en las situaciones de formulación ni de validación, pues en estos problemas, como se ha visto anteriormente, no se busca que los estudiantes construyan la función exponencial y mucho menos el problema permite que los estudiantes perciban que sus conocimientos son insuficientes para la resolución de los mismos. Es más, en algunos de ellos, ya se muestra la regla de correspondencia y solo se busca que reemplacen valores.

No obstante, este análisis permite contribuir en la construcción de nuestras situaciones problema, pues la función exponencial como hemos presentado en el análisis del texto didáctico, está ligada a conceptos matemáticos como la progresión geométrica, interés compuesto, que nos servirán en la construcción de estas situaciones problema.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presenta el escenario donde se desarrolla la experimentación, las características de nuestros sujetos de investigación, así como tres situaciones problemas en las cuales se expondrá el objetivo de cada una de ellas y las variables micro-didácticas empleadas en estas. Además, desarrollamos la metodología de la Ingeniería Didáctica. Mediante la fase de análisis *a* priori, analizamos las posibles respuestas de los estudiantes, así como también mostramos los datos obtenidos en la fase de análisis *a posteriori*, para finalmente presentar la validación.

3.1 Escenario donde se desarrolla la experimentación

La investigación se realizó en la institución educativa privada “San Vicente de Paúl” de la provincia de Lima-Perú, en la cual se dicta los cursos de Matemática y Razonamiento Matemático. Los periodos de estudio en esta institución están divididos por trimestres y nuestro objeto de estudio es la función exponencial, que se desarrolla en el tercer trimestre.

3.2 Sujetos de Investigación

Los sujetos de investigación son estudiantes del quinto año de educación secundaria cuyas edades están entre 16 y 17 años, que por propia voluntad y con el permiso de sus padres, aceptaron participar en el desarrollo de la investigación. Dado que la institución es pequeña, el número de estudiantes de ese año es cinco. Es por ello, que se les propuso a todos para que participaran. Ellos tienen como conocimientos previos, conceptos sobre progresión aritmética, progresión geométrica, interés compuesto, funciones reales de variable real y estas son la función lineal, función afín y función cuadrática.

En la experimentación, dada la poca cantidad de estudiantes, decidimos agruparlos de la siguiente forma, un grupo conformado por dos estudiantes y el otro compuesto por tres. Debido a que son solo dos grupos, estos serán parte de nuestro análisis.

Tabla 3. Sujetos de investigación

N° de Grupo	Integrantes
1	Andrew, Josué
2	Fiorela, Manuela, Yanella

3.3 Variables macro-didácticas

Las variables macro-didácticas consideradas en la fase experimental se pueden observar en el cuadro 3.

Cuadro 3. Variables macro-didácticas

Variable macro-didáctica	Valores
Referencial	Teoría de Situaciones Didácticas
Ambiente de experimentación	Lápiz y papel
Organización de los estudiantes	Grupos
Formato de entrega de las actividades	Impresión

3.4 Situaciones problemas

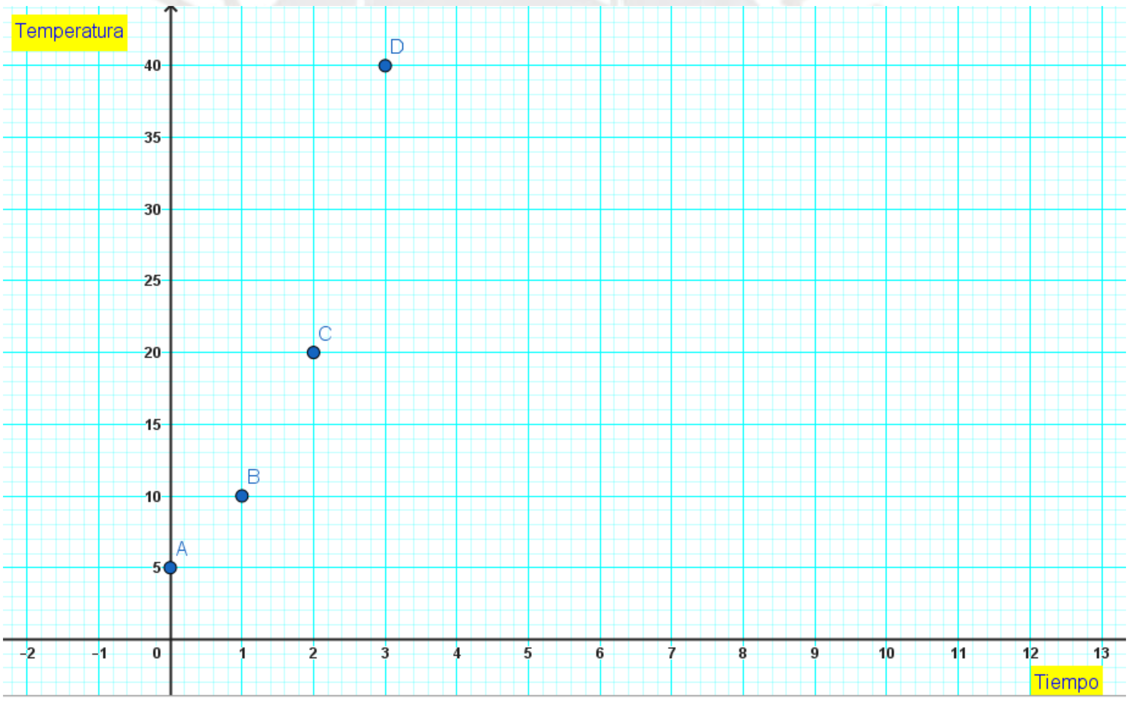
La definición de situación problema se dio en el apartado de aspectos teóricos. Las tres situaciones problemas se desarrollaron a lápiz y papel, pues queríamos que, a partir de la representación gráfica, modelen matemáticamente la regla de correspondencia de la función exponencial. Si bien hemos señalado anteriormente la importancia del software, consideramos que se puede utilizar como una herramienta para visualizar gráficamente algunas propiedades ya consolidadas o exploradas por los estudiantes como la variación de la base de la función exponencial. Sin embargo, el tiempo de las sesiones de clase, impidió poder incorporar el software como parte de nuestra secuencia de actividades.

Para la recolección de los datos, se utilizaron dos grabadoras de audio, donde se registraron las preguntas y formulaciones de los estudiantes al tratar de resolver las situaciones problema. Además, mediante una filmadora se pudo registrar la validación de sus resultados al momento de exponer, defender sus conjeturas y modelos matemáticos encontrados.

3.5 Análisis *a priori* y *a posteriori*

A continuación, presentamos el análisis de la secuencia de actividades, que está compuesta por tres situaciones problemas. Asimismo, con respecto a la situación problema usaremos la abreviatura SP.

Situación problema 1. Los puntos de fusión son constantes, muy utilizados en la Física y la Química. El punto de fusión es la temperatura en la cual ocurre el cambio del estado sólido al estado líquido, por ejemplo, el punto de fusión del aluminio es de 660,3 °C. Buscando ver el comportamiento de una aleación de hafnio, nitrógeno y carbono frente a altas temperaturas, científicos han simulado el experimento en un superordenador y registrado los datos, los que son representados en el siguiente gráfico.



a) ¿Cuál es la temperatura de la aleación a las 7 horas?
b) ¿Cuál es la temperatura estimada de la aleación a las 9h 30min y 9h 40min?
c) ¿Qué características presenta la función temperatura?

Análisis *a priori* de la situación problema 1

Objetivo: Relacionar la progresión geométrica con la construcción de la función exponencial y determinar sus propiedades de monotonía, es decir, función creciente.

Una posible solución matemática:

Los pares ordenados representados en la gráfica son:

$$A = (0;5)\ , B = (1;10)\ \ , C = (2;20)\ \ , D = (3;40)$$

Ítem (a): Para hallar la temperatura al cabo de 7 horas, se observa que los valores de la segunda componente de los pares ordenados están en progresión geométrica de razón 2, entonces los siguientes puntos serán $(4;80), (5;160), (6;320), (7;640)$. Por lo tanto, la temperatura al cabo de 7 horas será de 640°.

Ítem (b): Para hallar la temperatura en los tiempos 9h 30min y 9h 40min se hace necesario hallar la regla de correspondencia de la función temperatura que describe esos puntos, entonces se puede inducir la regla de correspondencia a partir de los pares ordenados (tabla 4).

Tabla 4. Inducción a partir de los datos

Tiempo	Temperatura
0	5×2^0
1	5×2^1
2	5×2^2

Por lo tanto, la temperatura en función del tiempo tendría la regla de correspondencia representada por $f(t) = 5 \times 2^t$

La temperatura 9h 30min=9,5 puesto que 30min es la mitad de una hora y haciendo una regla de tres simple para 9h y 40min

$$\left.\begin{matrix} 1\_\_\_\_60min \\ x\_\_\_\_40min \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{1 \times 40}{60} = 0{,}67$$

Entonces 9h 40min=9,67. Luego, reemplazamos en nuestra función temperatura representada por $f(t) = 5 \times 2^t$ y obtenemos $f(9{,}5) = 5 \times (2)^{9{,}5} = 3620{,}39$ y $f(9{,}67) = 5 \times (2)^{9{,}67} = 4073{,}15$

Así, para 9h 30min la temperatura es aproximadamente 3620,39° y para 9h 40min la temperatura aproximada es 4073,15°.

Ítem (c): Las características de la función temperatura serían las siguientes:

- $Dom(f) = [0; +\infty[$, siendo $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+$
- $Ran(f) = [5; +\infty[$, siendo $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$

- La función f es creciente pues se cumple que:

  si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$
- La función f es inyectiva pues:

  Sea $x_1 \wedge x_2 \in Dom_f$

  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \quad 2^{x_1} \neq 2^{x_2}$

  $$5 \times 2^{x_1} \neq 5 \times 2^{x_2}$$

  $$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Variables micro-didácticas SP1

A continuación, mostramos las variables micro-didácticas referidas a esta primera situación problema junto a los valores asumidas por estas (cuadro 4)

Cuadro 4. Variables micro-didácticas situación problema 1

Variable micro-didáctica	Valores
Regla de correspondencia de la función exponencial	$f(t) = b \times a^t,\ t \in \mathbb{Q}^+$
Base de la función exponencial	$a > 1$
Constante	$b > 0$
Tiempo	-Naturales -Racionales positivos

Debemos especificar respecto al cuadro 4, que los valores de la variable micro-didáctica tiempo, son los números naturales y los racionales positivos, debido a que esos son los valores en los cuales varia el tiempo respecto a la SP1. Todo esto influenciado por las preguntas de la situación planteada.

Respuestas esperadas SP1

Esperamos que los grupos como parte de sus acciones sobre el *milieu(material),* es decir, las fichas entregadas, lean la situación problema y entiendan la lógica de la situación, dado que está en un contexto extra matemático. Asimismo, como parte de la *devolución,* esperamos que los estudiantes acepten la responsabilidad de la resolución de la situación problema planteada y las consecuencias que involucra esa responsabilidad, al ser partícipes de su propio aprendizaje.

Ítem (a): Suponemos que los grupos para hallar la temperatura de la aleación al cabo de las 7 horas, identifiquen y organicen los pares ordenados representados por $(0;5),(1;10),(2;20),(3;40)$ (dialéctica de acción), en un cuadro conforme se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Organización de datos SP1-item a)

Tiempo	Temperatura	
0	5	x2
1	10	x2
2	20	x2
3	40	

Asimismo, formularían que los valores de la temperatura están en progresión geométrica de razón 2 (tabla 5), respecto a la segunda componente, es decir, que los otros pares ordenados son (4;80), (5;160), (6;320), (7;640). Esto significa que, para las 7h, la temperatura correspondiente es 640 °C.

Ítem (b): Esperamos que los grupos organicen los pares ordenados $(0;5),(1;10),(2;20),(3;40)$ (dialéctica de acción) en un cuadro, como mostramos en la tabla 6. Igualmente, a partir de observar que existe una progresión geométrica, formularían una relación entre la segunda componente de los pares ordenados respecto a la primera componente, con el propósito de formular el modelo matemático para este fenómeno, es decir, la regla de correspondencia de la función temperatura, utilizando la representación algebraica.

Tabla 6. Organización de datos SP1-item b)

Tiempo	Temperatura
0	5×2^0
1	5×2^1
2	5×2^2
3	5×2^3

Entonces, esperamos que observen la existencia de una relación entre el exponente y el tiempo, y a partir de la discusión entre los miembros del grupo (*milieu* social), puedan establecer la regla de correspondencia de la función temperatura y esta estaría representada por $f(t) = 5 \times 2^t$. Asimismo, a partir de este modelo, podrían encontrar un estimado de la temperatura de la aleación en un determinado tiempo.

Para esto, uno de los métodos algebraicos (dialéctica de acción) que pueden utilizar es pasar las horas y minutos a decimales, es decir, las 9h y 30min equivalen a 9,5 puesto que 30min es la mitad de una hora. En el caso de 9h 40 min utilizarían una regla de tres, es decir,

$$\left.\begin{matrix} 1\_\_\_\_60min \\ x\_\_\_\_40min \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{1 \times 40}{60} = 0{,}67$$

De igual modo, formularían que 9h 40min es equivalente a 9,67. Los grupos reemplazarían estos valores en la función $f(t) = 5 \times 2^t$, con lo cual se tendría, $f(9{,}5) = 5 \times (2^{9{,}5}) = 3620{,}39$ y $f(9{,}67) = 5 \times (2^{9{,}67}) = 4073{,}15$ (dialéctica de acción).

También, puede darse el caso que alguno de los grupos relacione los pares ordenados con una función afín. Esto lo manifestamos a partir del análisis de nuestros antecedentes, en donde se expone que los estudiantes tienden a cometer el error de utilizar modelos lineales, para situaciones no lineales. En caso se produzca este suceso, intervendrá el profesor-investigador para cuestionarlos sobre cómo es la regla de correspondencia de una función afín, pues los estudiantes conocen ese objeto matemático y saben que al reemplazar los puntos de la representación gráfica, deberían satisfacer la regla de correspondencia $f(x) = mx + b, m \neq 0$.

Ítem (c): Esperamos que los grupos formulen características de la función obtenida, así como que la función es creciente. Además suponemos que los grupos formulen el dominio y el rango de la función, es decir, $Dom(f) = [0; +\infty[$, siendo el $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+$, $Ran(f) = [5; +\infty[$, siendo el $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$, dado que en el Diseño Curricular Nacional, se especifica que estas nociones son estudiadas en el capítulo de funciones.

Análisis *a posteriori* de la situación problema 1

Ambos grupos, como parte de la *devolución*, aceptaron la responsabilidad de resolver la SP y con esto ser activos participes de su propio aprendizaje y este es una ruptura de contrato didáctico. Asimismo, como lo habíamos esperado en el análisis *a priori,* leyeron el enunciado y entendieron la situación. Además, se dieron cuenta de la necesidad de encontrar la regla de correspondencia, es decir, para poder encontrar la temperatura en función del tiempo, ya que este es un valor entero positivo y después un racional positivo (variable didáctica).

Grupo 1_ítem (a)

El grupo ordeno los pares ordenados de forma horizontal tal como observamos en la figura 21, hecho que no habíamos considerado en nuestro análisis.

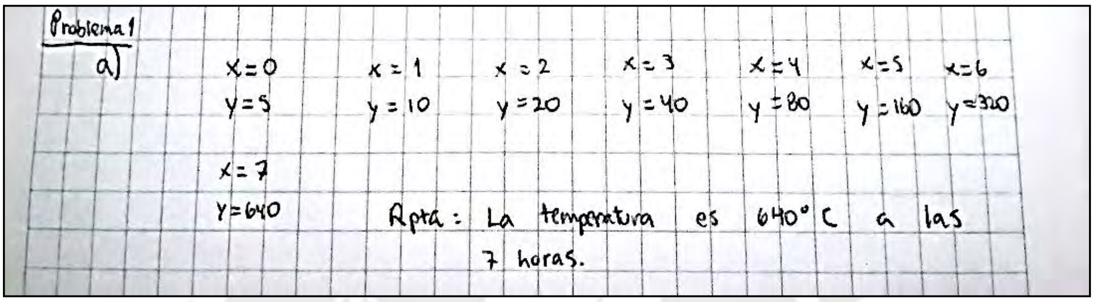
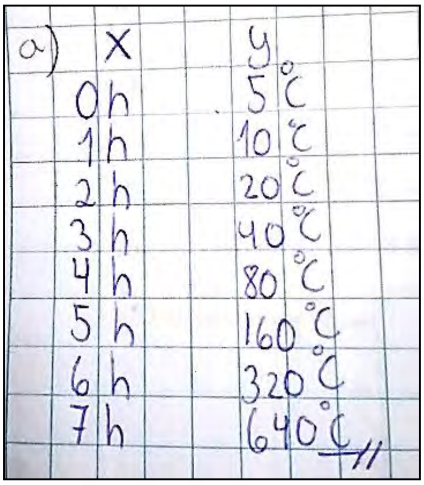


Figura 21. Resolución grupo 1 ítem a)-SP1

El grupo formuló verbalmente que la temperatura se duplicaba a medida que el tiempo (variable didáctica) aumentaba. Es por ello que, mediante sus acciones, es decir, el ordenamiento de los datos y multiplicar por dos, hallaron los otros pares ordenados (4;80), (5;160), (6;320), (7;640), para finalmente responder que al cabo de 7 horas la temperatura es 640°C.

