

Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado



Tesis:

“Implementación y medición de un sistema cuántico abierto con la dinámica “Dephasing Channel” en la base de caminos”

**Para obtener el grado de
Magíster en Física**

**Presentada por
Mariano Uria Valencia**

**Asesor:
PhD. Eduardo Ruben Massoni Kamimoto**

Lima-Perú, 2019

Implementación y medición de un sistema cuántico abierto con la dinámica "Dephasing Channel" en la base de caminos

Mariano Uria Valencia

Presented towards a Master's degree in Physics

Abstract

The basis of the quantum technologies that are proposed nowadays are based on the characteristic of superposition of the quantum states, which is presented as an interference phenomenon, and which gives rise to what is known as coherence; however, when a system is in contact with an environment, the phenomenon of decoherence occurs, which leads to a loss of the information that was wanted to be stored, that is the coherence, however, there are processes in which information can be retrieved, these processes are called non-Markovians.

In the present work, we make a study about a quantum system with a specific dynamics, called "Dephasing Channel", we use a measure of coherence to make sure that we work with a non-Markovian process and we assembled an optical arrangement where the aforementioned dynamics are embodied in the Hilbert space of paths.

For the realization of the measurements of the experiment, we find a method analogous to Stokes parameters in polarization, but at the base of roads.

Implementación y medición de un sistema cuántico abierto con la dinámica "Dephasing Channel" en la base de caminos

Mariano Uria Valencia

Propuesto para el grado de Magíster en Física

Resumen

Las base de las tecnologías cuánticas que se proponen hoy en día se basan en la característica de superposición de estados, la cual se presenta como un fenómeno de interferencia, y que da lugar a lo que se conoce como coherencia; no obstante al estar un sistema en contacto con un entorno se produce el fenómeno de decoherencia, lo que conlleva a una pérdida de la información que se quería almacenar, es decir las coherencias, no obstante existen procesos en los que se pueden recuperar la información, estos procesos son llamados no-markovianos.

En el presente trabajo hacemos un estudio sobre un sistema cuántico con una dinámica específica, llamada "Dephasing Channel", se usa una medida de coherencia para asegurarnos que trabajamos con un proceso no-markoviano y armamos un arreglo óptico en donde la mencionada dinámica está plasmada en el espacio de Hilbert de caminos.

Para la realización de las medidas del experimento, encontramos un método análogo a los parámetros de Stokes en polarización, pero en la base de caminos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido completado gracias a la interacción con todas las personas que he conocido en esta aventura llamada física, no obstante considero que debo mencionar a algunas de ellas por ser de vital importancia y por las cuales tal vez no hubiese concluido.

A mi madre Vilma Victoria, por ser una apoyo constante, por siempre estar velando porque vaya por el camino correcto, por el café en las amanecidas, por ser el motivo para levantarme cada día y por muchas cosas más. A Helen por encargarse de mis labores mientras escribía este trabajo y por su apoyo incondicional durante estos meses.

A nuestro asesor Eduardo Massoni por acompañarnos y guiarnos a lo largo de este trabajo, por sus ideas en los momentos de necesidad y la confianza depositada en nosotros. Al profesor Francisco de Zela por sus enseñanzas y aleccionamiento durante y fuera de los cursos pues no sólo nos enseñaba los fundamentos de la óptica cuántica sino también a desarrollar un pensamiento crítico.

A mi partner David con quien pasamos amanecidas y momentos de desesperación verificando la estabilidad del interferómetro. A los miembros del grupo de óptica cuántica por la recepción y los consejos, en especial a Diego por ser nuestro primer sempai y a Yonny por la idea que nos llevo a culminar las tesis.

Y también agradecer a CONCYTEC/FONDECYT por el financiamiento.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Introducción	1
2. Herramientas matemáticas	2
2.1. Completitud	2
2.2. Espacio normado	2
2.2.1. Espacios de Banach	3
2.3. Espacio producto interno	3
2.3.1. Espacio de Hilbert	3
2.4. Espacio dual	3
2.5. Semigrupo de operadores	4
3. Sistemas cuánticos	5
3.1. Sistemas cuánticos cerrados	5
3.1.1. Ecuacion de Schrodinger	5
3.1.2. Propiedades de la ecuacion de schrodinger	5
3.1.3. Soluciones	6
3.2. Sistemas cuánticos abiertos	7
3.2.1. Mapas dinámicos	8
3.2.2. Mapas dinámicos universales	9
4. Markovianidad y Coherencia	10
4.1. Coherencia	10
4.1.1. Definición	10
4.1.2. Medida de coherencia	11
4.2. Markovianidad	11
4.3. Markovianidad y coherencia	11

5. Tomografía de estados cuánticos	13
5.1. Parámetros de Stokes y esfera de Poincaré	13
5.2. Parámetros de Stokes en la base de polarización	15
5.3. Tomografía de un estado cuántico definido en polarización y caminos	17
5.4. Parámetros de Stokes en caminos	19
5.5. Parámetros de Correlación	20
6. Modelo “Dephasing Channel”	21
7. Implementación Experimental	23
7.1. Dinámica en el espacio de caminos	24
7.2. Dinámica Dephasing Channel en un arreglo óptico.....	27
8. Conclusiones	33
A. Arreglo interferométrico con BD’s	34
B. Intercambio de información entre polarización y caminos	37
C. Test de estabilidad	40
D. Medición de fases extra	43
E. Generación de estado general	46
Bibliografía	49

Índice de figuras

3.1. Sistema S en interacción con el entorno E.....	7
5.1. Esfera de Poincaré.....	15
5.2. Arreglo óptico para realizar la tomografía en polarización.....	16
5.3. Arreglo óptico para realizar la tomografía.....	18
7.1. Dinámica simple en caminos.....	24
7.2. Elipsoides dadas por la dinámica en caminos.....	25
7.3. Gráficas teórica y experimental en la esfera de Poincaré.....	26
7.4. Simulación óptica del “Dephasing Channel”.....	27
7.5. Familia de rectas generada por la dinámica DC.....	29
7.6. Gráficas teórica y experimental en la esfera de Poincaré.....	30
7.7. Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c1}	30
7.8. Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c2}	31
7.9. Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c3}	31
7.10. Comparación entre los valores teóricos y experimentales del grado de pureza.....	32
A.1. Separación y unión de haces.....	34
A.2. Interferómetro MZ con PBS's.....	35
A.3. Interferómetro compuesto por PBD's.....	36
B.1. Sistema con transformaciones de polarización simultánea.....	37
B.2. δ vs Pureza.....	39
C.1. Arreglo interferométrico test.....	40
C.2. Familia de curvas.....	41
C.3. Resultados experimentales test de estabilidad.....	42
D.1. Ubicaciones del haz en una placa.....	43

D.2. Medición de la fase.....	44
D.3. Curva de la dinámica, $\delta = 0$	45
E.1. Generación de estado general.....	46





Capítulo 1

Introducción

El estudio de los sistemas cuánticos abiertos ha sido de interés en los últimos años pues lo más común en la realidad es observar efectos del entorno sobre el sistema. Así se ha dedicado especial atención a sistemas cuya dinámica reducida presenta efectos de memoria y fenómenos de recoherencia, que nace de las correlaciones del sistema y su entorno. Así también los efectos de memoria y no markovianidad han sido probados como fuentes de tecnologías cuánticas [1-3]. Para estudiar los fenómenos antes mencionados, se utilizan sistemas de qbits que estén sujetos a desfases pues son modelos que están siempre presentes en sistemas cuánticos abiertos y estos modelos han sido estudiados de manera extensa[4-6]; desde el punto de vista teórico el modelo a utilizar en este trabajo “Dephasing Channel” (DC) se resuelve de manera exacta y por lo tanto es muy al estudiar ciertos aspectos de los sistemas cuánticos abiertos, como la no-markovianidad.

En el presente trabajo implementamos la dinámica de DC, la cual nos brinda un sistema markoviano o no-markoviano dependiendo de la elección del entorno, lo cual se logra al reinterpretar la medida del tiempo en nuestros cálculos. Se logró implementar este sistema en la base de caminos y por ello se desarrollo una tomografía de un qbit para dicha base además de una tomografía de dos qbits cuya comprobación se encuentra en el trabajo de tesis [7].

Capítulo 2

Herramientas matemáticas

En este capítulo se expondrán los conceptos matemáticos necesarios para entender las propiedades de los conceptos que utilizamos en mecánica cuántica y en particular la categoría de los mapeos que juegan un rol fundamental en el concepto de markovianidad que se usa en este trabajo.

2.1. Completitud

El espacio X se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge [8].

2.2. Espacio normado

Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida. La norma de $x \in X$, por definición, satisface:

$$\mathbf{N1} \quad \|x\| \geq 0,$$

$$\mathbf{N2} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\mathbf{N3} \quad \|ax\| = |a|\|x\|,$$

$$\mathbf{N4} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Los espacios normados son denotados por $(X, \|\cdot\|)$. La norma puede ser usada para definir una métrica $d(\cdot, \cdot)$,

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X, \quad (2.2.1)$$

la cual define una noción de distancia en X .

2.2.1. Espacios de Banach

Un espacio de Banach **B** es un espacio vectorial completo con una métrica definida en dicho espacio.

Espacio $B(X, Y)$: Es el espacio vectorial de todos los operadores lineales que llevan del espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ al espacio normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$, denotado por $(B(X, Y), \|\cdot\|)$, es así mismo un espacio normado. La norma de un elemento $T \in B(X, Y)$ es definido como

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \quad (2.2.2)$$

Teorema: Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ es también un espacio de Banach.

2.3. Espacio producto interno

Es un espacio vectorial X with con un producto interno (\cdot, \cdot) definido sobre él. El producto interno es un mapa $(\cdot, \cdot): X^* \times X \rightarrow K$, el cual satisface

IP1 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

IP2 $(ax, y) = a(x, y)$,

IP3 $(x, y) = (y, x)^*$,

IP4 $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

2.3.1. Espacio de Hilbert

Un espacio de Hilbert H es un espacio producto interno completo. Su producto interno induce a la definición de norma $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$.

2.4. Espacio dual

El espacio dual de un espacio normado X es el conjunto de todas las funcionales lineales, tal que:

$$f: X \rightarrow K. \quad (2.4.1)$$

Es denotado por X^* .

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)| \quad (2.4.2)$$

Teorema: El espacio dual X^* de un espacio normado X es un espacio de Banach (incluso si X no lo es).

2.5. Semigrupo de operadores

Sea \mathbf{B} un espacio de Banach. Los operadores $T_t : (\mathbb{R} \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$ forman un semigrupo de un parámetro, donde t es el parámetro, si

- $T_t T_s = T_{t+s}, \quad \forall t, s,$
- $T_0 = 1.$

A one-parameter semigroup is said to be uniformly continuous if the map $t \rightarrow T_t$ is continuous—i.e., $\lim_{t \rightarrow s} \|T_t - T_s\| = 0, \forall s > 0$. The following theorems allow us to write the operators in a semigroup as exponential mappings:

Teorema: Si T_t es un semigrupo uniformemente continuo, el mapeo $t \rightarrow T_t$ es diferenciable, y la derivada de T_t es

$$\frac{dT}{dt} = LT_t \quad \text{with} \quad L = \frac{dT}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (2.5.1)$$

Teorema: El operador exponencial $T(t) = e^{Lt}$ es la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= LT(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ T(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Corolario: Cualquier semigrupo uniformemente continuo puede ser expresado como $T_t = e^{Lt}$, donde L es el generador de semigrupo y es la única solución a 2.5.2.

Capítulo 3

Sistemas cuánticos

En este capítulo se revisarán las características de los sistemas cuánticos según su interacción con el entorno y como se interpretan según su estructura matemática, todo esto para llegar a la estructura de mapeos que es el tema central en este trabajo.

3.1. Sistemas cuánticos cerrados

Son sistemas cuánticos que no se encuentran en interacción con algún otro sistema.

3.1.1. Ecuacion de Schrodinger

Esta ecuacion describe el comportamiento de un sistema fisico aislado y si el sistema esta en un estado puro $|\psi(t)\rangle \in H$, su evolución será dada por:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle \quad (3.1.1)$$

Para el caso de estados mixtos se tiene la **ecuacion de Liouville**:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] \quad (3.1.2)$$

3.1.2. Propiedades de la ecuacion de schrodinger

1. Sus estados se encuentran definidos en un espacio de Hilbert pues la definición de un producto interno es de utilidad al buscar una interpretación física, tal como los valores esperados.

