

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**OPTIMIZACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR EN UN  
ESQUEMA DE COOPERACIÓN PARA UN DETECTOR  
 $\lambda$ -MRC EN CANAL RAYLEIGH**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Electrónico, que presenta el bachiller:

**Mitchell Omar Calderon Inga**

ASESOR: Angelo Velarde Criado

Lima, Junio del 2012

## Resumen

En el presente trabajo de tesis, se ha realizado un análisis del esquema de cooperación de usuarios, con el objetivo de obtener la menor probabilidad de error de bit del sistema. Este análisis es efectuado sobre la implementación CDMA detallada en el artículo *User Cooperation Diversity-Part II*, escrito por Sendonaris et al. Sin embargo, la probabilidad de error obtenida en este artículo sólo es válido para canales fijos, y sabemos que en la realidad este canal esta expuesto a diferentes tipos de desvanecimiento, lo cual lo hace variable.

En este caso, el desvanecimiento multirayectoria es lo que causa los mayores daños en la recuperación de la información y obedece a una distribución de probabilidad Rayleigh. En tal sentido, una expresión exacta para la probabilidad de error de bit media fue obtenida para el detector  $\lambda$ -MRC (*maximal-ratio combining*), sobre un canal con desvanecimiento Rayleigh. Sin embargo, dada la complejidad de la expresión exacta, una aproximación muy cercana fue obtenida para calcular la probabilidad de error de bit media, en el caso de cualquier esquema de asignación de potencia.

Con esta aproximación, podemos hacer un análisis más exhaustivo y más real del sistema, en el sentido de conocer cuándo la cooperación es beneficiosa y cuándo no la es. Una vez identificado cuando cooperar, la idea es hacerlo con los parámetros adecuados para que la probabilidad de error del sistema sea la mínima. Nuestro análisis, consiste precisamente, en encontrar estos parámetros para tener un sistema de cooperación de usuarios óptimo.

Aún con nuestra aproximación, manejar tantas variables resulta complejo. Por tal motivo, simplificaremos el análisis usando una asignación de potencia uniforme, ya que nuestro objetivo es demostrar que podemos llegar a tener un mejor sistema con el manejo adecuado de todas las variables involucradas. Aquí también, debemos considerar que el esfuerzo computacional demandado no debe ser alto, ya que esto le quitará eficiencia a nuestro análisis.

Los resultados presentados, muestran que nuestra expresión permite investigar las diferentes situaciones del canal y con esta información crear estrategias, haciendo que el esquema de cooperación de usuarios sea más eficiente.

FACULTAD DE  
CIENCIAS E  
INGENIERÍAPONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ

## TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRÓNICO

Título : Optimización de la Probabilidad de error en un esquema de Cooperación para un detector  $\lambda$ -MRC en Canal Rayleigh

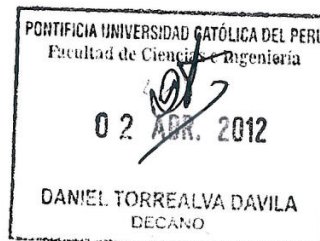
Área : Electrónica # 989

Asesor : Ing. Ángelo Velarde Criado

Alumno : Mitchell Omar Calderon inga

Código : 19941033

Fecha : 7 de Marzo de 2012



## Descripción y Objetivos

En comunicaciones inalámbricas, se llega a demostrar que el sistema de cooperación de usuarios conduce a un aumento de la región de capacidad y a un aumento de la cobertura. Así mismo desempeña un papel importante en el combate al desvanecimiento multitrajectoria. Es por estos motivos que, probablemente esta tecnología se convierta en esencial para el uso eficiente del espectro en el futuro.

El presente trabajo de tesis se centra en el análisis del esquema de cooperación de usuarios, basado en una implementación CDMA, con el objetivo de minimizar la probabilidad de error de bit. Sin embargo la probabilidad obtenida hasta estos momentos era solo válida para canales fijos. Estos canales en la realidad son afectados por desvanecimientos que pueden ser modelados por una distribución Rayleigh, en tal sentido, se obtuvo una expresión exacta para la probabilidad de error, para este tipo de canal. Al final, esta expresión resultó ser muy compleja, por esta razón se calculó una expresión aproximada, la cual resultó ser mucho más simple que la anterior.

El propósito de la presente tesis es demostrar que la aproximación hallada constituye una herramienta válida para evaluar, cuando es conveniente la cooperación y cuando no la es. Además de permitimos encontrar los parámetros adecuados, para que la probabilidad sea mínima con un esfuerzo computacional razonable. En particular, en este trabajo, se obtiene el  $\lambda$  óptimo para que la probabilidad de error media sea la mínima cuando se adopta un esquema de asignación de potencia uniforme.

MÁXIMO 50 PÁGINASPONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
SECCIÓN ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA

Dr. Ing. BENJAMIN CASTAÑEDA APHAN  
Coordinador de la Especialidad de Ingeniería Electrónica

FACULTAD DE  
CIENCIAS E  
INGENIERÍAPONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ

## TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRÓNICO

Título : Optimización de la Probabilidad de error en un esquema de Cooperación para un detector  $\lambda$ -MRC en Canal Rayleigh

## Índice

## Introducción

1. Cooperación de usuarios
2. Implementación CDMA
3. Probabilidad de error de bit en canales con desvanecimiento Rayleigh
4. Optimización de la probabilidad de error

## Conclusiones

## Recomendaciones

## Bibliografía

## Anexos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
SECCIÓN ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA  
-----  
Dr. Ing. BENJAMÍN CASTAÑEDA APHAN  
Coordinador de la Especialidad de Ingeniería ElectrónicaMÁXIMO 50 PÁGINAS



*A mi madre,  
responsable de este logro*

# Índice

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Glosario</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Cooperación de Usuarios</b>	<b>3</b>
1.1. Contexto . . . . .	3
1.2. Antecedentes . . . . .	5
1.3. Arquitectura . . . . .	7
1.4. Modelo de Canal . . . . .	8
1.5. Cooperación sobre la óptica de la Teoría de la Información . . . . .	10
1.5.1. Región de Capacidad . . . . .	10
1.5.2. Cobertura Celular . . . . .	14
<b>2. Implementación CDMA</b>	<b>18</b>
2.1. Cálculo de la probabilidad de error . . . . .	19
2.1.1. Tasa de error para períodos sin cooperación . . . . .	20
2.1.2. Tasa de error para períodos con cooperación . . . . .	20
<b>3. Probabilidad de error de bit en Canales con Desvanecimiento Rayleigh</b>	<b>23</b>
3.1. Cálculos con Desvanecimiento Rayleigh . . . . .	23
3.1.1. Probabilidad de error de bit Exacta . . . . .	24
3.1.2. Probabilidad de error de bit Aproximada . . . . .	29



<b>4. Optimización de la Probabilidad de error</b>	<b>36</b>
4.1. Análisis de la Probabilidad de error . . . . .	36
4.2. Análisis de los canales <i>uplink</i> y el canal inter-usuario . . . . .	39
4.3. Calculando el mejor $\lambda$ . . . . .	43
4.4. Calculando valores apropiados para una óptima cooperación . . . . .	43
 <b>Conclusiones</b>	 <b>48</b>
 <b>Recomendaciones</b>	 <b>50</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>51</b>
 <b>Apéndice</b>	 <b>53</b>



# Índice de figuras

1.1. Canal Relay. . . . .	6
1.2. Arquitectura de un Sistema de Cooperación con dos usuarios. . . . .	7
1.3. Modelo de Canal. . . . .	8
1.4. Región de capacidad cuando los dos usuarios enfrentan canales estadísticamente equivalentes con relación a la BS. . . . .	13
1.5. Región de capacidad cuando los dos usuarios enfrentan canales estadísticamente diferentes con relación a la BS. . . . .	13
2.1. Cómo la cooperación es implementada en un sistema CDMA convencional. . . . .	19
3.1. La intersección de las dos superficies corresponde a la curva que limita $D_{u_1}$ . En este caso, la curva es semejante a una elipse. . . . .	26
3.2. Comparación entre la PDF analítica y la simulada de la variable aleatoria $U_1$ . . . . .	27
3.3. La intersección de las dos superficies corresponde a la curva que limita $D_{u_2}$ . En este caso, la curva es semejante a una hipérbola. . . . .	28
3.4. Comparación entre la PDF analítica y la simulada de $U_2$ . . . . .	29
3.5. Comparación entre la probabilidad de error de bit exacta y la simulada, adoptando el esquema de asignación de potencia uniforme. . . . .	30
3.6. Comparación entre la PDF simulada de 3.3 y nuestra aproximación dada en 3.29. . . . .	32
3.7. Comparación en escala logarítmica entre la PDF simulada de 3.3 y nuestra aproximación dada en 3.29. . . . .	32
3.8. Comparación entre la PDF simulada de 3.4 y nuestra aproximación dada en 3.32. . . . .	33
3.9. Comparación en escala logarítmica entre la PDF simulada de 3.4 y nuestra aproximación dada en 3.32. . . . .	34



3.10. Comparación entre la probabilidad de error de bit exacta y la aproximada, utilizando un esquema de asignación de potencia uniforme. . . . .	35
3.11. Comparación entre la probabilidad de error de bit simulada y la aproximada, a través de un esquema de asignación de potencia no uniforme. . . . .	35
4.1. Probabilidad de error para diferentes valores del canal inter-usuario. . . . .	37
4.2. Probabilidad de error para diferentes valores del $\lambda$ , cuando $E[K_{12}]$ es menor a $E[K_{10}]$ . . . . .	38
4.3. Probabilidad de error para diferentes valores del $\lambda$ , cuando $E[K_{12}]$ es ligeramente menor a $E[K_{10}]$ . . . . .	38
4.4. Probabilidad de error para diferentes valores del $\lambda$ , cuando $E[K_{12}]$ es ligeramente mayor a $E[K_{10}]$ . . . . .	39
4.5. Relación entre el canal inter-usuario y el canal <i>uplink</i> , cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación. . . . .	41
4.6. Relación entre el canal inter-usuario y el canal <i>uplink</i> para diferentes valores de <i>SNR</i> , cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación. . . . .	41
4.7. Razón entre el canal inter-usuario y el canal <i>uplink</i> versus <i>SNR</i> , para diferentes valores de $\lambda$ y $[K_{10}]$ , cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación. . . . .	42
4.8. $\lambda$ óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para $SNR = 10dB$ . . . . .	44
4.9. $\lambda$ óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para $SNR = -5dB$ . . . . .	44
4.10. $\lambda$ óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para $SNR = 15dB$ . . . . .	45
4.11. Ampliación de la figura 4.8 para $\lambda$ próximo de cero. . . . .	46
4.12. Comparación de la probabilidad de error minimizada para dos $\lambda$ diferentes. . . . .	47

# Glosario

- AWGN** - Additive White Gaussian Noise (Ruido blanco gaussiano aditivo)
- BS** - Base Station (Estación base)
- CDF** - Cumulative Distribution Function (Función de distribución acumulada)
- CDMA** - Code Division Multiple Access (Acceso múltiple por división de código)
- FDMA** - Frequency Division Multiple Access (Acceso múltiple por división de frecuencia)
- MIMO** - Multiple Input Multiple Output (Múltiple entrada múltiple salida)
- MRC** - Maximal-Ratio Combining (Combinación de relación máxima)
- PDF** - Probability Density Function (Función densidad de probabilidad)
- SISO** - Single Input Single Output (Única entrada única salida)
- SNR** - Signal-to-Noise Ratio (Relación señal-ruido)
- TDD** - Time-Division Duplex (Duplexación por División del Tiempo)
- TDMA** - Time Division Multiple Access (Acceso múltiple por división de tiempo)

## Lista de Símbolos

$Y_i$	- Señal recibida en la BS por el usuario $i$
$X_i$	- Señal transmitida por el usuario $i$
$P_i$	- Restricción de potencia del usuario $i$
$Z_i$	- Ruido gaussiano blanco del usuario $i$
$\Xi_i$	- Variancia de la distribución normal $Z_i$
$\sigma_i^2$	- Variancia de la distribución normal $Z_i$ para la implementación CDMA
$K_{ij}$	- Coeficientes de desvanecimiento entre usuario $i$ y usuario $j$
$W_i$	- Mensaje que el usuario $i$ desea transmitir para la BS
$S_i$	- Información de cooperación del usuario $i$
$R_{ij}$	- Tasa de transmisión entre usuario $i$ y usuario $j$
$C(\cdot)$	- Capacidad de canal
$P_{TX}$	- Potencia media transmitida
$P_{RX}$	- Potencia media recibida
$PL(d)$	- Pérdida media del camino a una distancia $d$ Km
$H_1$	- Función de la altura de la antena transmisora
$H_2$	- Función de la altura de la antena receptora
$P_{TX}^{MAX}$	- Potencia media transmitida máxima
$a_{ij}$	- Parámetros de potencia del usuario $i$
$c_i$	- $i$ -ésimo código de ensanchamiento CDMA
$N_c$	- Longitud del código de ensanchamiento CDMA
$n^x$	- Distribuciones normales estadísticamente independientes
$\hat{b}$	- bit estimado por el compañero
$\Re(\cdot)$	- Parte real de un número
$Q(\cdot)$	- Función Q
$\alpha$	- Parámetro de la distribución Rayleigh
$f_X(x)$	- Función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $X$
$F_X(x)$	- Función de distribución acumulada de la variable aleatoria $X$
$E(\cdot)$	- Media de una variable aleatoria
$\text{Var}(\cdot)$	- Variancia de una variable aleatoria

# Introducción

En los últimos años, en el mundo de la telecomunicaciones se han producido cuantiosos avances que se ven reflejados en los diferentes servicios que se hacen indispensables en el mundo actual. Estos servicios demandan constantemente mayores tasas de transmisión por lo que se hace necesario la investigación y desarrollo de nuevos sistemas para contrarrestar los diferentes problemas que se generan en una comunicación, como la alta probabilidad de error, la limitación del ancho de banda, el ruido, el desvanecimiento, la interferencia, etc.

Un factor altamente negativo en las comunicaciones inalámbricas lo constituye el desvanecimiento multitrayectoria, por lo cual se hace necesario aplicar mecanismos que contrarresten dichos efectos no deseados. En tal sentido, el uso de técnicas de diversidad desempeña un papel importante en el combate al desvanecimiento.

La cooperación entre terminales inalámbricos fue propuesta como un medio para proporcionar diversidad espacial encarando estas limitaciones (espacio físico para la instalación de varias antenas). La diversidad espacial es obtenida por un sistema de señalización que permite que dos usuarios con una única antena envíen sus informaciones utilizando ambas antenas. Comunicación cooperativa es una de las áreas con gran cantidad de investigaciones, y es probable que sea una tecnología esencial para el uso eficiente del espectro en el futuro.

El concepto básico de cooperación de usuarios fue discutido en el trabajo pionero *User Cooperation Diversity* [1], donde los autores explican como las ganancias de diversidad son alcanzadas a través de la cooperación de los usuarios en la misma celda celular. Es decir, dos usuarios en una misma celda son responsables por transmitir no sólo sus propias informaciones, sino también la información del compañero. Los resultados muestran que la cooperación conduce a un aumento de la región de capacidad para los usuarios, así como a un sistema más robusto. El esquema práctico presentado por los autores [2] se basa en una implementación

CDMA (*code division multiple access*), poniendo el énfasis sobre la ganancia de diversidad, de tal manera que cada usuario envía un nuevo bit cada dos periodos de tiempo (si ellos están cooperando).

Por otro lado, este trabajo pionero de Sendonaris [2], asume un receptor sub-óptimo llamado  $\lambda$ -MRC (*maximal-ratio combining*), donde la probabilidad de error de bit fue calculada considerando un canal fijo. Sin embargo, la modelización del canal es un factor indispensable, pues las características de movilidad y propagación presentes son responsables por distorsiones ocurridas sobre la señal transmitida. El modelo estadístico de desvanecimiento Rayleigh es normalmente utilizado para describir las variaciones en un ambiente multitrayectoria.

Por tal motivo, en este trabajo de tesis, se explica cómo una expresión exacta y otra aproximada son encontradas para la probabilidad de error de bit media, considerando un desvanecimiento Rayleigh para el canal entre los usuarios (canal inter-usuario) y para el canal directo entre los usuarios y la estación base (BS - *base station*). Estos cálculos fueron publicados por el autor de esta tesis en la revista *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking* con el título "*Average Bit Error Probability for the  $\lambda$  - MRC Detector under Rayleigh Fading*"

El objetivo de este trabajo es realizar un análisis del sistema de cooperación de usuarios para establecer las condiciones de cuándo es beneficiosa la cooperación y cuándo no lo es, además de esto, se mostrará un criterio para obtener la menor probabilidad de error, tomando en cuenta la utilización adecuada de los parámetros involucrados en el sistema. Cabe mencionar, que el análisis que se presenta, pretende sentar las bases para continuar con el estudio de este sistema de cooperación y hacerlo más eficiente.

# Capítulo 1

## Cooperación de Usuarios

En este capítulo, se presenta una breve descripción del sistema de cooperación de usuarios que cubre conceptos básicos, antecedentes y el análisis de las ventajas del sistema. Es importante notar que lo expuesto en este capítulo es una revisión de los trabajos sobre *User Cooperation Diversity* publicados por Sendonaris [1], [2].

### 1.1. Contexto

El siglo XXI se ha caracterizado por el incremento exponencial de las soluciones inalámbricas que se refleja en un constante incremento de servicios de alta velocidad. Al utilizar un canal de radiofrecuencia como medio de transmisión, este debe combatir todos los fenómenos que se presenten, en particular el desvanecimiento.

Antes de abordar lo relacionado con el esquema de cooperación, se describirán las características de propagación de un canal inalámbrico para sistemas móviles basados en radio bases bajo consideraciones de desvanecimiento a pequeña escala, efectos multitrayectoria o *multipath* y sistemas multiusuario.

Para analizar los procesos y técnicas utilizados en los equipamientos de comunicación inalámbrica que buscan la correcta recepción y transmisión de la información en entornos dinámicos, es relevante comprender los diferentes fenómenos asociados a la propagación de las ondas electromagnéticas sobre las cuales se transmite la información. En este sentido, el fenómeno de multitrayectoria en el canal, ocasionado por múltiples reflexiones, difracciones y dispersión de la señal transmitida y que llegan al receptor, crea efectos de desvanecimiento a



pequeña escala.

El desvanecimiento a pequeña escala, o simplemente desvanecimiento, es un término para describir la rápida fluctuación de la amplitud de una señal de radio en un corto periodo o durante el viaje de ésta en una distancia corta en relación a su longitud de onda. Considerando el desvanecimiento, los efectos de pérdidas a gran escala pueden ser ignorados, como los ocasionados por sombreado o *Shadowing* y cuya relación física está dada por lo general por efectos de difracción debido a obstrucciones en el trayecto del transmisor al receptor. El desvanecimiento a pequeña escala es causado por la interferencia entre dos o más versiones de la señal transmitida cuando llegan al receptor con muy poco tiempo de diferencia. Estas señales son llamadas Señales de Multitrayectoria, y son combinadas en la antena receptora para obtener una señal resultante la cual puede variar de gran forma en amplitud y fase, dependiendo de la distribución de intensidad, del tiempo relativo de propagación de las ondas y del ancho de banda de la señal transmitida (el cual varía de un sistema a otro).

