PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA SOBRE LOS SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LAS FRACCIONES EN UNA COLECCIÓN DE CUADERNOS DE TRABAJO DE EDUCACIÓN BÁSICA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR

MARIELA QUISPE QUILLE

ASESOR DE TESIS

DR. FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

San Miguel, 2018

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se enfoca en el estudio de los significados que se le atribuye a la fracción en determinados contextos matemáticos que van más allá de la relación parte – todo. Diversas investigaciones reportan la falta de dominio solvente por parte de los estudiantes de primaria e incluso secundaria en la resolución de problemas con números racionales que tendrían origen en la complejidad del mismo objeto matemático y de los significados diversos que se le puede atribuir a las fracciones. Por tanto, el objetivo central de esta tesis es construir y analizar una Organización Matemática sobre los significados asociados a las fracciones en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria e identificar aquellos que predominan en este nivel educativo y cómo se articulan. Para ello se utiliza las herramientas teóricas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la metodología basada en el estudio bibliográfico y el análisis de textos. Se construye un modelo epistemológico de referencia para los significados de las fracciones y en base a él se definen seis tipos de tareas. A partir de ello se construye una Organización Matemática para cada Cuaderno de Trabajo y luego se analiza el grado de completitud de la Colección usando los criterios de completitud de Fonseca. Finalmente se obtiene como conclusión principal que en la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo predomina el significado de la fracción como relación parte – todo, siendo éste la base para trabajar tareas de contexto extramatemático sobre fracción como medida, operador, cociente y razón, así como su representación decimal; así mismo, las tareas de este material didáctico poseen más de una forma de solución y son integradoras lo cual permite la ampliación de las técnicas.

Palabras claves: Significados asociados a las fracciones; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Organización Matemática.

ABSTRACT

The present research work focuses on the study of the meanings attributed to the fraction in certain mathematical contexts that go beyond the part - whole relationship. Diverse investigations report the lack of solvent dominance on the part of the students of primary and even secondary in the resolution of problems with rational numbers that would have origin in the complexity of the same mathematical object and of the diverse meanings that can be attributed to the fractions. Therefore, the central objective of this thesis is to build and analyze a Mathematical Organization on the meanings associated with the fractions in a Collection of Workbooks of Primary Education and identify those that predominate in this educational level and how they are articulated. For this, the theoretical tools of the Anthropological Theory of the Didactic and the methodology based on the bibliographical study and the analysis of texts are used. A reference epistemological model is constructed for the meanings of the fractions and based on it, six types of tasks are defined. From this a Mathematical Organization is constructed for each Workbook and then the degree of completeness of the Collection is analyzed using Fonseca's criteria of completeness. Finally, the main conclusion is that in the Mathematical Organization of the Workbook Collection, the meaning of the fraction as a part - whole relationship predominates, this being the basis for working extra - mathematical tasks on a fraction as a measure, operator, quotient and ratio.as well as its decimal representation; likewise, the tasks of this didactic material have more than one form of solution and are integrating which allows the extension of the techniques.

Keywords: Meanings associated with fractions; Anthropological Theory of the Didactic; Mathematical Organization

DEDICATORIA

A Dios, mis padres Perencia y Mauro

y mi hermano José Antonio.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, el Dr. Francisco Ugarte Guerra, por su orientación, paciencia y comprensión durante la elaboración de esta tesis y por la oportunidad que me dio para participar en el IX Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas.

A mis jurados, la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y la Dra. María José Ferreira Da Silva por sus aportes que fueron de gran importancia para concluir esta investigación.

A todos mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontifica Universidad Católica del Perú por contribuir notablemente en mi formación académica y profesional.

A mis padres Perencia y Mauro por su inmenso amor, consejo y apoyo moral durante todo este trabajo.

A mi hermano José Antonio por su paciencia y comprensión para finalizar esta tesis.

A Dios por darme la vida, sabiduría y fortaleza para poder alcanzar este objetivo tan importante en mi vida.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

El estudio de las fracciones ha sido y sigue siendo un tema de gran interés para el profesorado y los investigadores en Didáctica de la Matemática tal y como nos muestran las investigaciones de Kieren (1980), Behr, Lesh, Post, & Silver (1983), Freudenthal (1983), Silva (2005) y Fandiño (2009).

El empleo de las fracciones en diversos contextos, que le confiere un significado particular, así como las reglas operatorias que diferentes a las empleadas con los números enteros, generan en los estudiantes de primaria y secundaria serias dificultades para trabajar con fracciones. Así mismo, las actividades proporcionadas en los libros de texto poseen una organización de este conocimiento que pueden facilitar u obstaculizar el aprendizaje de las mismas. Por tanto, nace el interés de realizar un estudio de cómo se presentan el tema de fracciones en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática de Educación Primaria del Perú.

En el capítulo I se muestra la problemática que incluye una amplia revisión de investigaciones acerca del número racional en su representación fraccionaria, las concepciones y dificultades que tienen los alumnos para trabajar con las fracciones, así como el análisis de textos escolares peruanos sobre las fracciones y los números racionales. A partir de ello se justifica el trabajo, se formula la pregunta de investigación y se plantean los objetivos.

En el capítulo II se describe la metodología que se emplearán en la investigación, los cuales están basados en el estudio bibliográfico y el análisis de textos.

En el capítulo III se dan a conocer aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), los indicadores de completitud de una Organización Matemática Local, así como la descripción de los modelos epistemológicos, los cuales se usarán para el análisis de los Cuadernos de Trabajo.

En el capítulo IV se construye un modelo epistemológico de referencia en base a los aspectos históricos – epistemológicos de la noción de número racional. El modelo epistemológico de referencia se centra en los significados asociados a las fracciones: relación parte – todo, medida, operador, cociente y razón; así como su representación decimal.

En el capítulo V se realiza la construcción y análisis de la organización matemática de los Cuadernos de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria y la construcción y análisis de una organización matemática de toda la colección.

En el capítulo VI, en base a los resultados del capítulo anterior, se procede con el análisis de los criterios de completitud de la organización matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo y se describe el modelo epistemológico dominante en dicho material didáctico.

Finalmente se redactan las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo se realizará una breve descripción de las principales investigaciones relacionadas con nuestro tema de estudio: los significados asociados a las fracciones; además, se delimitará y justificará el problema de investigación tomando como base los antecedentes y la importancia que tiene nuestro trabajo dentro de la Didáctica de la Matemática y de los lineamientos curriculares vigentes; finalmente se presentarán la pregunta y los objetivos de investigación.

1.1 Antecedentes

A partir de la revisión de la literatura con respecto a los números racionales y su presentación en los textos escolares peruanos, podemos clasificar nuestros antecedentes en tres grupos. El primero está vinculado al estudio teórico de los números racionales y las fracciones, aquí citamos los trabajos de Kieren (1980), Behr, Lesh, Post, & Silver (1983) y Freudenthal (1983); el segundo grupo de investigaciones están relacionadas con las concepciones y dificultades que tienen los alumnos para trabajar con las fracciones, aquí destacamos las tesis de Matute (2010) y Gonzáles (2015). Así mismo, en el tercer grupo se encuentran los trabajos de Carrillo (2012) y Álvarez (2016) referentes al análisis de Organizaciones Matemáticas de textos escolares acerca de los números racionales y la investigación de Silva (2005) sobre la construcción e implementación de una Organización Matemática sobre los números fraccionarios para una formación continua de maestros usando la Teoría Antropológica de lo Didáctico, marco teórico que usaremos también en esta tesis.

3.1 Investigaciones teóricas con respecto a los números racionales

Como primer antecedente citamos el trabajo de Kieren (1980), uno de los pioneros en el estudio de la construcción del concepto de número racional a partir del cual surgen otros trabajos como el de Behr, Lesh, Post, & Silver (1983) el cual abordaremos más adelante.

Kieren (1980) tiene como objetivo principal proponer un *modelo de construcción más completa* de los números racionales a partir de la discusión de los intentos de enseñanza de este objeto matemático durante los siglos XIX y XX. Según el autor esta construcción implica que el concepto de número racional debe tener conexiones entre sus diferentes significados como son la relación parte - todo, cociente, razón, medida y operador, y debe ser estudiado posteriormente usando un lenguaje matemático formal.

En principio, Kieren (1980) afirma que conocer al número racional como la solución de la ecuación lineal $ax = b$, donde a y b son enteros y b es diferente de cero, no implica tener una noción amplia y práctica de este objeto matemático con la que se pueda resolver problemas que demanden representaciones vinculadas a la relación parte – todo, medida de cantidades continuas comparaciones cuantitativas entre dos magnitudes haciendo uso de las razones. Así mismo, el investigador sostiene que el conocimiento de los números racionales a nivel de constructo, esto es, como un concepto que se nutre de varios significados; implica el control de sus dos formas de representación tanto fraccionaria como decimal; el conocimiento de los algoritmos para sus operaciones; y en un nivel superior, la capacidad para poder trabajar con clases de equivalencia en un campo cociente.

Según Kieren (1980), durante el siglo XIX, la enseñanza de los números racionales se centró en el aprendizaje de algoritmos para operar con fracciones y decimales tomando en cuenta los aportes de De Morgan. Sin embargo, este enfoque algorítmico era considerado superficial porque no se sustentaba en el concepto de equivalencia y el marco algebraico de los números racionales.

Es así que, en el siglo XX, una nueva perspectiva introducida en educación matemática conocida como matemática moderna, trató de superar el enfoque superficial de la matemática del siglo anterior fomentándose el estudio de la estructura algebraica de los números racionales como un campo cociente, introduciendo el concepto de equivalencia y analizando la solución de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$. También se establecieron diferencias entre el concepto de número racional y sus formas de representación, éstas podían ser a través de fracciones equivalentes, decimales o porcentajes, por ejemplo, el número racional 2/3 puede escribirse como 4/6; $0,\hat{6}$; 18/27, $66\frac{2}{3}\%$ (Kieren, 1980).

Sin embargo, a pesar de este nuevo enfoque instruccional el concepto de números racionales insertado en los currículos del siglo XX era insuficiente y aislado de otros conceptos matemáticos. Es decir, por un lado, se estudiaban los decimales, por otro, el cálculo con fracciones, en otro momento el estudio axiomático de los racionales y luego la resolución de ecuaciones lineales.

En consecuencia, Kieren (1980), dentro del campo de la investigación, plantea un nuevo enfoque de instrucción con números racionales que podía ser implementada con niños pequeños. Este nuevo enfoque comprende el estudio e interrelación de cinco bases conceptuales llamados subconstructos los cuales están vinculados a la representación fraccionaria del número racional los cuales son *la relación parte – todo, cociente, medida, operador y razón*.

Es más, Kieren afirma que la interrelación de los cinco subconstructos sientan las bases del funcionamiento maduro del número racional, así mismo postula que el estudiante estaría listo para desenvolverse en situaciones de relación parte – todo, medición, y comparaciones cuantitativas. A continuación, presentamos una breve descripción de cada uno de estos cinco subconstructos.

Según Kieren (1980) el subconstructo relación parte-todo considera la cuantificación de la unidad vista como un todo (continuo o discreto) y el número de partes *iguales* en que ha sido dividida. El subconstructo cociente se expresa como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes. El subconstructo medida toma en cuenta la asignación de un número a una región (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de la unidad. Mientras que el subconstructo operador actúa como transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente; y el subconstructo razón es considerado como la comparación cuantitativa entre dos magnitudes.

A partir de la descripción de los cinco subconstructos asociados a la representación fraccionaria de los números racionales Kieren (1980) trata de responder la siguiente interrogante: ¿cómo se desarrollan o se construye estos cinco subconstructos en una persona? Para lo cual el autor explica que existen medios o mecanismos para lograr esta construcción que se agruparían en dos categorías: los mecanismos de desarrollo y los mecanismos constructivos.

Con respecto a la categoría de los mecanismos de desarrollo, Kieren (1980) menciona que éstos dependen de la maduración del individuo y se ven influenciados por la interacción social. Los mecanismos considerados en esta categoría son la reversibilidad, la inclusión de clase, la manipulación y cruce de dos conjuntos de datos, y la proporcionalidad.

Kieren (1980) afirma que estos cuatro mecanismos se desarrollan durante los estadios de desarrollo cognitivo propuestos por Piaget en 1983, tales así la reversibilidad y la inclusión de clase surgen durante las operaciones concretas (de 9 a 11 años); mientras que la manipulación y cruce de dos conjuntos de datos, así como la proporcionalidad emergen durante las operaciones formales (11 a 14 años). El mecanismo de inclusión de clase permite identificar la unidad en los subconstructos relación parte – todo y razón. Así mismo el mecanismo de proporcionalidad contribuye a la noción del subconstructo razón.

Por otro lado, dentro de la categoría de los mecanismos constructivos se halla la partición, el lenguaje de pares ordenados, la identificación de la unidad, y la aplicación de las propiedades estructurales matemáticas y la lógica formal de estas estructuras. Según Kieren (1980) la partición está referida a la división de una cantidad dada en un número dado de *partes iguales*, lo cual es importante en el desarrollo conceptual de los cinco subconstructos, tales así que en el subconstructo medida la división equitativa de la unidad de medida permite dar un ajuste apropiado para medir un objeto. En tanto que el lenguaje de pares ordenados permitirá formalizar en un futuro la construcción axiomática de los números racionales y en el aprendizaje a temprana edad permitirá dar nombres de números bipartitos a las fracciones.

Una vez realizado el análisis de los subconstructos de los números racionales y los mecanismos que permitirían su adquisición, Kieren (1980) propone a través de una representación gráfica una *construcción completa* del conocimiento de los números racionales que puede alcanzar un individuo. A partir de esta representación, el autor afirma que el constructo del número racional que logra una persona con funcionamiento maduro es complejo, ya que existe una interconexión entre los cinco subconstructos y los mecanismos de adquisición descritos anteriormente éstos permiten adquirir ideas más abstractas dentro del álgebra y análisis matemático.

A continuación, se muestra la representación gráfica de la construcción completa de los números racionales elaborada por Kieren.

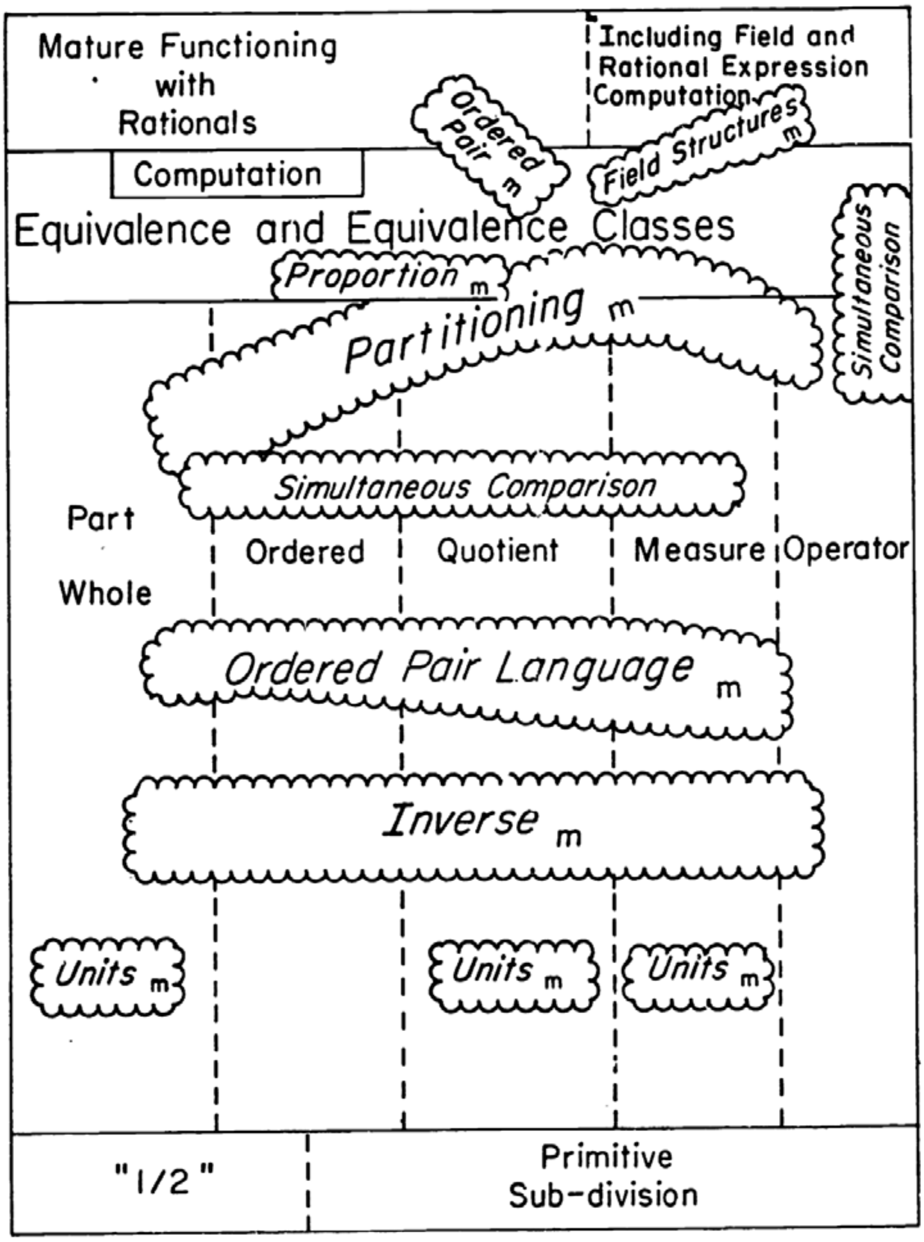


Figura 1. Representación gráfica de la construcción completa de los números racionales.
Fuente: Kieren (1980, p. 143)

Según Kieren (1980) la construcción de los números racionales representados en la figura anterior es un sistema complejo e integrado y no una construcción superficial.

Tal y como lo afirma Kieren (1980) esta construcción completa del constructo de los números racionales parte de dos significados básicos de fracciones como lo es el significado de ½ y la subdivisión de regiones en "partes iguales"; luego a través de los mecanismos fundamentales de identificación de la unidad ($Units_m$), la noción del inverso ($Inverse_m$) y la partición ($Partitioning_m$) se hace posible el desarrollo de los cinco subconstructos del número racional parte - todo, razón, cociente, medida y operador; además de los mecanismos de lenguaje de pares ordenados ($Ordered\ Pair\ Language_m$) y comparación simultánea de un conjunto de datos ($Simultaneous\ Comparison$). Esta construcción concluye con el estudio de las clases de equivalencia usando el mecanismo de proporcionalidad ($Proportion_m$), lenguaje de pares ordenados ($Ordered\ Pair\ Language_m$) y propiedades de estructuras matemáticas ($Field\ Structures_m$), los dos últimos mecanismos sirven de puente para alcanzar el funcionamiento maduro con números racionales y el estudio de los Racionales como Campo y el cálculo con expresiones racionales.

En esta línea, Behr, Lesh, Post, & Silver (1983), basados en la idea de los subconstructos de los números racionales de Kieren (1980), realizan un análisis matemático y curricular de los conceptos del número racional. Los autores afirman que los conceptos de números racionales se encuentran entre las ideas más complejas e importantes que pueden encontrar los estudiantes durante su educación primaria y por ello su interés apunta al estudio de este concepto.

Behr et al. (1983) trabajando en el marco del Proyecto del Número Racional (PNR) redefinen algunos de los cinco subconstructos de los números racionales propuestos por Kieren (1980) y realizan una subdivisión del subconstructo razón para expresarlo como razón y tasa; además añaden el subconstructo de número decimal, obteniéndose en total siete subconstructos: relación parte – todo, medida, razón, división indicada o cociente, operador, tasa y decimal.

El PNR tiene como objetivos generales describir y analizar el desarrollo de los esquemas mentales que usan los niños para resolver tareas sobre números racionales en un programa de instrucción, así como la descripción del papel que desempeñan las diversas representaciones como las imágenes, materiales manipulativos, lenguaje hablado y símbolos escritos, en el aprendizaje de los números racionales y sus operaciones.

A continuación, describimos brevemente el concepto de cada uno de los siete subconstructos del número racional. El subconstructo *relación parte – todo* hace referencia a dividir una continua en partes iguales, esto es que tengan la misma área; o una cantidad discreta en conjuntos de igual cantidad de elementos; este subconstructo, al igual como lo menciona Kieren (1980), es considerado fundamental para la comprensión de todos los demás subconstructos del número racional y es el más usado para iniciar el estudio de fracciones con niños pequeños.

El subconstructo *medida* hace alusión al trabajo con unidades de medida y con el modelo de la recta numérica. Ellerbuch y Payne, citados en Behr et al. (1983), sugieren introducir las fracciones con el modelo de medida por ser el camino más natural para los niños para favorecer su comprensión y es el más útil para el estudio de la adición de fracciones.

En cuanto al subconstructo *razón*, es entendido como una relación entre dos cantidades, por ejemplo, la relación entre el número de niñas y niños que hay en una habitación. Según Behr *et al.* (1983) este subconstructo es concebido más como un índice comparativo que como un número.

El subconstructo de *división indicada o cociente* hace referencia a la operación de división que se establece entre el numerador y denominador de una fracción. El subconstructo *operador* para el número racional puede ser entendido como una función, es decir un número que transforma una cantidad en otra o estira y encoge la medida de una figura geométrica. El subconstructo *tasa* define una nueva magnitud como una relación entre dos magnitudes, como por ejemplo la velocidad que se define como una relación entre la distancia recorrida y el tiempo. Finalmente, el subconstructo *decimal* enfatiza las propiedades asociadas a la forma de representación en base diez que tienen los números racionales.

La investigación Behr et al. (1983) concluye remarcando los principales objetivos del Proyecto de los Números Racionales, uno de los cuales es analizar el papel que juegan los materiales manipuladores (cuentas, barras de Cuisenaire, hojas de papel, etc.) para facilitar la adquisición y el uso de las subconstrucciones de los números racionales a medida que la comprensión del niño pasa de lo concreto a lo abstracto. Así mismo, los autores mencionan que estudios posteriores los llevaron a concluir que otros modos de representación (como las imágenes, el lenguaje hablado y los símbolos escritos) también influyen en el aprendizaje de los números racionales, por ello una hipótesis importante del proyecto es que la capacidad de hacer traducciones entre y al interior de estas representaciones hace que las ideas de número racional sean más significativas para los estudiantes.

Por otro lado, citamos a Freudenthal (1983), quien aborda el estudio de los números racionales a partir de los fenómenos asociados al concepto de fracción, así mismo incide en las limitaciones del enfoque parte – todo para la enseñanza inicial de las fracciones, por lo cual propone ampliar esta orientación describiendo un amplio espectro de situaciones concretas donde se hacen presente las fracciones como la razón de dos magnitudes.

En primera instancia, el autor señala que el objeto matemático en cuestión es el número racional el cual está vinculado al concepto de razón; sin embargo, su trabajo apunta al estudio de las fracciones por ser el recurso fenomenológico de este objeto matemático y por ser la representación más usual. Es decir, las fracciones aparecen en escenarios donde es posible la fractura de un objeto y la comparación de magnitudes, así mismo las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\ y\ \frac{6}{9}$ representan un mismo número racional. En tal sentido, Freudenthal considera el estudio de las fracciones desde dos perspectivas: la fracción como fracturador y la fracción como comparador.

El investigador menciona que la fracción como fracturador se hace presente en situaciones donde una sustancia medida por magnitudes, como longitud, área, o volumen, ha sido dividida en partes iguales usando diversos métodos de fractura. Estos métodos pueden ser primitivos, como equiparar objetos en una balanza para hallar la mitad, o sofisticados, como el uso del algoritmo de la división. Dentro de esta perspectiva, la unidad o todo puede ser categorizada como discreto o continuo, definido o indefinido y estructurado o sin estructura.

Así pues, Freudenthal (1983) describe una variedad de ejemplos para estas categorías, siendo algunos de ellos los siguientes. Un todo definido discreto está representado por una bolsa de canicas de la cual se extraerá la décima parte; mientras que un todo indefinido discreto está ilustrado por la humanidad dividida de acuerdo con los grupos sanguíneos. Un todo definido continuo estructurado está representado por los discos circulares divididos en sectores los cuales separados o agrupados representan partes del total; y un todo indefinido continuo sin estructura está ejemplificado por el aire dividido en gases tales como el oxígeno, nitrógeno, etc.

Los ejemplos anteriores muestran el uso de las fracciones para relacionar las partes y el todo. Según Freudenthal (1983) las partes y el todo se comparan numéricamente según medidas que pueden variar y solo tendrá sentido cuantificar las veces que una parte cabe en un todo si las partes se consideran como equivalentes; para ello se puede usar el criterio de número de elementos o valor de cierta magnitud.

Así mismo, a pesar de la existencia de múltiples ejemplos donde aparece la fracción como fracturador, Freudenthal (1983) afirma que abordar el estudio de las fracciones desde el enfoque parte – todo es bastante limitado tanto fenomenológica como matemáticamente porque sólo produce fracciones propias, como es en el caso del uso restringido de la división del pastel. Así pues, la segunda perspectiva de fracción denominada fracción como comparador trata de superar las limitaciones de este enfoque.

La fracción como comparador se hace evidente cuando se quiere comparar dos cantidades o valores de una magnitud. Según el investigador la comparación puede realizarse de acuerdo a dos criterios: directa e indirectamente.

Freudenthal (1983) menciona que la comparación es directa cuando los objetos que se van a comparar se colocan uno al lado del otro o se consideran como si el más pequeño fuese parte del más grande; esto último permite concebir a la fracción como comparador a fracción como fracturador de un objeto concreto. Algunos ejemplos que nos proporciona el autor para este criterio son los siguientes: la calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que el sendero, Juan gana la mitad que Pedro y el cobre es la mitad de pesado que el oro.

Por otro lado, la comparación es indirecta cuando se emplea una misma unidad de medida para medir los objetos a comparar. Freudenthal ilustra este caso reformulando los ejemplos del párrafo anterior: la anchura de la calle es $2\frac{1}{2}$ veces la del sendero, el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro y el peso del cobre es la mitad que el del oro. En estos ejemplos deducimos que primero se midió ambos objetos por separado con un mismo patrón de medida y luego se compararon el valor de las medidas prescindiendo d ellos objetos.

A partir de los ejemplos, Freudenthal (1983) completa y afina las dos perspectivas de fracción como fracturador y como comparador, para ello usa dos criterios de análisis: el carácter dinámico y estático de la idea de fracción. De esta manera la fracción es vista en un operador si se usa el criterio dinámico y es vista en una relación si se usa el criterio estático.

Freudenthal (1983) afirma que si se compara el todo y las partes de un objeto la fracción aparece en el *operador fracturante*. En cambio, si los objetos a comparar están separados se habla de la fracción en una *relación de razón*. Así mismo si solo se consideran las cantidades y magnitudes la fracción aparece en el *operador razón* que transforma un número, una longitud o un peso en otro. Completando este análisis, Freudenthal afirma que si prescindimos de los fenómenos concretos en el cual emergen las fracciones podemos llegar a hablar de la *fracción como medidora*, es decir, la fracción aparece precediendo a una unidad de medida, por ejemplo $2\frac{1}{2}$ m, o sin una unidad como $2\frac{1}{2}$ que mide segmentos en la recta numérica. Luego el autor concibe también a la *fracción como inverso del operador multiplicación* y finalmente *como un número racional*.

A partir de los aspectos dinámicos y estáticos al cual está asociada la fracción, Freudenthal (1983) menciona que pueden usarse algunos materiales manipulables, llamados modelos, para ilustrar la idea de fracción en la relación razón y en el operador razón.

Así pues, la distribución del pastel, las tiras de cuentas con una secuencia o los muros sombreados son modelos de enseñanza tradicionales que pueden usarse para establecer comparaciones entre el número de partes en que se ha dividido y el número de partes que se han tomado. Sin embargo, según el autor, estos modelos son de limitado alcance por mostrar solo la relación parte – todo que se concibe dentro de la unidad, por tanto, afirma que los medios más naturales para visualizar las magnitudes con respecto a la enseñanza de fracciones son el estudio de las longitudes, áreas y volúmenes. Así pues, son modelos que facilitan la comprensión de la fracción en la relación razón son los segmentos lineales y el uso de figuras a escala.

Por otro lado, dentro de los modelos de operador razón se menciona que la fracción $\frac{2}{3}\ de$ puede ser entendido como un diagrama de flujo donde se divide la unidad en $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. Los modelos del operador razón mediante aplicaciones tienen sus bases en el contexto geométrico, las operaciones con fracciones pueden ser traducidas a operaciones geométricas como proyecciones en el plano, como alternativa a este modo de ver las fracciones se propone la ampliación y reducción usando planos y escalas.

Por otro lado, Freudenthal (1983) menciona que es posible elaborar una teoría matemática del número racional desde el punto de vista del operador razón, para ello emplea el concepto de magnitud con la operación de multiplicación por números naturales y conceptos de estructuras algebraicas.

Finalmente, el autor sostiene que la fracción como número racional es el resultado de aplicar el operador fracción a la unidad, además menciona una secuencia didáctica para la aritmética de fracciones usando todos los insumos trabajados anteriormente, empezando con la repartición de objetos concretos como botellas a un número de personas que no son divisores del total de objetos a repartir, luego introduce ejemplos de ampliación y reducción de figuras y el uso de magnitudes como el tiempo.

Es importante mencionar que en esta investigación tomaremos como referencia los planteamientos teóricos expuestos por Kieren (1980), Behr *et al.* (1983) y Freudenthal (1983) para construir el Modelo Epistemológico de Referencia del Número Racional que será parte del marco teórico de este trabajo. Lo mencionado se detalla en el siguiente capítulo.

3.2 Investigaciones con respecto a las concepciones y dificultades que tienen los alumnos para trabajar con las fracciones.

En esta sección citamos los trabajos de Matute (2010) y Gonzáles (2015) quienes utilizan los aportes teóricos de Kieren (1980) y Behr et al. (1983) para hacer evidente las estrategias y dificultades que poseen los estudiantes al trabajar con fracciones en tareas que demandan movilizar las interpretaciones parte – todo, medida y operador, y el trabajo con fracciones equivalentes para operar con ellas.

Matute (2010) tiene como objetivo identificar las concepciones y estrategias matemáticas que utilizan los estudiantes hondureños de 7mo grado (alumnos de

12 años) cuando resuelven problemas con fracciones y sus interpretaciones parte – todo, medida y operador.

Para ello, Matute (2010) expone un marco teórico compuesto por la descripción de las cinco interpretaciones que posee el concepto fracción: parte – todo, razón, operador, cociente y medida, basándose en los trabajos de Kieren (1980), Behr et al. (1983), Lamon (2006) y las investigaciones de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007). Así mismo aborda el papel que juegan las estrategias en la resolución de problemas y los errores que pueden cometer los estudiantes al momento de resolver problemas con fracciones.

Dentro de las estrategias de resolución, la autora considera el uso de la estimación, el empleo de la recta numérica para establecer relaciones de orden y el cálculo mental con fracciones equivalentes. En cuanto a los errores más comunes muestra la comparación incorrecta entre fracciones y números enteros, la extensión de las operaciones con números enteros para sumar fracciones, la representación errónea de las fracciones en la recta numérica, entre otros.

Como método de investigación emplea la metodología cualitativa de tipo exploratoria dividida en dos etapas: diagnóstica y de ejecución. Inicialmente aplicó una prueba diagnóstica a 56 estudiantes de 7mo grado de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”. Posteriormente trabajó con los 14 alumnos que fueron seleccionados tomando en cuenta su disposición para trabajar fuera del horario de clase. Estos estudiantes desarrollaron ocho guías de trabajo, dos guías de laboratorio y dos juegos matemáticos con la finalidad de fortalecer su comprensión del concepto de fracción y sus interpretaciones parte - todo, medida y operador de una fracción, así como corregir los errores que habían mostrado en la prueba diagnóstica.

Los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica evidenciaron varias dificultades expresadas en errores comunes y respuestas en blanco. Algunos de los primeros problemas se evidenciaron en preguntas vinculadas a la interpretación de la fracción como parte – todo; los estudiantes identificaron de forma incorrecta la unidad en una figura geométrica dividida en regiones no congruentes, establecieron relaciones erróneas entre las partes y el todo, y tuvieron problemas para reconstruir la unidad en situaciones donde el todo eran cantidades discretas. Otras de las dificultades con mayor frecuencia se dieron en la interpretación de la fracción como medida, tales así los estudiantes ubicaron fracciones en la recta numérica concibiendo al numerador como un número independiente del denominador; por ejemplo, en un reactivo de la prueba los estudiantes graficaron el 1 antes de 3/7.

En cuanto a preguntas vinculadas a la interpretación de la fracción como operador se hallaron errores para identificar la operación de multiplicación y división de fracciones en problemas extramatemáticos, así como el empleo incorrecto del algoritmo de la multiplicación de fracciones.

Las dificultades registradas en la prueba diagnóstica fueron superadas progresivamente durante el desarrollo de las guías de trabajo, laboratorio y en los juegos matemáticos. En estos materiales se identificaron las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver tareas vinculadas a las tres interpretaciones de la fracción, tales como el uso de figuras geométricas para relacionar el todo y sus partes; el empleo de la recta numérica para ubicar, comparar, sumar y restar fracciones; y, el uso de algoritmos y fracciones equivalentes para operar con ellas.

Como resultados finales, Matute (2010) sostiene que los 14 estudiantes de 7mo grado mejoraron notablemente su desempeño en tareas similares a las propuestas en la prueba diagnóstica. Para lo cual se les pidió que desarrollaran una octava guía de trabajo de 8 preguntas de forma independiente donde debían movilizar las interpretaciones parte-todo, medida y operador.

Como segundo antecedente de esta sección citamos a González (2015), cuyo objetivo es identificar los errores comunes y dificultades en el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de 12 y 13 años de 1er año de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en Cantabria, España.

El investigador describe cinco significados que los estudiantes atribuyen al concepto de fracción basados en el trabajo de Dickson, Gibson & Brown en 1991. Estos significados están asociados a concebir a la fracción como sub áreas de una región unitaria, como un subconjunto de un conjunto de objetos discretos, como puntos de una recta numérica, como resultado de una operación de división y como método de comparación del tamaño de dos conjuntos.

Por otro lado, Gonzáles (2015) realiza una clasificación de los errores que pueden cometer los estudiantes en el uso de las fracciones, para ello toma en cuenta los trabajos de Llinares & Sánchez; Egodawatte, Chamorro y Godino.

Como metodología de investigación empleó un análisis mixto, es decir usó la metodología cuantitativa para averiguar el porcentaje de alumnos que comete errores en el uso de las fracciones y empleó la metodología cualitativa para analizar las causas que los llevaron a cometer dichos errores.

La experimentación se llevó a cabo con 67 alumnos españoles (34 mujeres y 33 varones) de 12 y 13 años de edad de 1er año de Educación Secundaria Obligatoria de la I.E.S. Valle de Saja ubicado en Cantabria. Los participantes fueron divididos en cuatro grupos y se aplicó un cuestionario de cinco preguntas; la primera estaba compuesta por 9 ítems sobre operaciones combinadas con fracciones; la segunda contenía 2 ítems sobre establecer la relación de orden entre fracciones heterogéneas; la tercera pregunta contenía 4 ítems sobre la veracidad de proposiciones acerca de la división, orden, equivalencia y multiplicación de fracciones; la cuarta contenía un ítem sobre la búsqueda de una fracción que se halle entre dos; finalmente la quinta pregunta hacía referencia a completar fracciones equivalentes.

Como resultados de la investigación, González (2015) observó que la mayoría de estudiantes cometía errores en la simplificación de fracciones al término de una operación aritmética con ellas; también percibió errores en la jerarquía de las operaciones que debían realizarse, es decir, los estudiantes realizaban la adición o sustracción antes que la multiplicación de un entero por una fracción; del mismo modo combinaban el algoritmo de la multiplicación con la división en operaciones combinadas.

Por otro lado, los participantes tuvieron errores en la comparación de fracciones, por ejemplo, concibieron que ½ era menor que ¼; así mismo, cerca de la mitad de estudiantes asociaba la multiplicación con la idea de ampliación y la división con la de reducción, por ejemplo, no se daban cuenta que un número entero multiplicado por una fracción propia generaba una cantidad menor a la inicial.

Finalmente, uno de los errores más importantes que se detectaron fue el empleo incorrecto del algoritmo de la adición de fracciones donde los estudiantes suman el numerador con numerador y denominador con denominador para obtener el resultado, lo cual, según Gonzáles, se debe a la extensión que los alumnos hacen en cuanto a las operaciones con números naturales para con las fracciones.

A partir de los resultados obtenidos, González (2015) da algunas sugerencias sobre la enseñanza de las fracciones que podrían reducir los errores que los estudiantes presentaron en el cuestionario. Las sugerencias del investigador giran en torno a tres dificultades que él considera que se asocian a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones: considerar a la fracción como la división de dos cantidades enteras; entender la fracción como un número; y comprender la equivalencia de fracciones.

Así pues, la dificultad que tienen los estudiantes para concebir a la fracción como el cociente de dos cantidades puede ser superado, según González (2015), usando la calculadora para establecer una equivalencia entre la fracción y la notación decimal, así mismo los contextos de reparto pueden ayudar a comprender la idea de división que se le asocia a la fracción. En cuanto a la dificultad para entender a la fracción como un número puede ser apaliada usando el modelo de la recta numérica para ubicar la fracción y la resolución de ecuaciones lineales. Y la dificultad para comprender la equivalencia de fracciones puede ser superada mostrando la función que cumple la fracción unitaria en la amplificación y simplificación de fracciones, así como el uso de figuras geométricas para visualizar la equivalencia de fracciones.

Finalmente, el investigador menciona la necesidad de ampliar el significado de fracción como relación parte - todo en niveles superiores de estudio (secundaria) y presentar la idea de fracción en un contexto más amplio que permita establecer conexiones entre el modelo geométrico y su notación simbólica, así como el trabajo con problemas para facilitar la comprensión del concepto de fracción y no limitarse al cálculo algorítmico.