2. Conservación de la norma, es decir:

$$\frac{d}{dt} (\psi(t) | \psi(t)) = 0$$

3. Como la ecuación es lineal, su solución está dada por una familia de evolución $U(t, r)$

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad \text{con } U(t_0, t_0) = I$$

4. El operador evolución es una isometría (preserva la norma), eso nos lleva a decir que es unitario

El operador de traslación temporal se puede hallar según

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle &= -\frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ \square \frac{dU(t, t_0)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \square \frac{dU(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0)$$

Y observando su representación como un semigrupo de un parámetro se puede hallar su solución.

La evolución para el caso una matriz densidad será:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)$$

Se puede hacer

$$\begin{aligned} \rho(t) &= U_{(t, t_0)}[\rho(t_0)] \quad U_{(t, t_0)}[.] = U(t, t_0)[.]U^\dagger(t, t_0) \\ \square \frac{dU_{(t, t_0)}}{dt} \rho(t_0) &= -\frac{i}{\hbar} [H(t), U_{(t, t_0)} \rho(t_0)] = LU_{(t, t_0)} \rho(t_0) \\ \rightarrow \square \frac{dU_{(t, t_0)}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} H(t) U_{(t, t_0)} \end{aligned}$$

3.1.3. Soluciones

Según la forma del hamiltoniano, la forma del operador $U(t, t_0)$ será **H independiente del tiempo**

$$U(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H/\hbar}$$

H dependiente del tiempo

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t H(t') dt' / \hbar}$$

3.2. Sistemas cuánticos abiertos

Son sistemas que se encuentran en contacto con un sistema externo al cual se le puede llamar entorno y debe ser representado usando 2 espacios de Hilbert para poder diferenciarlos.

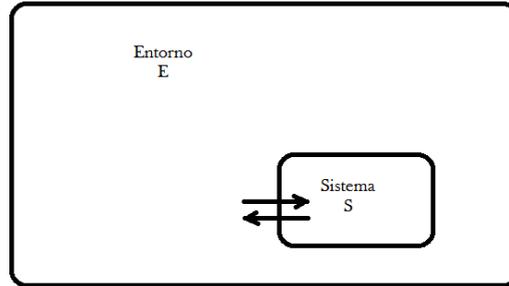


Figura 3.1: Sistema S en interacción con el entorno E

Para un sistema abierto se va a considerar al espacio de Hilbert total descompuesto en dos partes $H = H_S \otimes H_E$.

La forma de hallar el estado del sistema a estudiar viene dado por:

$$\rho_S = Tr_E[\rho] \quad (3.2.1)$$

Demostración

Para el caso que se pueda hacer $\rho = \rho_S \otimes \rho_E$

$$p_S(k) = Tr[M_k \rho_S] = Tr[(M_k \otimes I_E) \rho_S \otimes \rho_E] = Tr[(M_k \otimes I_E) \rho]$$

$$p_S(k) = Tr[\tilde{M}_k \rho] \rightarrow Tr[(\tilde{M}_k - M_k \otimes I_E) \rho]$$

Como debe cumplirse para cualquier caso:

$$\rightarrow \tilde{M}_k = M_k \otimes I_E$$

Sea el operador que mide la cantidad física de interés en el sistema A $O = O_S \otimes I_E$, entonces lo que se quiere medir será:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= Tr[O_S \otimes I_E \rho] \\ &= \sum_i \sum_j \langle i_S | \langle j_E | O_S \otimes I_E \rho | j_E \rangle | i_S \rangle \\ &= \sum_i \langle i_S | O_S \otimes \sum_j \langle j_E | \rho | j_E \rangle | i_S \rangle = \sum_i \langle i_S | O_S \otimes \rho_S | i_S \rangle \end{aligned}$$

Identificando

$$\rightarrow \rho_S = Tr_E[\rho]$$

3.2.1. Mapas dinámicos

Siendo S el sistema a estudiar, se debe hallar una transformación que nos lleve del estado inicial del sistema S al estado final del sistema S, a eso se denomina mapeo dinámico $\mathcal{E}(t_1, t_0)$.

$$\mathcal{E}(t_1, t_0) : \rho_A(t_0) \rightarrow \rho_A(t_1) \quad (3.2.2)$$

Sea el estado total inicial:

$$\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0) + \rho_{corr}(t_0) \quad (3.2.3)$$

$$Tr_S[\rho_{corr}(t_0)] = Tr_E[\rho_{corr}(t_0)] = 0$$

Donde ρ_{corr} no representa a un estado

Demostración Escribiendo la matriz densidad general de un sistema A-B

$$\rho_{SE} = \frac{\sum_i \alpha_i \sigma_i \otimes \mathbf{I}_E + \sum_j \beta_j \mathbf{I}_S \otimes \tau_j + \sum_{ij} \gamma_{ij} \sigma_i \otimes \tau_j + \mathbf{I}_S \otimes \mathbf{I}_E}{NM}$$

con las propiedades

$$\begin{aligned} Tr[\rho_{SE}] &= 1 & \rho_S &= Tr_E[\rho_{SE}] = \frac{\mathbf{I}_S + \sum_i \alpha_i \otimes \sigma_i}{N} \\ \rho_E &= Tr_S[\rho_{SE}] = \frac{\mathbf{I}_E + \sum_j \beta_j \otimes \tau_j}{M} \\ \rightarrow \rho_{SE} - \rho_S \otimes \rho_E &= \frac{\sum_{ij} (\gamma_{ij} - \alpha_i \beta_j) \sigma_i \otimes \tau_j}{NM} \\ \rightarrow \boxed{\rho_{SE} = \rho_S \otimes \rho_E + \rho_{corr}} \end{aligned}$$

Se requiere ahora hallar la forma que tiene el mapeo $\mathcal{E}(t_1, t_0)$, así el estado del sistema a tiempo t_1 será:

$$\begin{aligned} \rho_S(t_1) &= Tr_E[U_{(t_0, t_1)}(\rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0) + \rho_{corr}(t_0))U_{(t_0, t_1)}^\dagger] \\ &= \sum_{i,j} K_{ij}(t_1, t_0) \rho_S(t_0) K_{ij}^\dagger(t_1, t_0) + \delta\rho(t_1, t_0) \\ &\equiv \mathcal{E}_{(t_1, t_0)} \rho_S(t_0) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

con $K_{ij}(t_1, t_0) = \langle \lambda_i(j_E | U_{(t_0, t_1)} | i_E) \rangle$ y $\rho_E(t_0) = \sum_i \lambda_i | i_E \rangle$

$(i_E |$

Teorema: Si uno de dos sistemas en interacción se encuentra en un estado puro ($\rho_S = |\psi_S\rangle\langle\psi_S|$), entonces:

$$\rho_{corr} = 0 \quad (3.2.5)$$

Teorema: Cualquier evolución de un estado cuántico ρ_A puede ser siempre escrito en la forma:

$$\rho_S(t_1) = \sum_{ij} K_{ij}^\dagger(t_1, t_0, \rho_S) \rho_S(t_0) K_{ij}(t_1, t_0, \rho_S) \quad (3.2.6)$$

3.2.2. Mapas dinámicos universales

Del teorema anterior, ec. 3.2.6, se puede observar que el mapeo no es único, uno tiene un término ρ_{corr} mientras que el otro no cuando el término de correlación es nulo, el mapeo resulta ser único y estos son los UDM, la manera más general de escribirlos es:

$$\rho_S(t_1) = \varepsilon(t_1, t_0) \rho_S(t_0) = \sum_{i,j} K_{ij}(t_1, t_0) \rho_S(t_0) K_{ij}^\dagger(t_1, t_0)$$

Con

$$\begin{aligned} Tr[\rho_S(t_1)] &= Tr \sum_{i,j} K_{ij}^\dagger(t_1, t_0) K_{ij}(t_1, t_0) \rho_S(t_0) \\ &\rightarrow I = \sum_{i,j} K_{ij}^\dagger(t_1, t_0) K_{ij}(t_1, t_0) \end{aligned}$$

Teorema: Un mapa dinámico es UDM si y únicamente si este es obtenido de un sistema $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0)$ donde $\rho_E(t_0)$ es fijado para cualquier $\rho_D(t_0)$

Observaciones

1. Un mapa UDM debe ser siempre completamente positivo pues siempre lleva de un operador positivo a otro operador positivo, además cualquier mapeo CP se puede escribir como un UDM (teorema demostrado por Kraus).
2. Si la evolución no se da por un UDM, el requerimiento de CP es perdido.

Capítulo 4

Markovianidad y Coherencia

En este capítulo se revisarán los conceptos de coherencia por su estrecha relación con la identificación de estados cuánticos y la markovianidad por su estrecha relación con la recuperación de información “Backflow information”, así también se repasará la relación que conllevan estos 2 conceptos.

4.1. Coherencia

4.1.1. Defnición

Es una consecuencia directa del fenómeno ondulatorio del principio superposición el cual se presenta como un fenómeno de interferencia, estas coherencias se pueden observar en las componentes no diagonales de la matriz densidad [9]

Estado incoherente Son todas las matrices que sólo tienen componentes en la diagonal, es decir:

$$\rho = \sum_{i=1}^d c_i |i\rangle \langle i| \quad (4.1.1)$$

Estado coherente Todo aquel que no sea incoherente

Estado máximamente coherente Son los estados que tienen los módulos de todas sus componentes iguales, es decir:

$$|\psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d e^{i\theta_i} |i\rangle \quad (4.1.2)$$

4.1.2. Medida de coherencia

Requerimientos de esta medida dados por Baumgratz[10]

1. $C(\rho) = 0$, para ρ incoherente
2. La coherencia debe ser monótomamente decreciente para mapeos incoherentes, es decir $C(\Lambda_{ICP\ T\ P}(\rho)) < C(\rho)$ con $\Lambda_{ICP\ T\ P}$:mapeo incoherente, completamente positivo y preserva la traza
3. Convexidad, $C(p\rho_1 + (1 - p)\rho_2) \leq pC(\rho_1) + (1 - p)C(\rho_2)$

Algunas medidas que cumplen estos requerimientos son:

Basado en la entropia relativa

$$C(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho) \quad (4.1.3)$$

Basado en los elementos fuera de la diagonal

$$C = \sum_{i,j; i \neq j} |\rho_{ij}| \quad (4.1.4)$$

4.2. Markovianidad

Esta característica de un mapeo nos muestra como es que se pierde la información en un sistema y su característica opuesta, la no-markovianidad, cumple un rol importante en las tecnologías cuánticas al desear mantener información a través de estados cuánticos. Así, un mapeo dinámico $\Lambda_{t,0}$ se dice que es markoviano si es CP entonces divisible [11], donde divisible es:

$$\Lambda_{t,0} = \Lambda_{t,r}\Lambda_{r,0}, \quad \forall r \leq t \quad (4.2.1)$$

4.3. Markovianidad y coherencia

Como se mencionó en la definición de markovianidad, esta está ligada a la información que viene de los estados cuánticos, es así que pensar en la relación entre la markovianidad y la coherencia adquiere sentido, pues esta última nos muestra el grado comportamiento cuántico de un estado. Aprovechando la divisibilidad de un mapeo markoviano, y la relación entre la coherencia y los mapeos incoherentes, se puede llegar a

Teorema Sea un mapeo ICPTP (incoherente, CP y TP), un vestigio de no-markovianidad se verá cuando se cumpla:

$$\frac{dC(\rho(t))}{dt} > 0 \quad (4.3.1)$$

Demostración

Sea Λ el mapeo de una evolución ICPTP

$\Lambda_{t+\varepsilon,t}\Lambda_{t,0} = \Lambda_{t+\varepsilon,0}$ Suponemos un mapeo markoviano

$$C(\Lambda_{t,0}\rho_0) \geq C(\Lambda_{t+\varepsilon,t}\Lambda_{t,0}\rho_0)$$

$$C(\rho(t)) \geq C(\rho(t+\varepsilon)) \rightarrow 0 \geq C(\rho(t+\varepsilon)) - C(\rho(t))$$

$$\rightarrow \frac{C(\rho(t+\varepsilon)) - C(\rho(t))}{\varepsilon} \leq 0$$

En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\rho(t+\varepsilon)) - C(\rho(t))}{\varepsilon} \leq 0$$

Entonces

$$\rightarrow \boxed{\frac{dC(\rho(t))}{dt} \leq 0}$$

En consecuencia

$$\text{If } \frac{dC(\rho(t))}{dt} > 0 \rightarrow \Lambda_{t+\varepsilon,0} \neq \Lambda_{t+\varepsilon,t}\Lambda_{t,0}$$

Capítulo 5

Tomografía de estados cuánticos

La tomografía de un estado cuántico es el proceso por el cual un ensemble idéntico de estados cuánticos desconocidos es completamente caracterizado a través de una secuencia de medidas en una base con el fin de reconstruir una función de onda completa [13]. En este capítulo se muestra los conceptos básicos de tomografía, la tomografía conocida de estados de polarización y un método para realizar la tomografía de un estado de 2 qbits definido en las bases $\{|X\rangle, |Y\rangle\}$ y $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

5.1. Parámetros de Stokes y esfera de Poincaré

Una matriz densidad $\hat{\rho}$ de un qbit simple puede ser representada a través de tres parámetros $\{S_1, S_2, S_3\}$:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i \quad (5.1.1)$$

Donde las matrices σ_i son

$$\sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así los valores de S_i estarán dados por

$$S_i \equiv \text{Tr}\{\sigma_i \hat{\rho}\} \quad (5.1.2)$$

Físicamente, estos 3 parámetros corresponden a medir los valores esperados

de un par de estados

$$\begin{aligned}
 S_0 &= P_{|0\rangle} + P_{|1\rangle} \\
 S_1 &= P_{\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle+|1\rangle)} - P_{\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle-|1\rangle)} \\
 S_2 &= P_{\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle+i|1\rangle)} - P_{\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle-i|1\rangle)} \\
 S_3 &= P_{|0\rangle} - P_{|1\rangle}
 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

donde $P_{|\psi\rangle}$ es la probabilidad de medir el estado $|\psi\rangle$ y corresponden a los eigenestados de los operadores σ_i , además que $P_{|\psi\rangle} + P_{|\psi^\perp\rangle} = 1$, por ello el parámetro $S_0 = 1$.