Algunos factores físicos en el canal de propagación influyen en el desvanecimiento a pequeña escala. La presencia de objetos reflectores y dispersores en el entorno crea un cambio constante en el canal de propagación de la señal, lo que disipa energía en amplitud, fase y tiempo. Estos efectos producen múltiples versiones de la señal transmitida que llega a la antena receptora, desplazadas una respecto a la otra en tiempo y orientación espacial. Con lo manifestado podemos afirmar que el desvanecimiento constituye un factor altamente negativo en las comunicaciones.

Para remediar esta situación, es necesario diseñar nuevos esquemas de transmisión que sean capaces de superar estos inconvenientes. La transmisión cooperativa crea en la práctica un arreglo de antenas virtuales que proporciona, no sólo los beneficios conocidos de las transmisiones MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) en términos de capacidad - cobertura (o ambas), sino además diversidad respecto a los desvanecimientos. De esta forma es posible, incrementar virtualmente el número de antenas transmisoras o receptoras. De ahí que los sistemas cooperativos puedan analizarse como sistemas MIMO de los cuales es conocido que permiten aumentar la capacidad respecto a un sistema SISO (*Single Input Single Output*) para entornos Rayleigh. De hecho, los esquemas cooperativos son también conocidos como sistemas MIMO virtuales y al igual que en los esquemas MIMO convencionales, es posible obtener una potencial ganancia en diversidad o multiplexado.

Si los esquemas cooperativos tratan en definitiva de emular un sistema MIMO, ¿porqué no investigar únicamente tecnologías MIMO sin cooperación? La primera razón estriba en la sencillez de los equipos de usuario, ya que los esquemas cooperativos pueden ofrecer las principales ventajas de los esquemas MIMO pero sin la necesidad de utilizar unidades de usuario dotadas de múltiples antenas, lo que implica un abaratamiento de los costos. Otra motivación muy importante, es el hecho de que los futuros sistemas de comunicaciones móviles se estén planificando a frecuencias cada vez más elevadas. A frecuencias del orden de decenas de GHz la propagación es cuasi-óptica y está además caracterizada por pérdidas con la distancia muy elevadas. Esto implica que, para mantener la cobertura actual, será necesario desplegar un número muy elevado de estaciones base o puntos de acceso.

La tecnología MIMO, de gran interés para incrementar la capacidad en sistemas de futura generación, presentará dos problemas fundamentales a frecuencias muy elevadas. El primero de ellos, es que la propagación cuasi-óptica implica una elevada correlación entre los canales medidos en las diferentes antenas, lo que hace disminuir la potencial ganancia en capacidad del sistema MIMO. El segundo problema, es que en el *shadowing* será igualmente severo para todas las antenas del esquema MIMO, dado que están situadas espacialmente próximas. En este contexto, la cooperación, a nivel de capa física, entre diferentes nodos de la red resulta de gran interés en términos de cobertura y capacidad, ya que, por un lado la macrodiversidad que conlleva el tener separados espacialmente los nodos cooperantes permite, en condiciones de *shadowing* severo, obtener mejores condiciones de cobertura que con un esquema MIMO convencional. Por otro lado, los nodos cooperantes establecen una especie de canal multitraectoria que permite incrementar el rango del canal visto por el receptor y conformar una distribución de autovalores que permita obtener una ganancia en capacidad a frecuencias elevadas.

## 1.2. Antecedentes

Los primeros estudios para contrarrestar los efectos perjudiciales del desvanecimiento a través de la diversidad data por lo menos del año 1927 [4] y permanece hasta hoy como un elemento clave en la concepción de codificadores poderosos y métodos de procesamiento de señales para un canal inalámbrico. La diversidad proporciona al receptor múltiples versiones de la misma señal sujeto a las realizaciones independientes del desvanecimiento.

Algunas formas más conocidas de diversidad son, diversidad espacial, diversidad temporal y diversidad en frecuencia [5]. En particular, la diversidad espacial es especialmente eficaz en el combate con el desvanecimiento por multitrayectoria [6]. La diversidad espacial puede ser implementada a través de la utilización de más de una antena en el terminal, visto que las señales de cada antena hacia el destino experimentan desvanecimientos casi independientes, pudiendo existir algún grado de correlación que deberá ser estimado por el sistema. A pesar de parecer ventajoso, tener varias antenas en el transmisor puede ser no tan práctico debido al tamaño, costo o limitaciones de *hardware*, especialmente en el *uplink* de sistema celular.

Las ideas por detrás de la comunicación cooperativa pueden ser encontradas en los trabajos pioneros de Cover, El Gamal y Van der Meulen sobre las propiedades teóricas de las informaciones del canal *relay* [7, 8]. Este trabajo [7] analizó la capacidad de una red de tres nodos que consiste de una fuente, un destino y un *relay*. El modelo de canal *relay* es mostrado en la figura 1.1. Vamos a suponer que todos los nodos operan en la misma banda, entonces el sistema puede ser descompuesto en un canal *broadcast* desde el punto de vista de la fuente y en un canal de acceso múltiple desde el punto de vista del destino.

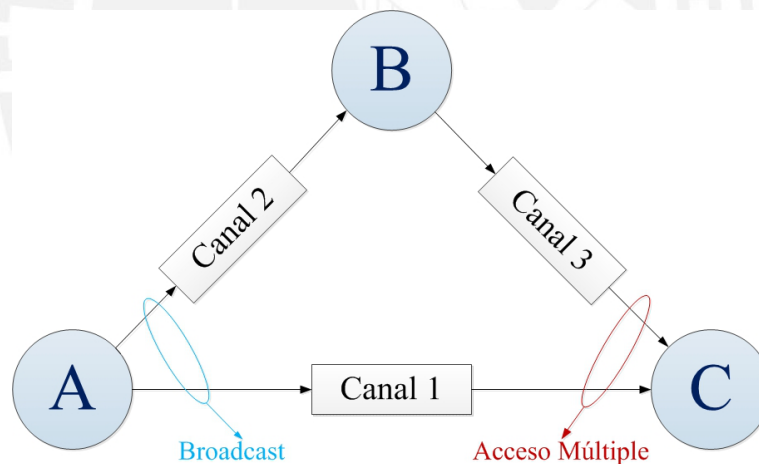


Fig. 1.1: Canal Relay.

La comunicación cooperativa, aunque siga un modelo semejante al modelo de canal *relay*, en algunos aspectos difiere significativamente. Cada usuario debe, además de transmitir sus propios datos, actuar como agente de cooperación para el otro usuario. En otras palabras, protocolos de señalización cooperativos deben ser concebidos de modo que los usuarios puedan ayudar a otros usuarios y al mismo tiempo sean capaces de enviar sus propios datos. Los principales métodos de cooperación en señalización son generalmente agrupados en dos clases:

métodos *amplify-and-forward* y *detect-and-forward*. En el primer caso, el usuario puede simplemente transmitir la señal analógica de su compañero, ya en el segundo caso, el usuario puede retransmitir los estimados de los símbolos recibidos.

Laneman y Wornell propusieron la primera vez *amplify-and-forward* como un esquema de cooperación de señalización en [9]. En este trabajo, ellos calcularon la tasa de error de bit para una señal no codificada y mostraron que a pesar, de la propagación del ruido del compañero, el método *amplify-and-forward* es significativamente mejor que la transmisión sin cooperación.

Dentro de los métodos *detect-and-forward*, el método llamado cooperación de usuarios surgió como una técnica promisoría que permite formar una multi-antena transmisora virtual y, por tanto, disfrutar de los beneficios de la diversidad espacial.

### 1.3. Arquitectura

En un sistema de comunicaciones usando cooperación, cada usuario debe transmitir sus propios datos y también actuar como un agente de cooperación para el otro usuario. Para una explicación mejor, la figura 1.2 muestra dos usuarios comunicándose con el mismo destino. Cada usuario tiene una antena y no pueden generar diversidad espacial individualmente. Sin embargo, puede ser posible para un usuario recibir la información de otro usuario y transmitirla al destino. Como cada señal se desvanece de forma independiente, se genera de esta manera una diversidad espacial.

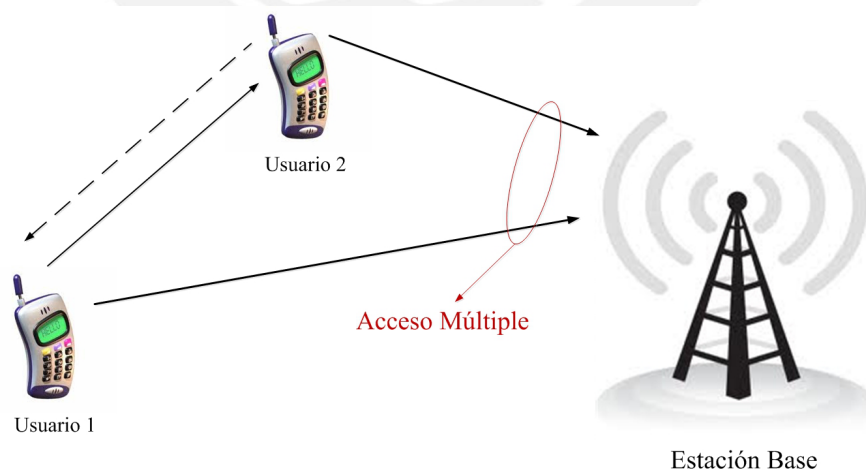


Fig. 1.2: Arquitectura de un Sistema de Cooperación con dos usuarios.

### 1.4. Modelo de Canal

El modelo de canal descrito en [1] es ilustrado en la figura 1.3 y puede ser expresado matemáticamente como

$$Y_0(t) = K_{10}X_1(t) + K_{20}X_2(t) + Z_0(t) \tag{1.1}$$

$$Y_1(t) = K_{21}X_2(t) + Z_1(t) \tag{1.2}$$

$$Y_2(t) = K_{12}X_1(t) + Z_2(t) \tag{1.3}$$

donde  $Y_0(t)$ ,  $Y_1(t)$ , y  $Y_2(t)$  representan las señales en banda base en la BS, en el usuario 1 y en

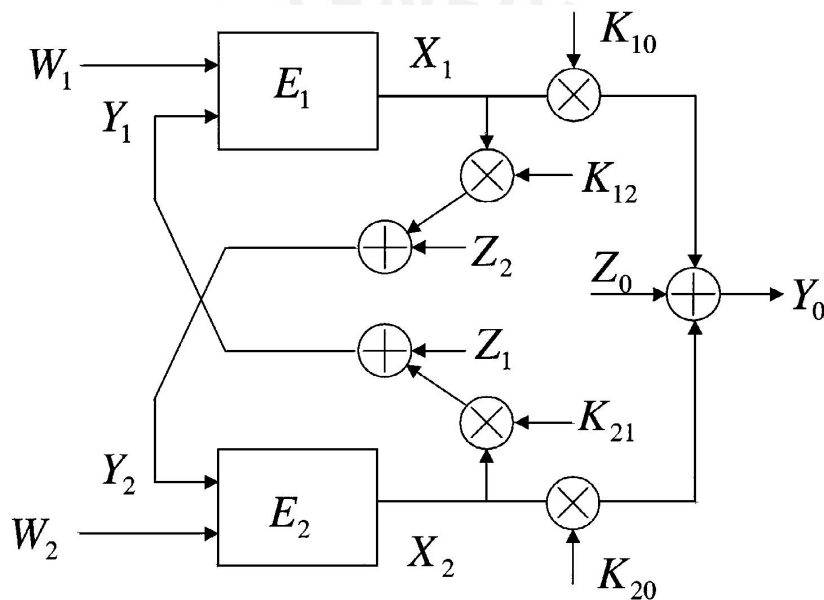


Fig. 1.3: Modelo de Canal.

el usuario 2, respectivamente, durante el periodo de símbolo. Además,  $X_i(t)$  es la señal transmitida por el usuario  $i$  sobre la restricción de potencia  $P_i$ , con  $i = 1, 2$ . Las variables aleatorias  $Z_i(t)$  representan los ruidos gaussianos blancos con altura espectral  $\mathcal{N}_i/2$  para  $i = 0, 1, 2$ , y los coeficientes de desvanecimiento  $K_{ij}$  son distribuidos de acuerdo con una distribución Rayleigh con media  $\xi_{ij}$ . Suponemos también que la BS puede estimar perfectamente las variaciones de  $K_{10}$  y  $K_{20}$ , que el usuario 1 puede estimar perfectamente  $K_{21}$  y que el usuario 2 puede estimar  $K_{12}$ .

Debe tenerse en cuenta que una pregunta importante es el grado de información del estado del canal disponible en los transmisores. Se asume que los usuarios conocen los coeficientes

de desvanecimiento inter-usuarios, así la pregunta se reduce a cuánto ellos saben sobre los coeficientes de desvanecimiento entre ellos y la BS. Consideramos tres casos en el conocimiento de  $K_{i0}$ : usuario  $i$  no sabe nada sobre  $K_{i0}$  además de sus estadísticas; usuario  $i$  conoce la fase de  $K_{i0}$  pero no su amplitud; o el usuario  $i$  conoce tanto la fase y amplitud de  $K_{i0}$ . Los usuarios pueden obtener información sobre  $K_{i0}$  de dos maneras. Primero, puede haber *feedback* de la BS. En segundo lugar, el sistema puede estar operando en modo TDD (*time-division duplex*), o sea, el *uplink* y *downlink* comparten el mismo ancho de banda y son separados por división de tiempo.

Si los transmisores conocen la amplitud y la fase del desvanecimiento, teóricamente se podría emplear algún tipo de *waterfilling*, o sea, alojar su potencia de acuerdo con los diferentes estados de desvanecimiento, manteniendo aún la restricción de potencia media [10], [11], [12]. En tanto, la unidad móvil tiene limitaciones en los recursos de potencia, lo que torna la asignación de potencia dentro de los diferentes estados de desvanecimiento casi inviable. Por esta razón, así como para intentar mantener las unidades móviles tan simple cuanto posible, vamos a considerar que el usuario  $i$  no conoce la amplitud de  $K_{i0}$ .

Cuando los transmisores tienen conocimiento apenas de la fase del desvanecimiento entre ellos y la BS, se argumenta que lo máximo que ellos pueden hacer para explotar ese conocimiento es transmitir una señal que compensa esa fase. Así, las señales transmitidas por los compañeros son combinados coherentemente en el receptor. Esto, efectivamente permite que los usuarios aprovechen el "*beamforming*", como se discute en [13]. Lo mismo vale para el parámetro de desvanecimiento inter-usuario. Como resultado, los parámetros de atenuación  $K_{ij}$  pueden, en este caso, ser tratados como variables aleatorias reales con una distribución Rayleigh.

Conocimiento de fase en los transmisores, es una suposición que vamos usar en la mayor parte de este trabajo. Demostrar las ventajas de la cooperación de usuarios sobre el presupuesto de no conocimiento de fase en los transmisores, exige un modelo de sistema más complejo, lo que dificultará la exposición clara de los beneficios de la cooperación de usuarios. En tanto, en [2] se muestra que la cooperación continúa siendo útil, aún cuando los transmisores no tengan ninguna información de la fase.



## 1.5. Cooperación sobre la óptica de la Teoría de la Información

En esta parte, presentamos un análisis de cooperación de usuarios basados en conceptos de teoría de la información. Esto es importante no sólo para comprender los límites de cualquier sistema propuesto de cooperación de usuarios, sino también para obtener una visión de como un esquema de cooperación de usuarios debe ser estructurado. Por tanto, para una mejor comprensión del tema de cooperación de usuarios, presentamos los resultados mas importantes del análisis de la región de capacidad y de la cobertura celular.

### 1.5.1. Región de Capacidad

En esta sección presentaremos una región alcanzable para el canal ilustrado en la figura 1.3. El modelo matemático que usamos es una versión en tiempo discreto del modelo descrito en las ecuaciones 1.1 - 1.3, y es dada por

$$Y_0 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0 \quad (1.4)$$

$$Y_1 = K_{21}X_2 + Z_1 \quad (1.5)$$

$$Y_2 = K_{12}X_1 + Z_2 \quad (1.6)$$

con  $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_0)$ ,  $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_1)$  y  $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \Xi_2)$ . En general, asumimos que  $\Xi_1 = \Xi_2$ , el sistema es causal y la transmisión es hecha a través de bloques de longitud  $n$ , por eso la señal de un usuario en el tiempo  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , puede ser expresado como  $X_1(W_1, Y_1(j-1), Y_1(j-2), \dots, Y_1(1))$ , donde  $W_1$  es el mensaje que el usuario 1 desea transmitir para la BS en aquel determinado bloque. De la misma forma, para el usuario 2, tenemos  $X_2(W_2, Y_2(j-1), Y_2(j-2), \dots, Y_2(1))$ .

La estrategia de cooperación empleada por los dos usuarios se basa en la codificación por superposición de bloques de Markov [14] y *backward decoding* [15], [16]. El sistema usa un gran número de bloques  $B$ , cada uno de longitud  $n$ . En el bloque  $b$ ,  $1 < b < B$  los transmisores envían informaciones suficientes para el receptor, de modo que sea posible resolver cualquier incertidumbre del bloque anterior  $b-1$ . Sobrepuesta a esta información, existe una información nueva e independiente, que cada transmisor desea enviar al receptor. La tasa de esta nueva información es suficientemente pequeña para que cada transmisor pueda determinar el mensaje

del compañero a través de la cooperación. Aunque la tasa de transmisión de la nueva información sea muy grande para ser una transmisión confiable, el receptor será capaz de restringir el conjunto de posibles mensajes transmitidos a una lista considerablemente menor de mensajes típicos que con alta probabilidad irá contener el mensaje correcto  $W$ . En el final del bloque  $b$ , el receptor estima el bloque  $b - 1$  de forma confiable y tiene alguna incertidumbre (para ser resuelto en el bloque  $b + 1$ ) sobre la nueva información sobrepuesta. También en el final del bloque  $b$ , cada transmisor tiene conocimiento completo de los mensajes del otro, permitiendo así a los transmisores cooperar para resolver la incertidumbre residual del bloque  $b$  en el bloque  $b + 1$ .

Se asume que el móvil 1 divide su información  $W_1$  en dos partes:  $W_{10}$ , a ser enviado directamente para la BS, y  $W_{12}$  a ser enviado para la BS a través del móvil 2. El móvil 1 en seguida estructura su señal de transmisión, de modo que sea capaz de enviar las informaciones anteriores, bien como algunas informaciones adicionales de cooperación para la BS. Esto es hecho de acuerdo con

$$X_1 = X_{10} + X_{12} + S_1 \quad (1.7)$$

y divide su potencia total de acuerdo con

$$P_1 = P_{10} + P_{12} + P_{S_1} \quad (1.8)$$

donde  $S_1$  se refiere a la parte de la señal que carga información con cooperación. Así, para  $X_{10}$  es atribuida una potencia  $P_{10}$  y es usada para enviar  $W_{10}$  a una tasa  $R_{10}$  directamente para la BS, para  $X_{12}$  es atribuida una potencia de  $P_{12}$  y es usada para enviar  $W_{12}$  para el usuario 2 a una tasa  $R_{12}$ , y para  $S_1$  es atribuida una potencia de  $P_{S_1}$  y es usada para enviar información con cooperación para la BS. Nótese que la tasa de transmisión de  $W_{12}$ , que es  $R_{12}$ , y la potencia atribuida a  $W_{12}$ , que es  $P_{12}$ , deben ser tales que  $W_{12}$  pueda ser decodificada perfectamente por el móvil 2. Esta reconstrucción perfecta en el compañero es la base para la cooperación. El móvil 2 estructura su señal de transmisión  $X_2$  y divide su potencia total  $P_2$  de forma similar.