3.3 Investigaciones que usan la Teoría Antropológica de lo Didáctico para el análisis de textos.

En esta sección mencionaremos los trabajos de Carrillo (2012), Álvarez (2016) y Silva (2005). Las dos primeras investigadoras realizan un análisis de textos escolares usando la Teoría Antropológica de lo Didáctico, teoría que usaremos en nuestra investigación, mientras que Silva elabora una Organización Matemática acerca de los números fraccionarios para ser implementada por maestros brasileños con estudiantes de 5to grado de enseñanza fundamental.

Carrillo (2012) tiene como objetivo analizar la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en un texto escolar de Matemática en Quinto Grado de Educación Primaria.

Para lograr el objetivo, la autora emplea como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) con la cual se pretende identificar básicamente las tareas y técnicas utilizadas por el texto escolar para resolver problemas vinculados a las concepciones de fracción. Dentro de esta teoría se emplea una efectiva herramienta de análisis, la cual es la praxeología u organización matemática. Una praxeología está formada por un bloque práctico – técnico que incluye las tareas y técnicas, y un bloque tecnológico – teórico que abarca las tecnologías y teorías, cuya función es sustentar las técnicas empleadas para resolver una tarea matemática.

Dentro del estudio de las concepciones de fracción, Carrillo (2012) cita principalmente los trabajos de Kieren de 1992 y la investigación de Silva del 2005, considerando las concepciones de relación parte – todo, medida, cociente, razón y operador.

Por otro lado, como método de investigación la autora utilizó el estudio cualitativo y dentro de él empleó el análisis de textos, seleccionando el texto Matemática de Quinto de Primaria que reparte el Ministerio de Educación a los colegios públicos del país

Para el análisis del texto, Carrillo (2012) construyó tres criterios referidos a los tipos de concepciones de fracciones utilizados; sobre la relación entre las representaciones e ilustraciones empleadas en el texto; y sobre los tipos de tareas, técnicas y tecnologías. El análisis del texto se hizo por sección: inicio, proceso, evaluación y metacognición para obtener detalles. Como primeros resultados se encontraron que en la sección panorámica aparecían dos actividades vinculadas a la concepción parte – todo y medida; mientras en la sección de inicio no se hallaba de forma explícita alguna concepción de fracción, es más se daban actividades donde se percibía a la fracción como un número formado por dos naturales sin conexión alguna. En la sección de proceso se observó la introducción del concepto de fracción como cociente mediante la repartición y se observó la predominancia de la concepción parte – todo, sin embargo, en las actividades individuales del libro se plantean tareas vinculadas indirectamente a las concepciones cociente y razón. En cuanto a la comparación de fracciones decimales se utilizó el concepto parte – todo y la técnica del doble conteo. Las tareas de la sección de operaciones con fracciones se basan en la concepción parte – todo y en ocasiones en la de operador. Luego del análisis de la sección evaluación y metacognición se observó que todas las tareas eran vinculadas a la concepción parte – todo.

Como resultados generales de la investigación se obtuvo que el texto escolar presenta actividades que privilegian la concepción parte – todo, restringiendo el concepto de fracción a la de fracción propia y generándose dificultades para la comprensión de fracción impropia. También se pudo observar que el texto presenta la concepción de fracción como operador bajo el nombre de "fracción de un número" y de forma eventual e implícita se presenta la concepción de razón. Así mismo, se halló que algunas las representaciones figurales son inapropiadas para comprender la fracción impropia.

En cuanto a las tareas, básicamente se presentan tres tipos: determinar la fracción de un entero (concepción parte – todo), transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (concepción operador) y distribuir en partes iguales un objeto a *n* personas (concepción de cociente). Por otro lado, las técnicas que se emplearon fueron básicamente la división de la unidad y el doble conteo de las partes en tareas vinculadas a la relación parte – todo; la división y multiplicación en situaciones de la concepción de fracción como operador.

Lo anterior permite concluir a Carrillo (2012) que el concepto de fracción oficializado en el libro de texto es de parte - todo y se privilegia el saber hacer, es decir las tareas y técnicas. Como sugerencias para futuras investigaciones, la autora menciona que es pertinente realizar estudios en otros textos escolares sobre las concepciones de fracción que emplean y la praxeología matemática relacionada a dichas concepciones, sugerencia que tomamos en cuenta en nuestra investigación.

Siguiendo la misma línea de investigación citamos la tesis de Álvarez (2016) cuyo objetivo fue describir la organización matemática de los números racionales que presenta un libro de texto de Matemática de Primero de Secundaria y su análisis a partir de los indicadores de completitud propuestos por Fonseca.

Cabe mencionar que dedica un capítulo a los Números Racionales en la Educación Básica donde menciona los cinco significados que atribuye Behr en 1992 como son parte – todo, medida, cociente, razón y operador, significados que tomaremos también en nuestra investigación.

Como marco teórico emplea la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para analizar los elementos de la praxeología como son las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que presenta el texto escolar seleccionado.

La metodología de investigación que emplea es el enfoque cualitativo de tipo bibliográfico ya que analiza un texto escolar de matemática de primero de secundaria. Se analizó dos unidades del texto una denominada “Fracciones” y la otra “Decimales”, las cuales proporcionan una serie de tareas donde se requiere movilizar los diferentes significados, operaciones y representaciones de los números racionales.

A partir del estudio, se obtuvo como conclusiones que el texto escolar presenta tareas como identificar las partes de un todo, representar las fracciones y decimales en la recta numérica y operar con ellas, pero mayormente con signo positivo, trabajándose poco los racionales negativos. Así mismo, el texto privilegia el saber hacer dando énfasis a las tareas y técnicas, dejándose de lado la justificación de las mismas.

En cuanto a los indicadores de completitud de Fonseca, se menciona que en cierta medida hay una integración de tareas, por otro lado, hubo presencia de técnicas inversas para trabajar representaciones y operaciones con fracciones. De lo anterior, Álvarez (2016) menciona que la praxeología matemática del texto escolar de Primer Grado de Secundaria que distribuye el Ministerio de Educación es relativamente completa.

Finalmente mencionamos la tesis doctoral de Silva (2005), la autora tiene como objetivo de investigación identificar las concepciones que tienen un grupo de profesores de matemática acerca de los números fraccionarios, así como sus estudiantes brasileños de 5to grado (6to grado de primaria en Perú).

Por otro lado, también pretendió analizar la autonomía y dificultades de los profesores con respecto a posibles cambios de sus concepciones de números fraccionarios en una formación continua de maestros.

Cabe señalar que el objeto de estudio que aborda Silva (2005) son los números fraccionarios, para lo cual hace una revisión amplia de este objeto matemático citando a varios autores (como D' Augustine, Nivem, Hernstein, etc.) para establecer diferencias con otros términos como las fracciones y los números racionales. Silva (2005), basada en las ideas de D' Augustine y Hernstein y tomando en cuenta de que su investigación está dirigida a maestros de Enseñanza Fundamental en Brasil, usará el término *número fraccionario* para indicar aquellos números que pueden ser representados por una clase de fracciones, $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ además a y b pertenecientes a los números reales o polinomios.

Como marco teórico, la autora utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pues pretende modelar la Organización Matemática y Organización Didáctica sobre los tipos de tareas asociadas a los conceptos de números fraccionarios, además de evidenciar las posibles técnicas para resolver las tareas y el discurso tecnológico – teórico que la justifican. La investigadora elabora una Organización Matemática sobre las fracciones pues hace una clasificación detallada de los tipos de tareas y sus respectivas técnicas basado en el análisis de las cinco concepciones fracción (parte-todo, medida, cociente, razón y operador) propuesta por Behr, Post & Silver en 1983, remarcando que la mayoría de tareas requieren movilizar más de una concepción de fracción, encontrándose vínculos entre dichas concepciones.

La metodología que se empleó para lograr el objetivo fue la investigación – acción, ya que el estudio se caracterizó por ser colaborativo permitiendo la interacción entre los investigadores, los profesores y la observación en acción.

En cuanto a la parte experimental, Silva (2005) pone en marcha su proyecto de formación continua de profesores en una escuela brasileña durante un año. El objetivo de este proyecto era observar y analizar las acciones de los profesores de segundo ciclo de Enseñanza Fundamental durante la elaboración y aplicación de una Organización Didáctica para la enseñanza de los números fraccionarios a estudiantes de quinto grado de primaria.

Así mismo se pretendió determinar si las estrategias para la formación continua, en base a los resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números fraccionarios, permitían efectivamente una nueva mirada de los profesores para sus prácticas, causadas por cambios en sus puntos de vista, tanto en el contenido matemático como sobre el aprendizaje de sus estudiantes. Para el estudio se seleccionaron 9 maestros con diferentes edades y años de experiencia en la enseñanza, de los cuales 8 iniciaron y concluyeron el curso de 29 sesiones sobre la creación de una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones.

Como resultados se obtuvieron que los profesores de 5to grado de Enseñanza Fundamental tenían una concepción muy limitada de los números fraccionarios, éstos eran concebidos como relación parte – todo. Así mismo los maestros presentaban poca autonomía para diseñar actividades de aprendizaje con relación a este contenido en la escuela.

Como conclusiones finales, Silva (2005) señala que la organización matemática elegida para el entrenamiento fue una contribución a la institución educativa con el fin de explicar una variedad de tipos de tareas y técnicas que permiten entender el concepto de fracción para el quinto grado de enseñanza fundamental. Así mismo esta organización matemática permitió a los profesores analizar sus propias decisiones, para comprobar qué tipo de tareas o técnica necesitaban modificar, añadir o eliminar en el diseño de la secuencia didáctica.

Por otro lado, la autora sugiere elaborar praxeologías para la enseñanza de operaciones con fracciones, praxeologías que permitan la institucionalización del conjunto de los números racionales, y praxeologías matemáticas más amplias para el estudio de las fracciones en otros contenidos para la enseñanza fundamental brasileña como son las fracciones algebraicas.

1.2 Justificación

Nuestro trabajo es relevante en el área de la Didáctica de las Matemáticas, ya que diversos investigadores como Kieren (1980), Behr et. al (1983), Behr & Post

(1992) y Freudenthal (1983) señalan que los números racionales representados mediante las fracciones son fuente de muchas dificultades para niños y adolescentes en la edad escolar. Estas dificultades, según estos investigadores, se debe a que las fracciones están vinculados a situaciones de fraccionamiento de la unidad, medida de cantidades continuas y comparación de valores de magnitudes; donde, por ejemplo, el algoritmo de conteo de los números naturales no permite resolver dichas situaciones y las operaciones con fracciones se realizan de forma diferente al de los números enteros. A esto se debe añadir el enfoque de enseñanza convencional de la relación parte - todo para introducir las fracciones en la escuela.

Estas dificultades halladas en las investigaciones anteriores siguen vigentes hoy en día tal y como lo evidencian Matute (2010) y Gonzáles (2015), quienes señalan que incluso estudiantes de primeros años de secundaria tienen problemas para trabajar con las concepciones de fracción y sus operaciones.

Así mismo, los resultados de la Evaluación Muestral de Matemáticas del 2013 (EM) de 6to grado de primaria evidencian que un 16% de estudiantes logran un nivel de desempeño acorde con el grado evaluado. En dicha evaluación se detectaron dificultades en la comprensión de la noción de fracción y su uso, así como dificultades en la conceptualización y el manejo de algoritmos de fracciones, ya que solo el 15,6% de los estudiantes lograron responder correctamente la pregunta de este indicador.

En este mismo sistema de evaluación, los resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes 2015 (ECE) en el área de Matemáticas, revelan que la mayoría de estudiantes de segundo grado de secundaria tiene dificultades para resolver problemas intra y extramatemáticos que implican movilizar los diversos significados de los números racionales positivos y sus operaciones. Tales así, según el Informe para Docentes (2015), el 24,3% de los estudiantes logra comparar u operar con números racionales y el 43,1% logra usar los números racionales en sus diferentes significados y representaciones. De aquí la importancia de nuestro trabajo para abordar el objeto matemático de los números racionales representados mediante las fracciones.

Por otro lado, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular 2009 con modificatoria de la Resolución Ministerial 199-2015, pertinente en el contexto peruano, considera necesario el estudio de las fracciones desde el tercer grado hasta el sexto grado de primaria, momento a partir del cual las fracciones se vinculan con el estudio de los números racionales como una forma de representación para este nuevo conjunto numérico en la educación secundaria.

En este sentido, el Ministerio de Educación (MINEDU) en el 2016 distribuyó a todos los colegios públicos del país una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática tanto para el nivel de educación primaria en cuyas páginas se proponen diversos problemas de contexto extramatemático cuya resolución implica movilizar los conceptos de fracción y sus operaciones.

Finalmente, es importante resaltar el análisis de los textos escolares vigentes, pues son un recurso de acceso permanente del docente y una fuente de consulta para la enseñanza tal como lo afirma Silva (2005) y Vargas (2003). Un ejemplo de análisis de textos son los trabajos de Carrillo (2012) y Álvarez (2016) citados en nuestros antecedentes, donde las autoras utilizan las herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para analizar cómo se organiza el conocimiento matemático de las fracciones y los números racionales en dichos materiales respectivamente.

1.3 Pregunta de investigación

Teniendo en cuenta los antecedentes descritos en párrafos anteriores, nuestra investigación se enfoca en el estudio de los significados asociados a las fracciones que predominan en la Educación Primaria peruana y cómo estos contribuyen a la construcción del concepto de número racional en la Educación Secundaria. Para ello se hará el análisis de las actividades con respecto a las fracciones propuestas en la Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática de 3ero (para niños de 8 años) a 6to grado de Primaria (para niños de 11 años) proporcionados por el MINEDU en el 2016. Por lo tanto, formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la Organización Matemática sobre los significados asociados a las fracciones presente en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática de Educación Primaria?

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 Objetivo general

Analizar una Organización Matemática de las unidades que contienen el tema de fracciones en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática del 3er grado al 6to grado de Primaria, para identificar el Modelo Epistemológico Dominante.

1.4.2 Objetivos específicos

- Construir un marco de referencia para los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria al cual llamaremos Modelo Epistemológico de Referencia.
- Construir una Organización Matemática del tema de fracciones para cada Cuaderno de Trabajo de 3ero a 6to grado de Primaria.
- Construir una Organización Matemática para la Colección de Cuadernos de Trabajo de Primaria en base a las organizaciones identificadas en cada Cuaderno de Trabajo.
- Determinar el grado de completitud de la Organización Matemática de la Colección de los Cuadernos de Trabajo según los indicadores de Fonseca.
- Reconocer los significados asociados a las fracciones en la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo para conocer cómo se articulan.

CAPÍTULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo describimos la metodología que emplearemos en la investigación, así mismo presentamos los procedimientos metodológicos para analizar los Cuadernos de Trabajo de Matemática de 3ero a 6to grado de Primaria.

4.1 Metodología

Nuestra investigación hace uso de la metodología cualitativa y de la investigación bibliográfica, dentro de la cual consideramos algunos aspectos del método de análisis de materiales didácticos en el marco Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) descrito por Almouloud (2015).

Nuestra investigación es de carácter bibliográfico porque analiza los contenidos de los Cuadernos de Trabajo de Matemática proporcionados por el Ministerio de Educación que son fuente directa para el aprendizaje de los alumnos de diversos tópicos de matemática, que podrían favorecer o dificultar el aprendizaje de los mismos tal y como lo afirma Van Dalen y Meyer (1984).

Así mismo, Vargas (2003) señala que el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento más usado por los profesores. Especialmente el TIMSS (Tercer Estudio Internacional en ciencias y matemáticas), muestra que el texto es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos, así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar.

En cuanto al método del análisis de los materiales didácticos según la TAD, Almouloud (2015) sostiene que los libros de texto siguen siendo la entrada principal del planteamiento ecológico, esto son las condiciones de construcción de las praxeologías matemáticas, su vida en las instituciones educativas que producen, usan o transponen.

Según Chevallard (1999), autor de la TAD, entenderemos por praxeología u organización matemática a un conjunto de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que permite modelar la actividad matemática concebida como una actividad humana. Chevallard sostiene que las tareas están definidas por un verbo que indica una acción, por ejemplo, dividir un entero entre otro; las técnicas es el modo de resolver la tarea, que no necesariamente tendrá que ser algorítmica; la tecnología es el discurso que justifica los pasos de la técnica; y la teoría es la que justifica la tecnología. Estos términos serán descritos con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Del método de análisis de los materiales didácticos, desarrollado por Almouloud (2015) tomaremos los siguientes aspectos que formarán parte de nuestro procedimiento metodológico: la identificación de los tipos de tarea, identificación de las técnicas e identificación de las tecnologías presentes en los textos escolares.

4.2 Procedimientos metodológicos

Para abordar el problema de investigación y cumplir nuestro objetivo general seguiremos las etapas de la investigación bibliográfica tomados y adaptados de Gil (2002) y Quentasi (2015).

a. Elección del tema de investigación

Para iniciar nuestro estudio seleccionamos el tema a investigar: los significados asociados a la fracción presentes en las actividades de los libros de primaria proporcionados por el MINEDU en el 2016, tomando en cuenta su relevancia en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y la complejidad del objeto matemático: número racional.

b. Levantamiento bibliográfico

En esta segunda etapa buscamos investigaciones relacionadas a nuestro tema de estudio a nivel nacional e internacional. En nuestra búsqueda consideramos tanto fuentes físicas y virtuales como libros, tesis de maestría y doctorado, artículos de investigación, actas de congresos, etc. Así mismo, seleccionamos un marco teórico, La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que nos permita lograr nuestro objetivo general.

c. Formulación del problema

En base al estudio exploratorio y exhaustivo de la etapa anterior, formulamos nuestro problema de investigación, los objetivos generales y específicos, los cuales guiarán el desarrollo del trabajo y que podrían modificarse en el transcurso del mismo de tal manera que exista una coherencia entre la formulación del problema y los objetivos perseguidos.

d. Selección de fuentes para el análisis de los Cuadernos de Trabajo

En esta fase seleccionamos los antecedentes relevantes para definir los criterios para analizar una Organización Matemática de la Colección de los Cuadernos de Trabajo usando la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Así mismo hacemos una revisión panorámica de los textos escolares de Matemática para 3ero y 4to de la Editorial Santillana (2012) y los textos escolares de Matemática para 5to y 6to de primaria de la Editorial El Nocedal S.A.C. (2012) distribuidos por el MINEDU, ya que servirán de referencia para explicitar el discurso tecnológico - teórico de los Cuadernos de Trabajo actuales.

e. Construcción y análisis de una organización matemática

En esta etapa seguiremos los siguientes pasos de forma cíclica de tal manera que nos permita reajustar nuestros objetivos específicos.

- Describir aspectos histórico – epistemológicos sobre la noción del número racional y su vínculo con las fracciones.
- Construir un Modelo Epistemológico de Referencia sobre los significados asociados a las fracciones para la Educación Primaria.
- Construir una Organización Matemática para cada Cuaderno de Trabajo sobre los significados asociados a las fracciones.
- Construir una Organización Matemática de las fracciones para la Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria.
- Determinar el grado de completitud de la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo, teniendo en cuenta los indicadores de completitud de Fonseca.
- Describir el Modelo Epistemológico Dominante de la Organización Matemática de las fracciones para la Colección de Cuadernos de Trabajo.

f. Redacción del trabajo

En esta última etapa señalaremos las conclusiones de nuestro trabajo conectando el problema, los objetivos y el marco teórico, así mismo se darán algunas sugerencias para futuras investigaciones.

CAPÍTULO III: LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

En el presente capítulo describimos los elementos teóricos que nos proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para llevar a cabo el análisis de la organización matemática que se halla en los Cuadernos de Trabajo de 3er grado a 6to grado de primaria. Es decir, la TAD nos permite identificar la actividad matemática que está detrás de los libros de texto; los cuales están constituidos por un conjunto de ejercicios y problemas, los procedimientos para resolverlos, así como las justificaciones teóricas de los procedimientos de resolución.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuesta por Yves Chevallard a fines de 1980, surge a partir del estudio del fenómeno de la transposición didáctica, el cual consiste en la transformación que sufre el saber sabio (conocimiento que surge en la comunidad matemática) para convertirse en el saber enseñado (conocimiento que es posible enseñarse en el aula de clases). Al respecto, Bosch y Gascón (2009) afirman que:

> (…) la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado (p.89).

Según Chevallard (1999) la TAD parte de un postulado básico, el cual indica que toda actividad matemática se sitúa en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. Entenderemos por instituciones sociales a la escuela, los profesores, la clase de matemáticas o un libro de texto.

Así mismo, la TAD asume que toda actividad humana regularmente llevada a cabo puede ser descrita por un modelo único llamado *praxeología.* Una praxeología es una palabra griega compuesta de dos términos griegos: *logos y praxis.* Bosch y Gascón (2009) señalan que el término *praxis* hace referencia al *saber hacer* y el término *logo*s se refiere al *saber* conformado por las justificaciones de qué se hace, cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

3.1 Elementos de una organización matemática

La TAD concibe a la praxeología como la composición de cuatro elementos básicos: tipos de tarea, técnicas, tecnologías y teorías. Entenderemos por tipos de tarea y las tareas asociadas como una actividad a ser resuelta; las técnicas, como los procedimientos que se emplean para resolver las tareas; las tecnologías como el discurso que justifica los pasos de la técnica; y la teoría, como la justificación de la tecnología.

Según Chevallard (1999) los tipos de tarea y las técnicas conforman el bloque práctico – técnico (saber hacer); mientras que las tecnologías y teorías se hallan en el bloque tecnológico – teórico (saber). La siguiente figura muestra un esquema que ilustra los elementos de una praxeología.

Praxeología	
Tipos de tareas	Tecnologías
Técnicas	Teorías
Bloque práctico - técnico	Bloque tecnológico - teórico

Figura 2. Representación de los elementos de una praxeología.
Fuente: Elaboración propia

A continuación, describimos cada elemento de la praxeología y lo simbolizamos usando la notación que le atribuye Chevallard. También damos un ejemplo para cada elemento los cuales son extraídos de la Colección de los Cuadernos de Trabajo de 3ero a 6to de primaria del 2016 y los Textos Escolares de los mismos grados distribuidos en el 2012.

- **Tipos de tareas (T)**

Los tipos de tareas representan un conjunto de tareas (problemas o ejercicios) que se expresan a través de un verbo que implica realizar alguna actividad específica para lo cual se requiere una forma de proceder. Al respecto Chevallard (1999) sostiene que:

> En la raíz de la noción de praxeología, se encuentran las nociones solidarias de tarea *t*, y de *tipo* de tareas, *T*. Cuando una tarea *t* forma parte de un tipo de tareas *T*, se escribirá $t \in T$. En la mayoría de casos, una tarea (y el tipo de tareas *asociado*) se expresa por un verbo: *limpiar*

la habitación, *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *saludar* a un vecino, *leer* un manual de empleo, *subir* una escalera, (…) (p.2).

En la presente investigación identificaremos siete tipos de tarea expresados a través de los verbos *dividir, hallar, transformar,* etc. y sus respectivas tareas asociadas. Un ejemplo mostramos a continuación:

Tipo de tarea: Dividir el todo en partes iguales y tomar alguna de ellas.

Tarea 1: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo.

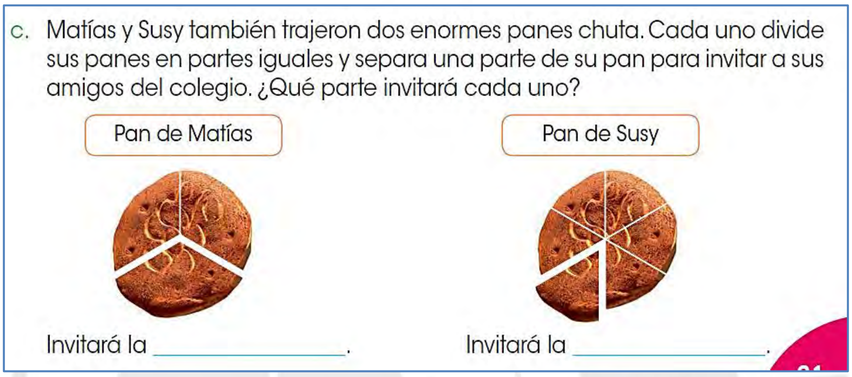


Figura 3. División de la unidad en partes iguales.
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 81)

Tarea 2: *Escribir la fracción que representa la parte de la figura que está pintada.*

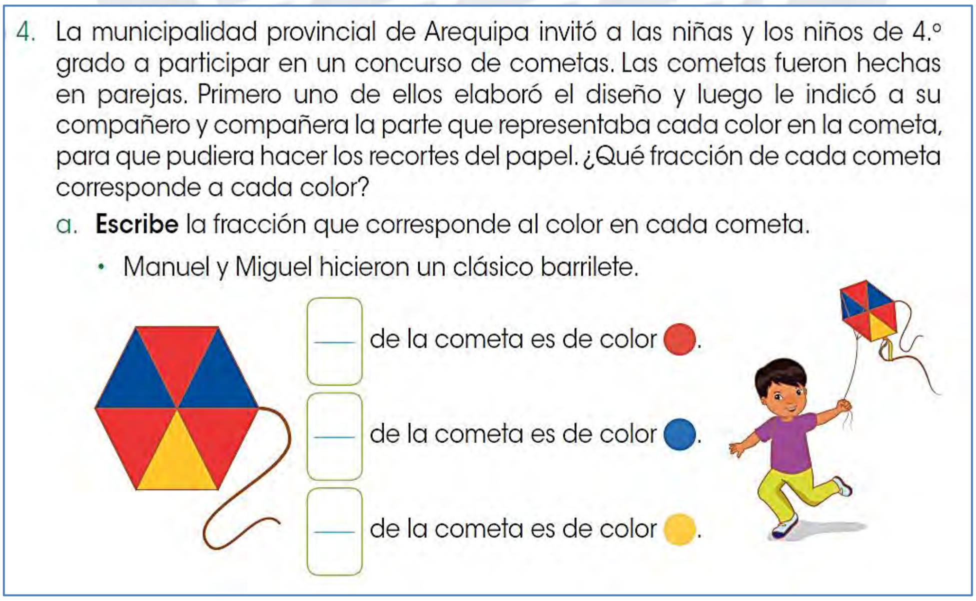


Figura 4. División de un hexágono en partes iguales.
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 85)

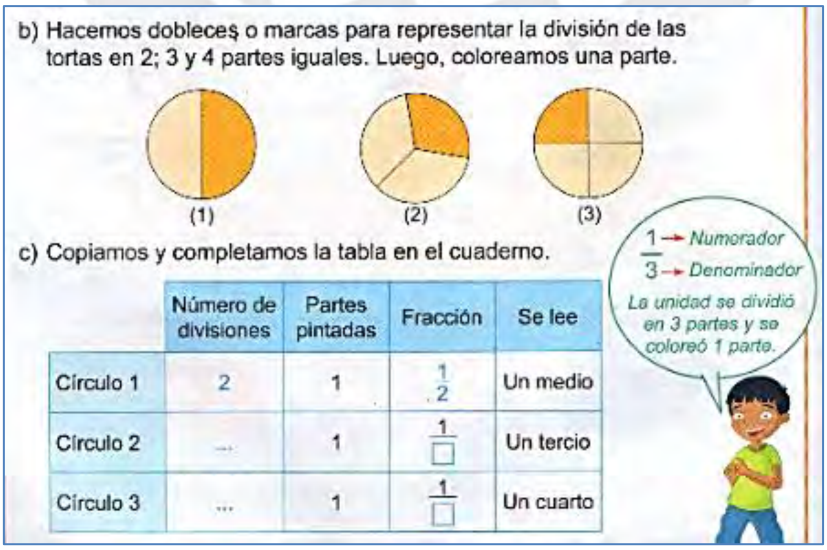
- **Técnicas ($\hat{o}$)**

Para resolver estas tareas necesitamos una forma de proceder, a lo cual Chevallard (1999) denomina ***técnicas,*** estos procedimientos de resolución pueden ser un algoritmo o un planteamiento heurístico, todo dependerá del tipo de tarea matemática que se deba resolver.

Según el autor las técnicas pueden tener un alcance limitado para resolver las tareas de un tipo, así mismo una técnica puede ser superior a otra cuando satisface las necesidades matemáticas de los estudiantes (Chevallard, 1999), esto es que puede resolver la mayor cantidad de tareas de un tipo. Así mismo en una institución (escuela, aula de clase, texto escolar, etc.) puede existir una sola técnica o un pequeño número de técnicas reconocidas para resolver un determinado tipo de tareas.

Para ejemplificar el concepto de técnica, retomamos el ejemplo anterior y decimos que ambas tareas Tarea 1: escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo y Tarea 2: escribir la fracción que representa la parte de la figura que está pintada pueden ser resueltas usando la *técnica del doble conteo de las partes*, la cual consiste en colocar en el numerador de la fracción el número de partes que se pintó o tomó de la unidad y en el denominador el número de partes iguales en que fue dividida.

Esta técnica se muestra en el texto escolar Matemática 3 (2012), la cual mostramos a continuación:


b) Hacemos dobleces o marcas para representar la división de las tortas en 2; 3 y 4 partes iguales. Luego, coloreamos una parte.

c) Copiamos y completamos la tabla en el cuaderno.

	Número de divisiones	Partes pintadas	Fracción	Se lee
Círculo 1	2	1	$\frac{1}{2}$	Un medio
Círculo 2	...	1	$\frac{1}{\square}$	Un tercio
Círculo 3	...	1	$\frac{1}{\square}$	Un cuarto

Figura 5. Representamos fracciones
Fuente: Matemática 3. Texto Escolar de tercer grado de primaria. (2012, p. 162)

- **Tecnología (θ)**

Según Chevallard (1999) toda técnica se ve sustentada por un discurso racional llamado ***tecnología***, este discurso permite asegurar de que la técnica resuelve las tareas del tipo T. Así mismo la tecnología explica o aclara las afirmaciones hechas en el proceso de solución de la tarea y finalmente produce nuevas técnicas.

En nuestro ejemplo, *la técnica del doble conteo de las partes* empleada para resolver la Tarea 1 y 2 de nuestro ejemplo se ve justificada por la noción de fracción como representación de una o varias partes de la unidad dividida en partes iguales o una parte de una colección de objetos iguales. A continuación, hallamos este discurso que se halla en el texto escolar Matemática 3.

Una **fracción** representa una o varias partes de la unidad dividida en partes iguales o una parte de una colección con objetos iguales.

Figura 6. Concepción de fracción como relación parte – todo.
Fuente: Matemática 3. Texto Escolar de tercer grado de primaria. (2012, p. 162)

Cabe resaltar que esta tecnología no tiene origen en la matemática misma, es decir no surge de la definición del número racional en su representación fraccionaria como cociente de dos números enteros, por tanto, esta noción formará parte del discurso tecnológico que denominamos significado de fracción como relación parte – todo.

Chevallard (1999) sostiene que en algunos casos la técnica ($\hat{o}$) relativa a un tipo de tarea está siempre acompañada de un rastro de tecnología (θ), esto significa que la técnica tiene en sí misma elementos que justifican los pasos que se hizo para resolver la tarea. Según el autor esto ocurre generalmente en la aritmética elemental en la que un pequeño discurso tiene una función técnica y tecnológica a la vez.

- **Teoría (Θ)**

La teoría es el último componente de la praxeología y tiene por función justificar las afirmaciones hechas en la tecnología. Así se pasa del nivel de justificación, explicación y producción de las técnicas a la teoría, la cual cumple las mismas funciones que la tecnología hacía con la técnica (Chevallard, 1999).

3.2 Tipos de organizaciones matemáticas

Chevallard (1999) sostiene que toda organización praxeológica $[\mathbf{T}/\hat{\mathbf{o}}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\Theta}]$ está compuesta de dos bloques: un *bloque práctico-técnico* $[\mathrm{T}/\hat{\mathrm{o}}]$ que se asocia con el saber hacer y un *bloque tecnológico – teórico* $[\theta/\Theta]$ que se relaciona con el saber.

Bosch y Gascón (2009) afirman que las organizaciones matemáticas pueden ser de cuatro tipos: puntuales, locales, regionales y globales.

Las *organizaciones matemáticas puntuales (OMP)* poseen un único tipo de tareas generalmente vinculadas a un pequeño grupo de técnicas, como resolver ecuaciones de primer grado, simplificar fracciones, hallar el perímetro de una circunferencia, etc. Si las técnicas empleadas se relacionan en torno a una sola tecnología se generan las *organizaciones matemáticas locales (OML)* como por ejemplo los temas de funciones afines, semejanza de figuras, etc. Seguidamente las organizaciones locales se convierten en *organizaciones matemáticas regionales (OMR)* si se estructuran en base a una sola teoría que permiten explicar sus tecnologías, aquí estarán lo que Bosch y Gascón (2009) llaman bloques temáticos: las funciones, la estadística, la geometría, etc. Finalmente, según Chevallard (1999) las organizaciones regionales pueden articularse teniendo en cuenta sus teorías, formándose una praxeología compleja llamada *organización matemática global (OMG).*

3.3 Indicadores de completitud de una Organización Matemática Local

Uno de los objetivos de este trabajo es conocer cuál es el grado de completitud de la organización matemática que consideramos en primera instancia como local, para ello citamos los siete indicadores del grado de completitud de una Organización Matemática Local (OML) propuestos por Fonseca (2004). Cabe resaltar que el autor menciona que no es posible hablar de OML *completas* o *incompletas* sino de *OML más o menos* completas, es decir su nivel de completitud está en función de qué indicadores cumple progresivamente.

OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

De acuerdo con Fonseca (2004) este indicador se evidencia cuando la OML posee tipos de tareas relacionados entre sí mediante el desarrollo sucesivo de las técnicas las cuales deben compartir elementos tecnológicos.

También entre los tipos de tareas de la OML es necesario que aparezcan tareas que se enfoquen a la interpretación, justificación, fiabilidad, economía, alcance y comparación de las técnicas. La economía de la técnica se refiere al procedimiento que tenga la menor cantidad de pasos y el alcance de una técnica está determinado por la cantidad de tareas que se pueda resolver con la técnica.

OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.

Fonseca (2004) afirma que una OML será más completa en la medida de que algunas de las tareas, pertenecientes a un tipo de tarea, tenga la opción de ser resuelta usando dos o más técnicas; y que la tecnología que las sustenta permitan escoger cuál de ellas es la más eficaz. Un ejemplo de tarea que nos permite ilustrar este indicador lo podemos hallar en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado de Primaria.

Tarea: Calcular la fracción de un número entero en un problema de contexto.

1. Una empresa que fabrica focos ahorradores de luz realiza diariamente su control de inventario. El inspector observa un lote de 72 focos y anota aquellos que son de luz blanca y aquellos que tienen luz amarilla. Al finalizar su revisión, indica en su informe que $\frac{5}{12}$ del total de focos son de luz blanca y el resto son de luz amarilla. ¿Cuántos focos revisados por el inspector son de luz blanca?

Figura 7. La fracción como operador.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 65)

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo sugiere tres técnicas que luego de construir la OM le asignaremos un nombre a cada técnica.

Primera técnica (gráfica): Dividir el total de elementos en 12 grupos iguales, de 6 focos por grupo, luego tomar 5 grupos obteniendo 30 focos.

Figura 8. Técnica gráfica para hallar la fracción de un número
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 65)

Segunda técnica (operativa): Multiplicar la fracción 5/12 por el total de focos, multiplicando primero el numerador 5 por 72 para luego dividir el resultado por 12, obteniendo un total de 30 focos.

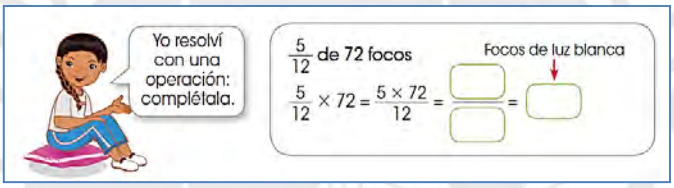


Figura 9. Primera técnica operativa para hallar la fracción de un número
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 65)

Tercera técnica (operativa): Multiplicar la fracción 5/12 por el total de focos, dividiendo primero el entero 72 entre el denominador 12 de la fracción para luego multiplicarlo por 5, obteniendo un total de 30 focos.

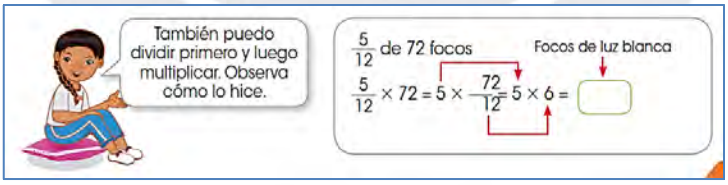


Figura 10. Segunda técnica operativa para hallar la fracción de un número
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 65)

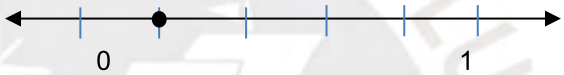
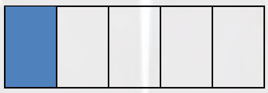
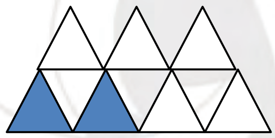
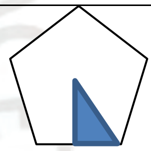
OML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas

Bosch (1994) afirma que un ostensivo proviene de la *ostensión* que significa mostrar y que es perceptible por el ser humano, siendo estos sonidos (morfemas), grafismos (grafemas) y gestos.

Según Fonseca, Bosch y Gascón (2010) las tareas, técnicas, teoremas, entre otros son relativamente independientes de los objetos materiales (ostensivos) para su presentación. Por ello una OML requiere tener tareas o técnicas con diversas representaciones que pueden ser gráficas, textuales, numéricas, etc. que ayuden a la comprensión de las mismas.