La probabilidad de medir $|\psi\rangle$ está dada por

$$P_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle = \text{Tr}\{|\psi\rangle\langle\psi| \hat{\rho}\} \tag{5.1.4}$$

Así podemos generalizar las ecuaciones 5.1.3, usando 5.1.4, como

$$S_i = \text{Tr}\{(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \sum_j \psi_j^\perp \psi_j) \hat{\rho}\} \tag{5.1.5}$$

Así se podría definir un conjunto de parámetros a partir de mediciones de estados ortogonales con el operador correspondiente

$$\tau_i \equiv \langle \psi_i | \hat{\rho} | \psi_i \rangle - \sum_j \psi_j^\perp \psi_j \tag{5.1.6}$$

en analogía a los operadores σ_i , ya que se requieren tres parámetros para representar a un estado cuántico, estos pueden ser representados en lo que se conoce como la esfera de Poincaré (o de Bloch), fig. 5.1.

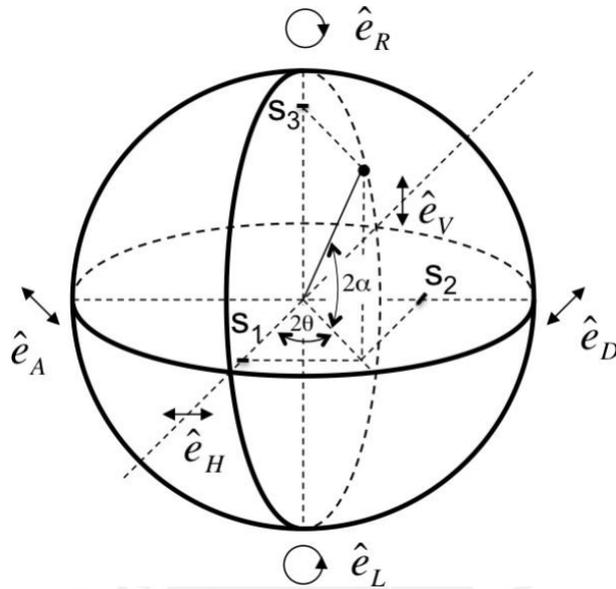


Figura 5.1: Esfera de Poincaré

Según la convención en óptica, se usa el siguiente cambio para que la representación de los estados H y V se encuentren en el eje X de la esfera de Poincaré

$$t_1 \equiv \sigma_3, t_2 \equiv \sigma_1, t_3 \equiv \sigma_2, t_0 \equiv \sigma_0 \quad (5.1.7)$$

5.2. Parámetros de Stokes en la base de polarización

Para realizar una tomografía como se vio en la sección anterior, es necesario proyectar el estado a medir en la base de los operadores $\{t_1, t_2, t_3\}$, para ello se utiliza el siguiente arreglo óptico

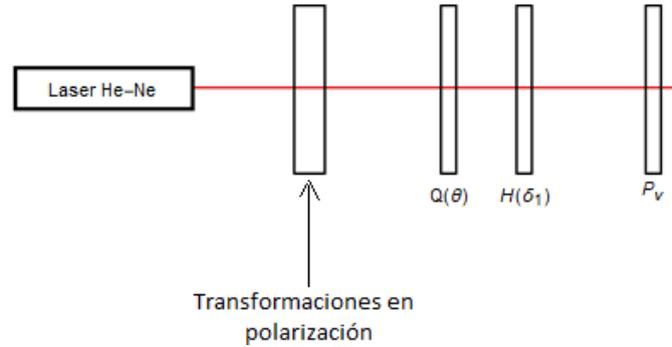


Figura 5.2: Arreglo óptico para realizar la tomografía en polarización

En el cual el estado de entrada general al cual hace la tomografía es

$$\psi = a |V, Y\rangle + \beta e^{i\varphi\beta} |V, X\rangle + \gamma e^{i\varphi\gamma} |H, Y\rangle + \delta e^{i\varphi\delta} |H, X\rangle \quad (5.2.1)$$

Para hacer las proyecciones en las distintas bases, se requiere hacer las siguientes transformaciones que nos llevan cada componente a un estado Y que es medido con la ayuda del polarizador P_v que se encuentra al final en la fig. 5.2.

Polarización	Q	H
$ h\rangle$	0	$\pi/4$
$ v\rangle$	0	0
$ d\rangle$	$\pi/4$	$-\pi/8$
$ a\rangle$	$\pi/4$	$\pi/8$
$ l\rangle$	0	$-\pi/8$
$ r\rangle$	0	$\pi/8$

Así las mediciones expresadas en intensidades vienen dadas por

$$\begin{aligned} I_H &= \gamma^2 + \delta^2 \\ I_V &= \alpha^2 + \beta^2 \\ I_D - I_A &= 2\alpha\gamma \cos(\varphi_\gamma) + 2\beta\delta \cos(\varphi_\beta - \varphi_\delta) \\ I_L - I_R &= 2\alpha\gamma \sin(\varphi_\gamma) - 2\beta\delta \sin(\varphi_\beta - \varphi_\delta) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Y al obtener los parámetros de Stokes, pueden ser fácilmente identificados

usando 5.2.2

$$\begin{aligned}
 Sp_0 = (\tau_0) &= I_H + I_V \\
 Sp_1 = (\tau_1) &= I_H - I_V \\
 Sp_2 = (\tau_2) &= I_D - I_A \\
 Sp_3 = (\tau_3) &= I_R - I_L
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

5.3. Tomografía de un estado cuántico definido en polarización y caminos

Ya que un sistema basado en la base de caminos $\{|X\rangle, |Y\rangle\}$ es análogo a un sistema de un qbit, también se puede obtener las matrices de Pauli análogas[14], mediante

$$\sigma_c = |Y\rangle\langle X|, \quad \sigma_c^\dagger = |X\rangle\langle Y|$$

$$\sigma_{c1} = \sigma_c + \sigma_c^\dagger, \quad \sigma_{c2} = i\sigma_c - i\sigma_c^\dagger, \quad \sigma_{c3} = \sigma_c^\dagger\sigma_c - \sigma_c\sigma_c^\dagger, \quad \sigma_{c0} = \sigma_c^\dagger\sigma_c + \sigma_c\sigma_c^\dagger$$

Para realizar la tomografía mencionada se requiere obtener la información de la diferencia de fases en cada brazo, por ello se necesita de un interferómetro conformado por un PBS como se observa en la fig. 5.3 (líneas sin puntear), además de intercambiar la interferencia a diferentes brazos a través de la half con ángulo θ_1 el cual cambia a 0° o 45° , dicho interferómetro va montado en un arreglo como el de la fig. E.1 (líneas punteadas) del apéndice E, a continuación los cálculos con mayor detalle.

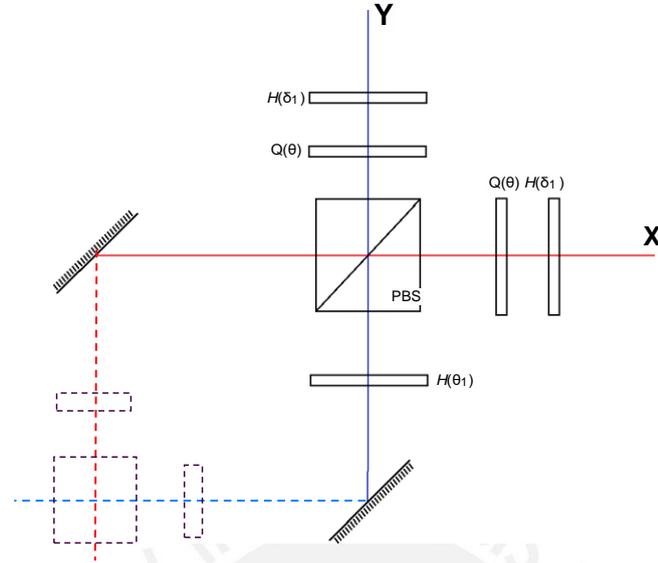


Figura 5.3: Arreglo óptico para realizar la tomografía

Sea el estado de entrada general al cual se hace la tomografía

$$\psi = a |V, Y\rangle + \beta e^{i\varphi\beta} |V, X\rangle + \gamma e^{i\varphi\gamma} |H, Y\rangle + \delta e^{i\varphi\delta} |H, X\rangle \quad (5.3.1)$$

Como se puede observar en la fig. 5.3 al final de cada brazo se tiene una configuración QH, la cual se coloca para realizar una tomografía de polarización a los haces de salida, con la cual se obtienen las siguientes medidas de intensidades, donde las intensidades primadas corresponden al caso de $\theta_1 = 45^\circ$.

$$\begin{aligned} I_{xH} &= \gamma^2 \\ I_{xV} &= \delta^2 \\ I_{xD} - I_{xA} &= 2\gamma\delta \cos(\varphi_\gamma - \varphi_\delta) \\ I_{xL} - I_{xR} &= 2\gamma\delta \sin(\varphi_\gamma - \varphi_\delta) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} I_{yH} &= \beta^2 \\ I_{yV} &= \alpha^2 \\ I_{yD} - I_{yA} &= 2\alpha\beta \cos(\varphi_\beta) \\ I_{yL} - I_{yR} &= 2\alpha\beta \sin(\varphi_\beta) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned}
I_{yH} &= \delta^2 \\
I_{yV} &= \alpha^2 \\
I_{yD} - I_{yA} &= 2\alpha\delta \cos(\varphi_\delta) \\
I_{yL} - I_{yR} &= 2\alpha\delta \sin(\varphi_\delta)
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Así utilizando las intensidades 5.3.2, 5.3.3 y 5.3.4, con algunas relaciones trigonométricas, se obtienen todos los parámetros del estado de entrada buscado 5.3.1, los cuales se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{I_{yV}} \\
\beta &= \sqrt{I_{yH}} \\
\gamma &= \sqrt{\frac{I_{xH}}{I_{xV}}} \\
\varphi_\beta &= \arctan \frac{I_{yD} - I_{yA}}{I_{yL} - I_{yR}} \\
\varphi_\delta &= \arctan \frac{I_{yL} - I_{yR}}{I_{yD} - I_{yA}} \\
\varphi^\gamma &= \arctan \frac{I_{xL} - I_{xR}}{I_{xD} - I_{xA}} + \arctan \frac{I_{yL} - I_{yR}}{I_{yD} - I_{yA}}
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

5.4. Parámetros de Stokes en caminos

De manera análoga a la tomografía en polarización, se pueden definir parámetros de Stokes relacionados a los operadores $\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}\}$ con la convención 5.1.7 y con la ayuda de las relaciones de intensidades 5.3.2 y 5.3.3, se obtiene la siguiente forma para los parámetros de Stokes en caminos a través de tomografías de polarización.

$$\begin{aligned}
S_{c0} &= (\tau_{c0}) = I_{xH} + I_{xV} + I_{yH} + I_{yV} \\
S_{c1} &= (\tau_{c1}) = -I_{xH} + I_{xV} + I_{yH} - I_{yV} \\
S_{c2} &= (\tau_{c2}) = -I_{xA} + I_{xD} - I_{yA} + I_{yD} \\
S_{c3} &= (\tau_{c3}) = I_{xL} - I_{xR} - I_{yL} + I_{yR}
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