Una región alcanzable con cooperación de usuarios, es obtenida, primero, considerando la estrategia de cooperación mencionada antes con los factores de atenuación constantes, y segundo, incorporando la aleatoriedad usada en [17]. Se supone que cada bloque de longitud  $n$  es suficientemente grande para observar la ergodicidad de las distribuciones de desvanecimiento.

*Teorema 1:* Una región alcanzable para el sistema dado en las ecuaciones 1.4-1.6 es el

cierre de la envolvente convexa de todos los pares de tasa  $(R_1, R_2)$  tales que  $R_1 = R_{10} + R_{12}$  y  $R_2 = R_{20} + R_{21}$  con

$$R_{12} < E \left\{ C \left( \frac{K_{12}^2 P_{12}}{K_{12}^2 P_{10} + \Xi_1} \right) \right\} \quad (1.9)$$

$$R_{21} < E \left\{ C \left( \frac{K_{21}^2 P_{21}}{K_{21}^2 P_{20} + \Xi_2} \right) \right\} \quad (1.10)$$

$$R_{10} < E \left\{ C \left( \frac{K_{10}^2 P_{10}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (1.11)$$

$$R_{20} < E \left\{ C \left( \frac{K_{20}^2 P_{20}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (1.12)$$

$$R_{10} + R_{20} < E \left\{ C \left( \frac{K_{10}^2 P_{10} + K_{20}^2 P_{20}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (1.13)$$

$$R_{10} + R_{20} + R_{12} + R_{21} < E \left\{ C \left( \frac{K_{10}^2 P_1 + K_{20}^2 P_2 + 2K_{10}K_{20}\sqrt{P_{S_1}P_{S_2}}}{\Xi_0} \right) \right\} \quad (1.14)$$

para potencias que satisfacen  $P_1 = P_{10} + P_{12} + P_{S_1}$ ,  $P_2 = P_{20} + P_{21} + P_{S_2}$ . La función  $C(x) = (1/2) \log(1+x)$  es la capacidad de un canal con ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN - *additive white Gaussian noise*) con relación señal-ruido (SNR - *signal-to-noise ratio*)  $x$  y  $E \{ \cdot \}$  denota la esperanza. La prueba de este teorema es semejante al del teorema presentado en [18].

La región alcanzable para el sistema de cooperación propuesto por Sendonaris y la región de capacidad para un sistema sin cooperación, son mostrados en las figuras 1.4 y 1.5, para diferentes escenarios de calidad de canal. Para el caso de no cooperación, los usuarios ignoran las señales  $Y_1$  y  $Y_2$ , por tanto, este es equivalente al caso de una región de capacidad de canal de múltiple acceso. También están incluidos en estas figuras la región de cooperación sobre la suposición de un canal inter-usuario sin ruido ( $\Xi_1 = \Xi_2 = 0$ ). Esto es conocido como cooperación ideal o total, y es usado, principalmente, como un límite superior para el desempeño de cualquier esquema de cooperación.

La figura 1.4 muestra que cuando los canales de los usuarios para la BS tienen calidad similar, o sea,  $K_{10}$  y  $K_{20}$  tienen la misma media, y el canal entre los usuarios es mejor ( $K_{12}$  tienen mayor media), el esquema de cooperación aumenta considerablemente la región de capacidad.

Cuando el canal usuario-BS experimenta medias de desvanecimiento, diferentes para cada usuario, la cooperación nuevamente aumenta la región alcanzable, como es mostrado en la figura 1.5. En este caso, el usuario con mas desvanecimiento se beneficia con la cooperación. El punto de tasa igual ( $R_1 = R_2$ ) o el punto de suma de máxima tasa ( $R_1 + R_2$ ) aumenta

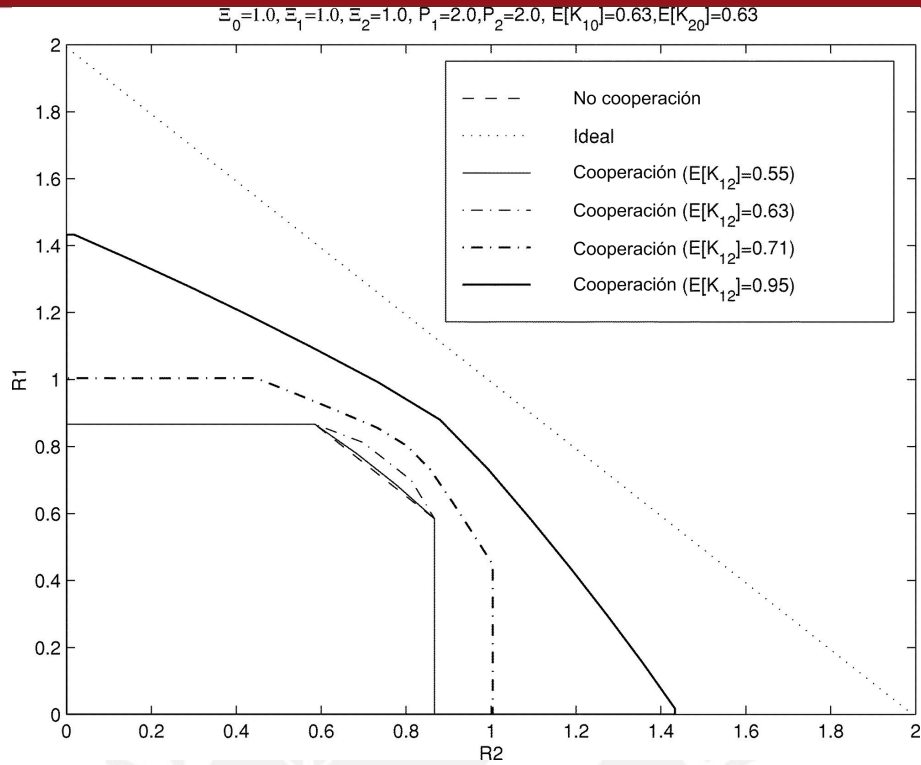


Fig. 1.4: Región de capacidad cuando los dos usuarios enfrentan canales estadísticamente equivalentes con relación a la BS.

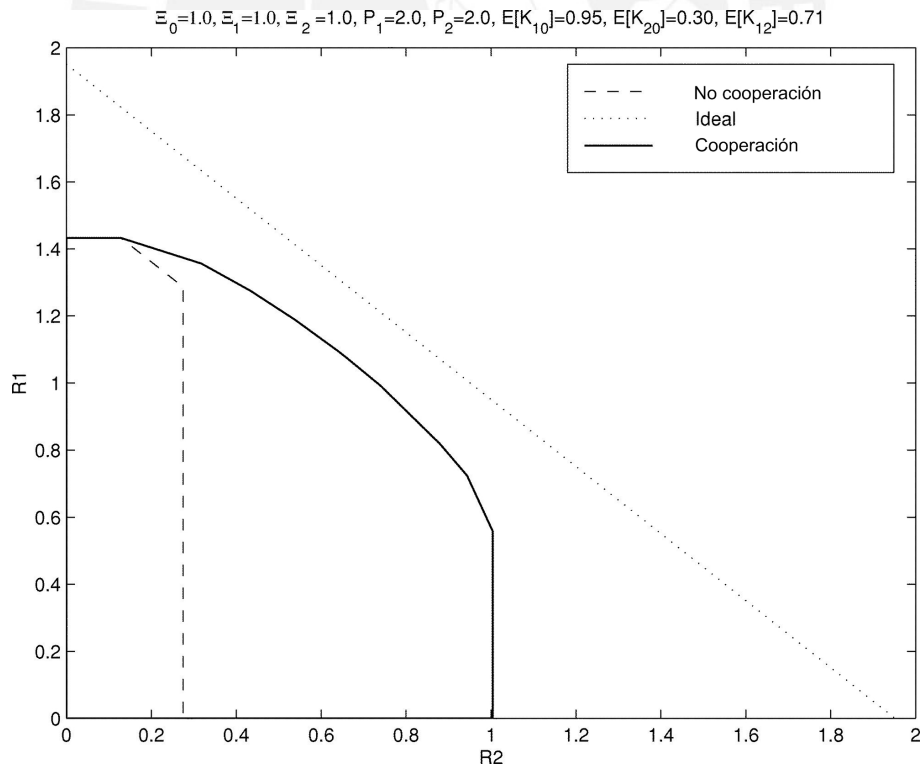


Fig. 1.5: Región de capacidad cuando los dos usuarios enfrentan canales estadísticamente diferentes con relación a la BS.

considerablemente con la cooperación.

### 1.5.2. Cobertura Celular

En esta subsección, son presentados cálculos simples que relacionan el aumento de capacidad por cuenta de la cooperación con el aumento equivalente, en términos de cobertura celular, a fin de obtener una medida cuantitativa de los beneficios de usar un esquema de cooperación.

Asumimos que el móvil está a una distancia  $d$  km de la BS. Sea  $P_{TX}$  la potencia media transmitida por el móvil y  $P_{RX}$  la potencia media recibida por la BS en decibeles

$$P_{RX} = P_{TX} - PL(d) \quad (1.15)$$

donde  $PL(d)$  es la pérdida media del camino a una distancia  $d$  km. Un modelo común de  $PL(d)$  es el modelo Hata [19]

$$PL(d) = H_1 + H_2 \log d \quad (1.16)$$

donde  $H_1$  y  $H_2$  son funciones de la altura de la antena transmisora y receptora, de la frecuencia de la portadora y del tipo de ambiente (por ejemplo, urbano o rural). Por eso

$$\log d = \frac{1}{H_2} (P_{TX} - P_{RX} - H_1) \quad (1.17)$$

Para una  $P_{RX}$ , el máximo  $d$  es alcanzado cuando  $P_{TX}$  está en su máximo, denotado por  $P_{TX}^{MAX}$ . Esta es la potencia máxima que el móvil puede transmitir. Así

$$\log d_{max}(P_{RX}) = \frac{1}{H_2} (P_{TX}^{MAX} - P_{RX} - H_1) \quad (1.18)$$

Vamos a suponer que dos esquemas de transmisión diferentes, requieren potencia media diferentes recibidas para operar con éxito. Esto es, el esquema 1 requiere  $P_{RX}^{(1)}$  y el esquema 2 requiere  $P_{RX}^{(2)}$ . Se define  $\phi$  como la relación en decibeles

$$10 \log \phi = P_{RX}^{(1)} - P_{RX}^{(2)} \quad (1.19)$$

Utilizando la expresión anterior y la ecuación 1.18 obtenemos

$$\log d_{max}^{(1)} - \log d_{max}^{(2)} = \frac{1}{H_2} (P_{RX}^{(2)} - P_{RX}^{(1)}) = -\frac{10}{H_2} \log \phi \quad (1.20)$$

resultando

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \phi^{-10/H_2} \quad (1.21)$$

Un conjunto típico de valores para  $H_1$  y  $H_2$  es  $H_1 = 17,3$  y  $H_2 = 33,8$ , obtenidos para un ambiente de ciudad de tamaño medio [19], con una frecuencia portadora de 900 MHz, altura de la antena transmisora de 50 m, altura de la antena receptora de 1 m y una ganancia de antena de 6 dBi.

Así, la relación de cobertura del esquema 1 contra el esquema 2, en función de la proporción de la potencia media recibida es

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \phi^{-1/3,38} \quad (1.22)$$

Volviendo para los canales con desvanecimiento y cooperación, cuando dos móviles enfrentan un canal estadísticamente semejante y usan potencia igual, el esquema sin cooperación alcanza la capacidad suma obedeciendo la siguiente desigualdad:

$$R_{10} + R_{20} < E \left[ \frac{1}{2} \log \left( 1 + (K_{10}^2 + K_{20}^2) \frac{P}{\Xi_0} \right) \right] \quad (1.23)$$

Se define  $R_{sum}$  como el límite superior de  $R_{10} + R_{20}$  y  $A = E[K_{10}^2 + K_{20}^2]/\Xi_0$ . Al evaluar numéricamente  $R_{sum}$ , usando la distribución Rayleigh para  $K_{10}$  y  $K_{20}$  sobre el intervalo  $E[K_{10}], E[K_{20}] \in (0, 100]$ , se puede ver que una buena aproximación para  $R_{sum}$  es

$$R_{sum} \approx \frac{1}{2} \log(1 + \mu AP) \quad (1.24)$$

donde  $\mu$  es aproximadamente igual a 0.8 cuando  $AP$  está en el intervalo de  $[1,5 - 4,5]$ . Debemos notar que esta es apenas una aproximación de  $R_{sum}$ , pero es adecuada para mostrar en la tabla 1.1 el aumento de la capacidad.

Supongamos ahora que la estrategia con cooperación ofrece un aumento en la capacidad suma, sobre una estrategia sin cooperación, para una potencia dada  $P$ . Podemos optar por aumentar la potencia utilizada sobre un esquema sin cooperación para  $P'$ , a fin de alcanzar la



$E[K_{12}]$	Aumento en capacidad suma	Aumento en área de cobertura	Aumento en área de cobertura (simulación)
0.71	11.9 %	11.9 %	12.2 %
0.95	21.3 %	21.3 %	22.0 %

Tab. 1.1: Valores de aumento obtenidos debido al uso de cooperación de usuarios.

misma capacidad suma como en el caso del sistema con cooperación. Así se tiene que:

$$\frac{1}{2} \log (1 + \mu AP') = \beta \frac{1}{2} \log (1 + \mu AP) \quad (1.25)$$

donde  $\beta \geq 1$ . Esto implica en

$$\frac{P'}{P} = \frac{(1 + \mu AP)^\beta - 1}{\mu AP} \quad (1.26)$$

Combinando 1.26 con la ecuación 1.22 y notando que ahora  $\phi = P/P'$ , obtenemos

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} = \left( \frac{(1 + \mu AP)^\beta - 1}{\mu AP} \right)^{1/3,38} \quad (1.27)$$

donde el esquema 1 denota cooperación, el esquema 2 no cooperación,  $\mu \approx 0,8$ ,  $A = E[K_{10}^2 + K_{20}^2]/\Xi_0$  y  $P$  es la potencia media recibida por cooperación.

El escenario representado en la figura 1.4, considera un canal simétrico con  $\Xi = 1$ ,  $P = 2$  y  $E[K_{10}] = E[K_{20}] = 0,63$ . Esto significa que  $AP = 2,022$ . Así, para estos parámetros, el aumento de la cobertura celular, en función de  $\beta$  es dada por

$$\frac{d_{max}^{(1)}}{d_{max}^{(2)}} \approx \left( \frac{2,62^\beta - 1}{1,62} \right)^{1/3,38} \quad (1.28)$$

La descripción anterior se refiere al aumento del radio de la célula. El aumento del área de cobertura es dada por el cuadrado del aumento del radio de la célula. Por eso tenemos

$$\text{Aumento del área de cobertura} \approx \left( \frac{2,62^\beta - 1}{1,62} \right)^{2/3,38} \quad (1.29)$$

Puede ser demostrado, analíticamente, que para  $\beta$  próximo de 1 (situación observada en la figura 1.4), la expresión anterior es aproximadamente igual a  $\beta$ . Cálculos numéricos muestran que, de hecho, la aproximación anterior es válida para cualquier valor de  $AP$  en el intervalo

de  $[1,5 - 4,5]$ . Así, un aumento porcentual dado en la capacidad, es equivalente al aumento en el mismo porcentaje en el área de cobertura, y aproximadamente la mitad de ese porcentaje, corresponde al aumento en el radio de la célula. Así, por ejemplo, un aumento de 20 % en la capacidad, es equivalente a un aumento de 20 % en el área de cobertura y a un aumento de 10 % en el radio de la célula.

Aunque los cálculos anteriores utilicen algunas aproximaciones, los resultados son bastante precisos. Una muestra de tales resultados son presentados en la tabla 1.1, donde se muestra claramente que para dos valores diferentes de  $E[K_{12}]$ , el aumento de capacidad y cobertura, es porcentualmente el mismo, y en cuanto el valor de  $E[K_{12}]$  se aproxima a 1, el aumento es mayor. Además de eso, los valores obtenidos con las aproximaciones no difieren mucho de los obtenidos por simulación, el cual valida los cálculos.



## Capítulo 2

# Implementación CDMA

En este capítulo se describe la implementación del concepto de cooperación de usuarios, la cual está basada en un sistema CDMA convencional propuesto en [2]. Cabe mencionar que, en cuanto nos concentramos en CDMA, otras estructuras, como múltiplo acceso por división en frecuencia (FDMA - *frequency division multiple access*) y múltiplo acceso por división en el tiempo (TDMA - *time division multiple access*), pueden ser igualmente adecuados; cada uno con sus propias ventajas y limitaciones.

Considere un sistema CDMA, en que cada usuario tiene un código asociado. Vamos a suponer también que los códigos de los usuarios son ortogonales y que el tiempo de coherencia del canal sea  $L$  símbolos, o sea, todos los parámetros de desvanecimiento permanecen inalterados durante los  $L$  períodos. El tiempo de cooperación ocurre en los  $2L_c$  símbolos, siendo que las señales transmitidas pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= \begin{cases} a_{11}b_1^{(i)}c_1(t), & i = 1, 2, \dots, L_n \\ a_{12}b_1^{(L_n+1+i)/2}c_1(t), & i = L_n + 1, L_n + 3, \dots, L - 1 \\ a_{13}b_1^{(L_n+i)/2}c_1(t) + a_{14}\hat{b}_2^{(L_n+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 2, L_n + 4, \dots, L \end{cases} \\
 X_2(t) &= \begin{cases} a_{21}b_2^{(i)}c_2(t), & i = 1, 2, \dots, L_n \\ a_{22}b_2^{(L_n+1+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 1, L_n + 3, \dots, L - 1 \\ a_{23}\hat{b}_1^{(L_n+i)/2}c_1(t) + a_{24}b_2^{(L_n+i)/2}c_2(t), & i = L_n + 2, L_n + 4, \dots, L \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $L_n = L - 2L_c$ ,  $b_j^{(i)}$  es el  $i$ -enésimo bit del usuario  $j$ ,  $\hat{b}_j^{(i)}$  es la estimación del compañero del  $i$ -enésimo bit del usuario  $j$ , y  $c_j(t)$  es el código de ensanchamiento del usuario  $j$ . Los parámetros

$a_{ij}$  representan el esquema de asignación de potencia. Ellos deben mantener una restricción de potencia media que puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} (L_n a_{11}^2 + L_c (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2)) &= P_1 \\ \frac{1}{L} (L_n a_{21}^2 + L_c (a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2)) &= P_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

En los primeros períodos de símbolos  $L_n = L - 2L_c$  cada usuario transmite sus bits para la BS. Los demás periodos  $2L_c$ , son dedicados a la cooperación: periodos impares para transmitir sus bits tanto para el compañero y la BS; periodos pares para transmitir una combinación lineal de su propio bit y el bit estimado del compañero. Una ilustración gráfica de este esquema de cooperación es retratada en la figura 2.1 para el caso especial de  $L = 6$  y  $L_c = 2$ . En esencia, esos parámetros controlan el nivel de cooperación entre los usuarios. El objetivo ahora será proporcionar una expresión analítica para la probabilidad de error.