Nosotros consideraremos como objetos ostensivos para las fracciones cuatro tipos de representación tomando en cuenta el trabajo de Fandiño (2009), estos son: el lenguaje común, el lenguaje aritmético, el lenguaje figural, y los esquemas pictográficos.

Tabla 1: Representaciones para la fracción un quinto

LENGUAJE COMÚN	Un quinto, la quinta parte		
LENGUAJE ARITMÉTICO	$\frac{1}{5}$; 0,2		
LENGUAJE FIGURAL			
ESQUEMAS PICTOGRÁFICOS			

Fuente: Elaboración propia.

OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

Fonseca (2004) afirma que las tareas y técnicas pueden variar, siendo flexibles en su estructura generándose tareas o técnicas inversas producto del cambio de datos o estructura de las mismas.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas

Según Fonseca, Bosch y Gascón (2010) este indicador nos dice que una OML debe tener tareas cuya solución permite interpretar la el funcionamiento de las técnicas y el resultado de aplicar dichas técnicas para resolver dicha tarea.

OML6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

Fonseca (2004) afirma que una OML será más completa si posee tipos de tareas donde los datos y las incógnitas no están fijados desde un inicio y se requiere discriminar en problemas extramatemáticos que datos se usarán o son los más pertinentes para su solución.

Lo anterior implicaría que estas tareas tienen diferentes respuestas y todas podrían considerarse correctas teniendo en cuenta una condición general, además son modelas con el mismo objeto matemático, en nuestro caso los números racionales.

OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica

La completitud de una OML depende de la efectividad de su tecnología y teoría, es decir estas deben ser capaces de generar nuevas técnicas y de este modo ampliar los tipos de tareas.

Al respecto Fonseca, Bosch y Gascón (2010) afirman:

> El discurso tecnológico-teórico de la OM local en cuestión, esto es, el discurso matemático que sirve para interpretar y justificar la práctica matemática, *debe incidir efectivamente* sobre ésta y debe permitir, en particular, *construir técnicas matemáticas nuevas* capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática (p. 13).

En los Cuadernos de Trabajo observaremos que la técnica del doble conteo de las partes nos permite construir la técnica de la iteración para resolver tareas vinculadas al número racional como medida.

3.4 Modelos Epistemológicos

Según Gascón (2011), en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se denominan problemas didácticos a aquellos problemas de investigación que se vinculan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, *el problema del álgebra elemental*. Según el autor entenderemos por álgebra elemental al álgebra que se enseña en la escuela secundaria.

Ahora, los problemas didácticos pueden ser estudiados tomando en cuenta tres dimensiones: la dimensión epistemológica, económica – institucional y ecológica. De acuerdo con Gascón (2011), la dimensión epistemológica de un problema didáctico tiene que ver con la descripción e interpretación del ámbito matemático que está en juego en el problema didáctico.

Por ejemplo, según Gascón (2011) la dimensión epistemológica del *problema del álgebra elemental* abarca cuestiones como: ¿qué es el álgebra elemental y qué papel juega en la actividad matemática?, ¿cuáles son las relaciones posibles entre lo algebraico y numérico?, ¿es posible introducir el álgebra elemental desde un marco aritmético habitual? Esto último se refiere a que se tiende a enseñar el álgebra como una generalización de los procedimientos aritméticos.

Para abordar la dimensión epistemológica del problema didáctico, la TAD usa tres modelos epistemológicos denominados: Modelo Epistemológico de Referencia, Modelo Epistemológico Dominante y Modelo Epistemológico Alternativo; los cuales describiremos brevemente a continuación.

Modelo Epistemológico de Referencia

Gascón (2011) señala que, para realizar la descripción e interpretación del conocimiento matemático, la TAD utiliza una herramienta teórica llamado Modelo Epistemológico de Referencia (MER). Este modelo epistemológico sirve para deconstruir y reconstruir organizaciones matemáticas que posteriormente serán difundidas en diversas instituciones. Las instituciones pueden ser la escuela, aula de clase, un libro, etc.

Según el autor el MER es un marco de referencia que abarca cuestiones sobre que es un objeto matemático y cómo se interpreta (en nuestro caso, el número racional), su razón de ser en una institución (que problemas matemáticos resuelve los números racionales en su representación fraccionaria en la educación primaria) y la actividad matemática vinculada a él, lo que permite identificar y analizar un conjunto de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que se emplean en instituciones para enseñar el objeto matemático.

Así mismo, Gascón (2011) afirma que el MER tiene un carácter provisional y permite estudiar el saber matemático antes que se transforme en un saber enseñado (es decir, antes que sea presentado en el aula de clase) y se estructura mediante una sucesión de praxeologías matemáticas de complejidad creciente, esto es, que el objeto matemático debe abordarse partiendo de organizaciones matemáticas puntuales (OMP) hasta alcanzar organizaciones matemáticas globales (OMG).

En el siguiente capítulo elaboramos los rasgos de un MER acerca de los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria a partir de un análisis histórico - epistemológico de la noción del número racional y los trabajos de Kieren (1980), Behr, Lesh, Post & Silver (1983), Behr & Post (1992), Freudenthal (1983).

Modelo Epistemológico Dominante

Según Gascón (2014), el Modelo Epistemológico Dominante (MED) es aquel marco de referencia que condiciona la actividad matemática en una institución dada y las actividades didácticas que se concretan en un modelo docente. Tal es el caso de concebir al álgebra elemental como una aritmética generalizada donde se enseña el álgebra como una extensión de la aritmética (Gascón, 2014).

En nuestra investigación identificaremos el MED de los significados del número racional a partir del análisis de la organización matemática de los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria y los criterios de completitud de Cecilio Fonseca.

Modelo Epistemológico Alternativo

Un Modelo Epistemológico Alternativo (MEAL) es una respuesta al Modelo Epistemológico Dominante en una determinada institución. Un ejemplo de MEAL es el propuesto por Ruiz Munzón en el 2010, quien concibe al álgebra elemental como un instrumento de modelización en vez de una aritmética generalizada.

CAPÍTULO IV: UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA PARA LAS FRACCIONES

En este capítulo procedemos a realizar un análisis de los aspectos históricos – epistemológicos de la noción de número racional ya que este es nuestro objeto matemático cuya representación fraccionaria está vinculada a múltiples significados. Luego analizamos investigaciones sobre las interpretaciones para el número racional los cuales nos permitirá construir un Modelo Epistemológico de Referencia de los significados asociados a la fracción en la Educación Primaria, que de por cierto no posee la rigurosidad de un MER tal y como lo describimos en el capítulo anterior, ya que no es el objetivo general de esta tesis.

2.1 Aspectos históricos – epistemológicos de la noción de número racional

Abordamos la evolución de la noción del número racional a partir de la génesis histórica de las fracciones, ya que éstas surgieron de forma natural frente a la necesidad del hombre de hacer mediciones y repartos. Luego estos números pasaron a ser una forma de representación de los números racionales como objeto matemático a principios del siglo XX.

Según Fandiño (2009) el uso de las fracciones en la historia se remonta a los egipcios, hacia el año 3000 a.C., donde los papiros y rollos registran interesantes problemas matemáticos. Uno de los papiros egipcios más conocidos es el papiro de Rhind, descubierto por Alexander Henry Rhind en 1858, el cual contiene 87 problemas matemáticos y varias situaciones que se refieren a las fracciones en situaciones de reparto de alimentos, en contextos geométricos y planteo de ecuaciones.

Para los egipcios las fracciones “verdaderas” eran aquellas cuyo numerador era la unidad y el denominador un número natural, conocidas también como fracciones unitarias. Por tanto, las fracciones 2/3 y 3/4 eran considerados como símbolos divinos.

Los egipcios siempre trataban de expresar estos símbolos divinos (fracciones no unitarias) como la suma de fracciones unitarias. Por ejemplo, algunos ejemplos de sumas halladas en el papiro de Rhind, traducidos a la notación actual de fracción, eran las siguientes: $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ $\frac{47}{60}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

En el Antiguo Egipto las fracciones tenían un carácter utilitario, pues eran usadas para calcular y repartir alimentos como los panes y la cerveza. Por ejemplo, según Valdez (2008) los problemas del 1 a 6 del papiro de Rhind se refieren a repartos de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 hogazas (barras) de pan entre 10 hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias y usando la fracción 2/3.

El problema 3 del papiro consiste en repartir 6 hogazas de pan entre 10 hombres; para lo cual el escriba Ahmes se limita a dar el resultado $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ y una comprobación de su respuesta usando un procedimiento singular que se muestra en Valdez (2008):

$$1 -\!-\!\!\rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

$$* 2 -\!-\!\!\rightarrow 1+\frac{1}{5}$$

$$4 -\!-\!\!\rightarrow 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$* 8 -\!-\!\!\rightarrow 4+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

$$8+2=10 -\!-\!\!\rightarrow 1+4+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=6$$

Luego $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ representa la cantidad de panes que recibe cada hombre, puesto que sumando las fracciones correspondientes a *2 y *8 se obtiene 6, que son el total de panes que debían repartirse. Nótese también que 10 veces $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ nos da como resultado 6.

De lo anterior podemos dar evidencia que los egipcios ya tenían conocimientos de las fracciones equivalentes y la duplicación de cantidades con fracciones unitarias en contextos de reparto equitativo de alimentos.

Otro ejemplo interesante es el problema 72 del papiro de Rhind, donde se pide determinar el número de panes de fuerza 45 equivalentes a 100 panes de fuerza 10. Para comprender la solución de este problema debemos tener en cuenta que la “fuerza” (también llamada “pesu”) era la unidad que expresaba la calidad del pan o la cerveza producida. En el caso del pan, una fuerza era el número de panes fabricados por unidad de peso de granos usados; por lo tanto, cuanto mayor era la “fuerza” peor era la calidad del pan fabricado.

Según Fandiño (2009) la fuerza de un pan se determina haciendo el cociente entre un número de panes y el total de granos de trigo usados para hacer la masa de los mismos. Por tanto, la solución que ilustra la autora es la siguiente:

$$\frac{100\ panes}{10\ fuerza} \times 45\ fuerza = 450\ panes$$

Debemos considerar que Fandiño no incluye el nombre de las magnitudes, pero lo hacemos aquí para hacer explícita la solución. Así pues, se dividió el total de panes entre su “fuerza” (calidad) para saber cuántos granos de trigo se emplearon para fabricar los 100 panes de esa calidad; luego esta nueva cantidad se multiplicó con la “fuerza” de 45 para averiguar cuántos panes se debían fabricar. Luego la solución de este problema muestra como los egipcios hacían uso de la fracción como razón lo cual implica que tenían nociones de proporcionalidad.

Así mismo las fracciones eran usadas para resolver problemas vinculados al planteo de ecuaciones lineales, aunque en ese entonces no se conocía la notación literal de una incógnita, así que se reemplazaba una cantidad desconocida con la palabra “montón”. Un ejemplo lo hallamos en el problema 24 del papiro de Rhind donde se pregunta cuál es el valor montón, si el montón y 1/7 del montón es igual a 19.

El método egipcio para resolver este problema consistía en la *falsa posición* el cual consistía en dar valores arbitrarios e ir agregando lo que faltaba usando fracciones unitarias. Actualmente este problema podría plantearse usando una ecuación de la siguiente manera: $x + \frac{1}{7}x = 19$ y cuya solución es $\frac{133}{8}$, que los egipcios representaron como la suma de $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, notemos aquí una vez más la predilección de escribir una fracción como la suma de un número natural más fracciones unitarias.

Avanzando en la historia, mientras que los egipcios usaban fracciones unitarias para escribir las demás fracciones, los babilónicos alrededor del siglo III a.C. consideraron fracciones con denominador 60 o una potencia de ellas, ya que su sistema de numeración era sexagesimal. Así la fracción $\frac{30}{3600}$ equivalente a $\frac{30}{60^2}$ podía escribirse como 0;0;30 (en escritura sexagesimal asiro-babilones) que significaría: $0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{60} + 30 \times \frac{1}{60^2}$ (descomposición en base 1/60).

Por otro lado, según Obando (2003) los griegos consideraban como números a aquellos naturales mayores que uno; por tanto, las fracciones de la unidad no eran consideradas como números, sin embargo, la existencia de la fracción $\frac{1}{2}$ solo se aceptaba como el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas cuyas medidas estaban en la razón de 1 a 2. Del mismo modo otras mediciones inexactas eran expresadas como razones homogéneas entre números naturales, por ejemplo $\frac{3}{4}$ era concebido como la medida de dos magnitudes cuya razón es de 3 a 4.

Los chinos en cambio desarrollaron un cálculo fraccionario basado en fracciones con denominador 10 o sus potencias y a partir del siglo XIII ya se hacían conversiones de fracciones a fracciones decimales, pues el sistema decimal se impregnó en la cultura china.

Gracias a los hindús hoy en día tenemos un sistema posicional con base diez, usamos el cero y tenemos conocimiento de las funciones seno y coseno. Uno de los destacados matemáticos hindús fue sin duda Bhaskara, quién escribió un tratado de álgebra en el siglo XII llamado *Lilavati*, del cual mostramos un fragmento acerca de cómo este matemático hindú realizaba la adición y sustracción de fracciones con diferente denominador:

> 29. El numerador y el denominador (de cada fracción) son multiplicados por el otro denominador: de esta manera se reducen al mismo denominador. O, el numerador y el denominador se pueden multiplicar por (nosotros) los denominadores reducidos, por el inteligente (la calculadora).
>
> Aquí está un ejemplo:
>
> 30. Tres, un quinto, un tercio: dígame, amigo, (los valores de) ésos (reducidos a) un denominador común, para sumarlos después; y también un sexagésimo tercer y un décimo cuarto, para restarlos luego.

Declaración: 3/1,1/5,1/3. Reducido a un denominador común: 45/15,3/15,5/15. La suma es 53/15.

Ahora, la declaración en el segundo ejemplo: 1/63,1/14. (Los numeradores) son multiplicados por los denominadores (cada otro) reducidos por siete: 7, 2. Reducido a un denominador común: 2/126,9/126. El resultado después de la substracción es 7/126, y cuando sea reducido por siete, 1/18.

Ésa es la reducción a un denominador común. (Sánchez, s.f., p.39)

También es necesario mencionar que los hindúes compartieron sus saberes matemáticos con los árabes, de tal forma que ambas culturas aportaron a la creación de más conocimiento matemático durante varios siglos; sin embargo, los árabes destacaron por sus avances a pasos agigantados. Tales así, los árabes conciben las cifras del 0 al 9 de forma definitiva tanto para la escritura en el sistema decimal como para los números fraccionarios. También construyeron algoritmos de cálculo con números naturales y fraccionarios como lo conocemos en la actualidad.

Uno de los matemáticos árabes que resaltó en la historia fue Al-Kashi que vivió alrededor del siglo XV. Este matemático se autodefine en una de sus obras como el inventor de las fracciones decimales, pues probablemente lo había formalizado dentro del sistema posicional decimal, un ejemplo de su aporte es citado en Fandiño (2009): “Si tenemos 23 se sabe que ello significa, desde el punto de vista posicional con base diez, $2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; pero ¿qué significa 23,78? Se debe recurrir a fracciones decimales: $2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$; hoy de hecho se prefiere incluso recurrir a exponentes negativos (...)” (p. 68).

Mientras en la época medieval los europeos se dedicaron a transmitir la cultura griega que fue heredada a los árabes; en el siglo XIII el matemático italiano Leonardo de Pisa, más conocido en la historia como Fibonacci, comenzó a estudiar los legados matemáticos de los hindúes y árabes. Leonardo escribió la obra *Liber Abaci* (Libro del Ábaco), en el que difundía los conocimientos del mundo árabe en occidente. El *Liber Abaci*, escrito en 1202, cuenta con quince capítulos donde Fibonacci plantea problemas vinculados al comercio de su época.

En el sexto y séptimo capítulo el autor hace un estudio de las fracciones tal y como las conocemos hoy, muestra las reglas para operar con fracciones usando el mínimo común múltiplo y transforma las fracciones en suma de fracciones unitarias, resuelve ecuaciones cuya solución son números enteros, racionales e irracionales, usa las fracciones sexagesimales, etc.

Por otro lado, la reducción de fracciones a los términos mínimos o fracción irreductible es de origen antiguo, pero es presentada en forma explícita hacia el siglo XV en los trabajos de Luca Pacioli y Nicoló Fontana bajo el nombre de "dividir". Así mismo, la diferencia poco intuitiva entre fracciones "propias" e "impropias" tiene lugar en el siglo XVIII.

La representación de las fracciones con números decimales se halla en la obra de Simone de Bruges, llamado Stevin. El autor no usaba la coma para separar la parte entera de la parte decimal, sino que usaba un simbolismo distinto, por ejemplo, escribía 34,652 como $34\boxed{0}6\boxed{1}5\boxed{2}2\boxed{3}$. El uso de la coma para separar la parte entera de la decimal fue propuesto por John Wallis en el siglo XVII y fue generalizado definitivamente sólo a fines del siglo XVIII en Francia e Italia con la introducción del Sistema Métrico Decimal.

Ya a principios del siglo XX, George Cantor, con la Teoría de Conjuntos, muestra una construcción axiomática para los números racionales usando clases de equivalencia, donde la notación fraccionaria es una representación para los elementos de este nuevo conjunto numérico, la construcción axiomática puede verse con detalle en Rojo (1996).

Esta construcción axiomática se inicia definiendo una relación de equivalencia dentro del producto cartesiano de los números enteros (Z) y de los enteros no nulos ($Z^* = Z - \{0\}$). El producto cartesiano se enuncia de la siguiente manera usando pares ordenados:

$$Z \times Z^* = \{(a,b)/a \in Z \wedge b \in Z^*\}$$

Luego en este nuevo conjunto se define la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,b) \sim (a',b') \leftrightarrow ab' = ba'$$

Ejemplo: $(3,5) \sim (6,10) \leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$

La relación de equivalencia definida anteriormente divide al conjunto $Z \times Z^*$ en subconjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Estos subconjuntos no vacíos y disjuntos se denominan *clases de equivalencia* simbolizado por $\boldsymbol{k_{(p,q)}}$, cuyos elementos son pares ordenados relacionados mediante la relación "$\sim$", así una clase de equivalencia de un elemento genérico (a, b) que pertenece al conjunto $Z \times Z^*$ tendría la siguiente forma:

$$k_{(a,b)} = \{(x, y) \in Z \times Z^* / (x, y) \sim (a, b)\}$$

Cada clase de equivalencia ***se llama número racional***. Tales así, por ejemplo, la siguiente clase de equivalencia $k_{(1,2)}$ define un número racional:

$$k_{(1,2)} = \{\dots, (-3, -6), (-2; -4), (-1; -2), (1,2), (2,4), (3,6), \dots\}$$

Notemos que $(-3, -6) \in k_{(1,2)}$, porque $(-3, -6) \sim (1,2)$

El número racional es toda clase determinada por la relación de equivalencia definida en $Z \times Z^*$. Y el conjunto de los números racionales simbolizado por $\mathbb{Q}$ es el conjunto cociente de $Z \times Z^*$ por la relación de equivalencia "$\sim$", cuya notación es: $Q = \frac{Z \times Z^*}{\sim}$

Los números racionales pueden denotarse también utilizando la notación fraccionaria $\frac{p}{q}$. De allí, la notación de la clase de equivalencia $k_{(1,2)}$ se escribirá ahora como $\frac{1}{2}$, siendo ésta una fracción irreductible y el conjunto de pares ordenados serán fracciones.

$$\frac{1}{2} = \left\{\dots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$$

Lo anterior quiere decir, que, desde un punto de vista puramente matemático, un número racional representado en su forma fraccionaria como $\frac{p}{q}$ es un conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a él.

Ahora tomando en cuenta los aspectos históricos – epistemológicos de la noción de número racional, nuestros antecedentes sobre los subconstructos de los números racionales y considerando que nuestro trabajo se sitúa en la Educación Primaria consideraremos en esta investigación a ***la fracción como una forma de representación de los números racionales*** donde el numerador y denominador serán números naturales y el denominador diferente de cero. Así pues, las fracciones $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ representan un mismo número racional que bien podría ser $\frac{1}{2}$.

De forma explícita las fracciones que hallaremos en los Cuadernos de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria tienen la forma:

$\boxed{\frac{a}{b}\text{, donde } a \wedge b \in \mathbb{N} \text{ y } b \neq 0\,.}$

Si bien es cierto el número racional es un ente matemático abstracto libre de significados vinculados a situaciones reales, su representación fraccionaria $\frac{a}{b}$ nos permitirá asociarlo a situaciones de relación parte – todo, medida, cociente, operador y razón.

Así mismo tomaremos en cuenta ***la representación decimal como una extensión de la representación fraccionaria para el número racional***, ya que encontramos diversas tareas que implican hacer este cambio de escritura para representar las fracciones decimales y lograr una comprensión del concepto de números racionales en otros niveles de estudio tal y como lo respaldan nuestros antecedentes.

2.2 Construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia

Los aspectos históricos – epistemológicos mostrados en la sección anterior evidencia que el objeto matemático número racional aparece como tal hacia el siglo XX. Sin embargo, las fracciones, usadas actualmente como una representación del número racional, surgen en la antigüedad para dar respuesta a cuestiones cotidianas de repartos, medida y proporcionalidad. Por tanto, tal vez sea ésta la razón por la cual en la educación básica se inicia el estudio de los números racionales con el concepto de fracción y porque se usan en situaciones cotidianas tal y como lo afirma Freudenthal.

El Modelo Epistemológico de Referencia (MER) que mostramos a continuación está enfocado en los significados asociados a la representación fraccionaria del número racional y la representación decimal como una extensión de la escritura fraccionaria.

El MER se basa en el análisis histórico previo y los trabajos de Kieren (1980), Behr, Lesh, Post & Silver (1983), Behr & Post (1992), Freudenthal (1983).

Los significados asociados a las fracciones que consideraremos son cinco: relación parte – todo, medida, operador, cociente y razón, así mismo incluiremos la representación decimal como una extensión de la fracción.

A. Significado de la fracción como relación parte – todo

Según Kieren (1980) y Behr *et al.* (1983) la representación fraccionaria del número racional positivo puede ser interpretada como la relación entre el número de partes tomadas de la unidad y el número de *partes iguales* (igual longitud, volumen o número de elementos) en que ésta se ha dividido; así pues, la fracción $\frac{a}{b}$ indica que se ha tomado a partes de una unidad dividida en b partes iguales.

Según Behr & Post (1992) la unidad o todo puede ser de dos naturalezas: *continua o discreta*. Los autores definen al *todo continuo* como la unidad de referencia que tiene longitud, área o volumen y que es considerada como un solo objeto el cual no puede ser dividido en elementos independientes, por ejemplo, una hoja de papel, una manzana, un pastel o un rectángulo.

Los investigadores ilustran el uso de las fracciones en un todo continuo con un rectángulo el cual se ha dividido en cuatro partes de igual área de las cuales se pintaron tres, siendo $\frac{3}{4}$ la fracción que representa la parte pintada.

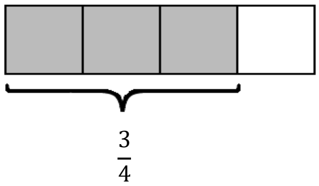


Figura 11. Representación figural de un todo continuo
Fuente: Behr y Post (1992)

Behr & Post (1992) caracterizan al *todo discreto* como la unidad de referencia que posee más de un objeto, es decir, los elementos que conforman la unidad están separados y por tanto pueden ser agrupados en conjuntos más pequeños como una docena de huevos, ocho galletas, quince cuentas y veinticinco centavos. Los autores ilustran el empleo de las fracciones en un todo discreto es representar el número de bolitas pintadas de un total de ocho bolitas idénticas.

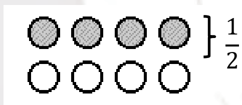


Figura 12. Representación figural de un todo discreto
Fuente: Behr y Post (1992)

Kieren (1980) y Behr & Post (1992) sostienen que este significado de la fracción como relación parte – todo se basa en el concepto de partición el cual significa dividir la unidad en partes iguales o subconjuntos de igual cantidad de elementos. Así mismo este significado es fundamental para construir los demás significados asociados a la fracción como medida, operador, razón y cociente.

Por otro lado, desde la fenomenología didáctica de Freudenthal, la fracción puede ser vista como fracturador si ésta divide objetos susceptibles de ser divididos en partes iguales, es decir está cortando, rebanando, rompiendo o coloreando la unidad en partes de igual medida. Para el autor el todo o unidad de referencia puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o sin estructura, así como sus respectivas combinaciones, los detalles pueden verse en Freudenthal (1983).

A partir de los ejemplos del investigador deducimos que *el todo es definido* cuando la región o conjunto de elementos es finito y puede ser contado, por ejemplo, el autor menciona que un *todo definido continuo* podría ser una tira de papel y un *todo definido discreto*, un conjunto de canicas.

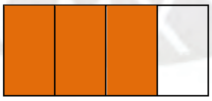
Así mismo Freudenthal (1983) ejemplifica *un todo definido discreto estructurado* haciendo mención a una tarjeta de bingo cuya numeración permite tener una estructura y que la atención se fija en las casillas que tienen premios. En cambio, *un todo definido continuo estructurado* se ejemplifica con discos circulares divididos en sectores, estos sectores separados o agrupados representarían partes del todo.

El significado asociado a la fracción como relación parte – todo que asumimos para muestro Modelo Epistemológico de Referencia se basa en las ideas de Behr & Post (1992), y algunos aspectos de la fracción como fracturador descrita por Freudenthal (1983).

La fracción $\frac{a}{b}$ indica las a partes que se ha tomado de una unidad o todo (continuo o discreto) dividido en b partes iguales.

Por ejemplo, la fracción desde este significado puede ser usada en tareas como:

- <u>En un todo continuo:</u>
  a) De una región rectangular dividida en cuatro partes iguales (regiones de igual área) se han sombreado tres partes. Escribe la fracción que representa la parte sombreada.

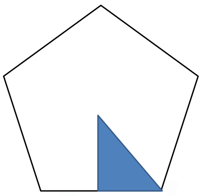


  Esta tarea es típica para iniciar el estudio de las fracciones donde la fracción siempre es considerada menor que la unidad.

  b) Una ruleta con diez sectores de igual área, donde dos sectores son de color rojo, dos de color verde, dos de color amarillo y dos de color celeste. Escribir la fracción que representa el sector celeste.

Consideramos que esta tarea permite mostrar la equivalencia de fracciones, por ejemplo, el sector celeste bien puede representar la fracción $\frac{2}{8}$ o la fracción $\frac{1}{4}$ si se agrupan los colores.

c) Dada la siguiente figura, escribe la fracción que representa la parte sombreada.



Esta tarea permite hacer trazos para descomponer la figura en regiones congruentes y poder determinar la fracción que representa la parte sombreada.

- <u>En un todo discreto:</u>

a) De una bolsa de 8 caramelos de los cuales se extraen 3 caramelos. Escribir la fracción que representa el total de los caramelos extraídos.

b) De una bolsa de 32 caramelos de tres sabores diferentes, donde hay 8 caramelos de fresa, 11 caramelos de piña y 13 caramelos de pera. Escribir la fracción que representa la cantidad de caramelos de fresa.

Esta tarea al igual que la tarea b) del todo continuo permite abordar la equivalencia de fracciones, esto es los caramelos de fresa representarán $\frac{8}{32}$ del total o $\frac{1}{4}$.

B. Significado de la fracción como medida

Este significado se refiere a asignar un número a una región de una, dos o tres dimensiones utilizando una unidad arbitraria de medida (llamado patrón) con lo cual se cubrirá dicha región un número de unidades enteras y en el caso de ser necesario se subdividirá la unidad en partes iguales para proporcionar el ajuste necesario tal y como lo afirma Kieren (1980).

Por ejemplo, si un objeto mide $1\frac{1}{2}u$ de longitud, quiere decir que el objeto mide una unidad entera más la mitad de dicha unidad, lo anterior se ilustra en la siguiente figura.

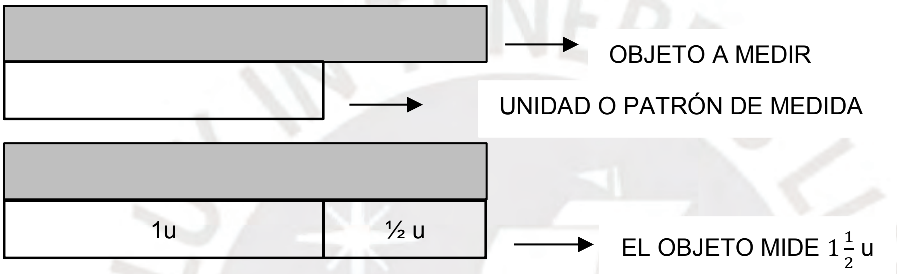


Figura 13. Representación de la medida de un objeto usando fracciones
Fuente: Elaboración propia.

Así mismo, Kieren (1980) sostiene que concebir al número racional en su representación fraccionaria como medida permite una comprensión de la adición de fracciones, pues el unir dos medidas expresadas en fracción equivale a encontrar una medida total, por ejemplo $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

Kieren (1980) también afirma que el uso del metro como unidad de medida proporciona una entrada natural a la notación decimal para lo cual los decímetros, centímetros y milímetros sirven de modelos físicos para las décimas, centésimas y milésimas respectivamente. Lo dicho anteriormente, desde nuestro punto de vista, nos permite conectar la representación fraccionaria con la representación decimal de un número racional.

Por otro lado, Freudenthal (1983) afirma que la *fracción como medidora* puede ir acompañada de una unidad física, por ejemplo $1\frac{1}{2}m, \frac{1}{4}kg, 3\frac{1}{8}l$; o también puede medir segmentos en la recta numérica para lo cual las expresiones anteriores quedarían libres de unidades conocidas. Sin embargo, debemos tener en cuenta que concebir a la fracción acompañada de una unidad física solo genera fracciones positivas.

Tomando las ideas de Behr *et al.* (1983) la representación fraccionaria de los números racionales también puede interpretarse como puntos en la recta numérica enfatizando que tales puntos son un subconjunto de los números reales, pues los racionales no llegan a recubrir toda la recta.

Behr & Post (1992) mencionan que en realidad la representación fraccionaria de los números racionales representa distancias en la recta numérica, pero que con frecuencia los maestros sugieren identificarlo con un punto en la recta, lo cual es válido, siempre y cuando se considere que la distancia empiece en cero y se itere cuantas veces sea necesario la fracción unitaria en dirección del número uno.

Por ejemplo, el número racional representado en su forma fraccionaria 5/8 puede ser representado en la recta iterando cinco veces la fracción unitaria 1/8 hacia la derecha como se ilustra en la siguiente figura.

FIGURE 7-61

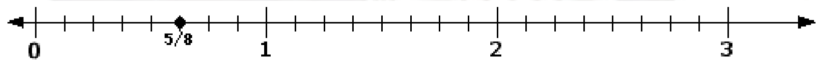


FIGURE 7-62

Figura 14. Primera representación de 5/8 en la recta numérica.
Fuente: Behr y Post (1992)

En casos de que la iteración de 1/8 empiece en otro punto de la recta, la fracción 5/8 representa la distancia del punto A al B.

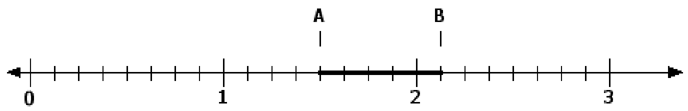


Figura 15. Segunda representación de 5/8 en la recta numérica.
Fuente: Behr y Post (1992)

Así mismo Behr & Post (1992) sostienen que la recta numérica es un importante soporte gráfico que permite modelar la suma de fracciones y representar las fracciones mayores que uno. Por ejemplo, según los investigadores, un niño puede observar que $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{10}{8}$ y que $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=1\frac{2}{8}$.

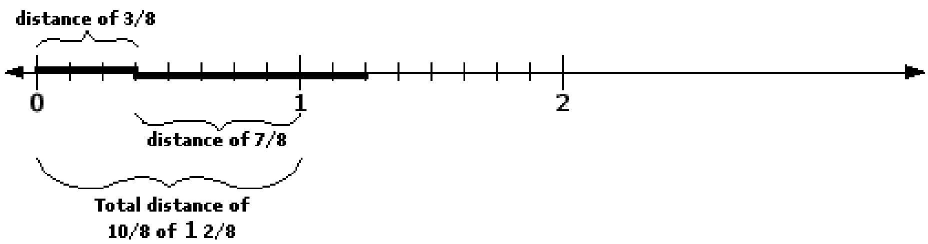


Figura 16. Representación de la suma de fracciones en la recta numérica.
Fuente: Behr y Post (1992)

En cuanto a las fracciones impropias como 13/3 resultarían de iterar 13 veces 1/3 en la recta numérica.

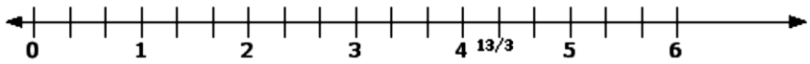


Figura 17. Representación de una fracción impropia en la recta numérica.
Fuente: Behr y Post (1992)

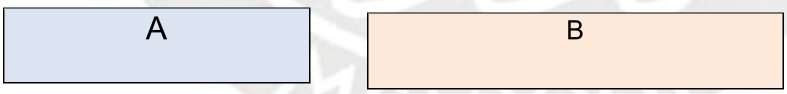
El significado de medida para la representación fraccionaria del número racional en nuestro MER comprende las concepciones dadas por Kieren (1980), Freudenthal (1983) y Behr & Post (1992).

La fracción $\frac{a}{b}$ indica que una magnitud o segmento en la recta mide a veces la fracción unitaria $\frac{1}{b}$, siendo ésta la unidad de medida.

Por ejemplo, las fracciones pueden ser usadas en las siguientes tareas:

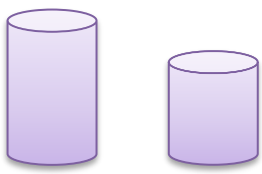
- <u>Medir áreas de figuras planas:</u>

  Medir el área de la figura A tomando como referencia la figura B.



- <u>Medir capacidades:</u>

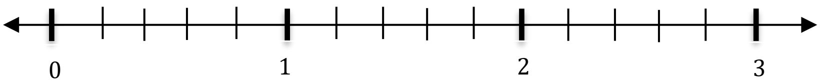
  El recipiente A contiene $1l$ de jugo de naranja. Determina cuántos litros contiene el recipiente B.



A B

- <u>Sumar fracciones:</u>

  Calcula la suma de $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ usando la siguiente recta numérica.



- <u>Comparar fracciones</u>: Ubicar en la recta numérica las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{8}$. Luego determinar que fracción es la mayor.

C. Significado de la fracción como operador

Kieren (1980) y Behr *et al.* (1983) afirman que el número racional positivo escrito en su forma fraccionaria tiene una interpretación algebraica, esto es concebir a $\frac{p}{q}$ como una función que transforma una figura geométrica en otra semejante con $\frac{p}{q}$ veces grande, o como una función que transforma un conjunto en otro con $\frac{p}{q}$ veces elementos.

Es decir, según Behr *et al.* (1983), si el todo es continuo, el número $\frac{p}{q}$ se interpreta como un *ensanchador – encogedor* de un segmento o región. Por ejemplo, si tenemos un segmento de 24 cm al cual se le aplica el operador $\frac{3}{8}$ su longitud se estirará tres veces, siendo su nueva medida 72 cm y luego se encogerá a su octava parte obteniéndose como longitud final 9 cm.

En el caso de un todo discreto, $\frac{p}{q}$ se interpreta como un *multiplicador – divisor* para el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, si en un conjunto hay 15 elementos al cual se le aplica la fracción $\frac{2}{5}$, ésta duplica la cantidad inicial obteniéndose 30 elementos y luego la divide por cinco, obteniéndose como resultado final 6 elementos.

Así mismo a partir de investigaciones hechas por Kieren y Southwell en 1979 se concluyó que para desarrollar tareas con números racionales en su significado de operador se requiere hacer uso simultáneo de la partición (dividir la unidad en partes equitativas) y la operación de la multiplicación con números enteros.

Por ejemplo, para aplicar $\frac{2}{3}$ a 90 unidades podemos particionar 90 en tres grupos de 30 y tomar dos de ellos, obteniendo 60 unidades.

Según Freudenthal (1983) la fracción también permite comparar las magnitudes de dos objetos para lo cual la fracción actúa sobre cantidades y magnitudes transformando un número, una longitud, un peso, en otro. El autor ilustra lo anterior usando los siguientes ejemplos: el número de mujeres de esta habitación es la mitad que el número de hombres, el ancho de la calle es $2\frac{1}{2}$ veces que el sendero, el peso del cobre es la mitad que el peso del oro.

En nuestro Modelo Epistemológico de Referencia para la representación fraccionaria del número racional como operador consideramos las ideas de Behr *et al.* (1983) y las de Freudenthal (1983).

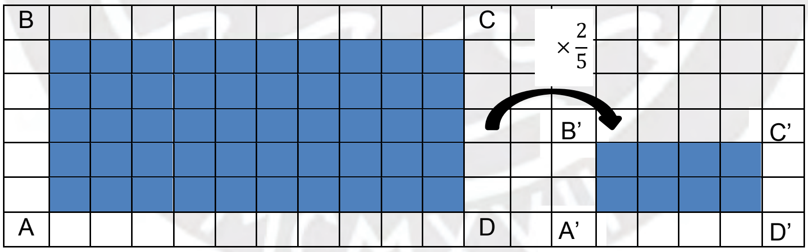
La fracción $\frac{a}{b}$ puede ser concebido como un operador que transforma una cantidad multiplicándola por a para luego dividirla por b.