Grupo 2_ítem (a)

Este grupo de modo similar ordenó los pares ordenados, como se observa en la figura 22, solo que a diferencia del grupo anterior lo hizo de forma vertical, hecho que consideramos *a priori.*



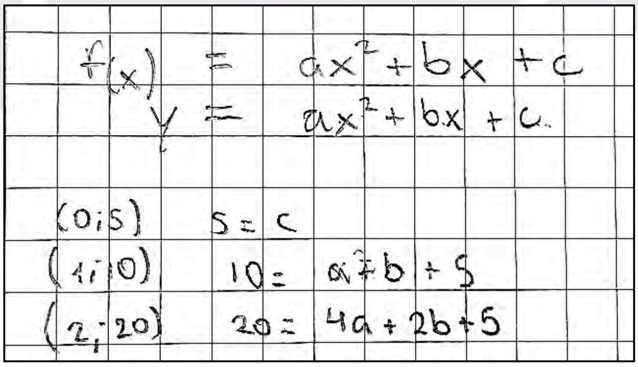
a)	x	y
	0 h	5 °C
	1 h	10 °C
	2 h	20 °C
	3 h	40 °C
	4 h	80 °C
	5 h	160 °C
	6 h	320 °C
	7 h	640 °C //

Figura 22. Resolución grupo 2 ítem a)-SP1

Asimismo, el grupo formuló verbalmente la relación de los valores de la temperatura con una progresión geométrica de razón 2, cuestión que habíamos considerado *a priori.*

Grupo 1_ítem (b)

El grupo formuló que los puntos tenían un comportamiento similar a una función cuadrática, hecho que no habíamos considerado en nuestro análisis *a priori*. Para esto, reemplazaron cada par ordenado en la función cuadrática representada como $f(x) = ax^2 + bx + c$ con la finalidad de obtener los coeficientes, tal como observamos en la figura 23.



$f(x) = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$

$(0;5) \quad 5 = c$

$(1;10) \quad 10 = a + b + 5$

$(2;20) \quad 20 = 4a + 2b + 5$

*Figura 23.*Función cuadrática considerada-grupo 1

El grupo representó el modelo de la función cuadrática como $y = \frac{5x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 5$, pero al reemplazar el par ordenado $(3; 40)$ en la función, observó que este par ordenado no satisfacía la función cuadrática. Luego lo relacionaron con un modelo exponencial representado por $f(x) = a^x$, dado que según lo formulado por el grupo esta representación es similar a la que alguna vez vieron navegando por Internet. Hay que mencionar que no están movilizando conocimientos de función exponencial, sino que están trayendo a la memoria una representación diferente a la función cuadrática.

Además, por medio del tanteo (dialéctica de acción), el grupo quería ajustar los datos proporcionados a una función como por ejemplo, $a^x + 5x = y$, tal como mostramos en la figura 24.

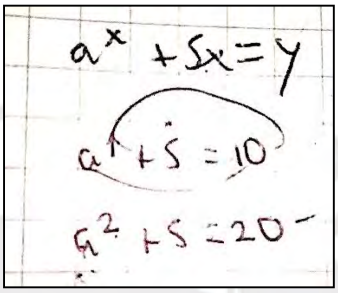


Figura 24. Utilización del tanteo-grupo 1

En este momento, intervino el profesor-investigador formulándoles una pregunta, ¿qué relación hay entre los valores obtenidos en el primer inciso y la función que quieren encontrar? A partir de esto, los estudiantes reorganizaron los datos (figura 25) en la búsqueda del modelo exponencial (puestos en situación de acción).

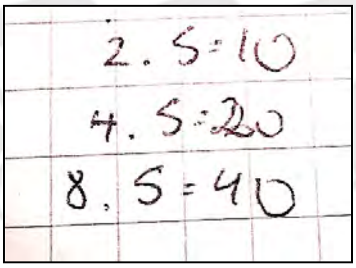


Figura 25. Reorganización de los datos-grupo 1.

Como se puede observar aquí, los estudiantes empezaron a reorganizar los pares ordenados obtenidos en el primer ítem (dialéctica de formulación), para luego construir la función temperatura, esto es, representar algebraicamente la regla de correspondencia (figura 26).

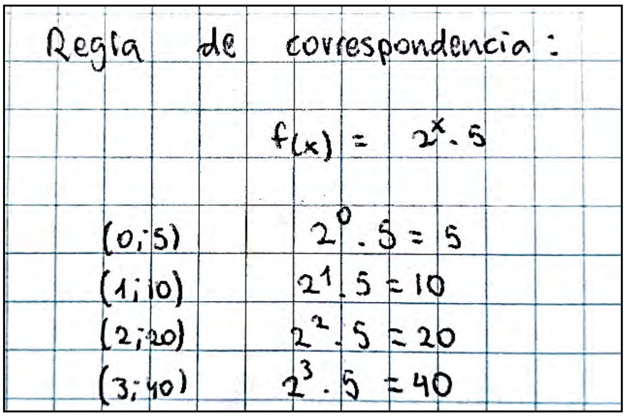


*Figura 26.*Regla de correspondencia de la función exponencial-grupo 1

Esto significa que el grupo ha movilizado sus conocimientos previos de progresión geométrica. Esto se refleja en el momento que el grupo expuso y justificó sus resultados (dialéctica de validación), tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

> **Profesor-investigador:** ¿Cómo han hallado la función $f(x) = 5 \times 2^x$?
>
> **Grupo 1:** Primero intentamos con una función cuadrática, pues tenía una forma de parábola. Comprobamos, pero no cumplía para todos los puntos. Obviamente, no era una función lineal, entonces recurrimos a una función exponencial.
>
> **Grupo 2:** ¿Función exponencial?, pero eso no hemos estudiado.
>
> **Grupo 1:** Si, pero hemos visto alguna vez navegando por Internet, así que empezamos con la forma $y = a^x$, pero nos dimos cuenta que no cumplía los valores. De ahí, nos dimos cuenta que es una progresión geométrica, pues es por dos por dos, entonces la base tiene que ser dos, y como 2^0 es 1, pero tiene que ser 5, entonces tiene que ser multiplicado por 5. Es por eso que llegamos a $f(x) = 2^x \times 5$

En este dialogo, se puede observar claramente la presencia de la dialéctica de formulación y validación, pues el Grupo 2 en el intercambio de ideas entre los miembros, conjeturaron que, en primer lugar, tenían la necesidad de hallar la función que les permita poder hallar la temperatura, cuando esta no es un número entero, lo que los llevo a pensar por la forma de la gráfica en una función cuadrática. Posteriormente, llegaron a encontrar la función que les permitió poder resolver el ítem (b). Además, justificaron (validación) al otro grupo todo su procedimiento para llegar a la función $f(x) = 2^x \times 5$.

Grupo 2_ítem (b)

El grupo formuló mediante la representación verbal lo siguiente*: "se necesita la regla de correspondencia para poder hallar la temperatura al reemplazar el tiempo de 9h 30min, que equivale a 9,5 porque como hicimos en el ítem a), de multiplicar por 2 no* *podríamos hallar la temperatura”.* Se observa que el cambio en nuestra variable didáctica (tiempo), provoca en el grupo un cambio de estrategia*.* Aquí observamos que en sus acciones y formulaciones están movilizando sus conocimientos previos de progresión geométrica, utilizando la representación verbal y algebraica al llevar esas ideas a un modelo matemático como esperábamos en nuestro análisis *a priori*. Esto se observa en la figura 27.

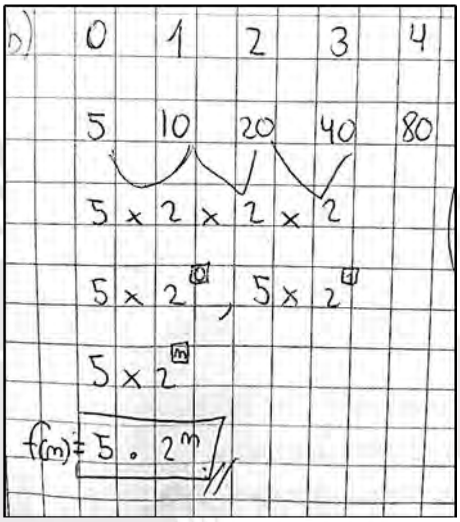


Figura 27. Modelación de la función exponencial-grupo 2.

Una vez hallada la regla de correspondencia de la función, el grupo 2 reemplazó las horas (dialéctica de acción), pero antes transformaron el tiempo a un número decimal. Nosotros esperábamos *a priori* que hicieran una regla de tres simple, la cual realizaron, como observamos en la figura 28.

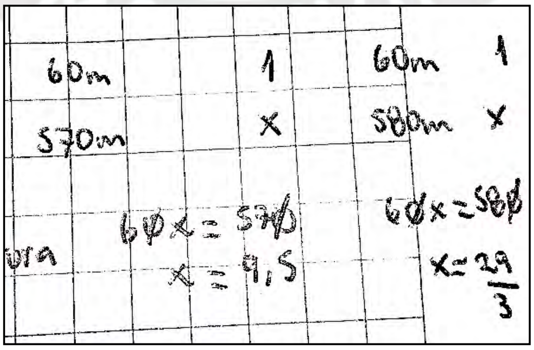


Figura 28. Utilización regla de tres simple para hallar las equivalencias-grupo 1.

Sin embargo, el grupo en su hoja de respuestas solo puso las equivalencias del tiempo con números decimales, pero no había justificado cómo es que llegaron a ese resultado (figura 29). Entonces, el investigador-profesor les preguntó ¿cómo han llegado a esas equivalencias? El grupo justificó sus resultados utilizando la representación verbal, manifestó: *"las 9h 30min la transformamos en* $9+\frac{1}{2}=9{,}5$ *y para las 9h 40min, solo razonamos, como 20min es* $\frac{1}{3}$ *de una hora, entonces 40min será* $\frac{2}{3}$*, por lo tanto 9h 40min es equivalente a* $9+\frac{2}{3}=\frac{29}{3}$ *".*

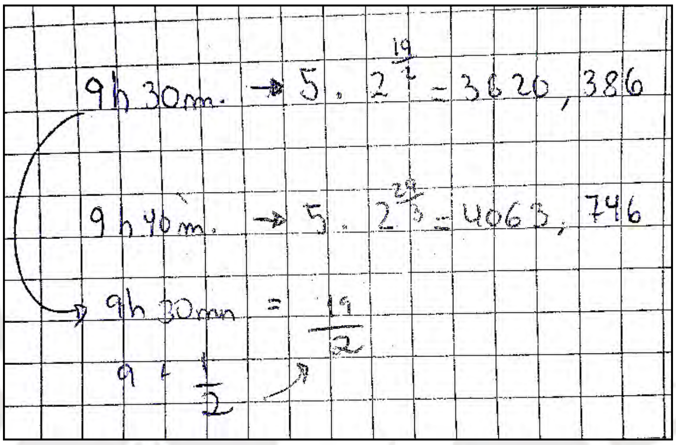


Figura 29. Reemplazo de valores en la función-grupo 2.

Como parte de la validación de sus resultados, específicamente de la función construida, el grupo 2 los expuso frente al otro, tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

> **Profesor-investigador:** ¿Cómo han hallado la función $f(n)=5\times 2^n$?
>
> **Grupo 2:** Primero ordenamos los datos y nos dimos cuenta que los valores de la temperatura aumentaban en el doble. Luego, los pusimos como una sucesión y vimos que era una progresión, pero no nos acordábamos de la fórmula. Así que como todo era por 2 y todos los datos eran múltiplo de 5 , llegamos a que la función era $f(n)=5\times 2^n$.
>
> **Grupo 1:** ¿A qué sucesión se refieren?
>
> **Grupo 2:** A la geométrica, porque se está multiplicando por 2.

Grupo 1_ítem (c)

Este grupo hizo uso de una representación verbal para manifestar que la función encontrada tiene un crecimiento exponencial. Para justificar esta característica de la función (validación), se apoyan en que cuando crece la variable independiente crece la variable dependiente. Adicionalmente, definieron el dominio y el rango de la función temperatura hallada, aunque hay un error pues el dominio no puede ser todos los racionales, como lo muestran en su respuesta (figura 30). Estas características fueron consideradas en nuestro análisis *a priori*.

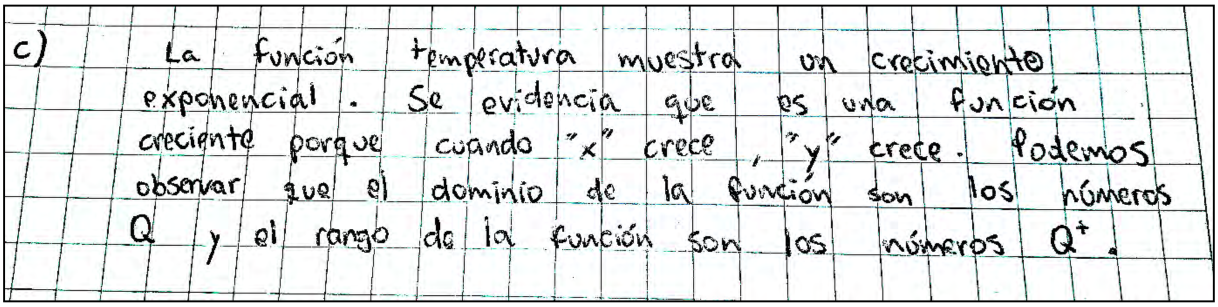

c) La función temperatura muestra un crecimiento exponencial. Se evidencia que es una función creciente porque cuando "x" crece, "y" crece. Podemos observar que el dominio de la función son los números Q y el rango de la función son los números Q^+.

Figura 30. Características de la función hallada-grupo 1

Se observa en la figura 30 que este grupo no recurre a la definición matemática del crecimiento de una función, esto debido a que no es muy utilizada esta definición en el nivel secundario. Es por ello que se apoyan en la representación verbal.

Grupo 2_ítem (c)

El grupo mencionó como características que no es lineal. Además, percibieron que era creciente, solo que utilizaron otro término "ascendente". Esto lo justificaron señalando que al aumentar el tiempo aumenta la temperatura, esto quiere decir, que este grupo no observó mayores características como es el dominio y el rango, a pesar de que forma parte de sus conocimientos previos.

Siendo parte de nuestra metodología la validación, característica de la Ingeniería Didáctica, contrastamos nuestro análisis *a priori* y *a posteriori*. Aseveramos que cumplimos con el objetivo de esta primera situación problema, pues los estudiantes lograron construir la función $f(x) = b \times a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, a partir de relacionar los valores con una progresión geométrica.

Institucionalización local de la situación problema 1

Como parte de la TSD, institucionalizamos localmente los resultados obtenidos por los grupos.

La función que representa esa situación es $f(x) = b \times a^x$, siendo $a > 0\, y\, a \neq 1$. Además, el $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ y el $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$, el valor de b representa el valor inicial en el momento en que $x = 0$ (figura 31).

Asimismo, la función es creciente pues, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

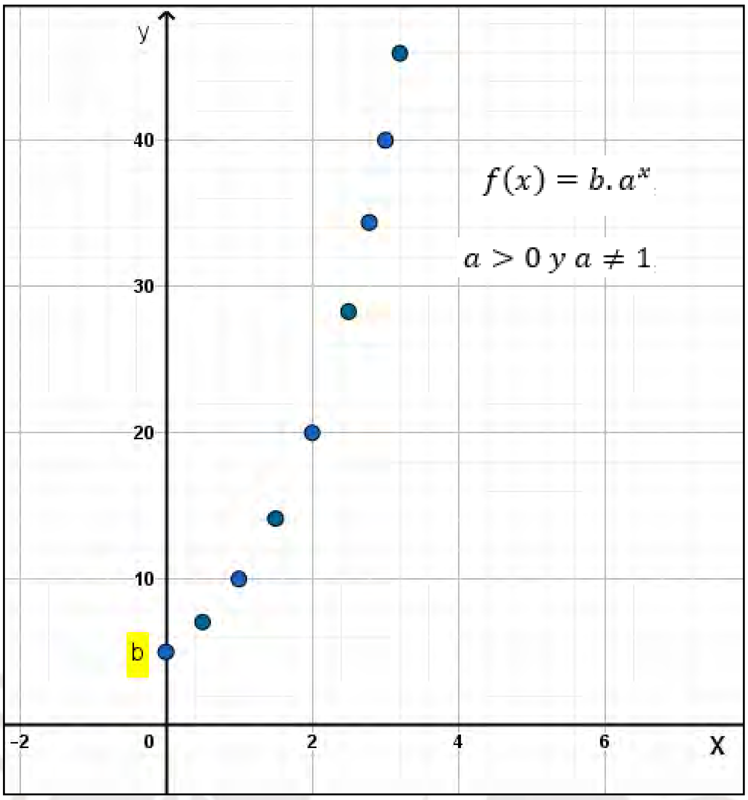


Figura 31. Institucionalización local referente a la situación problema 1

La demostración analítica de $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Sea la función $f(x) = b \times a^x, a > 0, \ a \neq 1 \ \wedge \ b > 0$

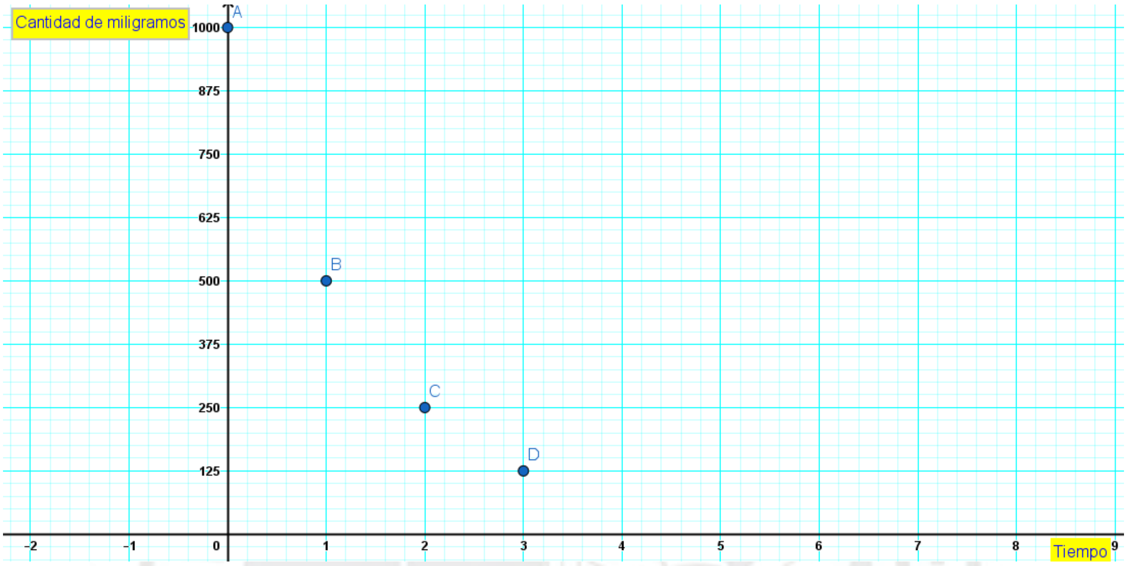
Sea $x_1 {}_\wedge x_2 \in Dom_f \ / \ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$

$$b \times a^{x_1} < b \times a^{x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

A continuación, presentamos la situación problema 2.