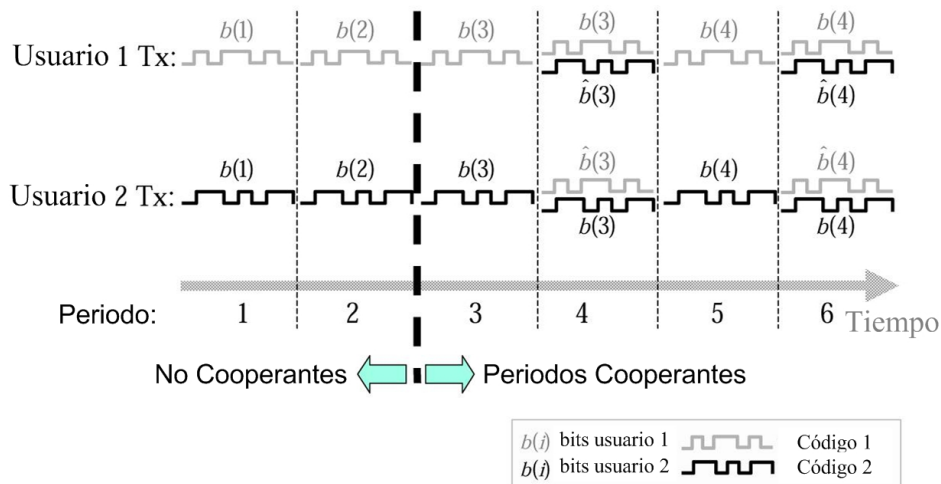


Fig. 2.1: Cómo la cooperación es implementada en un sistema CDMA convencional.

## 2.1. Cálculo de la probabilidad de error

De acuerdo con el modelo del sistema mostrado en la figura 2.1, podemos observar dos partes: una con cooperación y otra sin cooperación. Así, tenemos dos expresiones para la probabilidad de error. En el artículo de Sendonaris se calcula las probabilidades de error, asociados con este esquema, dado  $L_c$ ,  $a_{ij}$  y  $K_{ij}$ . Como tenemos un sistema CDMA, asumimos que todas las señales serán escritas como vectores de longitud  $N_c$ , donde  $N_c$  es el *spreading gain*

de un sistema CDMA. También vamos a considerar por simetría que las expresiones para la probabilidad de error para los dos usuarios son las mismas.

### 2.1.1. Tasa de error para períodos sin cooperación

Durante los períodos  $L - 2L_c$  sin cooperación, la señal transmitida por el usuario 1 es  $X_1 = a_{11}b_1c_1$  y es recibida en la BS de acuerdo con  $Y_0 = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0$ . Así, la estimación del usuario 1 durante ese período esta dada por

$$\hat{b}_1 = \text{sign} \left( \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0 \right) = \text{sign}(K_{10}a_{11}b_1 + n_0) \quad (2.3)$$

donde  $n_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$  y donde  $\sigma_0^2 = N_0/(2T_c)$ ,  $T_c$  es el período de bit y  $N_0/2$  es la altura espectral de  $Z_0(t)$ . Entonces la probabilidad de error esta dada por

$$P_{e1} = Q \left( K_{10}a_{11} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \right) \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Tasa de error para períodos con cooperación

Durante los períodos  $2L_c$  de cooperación tenemos una distinción entre los períodos “ímpar” y “par”. Durante el período “ímpar”, cada usuario envía apenas su propio bit, que es recibido y detectado por el compañero, así como por la BS. La señal transmitida por el usuario 1 es  $X_1 = a_{12}b_1c_1$  y es recibida por el compañero de acuerdo con  $Y_2 = K_{12}X_1 + Z_2$  y por la BS de acuerdo con  $Y_0^{odd} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{odd}$ . Así, una excelente estimación del compañero de  $b_1$  es dada por  $\hat{b}_1 = \text{sign} \left( (1/N_c) c_1^T Y_2 \right)$ , resultando en una probabilidad de error de bit igual a

$$P_{e12} = Q \left( K_{12}a_{12} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_2} \right) \quad (2.5)$$

donde  $P_{e12}$  es la probabilidad de  $b_1$  estimado por el usuario 2,  $\sigma_2^2 = N_2/(2T_c)$ ,  $T_c$  es el período de chip, y  $N_2/2$  es la altura espectral de  $Z_2(t)$ .

Por otro lado, la BS hace una fácil decisión a través del cálculo

$$y_{odd} = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^{odd} \quad (2.6)$$

donde  $Y_0^{odd} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{odd}$ .

Durante el período “par”, cada usuario envía una señal de cooperación para la BS, de acuerdo con  $Y_0^{even} = K_{10}X_1 + K_{20}X_2 + Z_0^{even}$  y extrae una fácil decisión a través del cálculo

$$y_{even} = \frac{1}{N_c} c_1^T Y_0^{even} \quad (2.7)$$

Las decisiones conjuntas de la BS para el usuario 1 son dadas por

$$\begin{aligned} y_{odd} &= K_{10}a_{12}b_1 + n_{odd} \\ y_{even} &= K_{10}a_{13}b_1 + K_{20}a_{23}\hat{b}_1 + n_{even} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $n_{odd}$  y  $n_{even}$  son estadísticamente independientes y ambos distribuidos de acuerdo con  $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2/N_c)$ .

Con lo anteriormente mostrado, Sendonaris concluye que el detector óptimo de  $b_1$ , mostrado en [2], que minimiza la probabilidad de error basado en  $y_{odd}$  y  $y_{even}$  es bastante complejo, y que no existe una expresión cerrada para la probabilidad de error resultante. Esto hace que el análisis del sistema propuesto sea factible sólo a través de simulaciones computacionales.

Afortunadamente, una forma de evitar esta situación es considerando un detector sub-óptimo, al cual se le denominará detector  $\lambda$ -MRC, y estará dado por:

$$\hat{b}_1 = \text{sign} \left( \begin{bmatrix} K_{10}a_{12} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{bmatrix} y \right) \quad (2.9)$$

donde  $y = [y_{odd} \ y_{even}]^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$  y  $\lambda \in [0,1]$  es una medida de la confianza de la BS en el bit estimado por el compañero.

Se considera a este detector  $\lambda$ -MRC, bastante simple y que no demanda mucho esfuerzo computacional. Además, tiene una expresión cerrada para el BER resultante, posibilitando el análisis del sistema. Note que el mejor  $\lambda$ , que minimiza la tasa de error, es una función de las condiciones del canal actual.

Entonces, la probabilidad de error para este detector, dado un  $\lambda$ , es mostrado en [2] y es dada por:

$$P_{e_1} = (1 - P_{e_{12}}) Q \left( \frac{v_\lambda^T v_1}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) + P_{e_{12}} Q \left( \frac{v_\lambda^T v_2}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} \right) \quad (2.10)$$

donde  $v_\lambda = \begin{bmatrix} K_{10}a_{12} & \lambda(K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{bmatrix}^T$ ,  $v_1 = \begin{bmatrix} K_{10}a_{12} & (K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23}) \end{bmatrix}^T \sqrt{N_c}/\sigma_0$ ,



$$y \ v_2 = \left[ K_{10}a_{12} \quad (K_{10}a_{13} - K_{20}a_{23}) \right]^T \sqrt{N_c}/\sigma_0.$$

Idealmente, la BS preferiría usar el valor de  $\lambda$  que minimiza la probabilidad de error, pero en la práctica, eso no ocurre, debido a imperfecciones en el *feedback* de los usuarios sobre el valor de  $P_{e_{12}}$  o debido a errores residuales en un método adaptativo para estimar el  $\lambda$  ideal.



## Capítulo 3

# Probabilidad de error de bit en Canales con Desvanecimiento Rayleigh

Nuestro objetivo ahora es obtener una expresión para la probabilidad de error de bit cuando los coeficientes de desvanecimiento correspondan a una distribución Rayleigh. En tal sentido, en este capítulo se obtendrá una expresión exacta y una aproximada para la probabilidad de error de bit media considerando este tipo de desvanecimiento [20] para el canal inter-usuario, y para el canal directo entre los usuarios y la BS. Vale la pena mencionar que para los siguientes cálculos utilizaremos las ecuaciones descritas en el capítulo 2.

### 3.1. Cálculos con Desvanecimiento Rayleigh

La ecuación 2.10 es válida apenas para un canal fijo (invariante en el tiempo), es decir, los coeficientes de desvanecimiento  $K_{ij}$  permanecen inalterados durante los períodos que componen el sistema de cooperación. Sin embargo, sabemos que el desvanecimiento por multitrajectoria, influencia de modo significativo el desempeño de las comunicaciones inalámbricas y es la causa de los mayores daños en la recuperación de la información. Este desvanecimiento obedece a una función de distribución de probabilidad Rayleigh.

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución Rayleigh es una distribución de probabilidad continua. La distribución Rayleigh es frecuentemente observada cuando la magnitud de un vector global está relacionado a sus componentes direccionales. La función densidad de

probabilidad Rayleigh es dada por

$$f(x; \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \quad x \geq 0$$

donde el parámetro  $\alpha > 0$ .

### 3.1.1. Probabilidad de error de bit Exacta

En primer lugar, consideremos  $K_{12}$  una distribución Rayleigh con parámetro  $\alpha_{12}$ . Entonces, la probabilidad de  $b_1$  estimado por el usuario 2 descrita en 2.5 resulta en

$$\bar{P}_{e_{12}} = E[P_{e_{12}}] = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) \quad (3.1)$$

donde  $\gamma_{12}$  es la relación señal-ruido media, definida como

$$\gamma_{12} = \frac{2(a_{12}\alpha_{12})^2 N_c}{\sigma_2^2} \quad (3.2)$$

De la ecuación 2.10, podemos definir dos variables aleatorias  $U_1$  e  $U_2$ , respectivamente como

$$\sqrt{U_1} = \frac{v_\lambda^T v_1}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} = \frac{\left( (K_{10}a_{12})^2 + \lambda (K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2 \right) \sqrt{N_c}}{\left( \sqrt{(K_{10}a_{12})^2 + \lambda^2 (K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2} \right) \sigma_0} \quad (3.3)$$

$$U_2 = \frac{v_\lambda^T v_2}{\sqrt{v_\lambda^T v_\lambda}} = \frac{\left( (K_{10}a_{12})^2 + \lambda \left( (K_{10}a_{13})^2 - (K_{20}a_{23})^2 \right) \right) \sqrt{N_c}}{\left( \sqrt{(K_{10}a_{12})^2 + \lambda^2 (K_{10}a_{13} + K_{20}a_{23})^2} \right) \sigma_0} \quad (3.4)$$

Ya que  $K_{10}$  y  $K_{20}$  son variables aleatorias que asumen valores siempre positivos, la distribución mostrada en la ecuación 3.3 también será siempre positiva, sin embargo, lo mismo no ocurrirá en la distribución definida en la ecuación 3.4, ya que tenemos valores negativos en el numerador. Teniendo esto en cuenta, podemos reescribir la ecuación 2.10 como

$$P_{e_1} = (1 - P_{e_{12}}) Q\left(\sqrt{U_1}\right) + P_{e_{12}} Q(U_2) \quad (3.5)$$

Para obtener la probabilidad de error de bit, debemos calcular la media de  $P_{e_1}$ , sobre la

función densidad de probabilidad de  $U_1$  y  $U_2$  [5]. Así, tenemos que evaluar la siguiente integral

$$P_{ef} = (1 - \bar{P}_{e12}) \int_0^\infty Q(\sqrt{u_1}) f_{U_1}(u_1) du_1 + \bar{P}_{e12} \int_{-\infty}^\infty Q(u_2) f_{U_2}(u_2) du_2 \quad (3.6)$$

Para calcular  $P_{ef}$ , tenemos inicialmente que determinar las distribuciones de  $U_1$  y  $U_2$ . Dada la complejidad del problema, se considerara asignación de potencia uniforme, o sea,  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ . Por tanto, con esta suposición las variables aleatorias  $U_1$  y  $U_2$  pueden ser escritas como

$$U_1 = \frac{a^2 \left( K_{10}^2 + \lambda (K_{10} + K_{20})^2 \right)^2 N_c}{\left( K_{10}^2 + \lambda^2 (K_{10} + K_{20})^2 \right) \sigma_0^2} \quad (3.7)$$

$$U_2 = \frac{a \left( K_{10}^2 + \lambda (K_{10}^2 - K_{20}^2) \right) \sqrt{N_c}}{\left( \sqrt{K_{10}^2 + \lambda^2 (K_{10} + K_{20})^2} \right) \sigma_0} \quad (3.8)$$

La función de distribución acumulada (CDF - *cumulative distribution function*) y la función densidad de probabilidad (PDF - *probability density function*) de  $U_1$  pueden ser escritas respectivamente como

$$F_{U_1}(u_1) = \int \int_{k_{10}, k_{20} \in D_{u_1}} f_{U_1}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} \quad (3.9)$$

$$f_{U_1}(u_1) = \frac{dF_{U_1}(u_1)}{du_1} \quad (3.10)$$

En este caso,  $D_{u_1}$  es la región del plano  $K_{10} \times K_{20}$  donde

$$\frac{a^2 \left( k_{10}^2 + \lambda (k_{10} + k_{20})^2 \right)^2 N_c}{\left( k_{10}^2 + \lambda^2 (k_{10} + k_{20})^2 \right) \sigma_0^2} \leq u_1 \quad (3.11)$$

La figura 3.1 muestra la superficie generada por  $U_1$ , descrita en la ecuación 3.7 y el plano  $U_1 = z$ , cuya intersección es semejante a una elipse.

En este contexto tenemos

$$F_{U_1}(u_1) = \int_{k_{10}=0}^{a(u_1)} \int_{k_{20}=0}^{b(u_1)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{20} dk_{10} \quad (3.12)$$

donde

$$a(u_1) = \sqrt{\frac{u_1 (\lambda_2)}{A_1 (\lambda_1)^2}} \quad (3.13)$$

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0.5, \lambda=1, \sigma_0=1, N_c=4, z=40$$

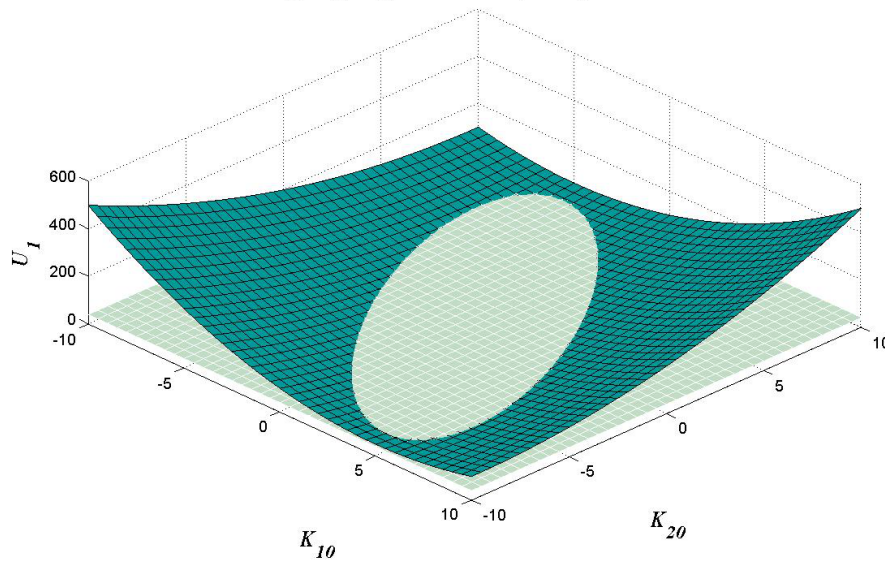


Fig. 3.1: La intersección de las dos superficies corresponde a la curva que limita  $D_{u_1}$ . En este caso, la curva es semejante a una elipse.

$$b(u_1) = \frac{\sqrt{2A_1\lambda^2 (B_1 - 2A_1k_{10}^2\lambda + u_1\lambda^2) - 2A_1k_{10}\lambda^2}}{2A_1\lambda^2} \quad (3.14)$$

$$A_1 = \frac{a^2 N_c}{\sigma_0^2} \quad (3.15)$$

$$B_1 = \sqrt{u_1\lambda^2 (u_1\lambda^2 - 4A_1k_{10}^2(\lambda - 1))} \quad (3.16)$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están descritas en el apéndice. Usando la regla de Leibnitz y sabiendo que  $K_{10}$  y  $K_{20}$  son distribuciones Rayleigh independientes, con parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente, es posible obtener la PDF de  $U_1$  como

$$f_{U_1}(u_1) = \int_{k_{10}=0}^{a(u_1)} \frac{\partial b(u_1)}{\partial u_1} \frac{b(u_1)}{\alpha_2^2} e^{-\frac{b(u_1)^2}{2\alpha_2^2}} \frac{k_{10}}{\alpha_1^2} e^{-\frac{k_{10}^2}{2\alpha_1^2}} dk_{10} \quad (3.17)$$

Infelizmente, debido a la complejidad de  $U_1$ , no es posible calcular una expresión analítica cerrada para  $f_{U_1}$ .

Con el fin de validar la expresión 3.17, la figura 3.2 muestra la PDF analítica obtenida por integración numérica y la PDF simulada de  $U_1$ . Observe la excelente concordancia entre ambos gráficos, validando así nuestra formulación.

Siguiendo un raciocinio semejante al cálculo de la PDF de  $U_1$ , vamos a encontrar ahora la CDF y la PDF de  $U_2$ . Las ecuaciones 3.9 y 3.10 son las mismas, la diferencia en este caso es la

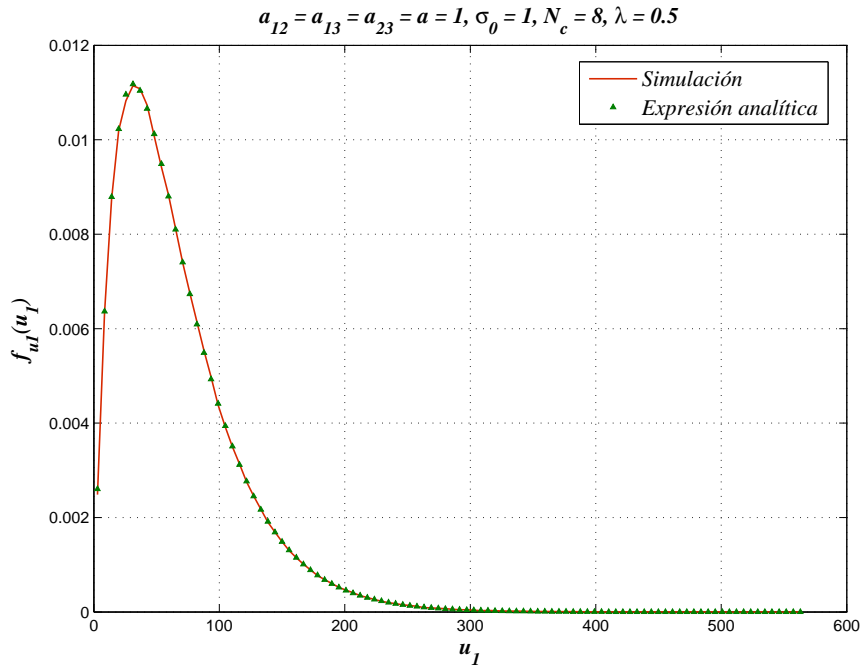


Fig. 3.2: Comparación entre la PDF analítica y la simulada de la variable aleatoria  $U_1$ .

región de integración  $D_{u_2}$ , dada por

$$\frac{a (k_{10}^2 + \lambda (k_{10}^2 - k_{20}^2)) \sqrt{N_c}}{\left( \sqrt{k_{10}^2 + \lambda^2 (k_{10} + k_{20})^2} \right) \sigma_0} \leq u_2 \quad (3.18)$$

La figura 3.3 muestra la superficie generada por  $U_2$  descrita en 3.8 y el plano  $U_2 = z$ , cuya intersección es semejante a una hipérbola.