5.5. Parámetros de Correlación

Debido a la propagación de errores en los cálculos del método de la sección 5.3 es necesario buscar un método más directo para la tomografía de 2 qbits, por ello es que de manera análoga se pasará a calcular los coeficientes de correlación, coeficientes que acompañan a los operadores cruzados en la representación de la matriz densidad

$$\rho_{cp} = \frac{\sum_i a_i \sigma_{ci} \otimes \mathbf{I}_p + \sum_i \beta_i \mathbf{I}_c \otimes \sigma_{pi} + \sum_{ij} \gamma_{ij} \sigma_{ci} \otimes \sigma_{pj} + \mathbf{I}_c \otimes \mathbf{I}_p}{4} \quad (5.5.1)$$

y utilizando la convención 5.1.7, los términos de correlación son

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{11}^{\downarrow} &= (\tau_{c1} \tau_1) = -I_{xH}^{\downarrow} + I_{xV}^{\downarrow} - I_{yH}^{\downarrow} + I_{yV}^{\downarrow} \\ \mathcal{V}_{12}^{\downarrow} &= (\tau_{c1} \tau_2) = -I_A - \frac{(I_{yD} - I_{yA})(I_{xD} - I_{xA}) - (I_{yL} - I_{yR})(I_{xL} - I_{xR})}{I_{yH}} \\ \mathcal{V}_{13}^{\downarrow} &= (\tau_{c1} \tau_3) = I_R - I_L + \frac{(I_{yL} - I_{yR})(I_{xD} - I_{xA}) + (I_{yD} - I_{yA})(I_{xL} - I_{xR})}{I_{yH}} \\ \mathcal{V}_{21}^{\downarrow} &= (\tau_{c2} \tau_1) = -I_{xA}^{\downarrow} + I_{xD}^{\downarrow} + I_{yA}^{\downarrow} - I_{yD}^{\downarrow} \\ \mathcal{V}_{22}^{\downarrow} &= (\tau_{c2} \tau_2) = I_{xA} - I_{xD} - I_{yA} + I_{yD} \\ \mathcal{V}_{23}^{\downarrow} &= (\tau_{c2} \tau_3) = I_{xL} - I_{xR} - I_{yL} + I_{yR} \\ \mathcal{V}_{31}^{\downarrow} &= (\tau_{c3} \tau_1) = I_{xL}^{\downarrow} - I_{xR}^{\downarrow} + I_{yL}^{\downarrow} - I_{yR}^{\downarrow} \\ \mathcal{V}_{32}^{\downarrow} &= (\tau_{c3} \tau_2) = -I_{xL} + I_{xR} - I_{yL} + I_{yR} \\ \mathcal{V}_{33}^{\downarrow} &= (\tau_{c3} \tau_3) = I_{xA} - I_{xD} + I_{yA} - I_{yD} \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Como alternativa para la tomografía de los 2 qbits cuyas relaciones son las ecuaciones 5.5.2, para realizar únicamente 18 medidas se obtiene las intensidades I_{xA} – I_{xD} y I_{xL} – I_{xR} a partir de las otras intensidades, quedando como resultado las siguientes relaciones para reemplazar en los parámetros de correlación

$$I_{xA} - I_{xD} = \frac{I_{xR}^{\downarrow} - I_{xL}^{\downarrow}, I_{yL} - I_{yR}, I_{yD} - I_{yA} - I_{yD} - I_{yA}, I_{yL} - I_{yR}, I_{xA} - I_{xD}, I_{yD} - I_{yA}, I_{yD} - I_{yA}, I_{yL} - I_{yR}, I_{yL} - I_{yR}}{4 I_{xV}^{\downarrow} I_{yV}^{\downarrow}} \quad (5.5.3)$$

$$I_{xL} - I_{xR} = \frac{I_{xA}^{\downarrow} - I_{xD}^{\downarrow}, I_{yL} - I_{yR}, I_{yD} - I_{yA} - I_{yD} - I_{yA}, I_{yL} - I_{yR}, I_{xR} - I_{xL}, I_{yD} - I_{yA}, I_{yD} - I_{yA}, I_{yL} - I_{yR}, I_{yL} - I_{yR}}{4 I_{xV}^{\downarrow} I_{yV}^{\downarrow}} \quad (5.5.4)$$

Capítulo 6

Modelo “Dephasing Channel”

En este modelo se considera un qbit como sistema que se encuentra en contacto con un reservorio [15], así que el hamiltoniano de todo el sistema será:

$$H = \frac{1}{2} \omega \sigma_z + \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_i \sigma_x (g_i a_i + g_i^* a_i^\dagger) \quad (6.0.1)$$

Donde el primer término representa el hamiltoniano de un qbit libre, el segundo término representa el hamiltoniano del campo (reservorio) libre cuyos operadores de creación y destrucción son a_i^\dagger y a_i respectivamente y ω_i es el i -ésimo modo del campo (reservorio) y finalmente el tercer término representa el acoplamiento entre cada modo del reservorio y el qbit. La ecuación maestra exacta en la imagen de interacción del qbit [4-6] con el hamiltoniano de la ec. 6.0.1 será:

$$\dot{\rho}(t) = \gamma(t) (\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)) \quad (6.0.2)$$

Donde $\gamma(t)$ representa a la tasa de desfase y si el reservorio se encuentra inicialmente en un estado termalizado esta tasa viene dada por [16]

$$\gamma(t) = \int_0^\infty d\omega \mathbf{J}(\omega) \coth[\omega/2k_B T] \sin(\omega t)/\omega \quad (6.0.3)$$

En términos de los operadores de Krauss, la evolución del sistema reducido viene dada por

$$\rho(t) = K_0(t)\rho(0)K_0^\dagger(t) + K_1(t)\rho(0)K_1^\dagger(t) \quad (6.0.4)$$

Con $K_0(t) = \sqrt{\frac{1 - p(t)/2}{2}}$, $K_1(t) = \sqrt{\frac{p(t)}{2}}$, $p(t) = 1 - \Gamma(t)$ y $\Gamma(t) = \exp\left[-2 \int_0^t \gamma(\theta) d\theta\right]$. Así para un estado inicial arbitrario del qbit $\rho(0)$ su estado final será

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{12}(0)\Gamma(t) \\ \rho_{21}(0)\Gamma(t) & \rho_{22}(0) \end{pmatrix} \quad (6.0.5)$$

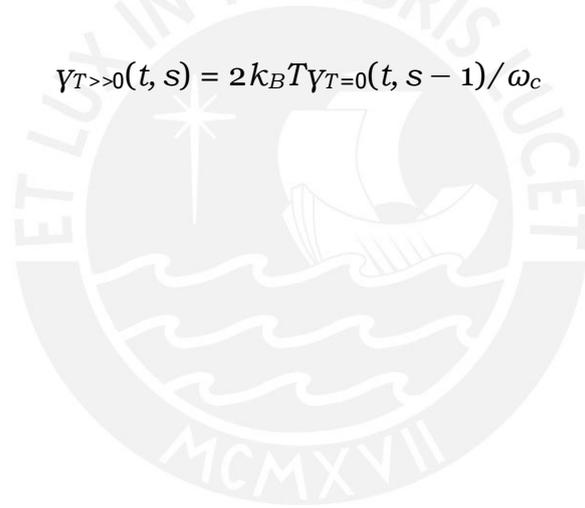
Se puede ver fácilmente que los términos de la diagonal de la matriz densidad del sistema reducido permanecen iguales pues $[\sigma_z, H_I] = 0$, lo siguiente a considerar es el tipo de reservorio, es decir la densidad espectral de frecuencias, tomaremos en cuenta un reservorio del tipo ohmico el cual es ampliamente estudiado y viene dado por la siguiente densidad espectral

$$\mathbf{J}(\omega) = \frac{\omega^s}{\omega_c^{s-1}} e^{-\omega/\omega_c} \quad (6.0.6)$$

Para este tipo de reservorios se pueden tomar los casos: sub-ohmico ($s < 1$), ohmico ($s = 1$) y super ohmico ($s > 1$). Una expresión analítica de la ec. 6.0.3 usando este tipo de reservorios, se puede encontrar para $T = 0$ y $T \gg 0$, las cuales son

$$\gamma_{T=0}(t, s) = \omega_c \sum_{1 + (\omega t)^2}^{\Sigma} \omega^{-s/2} \Gamma(s) \sin(s \arctan(\omega t)) \quad (6.0.7)$$

$$\gamma_{T \gg 0}(t, s) = 2k_B T \gamma_{T=0}(t, s - 1) / \omega_c \quad (6.0.8)$$



Capítulo 7

Implementación Experimental

En este capítulo se mostrará la validez de realizar una tomografía en caminos, creando una dinámica simple en la base $\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}$, de la cual se obtendrán sus parámetros de Stokes en caminos, con las relaciones 5.4.1, para luego compararlo con resultados experimentales.

Luego de probar la validez de la tomografía en caminos, se explicará la forma en la que se plasmó la dinámica “Dephasing Channel” en nuestro experimento, es decir reproducir la matriz densidad de la ec. 6.0.1. Pero se hace una aclaración previa, las gráficas de las dinámicas que se muestran a lo largo de este capítulo se muestran como interferómetros Mach Zender por su simplicidad en su interpretación, sin embargo se realizó la analogía como se muestra en el apéndice A por razones de estabilidad, estabilidad que se probó como se muestra en el apéndice C, pues como se verá, la fase juega un papel fundamental en la generación de la dinámica que buscamos.

Una vez implementada la dinámica, se verá como es que su comportamiento pasa de ser markoviano a no-markoviano a través de la interpretación de su variable temporal, es decir la relación que tiene la elección del tiempo y la densidad espectral de su entorno ec. 6.0.6.

7.1. Dinámica en el espacio de caminos

Como se mencionó, se implementa una dinámica simple en la base de caminos, dada por el arreglo óptico de la fig. 7.1.

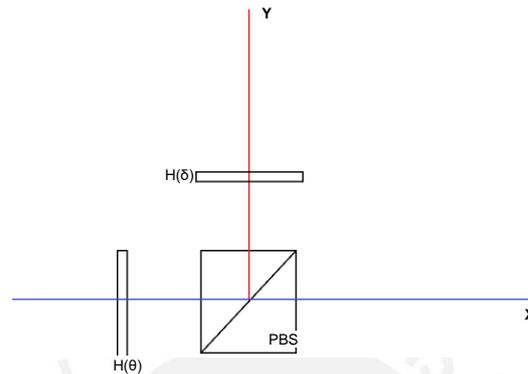


Figura 7.1: Dinámica simple en caminos

En esta dinámica, el parámetro θ es el que evoluciona y el parámetro δ es quien nos define la forma de la evolución, para mostrar esto, se realiza el siguiente análisis del arreglo.

1. Sea el estado de polarización horizontal que llega de la fuente

$$\psi_0 = |X, H\rangle \quad (7.1.1)$$

2. El estado ψ_0 es transformado en polarización por la half $H(\theta)$ para luego pasar por una transformación en caminos dada por el PBS

$$\psi_1 = PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (7.1.2)$$

3. Al estado ψ_1 se le aplica un transformación en polarización y caminos dada por la half $H(\delta)$ colocada en el camino Y y su diferencia de caminos expresada por la fase φ , esto nos genera un intercambio de información entre polarización y caminos, dicha necesidad se explica en el apéndice B

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle \langle X| + e^{i\varphi} H(\delta) \cdot |Y\rangle \langle Y|) \cdot \psi_1 \quad (7.1.3)$$

Los parámetros de Stokes de caminos del estado ψ_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} S_{c1} &= \cos(4\theta) \\ S_{c2} &= \cos(\varphi) \sin(4\theta) \sin(2\delta) \\ S_{c3} &= \sin(\varphi) \sin(4\theta) \sin(2\delta) \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Definiendo la dinámica con el parámetro $\delta = 22,5^\circ$, se generan elipses en la esfera de Poincaré, lo que da lugar a una familia de curvas, fig. 7.2, al tener como parámetro libre a la fase φ

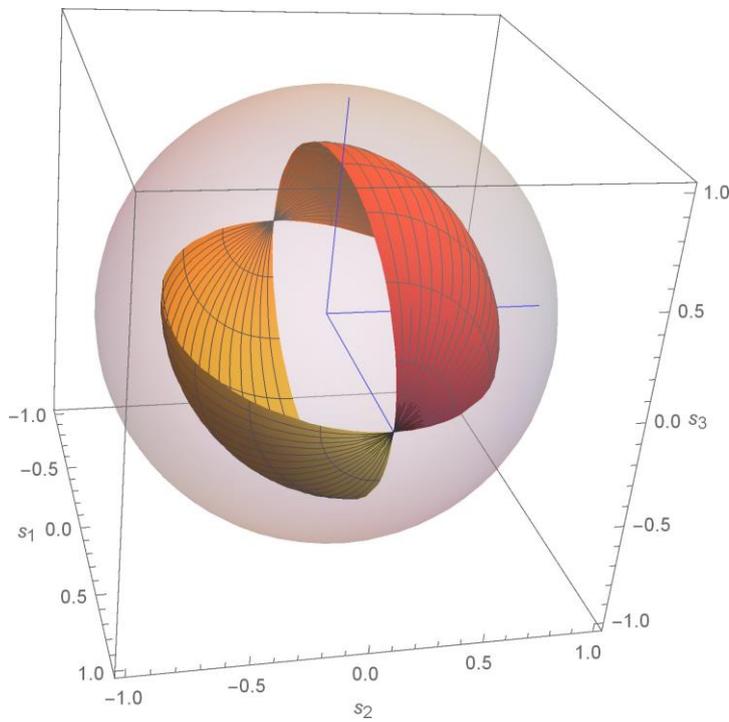


Figura 7.2: Elipsoides dadas por la dinámica en caminos

Prueba experimental

Una vez implementada la dinámica de la fig. 7.1, se pasó a realizar la tomografía en caminos según 5.4 utilizando un PBS y una half como lo muestra la fig. 5.2 así se obtienen los valores experimentales como se muestran en la fig. 7.3, puntos azules, con errores estimados, esferas semitransparentes.