Situación problema 2. El Paracetamol es uno de los medicamentos más utilizados a nivel mundial. Su uso se da con mayor frecuencia para el tratamiento de dolor o fiebre con una intensidad moderada. Se le administra una dosis de este medicamento a una persona para analizar la cantidad de sustancia presente dentro del organismo del sujeto a medida que transcurren las horas. Estos datos fueron organizados en la siguiente representación gráfica.



a) ¿Cuál será la cantidad de miligramos estimado presente en el organismo de la persona al cabo de 6h 30min y 6h 50min?
b) ¿Qué características puede observar en la función?
c) ¿Qué diferencias puede encontrar en el modelo matemático de la primera situación con respecto al segundo modelo matemático?

Análisis *a priori* de la situación problema 2

Objetivo: Relacionar la progresión geométrica con la función exponencial y determinar una propiedad de monotonía, es decir, decreciente.

Una posible solución matemática:

Los pares ordenados representados en la gráfica son:

$$A = (0; 1000), B = (1; 500)\ , C = (2; 250)\ , D = (3; 125)$$

Ítem (a): Para hallar la cantidad de miligramos al cabo de 6h 30min y 6h 50min se hace necesario hallar la regla de correspondencia de la función que describe esos puntos, entonces se puede inducir la regla de correspondencia a partir de los pares ordenados (tabla 7).

Tabla 7. Organización de datos SP2-item a)

Tiempo	Cantidad de miligramos
0	$1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	$1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Por lo tanto, la cantidad de miligramos en función del tiempo tendría la regla de correspondencia representada por $f(t) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Para el tiempo de 6h 30min=6,5 puesto que 30min es la mitad de una hora y haciendo una regla de tres simple para 6h y 50min, se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} 1\_\_\_60min \\ x\_\_\_50min \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{1 \times 50}{60} = 0,83$$

Entonces, 6h 50min=6,83. Luego, reemplazamos en nuestra función representada por $f(t) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t$ y obtenemos $f(6,5) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6,5} = 11,05$, de igual forma $f(6,83) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6,83} = 8,79$.

Así, para 6h 30min, la cantidad de miligramos es aproximadamente 11,05 mg y para 6h 50min, la cantidad de miligramos es aproximadamente 8,79 mg.

Ítem (b): Las características de la función temperatura serían las siguientes:

- $Dom(f) = [0; +\infty[$, siendo $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+$
- $Ran(f) =]0; 1000]$, siendo $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$
- La función f es decreciente pues se cumple:
  si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$; $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$
- La función f es inyectiva pues:
  $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Ítem (c): Mostramos en el cuadro 5 las diferencias entre el modelo matemático de la SP1 y la SP2.

Cuadro 5. Diferencias entre los modelos de la SP1 y la SP2

Características	Situación Problema 1	Situación Problema 2
Base de la función	$f(t) = 5 \times 2^t$ La base es un número entero positivo mayor que 1	$f(t) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t$ La base es un numero positivo mayor que 0 y menor que 1
Rango de la función	$Ran(f) = [5; +\infty[$, siendo $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$	$Ran(f) =]0; 1000]$, siendo $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$
Crecimiento o decrecimiento de la función	La función f es creciente pues se cumple: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$	La función f es decreciente pues se cumple: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$

Además, las similitudes presentes entre los dos modelos están en el dominio y ambas son inyectivas.

Variables micro-didácticas SP2

A continuación, mostramos las variables micro-didácticas referidas a esta segunda situación problema junto a los valores asumidas por estas (cuadro 6)

Cuadro 6. Variables micro-didácticas SP 2

Variable didáctica	**Valores**
Regla de correspondencia de la función exponencial	$f(t) = b \times a^t,\ t \in\ \mathbb{Q}^+$
Base de la función exponencial	$0 < a < 1$
Constante	$b > 0$
Tiempo	- Enteros positivos -Racionales positivos

Respuestas esperadas SP2

Esperamos que los grupos lean la situación problema y la entiendan, dado que está en un contexto extra-matemático como parte de sus acciones sobre el *milieu(material),* es decir, fichas entregadas con las situaciones planteadas.

Ítem (a): Suponemos que los grupos para encontrar la cantidad de miligramos, presente en el organismo de la persona en cualquier tiempo, organicen los pares ordenados representados por (0,1000) (1,500) (2,250) (dialéctica de acción) en una tabla, conforme mostramos en la tabla 8. Asimismo, explorarían (acción, formulación) la relación entre la segunda componente del par ordenado respecto a la primera componente con el propósito de encontrar alguna relación y así expresarían verbalmente que la cantidad de miligramos se está reduciendo a la mitad. Mediante sus formulaciones, construirían el modelo matemático para este fenómeno, esto es, representar algebraicamente la regla de correspondencia.

Tabla 8. Organización de datos SP2-ítem a)

Tiempo	Cantidad de miligramos
0	$1000.\left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	$1000.\left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$1000.\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$1000.\left(\frac{1}{2}\right)^3$

x1/2

x1/2

x1/2

De esta forma, esperamos que entre los miembros del grupo *(milieu social)* discutan el modelo matemático $f(t) = 1000 \times (\frac{1}{2})^t$. Además, como parte de sus acciones, los grupos podrían reemplazar en la función los tiempos de 4 horas o 5 horas y verificar si cumple con la progresión geométrica utilizada anteriormente. Asimismo, a partir de este modelo podrían encontrar un estimado de la cantidad de miligramos presente en la persona.

Para esto, uno de los procedimientos algebraicos (dialéctica de acción) que podrían utilizar los estudiantes es pasar las horas y minutos a decimales, es decir, las 6h y 30min equivale a 6,5. En el caso de 6h 50 min, podrían utilizar una regla de tres como en el caso anterior y de la siguiente forma:

$$\left.\begin{matrix} 1\_\_\_60min \\ x\_\_\_50min \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{1 \times 50}{60} = 0{,}83$$

Igualmente, formularían que 6h 50min es 6,83. Los grupos reemplazarían estos valores en la función , así tendrían que $f(6{,}5) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6{,}5} = 11{,}05$ y de la misma forma que $f(6{,}83) = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6{,}83} = 8{,}79$ (acción).

Ítem (b): Esperamos que los grupos formulen características de la función obtenida, así como si esta es decreciente. Además, suponemos que los grupos formulen el dominio y el rango de la función, es decir, $Dom(f) = [0; +\infty[$, siendo $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+$, $Ran(f) \in\ ]0; 1000]$, siendo $Ran(f) \in\ \mathbb{Q}^+$, dado que según el Currículo Nacional son nociones estudiadas en el capítulo de funciones.

Ítem (c): Esperamos que los grupos formulen que las funciones son creciente y decreciente. Además, introducimos al grupo en situación de validación cuando movilizan sus conocimientos previos respecto a función creciente y decreciente impartidos en unidades anteriores, esto es, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ y si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, respectivamente. Al mismo tiempo, los grupos son puestos en situación de acción y formulación cuando relacionen la base de las funciones con el crecimiento o decrecimiento al comparar las funciones halladas en la SP1 y la SP2. Específicamente, en la función $f(x) = b \times a^x$, cuando $a > 1$ y $a \neq 1$, la función es creciente y es decreciente cuando $0 < a < 1$ y $a \neq 1$.

Análisis *a posteriori* de la situación problema 2

Los grupos tal como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* leyeron el enunciado y lo comprendieron, puesto que al relacionar con SP1, se dieron cuenta que en este problema encontrarían la cantidad de miligramos en función del tiempo, siendo el tiempo valor entero (variable didáctica)

Grupo 1_ítem (a)

El grupo organizó los pares ordenados de forma horizontal tal como observamos en la figura 32, hecho que no habíamos considerado en el análisis *a priori*.

Figura 32. Organización de datos ítem a)-grupo 1

Los estudiantes se pusieron en acción cuando relacionaron el coeficiente del modelo con el par ordenado (0;1000). Además, sabiendo que la cantidad de miligramos disminuye en la mitad, el grupo construyó y formuló la regla de correspondencia de la función cantidad de miligramos, esto es, representó por $y = \frac{1}{2^x} \times 1000$, como se observa en la figura 33, la cual satisface los pares ordenados presentes en la situación problema.

Esto significa que los estudiantes movilizaron sus conocimientos previos respecto a progresión geométrica, hecho que nos permite afirmar que movilizaron sus conocimientos construidos en la SP1.

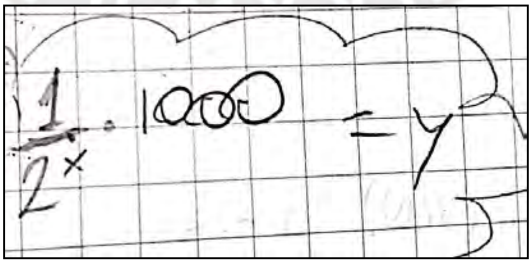


Figura 33. Primera función hallada-grupo 1

Sin embargo, dado que se busca que los grupos relacionen el decrecimiento de la función con la base, intervino el investigador-profesor haciendo la pregunta ¿habrá otra forma de representar la función?, a lo cual los estudiantes reformularon la regla de correspondencia hallada y llegaron a la función $f(x) = 1000 \times (\frac{1}{2})^x$, como se observa en la figura 34.

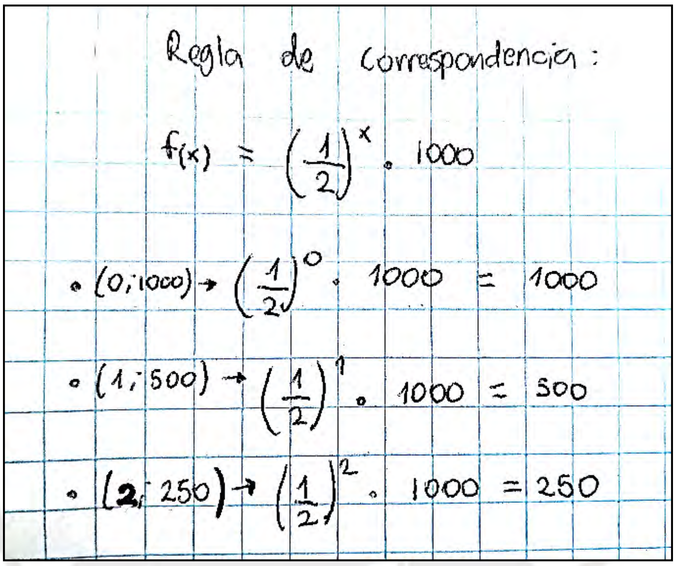


Figura 34. Función exponencial construida-grupo 1

Asimismo, se puede observar que el grupo está reemplazando los valores como parte de sus acciones para verificar que los pares ordenados satisfacen la función.

Con respecto a la cantidad de miligramos que pedía hallar el ítem a), para los tiempos de 6h 30min y 6h 50min, el grupo 1 realizó los mismos procedimientos que utilizó en la situación problema 1, esto es, utilizó la regla de tres simple para hallar las equivalencias de los tiempo y poder reemplazarlos en la función obtenida en el ítem (a). Las equivalencias encontradas por este grupo fueron para 6h 30min=6,5 y para 6h 50min= $\frac{41}{6}$. Estos procedimientos realizados por ellos era lo que esperábamos *a priori*, luego de ello reemplazaron los valores obtenidos. (figura 35).

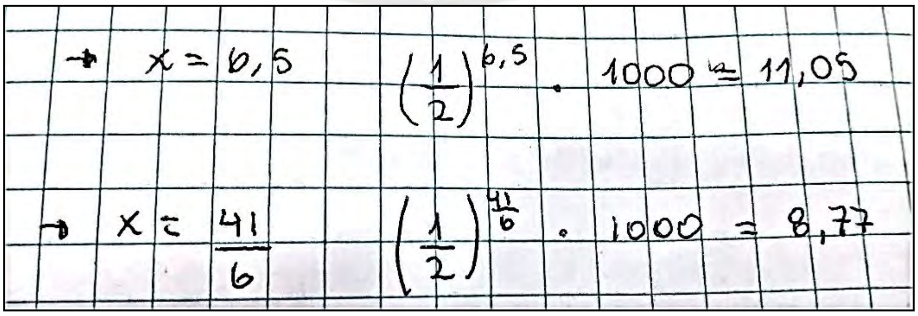


Figura 35. Reemplazo de los valores en la función-grupo 1

Grupo 2_ítem (a)

Este grupo, como parte de sus acciones, organizó los valores de los pares ordenados desde el par ordenado (1,500), como se observa en la figura 36. El investigador-profesor decidió no intervenir para preguntarles, ¿por qué no empezaban desde el punto (0;1000) ?, pues queríamos que en el momento de presentar sus resultados justifiquen (validación) por qué empezaron desde ese punto y si es correcta la función que puedan hallar al iniciar desde el punto (1,500).

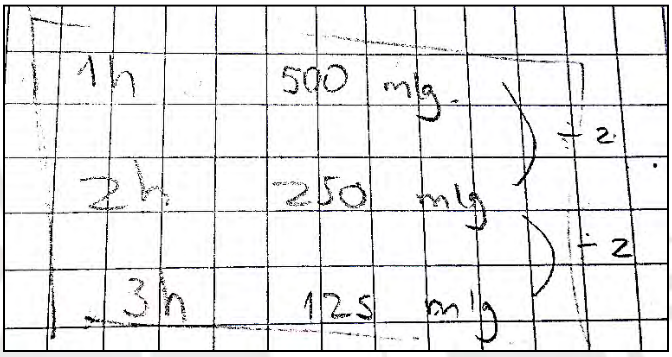


Figura 36. Organización de datos inciso a)-grupo2

Este grupo construyó la función de una forma diferente al primer grupo, pues ellos en sus formulaciones iniciaron en el punto (1;500), y en sus discusiones, conjeturaron algunas características de la función cantidad de miligramos. Una de las integrantes Fiorela afirmó que *"la función es entre 2 entre 2 y el coeficiente es 500"*, a lo que Manuela complementó lo dicho por su compañera aseverando que *"es una progresión geométrica, porque se multiplica por* $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{1}{2}$ *, pero no me acuerdo como es la fórmula"* ,esto quiere decir, que el grupo está movilizando los conocimientos adquiridos en la SP1 como el identificar (dialéctica de acción) el coeficiente de la función, además de movilizar sus conocimientos previos como de progresión geométrica, pero no encontraban la función que cumpla con los valores dados (figura 37).

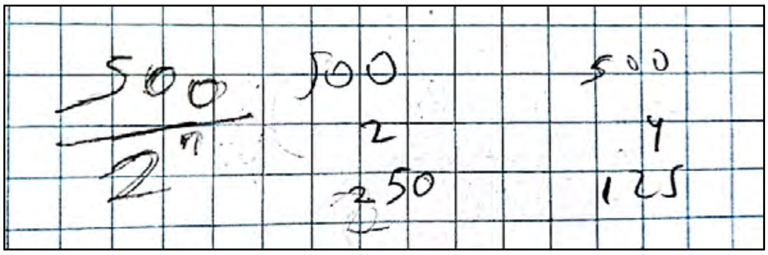


*Figura 37.*Acciones para la obtención de la regla de correspondencia-grupo 2

Como lo muestra la figura 37, el grupo 2 como parte de sus hipótesis construyó el modelo $\frac{500}{2^n}$, y al reemplazar las primeras componentes de los pares ordenados, específicamente $n = 1$ y $n = 2$, no resultaban las segundas componentes de los pares ordenados, sino que resultaba el consecutivo, es decir, 500 y 250 respectivamente. En la discusión entre los miembros del grupo, Fiorela manifestó: "*como la relación tiene que ser (1;500) y sale 250, debemos restarle uno al exponente n*", es así como llegan a encontrar una función que satisface los puntos de la representación en la SP2 (figura 38).

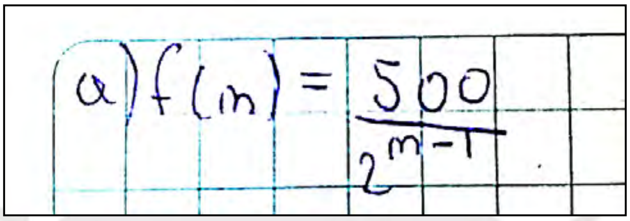


Figura 38. Regla de correspondencia hallada-grupo 2

Se puede observar que en la figura 38, los estudiantes no justifican la función encontrada en la hoja de respuestas. Sin embargo, al momento de exponer esta función encontrada al otro grupo, manifestaron de forma verbal que al reemplazar(dialéctica de acción) los pares ordenados (1;500), (2;250) y (3;125), si cumple con la función $f(n)$. Debemos de señalar que no esperábamos *a priori* que un grupo llegue a encontrar una regla de correspondencia de la forma como lo ha hecho el grupo 2. Aunque es correcta, el investigador-profesor preguntó *"¿por qué empezaron en 500?"*, ellos manifestaron que *"no habían visto el punto inicial"* a pesar que se había trabajado en la institucionalización local que hay una relación entre el punto del eje de ordenadas y el coeficiente de la función que se desea hallar.

En este punto, el investigador-profesor buscó que cada uno de los grupos defienda las funciones encontradas por cada uno de ellos (validación). Los dos grupos mostraron que cumplían los valores. Aquí, el investigador-profesor cuestionó a los dos grupos cuál de las dos funciones encontradas es la correcta. Ellos manifestaron que las dos eran correctas, pero el investigador-profesor replicó ¿cómo se justificaría?, entonces los miembros del grupo 1, haciendo uso de sus saberes previos como son las propiedades de potenciación, llegaron a lo que se observa en la figura 39.