Siendo así, a partir de la expresión 3.9 tenemos que la CDF de  $U_2$  puede ser escrita como

$$F_{U_2}(u_2) = \begin{cases} \int_{k_{20}=\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{b(u_2)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} & \text{se } u_2 < 0, \\ \int_{k_{20}=0}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{a(u_2)} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} & \text{se } u_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

donde

$$a(u_2) = \Re \left( \frac{1}{2A_2\lambda_1\sqrt{3}} \left( \sqrt{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{2}} \right) \right) \quad (3.20)$$

$$b(u_2) = \Re \left( \frac{1}{2A_2\lambda_1\sqrt{3}} \left( \sqrt{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{2}} \right) \right) \quad (3.21)$$



$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0.5, \lambda=1, \sigma_0=1, N_c=4, z=2$$

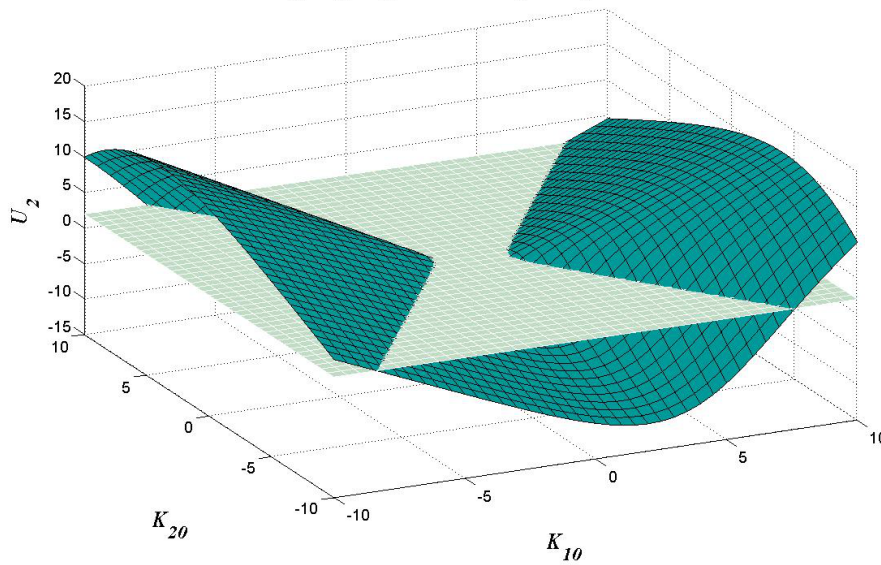


Fig. 3.3: La intersección de las dos superficies corresponde a la curva que limita  $D_{u_2}$ . En este caso, la curva es semejante a una hipérbola.

$$A_2 = \frac{a\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \quad (3.22)$$

$\Re(\cdot)$  denota la parte real de un número y,  $C_1$  y  $C_2$  están descritas en el apéndice. Similarmente, la PDF de  $U_2$  es dada por

$$f_{U_2}(u_2) = \begin{cases} \int_{\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} \frac{\partial b(u_2)}{\partial u_2} f_{K_{10}K_{20}}(b(u_2), k_{20}) dk_{20} & \text{if } u_2 < 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{\partial a(u_2)}{\partial u_2} f_{K_{10}K_{20}}(a(u_2), k_{20}) dk_{20} & \text{if } u_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

De la misma forma, como en el primer caso, no es posible calcular una expresión analítica para  $f_{U_2}$ . La figura 3.4 muestra la comparación entre la PDF analítica y la simulada de  $U_2$ . Una vez que la PDF de  $U_1$  y  $U_2$  fueron exactamente calculadas, es posible obtener la probabilidad de error média substituyendo 3.17 y 3.23 en la ecuación 3.6, resultando en la siguiente expresión

$$P_{ef} = \int_{u_1=0}^{\infty} \int_{k_{10}=0}^{a(u_1)} Q(u_1) \frac{\partial b(u_1)}{\partial u_1} \frac{b(u_1)}{\alpha_2^2} e^{-\frac{b(u_1)^2}{2\alpha_2^2}} \frac{k_{10}}{\alpha_1^2} e^{-\frac{k_{10}^2}{2\alpha_1^2}} dk_{10} du_1 + \\ \int_{u_2=-\infty}^0 \int_{k_{20}=\frac{|u_2|}{A_2}}^{\infty} Q(u_2) \frac{\partial b(u_2)}{\partial u_2} \frac{b(u_2)}{\alpha_1^2} e^{-\frac{b(u_2)^2}{2\alpha_1^2}} \frac{k_{20}}{\alpha_2^2} e^{-\frac{k_{20}^2}{2\alpha_2^2}} dk_{20} du_2 + \\ \int_{u_2=0}^{\infty} \int_{k_{20}=0}^{\infty} Q(u_2) \frac{\partial a(u_2)}{\partial u_2} \frac{a(u_2)}{\alpha_1^2} e^{-\frac{a(u_2)^2}{2\alpha_1^2}} \frac{k_{20}}{\alpha_2^2} e^{-\frac{k_{20}^2}{2\alpha_2^2}} dk_{20} du_2 \quad (3.24)$$

La figura 3.5 muestra el resultado de la simulación de la probabilidad de error de bit y el resultado

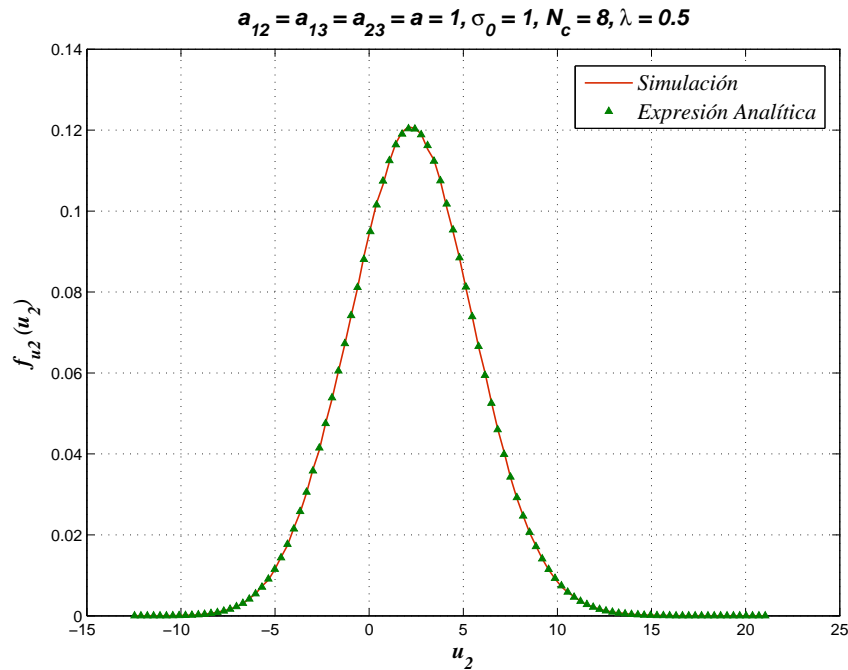


Fig. 3.4: Comparación entre la PDF analítica y la simulada de  $U_2$ .

de nuestra expresión teórica dada en 3.24, donde podemos observar que ambas curvas son casi coincidentes. De acuerdo con el capítulo 2, consideramos tres períodos de símbolos, cada uno de los períodos con una potencia média de  $P$ . Además de esto, visto que consideramos asignación de potencia uniforme, tenemos  $4a = 3P$ . También, por simplicidad, consideramos que  $E[K_{10}^2]$ ,  $E[K_{20}^2]$  y  $E[K_{12}^2]$  son idénticos y, por último, tenemos que  $\text{SNR} = P/\sigma_0^2$ .

A pesar que la expresión en 3.24 representa el resultado exacto para la probabilidad de error de bit média, en algunos casos, la complejidad de esta expresión puede ser prohibitiva. Por esta razón, encontraremos a continuación una excelente aproximación para la probabilidad de error de bit.

### 3.1.2. Probabilidad de error de bit Aproximada

El principal problema para obtener una expresión más simple, para la probabilidad de error de bit, es la simplificación de las PDF's de  $U_1$  y  $U_2$  dadas, respectivamente, en 3.3 y 3.4. Entonces, para tener expresiones más simples y facilitar los cálculos, asumiremos  $\lambda = 1$ ,  $\sigma_0 = 1$  y  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$ , encontraremos la PDF y después generalizaremos para cualquier valor de

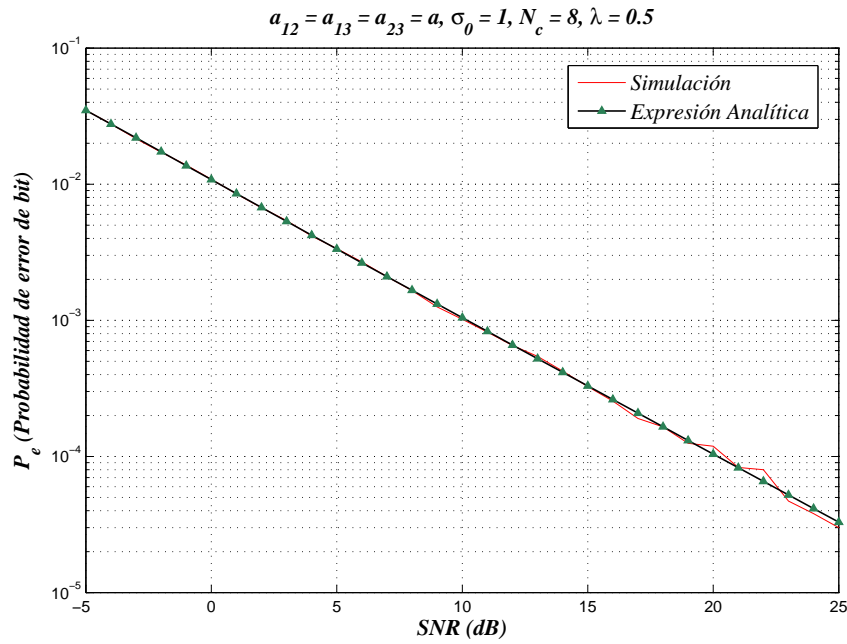


Fig. 3.5: Comparación entre la probabilidad de error de bit exacta y la simulada, adoptando el esquema de asignación de potencia uniforme.

las variables. Por tanto, las nuevas variables aleatorias estarán dadas por

$$U'_1 = N_c \left( K_{10}^2 + (K_{10} + K_{20})^2 \right) \quad (3.25)$$

$$U'_2 = \frac{N_c (2K_{10}^2 - K_{20}^2)}{\sqrt{K_{10}^2 + (K_{10} + K_{20})^2}} \quad (3.26)$$

donde  $D_{u'_1}$  es la región del plano  $K_{10} \times K_{20}$  donde  $N_c \left( k_{10}^2 + (k_{10} + k_{20})^2 \right) \leq u'_1$ , en este caso  $D_{u'_1}$  corresponde al área de una elipse, cuyo centro es el origen  $(0, 0)$ , pero evaluar esta integral 3.9 es bastante complejo para este dominio. Por esta razón, aproximaremos la región de  $D_{u'_1}$ , como el área de un círculo expresado como  $k_{10}^2 + k_{20}^2 \leq u'_1$ . Siendo así

$$F_{U'_1}(u'_1) = \int_{k_{20}=-\sqrt{u'_1}}^{\sqrt{u'_1}} \int_{k_{10}=-\sqrt{u'_1-k_{20}^2}}^{\sqrt{u'_1-k_{20}^2}} f_{K_{10}K_{20}}(k_{10}, k_{20}) dk_{10} dk_{20} \quad (3.27)$$

Eso nos lleva a

$$f_{U'_1}(u'_1) = \int_{k_{20}=-\sqrt{u'_1}}^{\sqrt{u'_1}} \frac{1}{2\sqrt{u'_1 - k_{20}^2}} \{ f_{K_{10}K_{20}}(\sqrt{u'_1 - k_{20}^2}, k_{20}) + f_{K_{10}K_{20}}(-\sqrt{u'_1 - k_{20}^2}, k_{20}) \} dk_{20} \quad (3.28)$$

Ya que  $K_{10}$  y  $K_{20}$  son distribuciones independientes Rayleigh con parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente, la PDF de  $U_1'$  está dada por una distribución de probabilidad chi-cuadrado con cuatro grados de libertad. Por tanto, nuestra aproximación para  $U_1$  estará dada por

$$f_{U_1}(u_1) \approx \frac{4u_1}{\gamma_1^2} e^{-2u_1/\gamma_1} \quad (3.29)$$

donde  $\gamma_1$  es la media de  $U_1$  dada en 3.3

$$\gamma_1 = E[U_1] \quad (3.30)$$

$$\gamma_1 \approx \frac{(2a_{12}^2\alpha_1^2 + \lambda(2a_{13}^2\alpha_1^2 + \pi a_{13}a_{23}\alpha_1\alpha_2 + 2a_{23}^2\alpha_2^2))^2 N_c}{(2a_{12}^2\alpha_1^2 + \lambda^2(2a_{13}^2\alpha_1^2 + \pi a_{13}a_{23}\alpha_1\alpha_2 + 2a_{23}^2\alpha_2^2)) \sigma_0^2} \quad (3.31)$$

La figura 3.6 muestra la comparación entre nuestra PDF aproximada, dada en 3.29, y la simulación computacional para la PDF de  $U_1$ , dada en 3.3, para dos diferentes valores de  $\lambda$ , manteniendo los mismos valores para  $a_{12} = 1$ ,  $a_{13} = 2$ , y  $a_{23} = 3$ . La figura 3.7 muestra la misma comparación de la figura 3.6, pero en este caso, usando escala logarítmica para el eje  $y$ , donde se puede ver las colas de los gráficos con mayor detalle. Observamos que las curvas están muy próximas para ambos valores de  $\lambda$ . A pesar de presentar apenas estos dos casos aquí, muchos otros casos fueron comparados, y la aproximación aún continúa siendo muy cercana.

Una vez que encontremos una aproximación para  $U_1$ , se procederá de la misma forma para la variable aleatoria  $U_2$ .

Analizando la figura 3.3, percibimos que la PDF de  $U_2$ , es muy semejante a una distribución normal, por este motivo, vamos a utilizar la distribución Gaussiana como nuestra elección para aproximar la PDF exacta de  $U_2$ . Con esta suposición, se tiene que

$$f_{U_2}(u_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} e^{-\frac{(u_2-\gamma_2)^2}{2\nu^2}} \quad (3.32)$$

donde,  $\gamma_2$  y  $\nu^2$  son la media y la varianza de  $U_2$  respectivamente

$$\gamma_2 = E[U_2] \quad (3.33)$$

$$\nu^2 = \text{Var}(U_2) \quad (3.34)$$

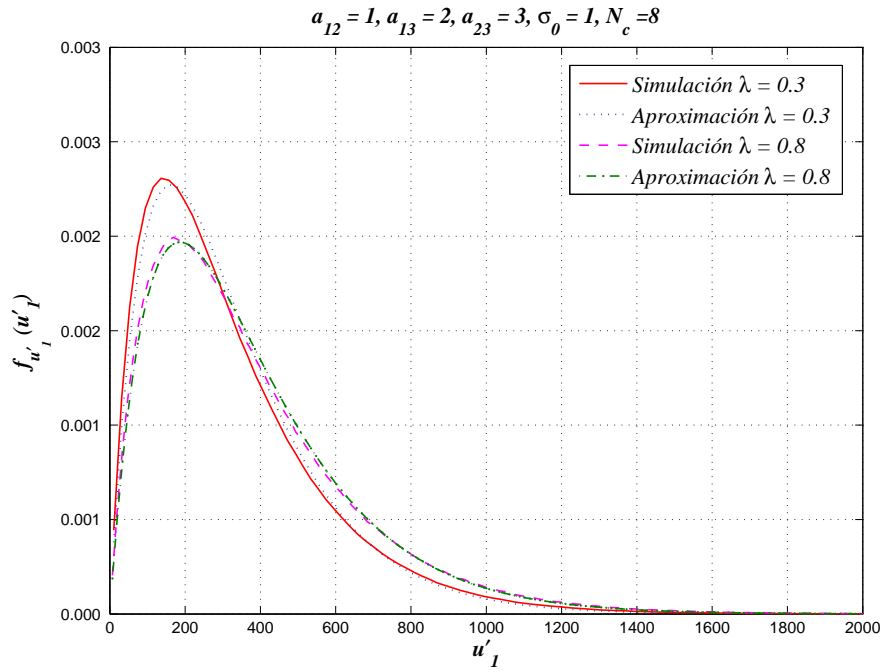


Fig. 3.6: Comparación entre la PDF simulada de 3.3 y nuestra aproximación dada en 3.29.

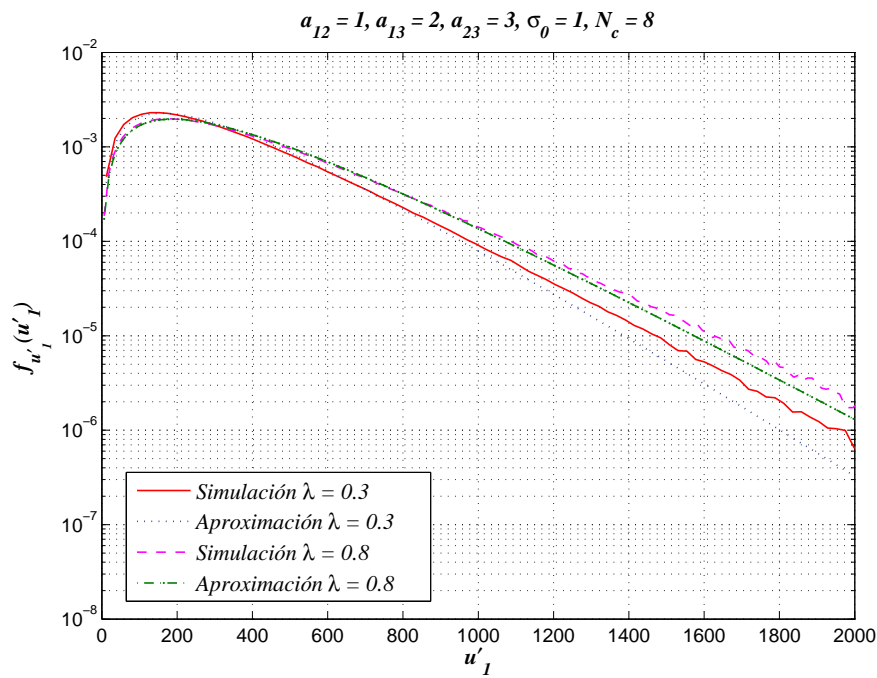


Fig. 3.7: Comparación en escala logarítmica entre la PDF simulada de 3.3 y nuestra aproximación dada en 3.29.

$$\gamma_2 \approx \frac{2^{3/4} (a_{12}^2 \alpha_1^2 + a_{13}^2 \lambda \alpha_1^2 - a_{23}^2 \lambda \alpha_2^2) \sqrt{N_c}}{\sqrt{2a_{12}^2 \alpha_1^2 + \lambda^2 (2a_{13}^2 \alpha_1^2 + \pi a_{13} a_{23} \alpha_1 \alpha_2 + 2a_{23}^2 \alpha_2^2)} \sigma_0} \quad (3.35)$$

$$\nu^2 \approx \frac{\left(4(\sqrt{2}-1)a_{23}^2\lambda\alpha_1^2\alpha_2^2(a_{12}^2+a_{13}^2\lambda) - 2(\sqrt{2}-2)\alpha_1^4(a_{12}^2+a_{13}^2\lambda)^2 - 2(\sqrt{2}-2)a_{23}^4\lambda^2\alpha_2^4\right)N_c}{(2a_{12}^2\alpha_1^2 + \lambda^2(2a_{13}^2\alpha_1^2 + \pi a_{13}a_{23}\alpha_1\alpha_2 + 2a_{23}^2\alpha_2^2))\sigma_0^2} \quad (3.36)$$

La figura 3.8, muestra la comparación entre la PDF aproximada, dada en 3.32, y la simulación computacional para la PDF de  $U_2$ , dada en 3.4, para dos valores diferentes de  $\lambda$ . Como en el caso de la PDF aproximada de  $U_1$ , la figura 3.9, muestra la comparación de la figura 3.8 usando escala logarítmica. Note que la aproximación es menos precisa para valores pequeños de  $\lambda$  y mejor para casos en que  $\lambda$  se aproxima a 1. En todos los casos, la aproximación está muy próxima de la PDF exacta de  $U_2$ .