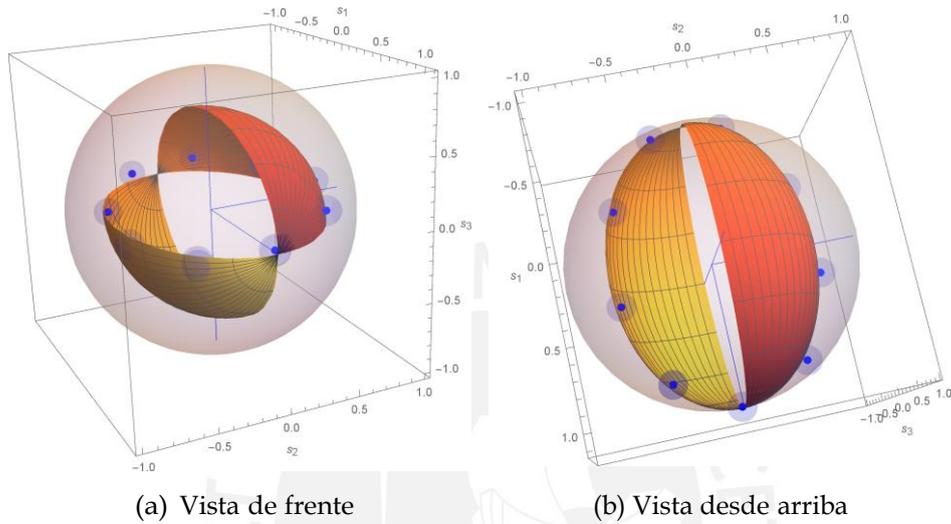


Figura 7.3: Gráficas teórica y experimental en la esfera de Poincaré

Como se puede observar, los valores experimentales coinciden con una de las curvas que se esperaba, la cual es dada por una fase constante, así se prueba la validez de la tomografía en caminos; una explicación más detallada de esta prueba y la prueba de una tomografía completa del sistema, 5.5 se encuentra en la tesis de la referencia [7].

7.2. Dinámica Dephasing Channel en un arreglo óptico

A continuación se realizará el análisis del arreglo óptico de la fig. 7.4 para así demostrar que la matriz densidad que se obtiene en la base de caminos corresponde a la dinámica DC (ec. 6.0.5).

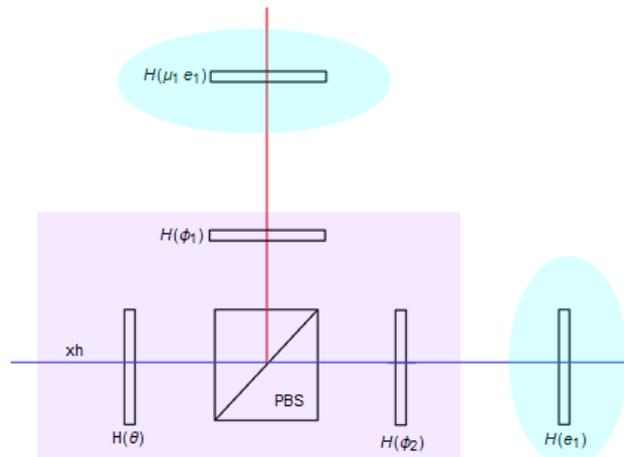


Figura 7.4: Simulación óptica del “Dephasing Channel”

1. Sea el estado de polarización horizontal que llega de la fuente

$$\psi_0 = |XH\rangle \quad (7.2.1)$$

Para lo que sigue, se realiza el análisis en 2 partes en la fig. 7.4, la generación del estado (zona violeta) y la implementación de la dinámica (zona turquesa)

2. Generación de un estado del tipo $\rho_{F \otimes \rho_C}$, es decir un estado no correlacionado, pues según la sec. 3.2.2 no se podría generar un mapeo CP, pues se requiere de un mapeo ICPTP para este trabajo.

El estado ψ_0 es transformado en polarización por la half $H(\theta)$ y en caminos por el PBS, según

$$\psi_1 = PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (7.2.2)$$

Luego, para obtener un estado no correlacionado se colocan las placas half $H(\phi_1)$ y $H(\phi_2)$, la primera con $\phi_2 = 0^\circ$ que sólo se usa para

no alterar la diferencia de caminos y la segunda con $\varphi_1 = 45^\circ$ para transformar la polarización $|V\rangle \rightarrow |H\rangle$

$$\psi_2 = H(\varphi_2) \cdot |X\rangle\langle X| + H(\varphi_1) \cdot e^{i\varphi} |Y\rangle\langle Y| \cdot \psi_1 \quad (7.2.3)$$

Así el estado generado será $\psi_2 = \sin(2\theta) e^{i\varphi} |Y\rangle + \cos(2\theta) |X\rangle \otimes |H\rangle$

3. Definición de la dinámica, para ello se utilizan 2 placas half las cuales tienen relacionados sus ángulos a través del parámetro e_1

$$\psi_3 = U_{DC} \cdot \psi_2 = (H(e_1) \cdot |X\rangle\langle X| + H(\mu_1 e_1) \cdot |Y\rangle\langle Y|) \cdot \psi_2 \quad (7.2.4)$$

- Si tomamos una matriz densidad inicial ($\rho_c(0)$) y le aplicamos la transformación U_{DC} , llegamos a la matriz densidad final ($\rho_c(e_1)$)

$$\rho_c(0) \xrightarrow{U_{DC}} \rho_c(e_1) \quad (7.2.5)$$

Donde

$$\rho_c(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (7.2.6)$$

$$\rho_c(e_1) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \cos(2e_1(\mu_1 - 1)) \\ \rho_{21} \cos(2e_1(\mu_1 - 1)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (7.2.7)$$

Al comparar la matriz densidad $\rho_c(e_1)$ con la matriz densidad de la ec. 6.0.5, se puede reconocer que el parámetro $\Gamma(t)$ es igual a

$$\Gamma(e_1) = \cos(2e_1(\mu_1 - 1)) \quad (7.2.8)$$

Y su relación con el tiempo para un sistema markoviano [9], con $s = 1$ y $T = 0$, utilizando la ec. 6.0.7

$$t = \frac{1}{\omega_0} \frac{1 - \cos(2e_1(\mu_1 - 1))}{\cos(2e_1(\mu_1 - 1))} \quad (7.2.9)$$

Con lo cual se nota que si $\mu_1 = 0$, con $e_1 \in [0^\circ, 90^\circ]$ entonces $t \in [0, \infty]$, para ver un caso no-markoviano basta con hacer $s=3$ y evaluar el parámetro e_1 .

Los parámetros de Stokes de caminos del estado ψ_3 vienen dados por

$$\begin{aligned} S_{c1} &= \cos(4\theta) \\ S_{c2} &= \sin(4\theta) \cos(\varphi) \cos(2e_1(\mu_1 - 1)) \\ S_{c3} &= \sin(4\theta) \sin(\varphi) \cos(2e_1(\mu_1 - 1)) \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

En sus parámetros, se puede observar la importancia de la fase en la determinación de la dinámica, tomando como parámetro que evoluciona a e_1 , la gráfica en la esfera de Poincaré sería una recta que pasa por el origen, para una fase dada, ya que la fase no es muy fácil de controlar, se da la opción de la familia de curvas de la fig. 7.5

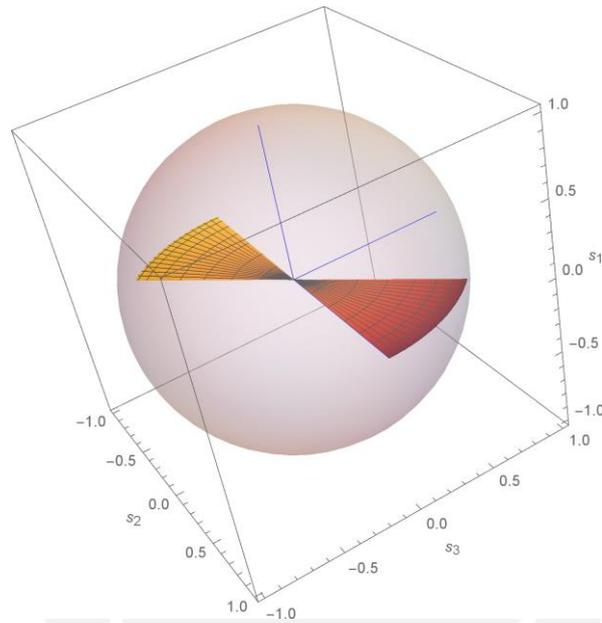
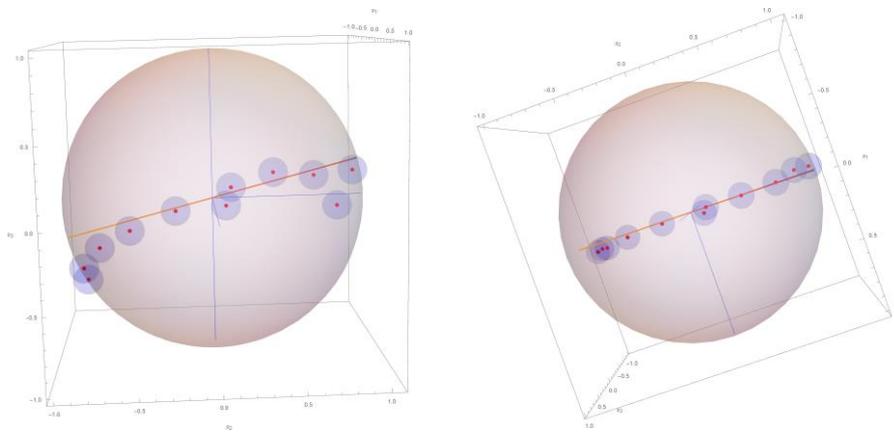


Figura 7.5: Familia de rectas generada por la dinámica DC

Prueba experimental

Para comprobar la pérdida de coherencias por parte del sistema, se eligió un estado máximamente coherente, es decir $\theta = 22,5^\circ$ y $\mu = 0$, dejando así el parámetro φ libre (no afecta a la coherencia), el cual se calculó de los valores experimentales, además a los valores obtenidos se les realizó un corrección de fase, ver apéndice D.

Así los resultados conseguidos fueron los que se muestran en la fig. 7.6, en ellos se observan una tendencia a formar una recta en la familia de rectas antes mencionada, pero con una desviación en el parámetro S_{c3} y una baja desviación en el parámetro S_{c1} .



(a) Vista de frente

(b) Vista desde arriba

Figura 7.6: Gráficas teórica y experimental en la esfera de Poincaré

La fase promedio fue $\varphi = 0,242$ y con ello se obtuvieron las gráficas de las figuras 7.7, 7.8 y 7.9. Para el parámetro S_{c1} , fig. 7.7, se observa un comportamiento casi constante con ayuda de las barras de error, tal como se esperaba pues este parámetro sólo tiene una dependencia del ángulo θ y este fue constante.