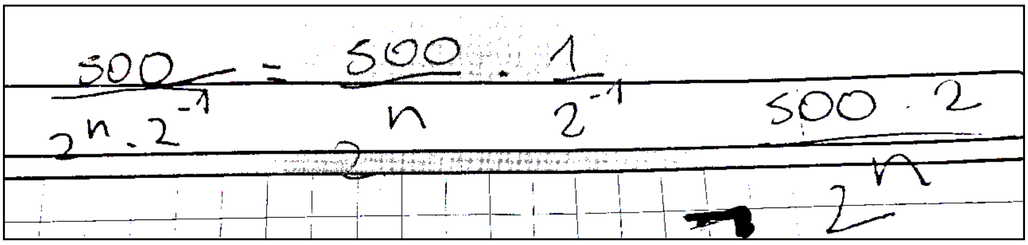


Figura 39. Uso de propiedades de la potenciación-grupo 1

A partir de este resultado, los grupos concluyeron que las dos funciones halladas eran equivalentes.

Para hallar la cantidad de miligramos, el grupo 2 reemplazó los valores obtenidos (dialéctica de acción) utilizando los mismos procedimientos que en la situación problema 1 (regla de tres simple). Es decir las 6h 30min lo expresaron como $6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ y para 6h 50min de forma similar $6 + \frac{5}{6} = \frac{41}{6}$. Como lo señalamos anteriormente en la SP1, esta forma de encontrar las equivalencias no se esperó en nuestro análisis *a priori*. (figura 40).

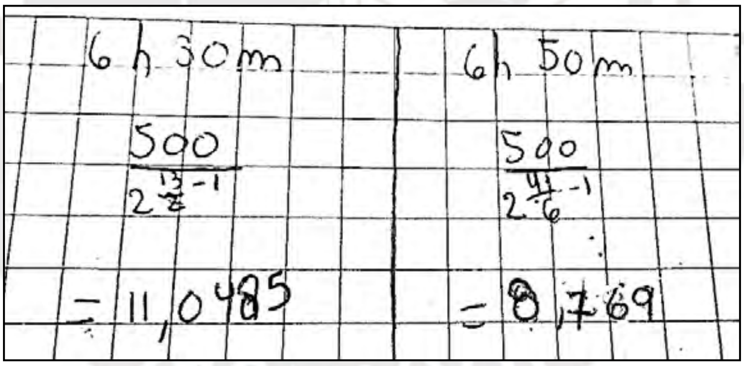


Figura 40. Resolución ítem (a)-grupo 2

Grupo 1_ítem (b)

El grupo justificó (validación) que la función es decreciente de forma similar que, en la SP1. Este utilizó la lengua natural y señaló que la función es decreciente, porque cuando el tiempo aumenta la cantidad de miligramos disminuye, lo cual esperábamos *a priori*. Asimismo, encontraron el dominio y el rango de la función, como también que esta no es constante (figura 41).

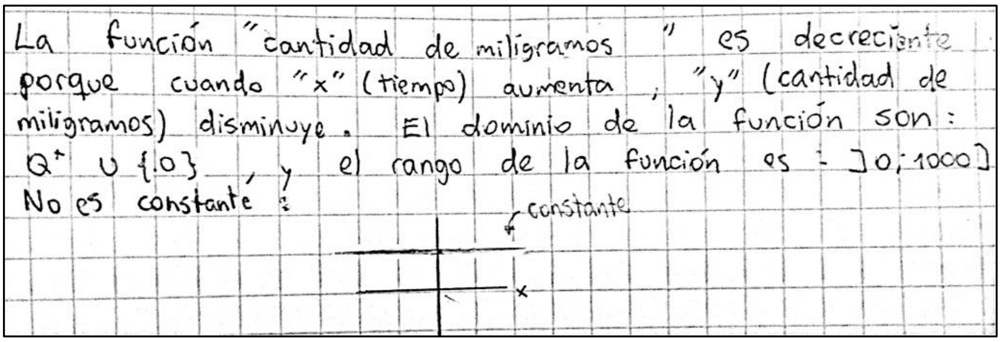

La función "cantidad de miligramos" es decreciente porque cuando "x" (tiempo) aumenta, "y" (cantidad de miligramos) disminuye. El dominio de la función son: $Q^+ \cup \{0\}$, y el rango de la función es: $]0;1000]$
No es constante:

Figura 41. Características de la función correspondiente a la SP 2-grupo1.

Se puede observar que en el dominio de la función es correcto, sin embargo en el rango hay un error, pues este pertenece a los racionales positivos, y el intervalo $]0;1000]$ tendría como valores a todos los números reales comprendidos entre el 0 y el 10000 incluido este. También, se puede observar que como parte de sus formulaciones este grupo hace uso de la representación gráfica para señalar que no es una función constante.

Grupo 2_ítem (b)

Este grupo, mediante la representación de lengua natural, señaló como características de la función hallada que esta es descendente, pues a medida que pasa el tiempo la cantidad de paracetamol disminuye, es decir, este grupo no está haciendo uso de sus saberes previos, respecto al decrecimiento de funciones. Además, manifestó que la cantidad de paracetamol no podrá ser cero (figura 42), esto como parte de sus formulaciones, pues no pueden indicar que existe una asíntota en el eje x, dado que carecen en sus saberes previos de ese conocimiento.

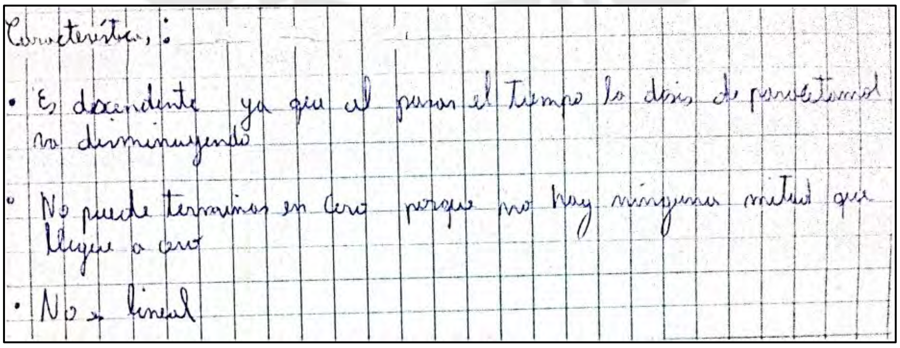

Características:
- Es descendente ya que al pasar el Tiempo la dosis de paracetamol va disminuyendo
- No puede terminar en cero porque no hay ninguna mitad que llegue a cero
- No es lineal

Figura 42. Características de la función correspondiente a la SP2-grupo2.[1]

[1] Características:
- Es descendente ya que al pasar el tiempo la dosis de paracetamol va disminuyendo.
- No puede terminar en cero porque no hay ninguna mitad que llegue a cero.
- No es lineal

Si bien esperábamos *a priori* que señalaran como característica de la función el decrecimiento de esta, consideramos que la justificación es insuficiente, pues no la relacionan con las variables dependiente e independiente. Además, señalaron que la función no es lineal, pero no justifican el porqué de esa característica.

Grupo 1_ítem (c)

Este grupo manifestó una relación entre la base y el crecimiento o decrecimiento de la función exponencial. Como parte de sus formulaciones, compararon las funciones encontradas en la situación problema 1 y 2, lo que esperábamos *a priori.* (figura 43)

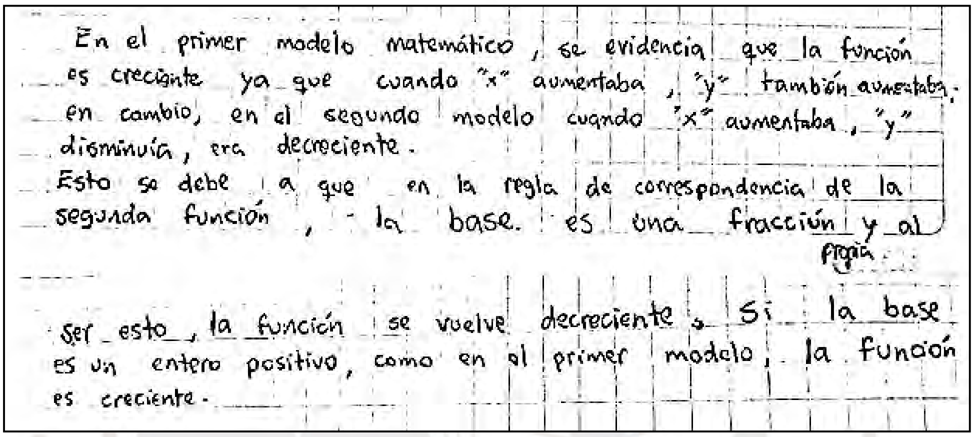

En el primer modelo matemático, se evidencia que la función es creciente ya que cuando "x" aumentaba, "y" también aumentaba. en cambio, en el segundo modelo cuando "x" aumentaba, "y" disminuía, era decreciente.
Esto se debe a que en la regla de correspondencia de la segunda función, la base es una fracción propia y al ser esto, la función se vuelve decreciente. Si la base es un entero positivo, como en el primer modelo, la función es creciente.

Figura 43. Respuesta al ítem c)-grupo1.

Si bien esperábamos que relacionaran la base con el crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, este grupo lo expresó de forma verbal, como se puede observar en la figura 43. Para comparar con nuestro a priori, observaremos las similitudes en el cuadro 7.

Cuadro 7. Comparación a priori y a posteriori inciso c) grupo 1

Comparación	A priori (Profesor-investigador)	A posteriori (Grupo 1)
Función exponencial	$f(x) = b \times a^x$, $a \neq 1$	
Características de la base	$a > 1$ la función es creciente	La base entero positivo (creciente)
	$0 < a < 1$ la función es decreciente.	La base es una fracción propia (decreciente)

Si bien el grupo 1 no formula matemáticamente el crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, sí manifiesta que el crecimiento está relacionado con la base de la función y además que este es un número entero positivo. Con respecto al decrecimiento, señala que esta ocurre porque la base es una fracción propia, hecho que no habíamos considerado en el análisis *a priori*. Sin embargo, observamos que este grupo relacionó la base de la función exponencial con su crecimiento o decrecimiento de la función, lo cual es una característica importante en la función exponencial.

Grupo 2_ítem (c)

El grupo 2, con respecto a este ítem, no dio mayores detalles que los expuestos anteriormente como que la función de la primera situación problema es ascendente (creciente) y de manera similar que la función de la segunda situación problema es descendente. Además, que el segundo modelo encontrado por ellos $f(n) = \frac{500}{2^{n-1}}$ no contribuía con nuestro objetivo de que relacionaran la base con el crecimiento o decrecimiento de la función. Por ello, se buscó que los estudiantes manifestaran sus resultados, tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

> **Grupo 1:** Cuando la base es una fracción propia, la función es decreciente y cuando es un entero positivo es creciente.
>
> **Grupo 2:** ¿Por qué no puede ser entero negativo la base?,
>
> **Grupo 1:** No puede ser negativo, porque si la base es negativa al elevarla a un número par o impar, el resultado puede ser positivo o negativo. Es más, no sería una función y menos ninguno de los modelos que nos dieron.

Consideramos que, al justificar este resultado, el grupo 1 está en un proceso de validación.

Como parte de la validación de nuestra metodología, característica fundamental de la Ingeniería Didáctica, contrastamos nuestro análisis *a priori* y *a posteriori*. Afirmamos que cumplimos con el objetivo de esta segunda situación problema, pues los estudiantes lograron construir la función $f(x) = b \times a^x \text{ con } 0 < a < 1 \text{ y } a \neq 1$.

Además, la SP2 contribuyó a que los grupos puedan actuar, formular y validar, producto de la adaptación a esta situación y las respuestas nuevas prueban de que se ha adquirido este objeto matemático. Además, utilizaron los saberes adquiridos en la SP1 para formular la regla de correspondencia de esta situación problema, así como relacionar la base con el crecimiento o decrecimiento de la función.

Institucionalización local de la situación problema 2

Luego de terminada esta primera situación problema, como parte de la TSD, institucionalizamos localmente los resultados obtenidos por los grupos.

La función que representa esa situación es $f(x) = b \times a^x$, siendo $0 < a < 1$ y $a \neq 1$. Además, el $Dom(f) \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, $Ran(f) \in]0;b]$, siendo el $Ran(f) \in \mathbb{Q}^+$. El valor de b representa el valor inicial en el momento en que $x = 0$ (figura 44). El valor de a representa la base de la función y la expresamos por $a = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$, siendo x_2 y x_1 números consecutivos.

Asimismo, la función es decreciente, pues, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

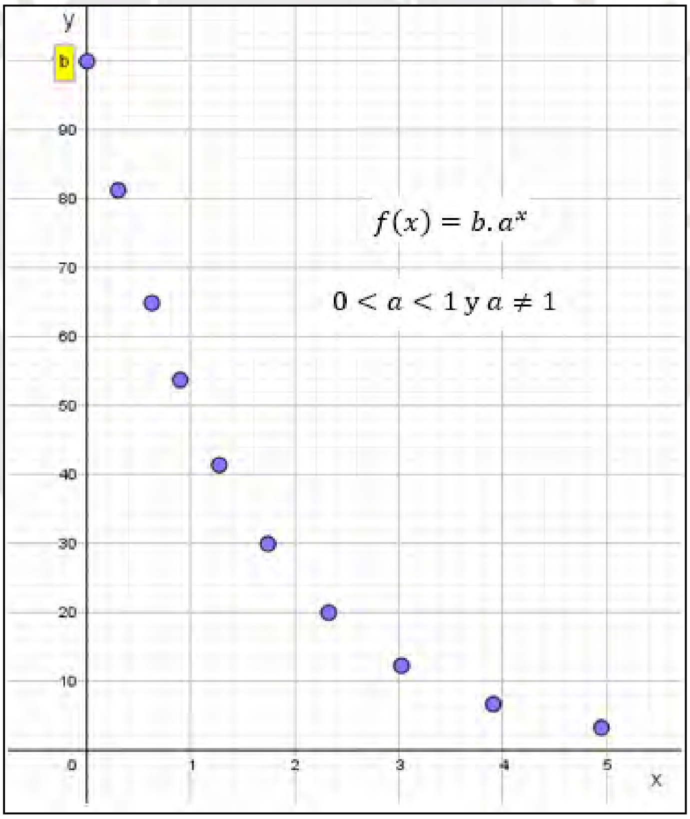


Figura 44. Representación gráfica de la función que modela la SP2

A continuación, presentamos la situación problema 3.

Situación problema 3. Un grupo de estudiante desea viajar al extranjero como parte de su viaje de promoción, aunque aún les falta dos años para terminar el colegio, ellos tienen un ahorro de S/.20 000 por lo cual deciden invertirlo, para este propósito tienen dos opciones el banco o una cooperativa. El banco "CONFIANZA" pagará intereses a una tasa del 2% mensual, capitalizable[1] mensualmente. La cooperativa "UNIDOS" pagaría interés del 2,5% mensualmente.

a) ¿Qué opción le conviene aceptar al colocar sus ahorros en un plazo de un año y dos años?
b) ¿Qué puede decir acerca de la función monto expresado en cada una de las opciones de inversión?
c) ¿En algún periodo de tiempo dará lo mismo ahorrar en el banco que en la cooperativa?

---

[1]En el interés compuesto, el interés (I) ganado en cada periodo (n) es agregado al capital inicial (P) para constituirse en un nuevo capital (S) sobre el cual se calcula un nuevo interés produciéndose lo que se conoce como capitalización la cual puede ser anual, trimestral, mensual, diaria.

Análisis *a priori* de la situación problema 3

Objetivo: Utilizar los conocimientos adquiridos en la SP1 y SP2. Asimismo, diferenciar características entre la función exponencial y la función afín.

Una posible solución matemática:

Ítem (a): Dado que los plazos son de un año y dos años, se necesita encontrar la función para el banco y la cooperativa. Dado que el banco CONFIANZA tiene un interés capitalizable, pertenece a un modelo del tipo de interés compuesto, cuya fórmula es representada por $M = C_i(1 + r\%)^t$, donde M es el monto, C_i es el capital inicial, r es la tasa de interés y t es el tiempo. Por lo tanto, el monto obtenido a un tiempo de un año y dos años respecto al banco CONFIANZA será.

$$M_{12} = 20000(1 + 2\%)^{12} = 25364,84$$

$$M_{24} = 20000(1 + 2\%)^{24} = 32168,74$$

La cooperativa UNIDOS, que tiene una tasa del 2,5%, está asociada a un modelo de interés simple, entonces el incremento es 2,5%(20000) =500. Por ello, el modelo matemático referido a la cooperativa es $C_f = C_i + 500t$, entonces el monto obtenido por la cooperativa UNIDOS a un año y dos años será:

$$C_{12} = 20000 + 500(12) = 26000$$

$$C_{24} = 20000 + 500(24) = 32000$$

A partir de la comparación de estos montos, se puede determinar que en el plazo de un año es conveniente invertir en la cooperativa UNIDOS y, en el plazo de dos años, conviene invertir en el banco CONFIANZA.

Ítem (b): La función monto de la cooperativa UNIDOS está asociada a una función afín cuyo modelo es $f(x) = mx + b, m \neq 0$, a diferencia del banco CONFIANZA cuyo modelo se asocia a una función exponencial del tipo $g(x) = b \times a^x, a > 0 \; y \; a \neq 1$.

Ítem (c): Para saber si existe un momento en el cual el ahorro es el mismo en la cooperativa y en el banco, uno de los métodos usados es mediante la intersección entre las gráficas de las funciones, siendo la del banco CONFIANZA una función exponencial y de la cooperativa UNIDOS, una afín. Apoyados en el software GeoGebra, se puede precisar el punto de intersección (figura 45).