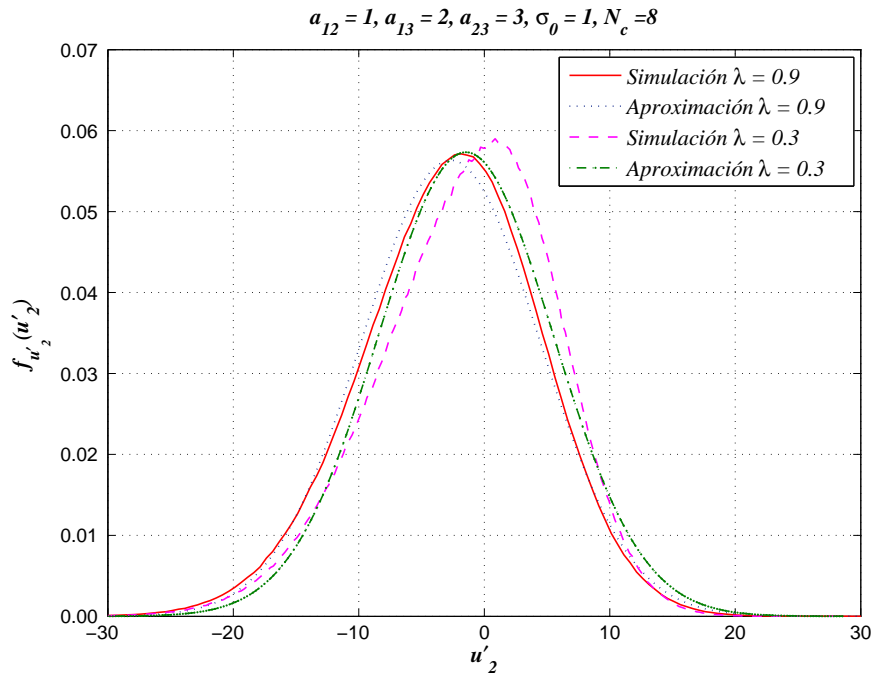


Fig. 3.8: Comparación entre la PDF simulada de 3.4 y nuestra aproximación dada en 3.32.

Usando 3.29 y 3.32 en 3.6, es posible obtener una probabilidad de error de bit muy precisa. Así, el resultado de las dos integrales serán

$$\int_0^\infty Q(\sqrt{u_1}) \frac{4u_1}{\gamma_1^2} e^{-2u_1/\gamma_1} du_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 + 6)}{(\gamma_1 + 4)^{3/2}}\right) \quad (3.37)$$

$$\int_{-\infty}^\infty Q(u_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} e^{-\frac{(u_2-\gamma_2)^2}{2\nu^2}} du_2 = Q\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{1+\nu^2}}\right) \quad (3.38)$$

Todos esos cálculos llevan a la probabilidad de error de bit aproximada, para el detector  $\lambda$ -MRC, como es mostrado en la ecuación 3.39, donde  $\gamma_{12}$  esta dada en 3.2,  $\gamma_1$  esta dada en 3.30,



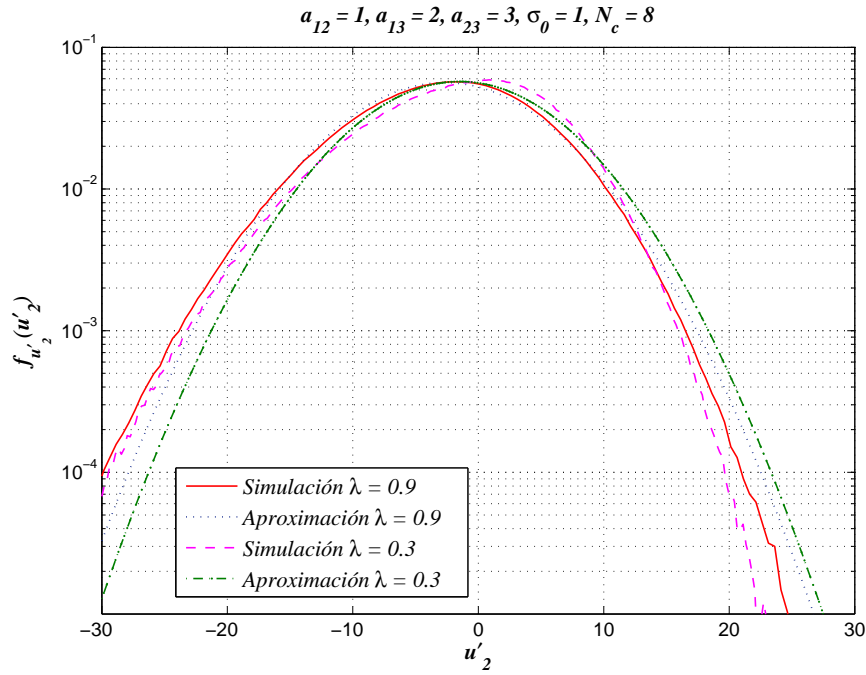


Fig. 3.9: Comparación en escala logarítmica entre la PDF simulada de 3.4 y nuestra aproximación dada en 3.32.

$\gamma_2$  está dada en 3.33 y  $\nu^2$  está dada en 3.34.

$$P_{ef} \approx \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 + 6)}{(\gamma_1 + 4)^{3/2}} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) Q \left( \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 + \nu^2}} \right) \quad (3.39)$$

Asumiendo un esquema de asignación de potencia uniforme ( $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ ), la figura 3.10 muestra la comparación entre la probabilidad de error de bit teórica presentada en 3.24 y nuestra aproximación dada en 3.39. Podemos observar que ambas curvas son casi las mismas, validando nuestra aproximación.

Los resultados anteriores fueron obtenidos para una asignación de potencia uniforme, sin embargo, simulaciones hechas para varios otros casos, demuestran que nuestro resultado es bastante exacto para un esquema donde los valores de potencia son distintos. Esto es ilustrado en la figura 3.11, que muestra la comparación entre la probabilidad de error de bit simulada dada en 3.6 y nuestra aproximación. En esta figura, asumimos una potencia total de  $3P$  para tres períodos de símbolos como en las figuras previas, además consideramos  $K_{10}$  y  $K_{20}$  con parámetros  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  y  $K_{12}$  con parámetro  $\alpha_{12}=0.8$ .

Con los resultados anteriores, podemos afirmar que nuestra aproximación se ajusta bastante bien a la probabilidad de error de bit real, incluso para una asignación de potencia no uniforme.

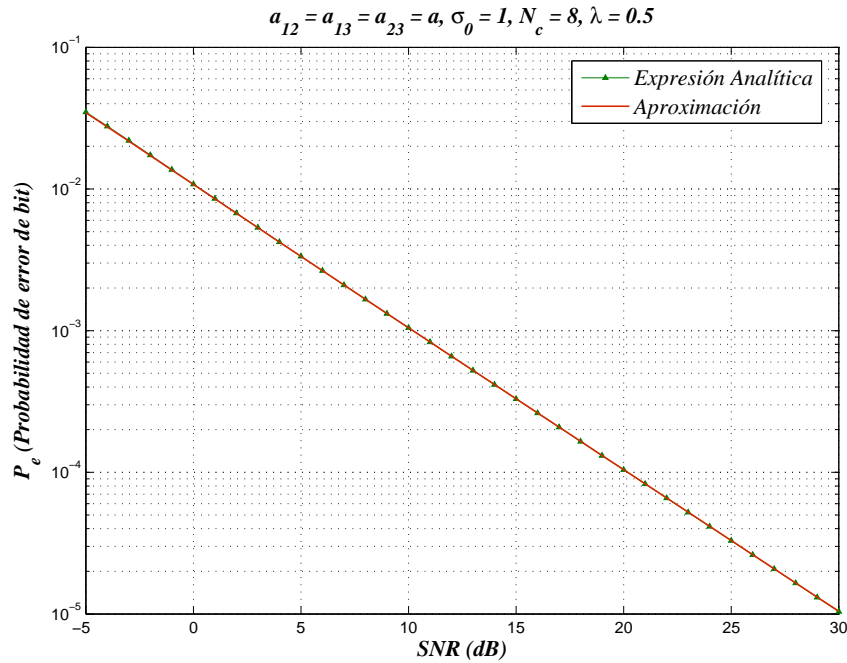


Fig. 3.10: Comparación entre la probabilidad de error de bit exacta y la aproximada, utilizando un esquema de asignación de potencia uniforme.

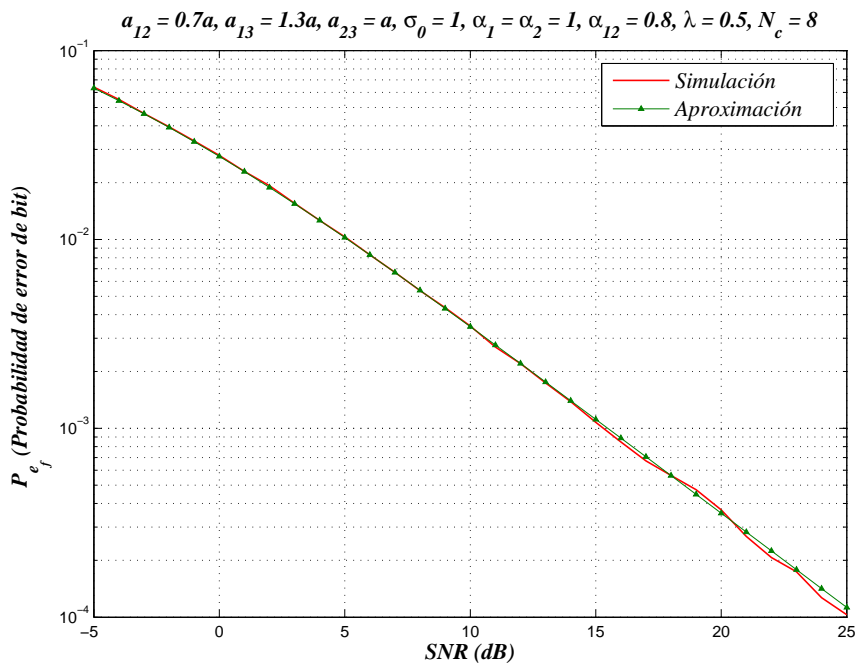


Fig. 3.11: Comparación entre la probabilidad de error de bit simulada y la aproximada, a través de un esquema de asignación de potencia no uniforme.

Esta aproximación nos va permitir realizar un estudio más profundo de los parámetros envueltos en el sistema de cooperación con el objetivo de hacer más eficiente el sistema.

## Capítulo 4

# Optimización de la Probabilidad de error

En el capítulo anterior se mostró cómo se obtuvo una aproximación para la probabilidad de error de bit en canales con desvanecimiento Rayleigh, para una implementación basada en el sistema CDMA propuesto en [2]. Esta aproximación, mostrada en la ecuación 3.39, nos va permitir hacer un análisis más profundo del sistema de cooperación de usuarios, en el sentido de saber en qué caso es beneficioso la cooperación y en qué casos no lo es.

En este análisis tenemos que considerar que los usuarios conocen el coeficiente de desvanecimiento del canal inter-usuario  $K_{12}$  y  $K_{21}$ , y también que los usuarios conocen el coeficiente de desvanecimiento entre ellos y la estación base,  $K_{10}$  y  $K_{20}$  (canal *uplink*), además de conocer el ruido en los usuarios y en la BS. Cabe mencionar, que las técnicas de cómo conocer estos parámetros no está en el ámbito de este trabajo. Las demás variables, como los parámetros que representan la asignación de potencia  $a_{ij}$  y la que representa la medida de confianza de la BS en el bit estimado por el compañero  $\lambda$ , podemos controlarlas, por lo que nos concentraremos en ellas.

### 4.1. Análisis de la Probabilidad de error

Para comenzar con el análisis vamos a recordar que a medida que el canal inter-usuario se hace más confiable, la probabilidad de error disminuye, esto se muestra en la figura 4.1, donde manteniendo los canales *uplink* constantes y para 3 valores diferentes del canal inter-usuario

se demuestra que a medida que  $K_{12}$  (con parámetro  $\alpha_{12}$ ) aumenta, la probabilidad de error disminuye.

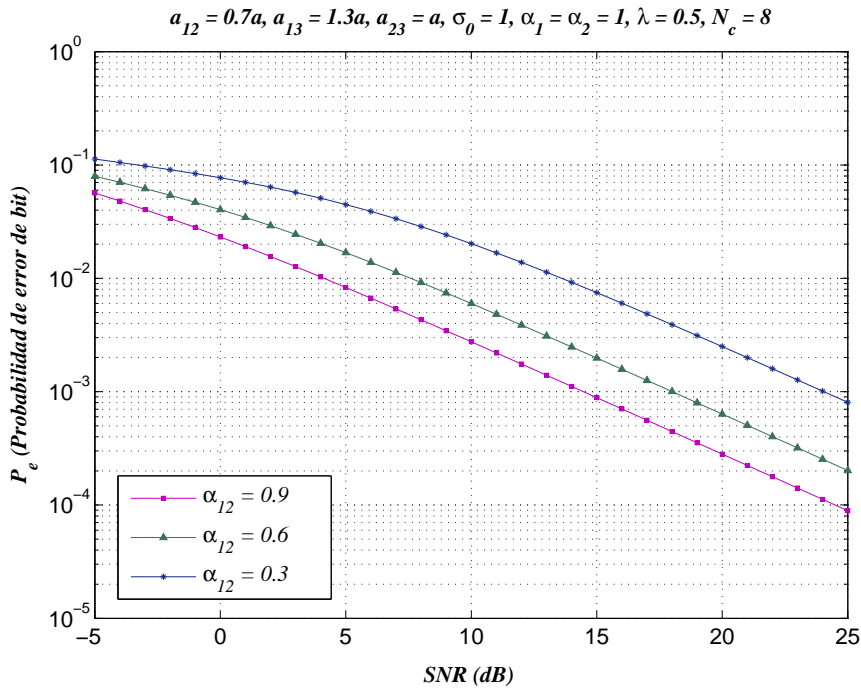


Fig. 4.1: Probabilidad de error para diferentes valores del canal inter-usuario.

Ahora vamos a ver que tan beneficioso es cooperar cuando el canal inter-usuario tiene un valor pequeño respecto a los canales *uplink*. En la figura 4.2, podemos observar que mientras mayor es el grado de confianza de la BS, es decir,  $\lambda$  se aproxima a 1, la probabilidad de error aumenta, y cuando hacemos el  $\lambda = 0$ , es decir, no hay cooperación, la probabilidad de error disminuye para valores de SNR arriba de 0dB. Este análisis nos pone de manifiesto otra variable que debemos tener en cuenta, que es la relación señal-ruido. En términos prácticos, podemos decir que para valores pequeños de  $K_{12}$  respecto a  $K_{10}$  y  $K_{20}$ , la cooperación no es beneficiosa y se debería evitar.

Como siguiente paso, vamos a ver el comportamiento de la probabilidad de error cuando el canal inter-usuario es ligeramente menor a los canales *uplink*. La figura 4.3 muestra claramente que la cooperación es totalmente beneficiosa, sin embargo, podemos apreciar que para valores pequeños de  $\lambda$  la probabilidad de error es menor que para valores altos. Lo cual nos indica que, en este caso, cooperar es bueno pero no lo debemos hacer con un grado de confianza alto.

Ahora, la lógica nos indica saber qué pasara cuando el canal inter-usuario es ligeramente mayor a los canales *uplink*. La figura 4.4 muestra el comportamiento del sistema en este caso,

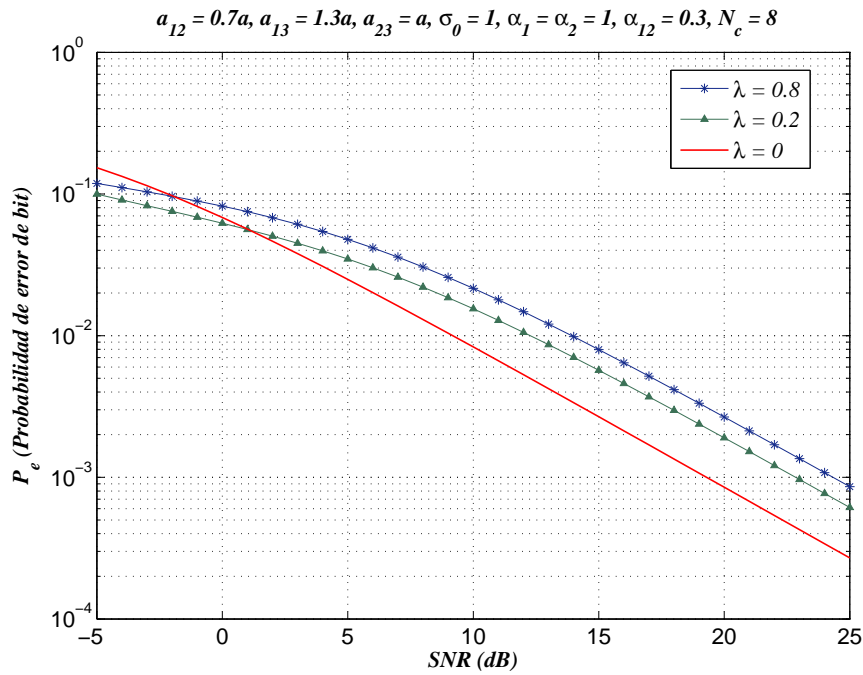


Fig. 4.2: Probabilidad de error para diferentes valores del  $\lambda$ , cuando  $E[K_{12}]$  es menor a  $E[K_{10}]$ .