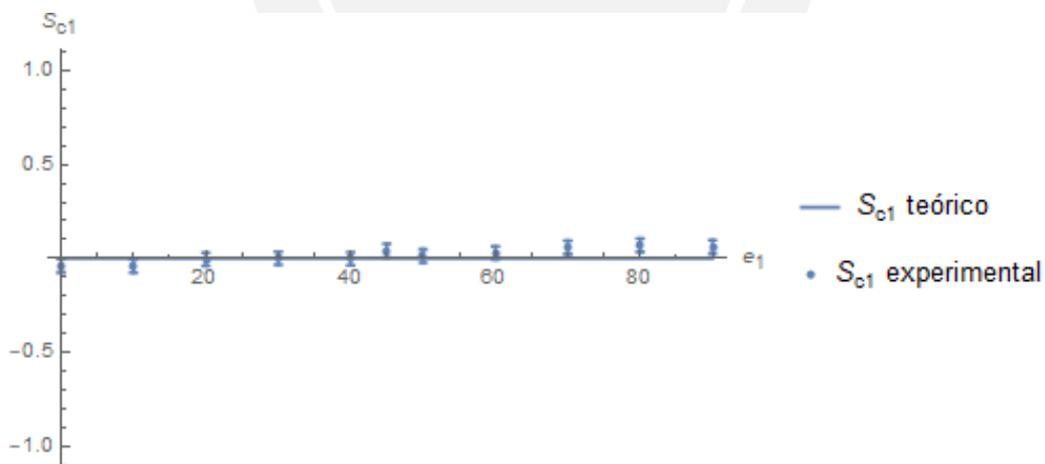


Figura 7.7: Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c1}

Para el parámetro S_{c2} , fig. 7.8, se observa un comportamiento que sigue la tendencia de la curva teórica con ayuda de las barras de error.

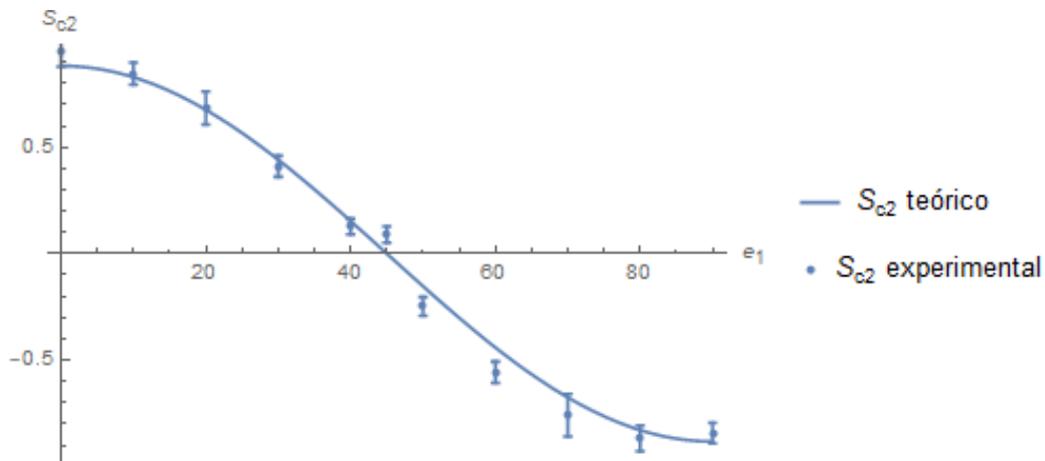


Figura 7.8: Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c2}

Para el parámetro S_{c3} , fig. 7.9, se observa un comportamiento que sigue la tendencia de la curva teórica con ayuda de las barras de error sólo a partir de $e_1 = 40^\circ$, antes de ello se observa que no lleva una correspondencia con los resultados teóricos, esto se debe a un error en el cálculo de la fase, la cual pudo ajustarse bien para el parámetro S_{c2} pero no para el parámetro S_{c3} , esta inconveniencia puede ser mejorada al realizar una mejor medida de fases, pues al realizar dicha medida hubo una confusión en las placas de tomografía.

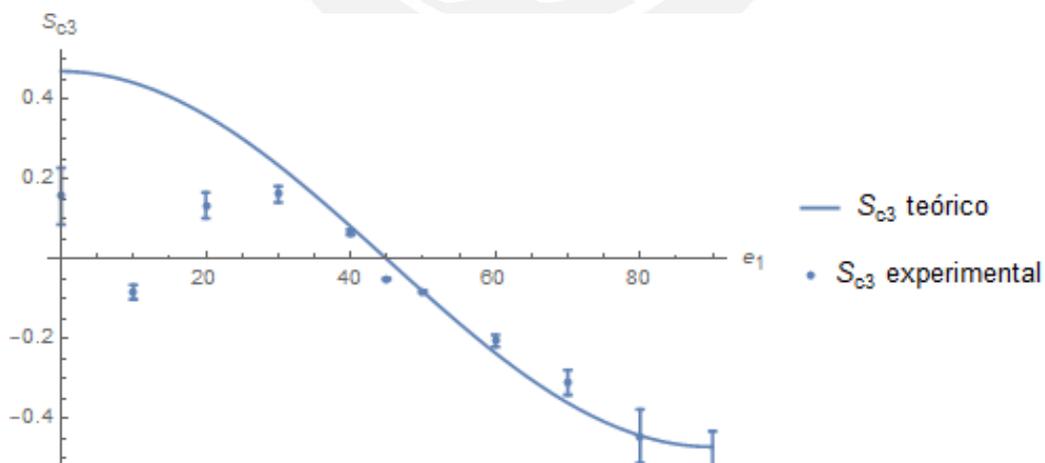


Figura 7.9: Comparación entre los valores teóricos y experimentales para el parámetro S_{c3}

La fig. 7.10 muestra la comparación de los datos experimentales para el grado de pureza de los parámetros de Stokes en caminos, las barras de error en este caso salen grandes debido a la propagación de errores que se acumula debido a los errores debido a cada parámetro; no obstante, estos valores coinciden de manera aceptable por seguir la tendencia.

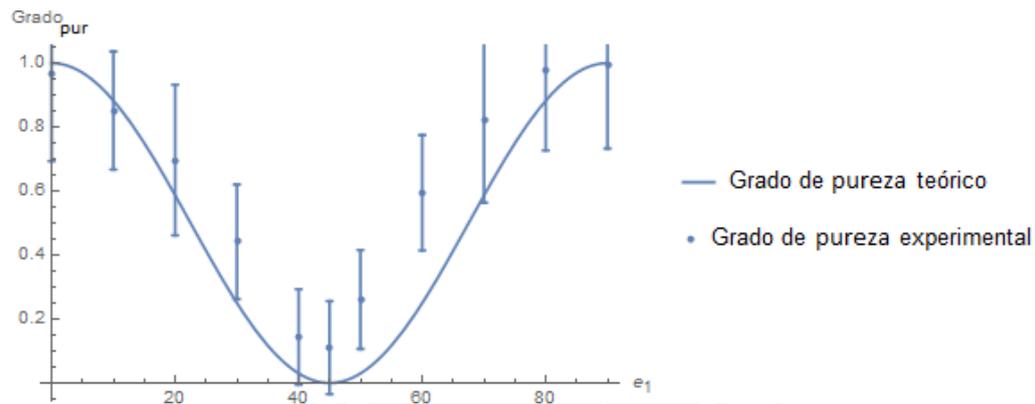


Figura 7.10: Comparación entre los valores teóricos y experimentales del grado de pureza

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis tratamos principalmente dos tópicos, como primer tópico se trató de medir una evolución definida en la base de caminos realizando una extensión de los parámetros de Stokes en polarizaciones lo cual se explicó con detalles en la sección 5.4, este tópico desarrollado de manera teórica paso luego a ser probados de manera experimental en la sección 7.1.

Como segundo tópico, se trató la implementación de un sistema cuántico abierto que cambie de un régimen markoviano a no-markoviano, esto se logró al plasmar la dinámica de “Dephasing channel” en la base de caminos $\{|X\rangle, |Y\rangle\}$ de un arreglo óptico (sección 7.2), cuyo comportamiento varía según la interpretación que se pueda dar al tiempo según el entorno; la prueba experimental dada llega a demostrar la validez de la implementación de dicha dinámica.

Como punto adicional a este trabajo, se probó en el apéndice E que con el arreglo interferométrico que se usó en el presente trabajo se puede generar cualquier estado de un sistema de 2-qbits definido en polarización y caminos.

Apéndice A

Arreglo interferométrico con BD's

Para los objetivos de este trabajo se requirió de un arreglo interferométrico que sea muy estable pues la fase juega un rol crucial en nuestros cálculos, así que los arreglos del tipo Mach Zender, en adelante MZ, y del tipo Sagnac no cumplen con el requisito de estabilidad, es por ello que se realizó un arreglo interferométrico compuesto por PBD's (Polarizing Beam Displacer) pues al no tener espejos en los caminos no se añaden fases que pudiesen ser poco controlables debido al movimiento de los espejos, así el primer objetivo fue encontrar una manera en que los haces separados por el PBD fuesen unidos nuevamente (fig A.1), ello se logra al separar el estado de entrada por su polarización $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ al atravesar la placa half a 45° se intercambian sus polarizaciones, $h \Leftrightarrow v$, para que al desviarse el haz con polarización h , este coincida con el haz no desviado con polarización v y para recuperar el estado de entrada por último se le hace atravesar una placa half a 45° para recuperar su estado inicial y con lo cual se comprueba que puede ser utilizado como un interferómetro.

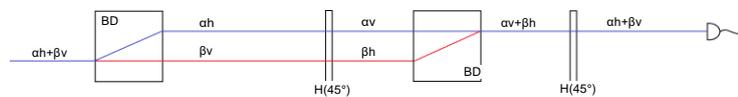


Figura A.1: Separación y unión de haces

Una vez realizado el primer objetivo, lo siguiente es reproducir las salidas de un interferómetro Mach-Zender (MZ) en el interferómetro formado por BD's, para ello se hace un análisis del MZ (fig A.2).

1. El estado de entrada es $|h\rangle$ al cual se le hace una transformación en polarizaciones con la half $H(\theta)$.

2. El estado final después de la half es ahora transformado por un PBS, el cual lo separa en dos caminos dependiendo de sus polarizaciones.
3. Al estado que se genera después de salir del PBS, se le realizan transformaciones de carácter general T_1 y T_2 , logrando así los estados $\alpha_1 |h\rangle + \beta_1 |v\rangle$ y $\alpha_2 |h\rangle + \beta_2 |v\rangle$ respectivamente.
4. Por último, a los estados que salen en ambos brazos se los hace interferir con ayuda de un PBS, lo cual no genera como salidas los estados $\alpha_2 |h\rangle + \beta_1 |v\rangle$ en el camino X y $\alpha_1 |h\rangle + \beta_2 |v\rangle$ en el camino Y.

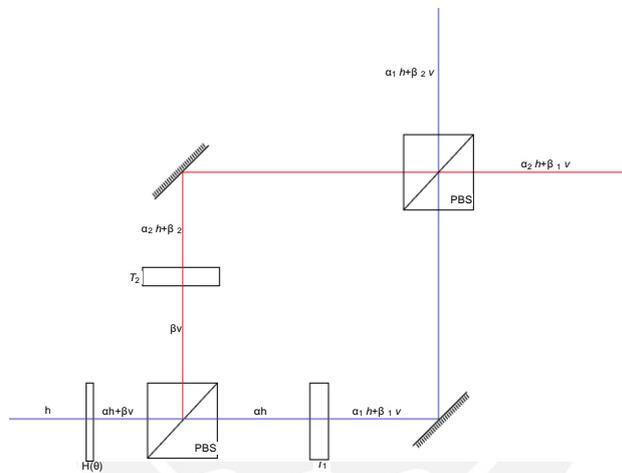


Figura A.2: Interferómetro MZ con PBS's

Así para poder obtener nuevamente las salidas del interferómetro de la fig. A.2 se hacen transformaciones que cambien las polarizaciones antes y después del BD, para comprobar la equivalencia entre los interferómetros MZ y el conformado por PBD's se hace el análisis del arreglo de la fig. A.3.

1. Similar al caso del MZ, el estado de entrada es $|h\rangle$ al cual se le hace una transformación en polarizaciones con la half $H(\theta)$.
2. El estado final después de la half es ahora transformado por un PBD, el cual lo separa en dos caminos dependiendo de sus polarizaciones, sólo desvía la polarización $|h\rangle$.
3. Al estado que se genera después de salir del PBD, se le realizan transformaciones de carácter general representadas por T, logrando así los

estados $\alpha_1 |h\rangle + \beta_1 |v\rangle$ y $\alpha_2 |h\rangle + \beta_2 |v\rangle$ en los caminos desviado y no desviado respectivamente.

- Luego se hacen dos transformaciones distintas dependiendo que camino del MZ se quiere generar

Para obtener la **salida de X**, se realiza una transformación $H(0^\circ)$ seguida por el PBD, la cual genera 3 salidas y nuevamente al final se aplica una transformación $H(0^\circ)$, donde se puede reconocer que el camino del medio es el que se busca mientras que los otros 2 caminos son bloqueados.

Para obtener la **salida de Y**, se realiza una transformación $H(45^\circ)$, que intercambia las polarizaciones, seguida por el PBD, la cual genera 3 salidas y nuevamente al final se aplica una transformación $H(45^\circ)$, que intercambia las polarizaciones nuevamente, al final se puede reconocer que el camino del medio es el que se busca mientras que los otros 2 caminos son bloqueados.