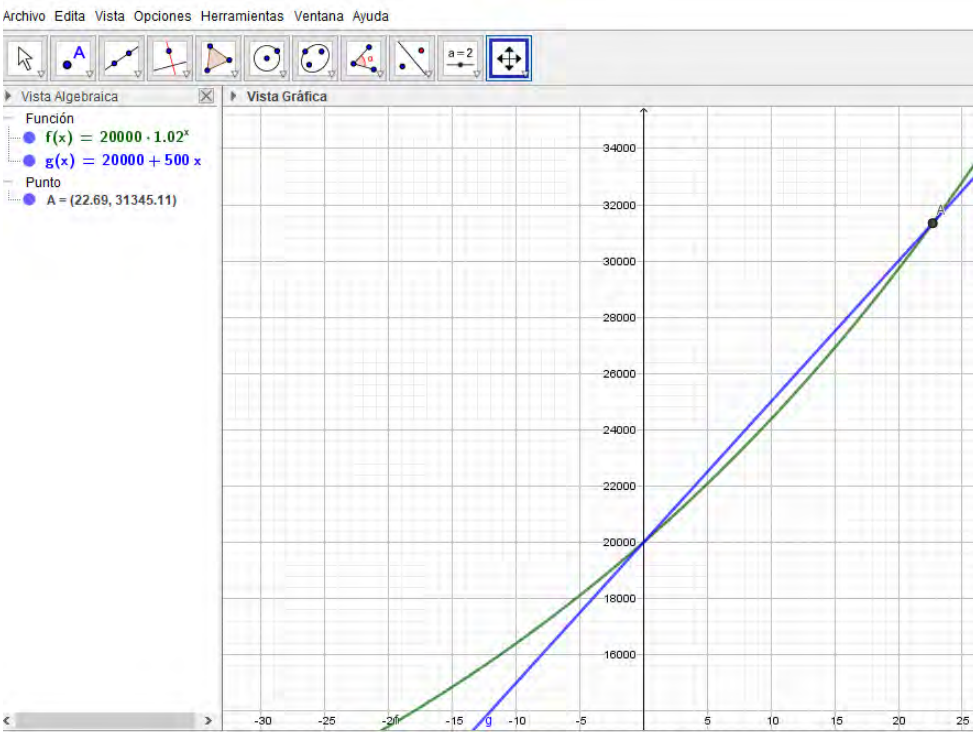


Figura 45. Solución ítem c-SP3

Como se observa en la figura 45, el software permite poder saber exactamente el punto de intersección de las dos representaciones gráficas de las respectivas funciones y este valor es de 22,69. Esto indica que entre el mes 22 y 23 se encuentra el monto en el cual el ahorro es el mismo.

Variables micro-didácticas SP3

A continuación, mostramos las variables micro-didácticas referidas a esta tercera situación problema junto a los valores asumidos por estas (cuadro 8)

Cuadro 8. Variables micro-didácticas SP3

Variable didáctica	Valores
Funciones	-Función exponencial -Función afín
Tiempo	-Naturales -Racionales positivos

Respuestas esperadas SP3

Esperamos que como parte de sus acciones sobre el *milieu(material),* los grupos lean y comprendan la situación problema, pues esta se encuentra en un contexto extra matemático, además de identificar los datos proporcionados por la situación problema.

Ítem (a): Presumimos que los grupos hallarán los montos correspondientes en los primeros meses (dialéctica de acción), luego con esos datos, podrán conjeturar (dialéctica de formulación) utilizando los conocimientos adquiridos en la SP1 y SP2, que el pago de los intereses por parte del banco CONFIANZA corresponde a una función exponencial. Para esto, tendrán que hallar los primeros montos y luego establecer que el cociente de estos es constante. Entonces, se obtendrían, 1er mes: $20\,000 + 2\%(20\,000) = 20400$; 2do mes: $20\,400 + 2\%(20400) = 20808$; 3er mes: $20\,808 + 2\%(20808) = 21224{,}16$.

De donde se tiene que, $\frac{21224.16}{20808} = 1.02$ y $\frac{20808}{20400} = 1.02$, como es constante, formularían que corresponde a una función exponencial siendo este valor la base del modelo representado $f(x) = b.a^x$, es decir, $a = 1.02$, todo esto como parte de sus acciones y formulaciones. Asimismo, como se tiene un ahorro de S/. 20000 esperamos que los estudiantes relacionen este valor con el coeficiente, esto es, $b = 20000$, conocimientos que ya han movilizado en las situaciones problemas anteriores. Con estos elementos, los estudiantes deberían poder llegar al modelo que esperamos $f(x) = 20000.(1{,}02)^x$

Para el caso de la cooperativa UNIDOS, el monto de primer mes es representado por $20\,000 + 2{,}5\%(20\,000) = 20\,000 + 500$; el monto del segundo mes, representado por $20\,000 + 500 + 500 = 20\,000 + 2(500)$; y el del tercer mes, representado por

$20\,000 + 500 + 500 + 500 = 20\,000 + 3(500)$. En este caso, los estudiantes podrían deducir el modelo, es decir, $g(t) = 20\,000 + 500t$, pues por sus conocimientos previos los estudiantes conocen la representación de una función afín.

Luego esperamos que los grupos organicen y reemplacen los valores de un año (12 meses) y dos años (24 meses) (dialéctica de acción), como mostramos en la tabla 9.

Tabla 9. Diferencia de montos entre el banco y la cooperativa

Entidades financieras	CONFIANZA	UNIDOS
Regla de correspondencia	$f(x) = 20000 \times (1{,}02)^x$	$g(t) = 20\,000 + 500t$
Monto a los 12 meses	$f(12) = 20000 \times (1{,}02)^{12}$ $f(12) = 25364{,}84$	$g(12) = 20\,000 + 500.12$ $g(12) = 26000$
Monto a los 24 meses	$f(24) = 20000 \times (1{,}02)^{24}$ $f(24) = 32168{,}74$	$g(24) = 20\,000 + 500.24$ $g(24) = 32000$

Con estos valores los estudiantes pueden deducir que en un año les conviene invertir en la cooperativa UNIDOS, sin embargo, al cabo de dos años le conviene invertir en el banco CONFIANZA, todos estos resultados serán expuestos y justificados por los estudiantes a los miembros de los otros grupos, como parte de validar sus resultados.

Ítem (b): Esperamos que los estudiantes formulen, a partir de lo trabajado en el ítem anterior, que el monto de la cooperativa UNION es una función afín. Con respecto a la otra, no esperamos que utilicen el término “función exponencial”, pues no forma parte de sus conocimientos previos. Asimismo, asumimos que identificarán (dialéctica de acción) la correspondencia a dos tipos de funciones diferentes, utilizando la representación algebraica, uno de la forma $f(x) = b \times a^x$ y el otro $g(x) = mx + b$.

Ítem (c): Consideramos que los estudiantes como parte de sus hipótesis (dialéctica de formulación), utilizarán la representación gráfica de las dos funciones en un mismo plano cartesiano para poder observar que existe un punto de intersección. Esta representación debería ser no continua, pero consideramos que podrían realizar un esbozo de esta representación de una forma continua.

Precisamos que solo a manera de ilustración elegimos mostrar la figura 46 utilizando el GeoGebra.

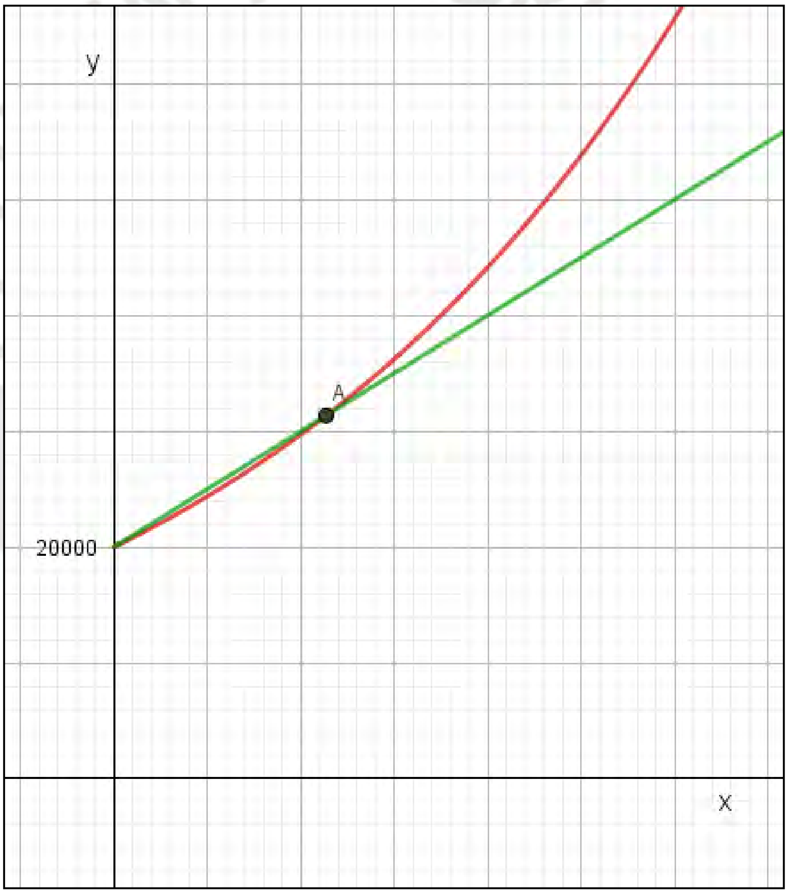


Figura 46. Posible representación del inciso (c)

Para poder hallar el periodo de tiempo en el cual ocurre este suceso, esperamos que tabulen los valores (dialéctica de acción), es decir, reemplacen diferentes tiempos en las funciones correspondientes al banco y a la cooperativa para que puedan estimar aproximadamente en que tiempo ocurre esta intersección, teniendo como referencia los 12 meses y los 24 meses, pues en este intervalo de tiempo es donde ocurre el cambio en el monto de la cooperativa y del banco. Asimismo, podrían organizar los valores, como mostramos en la tabla 10.

Tabla 10. Aproximación para hallar el periodo de intersección de montos.

Entidades financieras	CONFIANZA	UNIDOS
Regla de correspondencia	$f(x) = 20000 \times (1{,}02)^x$	$g(t) = 20\,000 + 500t$
Mes 13	$f(13) = 25872{,}13$	$g(13) = 26500$
Mes 14	$f(14) = 26389{,}58$	$g(14) = 27000$
Mes 21	$f(21) = 30313{,}33$	$g(21) = 30500$
Mes 22	$f(22) = 30919{,}59$	$g(22) = 31000$
Mes 23	$f(23) = 31537{,}99$	$g(23) = 31500$

Los grupos a partir de estos datos podrían conjeturar que entre el mes 22 y el 23 se encuentra esta intersección, pues surge un cambio en los montos. En el mes 22, era conveniente la cooperativa UNIDOS y después en el mes 23, el banco CONFIANZA.

Análisis *a posteriori* de la situación problema 3

Como habíamos considerado en nuestro análisis *a priori,* los grupos leyeron el enunciado de la SP y comprendieron que se trataba de problemas que involucraban conceptos de interés. Asimismo, percibieron que para resolver la situación problema, es necesario utilizar los conocimientos adquiridos en las SP anteriores.

Grupo 1_ítem (a)

En sus formulaciones, el grupo manifestó verbalmente "t*enemos que hallar la regla de correspondencia, pues demoraría mucho encontrar los montos para cada mes hasta llegar al mes 12 y 24".* Es por ello, que organizaron los datos de forma horizontal como se observa en la figura 47, hecho que no habíamos considerado *a priori*.

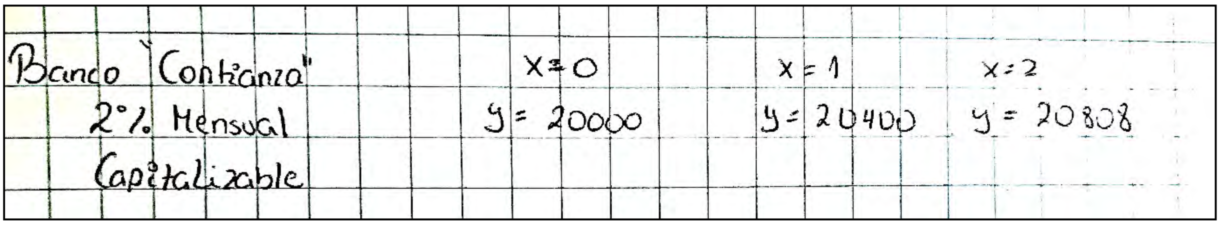


Figura 47. Montos del banco obtenidos-grupo 1

Debemos precisar que no esperábamos en nuestro análisis a *priori* que relacionaran para el tiempo cero el ahorro inicial de S/. 20000, sino que comenzaran relacionando el monto con el primer mes, es decir, que para el mes 1 le corresponde el monto de 20400. Además, mediante sus acciones y formulaciones, este grupo pudo identificar que la regla de correspondencia respecto al banco CONFIANZA es una función exponencial, pues los cocientes son constantes (figura 48).

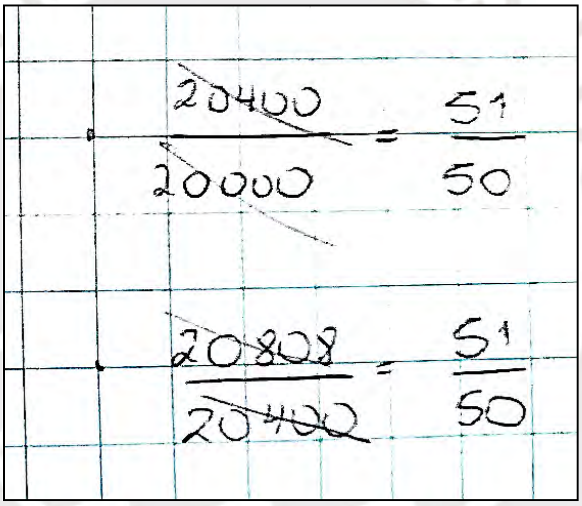


*Figura 48.*Identificación de la base de la función-grupo 1

Si bien esperábamos *a priori* que los estudiantes identificaran la base, consideramos que lo representarían con un número decimal el 1,02 que es el resultado de dividir $\frac{51}{50}$. Sin embargo, este primer grupo lo mantuvo como fracción. Asimismo, relacionaron el coeficiente de la función con el monto inicial, lo cual si habíamos previsto en nuestro análisis *a priori* (figura 49).

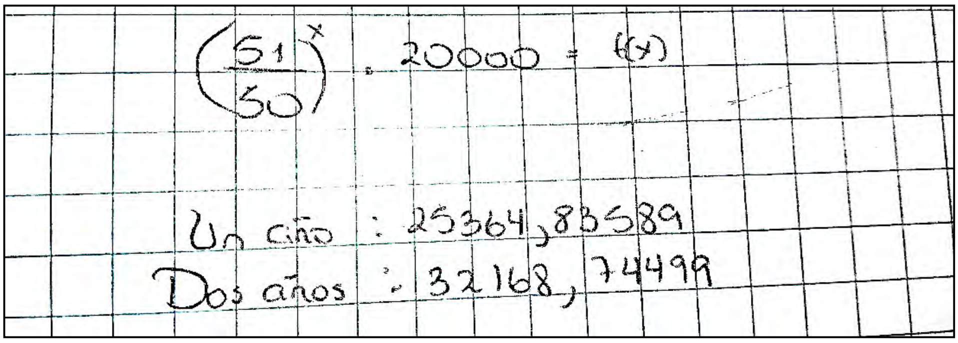


Figura 49. Regla de correspondencia banco CONFIANZA-grupo 1

Se observa en la figura 49 que este grupo pudo hallar la regla de correspondencia, la cual justificaron (validación) cuando expusieron y defendieron sus resultados al otro grupo. Además, hallaron el monto para un año y dos años; sin embargo, aunque es correcto el monto hallado, no han justificado en su hoja de respuesta qué procedimiento han utilizado para encontrar esos valores, pero cuando expusieron sus resultados sí mencionaron que habían reemplazado en la regla de correspondencia el equivalente de un año y dos años en meses, tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

> **Grupo 1:** Nos dimos cuenta que era una función exponencial, porque primero tabulamos y después dividimos, y nos dimos cuenta que esa división era constante. Entonces, era una función exponencial de esta forma $f(x) = \left(\frac{51}{50}\right)^x \times 20000$
>
> **Grupo 2:** ¿Por qué tuvieron que buscar la función?,
>
> **Grupo 1:** Porque si lo hacíamos manualmente, iba a ser muy largo.
>
> **Grupo 2:** ¿Entonces obtuvieron el monto reemplazando?
>
> **Grupo 1:** Sí, reemplazamos el valor de un año, que sería $x = 12$ y de dos años $x = 24$.

Para hallar el monto en el caso de la cooperativa UNIDOS, el grupo 1 organizó los valores de forma horizontal (dialéctica de acción) encontrados inicialmente (figura 50) y después como parte de sus hipótesis (dialéctica de formulación) buscó verificar si los montos en función del tiempo estaban caracterizados también por una función exponencial, hecho que no consideramos *a priori.*

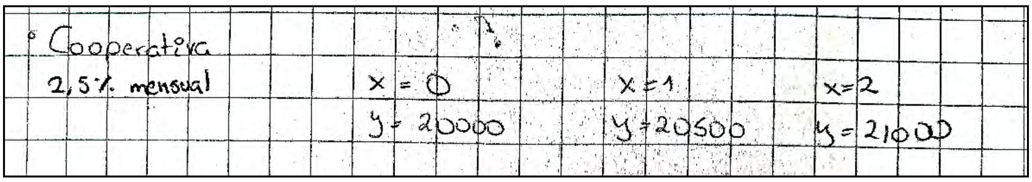


Figura 50. Montos de la cooperativa-grupo 1

Enseguida, este grupo empezó a buscar si el cociente de dos datos consecutivos era constante tal como se observa en la figura 51. Esta acción no estuvo considerada en nuestro *a priori* por lo manifestado anteriormente, pues consideramos que los estudiantes de este nivel educativo movilizan conocimientos relacionados a la función afín.

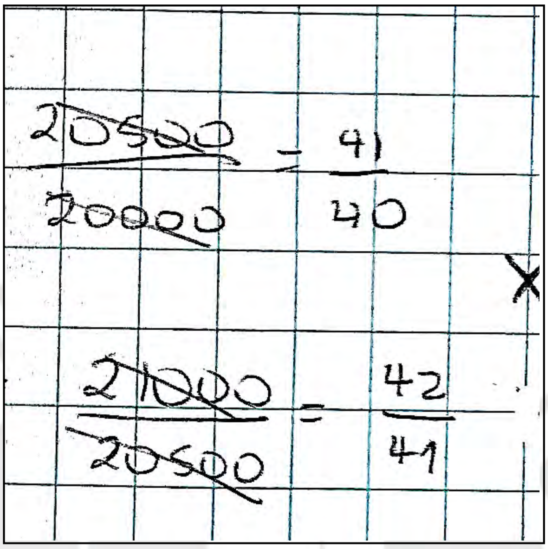


Figura 51. Identificación que el cociente no es constante-grupo 1

Como observaron que no era constante el cociente de dividir, manifestaron que no era una función exponencial, así que movilizaron sus conocimientos previos e identificaron que se trataba de una función afín, aunque ellos la llamaron función lineal. Se hace necesario señalar que los estudiantes confunden los nombres, es decir, al modelo $f(x) = mx + b$, lo identifican como función lineal y al modelo $f(x) = ax$, como función afín. Esta confusión se produjo durante el desarrollo de la situación. Con esta información, llegaron a encontrar la regla de correspondencia que esperábamos *a priori* (figura 52).