En este sentido las fracciones pueden ser usadas en las siguientes tareas:

- <u>En un todo continuo:</u>

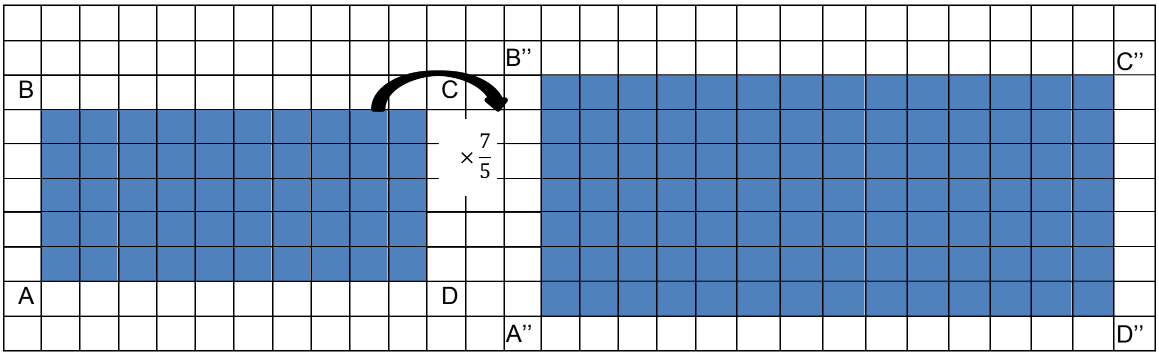
  a) Dada la región rectangular ABCD de lados 5cm y 10cm, dibujar la nueva región cuyos lados sean $\frac{2}{5}$ de las medidas originales.

  La tarea resuelta se muestra a continuación:



  b) Dada la región rectangular ABCD de lados 7cm y 14cm, dibujar la nueva región cuyos lados sean $\frac{7}{5}$ de las medidas originales.

  La tarea resuelta se muestra a continuación:



- <u>Para un todo discreto:</u>

Si en una fiesta hay 98 personas de las cuales $\frac{3}{7}$ del total son niños, ¿cuántos niños asistieron a la fiesta?

La tarea resuelta se muestra a continuación:

Elaboramos una barra que represente las 98 personas que había en la fiesta, luego dividimos está en 7 grupos de 14 personas y tomando 3 de grupos haciendo un total de 42.

14	14	14	14	14	14	14

Así mismo la tarea puede resolverse prescindiendo del dibujo y usando las operaciones de división y multiplicación en el orden conveniente.

Primera forma: $\frac{3}{7} \times 98 = 3 \times \frac{98}{7} = 3 \times 14 = 42$ Segunda forma: $\frac{3}{7} \times 98 = \frac{3 \times 98}{7} = \frac{294}{7} = 42$

Antes de terminar esta parte haremos la siguiente discusión: El operador $\frac{a}{b}$ aplicado a cantidades enteras que sean múltiplos del denominador de la fracción siempre nos proporcionará como resultado un número entero, no siendo así para cantidades que no son múltiplos de b.

En el caso de la Educación Primaria cuando el número entero no es múltiplo del denominador de la fracción, la tarea no puede ser resuelta usando este significado. Por ejemplo, si en el aula hay 99 personas de las cuales $\frac{3}{7}$ del total son niños, es imposible calcular cuántos niños asistieron a la fiesta, ya que estamos en un contexto de cantidades discretas.

D. Significado de la fracción como razón

Para Kieren (1980), la representación fraccionaria del número racional en situaciones de razón es concebida como una comparación cuantitativa de dos cualidades, por ejemplo, el número de niñas y niños de un equipo de fútbol están en la relación de 3 a 10 o escrito en forma de fracción $\frac{3}{10}$, sin embargo, la interpretación de la notación fraccionaria es diferente a la de parte – todo.

Del mismo modo, Behr *et al.* (1983) menciona que la interpretación del número racional como razón trasmite más la noción de magnitud relativa, es decir cuando se comparan dos cantidades se obtiene un índice comparativo en vez de un número. Por ejemplo, los autores mencionan que en los trabajos de Noelthing se pedía a los niños comparar dos mezclas de jugo de naranja y agua para determinar cuál tenía más concentrado de zumo de naranja.

Por otro lado, Freudenthal (1983) sostiene que al comparar dos objetos la fracción aparece en una *relación de razón* donde se comparan objetos entre sí con respecto a sus magnitudes como son longitud, salario, peso, número de personas, etc. Aquí los objetos se colocan juntos o se consideran como si el más pequeño fuera parte del más grande. El autor ilustra la idea mediante los siguientes ejemplos: en esta habitación hay la mitad de mujeres que, de hombres, el banco es la mitad de alto que la mesa, la calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que el sendero, etc. A continuación, graficamos los ejemplos anteriores.

Figura 18. La fracción en la relación razón
Fuente: Elaboración propia.

Un análisis más refinado de este significado para la fracción podemos hallarlo en Llinares y Sánchez (1997), quienes afirman que cuando pensamos en la fracción $\frac{a}{b}$ como razón podemos comparar magnitudes en dos situaciones: *todo – todo* y *parte – parte*.

Las situaciones *todo* – *todo* se refieren a comparar dos conjuntos totales, por ejemplo, la razón entre la cantidad de puntos que tienen el conjunto A y la cantidad de puntos que tiene el conjunto B. En cambio, las situaciones *parte* – *parte* se refieren a comparar dos subconjuntos de un mismo todo, por ejemplo, la razón que hay entre el número de bolas rojas y blancas de un conjunto de 8 bolas. Los dos ejemplos anteriores se ilustran a continuación:

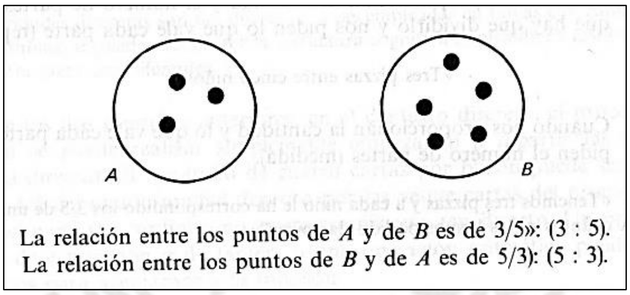


Figura 19. Fracción como razón en situaciones de todo – todo.
Fuente: Llinares y Sánchez (p. 68, 1997)

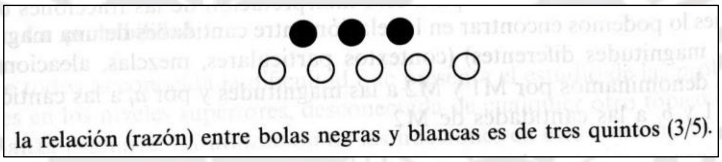


Figura 20. Fracción como razón en situaciones de parte – parte.
Fuente: Llinares y Sánchez (p. 69, 1997)

Así mismo, Llinares y Sánchez (1997) consideran al cálculo de probabilidades y porcentajes dentro de este significado de la fracción como razón. Así pues, la probabilidad de un suceso estaría dentro de la situación todo – todo, ya que podemos establecer una comparación entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles.

En el caso de los porcentajes, los autores mencionan que son relaciones de proporcionalidad entre un número y 100. Los porcentajes tienen un significado implícito de operador cuando las tareas se vinculan a hallar el porcentaje de una cantidad, por ejemplo, el 60% de 35 trae consigo una imagen mental donde aparece el operador $\frac{60}{100}$ actuando sobre 35. Sin embargo, existen situaciones en las que la idea de porcentaje puede concebirse como la equivalencia de razones, tal y como lo afirma Silva (2005).

Por ejemplo, en una clase con 25 estudiantes, 5 juegan voleibol, ¿qué porcentaje de la clase juega vóleibol? Si usamos fracciones equivalentes tendremos como respuesta que 20 de cada 100 estudiantes juegan voleibol o el 20% de los estudiantes mencionados juega voleibol.

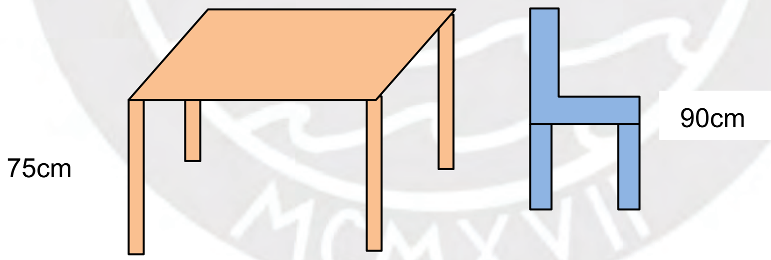
Nuestro Modelo Epistemológico de Referencia de la representación fraccionaria del número racional como razón toma en consideración las ideas de Behr *et al.*

La fracción $\frac{a}{b}$ indica la comparación de la medida a de una magnitud con la medida b de otra magnitud y cuya lectura es a es a b.

Así mismo dentro de este significado de la fracción como razón añadimos su uso en contextos de porcentaje y probabilidad. En el caso de los porcentajes tomaremos las situaciones que involucren determinar qué porcentaje representa una cantidad de otra y en el caso del cálculo de probabilidades expresamos en forma de porcentaje los resultados dándonos una idea de un índice de comparación de un total de 100.

Algunas tareas en las que se usarían la fracción con el significado de razón son:

- Determinar la razón entre la altura de una mesa y una silla cuyas medidas son 75 cm y 90 cm respectivamente.



La tarea podría ser resuelta de la siguiente manera:

Razón (r) entre la altura de la mesa y la silla es: $r = \frac{\cancel{75}}{\cancel{90}} = \frac{5}{6}$

La razón entre la medida de la altura de la mesa y la silla es $5 : 6$ cuya lectura es 5 para cada 6. Es decir que por cada 5cm de altura de la mesa tengo 6cm de altura de la silla.

Es necesario mencionar que para determinar la razón entre la medida de la mesa y la silla es necesario expresarlo en forma de fracción para poder efectuar la simplificación de términos.

- De un aula de 40 estudiantes hay 24 alumnos que les gusta bailar, ¿qué porcentaje de estudiantes les gusta dicha actividad?

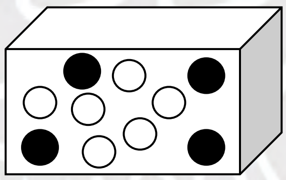
  La tarea podría ser resuelta de la siguiente manera:

  Razón entre el número de estudiantes que bailan y el total de estudiantes:

$$\frac{24}{40} \overset{\div 4}{\underset{\div 4}{=}} \frac{6}{10} \overset{\times 10}{\underset{\times 10}{=}} \frac{60}{100} \longrightarrow 60\%$$

- Si en una urna hay 4 bolas negras y 6 blancas, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bola negra?

  Esta tarea presenta dos posibles soluciones, las cuales tienen interpretaciones diferentes vinculadas al significado de fracción como razón. La primera respuesta nos dice que por cada 5 bolas que hay en la urna 2 son negras. En cambio, la segunda respuesta hace énfasis en que, de cada 100 bolas que podría haber en la urna 40 son negras. El siguiente gráfico ilustra ambas respuestas.



$$P(bola\ negra) = \frac{N°\ de\ bolas\ negras}{Total\ de\ bolas} = \frac{4}{10}$$

$$P(bola\ negra) = \frac{2}{5} \qquad\qquad P(bola\ negra) = \frac{40}{100} \rightarrow 40\%$$

Figura 21. Fracción como razón en situaciones de probabilidad
Fuente: Elaboración propia.

E. Significado de la fracción como cociente

Kieren (1980) afirma que el número racional (en su representación fraccionaria) puede ser interpretada como cociente y está vinculada a la interpretación de la fracción como relación parte – todo, pero para el estudiante ambas interpretaciones surgen y se aplican en contextos diferentes.

Por ejemplo, el estudiante ve como dos problemas diferentes el hecho de dividir una unidad en cuatro partes iguales y tomar tres de ellas, que dividir tres unidades en cuatro partes iguales. Así mismo, el autor menciona que el número racional cuantifica el resultado de dividir una cantidad en un número dado de partes y se vincula con la resolución de ecuaciones lineales.

En base a lo anterior, Behr *et al.* (1983) sostiene que la división de dos cantidades enteras $a \div b$ puede abreviarse usando la notación fraccionaria $\frac{a}{b}$, la cual se interpreta como a dividido por b, lo cual es un cociente indicado.

El siguiente problema, tomado de Behr & Post (1992), ilustra el significado de la representación fraccionaria del número racional como cociente haciendo énfasis en la división con significado partitivo, esto es dividir una cantidad continua o discreta en un número dado de partes. Por ejemplo, los autores ilustran el concepto de división partitiva mediante siguiente problema: Dividir tres pizzas por igual entre cuatro personas, ¿cuánto le tocará a cada uno?

Según Behr & Post (1992) este problema se puede resolver cortando (repartiendo) cada una de las tres pizzas en cuatro partes equivalentes y luego distribuyendo tres partes de cada pizza a cada individuo, así pues, cada persona recibirá 1/4 + 1/4 + 1/4 ó 3/4 de la pizza. La solución es graficada a continuación.

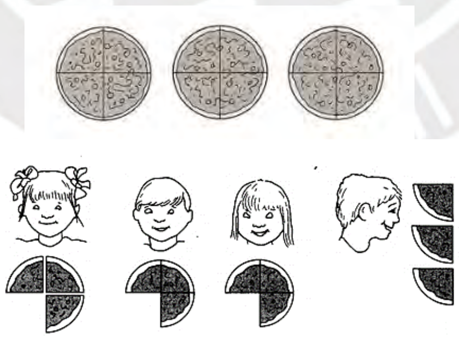
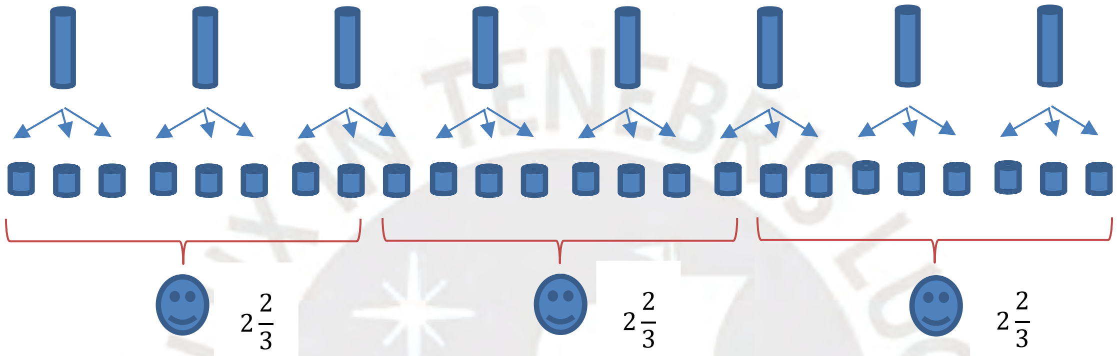


Figura 22. Distribución equitativa de tres pizzas entre cuatro personas
Fuente: Behr & Post (1992).

Por otro lado, es necesario mencionar Freudenthal (1983) considera de forma implícita las tareas de reparto dentro de la concepción de fracción como fracturador, ello lo podemos inferir a partir de la explicación que da el autor en la sección de su trabajo de las fracciones que lleva como subtítulo *Una secuencia didáctica rica para la aritmética de las fracciones.*

En esta sección aborda un problema de reparto de ocho botellas de cerveza entre tres personas de tal forma que cada una tome su parte justa. Freudenthal describe la solución que da una estudiante, quien dibuja ocho botellas una al lado de otra, cada una dividida en tres partes usando botellas más pequeñas siendo cada una un tercio y da a cada persona ocho tercios o dos enteros y dos tercios. A continuación, se ilustra la resolución.



Nuestro Modelo Epistemológico de Referencia para la representación fraccionaria del número racional como cociente toma en consideración las ideas

La fracción $\frac{a}{b}$ se refiere al cociente indicado de $a \div b$, donde dado una cantidad a de unidades continuas se divide por una cantidad b de partes.

Algunas tareas que se pueden trabajar con este significado de fracción como cociente son:

- Dividir cinco panes entre dos niños, ¿cuántos panes le tocará a cada uno?
- Dividir dos panes entre cinco niños, ¿cuántos panes le tocará a cada uno?
- Repartir S/. 200 entre 6 personas, ¿cuánto le toca a cada uno?

La última tarea nos permitirá abordar el número racional en su expresión decimal.

F. La escritura decimal como una extensión de la representación fraccionaria

Con respecto a los números decimales, Kieren (1980) menciona que la construcción de los números racionales usando la notación decimal contribuye al fortalecimiento del subconstructo del número racional como medida, pero limitaría mucho la comprensión de los subconstructos de operador y razón.

Por su parte Behr & Post (1992) sostienen que la interpretación del número racional como decimal son muy útiles en la resolución de problemas en contextos de medición (usando el sistema métrico decimal), porcentaje y dinero.

Según los investigadores los decimales pueden verse desde dos perspectivas: como una extensión del sistema de valor posicional de base diez o como una extensión de los números racionales.

Los decimales como una extensión del sistema decimal definen a las décimas como una décima parte de un todo, las centésimas como la décima parte de un décimo, las milésimas como la décima parte de un centésimo y así sucesivamente. En cambio, los decimales como una extensión de los números racionales son un caso especial de la interpretación parte – todo de las fracciones, es decir, la unidad es dividida siempre por potencias de diez como 10, 100, 1000, etc.

Behr & Post (1992) sostienen que ambas perspectivas interactúan y son importantes para comprender los decimales y sus operaciones.

Por lo tanto, los investigadores muestran la relación entre ambas perspectivas a través de ejemplos para la enseñanza de conceptos decimales utilizando cuadrados divididos en diez o cien partes iguales y bloques aritméticos de base 10 de Dienes. Según Behr & Post (1992) ambos materiales permitirán el tránsito de una representación decimal a una fraccionaria del número racional. Por ejemplo, los autores muestran las siguientes tiras y cuadrículas para ilustrar la equivalencia de $0{,}6$ y $0{,}73$ con las fracciones decimales 6/10 y 73/100 respectivamente.

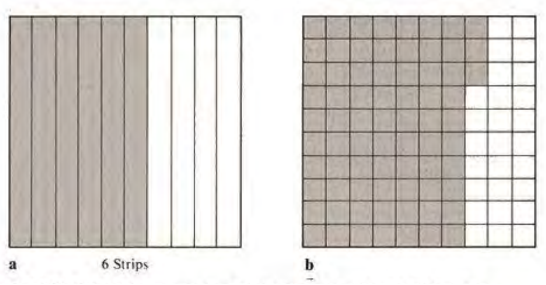


Figura 23. Interpretación fraccionaria de un decimal
Fuente: Behr & Post (1992).

Por otro lado, Freudenthal (1983) no menciona este significado para la representación fraccionaria del número racional, sin embargo, consideramos que pueden estar implícitos en la concepción de la fracción como medida, pues como lo dijimos antes al usar patrones de medición como el metro podemos expresar el resultado como un número decimal. Por ejemplo: $\frac{3}{4}m = 0{,}75m$

El Modelo Epistemológico de Referencia adopta las ideas de Behr & Post (1992) que concebir al número decimal como una extensión de la representación fraccionaria del número racional pues permite construir una equivalencia entre las fracciones decimales y los números decimales.

La representación decimal de un número racional puede escribirse como una fracción cuyo denominador es una potencia de diez, esto es 10, 100, 1000, etc.

Algunas tareas que se pueden trabajar con este significado son:

- Escribir el número decimal $0{,}8$ como fracción decimal.

Una forma de resolución de la tarea se muestra a continuación:

El decimal $0{,}8$ es leído como ocho décimos, lo cual significa que se han tomado ocho partes de una unidad dividida en 10 partes iguales obteniéndose $\frac{8}{10}$; así mismo se puede representar su equivalente $\frac{80}{100}$ dividiendo la misma unidad en 100 partes iguales. A continuación, se muestra un gráfico que ilustra lo dicho.

Expresar como número decimal las siguientes fracciones decimales.

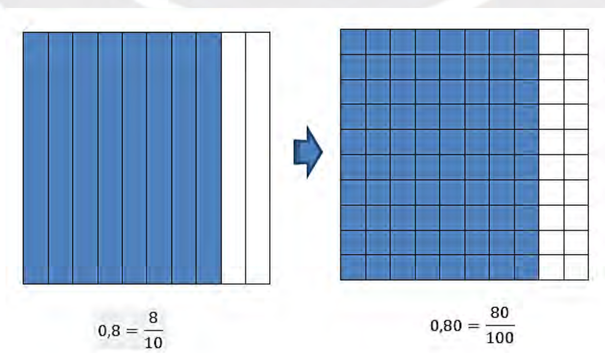


Figura 24. Equivalencias entre números decimales y fracciones decimales
Fuente: Elaboración propia

- Escribe la fracción decimal $\frac{3}{100}$ como un número decimal.

Una posible forma de resolución de la tarea se muestra a continuación:

Esta tarea demanda expresar un número decimal como fracción decimal, para lo cual se puede usar las representaciones gráficas con las cuadrículas o podemos hacer uso de la técnica de la división por 10, 100, 1000, etc. corriendo la coma a la izquierda tantos espacios como ceros tenga el denominador obteniéndose $\frac{3}{100} = 0{,}03$.

Finalmente debemos mencionar que el Modelo Epistemológico de Referencia descrito servirá para la construcción y el análisis de la Organización Matemática de los Cuadernos de Trabajo de 3ero a 6to de primaria, así mismo nos permitirá identificar el Modelo Epistemológico Dominante de los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria.

CAPÍTULO V: CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA COLECCIÓN DE CUADERNOS DE TRABAJO

En este capítulo, en primer lugar, construiremos una organización matemática en cada Cuaderno de Trabajo con respecto a los significados asociados a los números racionales. En segundo lugar, construiremos una organización matemática para la Colección de los Cuadernos de Trabajo en base a las organizaciones matemáticas identificadas en la etapa anterior para analizar el grado de completitud de esta organización matemática.

La organización matemática que se construyen para cada Cuaderno de Trabajo tiene la siguiente estructura: primero mencionamos el tipo de tarea, luego la primera tarea asociada a ese tipo, seguidamente damos un ejemplo representativo de dicha tarea, inmediatamente después mostramos la técnica que resuelve el ejemplo y finalmente mencionamos el discurso tecnológico que sustenta la técnica. Una vez concluida la primera tarea para el primer tipo de tarea damos paso a la segunda tarea, la tercera, etc. siguiendo la misma secuencia, luego pasamos al segundo tipo de tarea hasta culminar con todos los tipos de tareas encontrados en dicho Cuaderno de Trabajo.

Los tipos de tareas están relacionados con los siete significados asociados a las fracciones que se hallan nuestro MER y serán simbolizadas por la letra $\boldsymbol{T_i}$ cuyo subíndice variará del 1 al 6, porque consideramos seis tipos de tareas para el nivel de Educación Primaria con respecto al estudio de las fracciones.

Los tipos de tareas son:

- T_1: Dividir el todo en partes iguales y tomar alguna de ellas.
- T_2: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submúltiplos de la unidad.
- T_3: Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios.
- T_4: Dividir una cantidad entera entre otra de forma equitativa.
- T_5: Comparar dos magnitudes
- T_6: Expresar un número racional en su forma fraccionaria como una expresión decimal y viceversa.

Así mismo las tareas $t_{i,j}$ vinculadas a este tipo tendrán dos subíndices cuyo primer subíndice indicará a qué tipo de tarea pertenece y el segundo subíndice a qué número de tarea. En cuanto a las técnicas las simbolizaremos por $\hat{\mathbf{o}}_k$ donde el subíndice indica que número de técnica es. Luego la tecnología $\boldsymbol{\theta}_l$ tendrá un solo subíndice, así como la teoría $\boldsymbol{\Theta}_l$.

A continuación, mostramos un ejemplo que ilustra la nomenclatura expuesta en los dos últimos párrafos.

Tabla 2: Nomenclatura para codificar las tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Primer tipo de tarea $\mathbf{T}_1$: Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de ellas	$t_{1,4}$: *Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.* Pertenece al primer tipo de tarea. Es la segunda tarea.	$\hat{\mathbf{o}}_1$: *Doble conteo de las partes* Es la primera técnica
	$t_{1,5}$: *Hallar la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.* Pertenece al primer tipo de tarea. Es la quinta tarea.	$\hat{\mathbf{o}}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes* Es la segunda técnica
	Tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$: ***Significado*** *de fracción como relación parte – todo.* ***Teoría: Significado*** *de fracción como relación parte – todo.*	

Fuente: Elaboración propia.

5.1 Descripción de los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria

El Cuaderno de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de Primaria (2016) proporciona actividades variadas sobre las fracciones, sus operaciones y su conexión con los números decimales usando soportes concretos y gráficos.

En el Cuaderno de Trabajo de 3er grado podemos hallar las primeras actividades vinculadas al número racional donde se fomenta la comprensión de fracciones unitarias como 1/2 y 1/4 usando material concreto y el lenguaje natural. En los Cuadernos de Trabajo de 4to y 5to grado hallamos además de las tareas anteriores, aquellas vinculadas a operaciones con fracciones homogéneas y heterogéneas, y el trabajo con fracciones vinculadas a problemas de masa y capacidad.

Finalmente, el Cuaderno de Trabajo de 6to grado reportamos actividades vinculadas a la fracción en un contexto de comparación de cantidades, como el operador que se aplica a un número entero y el empleo de las fracciones como otra forma de representación de los porcentajes y decimales.

Las actividades vinculadas a las fracciones y sus operaciones, así como las notaciones decimales para la fracción se hallan en diferentes unidades de los Cuadernos de Trabajo según el grado de estudio. La tabla adjunta muestra la ubicación que tienen en los Cuadernos de Trabajo.

Tabla 3: Ubicación del tema de fracciones y su relación con los decimales en los Cuadernos de Trabajo de Primaria

	GRADO			
UNIDAD	3ERO	4TO	5TO	6TO
Unidad 4	-	-	pp. 61 al 66	pp. 63 al 68
Unidad 5	-	pp. 75 al 82	pp. 79 al 88	pp. 83 al 88
Unidad 6	-	-	pp. 99 al 108	pp. 99 al 106
Unidad 7	-	pp.115 al 118	pp. 117 al 124	pp. 123 al 128
Unidad 8	pp.125 al 131	pp.125 al 138	pp. 137 al 142 pp.147 al 156	pp. 137 al 140 p.155 y p.156

Fuente: Elaboración propia

Como lo dijimos al inicio de este capítulo, la codificación de las tareas será de acuerdo al tipo de tarea dada y tendrán un orden correlativo de acuerdo su aparición en los Cuadernos de Trabajo.

En cuanto a las técnicas, dejamos en claro que éstas son propuestas por el Cuaderno de Trabajo de cada grado, esto es que, cada tarea tiene una serie de pasos delineados que el estudiante debe completar con la guía del profesor de aula. Sin embargo, el nombre que se le da a cada una de las técnicas es un aporte de esta investigación, las cuales estás basadas en los trabajos de Kieren (1980), Behr & Post (1992) y Silva (2005). Además, la resolución de las tareas mostradas en las figuras las mostramos con la finalidad de explicitar la técnica y realizar el análisis de la organización matemática.

Así mismo dejamos en claro que el discurso tecnológico – teórico no figura de forma explícita en los Cuadernos de Trabajo, por lo cual lo extraeremos de los

Textos Escolares de los mismos grados publicados por el MINEDU en el 2012 y cuyo uso es vigente en las instituciones públicas del país, los cuales son:

- Matemática 3 (2012). Tercer grado de Educación Primaria. Editorial Santillana.
- Matemática 4 (2012). Cuarto grado de Educación Primaria Editorial Santillana.
- Matemática 5 (2012). Quinto grado de Educación Primaria. Ediciones El Nocedal S.A.C.
- Matemática 6 (2012). Sexto grado de Educación Primaria. Ediciones El Nocedal S.A.C.

5.2 Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 3ero de Primaria

A continuación, analizaremos el Cuaderno de Trabajo de 3ero de Primaria (2016) para niños de 8 años y mostraremos un ejemplo para cada tarea perteneciente a un tipo de tarea dado.

Tipo de tarea T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar una de las partes.

- ***Tarea*** $t_{1,1}$: *Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de las partes.*

Para esta tarea hallamos 5 problemas los cuales se ubican en la unidad 8 del Cuaderno de Trabajo y todas ellas provienen de situaciones extra matemáticas. Extraemos un problema como ejemplo representativo. Este problema consta de cuatro ítems (1a, 1b, 1c, 1d) que se hallan en la p.125 y 126 del Cuaderno de Trabajo

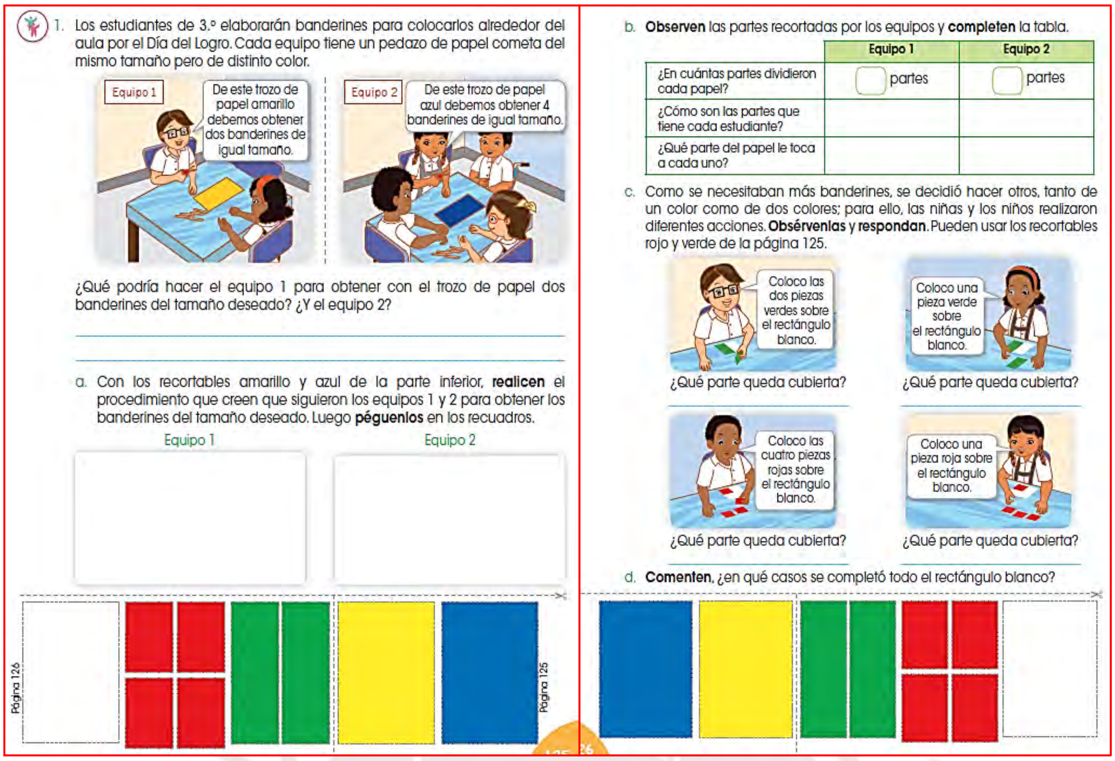


Figura 25. División de la unidad en partes iguales con material concreto
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 125-126)

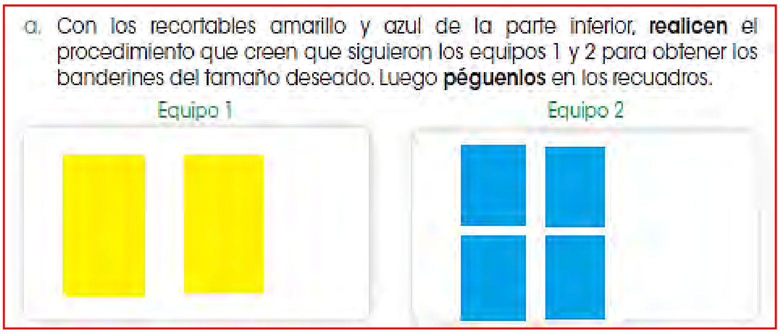
- ***Técncia $\hat{o}_2$:** Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

Es el nombre que le asignamos al conjunto de pasos que se muestran a continuación resolver este ejemplo de la *tarea* $t_{1,1}$.

Denominamos a esta técnica como $\hat{o}_2$ y no como $\hat{o}_1$ porque consideramos que el doble conteo de las partes es la técnica básica y la partición de la unidad es un procedimiento que se añade a esta técnica.

Para resolver el <u>ítem 1a</u> el Cuaderno de Trabajo sugiere particionar la unidad continua (los rectángulos de colores) en dos y cuatro partes de igual tamaño.

A continuación, se muestra una de las posibles soluciones, ya que los cortes pueden haber sido de otra forma, conservando el mismo tamaño de las partes.

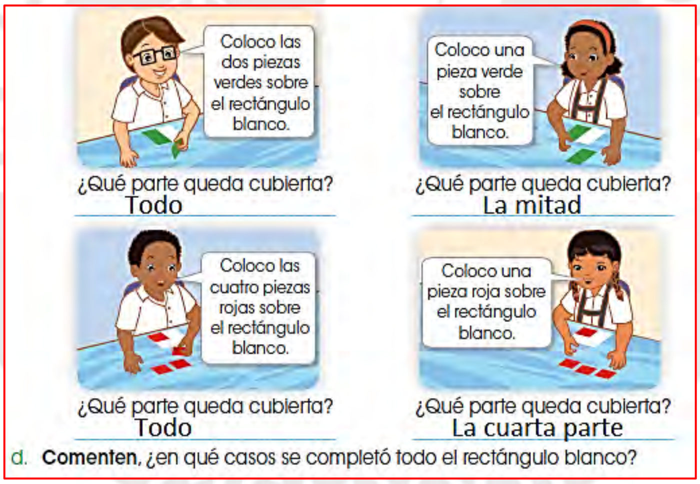


Para completar la tabla del ítem 1b se debe tener en cuenta lo trabajado en el ítem *1a*. La tabla deberá completarse usando los números naturales para responder la primera pregunta; el lenguaje natural para responder la segunda pregunta y el doble conteo de las partes para responder la tercera pregunta.

b. **Observen** las partes recortadas por los equipos y **completen** la tabla.

	Equipo 1	Equipo 2
¿En cuántas partes dividieron cada papel?	2 partes	4 partes
¿Cómo son las partes que tiene cada estudiante?	Son del mismo tamaño	Son del mismo tramaño
¿Qué parte del papel le toca a cada uno?	La mitad	La cuarta parte

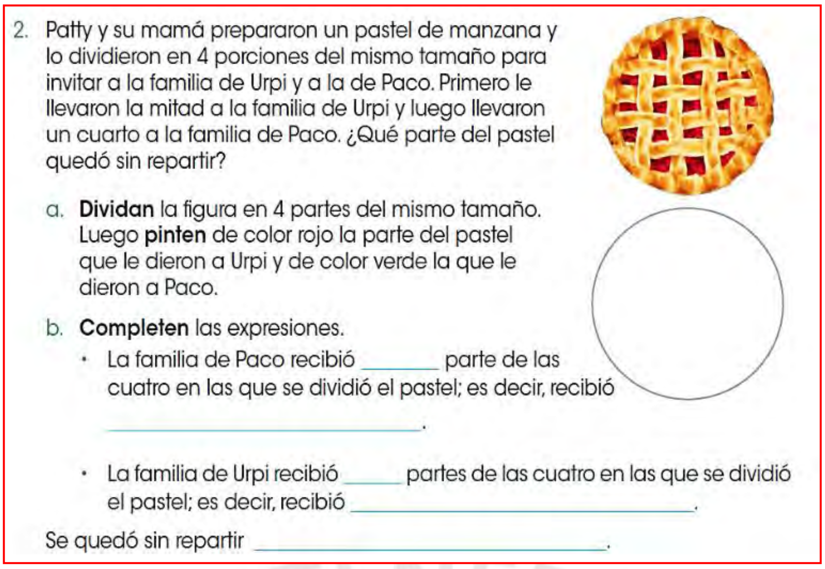
Para responder el ítem 1c el estudiante debe manipular el material concreto que se le presenta (rectángulos verdes y rojos) y escribir en lenguaje natural la fracción que representa la parte tomada de la unidad. A continuación, mostramos este ítem resuelto.



Finalmente, para responder el ítem 1d el estudiante debe darse cuenta que la unidad se completa cuando se juntan todas las partes en la cual se ha sido dividida.

- ***Tarea*** $t_{1,2}$: *Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.*

Para esta tarea solo hemos registrado dos problemas en el Cuaderno de Trabajo de 3er grado, de las cuales mostramos el siguiente problema como ejemplo representativo.



2. Patty y su mamá prepararon un pastel de manzana y lo dividieron en 4 porciones del mismo tamaño para invitar a la familia de Urpi y a la de Paco. Primero le llevaron la mitad a la familia de Urpi y luego llevaron un cuarto a la familia de Paco. ¿Qué parte del pastel quedó sin repartir?

   a. **Dividan** la figura en 4 partes del mismo tamaño. Luego **pinten** de color rojo la parte del pastel que le dieron a Urpi y de color verde la que le dieron a Paco.

   b. **Completen** las expresiones.
   - La familia de Paco recibió ______ parte de las cuatro en las que se dividió el pastel; es decir, recibió ______________________.
   - La familia de Urpi recibió _____ partes de las cuatro en las que se dividió el pastel; es decir, recibió ______________________.

   Se quedó sin repartir ______________________.

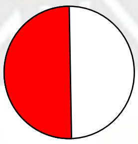
Figura 26. División de la unidad en partes iguales.
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 128)

Técnica $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

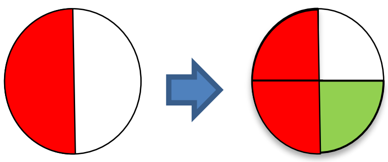
La técnica que sugiere emplear el Cuaderno de Trabajo es la división de la unidad en regiones congruentes, lo que llamaremos partición siguiendo la idea de Kieren (1980), luego se da las indicaciones para hacer el doble conteo de las partes y escribir la fracción correspondiente.