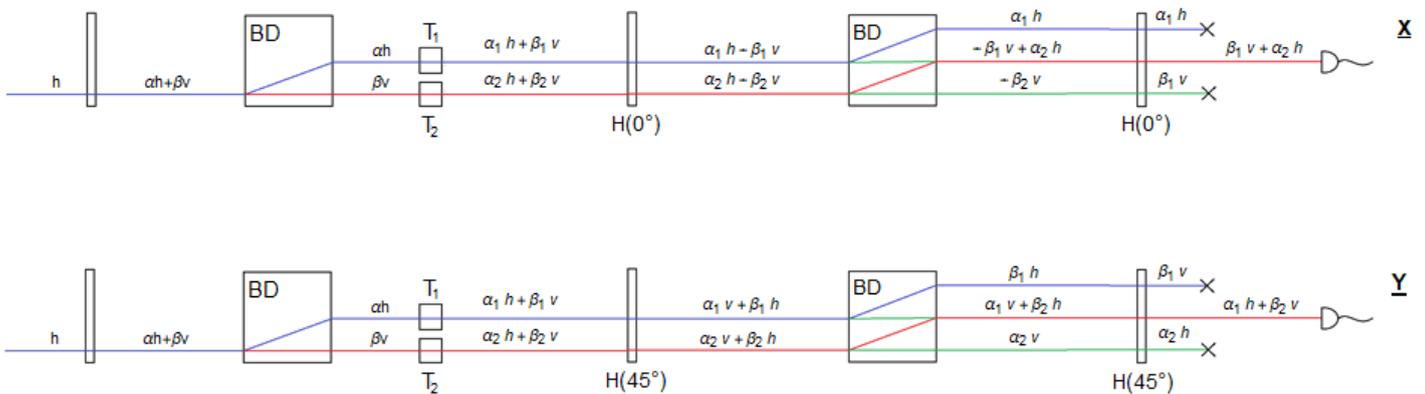


Figura A.3: Interferómetro compuesto por PBD's

Con el arreglo óptico de la fig. A.3 es con el que se trabajó pues tiene una analogía directa con un interferómetro MZ, como se ha podido comprobar en el análisis.

Apéndice B

Intercambio de información entre polarización y caminos

Para justificar la necesidad que la transformación se dé de manera independiente en cada brazo se analizó como cambia el grado de polarización al realizar operaciones en ambos brazos de manera simultánea, para ello se tomó el sistema de la fig B.1 donde se prepara el estado con la half inicial con ángulo θ y un BD que separa los haces según sus polarizaciones para luego sufrir transformaciones consecutivas por una half y luego una quarter, a continuación se presentan los cálculos detallados

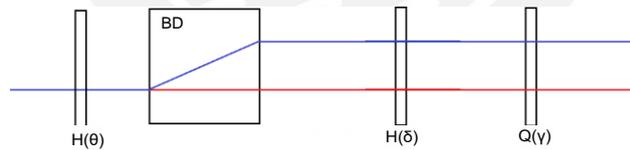


Figura B.1: Sistema con transformaciones de polarización simultánea

$$\psi_0 = |XH\rangle \quad (\text{B.0.1})$$

$$\psi_1 = PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (\text{B.0.2})$$

$$\psi_2 = Q(\gamma) \cdot H(\delta) \cdot \sum |X\rangle\langle X| + e^{i\varphi} |Y\rangle\langle Y| \cdot \psi_1 \quad (\text{B.0.3})$$

Para nuestros cálculos se asignó la etiqueta de camino X al haz que no se desvía y la etiqueta de camino Y al haz desviado, el estado de entrada

está dado entonces por la eq. B.0.1 el cual luego atraviesa una placa half y BD que realiza una transformación similar a un PBS, eq. B.0.2, para luego ser transformado sucesivamente por placas half y quarter, que operan sobre ambos caminos simultáneamente.

Una vez realizada la evolución, se calculó sus parámetros de Stokes en caminos, eq. B.0.4, y sus parámetros de Stokes en polarización, eq. B.0.6, para luego calcular los grados de polarización en caminos, eq. B.0.5, y en polarización, eq. B.0.7.

$$\begin{aligned}rc_1 &= \cos(4\theta) \\rc_2 &= 0\end{aligned}\tag{B.0.4}$$

$$rc_3 = 0$$

$$rc_1^2 + rc_2^2 + rc_3^2 = \cos^2(4\theta)\tag{B.0.5}$$

$$\begin{aligned}rp_1 &= \cos(4\theta) \cos(2\gamma) \cos(4\delta - 2\gamma) \\rp_2 &= \cos(4\theta) \cos(2\gamma) \sin(4\delta - 2\gamma)\end{aligned}\tag{B.0.6}$$

$$rp_3 = \cos(4\theta) \sin(4\delta - 2\gamma)$$

$$rp_1^2 + rp_2^2 + rp_3^2 = \cos^2(4\theta)\tag{B.0.7}$$

De las eq. B.0.5 y eq. B.0.7, se puede observar que el grado de polarización, íntimamente relacionado con el grado de pureza, no cambia al realizar transformaciones simultáneas en ambos caminos con lo que concluimos que no es posible realizar una transformación en ambos caminos que intercambie información entre los sistemas definidos en polarización y caminos.

Para comprobar el cálculo anteriormente presentado, se realizó una evolución en ambos brazos dados por una placa half con un ángulo δ que va cambiando y obtenemos el grado de polarización para cada caso; realizando un ajuste lineal, se observó que la inclinación es $6 \cdot 10^{-5}$ con lo cual se asegura que está en la horizontal y por lo tanto que el grado de polarización no cambia

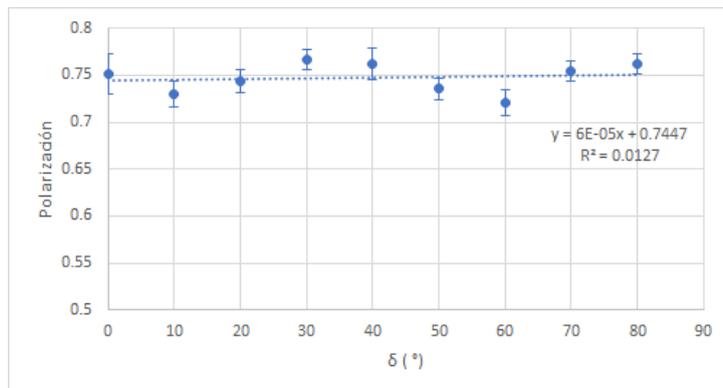
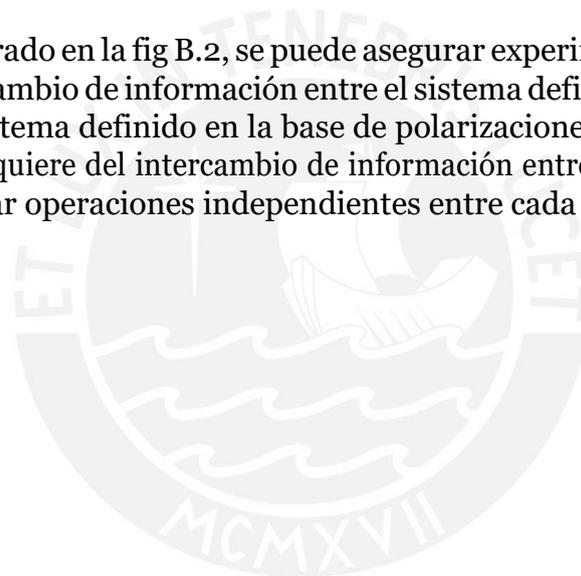


Figura B.2: δ vs Pureza

Con lo mostrado en la fig B.2, se puede asegurar experimentalmente que no existe intercambio de información entre el sistema definido en la base de caminos y el sistema definido en la base de polarizaciones; ya que nuestra dinámica DC requiere del intercambio de información entre dichos sistemas, se deben realizar operaciones independientes entre cada brazo



Apéndice C

Test de estabilidad

Para verificar la estabilidad de nuestro arreglo interferométrico, se generó una dinámica test dada según el arreglo óptico de la fig. C.1

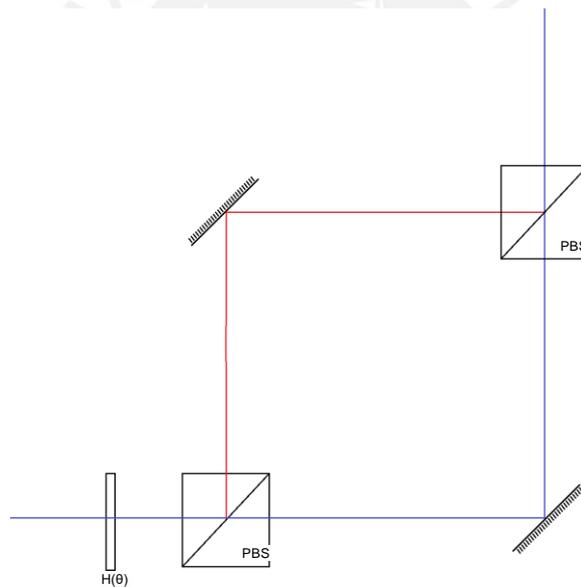


Figura C.1: Arreglo interferométrico test

En esta dinámica, la diferencia de fase vendrá dada por la diferencia de caminos ópticos, lo cual se requiere que no varíe para tener una fase constante, así se realiza el análisis del arreglo.

1. Sea el estado horizontal que viene de la fuente

$$\psi_0 = |XH\rangle \tag{C.0.1}$$

2. El parámetro θ es quién generará la dinámica a través de la siguiente transformación, la cual es dividida en diferentes caminos por el PBS

$$\psi_1 = PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (\text{C.o.2})$$

3. Una vez generada la dinámica, la diferencia de caminos ópticos le agregará una fase φ en el camino Y, para luego interferir ambos caminos utilizando un PBS

$$\psi_2 = PBS \cdot (|X\rangle\langle X| + e^{i\varphi} |Y\rangle\langle Y|) \cdot \psi_1 \quad (\text{C.o.3})$$

Los parámetros de Stokes en polarización del estado ψ_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} S_{p1} &= \cos(4\theta) \\ S_{p2} &= \cos(\varphi) \sin(4\theta) \\ S_{p3} &= \sin(\varphi) \sin(4\theta) \end{aligned} \quad (\text{C.o.4})$$

Se puede observar que estos parámetros tienen una dependencia explícita de la fase, lo que se buscaba, es así que graficando la curva para una fase dada se genera una circunferencia y para distintos valores de la fase φ se genera la familia de curvas de la fig. C.2

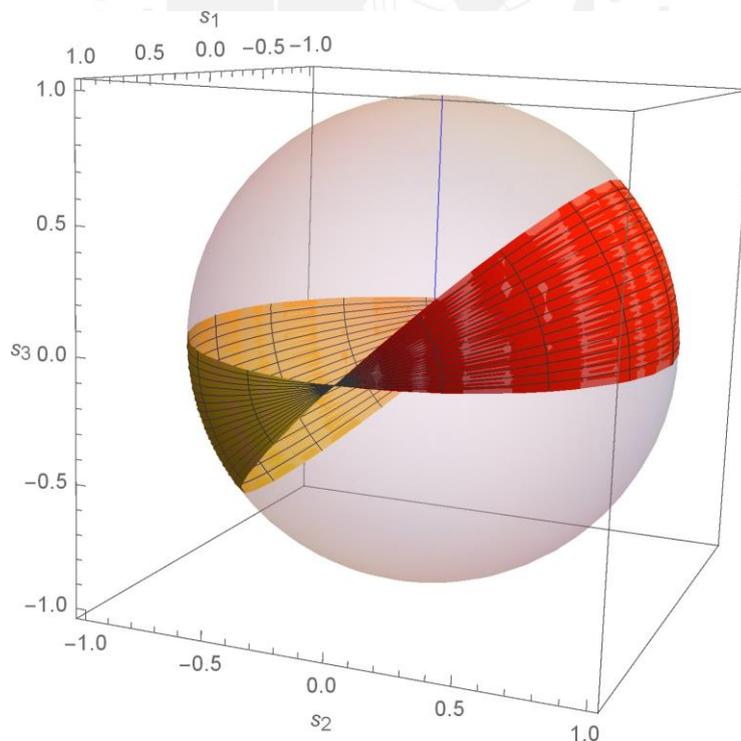


Figura C.2: Familia de curvas

Para el arreglo final utilizado en este trabajo, ver cap. A, se realizó este test de estabilidad, obteniendo los resultados que se pueden ver en la figura a continuación, donde los puntos azules son los datos experimentales y la esfera transparente son errores estimados.