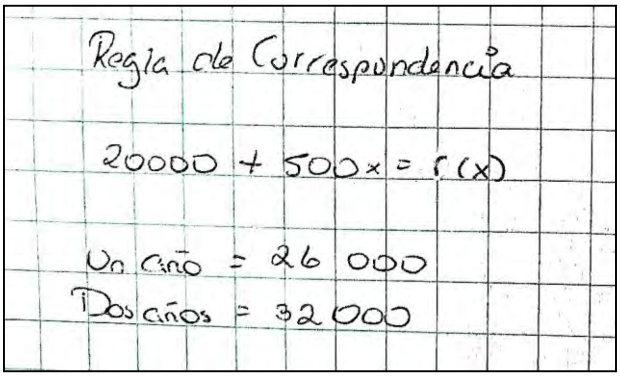


Figura 52. Regla de correspondencia cooperativa UNIDOS-grupo 1

Se puede observar en la figura 52 que este grupo no justificó los montos obtenidos para un año y dos años, aunque en las exposiciones de los grupos manifestaron que esos resultados lo obtuvieron al reemplazar un año (12 meses) y 2 años (24 meses) en la regla de correspondencia obtenida por este grupo.

Finalmente, este grupo, haciendo uso de una representación verbal, responde qué opción le conviene a partir de los montos obtenidos para un año y dos años, como se puede ver en la figura 53.

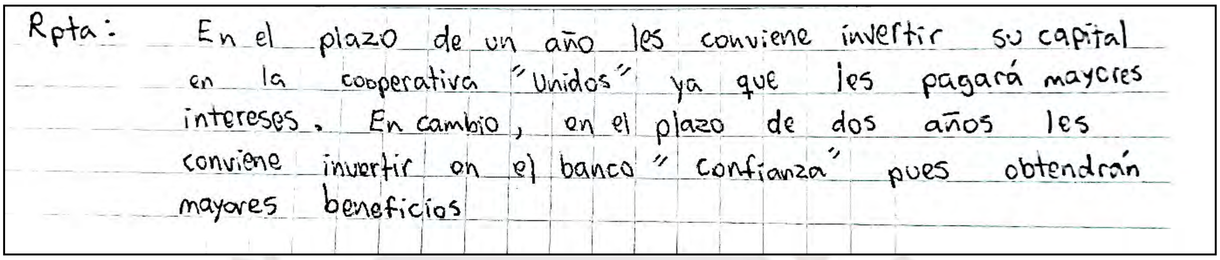

Rpta: En el plazo de un año les conviene invertir su capital en la cooperativa "Unidos" ya que les pagará mayores intereses. En cambio, en el plazo de dos años les conviene invertir en el banco "Confianza" pues obtendrán mayores beneficios

*Figura 53.*Respuesta al ítem a) SP 3-grupo1

Grupo 2_ítem (a)

Este grupo manifestó inicialmente que para poder resolver el problema hallarían el monto del banco CONFIANZA para cada mes que pasa, esto como parte de sus acciones (figura 54).

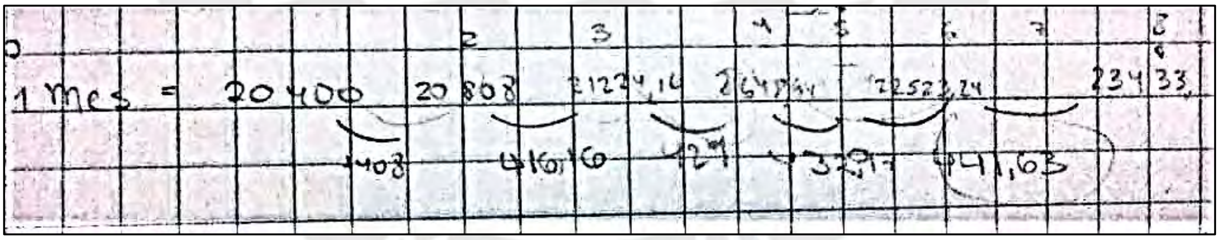


Figura 54. Cálculos ítem a)-grupo 2

En la figura 54, se puede observar que intentaron hallar los montos mes por mes. En este momento intervino el profesor-investigador haciéndoles cuestionar al grupo si es que estaban correctos sus resultados, con el fin de que los estudiantes busquen el modelo. En la discusión entre los miembros del grupo (formulación), llegaron a la conclusión que era necesario hallar la regla de correspondencia, pues corrían el riesgo de cometer errores en el transcurso de encontrar los montos para un año y dos años.

Luego, para hallar la regla de correspondencia para el banco CONFIANZA y la cooperativa UNIDOS, mediante sus formulaciones y acciones procedieron de la misma forma que el grupo anterior, solo que esos resultados no lo expresaron en su hoja de respuestas (figura 55)

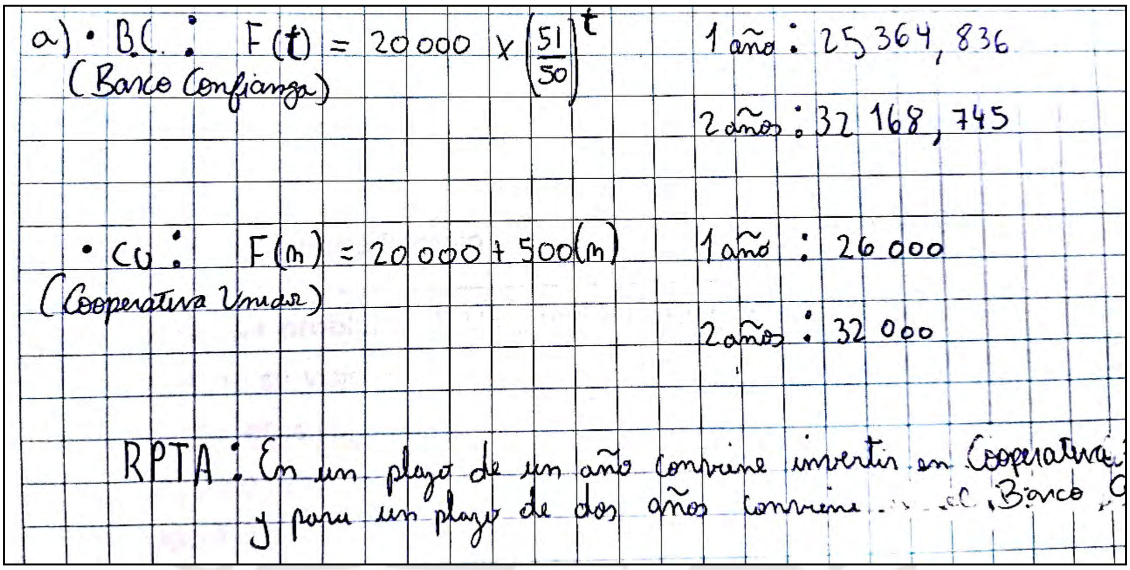

a) • B.C.: $F(t) = 20000 \times \left(\frac{51}{50}\right)^t$ 1 año: 25 364,836
(Banco Confianza) 2 años: 32 168,745
• C.U.: $F(n) = 20000 + 500(n)$ 1 año: 26 000
(Cooperativa Unidos) 2 años: 32 000
RPTA: En un plazo de un año conviene invertir en Cooperativa; y para un plazo de dos años conviene ... el Banco C

Figura 55. Respuesta ítem a)-grupo 2

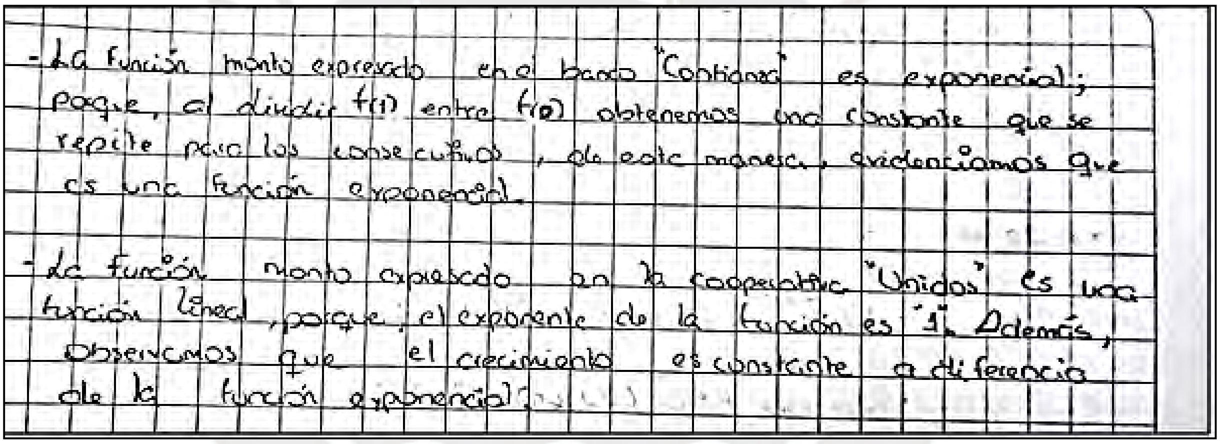
El grupo 2 no justifica cuál fue el procedimiento para obtener las reglas de correspondencia de las entidades financieras, así como los montos obtenidos para un año y dos años respectivamente (figura 55). Sin embargo, cuando expusieron sus resultados como parte de la validación, justificaron la regla de correspondencia del banco CONFIANZA, tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

> **Grupo 2:** Pensábamos que iba a ser más fácil hallar los montos mes por mes, pero nos dimos cuenta que se complicó, porque a cada momento teníamos que sacar los intereses. Entonces, nos decidimos por buscar la función. Por eso, utilizamos los conocimientos que utilizamos en los ejercicios anteriores, llegando a esta función $f(t) = 20000 \times \left(\frac{51}{50}\right)^t$.
>
> **Grupo 1:** ¿Cómo hallaron el 20000 y el 51 entre 50?,
>
> **Grupo 2:** El 20000 , es el coeficiente porque se inicia con ese monto, y la base sale de dividir , $\frac{20400}{20000} = \frac{51}{50}$, asimismo, $\frac{20808}{20400} = \frac{51}{50}$, pues es constante.

Con respecto a la regla de correspondencia de la cooperativa UNIDOS, este grupo manifestó que la hallaron a partir de una secuencia (sucesión) de primer orden. Esta conjetura realizada por el grupo no fue considerada *a priori.* Nosotros esperábamos por sus saberes previos la identificación inmediata de una función afín. De forma similar al grupo 1, concluyeron que es conveniente en un plazo de un año invertir en la cooperativa UNION y en el plazo de dos años, en el banco CONFIANZA.

Grupo 1_ítem (b)

Este grupo formuló que la forma de obtener el monto para el banco CONFIANZA estaba relacionado a una función exponencial, lo que no habíamos considerado *a priori*, pues no esperábamos que utilizaran esa terminología. Anteriormente, habíamos mencionado que uno de los miembros de este grupo había visto alguna vez navegando por Internet que la función exponencial tenía como regla de correspondencia $f(x) = a^x$. Es por ello, el uso de la terminología por parte de este grupo. Con respecto a la cooperativa UNIDOS, expresaron que estaba relacionada a una función lineal. Como anteriormente lo expresamos, este grupo confunde los nombres de las funciones (figura 56).


- La función monto expresado en el banco "Confianza" es exponencial; porque, al dividir $f(1)$ entre $f(0)$ obtenemos una constante que se repite para los consecutivos, de esta manera, evidenciamos que es una función exponencial.

- La función monto expresado en la cooperativa "Unidos" es una función lineal, porque, el exponente de la función es "1". Además, observamos que el crecimiento es constante a diferencia de la función exponencial.

Figura 56. Respuesta ítem b)-grupo 1

Este grupo, además, justifica (validación) que el monto del banco CONFIANZA está asociado a una función exponencial partiendo de que al dividir $f(1)$ entre $f(0)$ es constante. En este procedimiento, está implícita la progresión geométrica, aunque no la mencionan. Hay que señalar que esto se cumple, porque se están trabajando con puntos discretos.

Grupo 2_ítem (b)

Como características, este grupo mostró las reglas de correspondencia, lo cual esperábamos *a priori.* Además, indicaron que la variable independiente está como exponente en la función correspondiente al banco CONFIANZA. Esto nos puede indicar que para este grupo no es común esta regla de correspondencia (figura 57).

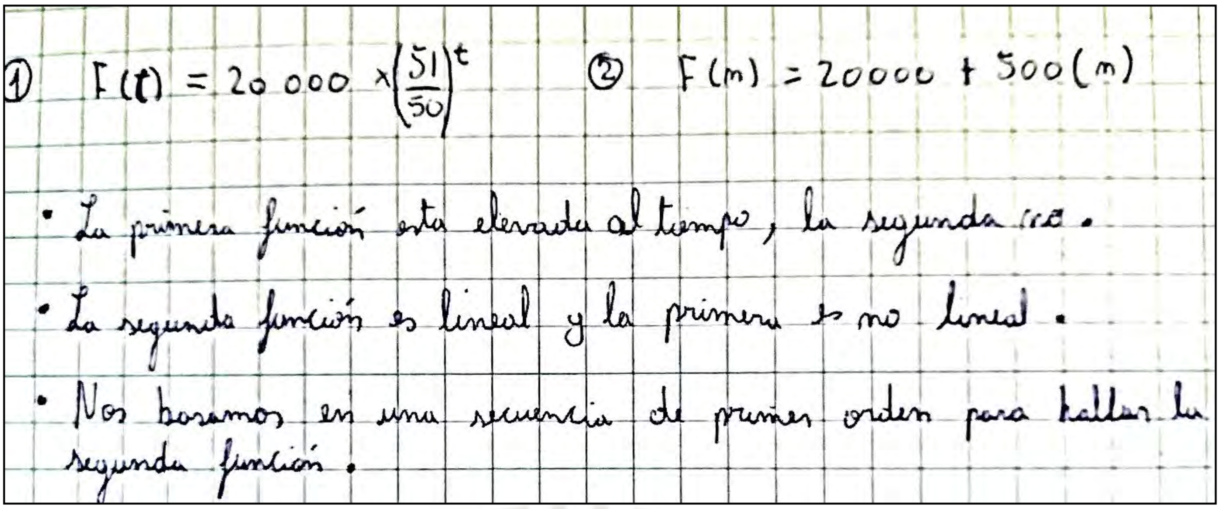


Figura 57. Respuesta ítem b)-grupo 2

Como se observa en la figura 57, este grupo al igual que el anterior, formuló que se trata de una función lineal, confundiendo el nombre con la función afín. Sin embargo, este grupo ya está vislumbrando diferencias entre la función afín y la función encontrada por ellos, por lo menos en que la variable independiente está en el exponente.

Grupo 1_ítem (c)

Este grupo, como esperábamos *a priori,* utilizó la representación gráfica para formular que existe un momento en el cual los montos de las entidades financieras son los mismos, como se observa en la figura 58.

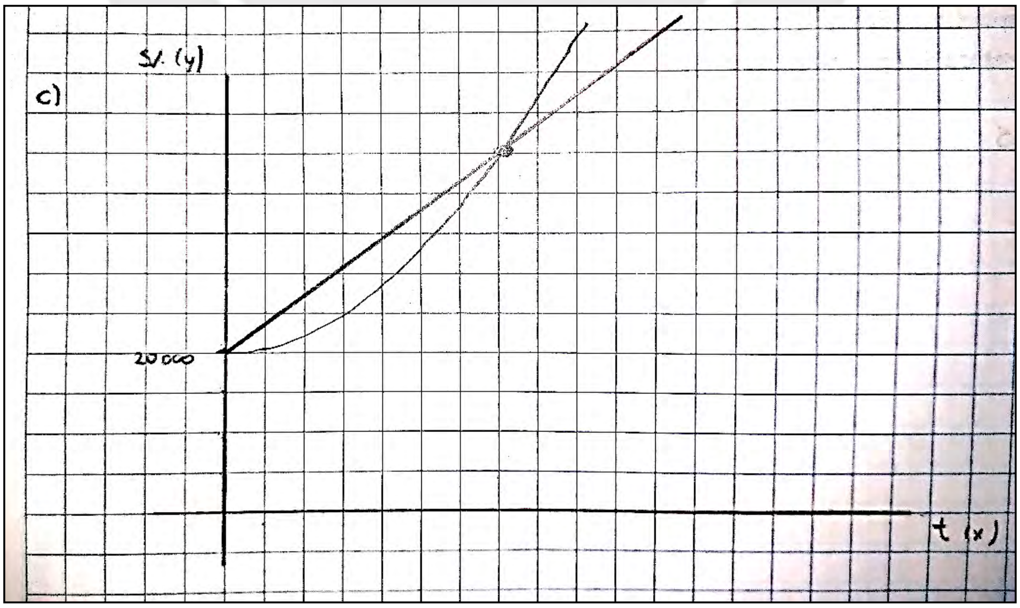


*Figura 58.*Respuesta ítem c)-grupo 1

Como se observa en la figura 58, están identificando que las representaciones graficas de las funciones de los montos son diferentes, siendo uno una recta y la otra, una curva. Además, por los problemas desarrollados anteriormente, el grupo ya interiorizó que la curva no se trata de una función cuadrática. Asimismo, como parte de sus formulaciones y utilizando representaciones verbales y algebraicas, consideraron que como se intersectan las gráficas, entonces se puede igualar las funciones mediante una ecuación, como se observa en la figura 59.