Para responder el <u>ítem 2a</u>, los pasos explícitos de esta técnica que están delineados en el Cuaderno de Trabajo son:

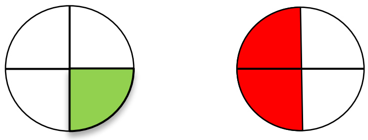
Paso 1: Dividir el círculo en dos regiones congruentes, lo cual necesitará el apoyo del maestro para señalar el centro del círculo y pintar una de ellas de color rojo, la cual representará la mitad del pastel que le dieron a Urpi.



Paso 2: Dividir el mismo círculo en cuatro regiones congruentes y pintar una de ellas de color verde para representar la cuarta parte que le tocó a Paco.

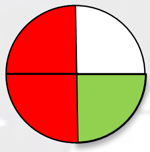


Paso 3: Para contestar las preguntas del ítem 2b se debe tomar en cuenta la parte coloreada de verde la cual corresponde a Paco, que es una parte de un total de cuatro, siendo la respuesta 1/4 que puede ser escrita en lenguaje natural. Luego tomar en cuenta solo la parte coloreada de rojo la cual corresponde a Urpi, que es dos partes de un total de cuatro, siendo la respuesta 2/4.



Lo que recibió Lo que recibió

Paso 4: Para completar la afirmación que aparece al final de la pregunta 2 es necesario contar cuántas partes se quedaron sin pintar de un total de cuatro. La respuesta será 1/4 porque la región blanca representa una parte de las cuatro partes congruentes en la que ha sido dividido el círculo.

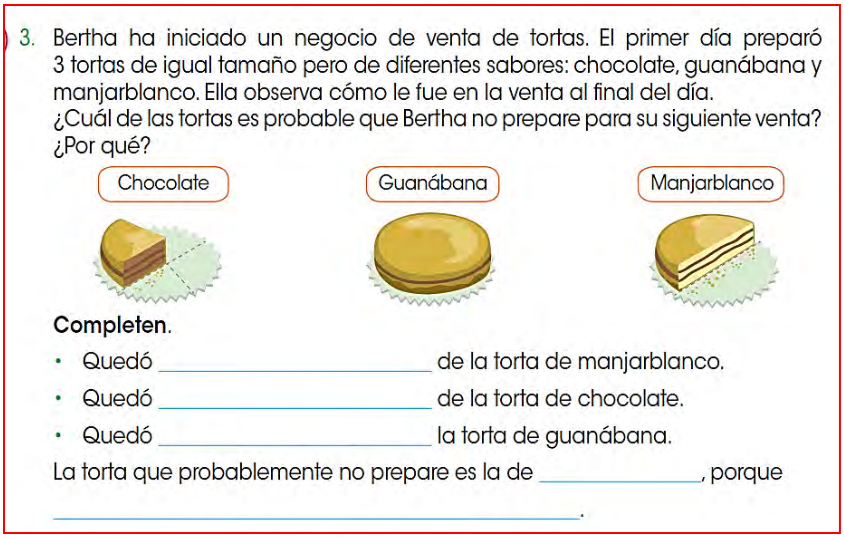


Debemos mencionar que este ejemplo de la tarea $\boldsymbol{t_{1,2}}$ permite que el estudiante perciba la equivalencia de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$.

Behr & Post (1992) mencionan que la demostración de la equivalencia (o falta de equivalencia) de fracciones basados en materiales manipulables requiere la capacidad de volver a dividir un objeto continuo o un conjunto de objetos discretos en partes de iguales.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,3}}$: *Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.*

Para esta tarea tres tenemos una actividad que será nuestro ejemplo representativo. Esta tarea en la página 130 del Cuaderno de Trabajo y se da en un contexto extra matemático, al igual que las demás tareas.


3. Bertha ha iniciado un negocio de venta de tortas. El primer día preparó 3 tortas de igual tamaño pero de diferentes sabores: chocolate, guanábana y manjarblanco. Ella observa cómo le fue en la venta al final del día.
¿Cuál de las tortas es probable que Bertha no prepare para su siguiente venta? ¿Por qué?

Chocolate — Guanábana — Manjarblanco

Completen.

- Quedó ______________________ de la torta de manjarblanco.
- Quedó ______________________ de la torta de chocolate.
- Quedó ______________________ la torta de guanábana.

La torta que probablemente no prepare es la de ______________, porque ____.

Figura 27. Todo continuo dividido en partes iguales
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 130)

Técnica $\hat{o}_1$: *Doble conteo de las partes.*

La técnica que el Cuaderno de Trabajo propone para completar las afirmaciones es aquella que hemos denominado el doble conteo de las partes de un todo continuo dividido en partes iguales.

Para el primer ítem de esta pregunta se debe contar en cuántas partes se dividió la torta de manjarblanco y cuántas quedan, una de dos partes, siendo la respuesta <u>quedó</u> <u>la mitad de la tota de manjarblanco.</u>

Para el segundo ítem se debe contar en cuántas partes se dividió la torta de chocolate y cuántas quedan, una de cuatro partes, siendo la respuesta <u>quedó</u> <u>un</u> <u>cuarto de la tota de chocolate.</u>

Par el tercer ítem no es necesario dividir la torta en partes iguales ya que no se tomó ninguna, siendo la respuesta <u>quedó toda la torta de guanábana.</u>

Finalmente, este ejemplo de la tarea $t_{1,3}$ concluye con mencionar cual es la torta tiene mayor probabilidad de ser vendida incluyéndose aquí de manera intuitiva la comparación de fracciones y la unidad.

- ***Tarea*** $t_{1,4}$: *Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.*

Para esta tarea solo tenemos un problema en el Cuaderno de Trabajo, la cual mostramos a continuación.

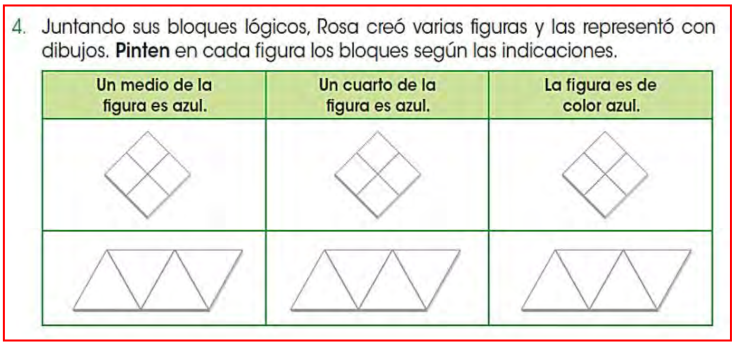


Figura 28. División de la unidad en partes iguales.
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 130)

Técnica $\hat{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{2}}$: *Doble conteo de las partes.*

Para responder esta pregunta se deberá leer las indicaciones de cada columna y hacer el doble conteo de las partes para identificar un medio y un cuarto en cada caso, es más aquí una vez más el estudiante se puede percatar de la equivalencia de fracciones.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,,5}}$: *Reconstrucción del entero.*

La reconstrucción del entero es más compleja, esto se puede ver en Silva (2005) y esta tarea para esta edad (niños de 8 años) solo se reduce a completar la parte indicada de una figura. Solo tenemos un problema para esta tarea y la mostramos a continuación.

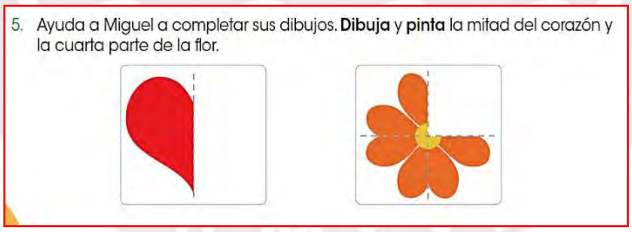


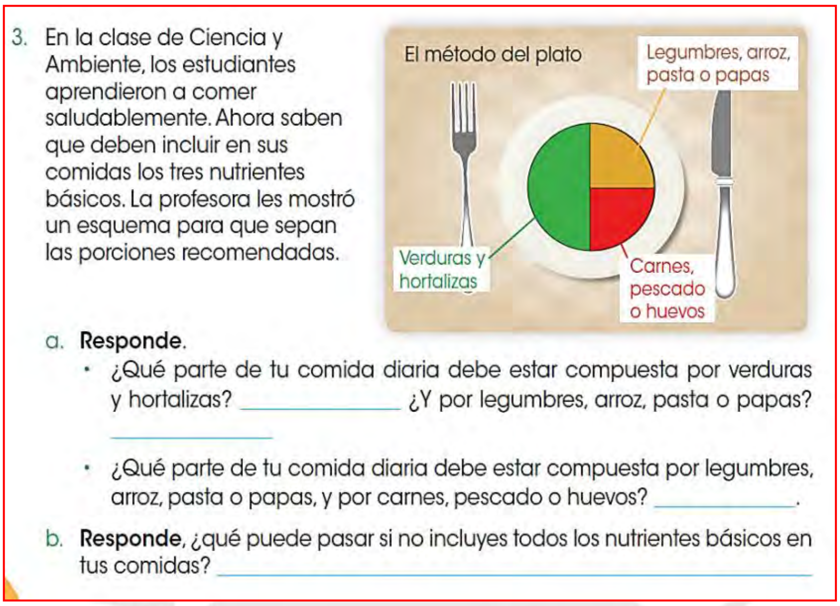
Figura 29. Reconstrucción de la unidad
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 130)

Técnica $\hat{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{1}}$: *Doble conteo de las partes.*

Para responder esta pregunta se deberá leer las indicaciones y reconocer la mitad y cuarta que falta parte usando el doble conteo de las partes de la figura y la simetría.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,7}}$: *Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.*

Al igual que la tarea anterior, solo tenemos un ejemplo que se halla en la página 128 del Cuaderno de Trabajo que se muestra a continuación.


3. En la clase de Ciencia y Ambiente, los estudiantes aprendieron a comer saludablemente. Ahora saben que deben incluir en sus comidas los tres nutrientes básicos. La profesora les mostró un esquema para que sepan las porciones recomendadas.

a. **Responde**.
- ¿Qué parte de tu comida diaria debe estar compuesta por verduras y hortalizas? ____________ ¿Y por legumbres, arroz, pasta o papas? ____________
- ¿Qué parte de tu comida diaria debe estar compuesta por legumbres, arroz, pasta o papas, y por carnes, pescado o huevos? ____________.

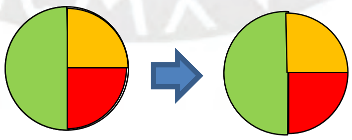
b. **Responde**, ¿qué puede pasar si no incluyes todos los nutrientes básicos en tus comidas? ____________________________

Figura 30. Fracción que representa una parte pintada de la unidad.
Fuente: Matemática 3, Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. (2016, p. 128)

Técnica $\hat{o}_3$: *Composición/descomposición y doble conteo de las partes.*

Para responder el primer ítem de la pregunta 3a se toma en cuenta la técnica de la tarea $t_{1,2}$ (dividir el todo continuo en regiones congruentes y pintar algunas de las partes).

Primero se hace la descomposición de la unidad, haciendo un trazo adicional a la región verde dividiéndolo en dos regiones congruentes. Luego se debe identificar que parte del círculo representa la región pintada de verde, la cual es dos partes de un total de cuatro, es decir $\frac{2}{4}$.



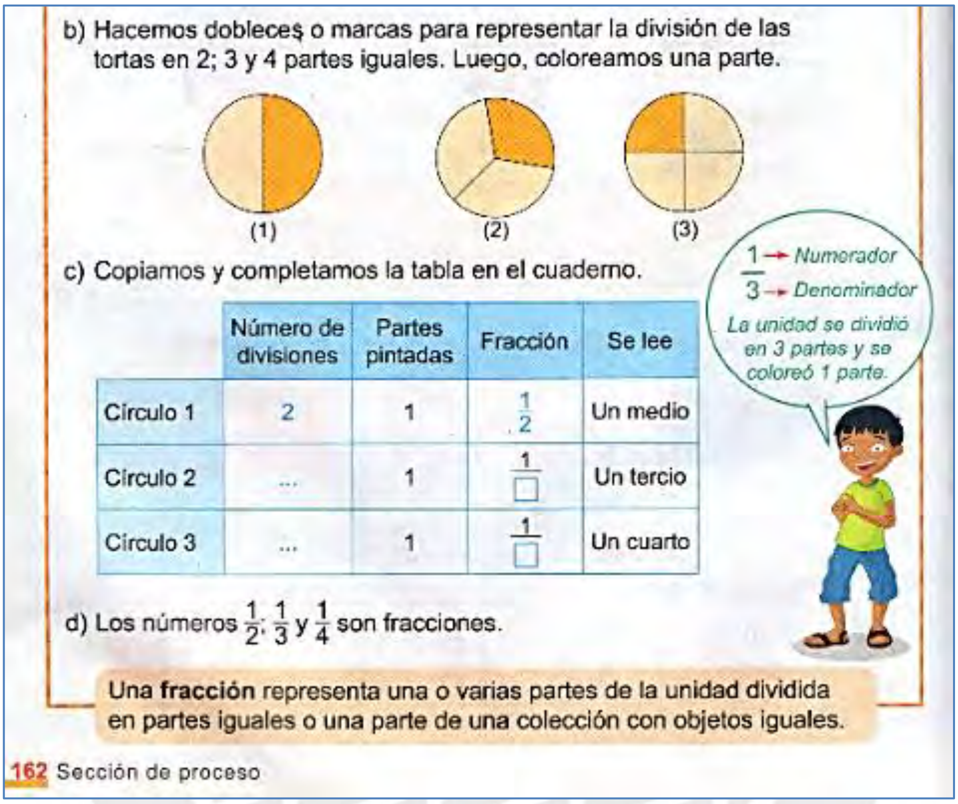
Luego la parte del círculo que representa la región mostaza, es una parte de un total de cuatro, es decir $\frac{1}{4}$.

Para responder el segundo ítem de la pregunta 3a se debe identificar que parte del círculo representa la región pintada de rojo y mostaza juntas, la cual es dos partes de un total de cuatro, es decir $\frac{2}{4}$.

Cabe mencionar que la pregunta 3b no la consideramos dentro del estudio porque escapa del campo temático de las fracciones.

Tecnología θ_1: Concepción de fracción como relación parte – todo.

La tecnología que sustenta las técnicas halladas en el Cuaderno de Trabajo de 3er grado de Primaria se encuentra en el texto escolar del mismo grado.



b) Hacemos dobleces o marcas para representar la división de las tortas en 2; 3 y 4 partes iguales. Luego, coloreamos una parte.

(1) (2) (3)

c) Copiamos y completamos la tabla en el cuaderno.

	Número de divisiones	Partes pintadas	Fracción	Se lee
Círculo 1	2	1	$\frac{1}{2}$	Un medio
Círculo 2	...	1	$\frac{1}{\square}$	Un tercio
Círculo 3	...	1	$\frac{1}{\square}$	Un cuarto

$\frac{1}{3}$ → Numerador, Denominador

La unidad se dividió en 3 partes y se coloreó 1 parte.

d) Los números $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ son fracciones.

Una **fracción** representa una o varias partes de la unidad dividida en partes iguales o una parte de una colección con objetos iguales.

162 Sección de proceso

Figura 31. Concepción de fracción como relación parte – todo.
Fuente: Matemática 3. Texto escolar de tercer grado de primaria. (2012, p. 162)

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea: Relación parte – todo.

A continuación, mostramos una tabla resumen de la cantidad de tareas, técnicas y tecnologías que sustentan las técnicas. Así mismo mostramos la ubicación de las tareas en el Cuaderno de Trabajo.

Tabla 4: Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 3ero de primaria.

Tipo de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología	Número de problema y ubicación.
T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.	$t_{1,1}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de las partes.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.	$\boldsymbol{\theta_1}$ Significado de fracción como relación parte – todo.	1 (p. 125 – 126) 1 (p. 127), 2 (p. 129) 1 (p. 131), 2 (p. 132)
	$t_{1,2}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.			2 (p. 128) 2 (p. 129)
	$t_{1,3}$: Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.		3 (p. 130)
	$t_{1,4}$: Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.			4 (p. 130)
	$t_{1,5}$: Reconstrucción del entero.			5 (p. 130)
	$t_{1,6}$: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.	$\hat{o}_3$: Composición/ descomposición y doble conteo de las partes.		3a (p. 128)
1 tipo de tarea	6 tareas	3 técnicas	1 tecnología	11 problemas

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla anterior podemos decir que la organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 3er grado de primaria (2016) privilegia el saber – hacer, es decir se muestran problemas (tareas) y las formas de cómo resolverlas (técnicas). El discurso tecnológico – teórico está implícito y se puede hallar en el texto escolar Matemática 3 (2012) proporciona algunos elementos tecnológicos - teóricos para sustentar las técnicas usadas en este Cuaderno de Trabajo.

La organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 3er grado de primaria (2016) es una organización matemática puntual (OMP), ya que todas las tareas halladas en este libro se encuentran a un solo tipo de tarea: dividir el todo continuo en partes iguales y tomar alguna de ellas, cuya técnica predominante es el doble conteo de las partes y cuya tecnológica – teoría es el concepto de fracción como relación parte – todo que se halla en el texto de apoyo del mismo grado.

5.3 Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 4to de Primaria

A continuación, analizaremos el Cuaderno de Trabajo de 4to de Primaria (2016) para niños de 9 años y seguiremos usando el esquema de presentación hecha para el Cuaderno de Trabajo de 3ero de Primaria. Sin embargo, debemos mencionar, que el número de tarea será correlativo siempre y cuando exista una variante de las tareas enunciadas en la OM anterior, de lo contrario usaremos la misma notación para referirnos a la misma tarea. En caso de que no exista una tarea ya codificada en la OM de 3ero de primaria la numeración de las tareas no será correlativo.

Tipo de tarea T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.

- **Tarea $t_{1,1}$:** *Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de las partes.*

Esta tarea contiene dos ejemplos que se pueden hallar en la página 83 del Cuaderno de Trabajo donde se requiere el uso de material concreto para representar fracciones menores que la unidad. A continuación, mostramos un ejemplo para ilustrar la tarea.


1. Lola y Paco recibieron cada uno una barra de chocolate dividida en 6 pedazos iguales, como las que se muestran. Lola comió dos pedazos de su chocolate y Paco comió tres del suyo. ¿Qué fracción de su chocolate comió cada niño?

   a. **Representa** con las regletas las partes que comieron Lola y Paco. Luego **dibújalas**.

   Comí dos pedazos de mi barra.

   Regletas que representan lo que comió Lola.

   Regleta que representa el chocolate entero.

   Lola comió ____________________.

   Comí tres pedazos de mi barra.

   Regletas que representan lo que comió Paco.

   Regleta que representa el chocolate entero.

   Paco comió ____________________.

   b. **Comenta**, ¿usar la fracción te ayudó a expresar lo que comió cada niña y niño? ¿Por qué?

Figura 32. Representación de una parte de la unidad usando regletas.
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 83)

Técnica $\hat{o}_1$: *Doble conteo de las partes.*

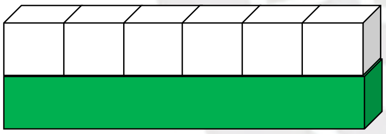
Para esta actividad se solicita las regletas de fracciones que serán las de Cuisenaire por la representación gráfica que se halla en esta página del Cuaderno de Trabajo de 4to grado de primaria.

Figura 33. Regletas de Cuisenaire.

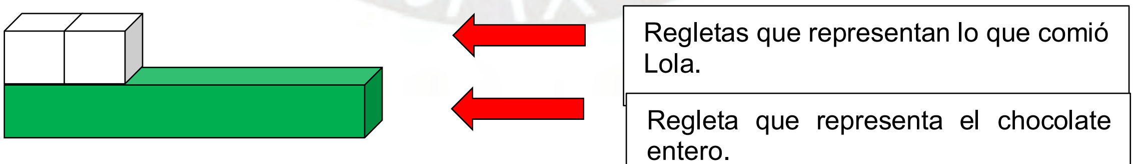
Debemos mencionar que la forma de resolver esta tarea es similar a la descrita en el trabajo de Behr & Post (1992) sobre la enseñanza de los números racionales en educación primaria.

Para responder el primer ítem de la pregunta 1a se debe probar con cuál de las regletas se puede formar una barra del mismo tamaño que la verde usando solo seis piezas.

Luego con seis regletas blancas se puede formar una barra del mismo tamaño que la verde, por tanto, cada regleta blanca representará 1/6 de la barra verde.

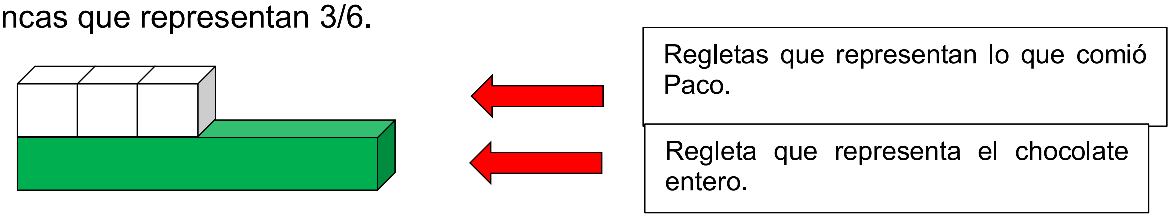


Por lo tanto, dibujamos dos regletas blancas que representan 2/6 porque Lola comió dos pedazos de 6 la cual está representada por la regleta verde.



Rpta.: Lola comió **2/6 del chocolate.**

El segundo ítem se resuelve de manera similar, esta vez se usan tres regletas blancas que representan 3/6.



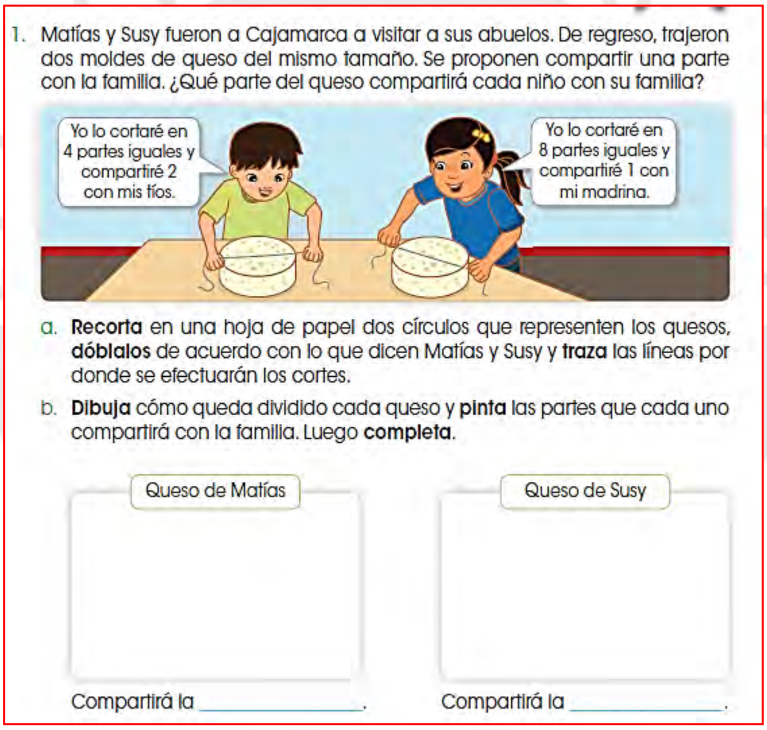
Rpta.: Paco comió **3/6 del chocolate.**

Debemos mencionar que en esta tarea el niño puede empezar a comprender que 3/6 equivale 1/2 pues claramente se ve que tres regletas blancas es la mitad de la barra verde.

A pesar de que las regletas inducen a movilizar el significado del número racional como relación parte – todo, también se percibe el significado de medida, pues podríamos considerar a la barra blanca 1/6 como unidad de medida arbitraria para luego iterarla 6 veces y obtener la medida de la barra verde.

- **Tarea** $t_{1,2}$: *Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.*

Para esta tarea tenemos cinco ejemplos de los cuales tomamos el que se halla en la página 81 del Cuaderno de Trabajo



1. Matías y Susy fueron a Cajamarca a visitar a sus abuelos. De regreso, trajeron dos moldes de queso del mismo tamaño. Se proponen compartir una parte con la familia. ¿Qué parte del queso compartirá cada niño con su familia?

a. **Recorta** en una hoja de papel dos círculos que representen los quesos, **dóblalos** de acuerdo con lo que dicen Matías y Susy y **traza** las líneas por donde se efectuarán los cortes.

b. **Dibuja** cómo queda dividido cada queso y **pinta** las partes que cada uno compartirá con la familia. Luego **completa**.

Queso de Matías

Compartirá la ______________.

Queso de Susy

Compartirá la ______________.

Figura 34. División de la unidad en partes iguales.
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 81)

Técnica $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

El ítem 1a es parte de la técnica de la partición y el doble conteo de las partes.

Para responder el ítem 1b se debe identificar en cuántas partes se ha dividido la unidad y pintar las partes tomadas de ella. Así pues, dibujará un círculo en cada recuadro dividiéndolo en 4 y 8 partes iguales respectivamente. Luego se pintará dos de cuatro partes correspondientes al primer círculo, y una parte de ocho en el círculo. A continuación, se muestra la solución de la tarea.

- ***Tarea*** $t_{1,3}$: *Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.*

Al igual que en la tarea anterior, para esta tarea hallamos tres ejemplos en el Cuaderno de Trabajo en la página 85. El ejemplo representativo para esta tarea, al igual que las demás reportadas páginas anteriores, está vinculado a una situación extramatemática.

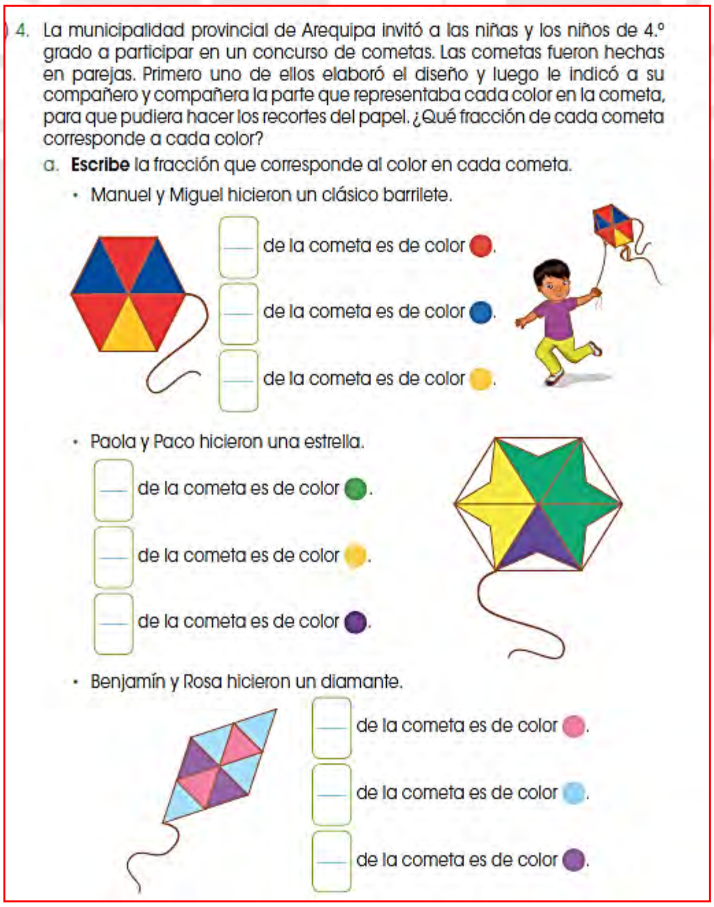


Figura 8. División de figuras geométricas en regiones congruentes.
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 85)

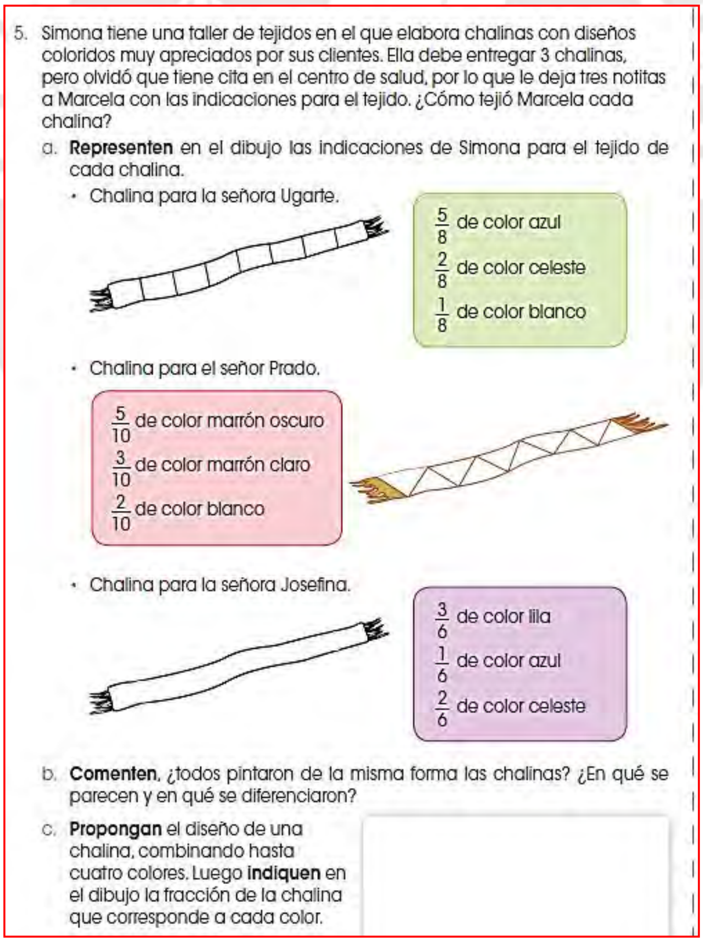
Técnica $\hat{\mathbf{o}}_1$: *Doble conteo de las partes.*

Para resolver la pregunta 4a se deberá contar el total de regiones en la cual se ha dividido cada figura y colocarla como denominador de la fracción y luego contar las regiones pintadas del color señalado que vendrían a ser el numerador de dicha fracción. Las fracciones que representan los colores verde, amarillo y morado serían $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ respectivamente.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,4}}$: *Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.*

Consideramos que esta esta tarea es la inversa de la tarea anterior $t_{1,7}$ pues ahora se da la fracción y se pide representarla pintando partes de una figura dividida en regiones congruentes.

Solo hemos registrado un problema para esta tarea, así que será nuestro ejemplo representativo.



5. Simona tiene una taller de tejidos en el que elabora chalinas con diseños coloridos muy apreciados por sus clientes. Ella debe entregar 3 chalinas, pero olvidó que tiene cita en el centro de salud, por lo que le deja tres notitas a Marcela con las indicaciones para el tejido. ¿Cómo tejió Marcela cada chalina?

a. **Representen** en el dibujo las indicaciones de Simona para el tejido de cada chalina.

- Chalina para la señora Ugarte.

$\frac{5}{8}$ de color azul
$\frac{2}{8}$ de color celeste
$\frac{1}{8}$ de color blanco

- Chalina para el señor Prado.

$\frac{5}{10}$ de color marrón oscuro
$\frac{3}{10}$ de color marrón claro
$\frac{2}{10}$ de color blanco

- Chalina para la señora Josefina.

$\frac{3}{6}$ de color lila
$\frac{1}{6}$ de color azul
$\frac{2}{6}$ de color celeste

b. **Comenten**, ¿todos pintaron de la misma forma las chalinas? ¿En qué se parecen y en qué se diferenciaron?

c. **Propongan** el diseño de una chalina, combinando hasta cuatro colores. Luego **indiquen** en el dibujo la fracción de la chalina que corresponde a cada color.

Figura 35. Pintado de figuras divididas en partes iguales.
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 86)

Técnica $\hat{o}_1$: *Doble conteo de las partes.*

Para responder los dos primeros ítems de la tarea 5a se deberá leer las indicaciones de cada recuadro y pintar la cantidad de partes que dice en el numerador de cada fracción con el color indicado.

Cabe mencionar que el tercer ítem necesita una pequeña variación de la técnica anterior pues ahora el estudiante debe dividir la chalina en 6 partes iguales y pintar según se indica. La técnica para este tercer ítem es $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

A continuación, se muestra la solución de los tres ítems de la pregunta 5a.

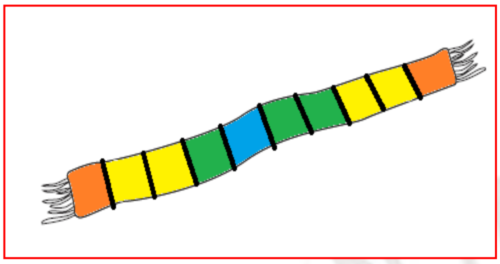
Para responder la pregunta 5b se deberá reconocer el número de partes pintadas del todo continuo y mencionar que se parecen en la forma de dividir la chalina (todas se hicieron en partes iguales según el denominador de la fracción) y se diferencian en la cantidad pintada de cada color (representada por el numerador de la fracción).

Debemos mencionar que la pregunta 5c pertenece a la tarea $t_{1,2}$: dividir el todo continuo en partes iguales y pintar una de ellas. Para ello se emplea la técnica $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

Además, de acuerdo con Fonseca (2004) esta tarea 5c es de tipo abierta porque posee datos no explícitos y tan solo pautas generales para su solución.

Es decir, esta tarea solicita combinar hasta cuatro colores para diseñar la chalina, pero no menciona cuántos de cada color, dándole la libertad al alumno de escoger la cantidad de partes de cada color.

Una de las soluciones para esta tarea es la que se muestra a continuación.

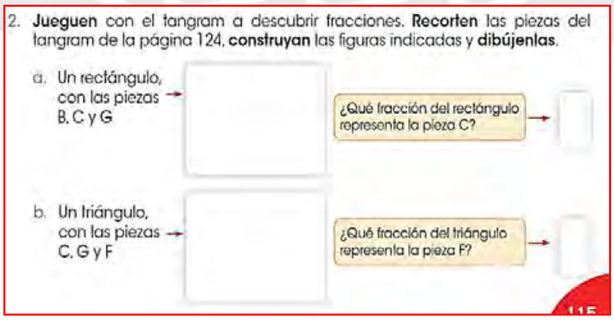


$$\frac{2}{10}\ de\ color\ naranja$$
$$\frac{4}{10}\ de\ color\ amarillo$$
$$\frac{3}{10}\ de\ color\ verde$$
$$\frac{1}{10}\ de\ color\ celeste$$

En conclusión, esta tarea integra dos tareas $t_{1,7}$ y $t_{1,2}$ para lo cual se usa la técnica de la partición y doble conteo de las partes, así mismo es considerada una tarea abierta por no tener datos ni incógnitas prefijados tal y como lo afirma Fonseca (2014).

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,6}}$: *Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.*

Para esta tarea encontramos dos ejemplos de los cuales mostramos el que se halla en la página 115 del Cuaderno de Trabajo junto con el material concreto que se usará para resolverla.



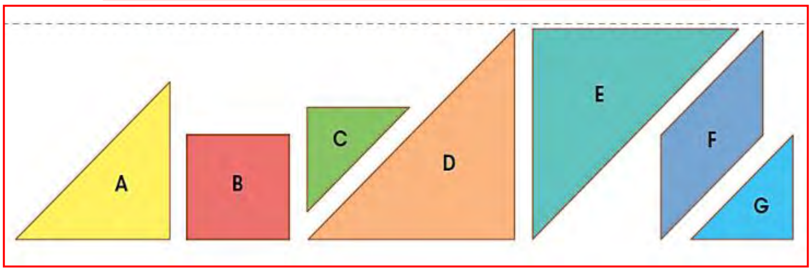


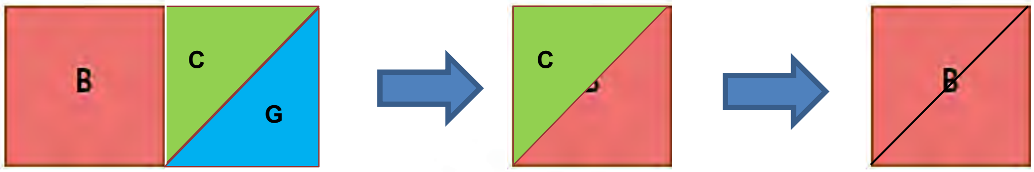
Figura 36. Juego con el Tangram
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, pp. 115 y 124)

***Técnica* $\hat{o}_3$**: *Composición/descomposición y doble conteo de las partes.*

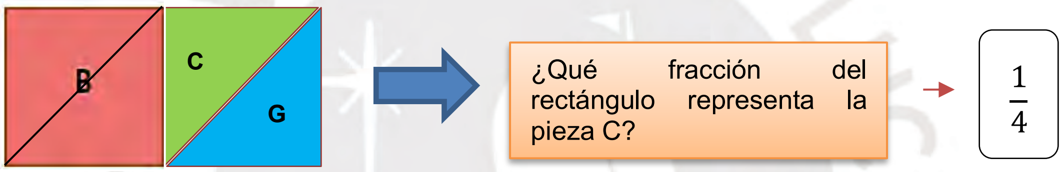
Para resolver la tarea 2a se debe seguir tres pasos:

Paso 1: Armar un rectángulo usando las fichas B, C y G del Tangram.

Paso 2: Dibujar y superponer la pieza G o C en la pieza B para hacer un trazo que divida la pieza en dos triángulos congruentes.



Paso 3: Contar el total de piezas triangulares que conforman el rectángulo BCG y colocarla como denominador de la fracción para luego escribir en el numerador de dicha fracción la cantidad de triángulos que representa la pieza C.