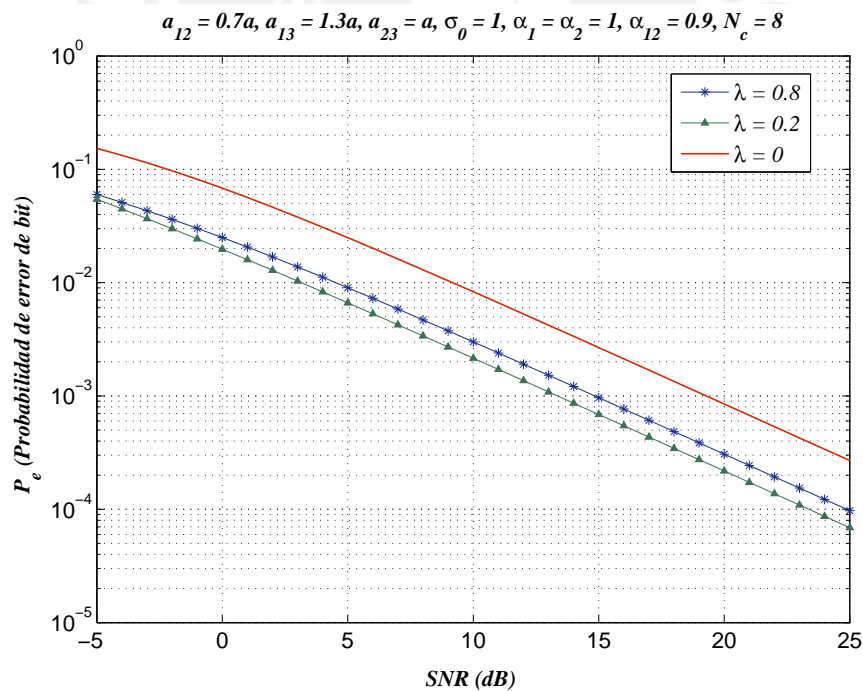


Fig. 4.3: Probabilidad de error para diferentes valores del  $\lambda$ , cuando  $E[K_{12}]$  es ligeramente menor a  $E[K_{10}]$ .

aquí se aprecia que aún para valores cercanos a cero de  $\lambda$ , la probabilidad de error continúa siendo menor. Quizá podríamos haber pensado que cuando el canal inter-usuario es mayor que

los *uplink* lo ideal es tener un  $\lambda$  cercano a la unidad, pero ya vemos que no ocurre esto, por lo cual, deberíamos ocuparnos en conocer cuál es el mejor  $\lambda$  para que la probabilidad de error sea la menor.

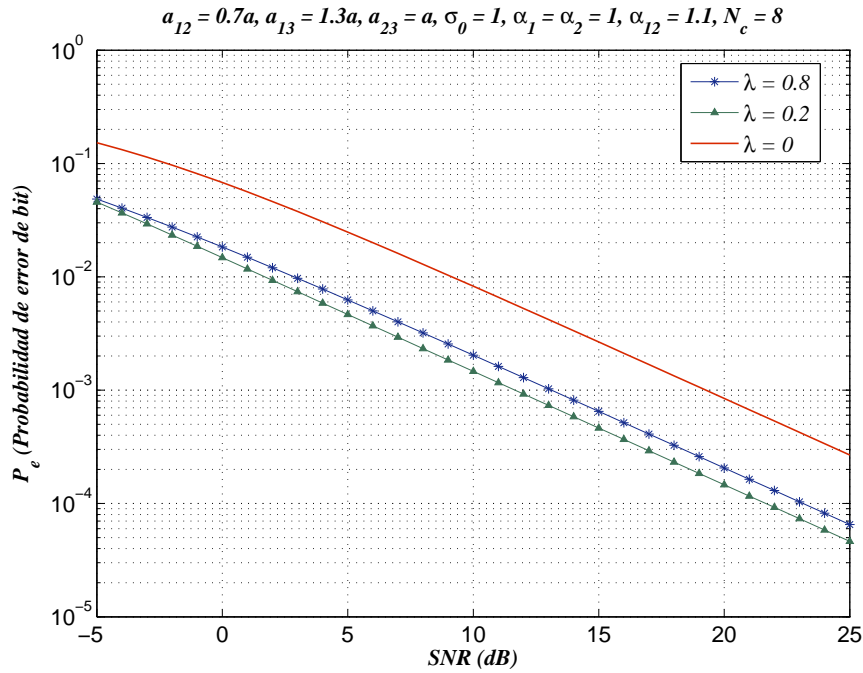


Fig. 4.4: Probabilidad de error para diferentes valores del  $\lambda$ , cuando  $E[K_{12}]$  es ligeramente mayor a  $E[K_{10}]$ .

## 4.2. Análisis de los canales *uplink* y el canal inter-usuario

Con la información previa, la idea es encontrar una relación entre el canal inter-usuario y los canales *uplink* para saber cuándo cooperar. Lo primero que sabemos es que el canal inter-usuario puede ser menor a los otros canales para que la cooperación sea beneficiosa, pero qué tan menor, no lo sabemos. En tal sentido, para encontrar esta relación vamos a realizar el análisis para el caso, donde la asignación de potencia es uniforme, es decir, los factores  $a_{ij}$  son iguales, además de eso, vamos a considerar que los canales *uplink* son iguales, o sea,  $E[K_{10}] = E[K_{20}]$ . Con estas simplificaciones, debemos hallar el valor de  $\alpha_{12}$  respecto a  $\alpha_1$  cuando la probabilidad de error es igual a un sistema sin cooperación. Recordemos que la probabilidad de error está dada por la ecuación 3.5:

$$P_{e1} = (1 - P_{e12}) Q\left(\sqrt{U_1}\right) + P_{e12} Q(U_2)$$



Donde  $U_1$  y  $U_2$  están definidos en 3.3 y 3.4 respectivamente. Para hacer que el sistema no coopere hacemos  $\lambda = 0$ , con lo cual la ecuación anterior se convierte en:

$$P_{e1(\lambda=0)} = (1 - P_{e12}) Q \left( K_{10} a_{12} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \right) + P_{e12} Q \left( K_{10} a_{12} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \right) \quad (4.1)$$

$$P_{e1(\lambda=0)} = Q \left( K_{10} a_{12} \frac{\sqrt{N_c}}{\sigma_0} \right) \quad (4.2)$$

Entonces, la probabilidad de error cuando el sistema no está cooperando, y considerando  $K_{10}$  una distribución Rayleigh, resulta:

$$P_{e1(\lambda=0)_f} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_{10}}{2 + \gamma_{10}}} \right) \quad (4.3)$$

donde  $\gamma_{10}$  es la relación señal-ruido media, definida como

$$\gamma_{10} = \frac{2(a_{12}\alpha_1)^2 N_c}{\sigma_0^2} \quad (4.4)$$

Ahora, para obtener la relación deseada tenemos que igualar las ecuaciones 3.39 y 4.3

$$\frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 + 6)}{(\gamma_1 + 4)^{3/2}} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}}} \right) Q \left( \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 + \nu^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_{10}}{2 + \gamma_{10}}} \right) \quad (4.5)$$

donde  $\gamma_{12}$  está dada en 3.2,  $\gamma_1$  está dada en 3.30,  $\gamma_2$  está dada en 3.33,  $\nu^2$  está dada en 3.34 y  $\gamma_{10}$  está dada en 4.4.

La figura 4.5 muestra la relación entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_{12}$  para  $SNR = 10dB$ , utilizando una asignación de potencia uniforme, asumimos una potencia total de  $3P$  para tres períodos de símbolos y los canales *uplink* iguales. Se puede apreciar que el gráfico corresponde prácticamente a una recta con pendiente 0.5, lo que se traduce que para estos valores, las condiciones, donde es beneficiosa la cooperación, es cuando el canal inter-usuario es mayor o igual a la mitad del canal *uplink*.

La figura anterior mostró la relación entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_{12}$  para una relación señal-ruido particular. La figura 4.6 muestra la relación entre los canales para tres valores de SNR diferentes. Podemos apreciar que para  $SNR = 10dB$  y  $SNR = 15dB$ , la relación entre el canal *uplink* y el canal inter-usuario, es prácticamente la misma, diferente para el caso en que  $SNR = -5dB$ , donde podemos apreciar que la pendiente de la curva es ligeramente diferente y con un desplazamiento

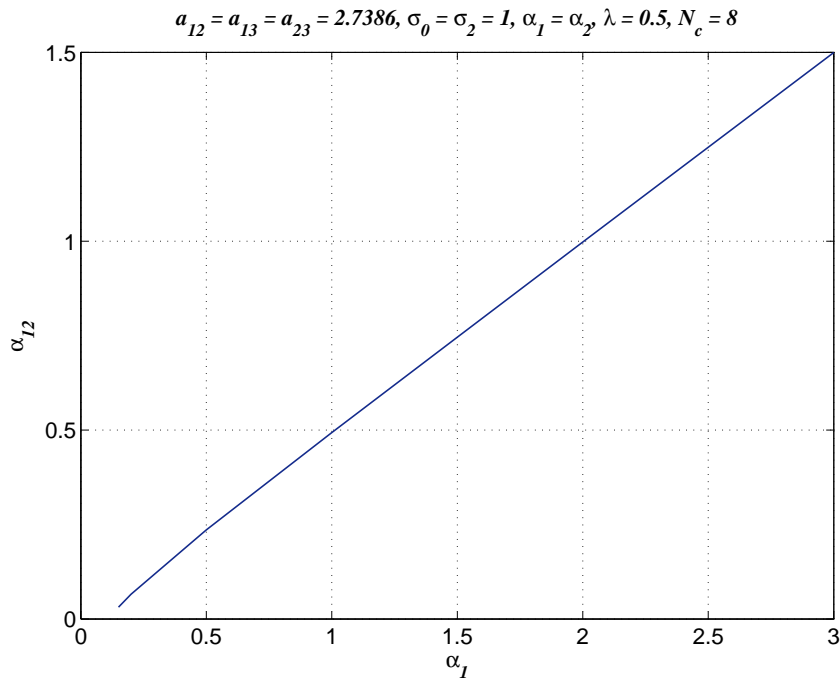


Fig. 4.5: Relación entre el canal inter-usuario y el canal *uplink*, cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación.

hacia la derecha. Esto nos lleva a pensar que la relación entre los canales varía respecto al *SNR*.

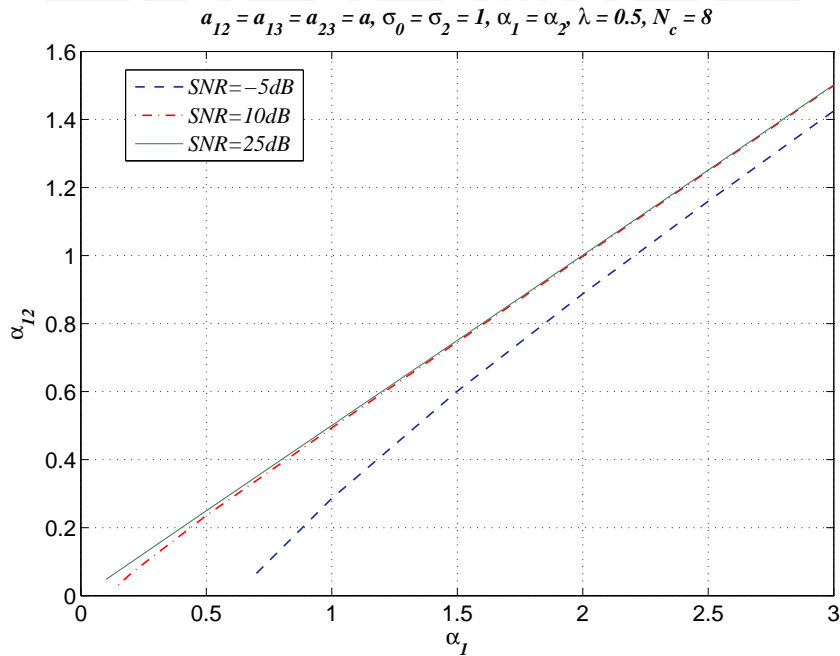


Fig. 4.6: Relación entre el canal inter-usuario y el canal *uplink* para diferentes valores de *SNR*, cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación.

Para continuar con nuestro análisis, ahora vamos a ver cómo varía la relación de los canales *uplink* e inter-usuario versus SNR, cuando la probabilidad del sistema con cooperación es igual a la del sistema sin cooperación. Este comportamiento se muestra en la figura 4.7. Primero veamos el caso donde el canal *uplink* tiene como parámetro  $\alpha_1 = 1$ , aquí podemos apreciar que la relación entre los parámetros de los canales de comunicación ( $\alpha_1/\alpha_{12}$ ), para SNR encima de  $10dB$ , prácticamente es una constante, y que la relación ( $\alpha_1/\alpha_{12}$ ) va decreciendo considerablemente cuando el SNR es menor. Veamos el caso cuando el parámetro  $\alpha_1 = 2$ , aquí la relación es prácticamente una constante hasta los  $5dB$ , además, observamos que a medida que el parámetro  $\alpha_1$  aumenta, esta relación entre los canales se hace casi una constante. Esto nos lleva a pensar, que cuando estamos en un ambiente donde el SNR es pequeño, la cooperación se hace mas compleja. También podemos deducir que el valor de  $\alpha_1/\alpha_{12}$  no depende del canal *uplink*, sino del valor de  $\lambda$ , por esta razón este parámetro es de suma importancia en el sistema.

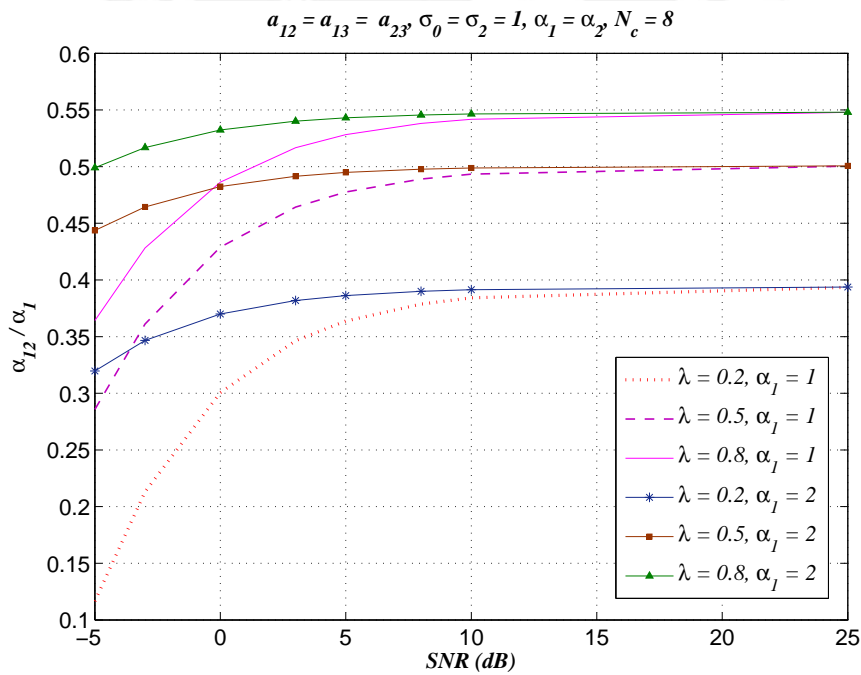


Fig. 4.7: Razón entre el canal inter-usuario y el canal *uplink* versus  $SNR$ , para diferentes valores de  $\lambda$  y  $[K_{10}]$ , cuando las probabilidades de error son iguales en un esquema de cooperación y no cooperación.

### 4.3. Calculando el mejor $\lambda$

Hasta este momento hemos visto el comportamiento de la probabilidad de error y la relación entre los canales inter-usuarios y *uplink*, es claro que uno de los parámetros involucrados en el detector sub-óptimo está pensado para que, al tener control de él, la probabilidad de error se haga mínima. Este parámetro es  $\lambda$ , el cual representa la medida de confianza de la BS en el bit estimado por el compañero. En esta parte vamos a hacer un análisis del mejor  $\lambda$  para que la probabilidad de error sea la menor.

Como sabemos, cuando la BS cree que el canal inter-usuário es “perfecto”, el valor de  $\lambda$  se aproxima a la unidad y el detector sub-óptimo acaba por ser un *maximal ratio combining* [5]. Cuando el canal inter-usuário se torna menos confiable, o sea, cuando  $P_{e_{12}}$  aumenta, el valor del mejor  $\lambda$  disminuye hacia cero. Para demostrar este comportamiento, la figura 4.8 muestra un  $\lambda$  optimizado en relación al parámetro del canal inter-usuário  $\alpha_{12}$ . Estas curvas fueron obtenidas utilizando técnicas de optimización computacional, que minimiza la probabilidad de error de bit dada en 3.39 con relación a  $\lambda$ , versus el parámetro del canal inter-usuário  $\alpha_{12}$ . Los parámetros del canal directo  $\alpha_1 = \alpha_2$  fueron mantenidos constantes, y el esquema de asignación de potencia uniforme ( $a_{12} = a_{13} = a_{23}$ ) fue adoptado.

En este gráfico se ve el comportamiento de  $\lambda$  para tres valores de  $\alpha_1$  diferentes, cuando el valor de  $SNR = 10dB$ . Además, se observa que para valores pequeños de  $\alpha_1$ , el valor de  $\lambda$  se acerca rápidamente a la unidad cuando el valor de  $\alpha_{12}$  va aumentando, por el contrario a medida que el canal *uplink* aumenta, el valor de  $\lambda$  aumenta lentamente.

Las figuras 4.9 y 4.10 muestran también las curvas del  $\lambda$  óptimo para diferentes valores de SNR. Aquí se corrobora lo dicho anteriormente, de que para valores pequeños de  $\alpha_1$ ,  $\lambda$  se acerca a la unidad de forma rápida, pero este crecimiento se hace más rápido, aún cuando el valor del SNR decrece. También, podríamos concluir de la figura 4.10 que para valores altos de SNR y  $\alpha_1$ , quizá no sea conveniente cooperar, y si se coopera, el valor de  $\lambda$  probablemente tendría que ser pequeño.

### 4.4. Calculando valores apropiados para una óptima cooperación

Todos los análisis hechos previamente, nos debe llevar a hallar los mejores parámetros para que la probabilidad de error sea la menor en un sistema de cooperación de usuarios. Primero,

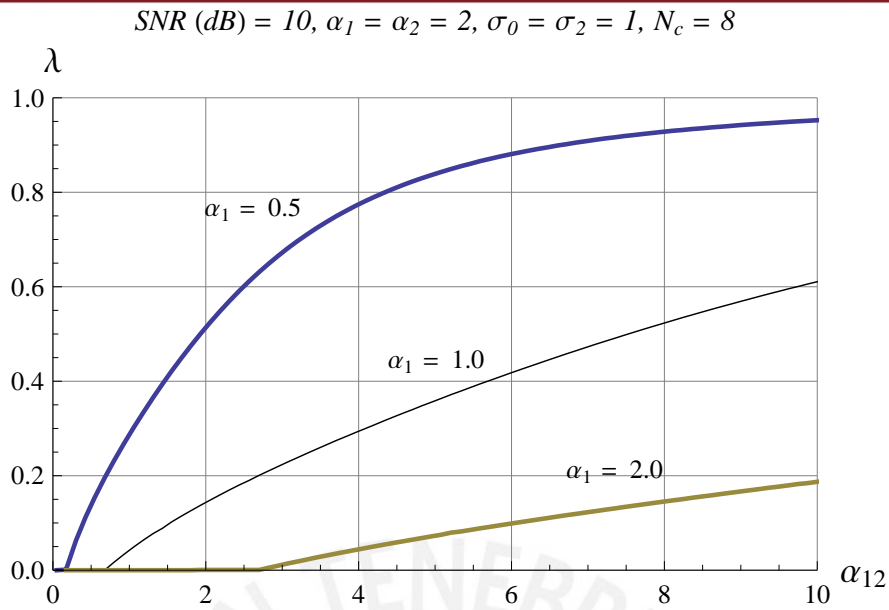


Fig. 4.8:  $\lambda$  óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para  $SNR = 10dB$ .