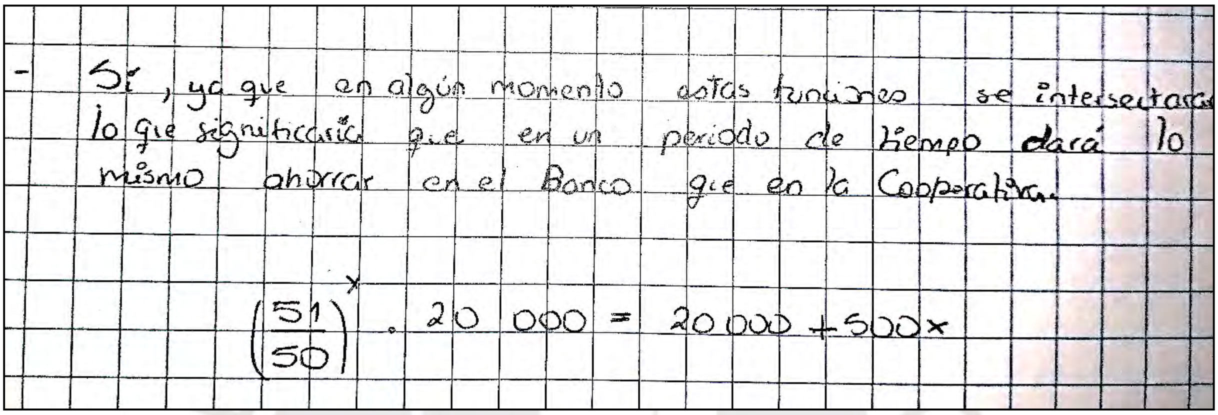


Figura 59. Proceso de hallar el intervalo para el ítem c)-grupo 1

Para hallar aproximadamente el intervalo en el cual está este punto, el grupo 1 como parte de sus acciones y formulaciones, recurrió a la tabulación lo que esperábamos *a priori (*figura 60*).*

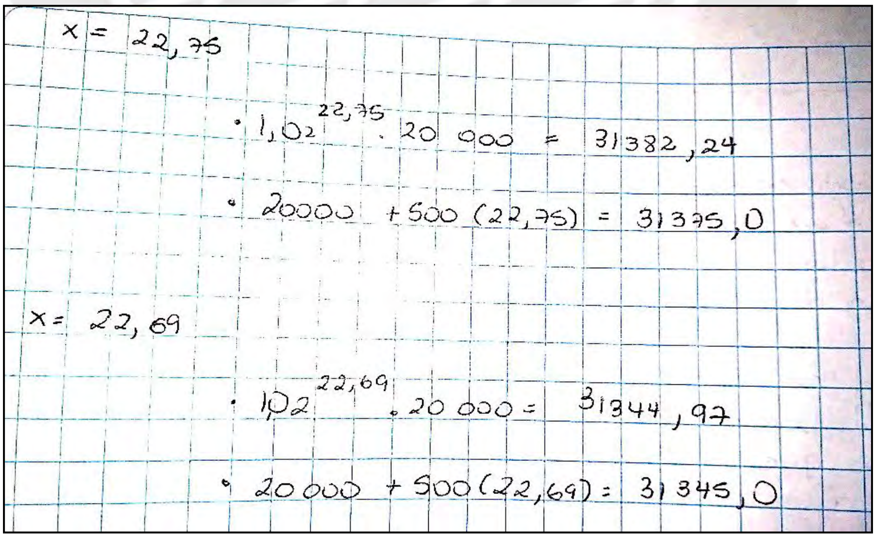


Figura 60. Tabulación para el ítem c)-grupo 1

Este grupo manifestó de forma oral que para tabular los valores comenzaron con los primeros meses, pero vieron que la diferencia de esos valores era muy grande. Es por ello, que tomaron valores mayores hasta llegar a los puntos de la figura 58, siendo considerados por este grupo los más cercanos al punto de intersección.

Grupo 2_ítem (c)

El grupo 2 con respecto al ítem c) procedió de forma similar al grupo 1. Como parte de sus formulaciones, recurrió a la representación gráfica para saber si existía un monto que sea igual para las dos entidades financieras (figura 61)

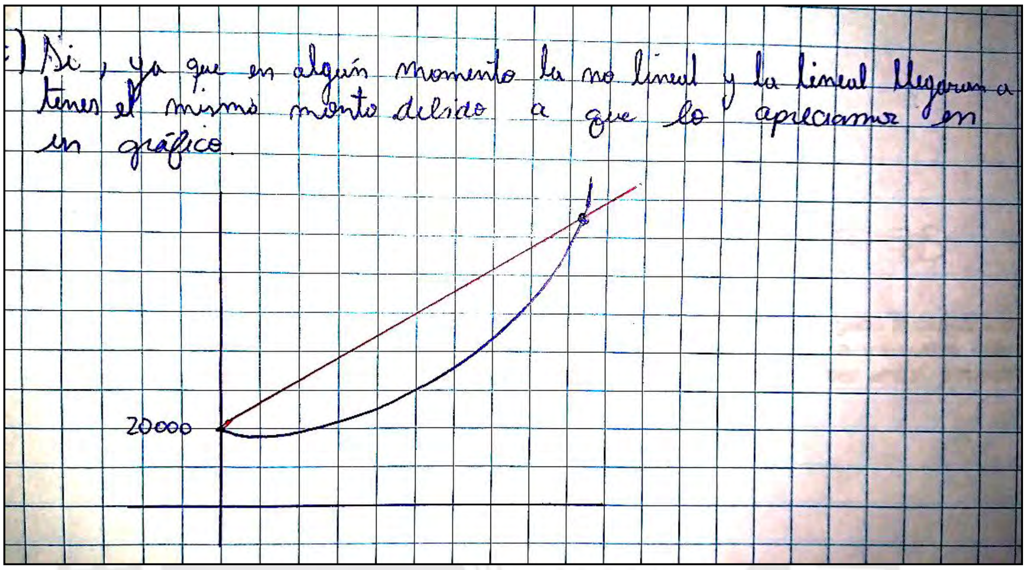


Figura 61. Respuesta ítem c)-grupo 2

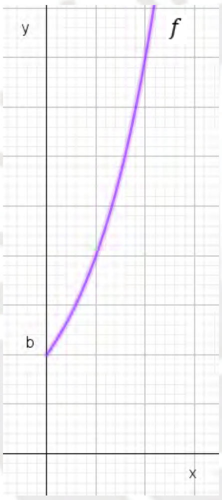
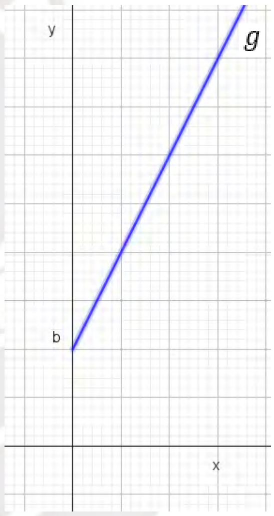
A diferencia del grupo anterior, este no usa el término “función exponencial”, sino la señala como función no lineal. Además, debemos señalar que este grupo no tabuló para conocer cuál es el intervalo aproximado en el cual los montos son iguales. Manifestaron que solo con esta representación tienen la certeza que si existe ese monto.

En el proceso de validación de nuestra metodología, comparamos nuestro análisis *a priori* y *a posteriori*. Afirmamos que se cumplieron los objetivos establecidos para esta tercera situación problema, pues los estudiantes lograron diferenciar las funciones, identificando que una función tiene como regla de correspondencia $f(x) = mx + b$ y la otra $f(x) = b \times a^x$. Además, que una se representa por una recta y la otra por una curva. Esto nos pareció importante, pues en nuestros antecedentes se manifestó que los estudiantes tienden a representar gráficamente la mayoría de funciones de forma lineal.

Institucionalización local de la situación problema 3

Como parte de la institucionalización de esta situación problema, procedimos a mostrar las diferencias más resaltantes entre una función exponencial y una función afín (cuadro 9).

Cuadro 9. Diferencias entre función exponencial y función afín

Función exponencial	Función afín
$f(x) = b \times a^x$ $b \neq 0, a > 0\ y\ a \neq 1$	$g(x) = mx + b,$ $m \neq 0$
Crece con un factor de multiplicidad a	Crece constantemente en m
	

Institucionalización general

En cada situación problema, procedimos a realizar una institucionalización local partiendo de los datos obtenidos por los estudiantes, pero al finalizar las situaciones problema como parte de nuestra teoría, realizamos una institucionalización general en donde establecimos la definición de una función exponencial, pero trabajando con los números reales y señalando las diferentes propiedades.

<u>Definición</u>

Sean a y b constantes reales, se define a la función exponencial como $f(x) = b \times a^x$, donde $b \neq 0, a > 0\ y\ a \neq 1$.

Ejemplo

Determinar las reglas de correspondencia de las funciones cuyos valores están en la tabla siguiente.

x	$f(x)$		$g(x)$	
-2	$\frac{2}{9}$	x3	144	x1/4
-1	$\frac{2}{3}$	x3	36	x1/4
0	2		9	
1	6	x3	$\frac{9}{4}$	x1/4
2	18	x3	$\frac{9}{16}$	x1/4

Solución

- Dado que f es una función exponencial, pues tiene un crecimiento constante de razón 2, entonces tiene la forma $f(x) = b \times a^x$ y como $f(0) = b \times a^0 = 2$, entonces $b = 2$. Además, $f(1) = 2 \times a^1 = 6$, entonces $a = 3$, por lo tanto la función estará expresada por:

$$f(x) = 2 \times 3^x$$

- Dado que g es una función exponencial, pues tiene un decrecimiento constante de razón $\frac{1}{4}$, entonces tiene la forma $g(x) = b \times a^x$ y como $g(0) = b \times a^0 = 9$, entonces $b = 9$. Además, $g(1) = 9 \times a^1 = \frac{9}{4}$, entonces $a = \frac{1}{4}$, por lo tanto la función estará expresada por:

$$g(x) = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

A partir de esto, se puede comprobar que los valores de la función $f(x)$ crecen con un factor de multiplicidad igual a 3 y la función $g(x)$ decrece con un factor de multiplicidad igual a $\frac{1}{4}$. De esto, se puede concluir que el factor de multiplicación es la base de la función exponencial a medida que x varia en una unidad.

A modo de ejemplo resolveremos el ítem (a)

Solución ítem a) SP3

Tenemos que el monto inicial es de S/. 20000

Para el caso del banco CONFIANZA cuya tasa es del 2% capitalizable mensualmente tenemos:

Mes 1	$20\,000 + 2\%(20\,000) = 20400$
Mes 2	$20\,400 + 2\%(20400) = 20808$
Mes 3	$20\,808 + 2\%(20808) = 21224{,}16$

Sabemos que una característica de la función exponencial es que al dividir dos términos consecutivos este valor es constante. Esto se vincula a la característica que tiene la progresión geométrica, entonces tenemos:

$$\frac{21224.16}{20808} = 1.02 \text{ y } \frac{20808}{20400} = 1.02$$

De los datos obtenidos, podemos deducir que se trata de una función exponencial, además ese cociente de 1.02 es la base de esa función. Asimismo, como el monto inicial es de S/.20000, significa que este valor es el coeficiente de la función. Todas estas son características de la función exponencial del tipo $f(x) = b \times a^x$.

Por lo tanto, el modelo matemático que nos permite hallar el monto para un tiempo t en el banco CONFIANZA está representado por:

$$f(t) = 20000 \times (1.02)^x$$

Para el caso de la cooperativa UNIDOS, cuya tasa es del 2.5% mensual tenemos:

Mes 1	$20\,000 + 2{,}5\%(20\,000) = 20\,000 + 500$
Mes 2	$20\,000 + 500 + 500 = 20\,000 + 2(500)$
Mes 3	$20\,000 + 2(500) + 500 = 20\,000 + 3(500)$

Dado que el crecimiento es constante, siendo este de 500, significa que se trata de una función afín, de la cual podemos deducir su regla de correspondencia, pues hay un patrón en los montos.

Por lo tanto, el modelo matemático que nos permite hallar el monto para un tiempo t en la cooperativa UNIDOS está representado por:

$$g(t) = 20\,000 + 500t$$

Como el problema pide que opción conviene para depositar el dinero en un año o dos años, entonces tenemos que reemplazar el tiempo en cada una de las funciones, siendo estos de 12 meses y 24 meses.

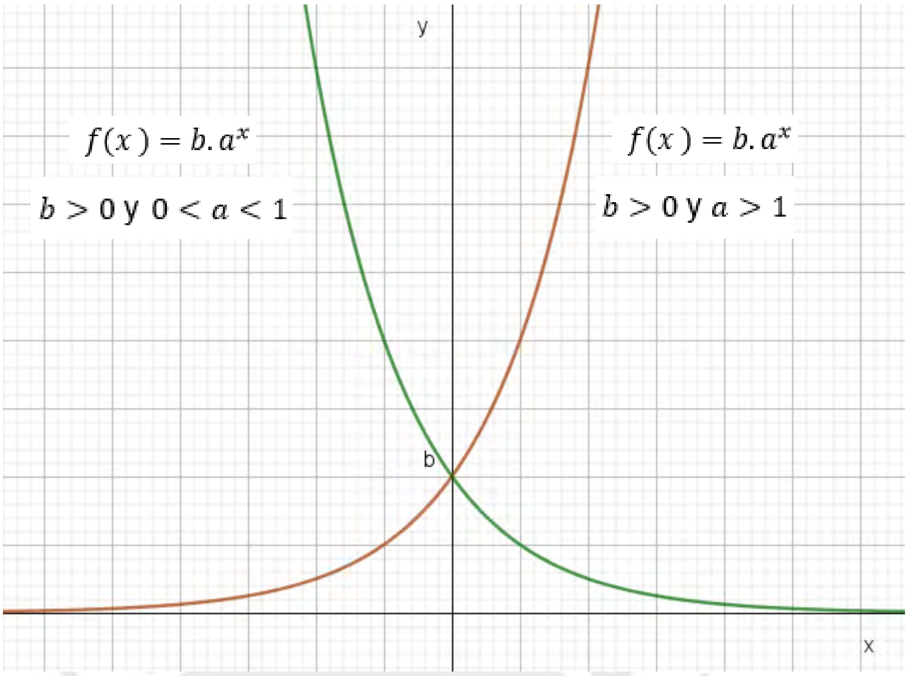
BANCO CONFIANZA	COOPERATIVA UNIDOS
$f(x) = 20000.(1{,}02)^x$	$g(t) = 20\,000 + 500t$
$f(12) = 20000.(1{,}02)^{12} = 25364{,}84$	$g(12) = 20\,000 + 500.12 = 26000$
$f(24) = 20000.(1{,}02)^{24} = 32168{,}74$	$g(24) = 20\,000 + 500.24 = 32000$

Se puede observar en la tabla que, para el caso de un año, es decir, 12 meses, es recomendable depositar el dinero en la cooperativa, pues el monto obtenido será mayor. Sin embargo, para dos años, es decir, 24 meses, es mejor el beneficio en el banco, pues el monto es mayor. Esto quiere decir que a más tiempo es recomendable depositar el dinero en el banco, pues el interés es capitalizable.

Propiedades

Sea la función exponencial $f(x) = b \times a^x$, entonces se cumple las siguientes propiedades:

- Si $b > 0$ y $a > 1$, entonces la función f es creciente y la base a es su factor de crecimiento.
  Si $b > 0$ y $0 < a < 1$, entonces la función f es decreciente y la base a es su factor de decrecimiento.



- Dominio de f es $\mathbb{R}$
- Rango de f es $]0; +\infty[$
- La función f es continua
- La función f pasa por el punto $(0; \mathrm{b})$

Lo presentado en esta última parte corresponde a la institucionalización general, la cual forma parte de nuestro marco teórico, siendo esta la última fase de todo el proceso de aprendizaje. En ella hemos dado la formalidad matemática a todos los conocimientos movilizados por los estudiantes, es decir, la función exponencial del tipo $f(x) = b \times a^x$, donde $b \neq 0, a > 0$ y $a \neq 1$, además, de señalar las propiedades de esta.

A continuación, como parte final de este trabajo de investigación mostraremos las consideraciones finales.

CONSIDERACIONES FINALES

El estudio de la función exponencial en el nivel secundario ha sido abordado en diferentes países, pero en el nuestro, al hacer la búsqueda de las investigaciones no hallamos algún trabajo en el nivel educativo secundario. Es por ello, la motivación en realizar el estudio de este concepto matemático, además de las dificultades percibidas en nuestra práctica docente.

Empezamos nuestro trabajo buscando investigaciones, en las cuales el objeto matemático de estudio sea la función exponencial. Se utilizó alguno de estos como parte de nuestros antecedentes, siendo los trabajos de Brucki (2011); Obando y Sánchez (2014); Advíncula (2010); Rozanski (2015); Sureda (2012); Freitas (2015); Bonotto y Bisognin (2015) y Barroso (2009). En estos, se señalaban diferentes dificultades en el aprendizaje de la función exponencial, como el ir de un lenguaje natural a una representación algebraica o de la representación gráfica a la algebraica, así como también el utilizar modelos lineales para explicar modelos no lineales como es el caso de la función exponencial. Estas dificultades encontradas son parte de nuestro análisis preliminar, según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Asimismo, con respecto al análisis epistemológico, pudimos observar que el inicio de la función exponencial es desde el aspecto intra-matemático, siendo este nacimiento como la inversa de la función logarítmica. Pero, hoy en día, el Estado, es decir, las autoridades responsables de la educación en nuestro país, buscan que el estudio de la matemática sea a partir de un contexto extra-matemático, como lo señala el Currículo Nacional.

Para el análisis didáctico de textos que utilizan los estudiantes de quinto de secundaria, nos apoyamos en el trabajo de Freitas (2015), quien manifiesta que es posible asociar tareas y técnicas para el estudio de la función exponencial. Todo esto nos permitió tener un mejor panorama para la construcción de las situaciones problema de la secuencia didáctica. Asimismo, desde nuestro marco teórico, la TSD, observamos que los problemas del texto no contribuyen a que los estudiantes puedan realizar formulaciones o validaciones, es decir, no ayuda en la construcción de la función exponencial.