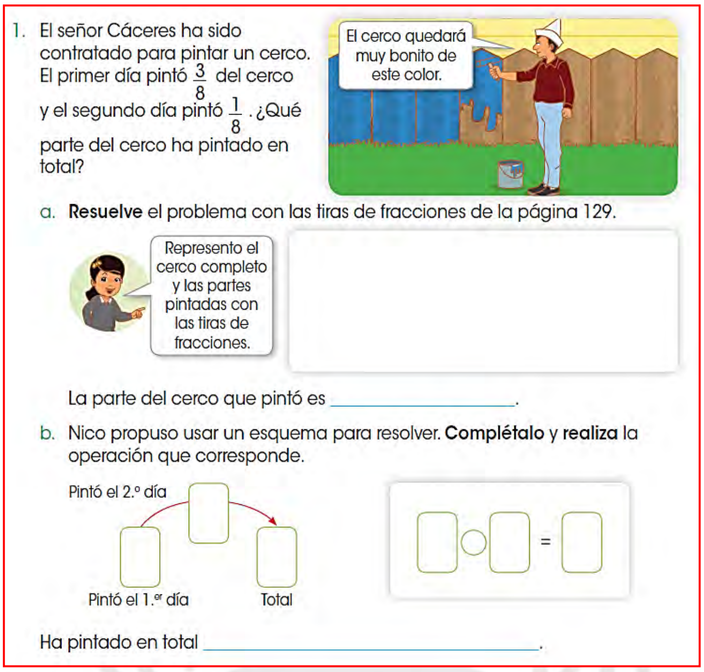
La tarea 2b se resuelve de manera muy similar.

Tecnología θ_1: Concepto de fracción como relación parte – todo.

La tecnología que sustenta las técnicas empleadas para este tipo de tarea (dividir el todo continuo en partes iguales y tomar alguna de ellas) se halla en el Texto Escolar del grado anterior es decir en 3er grado de Primaria (2012) que mostramos en la página 80 de esta tesis y creemos que forma parte de los conocimientos previos del, estudiante.

- ***Tarea* $t_{1,7}$**: *Sumar o restar fracciones con el mismo denominador.*

Para esta tarea disponemos de 4 ejemplos que se hallan en la sección Resolvemos problemas con fracciones de la unidad 7 del Cuaderno de Trabajo, de los cuales mostramos el problema 1 de la página 117.



1. El señor Cáceres ha sido contratado para pintar un cerco. El primer día pintó $\frac{3}{8}$ del cerco y el segundo día pintó $\frac{1}{8}$. ¿Qué parte del cerco ha pintado en total?

El cerco quedará muy bonito de este color.

a. **Resuelve** el problema con las tiras de fracciones de la página 129.

Represento el cerco completo y las partes pintadas con las tiras de fracciones.

La parte del cerco que pintó es ________________.

b. Nico propuso usar un esquema para resolver. **Complétalo** y **realiza** la operación que corresponde.

Pintó el 2.º día

Pintó el 1.er día

Total

$\square \bigcirc \square = \square$

Ha pintado en total ____________________________.

Figura 37.Suma de fracciones homogéneas

Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 117)

Para desarrollar esta tarea se proponen dos técnicas diferentes: una es usando la tira de fracciones y la otra es usando el algoritmo de la suma de fracciones homogéneas.

Técnica $\hat{o}_4$: *Uso de la tira de fracciones*

Para resolver la pregunta 1a se pide usar las tiras o regletas de fracciones que se ubican en la p. 129 y que mostramos a continuación.

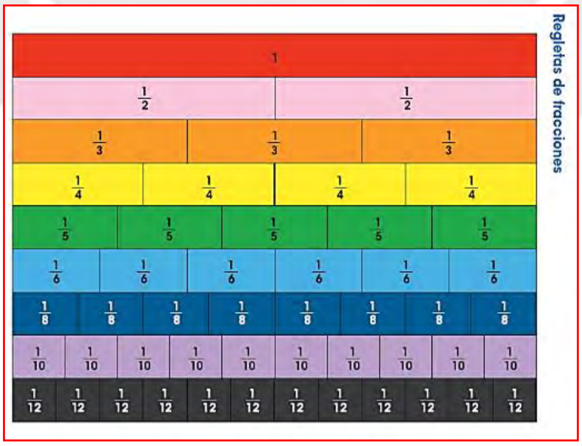
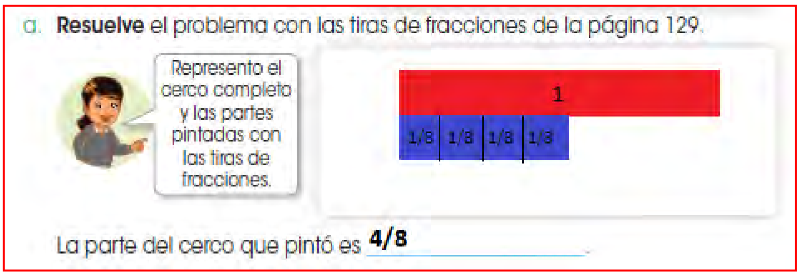


Figura 38. Regletas de fracciones

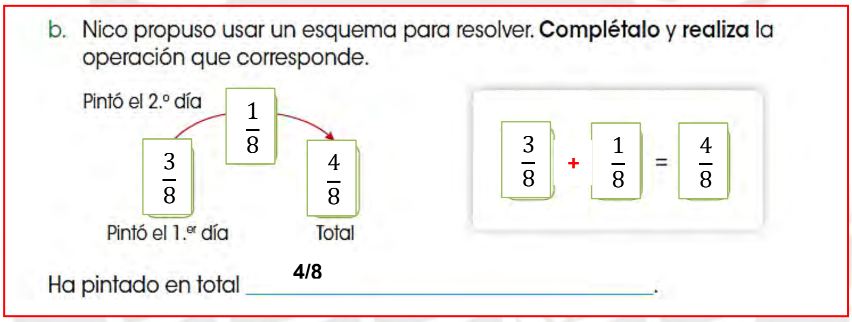
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 129)

Para resolver esta tarea se colocará la tira roja (la unidad) para representar la superficie total del cerco y luego usará las tiras verdes de 1/8 ya que las partes que pintó el Señor Cáceres son octavos.

Se colocarán tres tiras de 1/8 correspondientes al primer día y una tira de 1/8 correspondiente al segundo día, haciendo un total de 4/8 de la unidad.



Técnica $\hat{o}_5$: *Sumar o restar numeradores y colocar el mismo denominador.*
La segunda técnica que propone el cuaderno de trabajo es un esquema donde se represente de manera simbólica lo pintado por el señor Cáceres el primer y segundo día y para luego sumar los numeradores de ambas fracciones y colocar el mismo denominador.



Tecnología θ_2: Adición y sustracción de fracciones.

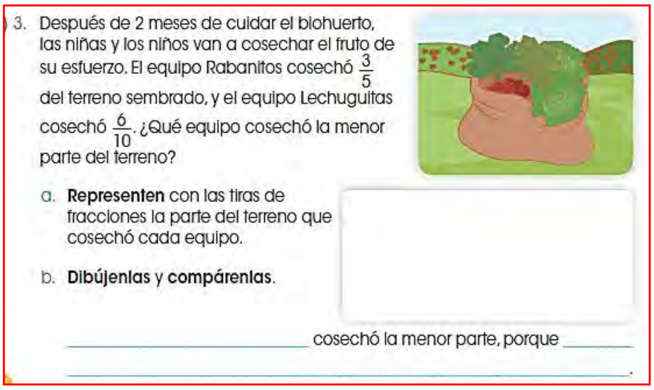
En esta segunda técnica hay vestigios de un discurso tecnológico al cual llamamos adición y sustracción de fracciones, en específico adición de fracciones de igual denominador.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea: Relación parte – todo.

Tipo de tarea T_2**: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submultiplos de la unidad.**

- ***Tarea*** $t_{2,1}$: *Comparar dos fracciones con diferente denominador.*

Para esta tarea tenemos 6 ejemplos de problemas de comparación de fracciones con diferente denominador en contextos extramatemáticos. La tarea mostrada a continuación es un ejemplo de la tarea está vinculada a una situación problemática más amplia que se ubica en la p. 125 del Cuaderno de Trabajo.


3. Después de 2 meses de cuidar el biohuerto, las niñas y los niños van a cosechar el fruto de su esfuerzo. El equipo Rabanitos cosechó $\frac{3}{5}$ del terreno sembrado, y el equipo Lechuguitas cosechó $\frac{6}{10}$. ¿Qué equipo cosechó la menor parte del terreno?

a. **Representen** con las tiras de fracciones la parte del terreno que cosechó cada equipo.

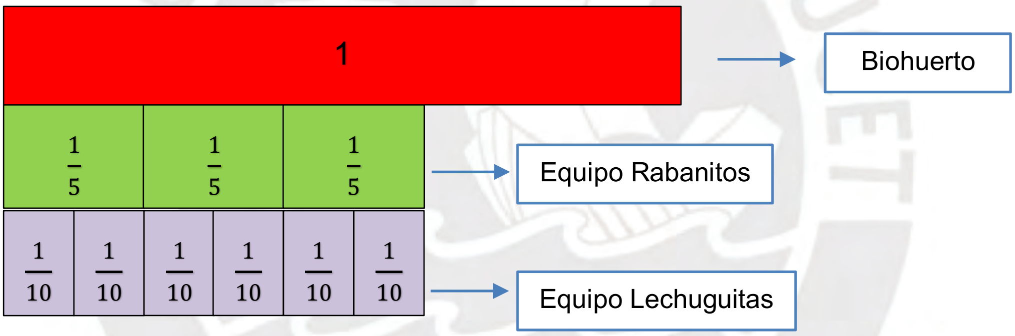
b. **Dibújenlas** y **compárenlas**.

__________ cosechó la menor parte, porque __________

Figura 39. Problema sobre comparación de fracciones
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 126)

Técnica $\hat{o}_4$: *Uso de la tira de fracciones*

La técnica sugerida es el uso de las tiras de fracciones como lo indica el Cuaderno de Trabajo. Se representa al biohuerto con la tira roja y luego lo que sembró el equipo Rabanitos y el equipo de Lechuguitas con tres tiras de 1/5 y con seis tiras de 1/10 respectivamente.



Luego de la manipulación de las tiras de fracciones es posible darse cuenta que ambas tiras de 3/5 y de 6/10 tienen el mismo tamaño, por tanto, ambos equipos cosecharon la misma parte del biohuerto. Las tiras de fracciones son usadas como soporte concreto para comparar fracciones de diferente denominador por lo tanto para determinar el tamaño de una fracción bastará comparar la longitud de ambas tiras.

Tecnología θ_3: Comparación de fracciones

La tecnología que sustenta la técnica empleada no se halla en el Cuaderno de Trabajo analizado sino en la página 142 del Texto Escolar Matemática 4 (2012) donde se emplea las fracciones equivalentes para homogenizar denominadores y establecer la relación de orden $>, <$ o $=$ entre dos fracciones de diferente denominador.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona el significado de fracción como relación parte – todo con el significado de medida porque se puede comparar las fracciones iterando la unidad con fracciones 1/5 y 1/10.

- ***Tarea*** $t_{2,2}$: *Medir la capacidad de un cuerpo usando submultiplos de la unidad.*

Para esta tarea encontramos 5 ejemplos que se hallan en las secciones de la unidad 8 cuyos títulos son *Estimamos la capacidad de los recipientes* (páginas 133 y 134) y *Usamos litros, medios litros y cuartos de litro* (páginas 135 y 136). Como ejemplo representativo mostramos la actividad que se halla en la página 136 que consiste en determinar cuántas botellas de agua de $\frac{1}{4}$ o de $\frac{1}{2}$ litro se necesita para llenar una botella de $1\frac{1}{2}$ litro.

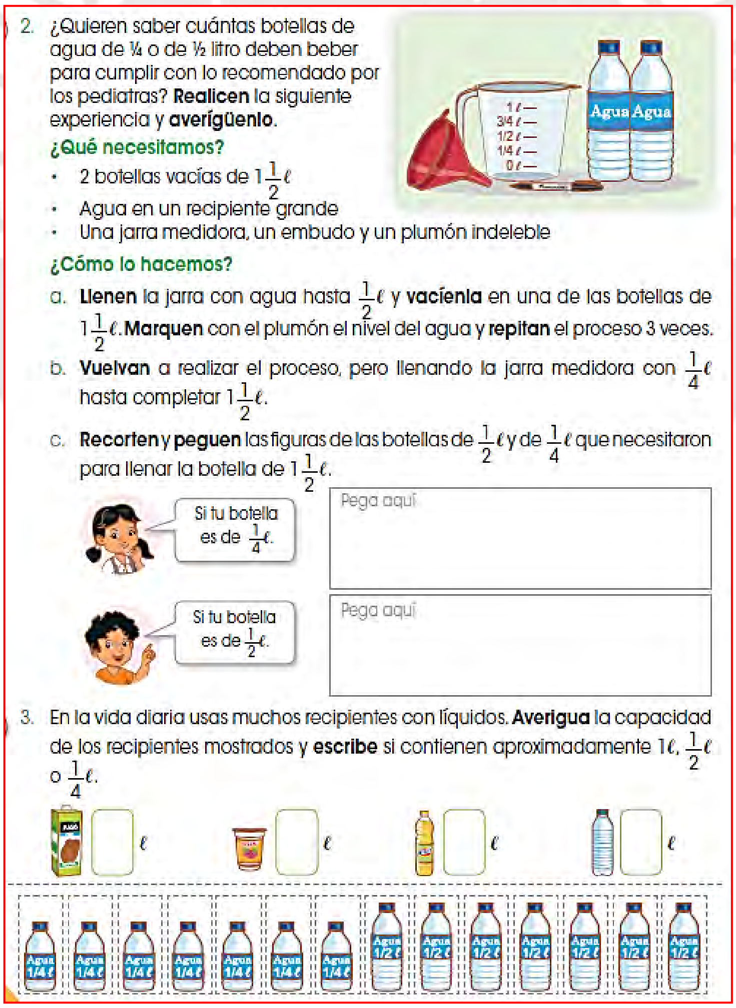


Figura 40. Problema sobre equivalencias de ¼ y ½ litro.
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 136)

Técnica $\hat{\mathbf{o}}_6$: *Iteración de la unidad.*

Como parte de la técnica el Cuaderno de Trabajo indica seguir una secuencia de actividades usado material concreto y figuritas que se encuentran en la parte inferior de la página.

Primero se tiene que averiguar cuántas veces está contenido $\frac{1}{2}l$ en $1\frac{1}{2}l$ y mediante la experimentación lograrán comprobar que necesitan 3 botellitas de $\frac{1}{2}l$. Del mismo modo para saber cuántas veces está contenido $\frac{1}{4}l$ en $1\frac{1}{2}l$ se indica hacer la experimentación llegando a la conclusión de que 6 botellitas de $\frac{1}{4}l$ permiten obtener 1 litro de agua. En segundo lugar, para responder el ítem 2c representan la cantidad de botellitas de $\frac{1}{2}l$ y $\frac{1}{4}l$ usando los recortables que se hallan en la parte inferior de la página.

Tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$: Concepción de fracción como relación parte – todo.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona el significado de fracción como relación parte – todo con el significado de medida porque se determinan la capacidad de la botella de $1\frac{1}{2}l$ iterando con las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$: Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{3,1}}$: *Transformar un entero por la acción de una fracción.*

Para esta tarea tenemos tres problemas que se hallan en la sección denominada ***Averigüemos el peso y el tiempo.*** El siguiente ejemplo de tarea pertenece a una situación problemática más general que se halla al inicio de la página 131 del Cuaderno de Trabajo.

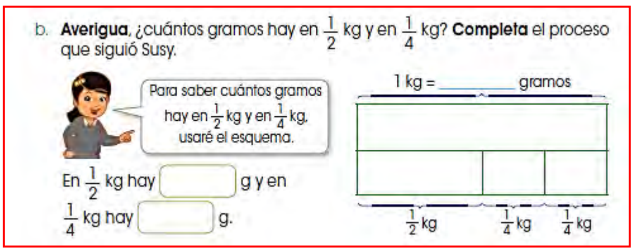
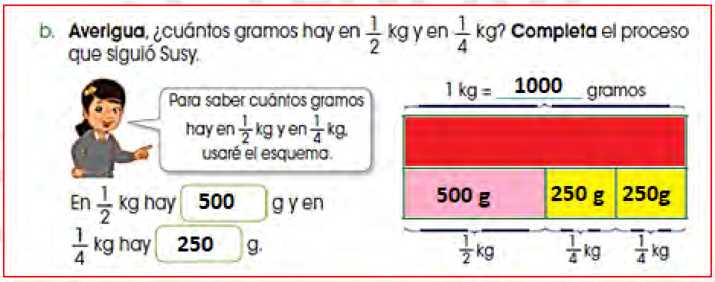


Figura 41. Problema sobre equivalencias entre kilos y gramos.
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 131)

__Técnica__ $\widehat{o}_2$: División de números naturales

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo muestra un esquema similar al trabajado con las tiras de fracciones. Primero se representa la unidad equivalente 1000g con una tira, en segundo lugar, se colocan debajo tres tiras siendo la primera la mitad y los dos restantes la cuarta parte de la unidad.

La primera tira representa 500g ya que el operador $\frac{1}{2}$ actúa sobre 1000g dividiéndolo en dos partes de 500g cada una y luego se toma una parte. La tercera y cuarta tira representan 250g cada una por que el operador $\frac{1}{4}$ actúa sobre 1000g dividiéndolo en cuatro partes de 250g cada una y luego se toma una parte. A continuación, esbozamos la solución de la tarea.



Tecnología θ_4: División de números naturales.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona el significado de fracción como relación parte – todo con el significado de operador, ya que la fracción $\frac{1}{2}$ actúa sobre 1000g dividiéndolo en dos partes de 500g cada una usando como soporte concreto un gráfico que evidencia la relación entre la unidad (1000g) y la parte tomada (500g).

Tipo de tarea T_4: Distribuir equitativamente un número de objetos en un número de partes.

- ***Tarea*** $t_{4,1}$: *Distribuir unidades continuas en partes iguales dada la cantidad total de partes.*

Par esta tarea tenemos un único ejemplo en la página 82 del Cuaderno de Trabajo.

3. La mamá de Rosa preparó 3 tortas de chocolate del mismo tamaño para su cumpleaños, y cortó cada torta en porciones iguales para repartirlas entre las 24 personas invitadas, de modo que alcance para todos. ¿En cuántas partes cortó cada torta?

   a. **Recorta** hojas de papel que representen cada torta y **dobla** cada una de acuerdo con lo que necesita la mamá de Rosa. Luego **traza** las líneas por donde se efectuarán los cortes.

   b. **Representa** con un dibujo cómo quedan las tortas con las marcas por donde se cortaron las porciones.

   La mamá de Rosa cortó cada torta en ______________________.

   c. **Dibuja** una de las tortas y **pinta** la parte que recibió cada invitado.

   Cada persona invitada recibió ______________________.

Figura 42. Dividir tres unidades entre 24 personas
Fuente: Matemática 4, Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 82)

Técnica $\hat{o}_9$: *Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes.*

Para resolver esta tarea se deberá dividir la cantidad de personas entre el número de tortas de chocolate que se va a repartir, obteniéndose 8.

Este resultado será el número de partes en que se dividirá cada torta que representa la unidad y luego se pintará una parte de las ocho obteniéndose 1/8.

Tecnología θ_1: Concepción de fracción como relación parte – todo.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea: medida.

A continuación, mostramos una tabla resumen sobre los tipos de tareas, las tareas asociadas a cada tipo, las técnicas y las tecnologías – teorías y su ubicación en el Cuaderno de Trabajo de 4to grado de primaria (2016).

Tabla 5: Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 4to de primaria.

Tipo de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología - teoría	Número de problema y ubicación.
T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.	$t_{1,1}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de las partes.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.	$\boldsymbol{\theta_1}$: Concepción de fracción como relación parte – todo.	1a y 2 (p. 83) 3 (p. 116)
	$t_{1,2}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.			1b (p. 81) 2 (p. 82) 3 (p. 84) 5c (p. 86) 1b (p. 115)
	$t_{1,3}$: Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.		1c (p. 81) 4a (p. 85) 4b (p.85)
	$t_{1,4}$: Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.			5a (p. 86)
	$t_{1,6}$: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.	$\hat{o}_3$: Composición/descomposición y doble conteo de las partes.		2 (p. 115)
	$t_{1,7}$: Sumar o restar fracciones con el mismo denominador.	$\hat{o}_4$: Uso de la tira de fracciones / $\hat{o}_5$: Sumar o restar numeradores y colocar el mismo denominador.	$\boldsymbol{\theta_2}$: Adición y sustracción de fracciones.	1, 2 (p. 117) 3, 4 (p. 118)
T_2: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submultiplos de la unidad.	$t_{2.1}$: Comparar dos fracciones heterogéneas.	$\hat{o}_4$: Uso de la tira de fracciones.	$\boldsymbol{\theta_3}$: Comparación de fracciones	1 (p. 125) 2, 3 (p. 126) 4 (p. 127) 5, 6 (p. 128)
	$t_{2,2}$: Medir la capacidad de un cuerpo usando submultiplos de la unidad.	$\hat{o}_6$: Iteración de la unidad.	$\boldsymbol{\theta_4}$: División de números naturales.	1 (p. 133) 3 (p.134) 1 (p. 135) 2, 3 (p. 136)
T_3:Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios	$t_{3,1}$: Transformar un entero por la acción de una fracción.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.		1 (p. 131) 2, 3 (132)
T_4: Distribuir equitativamente un número de objetos en un número de partes.	$t_{4,1}$: Distribuir unidades continuas en partes iguales dada la cantidad total de partes.	$\hat{o}_9$: Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes.	$\boldsymbol{\theta_1}$: Concepción de fracción como relación parte – todo.	3 (p. 82)
4 tipos de tareas	10 tareas	7 técnicas	4 tecnologías	31 problemas

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla anterior podemos decir que la organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 4to grado de primaria (2016) privilegia el saber – hacer, es decir muestra con frecuencia problemas (tareas) y las formas de cómo resolverlas (técnicas), aunque se han registrado vestigios de un discurso tecnológico en el mismo material didáctico como la adición y sustracción de fracciones (homogéneas), que está ejemplificada en la técnica $\hat{o}_5$: Sumar o restar numeradores y colocar el mismo denominador. Así mismo el texto escolar Matemática 4 (2012) proporciona algunos elementos tecnológicos - teóricos para sustentar las técnicas usadas en este Cuaderno de Trabajo.

La organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 4to grado de primaria (2016) es una organización matemática local (OML), ya que existe más de un tipo de tarea en este libro y cuyas técnicas se sustentan en cuatro tecnologías: el concepto de fracción como relación parte – todo, algoritmo de adición y sustracción de fracciones, las fracciones equivalentes, y la división de números naturales que se integran en la teoría del estudio de las fracciones.

Así mismo el significado asociado a la fracción en este Cuaderno de Trabajo es la relación parte – todo, medida, operador y cociente que se expresan en los tipos de tareas T_1, T_2, T_3 y T_4.

5.4 Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 5to de Primaria

A continuación, analizaremos el Cuaderno de Trabajo de 5to de Primaria (2016) para niños de 10 años y seguiremos usando el esquema de presentación hecha para el Cuaderno de Trabajo de 4to de Primaria. Sin embargo, debemos mencionar, que el número de tarea será correlativo siempre y cuando exista una variante de la tarea, de lo contrario usaremos la misma notación. Así mismo en caso de no hallar tareas ya codificadas anteriormente se declararán como ausentes.

Tipo de tarea T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.

Las tareas $t_{1,1}$; $t_{1,2}$; $t_{1,3}$; $t_{1,4}$; $t_{1,5}$ ya no se proponen en este grado pues consideramos que ya fueron trabajadas suficientemente en los grados anteriores.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{1,6}}$: *Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.*

Como ejemplo de esta tarea tenemos identificar la fracción que representan las piezas del Tangram con respecto a otras de diferente área. Debemos mencionar que este ejemplo de tarea contiene 6 ítems.

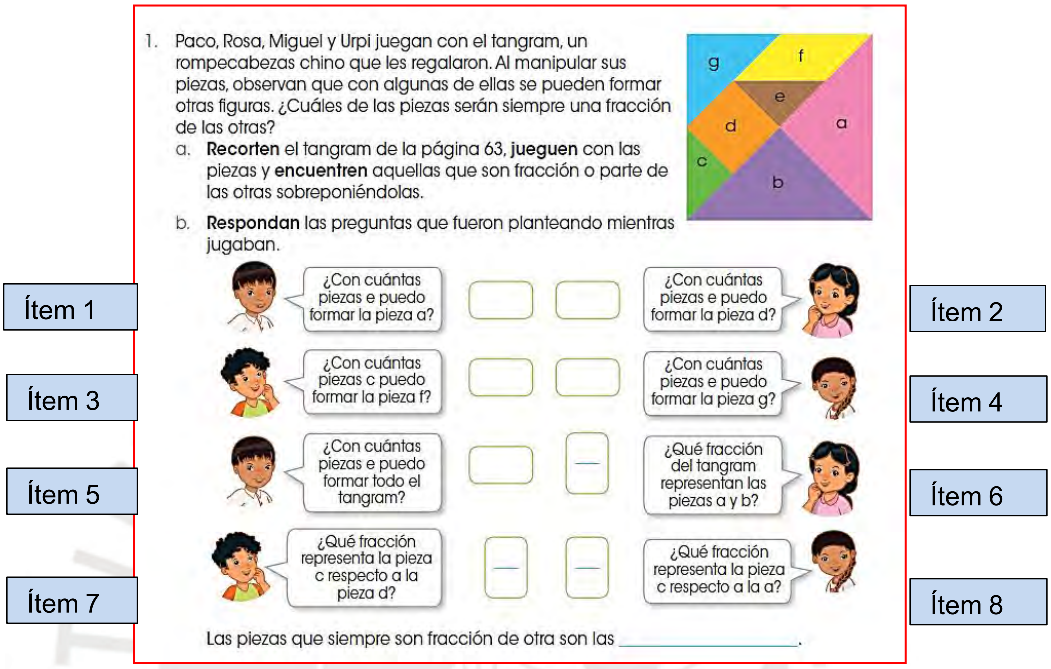
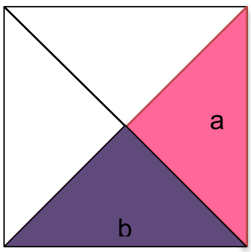


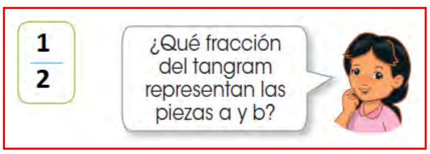
Figura 43. Reconociendo partes en las fichas del Tangram
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 61)

Técnica $\boldsymbol{\hat{o}_3}$: *Composición/descomposición y doble conteo de las partes.*

Para resolver la pregunta 1b de esta tarea el Cuaderno de Trabajo sugiere armar el tangram y hacer trazos auxiliares en algunas fichas de modo que pueda determinar qué fracción representa la ficha más pequeña con respecto a la más grande.

Por ejemplo, para resolver el ítem 6 se divide el Tangram en cuatro triángulos congruentes de los cuales el *triángulo a* y *b* representan dos partes de un total de cuatro siendo la fracción $\frac{2}{4}$. Así mismo si se unen los dos triángulos a y b estos podrían representar la mitad del cuadrado, por tanto, la fracción será $\frac{1}{2}$





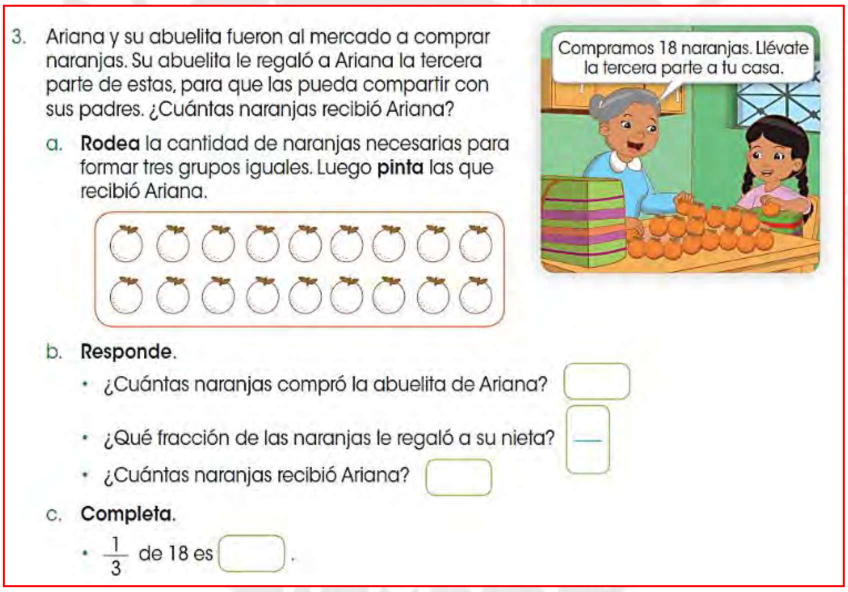
Tecnología θ_1Concepción de fracción como relación parte – todo.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona el significado de fracción como relación parte – todo con el significado de medida porque se puede medir el Tangram con las piezas más pequeñas que son el *triángulo e* y el *triángulo c.*

- ***Tarea*** $t_{1,8}$: *Dividir el todo discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.*

En este grado aparece por primera vez el todo discreto, para lo cual se emplean elementos homogéneos como son las frutas o canicas. Para esta tarea existen 5 ejemplos, algunos de ellos involucran la adición y sustracción de fracciones homogéneas. El siguiente ejemplo lo hallamos en la página 62 del Cuaderno de Trabajo.


3. Ariana y su abuelita fueron al mercado a comprar naranjas. Su abuelita le regaló a Ariana la tercera parte de estas, para que las pueda compartir con sus padres. ¿Cuántas naranjas recibió Ariana?

a. **Rodea** la cantidad de naranjas necesarias para formar tres grupos iguales. Luego **pinta** las que recibió Ariana.

b. **Responde**.
- ¿Cuántas naranjas compró la abuelita de Ariana?
- ¿Qué fracción de las naranjas le regaló a su nieta?
- ¿Cuántas naranjas recibió Ariana?

c. **Completa**.
- $\frac{1}{3}$ de 18 es ___.

Figura 44. División del todo discreto
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 62)

Técnica $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo hace explícito la partición de la unidad y el doble conteo de las partes. Primero se debe dividir el conjunto de 18 naranjas en 3 subgrupos de 6 naranjas cada uno y luego se proceder a tomar un grupo siendo la respuesta 6 naranjas. La resolución gráfica de esta tarea se muestra a continuación.

Tecnología θ_1: Concepto de fracción como relación parte – todo.

Significado de la fracción presente en esta tarea:

Esta tarea relaciona el significado de fracción como relación parte – todo con el significado de operador, ya que está transformando una cantidad inicial de 18 en 6 vía el operador 1/3.

- ***Tarea $t_{1,9}$***: *Sumar o restar fracciones de diferente denominador.*

Para esta tarea tenemos 19 ejemplos de los cuales extraemos el que se encuentra en la página 65 del Cuaderno de Trabajo en la sección Resolvemos más problemas con fracciones.

El siguiente ejemplo de la tarea tiene como objetivo solo la adición de fracciones con diferente denominador, sin embargo, hay tareas que requieren solo la sustracción o la combinación de ambas operaciones con fracciones de diferente denominador.

Figura 45. Suma de fracciones con diferente denominador.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 65)

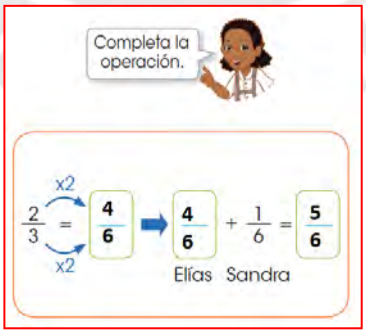
Para resolver esta tarea, en el Cuaderno de Trabajo se sugieren dos técnicas: partición de la unidad y doble conteo de las partes, y el uso de fracciones equivalentes.

Técnica $\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes*

Esta primera técnica requiere pintar la fracción que compró cada persona. En el primer rectángulo se pintará 2 regiones de 3, pues la fracción comprada por Elías es 2/3 del total. En el segundo rectángulo se pintará 1 región de 6, ya que la fracción comprada por Sandra es 1/6. Luego se unirán ambas regiones en el tercer rectángulo, donde 2/3 se transformará en la fracción equivalente 4/6, para que unida con 1/6 formen 5/6 del terreno.

Técnica $\hat{o}_7$: *Usar fracciones equivalentes*

Otra forma de proceder para resolver el problema es usando fracciones equivalentes para sumar fracciones heterogéneas. Así pues 4/6 es equivalente a 2/3 lo cual permite la suma con 1/6.



Tecnología θ_2: Adición y sustracción de fracciones.

En esta segunda técnica $\hat{o}_7$: *Usar fracciones equivalentes* hay vestigios de un discurso tecnológico al cual llamamos adición y sustracción de fracciones.

Significado de la fracción presente en esta tarea: relación parte – todo.

Tipo de tarea T_2: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submúltiplos de la unidad.

- ***Tarea*** $t_{2,1}$: *Comparar dos fracciones de diferente denominador*

Para esta tarea tenemos 5 ejemplos, los cuales se resuelven usando técnicas diferentes pero vinculadas entre sí, tales como el uso de la tira de fracciones, representación en la recta numérica y uso de fracciones equivalentes.

A continuación, mostramos un ejemplo representativo de esta tarea en la página 124 del Cuaderno de Trabajo.

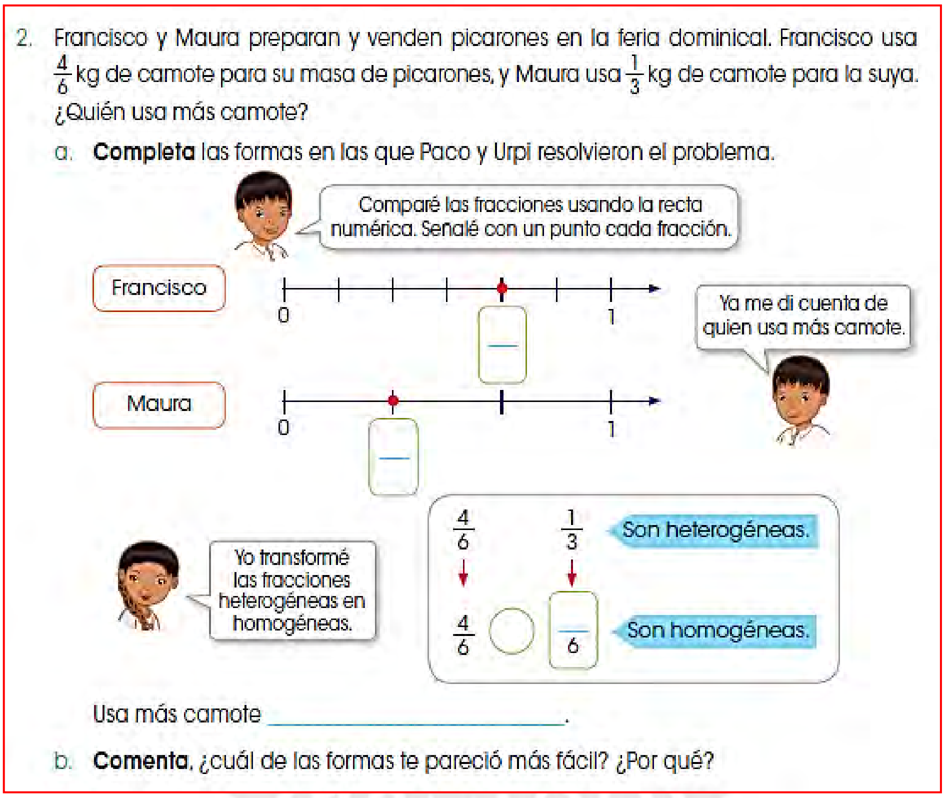


Figura 46. Comparación de fracciones heterogéneas.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 124)

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo muestra dos técnicas: representación de una fracción en la recta numérica y usar fracciones equivalentes.

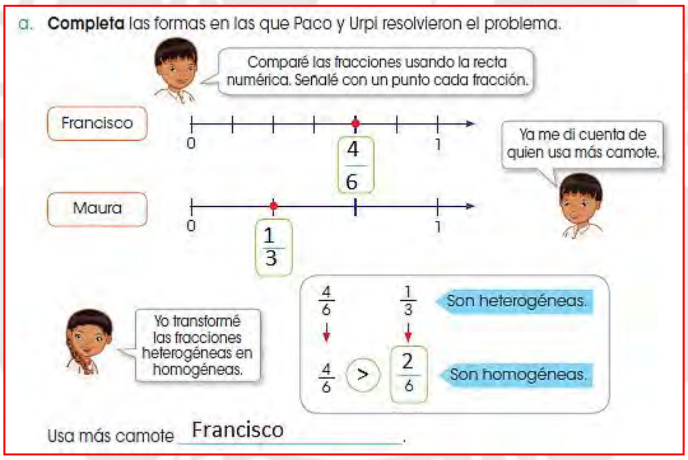
Técnica $\hat{o}_8$: *Uso de la recta numérica.*

Esta primera técnica consiste en ubicar la fracción 4/6 en la recta numérica usando el doble conteo de las partes, es decir tomar cuatro unidades de las seis en que se dividió la unidad. Luego en la segunda recta deberá ubicar la fracción 1/3 tomando un segmento de los tres en que se dividió la unidad.

Es preciso señalar que esta técnica usa a su vez la técnica del doble conteo de las partes para representar ambas fracciones en la recta. De allí que Behr *et al.* (1992) encuentren una relación estrecha entre el significado de fracción como relación parte todo y como medida.

Técnica $\hat{o}_7$: *Usar fracciones equivalentes.*

Esta técnica consiste en encontrar una fracción equivalente a aquella que tenga el mayor denominador, ya que en esta tarea el denominador de una de las fracciones siempre es múltiplo del denominador de la otra fracción. En nuestro caso el denominador mayor es 6 por lo cual solo bastará multiplicar por 2 al numerador y denominador de la fracción 1/3 para obtener la fracción equivalente 2/6. Luego se comparan los numeradores de ambas fracciones homogéneas siendo 4/6 la mayor. La solución de la tarea se muestra a continuación.