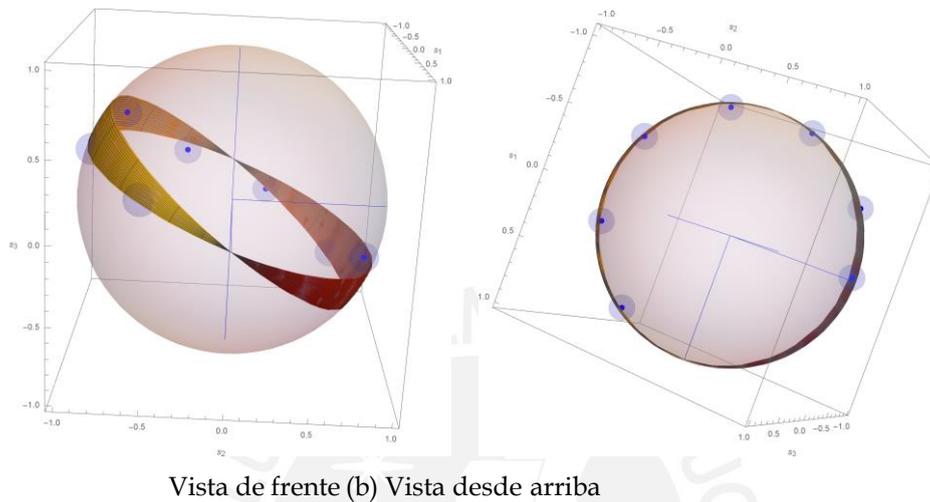


Figura C.3: Resultados experimentales test de estabilidad

De estos gráficos se puede concluir que al realizar las mediciones, la fase se mantiene constante, pues la inclinación de la circunferencia no cambia y los datos siguen la tendencia de formar una circunferencia tal cual se esperaba. Al probar este mismo test en otros arreglos interferométricos no se obtuvieron resultados mejores.

Apéndice D

Medición de fases extra

Al implementar el arreglo de la fig. 7.4, se tuvo que colocar las placas de manera diferente a lo usual, izquierda fig. D.1, se colocó de la forma que está en la derecha de la fig. D.1; esto ocasionó algunos problemas al medir la fase, añadía una fase que dependía de la posición en la placa, es por ello que se tuvo que implementar el arreglo de la fig. D.2 para medir la fase en cada punto

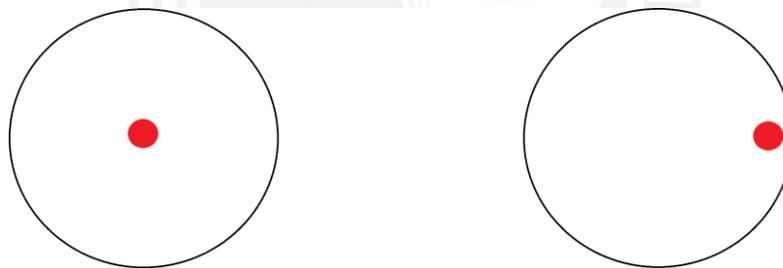


Figura D.1: Ubicaciones del haz en una placa

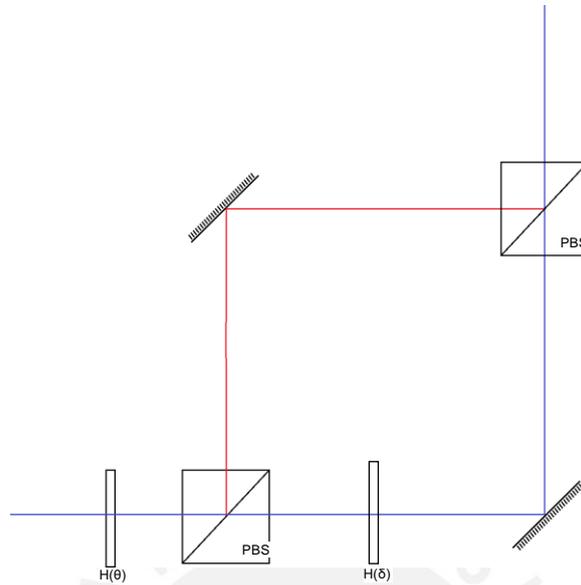


Figura D.2: Medición de la fase

Aquí el análisis de la dinámica del arreglo

1. Sea el estado de entrada horizontal que llega de la fuente

$$\psi_0 = |XH\rangle \quad (\text{D.0.1})$$

2. El estado ψ_0 es transformado por la half $H(\theta)$ y luego es dividido según sus polarizaciones por el PBS, el parámetro θ es el que será variable

$$\psi_1 = PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (\text{D.0.2})$$

3. Luego, el estado ψ_1 es modificado por la half $H(\delta)$ en el camino X y se añade una fase φ por el camino Y debido a la diferencia de caminos, la cual no debería variar, y debido a la half (se está suponiendo un comportamiento anisotrópico y por ello podría añadir fases dependiendo de su ángulo)

$$\psi_2 = PBS \cdot m \cdot \left[H(\delta) |X\rangle \langle X| + e^{i\varphi} |Y\rangle \langle Y| \right] \cdot \psi_1 \quad (\text{D.0.3})$$

Los parámetros de Stokes en polarización del estado ψ_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} S_{p1} &= \cos^2(2\theta) \cos^2(2\delta) - \sin^2(2\theta) \\ S_{p2} &= \sin(4\theta) \cos(\varphi) \cos(2\delta) \\ S_{p3} &= \sin(4\theta) \sin(\varphi) \cos(2\delta) \end{aligned} \quad (\text{D.0.4})$$

Donde la dependencia de la fase φ es explícita; así que, si la fase se mantuviese constante la gráfica para un $\delta = 0$ sería como se muestra en la siguiente figura.

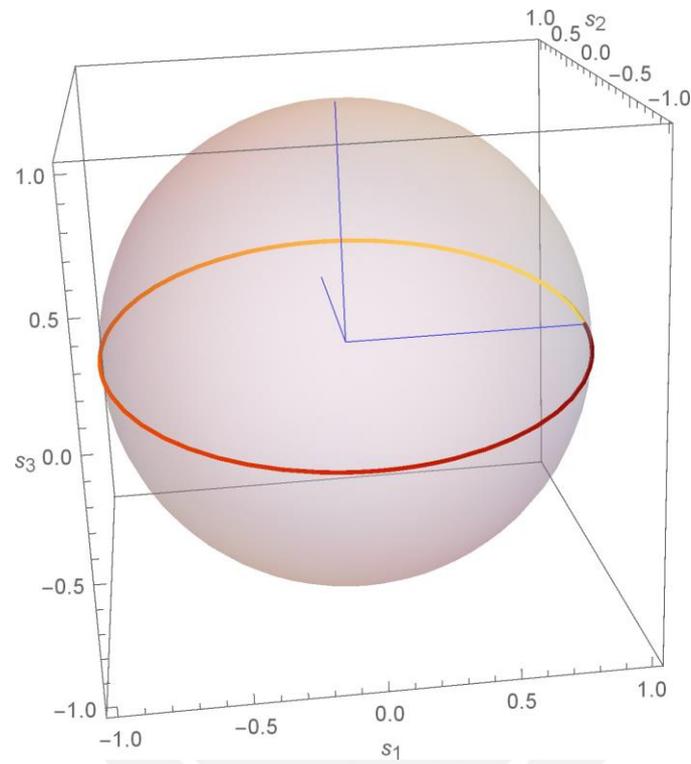


Figura D.3: Curva de la dinámica, $\delta = 0$

Dicha fase se mide con la inclinación en cada curva con diferentes valores de δ , y se hacen las correcciones del caso a las fases obtenidas en el experimento.

Apéndice E

Generación de estado general

Para hacer que nuestro arreglo sea de propósito general, es necesario buscar un método con el cual se pueda generar cualquier estado, tales como los estados de Bell por ejemplo, es así que una manera tales estados es a través del siguiente arreglo

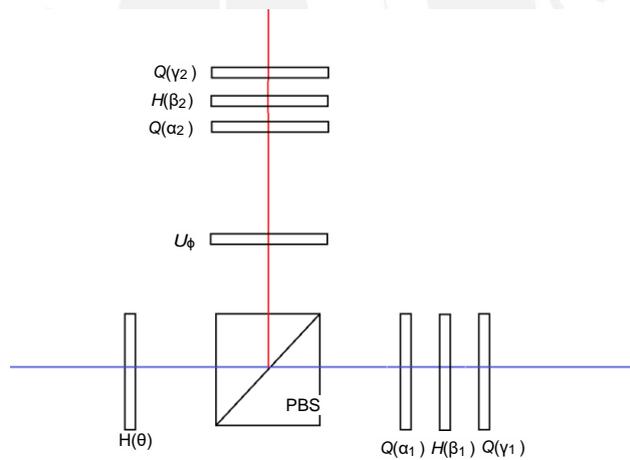


Figura E.1: Generación de estado general

Para comprobar el logro del objetivo antes mencionado, se hace el siguiente análisis

1. Sea el estado de entrada horizontal que llega de la fuente

$$\psi_0 = |XH\rangle \quad (\text{E.o.1})$$

2. El estado ψ_0 es transformado por una half y un PBS además de añadir una fase φ en el camino Y

$$\psi_1 = U_\varphi \cdot PBS \cdot H(\theta) \cdot \psi_0 \quad (\text{E.o.2})$$

Generando un estado $\psi_1 = \sin(2\theta)e^{i\varphi} |Y, Y\rangle + \cos(2\theta) |X, H\rangle$, en el cual se puede ver que modificando la polarización $(|V, H\rangle)$ se puede obtener un estado arbitrario en caminos

3. Así al estado ψ_1 se le hacen transformaciones de polarización tipo QHQ, genera un estado arbitrario de polarización [17], en cada camino

$$\begin{aligned} |V\rangle &\xrightarrow{QHQ} a_1 |H\rangle + b_1 e^{i\varphi_1} |V\rangle \\ |H\rangle &\xrightarrow{QHQ} a_2 |H\rangle + b_2 e^{i\varphi_2} |V\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.o.3})$$

4. Así que el estado final generado será del tipo

$$\psi_f = \alpha |V, Y\rangle + \beta e^{i\varphi_\beta} |V, X\rangle + \gamma e^{i\varphi_\gamma} |H, Y\rangle + \delta e^{i\varphi_\delta} |H, X\rangle \quad (\text{E.o.4})$$

Con

$$\alpha = b_1 \sin(2\theta)$$

$$\beta = b_2 \cos(2\theta)$$

$$\gamma = a_1 \sin(2\theta)$$

$$\delta = a_2 \cos(2\theta)$$

$$\varphi_\beta = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi$$

$$\varphi_\gamma = -\varphi_1$$

$$\varphi_\delta = -\varphi - \varphi_1$$

Bibliografía

- [1] A. W. Chin, S. F. Huelga y M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 233601 (2012).
- [2] R. Vasile, S. Olivares, M. A. Paris y S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **83**, 042321 (2011).
- [3] R. Schmidt, A. Negretti, J. Ankerhold, T. Calarco y J. T. Stockburger, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 130404 (2011).
- [4] K.-a. S. G. Massimo Palma y A. Ekert, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1996) <http://doi.org/10.1098/rspa.1996.0029>.
- [5] J. Łuczka, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **167**, 919 (1990).
- [6] J. H. Reina, L. Quiroga y N. F. Johnson, *Phys. Rev. A* **65**, 032326 (2002).
- [7] D.R.A. Ruelas Paredes, “Quantum state tomography for a polarization-path two-qubit optical system”, Tesis de maestría. (Pontificia Universidad Católica del Perú, 2019).
- [8] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, vol. 1 (wiley New York, 1978).
- [9] T. Chanda y S. Bhattacharya, *Annals of Physics* **366**, 1 (2016).
- [10] T. Baumgratz, M. Cramer y M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014).
- [11] Á. Rivas, S. F. Huelga y M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 050403 (2010).
- [12] Z. He, H.-S. Zeng, Y. Li, Q. Wang y C. Yao, *Phys. Rev. A* **96**, 022106 (2017).
- [13] J. B. Altepeter, D. F. James y P. G. Kwiat, en *Quantum state estimation* (Springer, 2004), págs. 113-145.

- [14] B.-G. Englert, C. Kurtsiefer y H. Weinfurter, *Physical Review A* **63** (2001) 10.1103/PhysRevA.63.032303.
- [15] A. Rivas y S. F. Huelga, *Open quantum systems* (Springer, 2012).
- [16] P. Haikka, T. H. Johnson y S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **87**, 010103 (2013).
- [17] R. Simon y N. Mukunda, *Physics Letters A* **143**, 165 (1990).