A partir de nuestro análisis preliminar, pudimos diseñar una secuencia didáctica compuesta por tres situaciones problema, con el objetivo de que los estudiantes, mediante esta secuencia didáctica, puedan construir el concepto de función exponencial, pasando primero por la construcción de la regla de correspondencia, para luego lograr diferenciar qué características tiene esta con respecto al crecimiento o decrecimiento, esto consideramos que es una característica fundamental y, por medio de nuestro marco teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), pudimos analizar las acciones de los estudiantes al enfrentarse a las situaciones problema, así como las diferentes formulaciones realizadas por ellos, para luego mediante justificaciones y utilizando diferentes representaciones puedan validar sus resultados. A partir de los resultados que obtuvimos en nuestra experimentación y la validación desde la Ingeniería Didáctica, logramos los objetivos planteados, lo que permitió responder nuestra pregunta de investigación: *¿Cuáles son las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria?*

A continuación, detallamos cómo es que hemos respondido nuestra pregunta de investigación. Para ello, comenzaremos afirmando que hemos cumplido con los objetivos específicos de la investigación y que pasaremos a detallar.

Estudiar las estrategias que los estudiantes de quinto de secundaria utilizan en la situación problema al construir la función exponencial.

Este objetivo fue cumplido, pues en nuestro análisis *a priori* se consideró las estrategias que los estudiantes utilizarían para poder dar respuesta a las situaciones problemas planteadas. Asimismo, se analizaron las estrategias utilizadas por los estudiantes en nuestro análisis *a posteriori*. Todo esto fue posible gracias a nuestro marco teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ella nos permite analizar las acciones, formulaciones y validaciones que realizan los estudiantes al enfrentarse a la situación problema, con el propósito de que construyeran la función exponencial.

Determinar la contribución de una situación problema para que los estudiantes de quinto de secundaria identifiquen las condiciones de crecimiento o decrecimiento de una función exponencial.

Partiendo de que la situación problema tiene como objetivo la enseñanza de un objeto matemático, es que hemos construido tres situaciones problema. Asimismo, como lo señala Almouloud (2017), una situación problema es un conjunto de preguntas abiertas o cerradas en un contexto que se pueda matematizar. Además, esta situación debe movilizar el conocimiento implícito que se desea que adquieran los estudiantes. A su vez, estos deben notar que sus saberes previos son insuficientes para la resolución del problema, lo que lo obliga a buscar otras estrategias. Las situaciones problema 1 y 2 construidas en la investigación tienen todas estas características, pues en ellas está implícita la función exponencial. Además, mediante las preguntas planteadas, específicamente en la situación problema 1 cuando el tiempo era 9h 40min, se consiguió que los estudiantes buscaran otras estrategias para poder hallar la temperatura en ese tiempo, es decir, sus conocimientos previos fueron insuficientes, lo que conllevó a que buscaran un modelo matemático que les permita resolver el problema. Es así como la situación problema contribuyó, en primer lugar, a encontrar un modelo del tipo $f(x) = b \times a^x$.

Una vez hallado el modelo en la situación problema 1, se les pidió que describieran las características de ese modelo, lo mismo sucedió en la situación problema 2. La diferencia entre estas dos situaciones problemas radicaba en las bases de las funciones, es decir, en la SP1 se estudió cuando $a > 1$, siendo la función creciente y en la SP2 se estudió $0 < a < 1$, siendo la función decreciente, de esto podemos señalar que mediante la situaciones problemas 1 y 2, los estudiantes pudieron relacionar la base de la función exponencial con el crecimiento o decrecimiento de la función, estos conocimientos estaban implícitos en los problemas planteados. En el análisis *a posteriori,* se observa que los estudiantes pudieron describir estas características de forma escrita y utilizaron la lengua natural, entonces podemos concluir que se cumplió este objetivo.

Estudiar el aporte de la situación problema para fortalecer los saberes de los estudiantes de quinto de secundaria respecto a la función exponencial.

La situación problema 3 nos permitió cumplir con este objetivo, pues mediante la comparación de dos modelos matemáticos, la función afín y la función exponencial, los estudiantes pudieron, en primer lugar, fortalecer sus conocimientos sobre función afín, ya que la situación los encaminaba a encontrar este modelo matemático para poder hallar los montos en determinados tiempos. Asimismo, sucedió con la función exponencial, pues por las condiciones del problema se necesitaba encontrar este modelo, entonces mediante la situación problema 3 se fortaleció los conocimientos adquiridos en la situación problema 1 y 2. Además, mediante la situación problema pudieron los estudiantes identificar y diferenciar características de cada uno de estos tipos de funciones.

Dado que se cumplieron los objetivos específicos, podemos manifestar que se cumplió el objetivo general de la investigación:

Analizar las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria.

En toda la investigación, se analizó cómo contribuyó la secuencia didáctica compuesta por tres situaciones problema. Todo este análisis se logró en cada uno de los objetivos específicos.

Todo lo explicado anteriormente, nos permitió responder la pregunta de investigación:

¿Cuáles son las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria?

A partir de todo lo anterior, podemos manifestar que las contribuciones de la secuencia didáctica fueron inicialmente para la construcción de un modelo matemático, siendo éste de la función exponencial del tipo $f(x) = b \times a^x$. Además, de que se estudiaron las características de esta función, es decir, el crecimiento y decrecimiento. Todo este conocimiento, estuvo implícito en las situaciones problema. Asimismo, la última situación problema de la secuencia didáctica, ayudó en afianzar este concepto matemático, pues se movilizaron los conocimientos adquiridos en las situaciones problemas anteriores. Además, afirmamos que se construyó el concepto, pues como lo señala Vergnaud (como se citó en Sureda 2012), este está formado por un triplete integrado por un conjunto de situaciones, para nuestra investigación es la secuencia didáctica; por invariantes operatorios, que serían los esquemas mentales utilizados por los estudiantes, en nuestro caso el de progresión geométrica y el de interés compuesto; por formas simbólicas, como las halladas por los estudiantes, $f(x) = 5.2^x$ o $f(t) = 1000.\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Mediante la secuencia didáctica se logró superar ciertas dificultades encontradas en nuestros antecedentes, como que el exponente sea una variable, pues ellos lograron construir las funciones exponenciales del tipo $f(x) = b \times a^x$, como también la dificultad de utilizar modelos lineales para explicar modelos exponenciales, pues las situaciones problema 1 y 2 presentadas gráficamente, conllevó a que los estudiantes no utilicen algún tipo de función afín o lineal para poder resolver la situación planteada. Además, en la experimentación, aparecieron otras dificultades como, por ejemplo, que relacionaran la gráfica presentada con una función cuadrática. Esto nos hace pensar que no solo los esquemas lineales están arraigados en sus saberes previos, sino también esquemas mentales relacionados a la función cuadrática.

Perspectivas futuras

Finalmente, con respecto al alcance de investigaciones futuras, consideramos que esta forma de construir el concepto de un objeto matemático podría ser replicado en otro tipo de funciones. Además, de que se podría extender este trabajo al análisis de las diferencias entre las características de una función exponencial y una función cuadrática. Esto debido a que en nuestra investigación pudimos observar que no solamente está arraigado el esquema lineal en los estudiantes de este nivel educativo, sino también el de la función cuadrática. Finalmente, se podría utilizar un software para poder mediante la manipulación de datos representados gráficamente puedan aportar en la construcción de las otras formas de la función exponencial.

Se debe tomar en cuenta que el presentar las actividades mediante una representación gráfica puede llevar a que los estudiantes la consideren como una función cuadrática, pues siendo una curva, estos pueden suponer que es una parte de la función cuadrática y trabajar en función a sus características.

Por último, a los profesores recomendarles el utilizar este método para realizar la clase, pues los estudiantes manifestaron que se les hace más interesante el enfrentarse a un problema e ir construyendo el concepto que el profesor desea que aprendan, a diferencia de que solo se les exponga la teoría y luego resuelvan los ejercicios, pero siempre teniendo en cuenta el tiempo empleado, pues la aplicación de una secuencia didáctica demanda una cantidad de tiempo razonable, lo que normalmente no se dispone en las clases.

REFERENCIAS

Advíncula, E. (2010). *Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de Humanidades*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Artigue, M., Douady R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Almouloud, S. A. (2014). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.

Almouloud, S.A. (2017). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *11*(2), 109-141.

Barroso, D. F. (2009). Construindo o conceito de função exponencial a partir dos objetos digitais de aprendizagem "Torre de Hanói" e "Geogebra". *Revista Electrõnica Fundação Educacional São José.* Recuperado de: http://fsd.edu.br/revistaeletronica/arquivos/3Edicao/artigo21%20DEJAIR.pdf

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos (María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho, trad.) Portugal: Porto Editora.

Bonotto, A. K., & Bisognin, E. (2015). Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função Exponencial. *RENOTE*, *13*(2).

Boyer, C. B., & Pérez, M. M. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Editora Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). Fondements et methodes de la didactique des mathematiques', Recherches en didactique des mathématiques7 (2), 33-115(Julia Centeno, Begoña Melendo, Jesus Murillo, trad.)

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal. Recuperado de: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

Brousseau,G.(2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, *5*(1), 101-104. Recuperado de: https://journals.openedition.org/educationdidactique/1005

Brousseau,G.(2013). Introduction à l'Ingénierie Didactique. Recuperado de: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf

Brucki, C. M. (2011). *O uso de Modelagem no ensino de função exponencial.* Obtenido de Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUCSP: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/cristinabrucki.pdf

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (3a ed., Magda Lopes, Trad.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 2003)

Freitas, R. L. (2015). *A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura: um estudo da função exponencial*. Obtenido de Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUCSP: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11041/4/Rita%20Lobo%20Freitas.pdf

Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. Repères – Anne Lovey-Tornay avril 2012 66/68 IREM no 61 (pp.19-35)

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Lima: Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

Obando, J. D., & Sánchez, J. F. (2014). *Construcción de modelos matemáticos en un contexto cafetero*. Obtenido de Tesis de Maestría en Educación Matemática. UdeA: http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/6523/1/JorgeObando_modelosmatematicos.pdf

Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Rozanski, E. F. (2015). *Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas* .Obtenido de Tesis de Maestría en Educación Matemática. UTFPR: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1734/1/PB_PROFMAT_M_Rozanski%2C%20Emilene%20Funez_2015.pdf

Santillana (2016). Matemática 5. Lima: Grupo editorial Santillana S.A.

Stewart, J., Redlin, L., & Saleem, W. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo*. 6th. Ed., Cengage Learning.

Sureda, P. (2012). *Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos*. Obtenido de Tesis de Doctorado en Educación Matemática. UNICEN: http://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/893

ANEXOS

ANEXO 1-SECUENCIA DIDÁCTICA

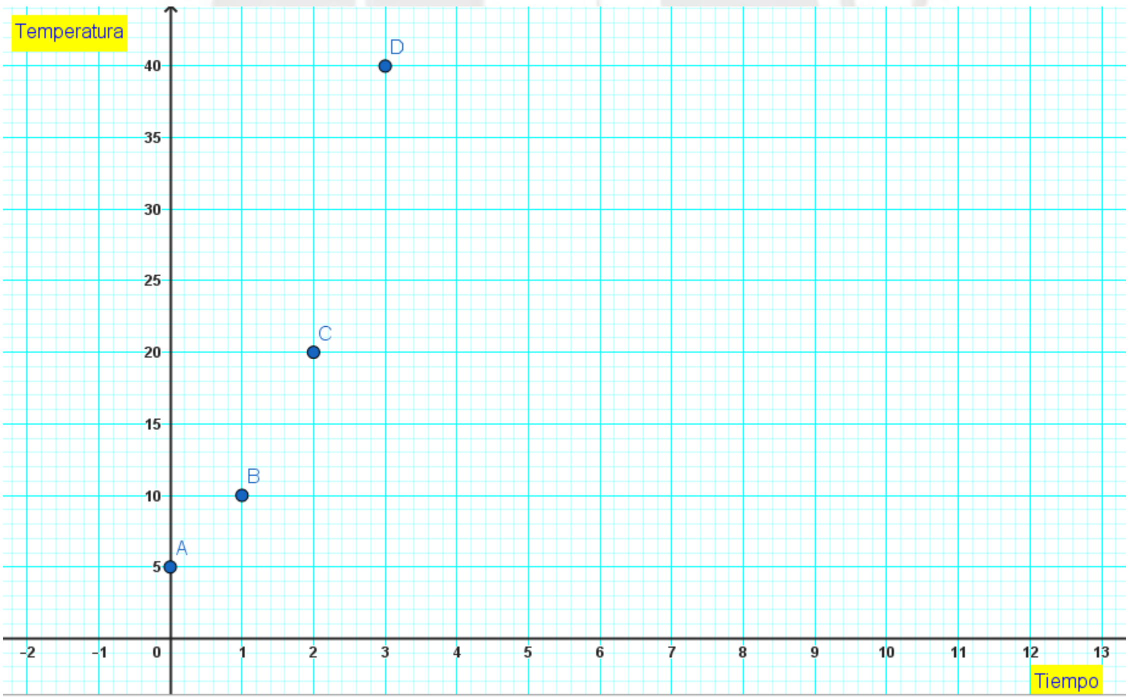
5to grado de secundaria

Nombres y Apellidos: ________________________________ **Fecha:** _______

____

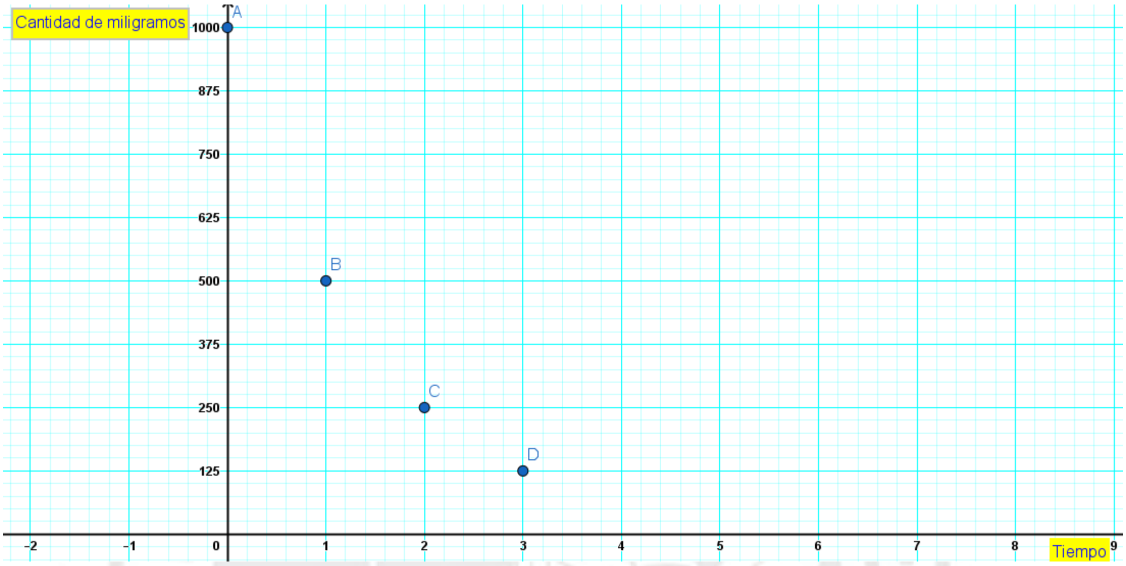
Justificar en cada problema su procedimiento

Situación problema 1. Los puntos de fusión son constantes, muy utilizados en la Física y la Química. El punto de fusión es la temperatura en la cual ocurre el cambio del estado sólido al estado líquido, por ejemplo, el punto de fusión del aluminio es de 660,3 °C. Buscando ver el comportamiento de una aleación de hafnio, nitrógeno y carbono frente a altas temperaturas, científicos han simulado el experimento en un superordenador y registrado los datos, los que son representados en el siguiente gráfico.



d) ¿Cuál es la temperatura de la aleación a las 7 horas?
e) ¿Cuál es la temperatura estimada de la aleación a las 9h 30min y 9h 40min?
f) ¿Qué características presenta la función temperatura?

Situación problema 2. El Paracetamol es uno de los medicamentos más utilizados a nivel mundial. Su uso se da con mayor frecuencia para el tratamiento de dolor o fiebre con una intensidad moderada. Se le administra una dosis de este medicamento a una persona para analizar la cantidad de sustancia presente dentro del organismo del sujeto a medida que transcurren las horas. Estos datos fueron organizados en la siguiente representación gráfica.



d) ¿Cuál será la cantidad de miligramos estimado presente en el organismo de la persona al cabo de 6h 30min y 6h 50min?

e) ¿Qué características puede observar en la función?

f) ¿Qué diferencias puede encontrar en el modelo matemático de la primera situación con respecto al segundo modelo matemático?

5to grado de secundaria

Nombres y Apellidos: ________________________________ Fecha: _______

____

Justificar su procedimiento.

Situación problema 3. Un grupo de estudiante desea viajar al extranjero como parte de su viaje de promoción, aunque aún les falta dos años para terminar el colegio, ellos tienen un ahorro de S/.20 000 por lo cual deciden invertirlo, para este propósito tienen dos opciones el banco o una cooperativa. El banco “CONFIANZA” pagará intereses a una tasa del 2% mensual, capitalizable[1] mensualmente. La cooperativa “UNIDOS” pagaría interés del 2,5% mensualmente.

a) ¿Qué opción le conviene aceptar al colocar sus ahorros en un plazo de un año y dos años?
b) ¿Qué puede decir acerca de la función monto expresado en cada una de las opciones de inversión?
c) ¿En algún periodo de tiempo dará lo mismo ahorrar en el banco que en la cooperativa?

[1]En el interés compuesto, el interés (I) ganado en cada periodo (n) es agregado al capital inicial (P) para constituirse en un nuevo capital (S) sobre el cual se calcula un nuevo interés produciéndose lo que se conoce como capitalización la cual puede ser anual, trimestral, mensual, diaria.

ANEXO 2-CONSENTIMIENTO DE PARTICIPACIÓN

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES[1]

El propósito de este protocolo es brindar a los y a las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por ___________________________ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad ______________________________. La meta de este estudio es ____
____

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará ____ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán confidenciales, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, ____ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta (de ser el caso que se haya proporcionado información escrita sobre la investigación). He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, puedan ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con _______________________________ al correo (o al teléfono) _________________________.

Nombre completo del (de la) participante	Firma	Fecha
Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha

[1] Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.