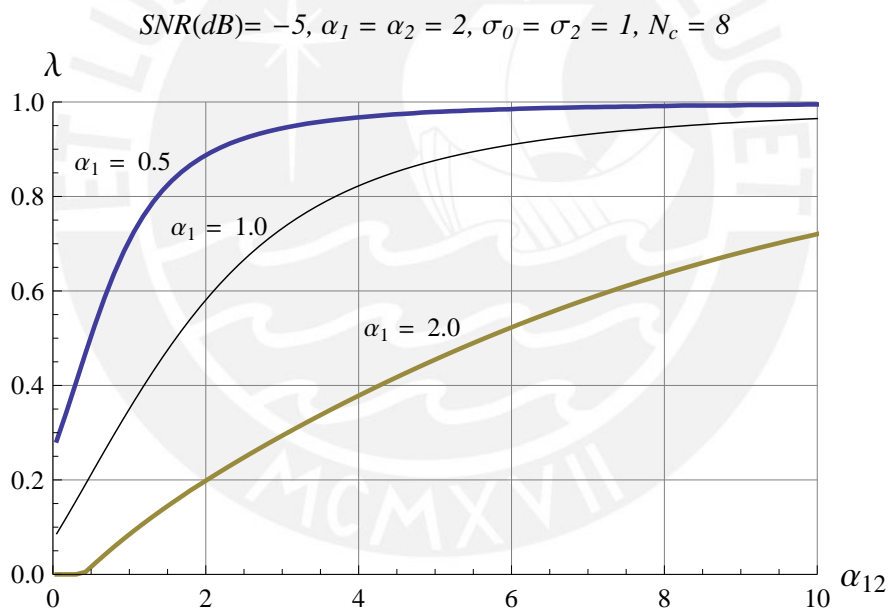


Fig. 4.9:  $\lambda$  óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para  $SNR = -5dB$ .

tenemos que definir cuáles son nuestros parámetros de entrada y las consideraciones necesarias a tomar. En tal sentido, para este análisis vamos a considerar un sistema con asignación de potencia uniforme, que los canales *uplink* son iguales y conocidos, y que conocemos también el ruido del sistema.

De la figura 4.7, podemos concluir, que la relación  $\alpha_1/\alpha_2$  se mantiene casi constante para

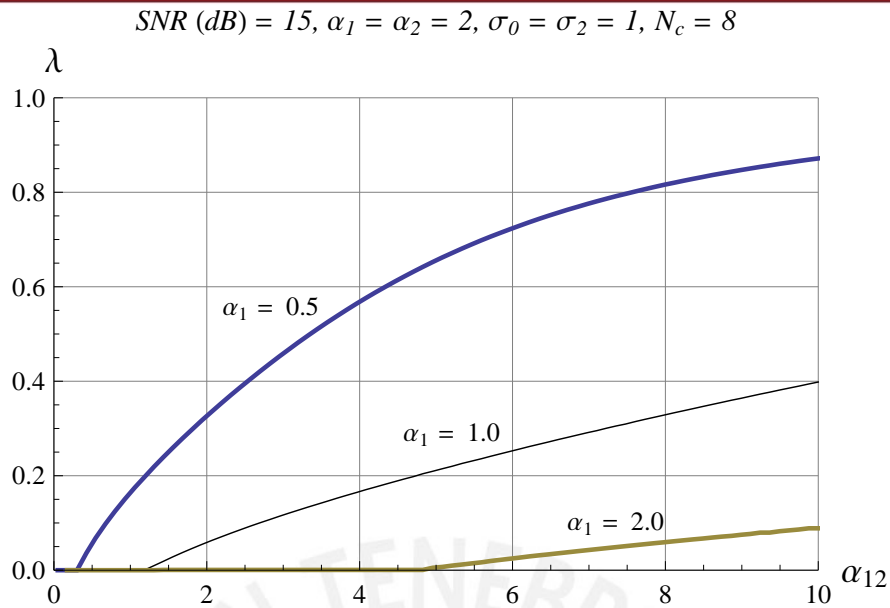


Fig. 4.10:  $\lambda$  óptimo para obtener la menor probabilidad de error en un sistema de cooperación, con asignación de potencia uniforme, para  $SNR = 15dB$ .

diferentes valores de  $\alpha_1$  e iguales valores de  $\lambda$  para valores de SNR mayores a  $10dB$ . Tomemos este valor, para nuestra relación señal-ruido, como la mínima que deberíamos tener para que el sistema sea óptimo. En este sentido, la potencia estará dada por:

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{3\sigma_0^2 SNR}{4}} = 2,7386 \quad (4.6)$$

De la figura 4.8 podríamos afirmar, que para un valor de  $\alpha_1 = 2$ , lo más conveniente es cooperar cuando el valor de  $\alpha_{12}$  sea aproximadamente superior a 2.5, lo cual se contradice con lo que la figura 4.7 nos afirma, pero en realidad esto nos así. La figura 4.11 nos muestra una ampliación de la figura 4.8, donde aparentemente el valor de  $\lambda$  era cero, sin embargo, se puede apreciar en esta figura que para  $\alpha_{12} > 1,8$  la cooperación resulta beneficioso. En consecuencia, la curva que representa el valor óptimo de  $\lambda$  para la probabilidad de error, nos brinda un criterio sobre cuando cooperar y con qué valor hacerlo.

Entonces, los pasos para obtener la menor probabilidad de error son: primero, conocer la SNR, y luego, con este dato, obtener el  $\lambda$  óptimo usando métodos computacionales.

Por ultimo, vamos a realizar un ejemplo para el caso donde  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_{12} = 2$ , ya que en este caso, el canal inter-usuario es mayor que el canal *uplink*, queda claro que con estos valores la cooperación es totalmente beneficiosa. Entonces, considerando un  $SNR = -5dB$ , de



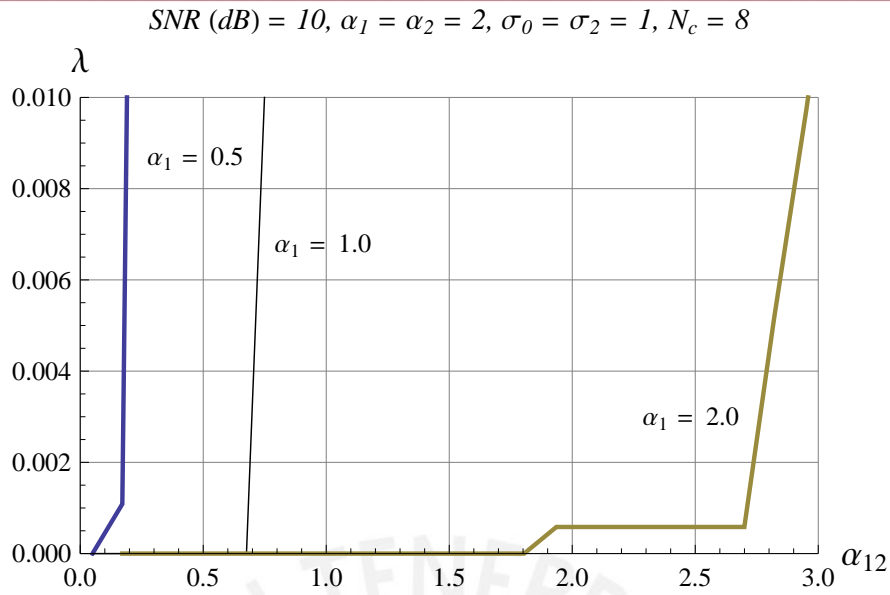


Fig. 4.11: Ampliación de la figura 4.8 para  $\lambda$  próximo de cero.

la figura 4.9 podemos apreciar que el valor óptimo de  $\lambda$ , es aproximadamente 0.58; de igual forma, tomando el valor de  $SNR = 10dB$ , en la figura 4.8 se puede observar que el valor de  $\lambda$  es aproximadamente 0.14. En seguida, vamos a graficar la probabilidad de error para los valores de canales indicados, utilizando los  $\lambda$  obtenidos. La figura 4.12 muestra el comportamiento esperado, o sea, para  $\lambda = 0,58$  la probabilidad de error es menor para valores de SNR bajos y para  $\lambda = 0,14$  la probabilidad es menor para valores de SNR altos. Lo cual indica, que las suposiciones hechas en este capítulo fueron correctas.

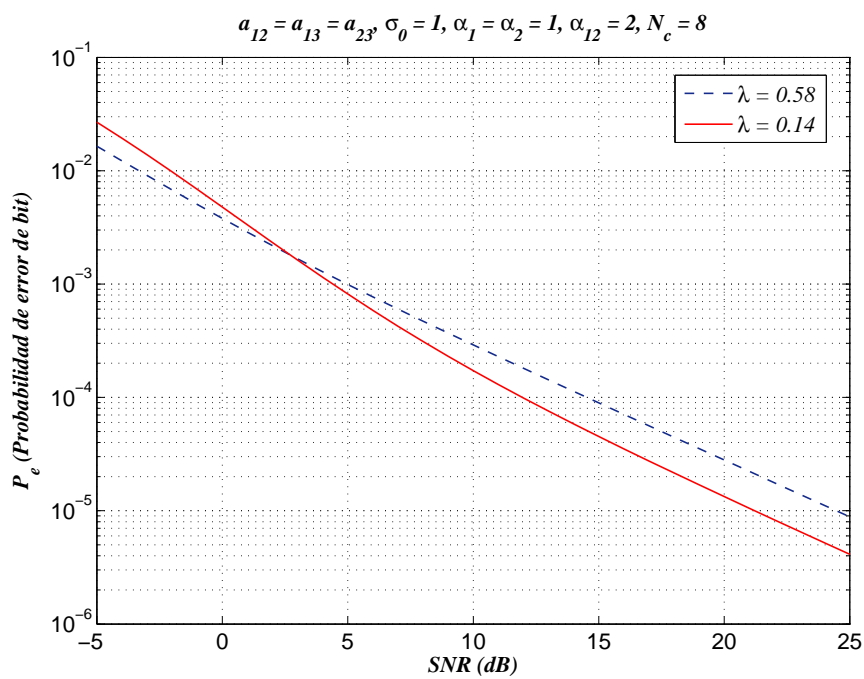


Fig. 4.12: Comparación de la probabilidad de error minimizada para dos  $\lambda$  diferentes.

## Conclusiones

En este trabajo de tesis, una expresión exacta y otra aproximada para la probabilidad de error de bit media sobre desvanecimiento Rayleigh para el detector  $\lambda$  – MRC presentado en [2] fueron obtenidas. La expresión exacta fue obtenida sobre la condición de un régimen de asignación de potencia uniforme. La expresión fue validada a través de simulaciones, mostrando una perfecta concordancia entre las curvas exactas y simuladas. Con el fin de reducir la complejidad de la expresión exacta, una aproximación muy precisa fue presentada también. La expresión aproximada es válida para cualquiera de los valores de  $\lambda$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ , y  $a_{23}$ .

Por otro lado, los resultados indican que la cooperación entre usuarios es benéfica en determinadas condiciones de canal y puede resultar en ganancias substanciales en relación a una estrategia de no-cooperación. En tal sentido, el objetivo de esta tesis fue obtener criterios cuantitativos para saber en qué casos la cooperación es beneficiosa y en qué casos es preferible no cooperar.

Como se mostró en el capítulo 4, la mejor manera para obtener la relación entre los canales *uplink* y el canal inter-usuario, es obtener por medio de técnicas de optimización computacional el  $\lambda$  que minimiza la probabilidad de error. Dentro de este análisis, se encontró también que la relación señal-ruido es un parámetro importante a considerar, en donde se puede afirmar que para valores pequeños de SNR casi siempre es beneficioso cooperar. Otra característica importante de este sistema de cooperación, es que cuando el canal inter-usuario es bastante mayor que el canal *uplink*, el valor de  $\lambda$  está más cerca de cero, en otras palabras, el grado de cooperación es pequeño.

Finalmente, debemos notar que este trabajo incluye sólo el análisis cuando el sistema usa una asignación de potencia uniforme, esto con el objetivo de no consumir muchos recursos computacionales que hagan que el sistema no sea eficiente, por el contrario, la idea es usar

técnicas sencillas para obtener mayores beneficios. Sin embargo, esto no implica que se busque la mejor probabilidad de error no sólo incluyendo  $\lambda$ , sino también los factores de potencia. Como vemos, el análisis realizado no nos brinda un resultado absoluto, sino es uno de otros análisis que podríamos obtener gracias a la aproximación hallada. De hecho, el análisis realizado aquí pueden ser muy importante en situaciones donde el desempeño de un sistema con cooperación entre usuarios usando CDMA deba ser evaluado.



## Recomendaciones

Las recomendaciones de este trabajo de tesis se centran en los trabajos futuros que se pueden realizar, tomando como base lo realizado aquí. Un detalle importante, además de saber cuándo es beneficioso o no la cooperación, es tener en cuenta la potencia utilizada. Recordemos, que si no usamos cooperación, toda la potencia de ese periodo se usa para enviar un único bit. Por el contrario, cuando cooperamos, usamos dos periodos para mandar el mismo bit, lo cual significa una mayor potencia utilizada en promedio. En consecuencia, la potencia promedio por periodo es un factor importante en la decisión de cooperar.

Por otro lado, nuestro análisis consideró un  $\lambda = 0$  para conseguir un sistema sin cooperación, sin embargo, este podría no ser la forma más justa para obtener un sistema donde la cooperación no esté presente. Por lo que sería aconsejable usar el periodo sin cooperación, donde toda la potencia del canal está asignada a un único bit.

Una vez que sabemos que la cooperación es beneficiosa, una manera para disminuir la probabilidad de error, es utilizar una asignación de potencia diferente a la uniforme, ya que de esta manera, se puede asignar potencia donde el sistema más lo requiera, con el fin de minimizar aún más la probabilidad de error. Teniendo claro que la potencia promedio por periodo se debe mantener.

Por último, tenemos que considerar que las decisiones que tomemos para que el sistema use cooperación de usuarios o no, deben ser simples, en el sentido que el esfuerzo computacional no perjudique o haga imposible nuestra optimización.

## Bibliografía

- [1] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, "User cooperation diversity – Part I: System description," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, pp. 1927–1938, November 2003.
- [2] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, "User cooperation diversity – Part II: Implementation aspects and performance analysis," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, pp. 1939–1948, November 2003.
- [3] G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*. 2nd ed. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [4] W. C. Jakes, Ed., *Microwave Mobile Communications*. New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [5] J. G. Proakis, *Digital Communications*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 2001.
- [6] A. Narula, M. D. Trott, and G. W. Wornell, "Performance limits of coded diversity methods for transmitter antenna arrays," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp. 2418–2433, November 1999.
- [7] T. M. Cover and A. E. Gamal, "Capacity Theorems for the Relay Channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, pp. 572–584, September 1979.
- [8] E. C. Van der Meulen, "Three-terminal communication channels," *Advanced Applied Probability*, vol. 3, pp. 120–154, 1971.
- [9] J. N. Laneman and G. W. Wornell, "Energy-efficient antenna sharing and relaying for wireless networks," in *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, pp. 7–12, Chicago, IL, September 2000.
- [10] R. Knopp and P. Humblet, "Information capacity and the power control in single-cell multiuser communications," in *Proc. IEEE International Conference on Communications*, pp. 331–335, 1995.
- [11] A. J. Goldsmith and P. P. Varaiya, "Capacity of fading channels with channel side information," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, pp. 1986–1992, November 1997.



- [12] D. Tse and S. Hanly, "Multiaccess fading channels—Part I: Polymatroid structure, optimal resource allocation and throughput capacities," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2796–2815, November 1998.
- [13] A. Narula, M. Lopez, M. Trott, and G. Wornell, "Efficient use of side information in multiple-antenna data transmission over fading channels," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, pp. 1423–1436, October 1998.
- [14] T. Cover and C. Leung, "An achievable rate region for the multiple access channel with feedback," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, pp. 292–298, May 1981.
- [15] F. Willems and E. V. D. Meulen, "The discrete memoryless multiple access channel with cribbing encoders," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, pp. 313–327, May 1985.
- [16] C. Zeng, F. Kuhlmann, and A. Buzo, "Achievability proof of some multiuser channel coding theorems using backward decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, pp. 1160–1165, November 1989.
- [17] R. Gallager, "An inequality on the capacity region of multiaccess fading channels," in *Communications and Cryptography—Two Sides of One Tapestry*, pp. 129–139, Norwell, MA: Kluwer, 1994.
- [18] F. M. J. Willems, E. C. Van der Meulen, and J. P. M. Schalkwijk, "Achievable rate region for the multiple access channel with generalized feedback," in *Proc. Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pp. 284–292, 1983.
- [19] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [20] Mitchell O. Calderon Inga, Gustavo Fraidenraich, "Average Bit Error Probability for the  $\lambda$  - MRC Detector under Rayleigh Fading," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking 2011*, 2011.

## Apéndice

$$C_1 = 2M_1 + M_2 + \frac{M_3}{M_2}$$

$$C_2 = 24k_{20}\lambda^2\mu_2^2 A_2 \lambda_1 \sqrt{\frac{3}{C_1}} + 8M_1 - 2M_2 - \frac{2M_3}{M_2}$$

$$M_1 = 2A_2^2\lambda \lambda_1 k_{20}^2 + \lambda_2 u_2^2$$

$$M_2 = \sqrt[3]{E + 2 \left( G + A_2 k_{20} \lambda \lambda_1 u_2^2 \sqrt{27F} \right)}$$

$$M_3 = 16A_2^4\lambda^2\lambda_1^2 k_{20}^4 - 4A_2^2\lambda (2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 1) u_2^2 k_{20}^2 + \lambda_2^2 u_2^4$$

$$E = -\lambda_2^3 u_2^6 + 6 (A_2 k_{20})^2 \lambda \lambda_5 u_2^4 - 24 (A_2 k_{20})^4 \lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_3 u_2^2$$

$$F = -16 (A_2 k_{20})^6 \lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_4 + 8 (A_2 k_{20})^4 \lambda \lambda_7 u_2^2 - (A_2 k_{20})^2 \lambda_6 u_2^4 + \lambda_2^3 u_2^6$$

$$G = 32 (A_2 k_{20})^6 \lambda^3 \lambda_1^3$$

$$\lambda_1 = \lambda + 1$$

$$\lambda_2 = (\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda_3 = (2\lambda^2 + 3\lambda - 1)$$

$$\lambda_4 = (5\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$\lambda_5 = (2\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 14\lambda^2 - 7\lambda - 1)$$

$$\lambda_6 = (13\lambda^6 + 28\lambda^5 - 34\lambda^3 - 12\lambda^2 - 8\lambda + 1)$$

$$\lambda_7 = (7\lambda^5 + 22\lambda^4 + 17\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1)$$