Tecnología θ_3: Comparación de fracciones

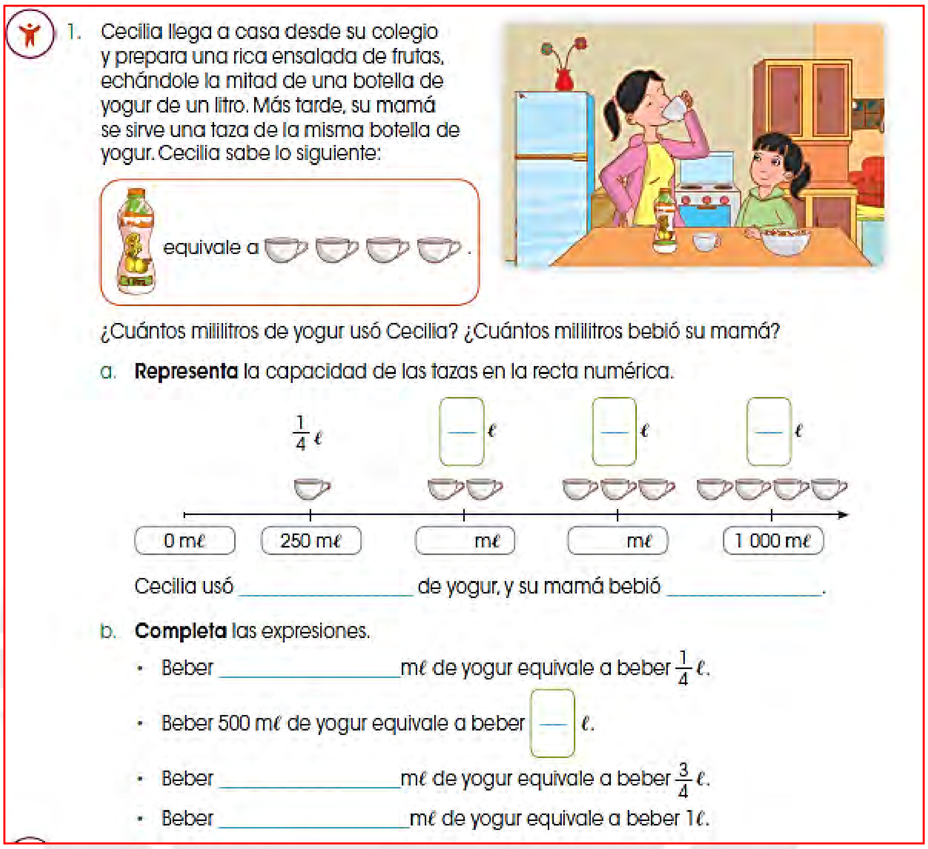
En esta segunda técnica $\hat{o}_7$: *Usar fracciones equivalentes* hay vestigios de un discurso tecnológico al cual llamamos comparación de fracciones, donde se observa que para comparar fracciones de diferente denominador se transforma a fracciones equivalentes con el mismo denominador para luego comparar los numeradores.

Significado de la fracción presente en esta tarea:

El uso de la recta numérica como primera técnica evidencia el significado de fracción medida para la fracción 4/6 y 1/3.

- ***Tarea*** $t_{2,2}$: *Medir la capacidad de un cuerpo usando submúltiplos de la unidad.*

Para esta tarea tenemos 5 problemas en el Cuaderno de Trabajo y tomamos el siguiente problema como ejemplo representativo que entrará en discusión por contener muchas representaciones innecesarias.



1. Cecilia llega a casa desde su colegio y prepara una rica ensalada de frutas, echándole la mitad de una botella de yogur de un litro. Más tarde, su mamá se sirve una taza de la misma botella de yogur. Cecilia sabe lo siguiente:

equivale a .

¿Cuántos mililitros de yogur usó Cecilia? ¿Cuántos mililitros bebió su mamá?

a. **Representa** la capacidad de las tazas en la recta numérica.

$\frac{1}{4}\ell$ $\frac{\square}{\square}\ell$ $\frac{\square}{\square}\ell$ $\frac{\square}{\square}\ell$

0 mℓ   250 mℓ   mℓ   mℓ   1 000 mℓ

Cecilia usó ______ de yogur, y su mamá bebió ______.

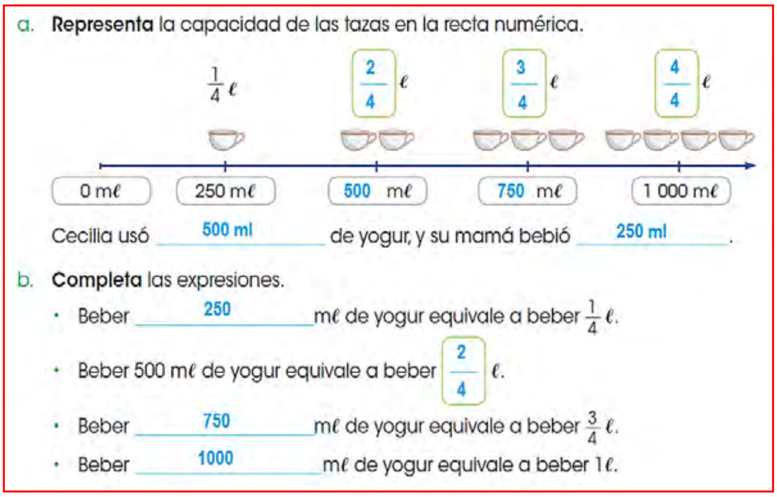
b. **Completa** las expresiones.

- Beber ______ mℓ de yogur equivale a beber $\frac{1}{4}\ell$.
- Beber 500 mℓ de yogur equivale a beber $\frac{\square}{\square}\ell$.
- Beber ______ mℓ de yogur equivale a beber $\frac{3}{4}\ell$.
- Beber ______ mℓ de yogur equivale a beber 1ℓ.

Figura 47. Expresamos medidas en litros.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 149)

Técnica $\hat{o}_2$: *Partición y doble conteo de las partes.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo evidencia la técnica de la partición y el doble conteo de las partes Se debe dividir la unidad 1000ml en cuatro partes iguales, siendo cada una de ellas 250ml, luego tomar una, dos o tres partes según la fracción representada en la recta numérica. La solución de la tarea se ilustra a continuación.



Tecnología θ_4: División de números naturales.

Significado de la fracción presente en esta tarea:

El empleo de la recta numérica evidencia el significado de la fracción como medida, pues según Behr & Post (1992) es un soporte gráfico que permite representar una fracción en la recta como un punto siempre y cuando se inicie en el cero. Así mismo se aprecia el significado de fracción como operador ya que cada fracción 1/4, 2/4, 3/4 y 4/4 actúa sobre la cantidad 1000ml.

Discusión: Creemos que el empleo de muchos ostensivos (representaciones para la fracción) opaca la comprensión de la fracción y asocia la recta numérica con unidades de medida como ml, debemos dejar en claro que la recta numérica es un soporte gráfico para representar conjuntos numéricos como los números naturales, enteros, racionales y no magnitudes como capacidad.

Tipo de tarea T_3: Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios.

- ***Tarea $t_{3,1}$**: Transformar una cantidad entera por la acción de una fracción.*

Esta tarea posee 5 ejemplos en la sección denominada *Representamos partes de una cantidad.* A continuación, mostramos el primer problema que será nuestro ejemplo representativo.

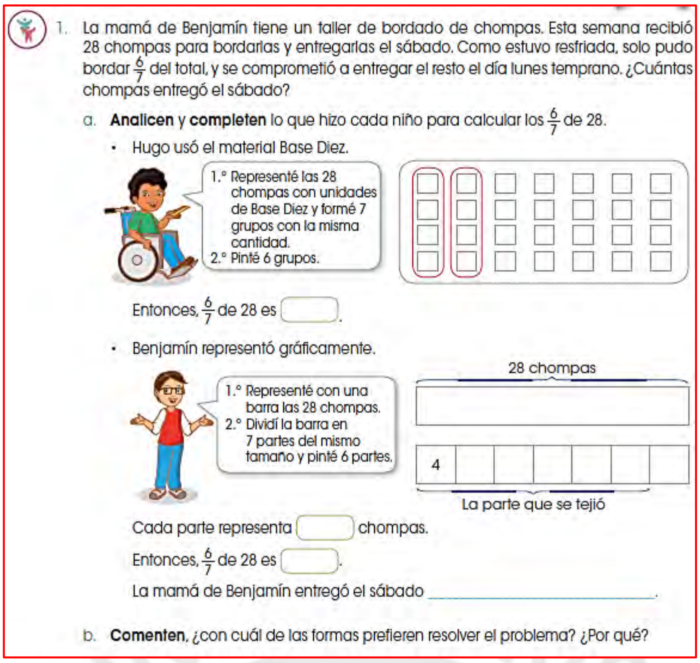


Figura 48. Fracción de un número.

Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 117)

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo muestra dos técnicas: que nosotros hemos denominado partición y doble conteo de las partes para la primera y multiplicación y división con soporte gráfico para la segunda.

Técnica $\hat{\mathbf{o}}_{\mathbf{2}}$: *Partición y doble conteo de las partes*

La primera técnica consiste en representar las 28 chompas con cuadrados y agruparlos en 7 grupos de 4 elementos cada uno para luego tomar 6 grupos ya que se pide $\frac{6}{7}$ de 28, siendo la respuesta 24.

Técnica $\hat{\mathbf{o}}_{\mathbf{10}}$: *División y multiplicación con soporte gráfico.*

La segunda técnica consiste en representar las 28 chompas (que es el todo discreto) con una barra, luego se procede a dividir la barra en 8 partes iguales, donde cada parte representará 4 chompas (se efectúa la división $28 \div 7 = 4$) finalmente se toman 6 partes haciendo un total de 24 (se efectúa la multiplicación $6 \times 4 = 24$)

Debemos mencionar que esta técnica de la división y multiplicación con soporte gráfico se va a simbolizar en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado de primaria convirtiéndose en la técnica de dividir el entero por el denominador de la fracción y el resultado multiplicarlo por el numerador.

Tecnología $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{5}}$: División y multiplicación de números naturales.

La técnica $\widehat{o}_{10}$: *División y multiplicación con soporte gráfico* muestra vestigios del discurso tecnológico que hemos denominado división y multiplicación de números naturales.

- ***Tarea*** $t_{3,2}$: *Transformar una fracción por la acción de otra fracción.*

Los ejemplos para esta tarea se vinculan a la multiplicación de fracciones, la cual es introducida recién en este grado. Como ejemplo representativo mostramos el siguiente problema de la página 120 del Cuaderno de Trabajo.

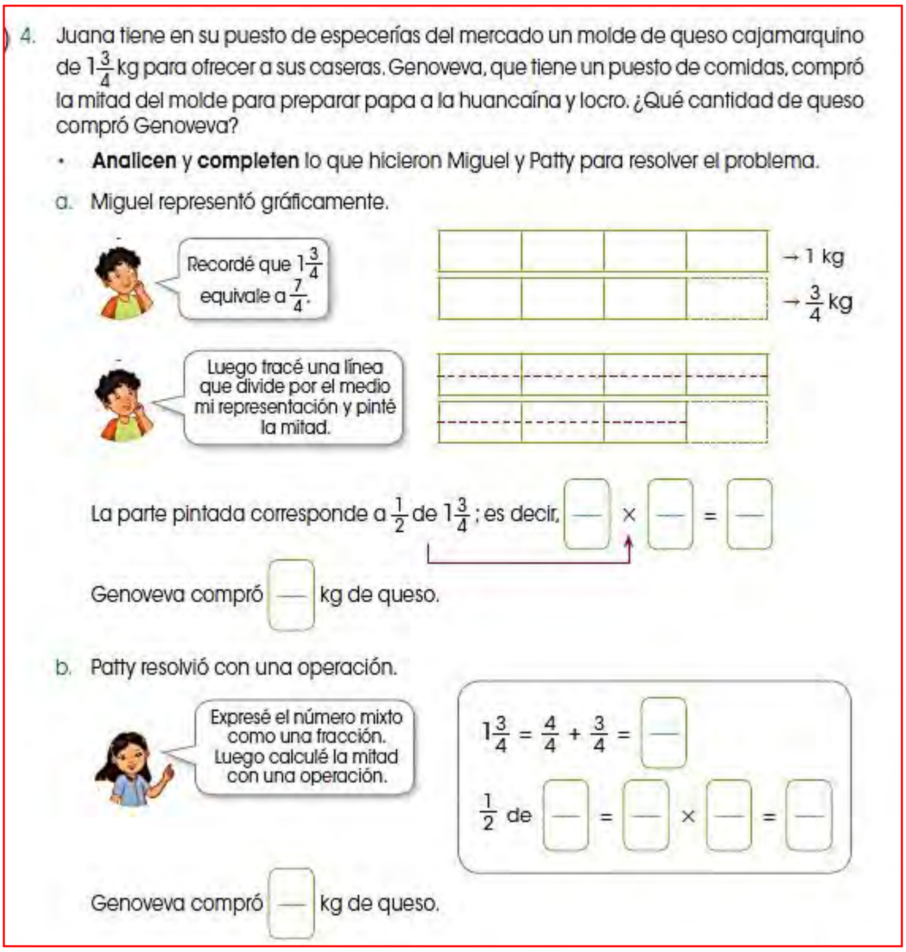
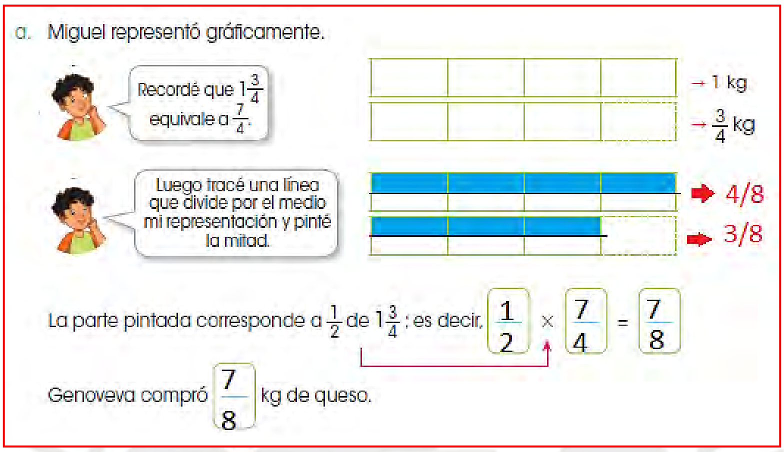


Figura 49. Multiplicamos fracciones
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 120)

Para esta tarea disponemos de dos técnicas que se hacen explícitas en el Cuaderno de Trabajo. La primera es la partición y doble conteo de las partes, y la segunda es multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones. En los siguientes problemas el estudiante tiene la libertad de escoger cualquiera de ellas.

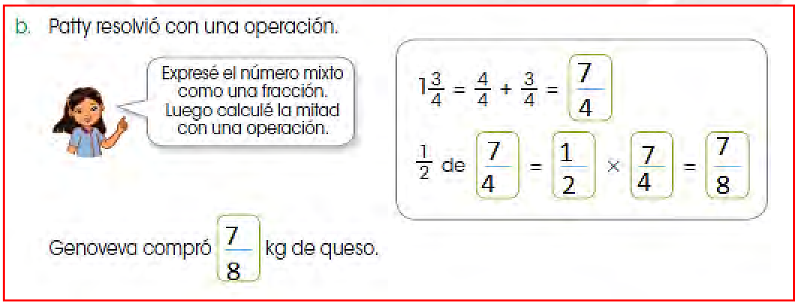
Técnica $\widehat{o}_{2}$: *Partición y doble conteo de las partes.*

Para resolver esta tarea se usan dos barras divididas en 4 partes que representan 1 y ¾ respectivamente, luego se traza una línea horizontal que divide ambos rectángulos en 8 y 6 partes. Después se pinta la mitad de cada unidad: 4/8 en el primer rectángulo y 3/8 en el segundo y se sumará para obtener el resultado que posteriormente será obtenido usando la multiplicación de fracciones.



Técnica* $\hat{\mathbf{o}}_{11}$: *Multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones.

La segunda forma de resolución es netamente simbólica, es decir se desvincula las fracciones del contexto gráfico, se convierte la fracción mixta $1\frac{3}{4}$ en fracción impropia, obteniéndose 7/4 y se procede a multiplicar 1/2 por 7/4, numerador con numerador y denominador con denominador, dando como resultado 7/8.



Tecnología $\boldsymbol{\theta}_6$: Multiplicación de fracciones.

La técnica $\hat{o}_{11}$: *Multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones* evidencia el discurso tecnológico denominado multiplicación de fracciones, de forma explícita: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

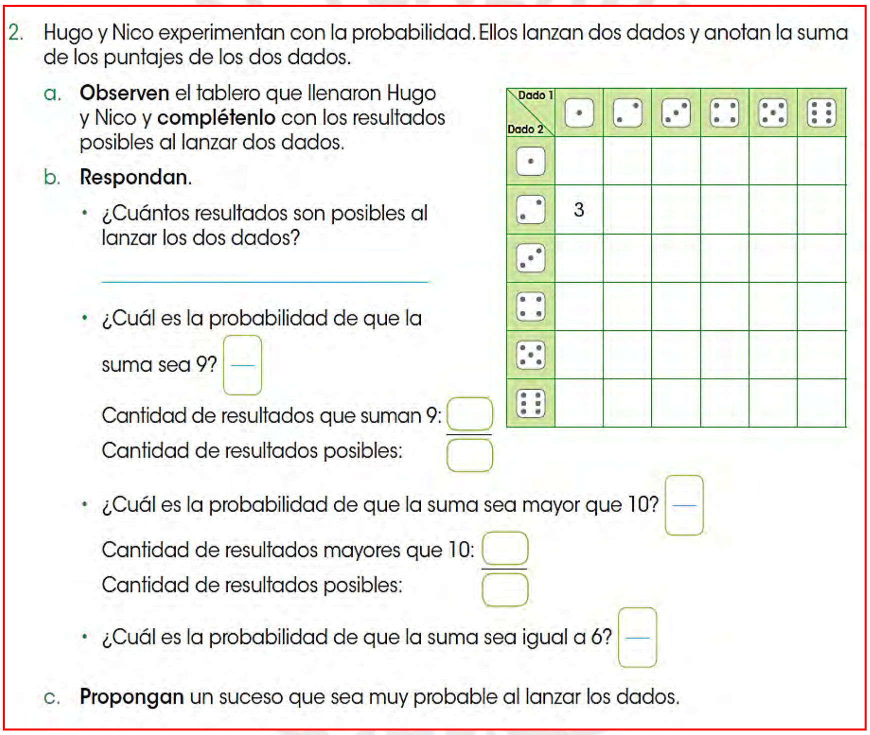
Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona los significados de la fracción como relación parte – todo y fracción como operador.

Tipo de tarea T_5: Comparar dos magnitudes.

- ***Tarea*** $t_{5,1}$: *Calcular la probabilidad de un suceso.*

Para esta tarea registramos cuatro problemas que se hallan en la sección Calculamos la probabilidad del Cuaderno de Trabajo. El siguiente problema se será el representante de esta tarea y al igual que otros ya analizados anteriormente posee varios ítems, pero para efectos de análisis solo nos centraremos en aquellos donde se hace uso de la fracción como razón, en este caso en el ítem 2b.


2. Hugo y Nico experimentan con la probabilidad. Ellos lanzan dos dados y anotan la suma de los puntajes de los dos dados.

a. **Observen** el tablero que llenaron Hugo y Nico y **complétenlo** con los resultados posibles al lanzar dos dados.

Dado 1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1						
2	3					
3						
4						
5						
6						

b. **Respondan.**

- ¿Cuántos resultados son posibles al lanzar los dos dados?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 9?
  Cantidad de resultados que suman 9:
  Cantidad de resultados posibles:
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que 10?
  Cantidad de resultados mayores que 10:
  Cantidad de resultados posibles:
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea igual a 6?

c. **Propongan** un suceso que sea muy probable al lanzar los dados.

Figura 50. Lanzamiento de dados
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 155)

Técnica $\hat{o}_1$: *Doble conteo de las partes*

Para resolver esta tarea primero se debe completar la tabla de doble entrada sumando los puntos de los dados, luego para contestar cada ítem contar los casilleros que cumplen la condición del enunciado y el total de resultados de la tabla. Así pues, la probabilidad de un suceso está determinada por la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que la suma sea mayor que 10, se tendrá que contar el número de casos favorables y el número de casos posibles, siendo 3 y 36 respectivamente y escribir la fracción $\frac{10}{36}$.

Tecnología θ_7 – teoría θ_2: Definición de probabilidad clásica.

Los vestigios de este discurso tecnológico – teórico se hallan en el primer problema de la página 155 del mismo Cuaderno de Trabajo.

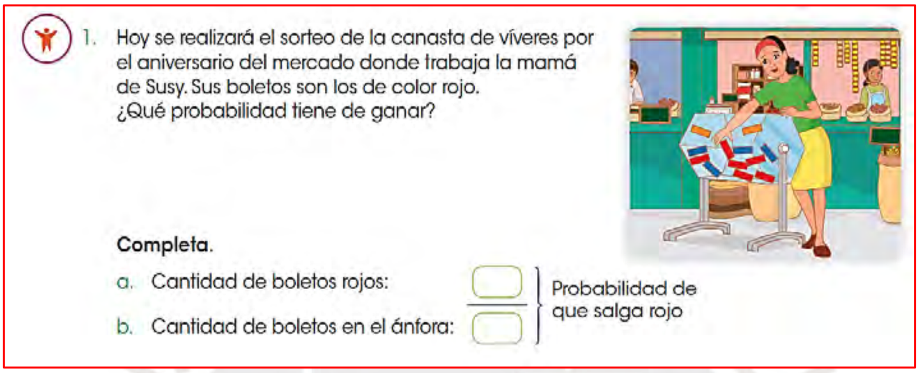


Figura 51. Calculamos la probabilidad
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 155)

Significado de la fracción presente en esta tarea:

Esta tarea relaciona los significados de la fracción como relación parte – todo y fracción como razón.

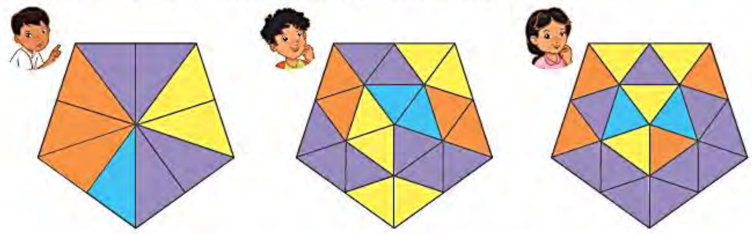
Tipo de tarea T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.

Debemos mencionar que este tipo de tarea se presenta recién en 5to de primaria (para niños de 10 años), pues en grados anteriores como 3ero y 4to el niño se ha familiarizado con tareas basadas en el significado de la fracción como relación parte – todo escribiendo en el numerador la parte que se ha tomado de la unidad y en el denominador el total de partes en la cual se ha dividido. Dichas tareas ahora le servirán como conceptos previos para establecer una equivalencia entre el número de partes tomadas de una unidad dividida en múltiplos de 10.

- ***Tarea $t_{6,1}$***: *Convertir una fracción decimal en un número decimal.*

Para esta tarea contamos con cuatro ejemplos de los cuales seleccionamos aquel que se encuentra en la página 100 del Cuaderno de Trabajo.

2. Manuel, Miguel y Rosa elaboran cometas del mismo tamaño pero con distintos diseños, para venderlas durante la Semana de la Cometa. Ellos saben que el éxito de la venta radica en que los diseños sean creativos, por ello deciden que cada color no ocupe más de la mitad de la cometa. ¿Quién elaboró su cometa usando más partes de color morado? ¿Quién usando más de amarillo? ¿Y más de anaranjado?



- **Expresa** como fracción y como decimal la parte que le corresponde a cada color en cada cometa. **Completa** la tabla.

Niños / Color	Manuel	Miguel	Rosa
Morado	$\frac{4}{10} = 0,4$	$\frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0,4$	
Anaranjado			
Amarillo			
Celeste			

___________ usó más partes de color morado, ___________ más de amarillo y ___________ más de anaranjado.

Figura 52. Expresión decimal de una fracción.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 100)

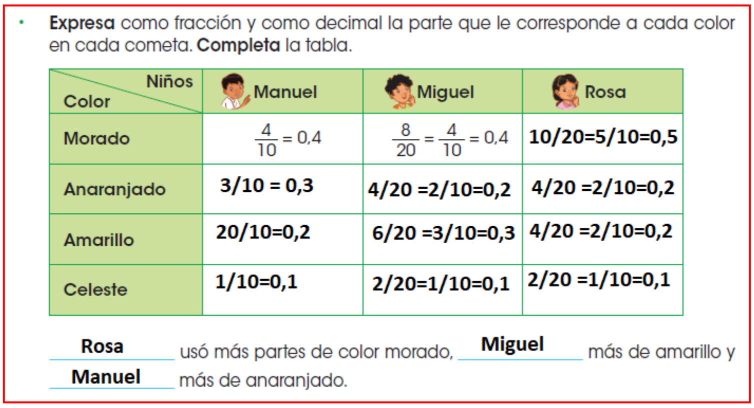
Para esta tarea usamos dos técnicas diferentes: el doble conteo de las partes y la equivalencia entre una fracción decimal y número decimal.

Técnica $\hat{\mathbf{o}}_{12a}$: *Doble conteo de las partes + equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal.*

Para resolver esta tarea el estudiante debe primero escribir la fracción que representa la parte pintada del color señalado usando el doble conteo de las partes. La fracción obtenida en algunos casos debe ser simplificada para que tenga el denominador diez.

Luego de escribir las fracciones con denominador diez se usará la equivalencia entre una fracción decimal y un número decimal, siendo las fracciones propias de denominador diez los décimos y expresados con un cero y una coma seguida del numerador de la fracción.

Las dos técnicas anteriores se hacen explícitas en la primera fila de la tabla de doble entrada.



- **Expresa** como fracción y como decimal la parte que le corresponde a cada color en cada cometa. **Completa** la tabla.

Color / Niños	Manuel	Miguel	Rosa
Morado	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	$\frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0{,}4$	10/20=5/10=0,5
Anaranjado	3/10 = 0,3	4/20 =2/10=0,2	4/20 =2/10=0,2
Amarillo	20/10=0,2	6/20 =3/10=0,3	4/20 =2/10=0,2
Celeste	1/10=0,1	2/20=1/10=0,1	2/20 =1/10=0,1

Rosa usó más partes de color morado, Miguel más de amarillo y Manuel más de anaranjado.

Tecnología θ_8: Cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.

La técnica se ve justificada por el cambio de representación de una fracción decimal a un número decimal. Es una fracción con denominador potencia de diez tiene una equivalencia con la escritura de un número decimal donde los décimos, centésimos, milésimos son casos específicos de fracciones cuyos denominadores son 10, 100 y 1000 respectivamente.

Este discurso tecnológico no está en el Cuaderno de Trabajo de 5to grado (2016) pero si lo hallamos en el texto escolar Matemática 5 (2012).

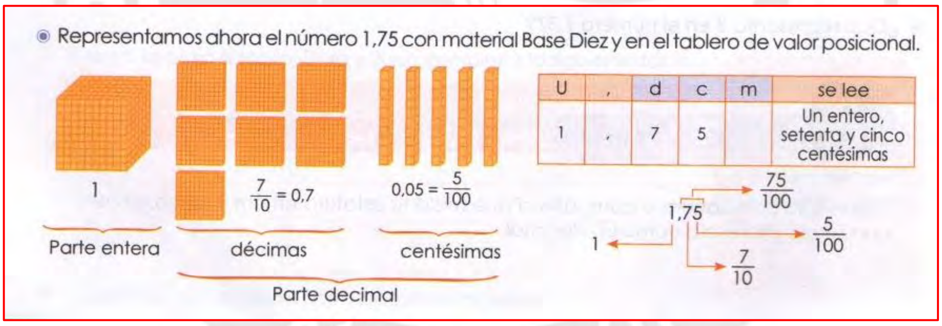


Figura 53. Expresión decimal de una fracción decimal
Fuente: Matemática 5. Texto Escolar de quinto grado de primaria. (2012, p. 60)

- ***Tarea $t_{6,2}$**: Convertir un número decimal en una fracción decimal.*

Debemos mencionar que esta tarea es considerada la inversa de la tarea $t_{7,1}$ y solo encontramos un ejemplo en el Cuaderno de Trabajo de este grado, por tanto, creemos conveniente que se debe proporcionar más tareas de este tipo para lograr en grados posteriores un conocimiento maduro de los números racionales como lo afirma Kieren (1980). A continuación, mostramos un ejemplo para la tarea $t_{7,1}$.

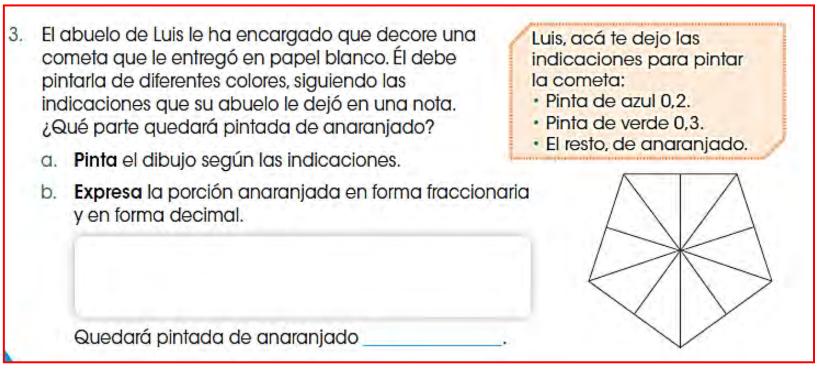
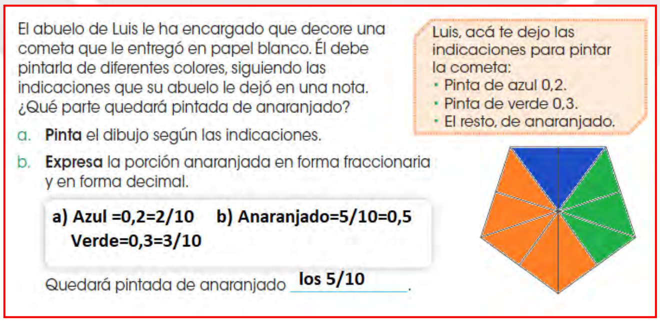


Figura 54. Expresión fraccionaria de un decimal.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 100)

Técnica $\hat{o}_{12b}$: *Equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal + doble conteo de las partes.*

Para resolver el ítem 3a de la tarea el Cuaderno de Trabajo induce a establecer la equivalencia entre un decimal y una fracción decimal donde 0,2=2/10; sin embargo, como esta equivalencia ya se trabajó en el problema 2, también se podría usar observando la tabla de dicho problema. Luego de escribir los decimales que representan la parte pintada de azul y verde en forma de fracción decimal, se realiza el doble conteo de las partes para pintar la cometa, que de por sí ya está dividida en diez partes iguales. Debemos mencionar que para escribir la fracción y decimal que representa la parte anaranjada primero usamos el *doble conteo de las partes* y luego la *equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal.* La solución de la tarea se muestra a continuación.



Tecnología θ_8: **Cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.**

La técnica se ve justificada por el cambio de representación del número decimal como fracción decimal. Este discurso tecnológico no está en el Cuaderno de Trabajo de 5to grado (2016) pero si lo hallamos en el texto escolar Matemática 5 (2012) en la página 60.

A continuación, mostramos una tabla resumen de la cantidad de tareas, técnicas y tecnologías, así como su ubicación en el Cuaderno de Trabajo de 5to grado de primaria (2016).

Tabla 6: Tareas, técnicas y tecnologías registradas en el Cuaderno de Trabajo de 5to de primaria.

<table>
<tr><th>Tipo de tarea</th><th>Tarea</th><th>Técnica</th><th>Tecnología</th><th>Ubicación</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.</td><td>$t_{1,6}$: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.</td><td>$\hat{o}_3$: Composición/descomposición y doble conteo de las partes.</td><td rowspan="2">θ_1: Significado de fracción como relación parte – todo</td><td>1 y 2 (p. 61)</td></tr>
<tr><td>$t_{1,8}$: Dividir el todo discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.</td><td>$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.</td><td>3, 4 y 5 (p. 62)
1 (p. 63), 2 (p. 64)</td></tr>
<tr><td>$t_{1,9}$ Sumar o restar fracciones de diferente denominador.</td><td>$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes. /
$\hat{o}_7$: Usar fracciones equivalentes</td><td>θ_2: Adición y sustracción de fracciones</td><td>3 (p. 64), 1 y 2 (p. 65)
3, 4 y 5 (p. 66)
1 (p. 79), 2 (p. 80)
3 y 4 (p. 81)
5 y 6 (p. 82),
1 (p. 85), 2 y 3 (p. 86),
4 y 5 (p. 87)
6 y 7 (p. 88)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_2: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submultiplos de la unidad.</td><td rowspan="2">$t_{2,1}$: Comparar dos fracciones de diferente denominador</td><td>$\hat{o}_4$: Uso de la tira de fracciones</td><td rowspan="2">θ_3: Comparación de fracciones</td><td>1a y 1b (p. 123)</td></tr>
<tr><td>$\hat{o}_8$: Ubicación de las fracciones en la recta numérica. /
$\hat{o}_7$: Usar fracciones equivalentes</td><td>2a (p. 124)
3 y 4 (p. 124)</td></tr>
<tr><td>$t_{2,2}$: Medir la capacidad de un cuerpo usando submúltiplos de la unidad.</td><td>$\hat{o}_2$: Partición y doble conteo de las partes.</td><td>θ_4: División de números naturales.</td><td>1 (p. 147)
1 y 2 (p. 149)
4 (p. 150), 1 (p. 151)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_3: Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios.</td><td>$t_{3,1}$: Transformar una cantidad entera por la acción de una fracción.</td><td>$\hat{o}_{10}$: División y multiplicación con soporte gráfico.</td><td>θ_5 División y multiplicación de números naturales.</td><td>1 (p. 63), 2 y 3 (p. 64)
1, 2 (p. 117)
3, 4, 5 (p. 118)
3 (p. 150), 2 (p. 151)</td></tr>
<tr><td>$t_{3,2}$: Transformar una fracción por la acción de otra fracción.</td><td>$\hat{o}_2$: Partición y doble conteo de las partes. /
$\hat{o}_{11}$: Multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones.</td><td>θ_6: Multiplicación de fracciones.</td><td>1 y 2 (p. 119)
3 (p. 120)
4 y 5 (p. 121)
6 (p. 122)</td></tr>
<tr><td>T_5: Comparar dos magnitudes</td><td>$t_{5,1}$: Calcular la probabilidad de un suceso.</td><td>$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.</td><td>$\theta_7 - \Theta_2$: Definición de probabilidad clásica.</td><td>1 y 2 (p. 155)
3 y 4 (p. 156)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.</td><td>$t_{6,1}$: Convertir una fracción decimal en un número decimal.</td><td>$\hat{o}_{12a}$: : Doble conteo de las partes + equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal</td><td rowspan="2">θ_8 Cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.</td><td>1 (p. 99)
2 (p. 100), 1 (p. 103)
2 (p. 104)</td></tr>
<tr><td>$t_{6,2}$: Convertir un número decimal en una fracción decimal.</td><td>$\hat{o}_{12b}$: : Equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal + Doble conteo de las partes</td><td>3a (p. 100)</td></tr>
<tr><td>5 tipos</td><td>10 tareas</td><td>9 técnicas</td><td>8 tecnologías</td><td>61 problemas</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Del análisis y la tabla mostrada podemos decir que la organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 5to grado de primaria (2016) muestra el saber – hacer y rastros del saber. Esto es, el material didáctico presenta problemas (tareas) y las formas de cómo resolverlas (técnicas) así como vestigios de la justificación de las técnicas (tecnologías). Estos vestigios se hallan en muchos casos en las propias técnicas, por ejemplo, en la técnica que denominamos $\hat{o}_7$: *usar fracciones equivalentes* encontramos la forma de cómo operar con fracciones de diferente denominador.

Así mismo el texto escolar Matemática 5 (2012) proporciona algunos elementos tecnológicos para sustentar las técnicas usadas en este Cuaderno de Trabajo analizado tales como la explicación de cómo hacer el *cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.*

Por otro lado, el significado asociado a la fracción en este Cuaderno de Trabajo es la relación parte – todo, medida, operador, razón y el cambio de representación de fracción decimal a número decimal que se expresan en los tipos de tareas T_1, T_2, T_3, T_5 y T_6 respectivamente, que se relacionan mediante el primer significado.

5.5 Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 6to de Primaria

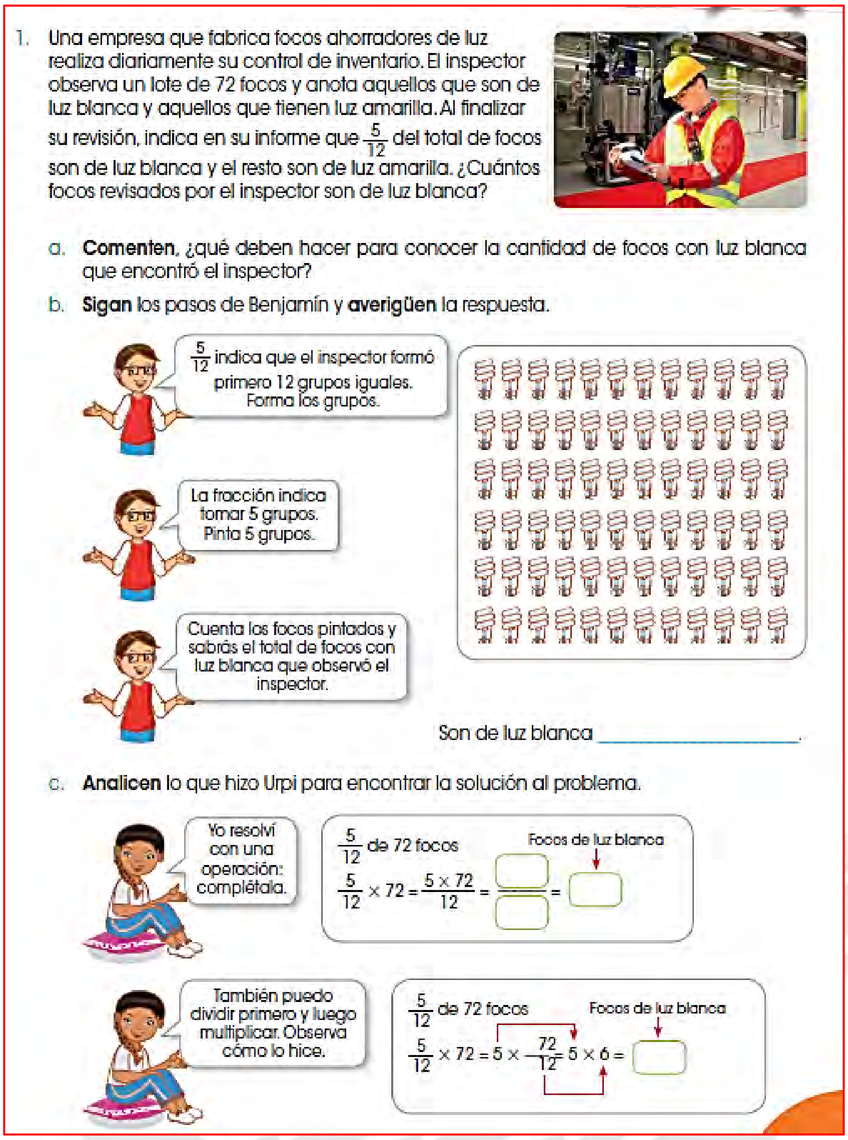
Ahora construiremos una organización matemática sobre las fracciones para el Cuaderno de Trabajo de 6to grado dirigido a niños de 11 años de edad. En este material didáctico notamos una clara ausencia de las tareas T_1: *Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas* y T_2: *Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submultiplos de la unidad.* Conjeturamos que ellas servirán de apoyo para abordar los demás tipos de tareas.

Tipo de tarea T_3: Transformar cantidades por la acción de una fracción.

- ***Tarea $t_{3,1}$***: *Transformar una cantidad entera por la acción de una fracción.*

Existen varios problemas que corresponden a esta tarea, lo cual no sucedía en los Cuadernos de Trabajo de los grados anteriores (3ero, 4to y 5to). Estos problemas se encuentran en la sección denominada *Usamos la fracción como operador* del Cuaderno de Trabajo analizado.

Un ejemplo ilustrativo de esta tarea es la que mostramos a continuación:


1. Una empresa que fabrica focos ahorradores de luz realiza diariamente su control de inventario. El inspector observa un lote de 72 focos y anota aquellos que son de luz blanca y aquellos que tienen luz amarilla. Al finalizar su revisión, indica en su informe que $\frac{5}{12}$ del total de focos son de luz blanca y el resto son de luz amarilla. ¿Cuántos focos revisados por el inspector son de luz blanca?

a. **Comenten**, ¿qué deben hacer para conocer la cantidad de focos con luz blanca que encontró el inspector?

b. **Sigan** los pasos de Benjamín y **averigüen** la respuesta.

$\frac{5}{12}$ indica que el inspector formó primero 12 grupos iguales. Forma los grupos.

La fracción indica tomar 5 grupos. Pinta 5 grupos.

Cuenta los focos pintados y sabrás el total de focos con luz blanca que observó el inspector.

Son de luz blanca ____________.

c. **Analicen** lo que hizo Urpi para encontrar la solución al problema.

Yo resolví con una operación: complétala.

$\frac{5}{12}$ de 72 focos

$\frac{5}{12} \times 72 = \frac{5 \times 72}{12} = \frac{\square}{\square} = \square$ Focos de luz blanca

También puedo dividir primero y luego multiplicar. Observa cómo lo hice.

$\frac{5}{12}$ de 72 focos

$\frac{5}{12} \times 72 = 5 \times \frac{72}{12} = 5 \times 6 = \square$ Focos de luz blanca

Figura 55. Usamos la fracción como operador.

Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 65)

Para resolver este ejemplo de la tarea el Cuaderno de Trabajo propone dos técnicas: una gráfica y otra operativa que hemos denominado *Partición de la unidad y doble conteo de las partes* y *Dividir el número por el denominador de la fracción y multiplicar el resultado por el numerador* o su variante *Multiplicar el número por el numerador de la fracción y dividir el resultado por el denominador* respectivamente.

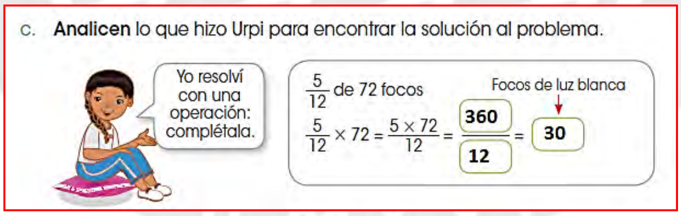
Técnica $\widehat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

Para resolver esta tarea la técnica es muy explícita, se representan los 72 focos mediante dibujos y se agrupan convenientemente en 12 grupos de 6 focos cada uno. Luego se pinta 5 grupos por ser la fracción $\frac{5}{12}$ y se cuenta cuántos focos hay en ese grupo pintado.

Como mencionamos la técnica operativa tiene dos variantes *Dividir el número por el denominador de la fracción y multiplicar el resultado por el numerador, y Multiplicar el número por el numerador de la fracción y dividir el resultado por el denominador,* las cuales serán codificadas como $\hat{o}_{13a}$ y $\hat{o}_{13b}$ respectivamente.

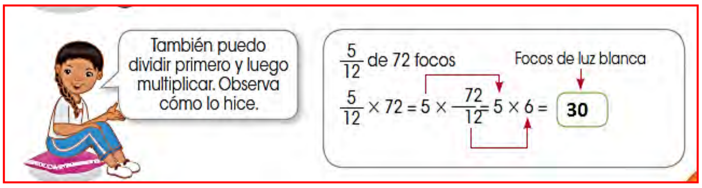
Técnica $\boldsymbol{\hat{o}_{13a}}$: *Dividir el número por el denominador de la fracción y multiplicar el resultado por el numerador.*

El Cuaderno de Trabajo primero indica multiplicar 5 por 72 y el producto obtenido dividirlo por 12 obteniendo 30. La resolución de la tarea se ilustra a continuación.



Técnica $\boldsymbol{\hat{o}_{13b}}$: *Multiplicar el número por el numerador de la fracción y dividir el resultado por el denominador.*

Así mismo, el Cuaderno de Trabajo indica que es posible invertir el orden de las operaciones, es decir, dividir 72 por 12 y el cociente obtenido multiplicarlo por 5 dando como resultado 30. La resolución de la tarea se ilustra a continuación.

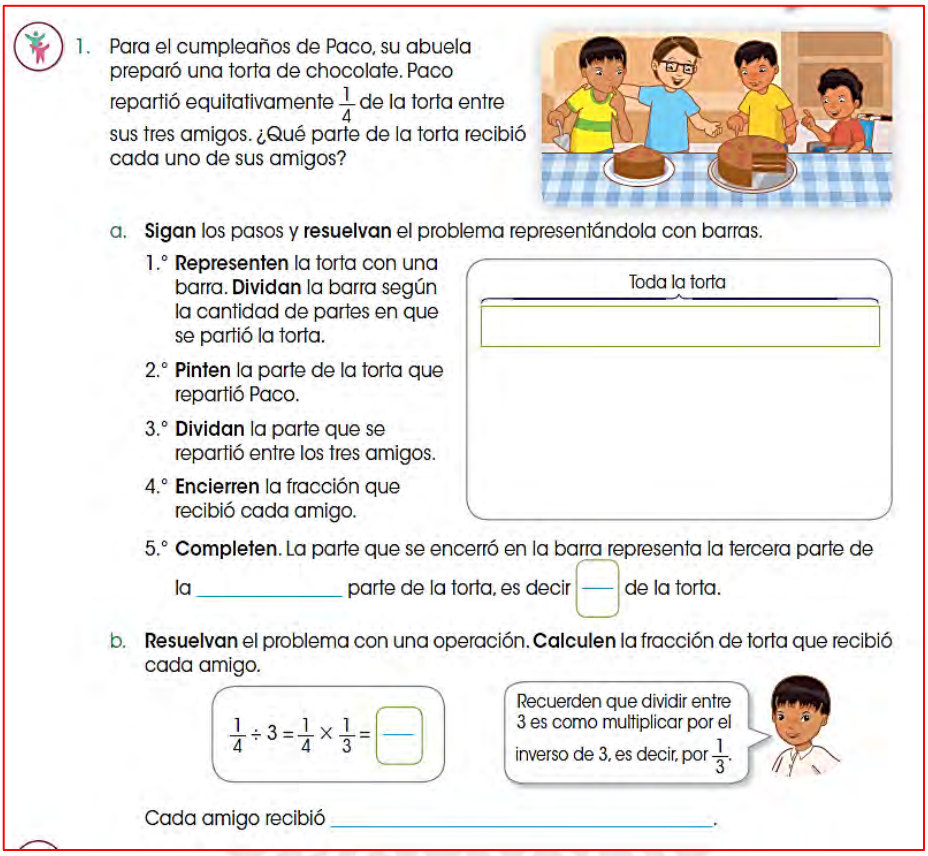


Tecnología θ_9: Multiplicación de una fracción por un número entero.

Los vestigios de este discurso tecnológico se hallan en las mismas técnicas $\hat{o}_{13a}$ y $\hat{o}_{13b}$.

- ***Tarea $t_{3,3}$**: Dividir una fracción por un número entero.*

Para esta tarea hallamos solo dos problemas de los cuales mostraremos el problema 5 de la página 125 como ejemplo representativo porque aquí encontramos vestigios de la tecnología.


1. Para el cumpleaños de Paco, su abuela preparó una torta de chocolate. Paco repartió equitativamente $\frac{1}{4}$ de la torta entre sus tres amigos. ¿Qué parte de la torta recibió cada uno de sus amigos?

a. **Sigan** los pasos y **resuelvan** el problema representándola con barras.

1.° **Representen** la torta con una barra. **Dividan** la barra según la cantidad de partes en que se partió la torta.

2.° **Pinten** la parte de la torta que repartió Paco.

3.° **Dividan** la parte que se repartió entre los tres amigos.

4.° **Encierren** la fracción que recibió cada amigo.

Toda la torta

5.° **Completen**. La parte que se encerró en la barra representa la tercera parte de la ____________ parte de la torta, es decir $\boxed{\frac{}{}}$ de la torta.

b. **Resuelvan** el problema con una operación. **Calculen** la fracción de torta que recibió cada amigo.

$\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{}{}}$

Recuerden que dividir entre 3 es como multiplicar por el inverso de 3, es decir, por $\frac{1}{3}$.

Cada amigo recibió ______________________________.

Figura 56. Multiplicamos y dividimos por un número
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 125)

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo propone dos formas de resolución: gráfica y operativa que se hallan en el ítem a y b respectivamente.

***Técnica $\hat{o}_2$**: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.*

La primera forma de resolución (ítem a) consta de 5 pasos que va desde particionar el todo continuo (la torta de chocolate representado por un rectángulo) en la cantidad de partes que se dividió la torta, hasta dividir la cuarta parte de la torta en 3 partes equitativas siendo ésta un doceavo del total.

Técnica $\hat{o}_{14}$: *Escribir la división de una fracción por un entero como la multiplicación por el inverso del entero.*

En esta segunda forma de resolución se indica multiplica la fracción $\frac{1}{4}$ por el inverso del número entero 3, convirtiéndose en una multiplicación de fracciones de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ lo cual se reduce a la tarea que denominamos $t_{3,2}$: *transformar una fracción por la acción de otra fracción* la cual se trabajó en el Cuaderno de Trabajo de 5to grado de primaria (2016).

Tecnología θ_{10}: División de una fracción por un número entero.

Los rastros del discurso tecnológico se hallan en la segunda forma de resolución de la tarea al cual denominamos técnica $\hat{o}_{14}$: *Escribir la división de una fracción por un entero como la multiplicación por el inverso del entero.* De aquí podemos decir que esta técnica cumple una función de tecnología a la vez.

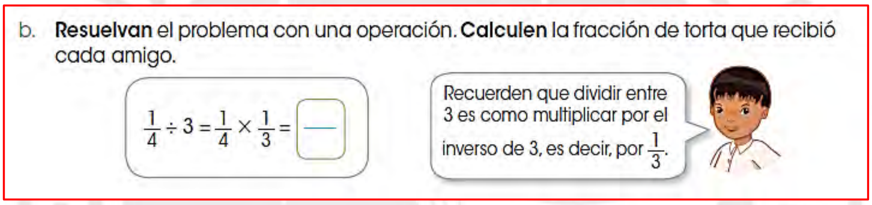


Figura 57. Discurso tecnológico para la tarea $t_{3,3}$
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 125)

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona los significados de la fracción como relación parte – todo y fracción como operador.

Tipo de tarea T_4: Distribuir equitativamente unidades continuas o discretas en un número de partes.

- ***Tarea*** $t_{4,1}$: *Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes menores que las unidades a dividir.*

Para esta tarea hemos identificado tres problemas los cuales aparecen en el Cuaderno de Trabajo bajo el título de *Expresamos la fracción como cociente*. Estos problemas permiten la partición de cantidades continuas y obtener como resultado de la división un número entero y una fracción. A continuación, mostramos un ejemplo representativo.

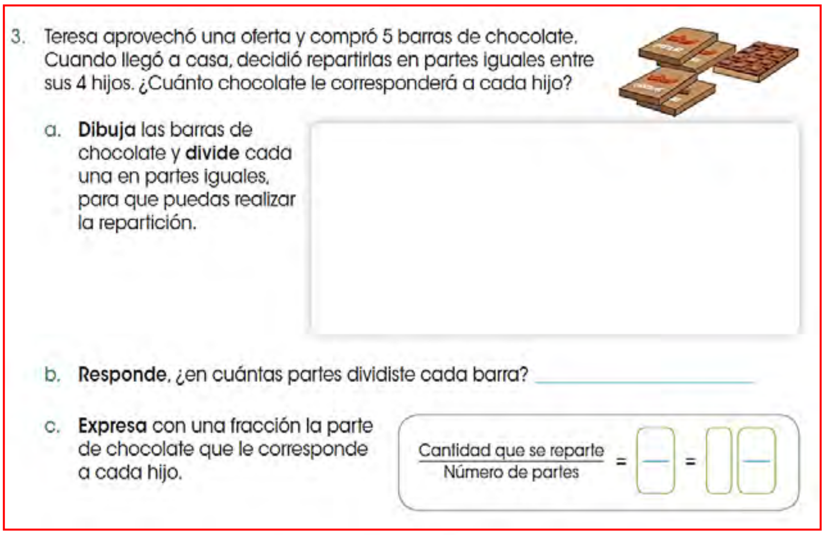
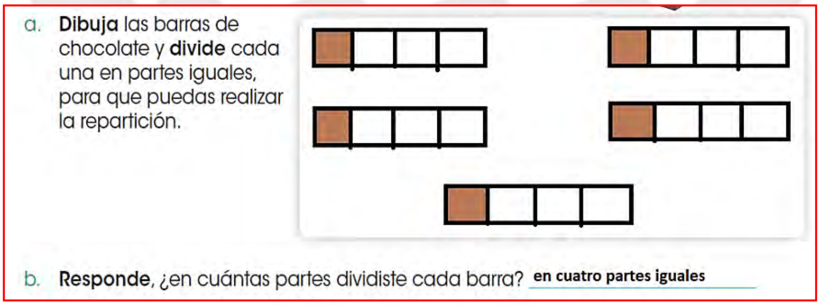


Figura 58. Distribución de unidades continuas 1
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 100)

Para resolver esta tarea se proponen dos técnicas, una gráfica y otra operativa.

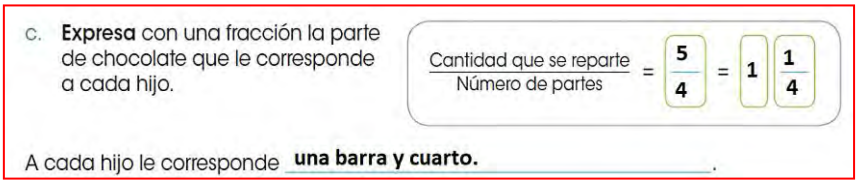
Técnica $\hat{o}_9$: *Dividir todos los objetos en* b *partes iguales y tomar* a *partes.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo hace explícita la técnica de dibujar los 5 chocolates y dividirlos en 4 partes iguales para luego tomar $\frac{1}{4}$ de cada barra haciendo un total de $\frac{5}{4}$. Esta técnica está basada en la técnica de la partición y doble conteo de las partes trabajada en 3ero y 4to de primaria. A continuación, ilustramos la técnica.



Técnica $\hat{o}_{15}$: *Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.*

Esta técnica se basa en expresar la cantidad que se reparte entre el número de partes como una fracción cuyo numerador es la cantidad de partes a distribuir y el denominador el número de partes, esto es $5 \div 4 = \frac{5}{4}$. En esta tarea el numerador es mayor que el denominador lo cual permitirá expresar esta fracción como un número mixto. A continuación, ilustramos la técnica.



c. **Expresa** con una fracción la parte de chocolate que le corresponde a cada hijo.

$\frac{\text{Cantidad que se reparte}}{\text{Número de partes}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

A cada hijo le corresponde **una barra y cuarto.**

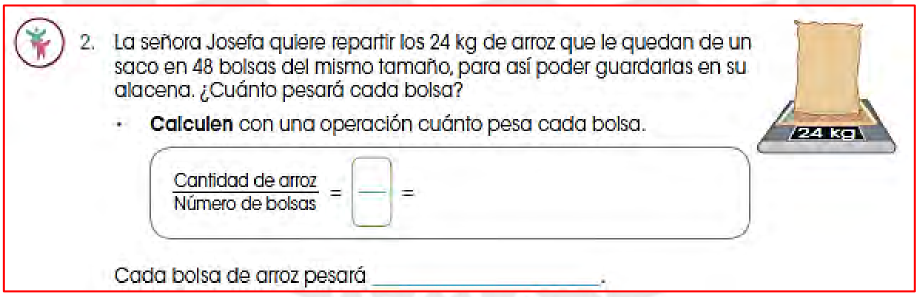
Tal como afirma Silva (2005) esta tarea permite asociar la operación $5 \div 4$ con la representación $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$ y de la misma forma $5 \div 4$ con $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ contribuyendo a la comprensión de $a \div b = \frac{a}{b}$.

Tecnología θ_{11}: Significado de fracción como cociente.

El discurso que justificaría esta técnica es el significado de fracción como cociente cuyos vestigios se hallan en la técnica usada.

- ***Tarea*** $t_{4,2}$: *Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes mayores a las unidades a dividir.*

Para esta tarea hemos identificado solo un problema el cual aparece en el Cuaderno de Trabajo bajo el título de *Expresamos la fracción como cociente.* Estos problemas permiten la partición de cantidades continuas y obtener como resultado de la división una fracción cuyo numerador es menor que el denominador. A continuación, mostramos el problema.



2. La señora Josefa quiere repartir los 24 kg de arroz que le quedan de un saco en 48 bolsas del mismo tamaño, para así poder guardarlas en su alacena. ¿Cuánto pesará cada bolsa?
   - **Calculen** con una operación cuánto pesa cada bolsa.

$\frac{\text{Cantidad de arroz}}{\text{Número de bolsas}} = \frac{\quad}{\quad} =$

Cada bolsa de arroz pesará ________________.

Figura 59. Distribución de unidades continuas 2
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 100)

Para esta tarea solo se propone una sola técnica que ya se usó en la tarea anterior.

Técnica $\hat{o}_{15}$: *Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.*

Esta técnica se basa en expresar la cantidad que se reparte (24 kilos de arroz) entre el número de partes (48 bolsas) como una fracción cuyo numerador es la cantidad de partes a distribuir y el denominador el número de partes, esto es

$24 \div 48 = \frac{24}{48}$. En esta tarea el numerador es menor que el denominador y en este caso permitirá simplificar esta fracción obteniéndose $\frac{1}{2}$ que en el contexto del problema representa medio kilo de arroz.

Tecnología θ_{11}: Significado de fracción como cociente.

El discurso que justificaría esta técnica es el significado de fracción como cociente cuyos vestigios se hallan en la técnica usada.

- ***Tarea $t_{4,3}$**: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes que es divisor del total.*

Para esta tarea hemos identificado tres problemas los cuales aparecen en el Cuaderno de Trabajo bajo el título de *Expresamos la fracción como cociente.* Estos problemas permiten la partición de cantidades discretas y obtener como resultado de la división un número entero. A continuación, mostramos un ejemplo representativo.

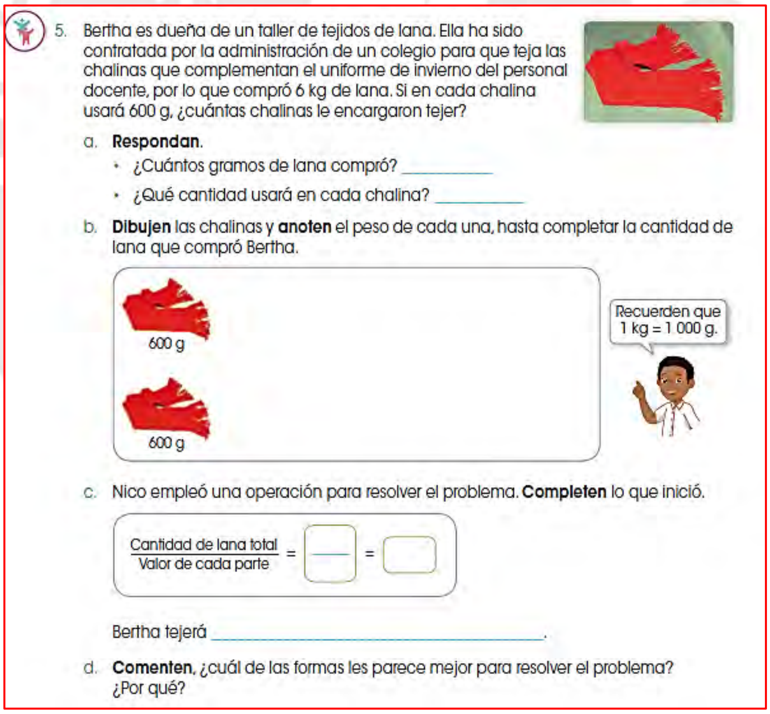


Figura 60. Distribución de unidades continuas 3

Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 101)

Al igual que la tarea anterior, para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo propone dos técnicas, una gráfica y otra operativa que luego pedirá analizar su economía y alcance usando el ítem d.

Técnica $\hat{o}_9$: *Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo en el ítem b indica dibujar una cantidad de chalinas de 600g cada una de tal forma que sus pesos sumen 6000g. Esta técnica que hemos denominado *dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes* está basada en la técnica de la *partición y doble conteo de las partes* para unidades discretas trabajada en el Cuaderno de Trabajo de 5to de primaria.

Técnica $\hat{o}_{15}$: *Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo en el ítem c indica expresar la división del peso total de la lana disponible (6000g) por el peso de cada chalina (600g) utilizando la notación fraccionaria obteniéndose como cociente un número entero.

Tecnología θ_{11}: Significado de fracción como cociente.

El discurso que justificaría esta técnica es el significado de fracción como cociente cuyos vestigios se hallan en la técnica usada.

- ***Tarea*** $t_{4,4}$: *Distribuir equitativamente unidades discretas entre un número de partes.*

Para esta tarea hemos identificado tres problemas los cuales aparecen en el Cuaderno de Trabajo bajo el título de *Expresamos la fracción como cociente.* Estos problemas permiten la partición de cantidades discretas y obtener como resultado de la división un número entero. A continuación, mostramos un ejemplo representativo.

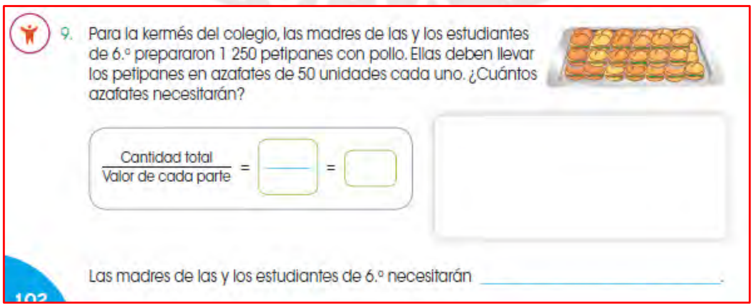


Figura 61. Distribución de unidades discretas
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 101)

Al igual que la tarea anterior, para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo propone una única técnica que explicamos a continuación.

Técnica $\hat{o}_{15}$: *Expresar la división de dos números naturales como una fracción.*

Esta técnica consiste en expresar la división la cantidad total a repartir (1250 petipanes) por el número de partes (50 petipanes) utilizando la notación fraccionaria obteniéndose como cociente un número entero.

Tecnología θ_{11}: Significado de fracción como cociente.

El discurso que justificaría esta técnica es el significado de fracción como cociente cuyos vestigios se hallan en la técnica usada.

Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

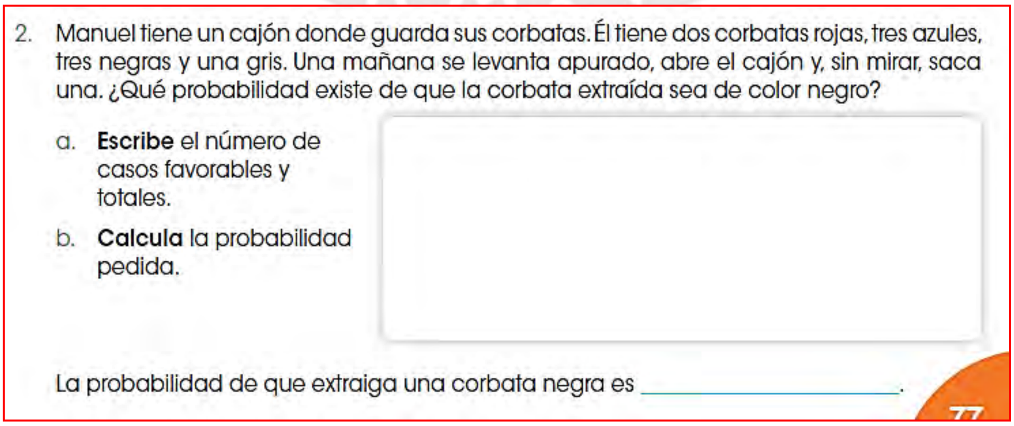
Esta tarea relaciona los significados de la fracción como relación parte – todo y fracción como cociente.

Tipo de tarea T_5: **Comparar dos magnitudes.**

Este tipo de tareas correspondientes al significado del número racional como razón aparecen con más frecuencia en este grado, haciéndose evidente el razonamiento proporcional el cual se trabajó en la unidad 3 de este mismo Cuaderno de Trabajo.

- ***Tarea*** $t_{5,1}$: *Calcular la probabilidad de un suceso.*

Para esta tarea disponemos de 8 problemas que se hallan en la unidad 4 y 8 del Cuaderno de Trabajo. A continuación, presentamos un ejemplo hallado en la unidad 4 en la página 77.


2. Manuel tiene un cajón donde guarda sus corbatas. Él tiene dos corbatas rojas, tres azules, tres negras y una gris. Una mañana se levanta apurado, abre el cajón y, sin mirar, saca una. ¿Qué probabilidad existe de que la corbata extraída sea de color negro?

a. **Escribe** el número de casos favorables y totales.

b. **Calcula** la probabilidad pedida.

La probabilidad de que extraiga una corbata negra es ________________.

77

Figura 62. Jugamos al azar
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 77)

Técnica $\hat{o}_{16}$: *Doble conteo de las partes y simplificación.*

A pesar de que la tarea pertenece a la concepción de razón es necesario movilizar la técnica del doble conteo de las partes para un todo discreto que es la técnica fundamental del significado de fracción como relación parte - todo.

Por ello primero se contarán el número de casos favorables sumando el total de corbatas rojas, azules, negras y grises obteniéndose 9 elementos. En segundo lugar, se contarán los casos favorables que son 3 y finalmente se escribirá en forma de fracción 3/9 o su equivalente 1/3, que en este caso pierde significado con respecto al problema.

Tecnología θ_7 ***- Teoría*** Θ_2: *Definición de probabilidad clásica.*

Los vestigios de este discurso tecnológico - teórico se hallan en otra página del Cuaderno de Trabajo analizado, el cual mostramos a continuación.

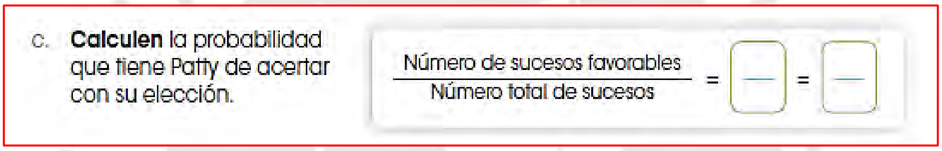


Figura 63. Definición de probabilidad
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 155)

- ***Tarea*** $t_{5,2}$: *Escribir la razón que relacionan dos magnitudes.*

Para esta tarea registramos 3 problemas de los cuales mostramos el problema 2 de la página 63 del Cuaderno de Trabajo.

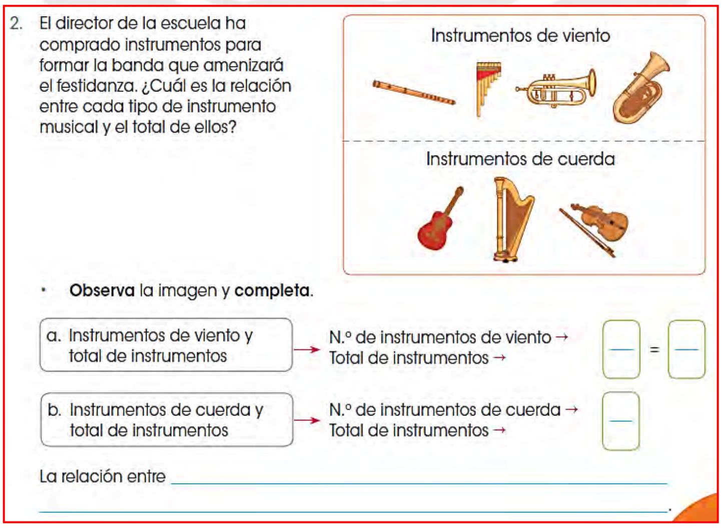
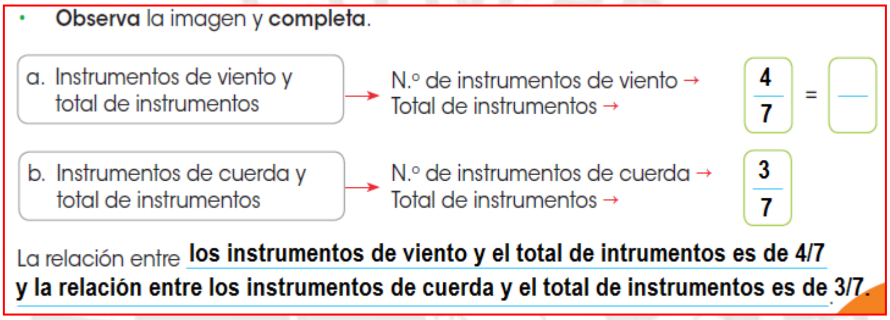


Figura 64. Comparación de la cantidad de instrumentos musicales.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 63)

Técnica $\hat{\mathbf{o}}_{15}$: *Doble conteo de las partes y simplificación.*

Según el Cuaderno de Trabajo, el estudiante debe contar la cantidad total de instrumentos, la cantidad de instrumento de viento y de cuerda para luego escribir en los recuadros dichas cantidades obteniendo las razones 4/7 para los instrumentos de viento y 3/7 para los instrumentos de cuerda.

Debemos mencionar que en este ejemplo no se pueden simplificar ambas fracciones porque ya son irreductibles, notándose así un error en la *pregunta a* pues la fracción 4/7 es irreductible, sin embargo, se coloca un recuadro para su fracción simplificada. La resolución de esta tarea se observa en la siguiente imagen.



Debemos mencionar que en otros problemas de esta tarea se usa la técnica del $\hat{\mathbf{o}}_{16}$: Doble conteo de las partes y simplificación.

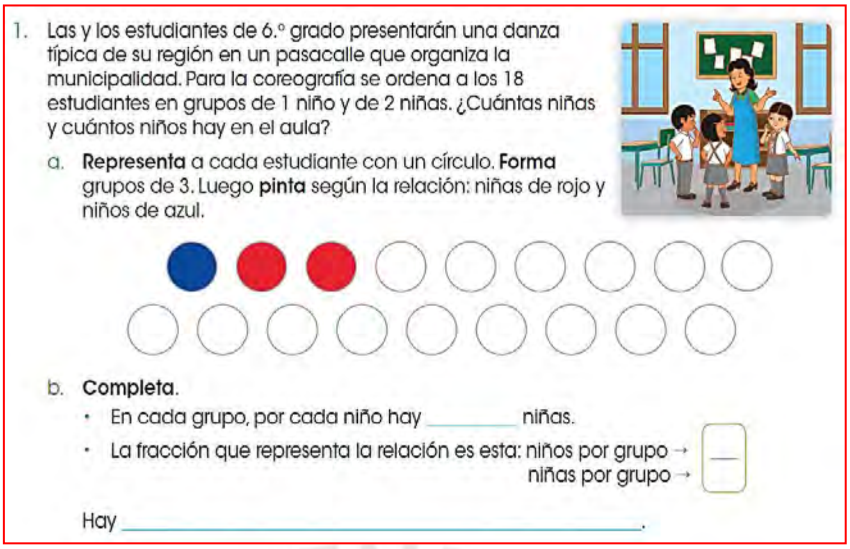
A pesar de que la tarea esté vinculada a comparar el número de instrumentos de un determinado tipo y el total moviliza también moviliza el significado del número racional como relación parte – todo, siendo este último un caso especial del significado de razón tal y como lo afirma Kieren (1980).

Tecnología θ_{12} **-** ***Teoría*** Θ_3: **Razones y proporciones**

El discurso tecnológico – teórico no se halla en el Cuaderno de Trabajo analizado, sino en las páginas 132 – 133 del texto escolar Matemática 6 (2012).

- ***Tarea*** $t_{5,3}$: *Dada la razón entre dos magnitudes y su suma, hallar el valor de ellas.*

Para esta tarea solo tenemos un problema el cual se halla en la sección titulada *Expresamos relaciones usando fracciones* en la página 63 del Cuaderno de Trabajo.


1. Las y los estudiantes de 6.º grado presentarán una danza típica de su región en un pasacalle que organiza la municipalidad. Para la coreografía se ordena a los 18 estudiantes en grupos de 1 niño y de 2 niñas. ¿Cuántas niñas y cuántos niños hay en el aula?

a. **Representa** a cada estudiante con un círculo. **Forma** grupos de 3. Luego **pinta** según la relación: niñas de rojo y niños de azul.

b. **Completa.**
- En cada grupo, por cada niño hay ________ niñas.
- La fracción que representa la relación es esta: niños por grupo → niñas por grupo →

Hay ________________________________.

Figura 65. Comparando el número de varones y mujeres de un grupo.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 63)

Técnica $\hat{o}_{17}$: *División de números naturales y conteo*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo hace explícito una serie de pasos que se debe seguir.

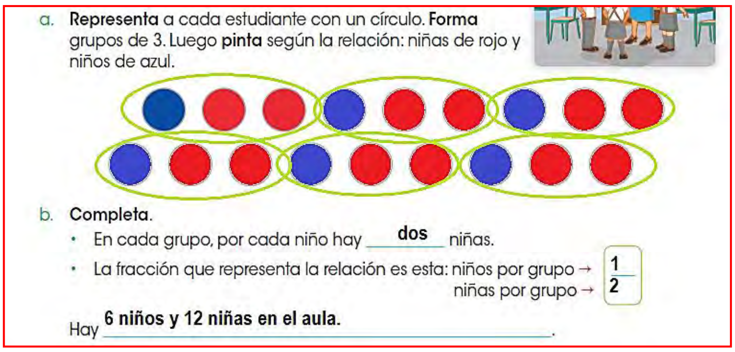
Paso 1: Agrupar los 18 círculos en grupos de 3, obteniendo 6 grupos.

Paso 2: Colorear los círculos en cada grupo teniendo en cuenta la relación 1 a 2, así pues, un círculo de color azul representará a los niños y dos círculos de color rojo que representarán a las niñas.

Paso 3: Expresar la relación que se observa en cada grupo usando la fracción 1/2, donde el numerador representa la cantidad de niños por grupo y el denominador la cantidad de niñas por grupo formado.

Paso 4: Para dar respuesta la pregunta se debe contar cuántos círculos de color azul hay y cuántos de color rojo en total.

A continuación, se ilustra la resolución de la tarea.


a. **Representa** a cada estudiante con un círculo. **Forma** grupos de 3. Luego **pinta** según la relación: niñas de rojo y niños de azul.

b. **Completa.**
- En cada grupo, por cada niño hay **dos** niñas.
- La fracción que representa la relación es esta: niños por grupo → 1; niñas por grupo → 2

Hay **6 niños y 12 niñas en el aula.**

Es necesario mencionar la fracción 1/2 permite relacionar la cantidad de niños y niñas que hay en cada grupo, teniendo un significado de número racional como razón y no como relación parte – todo.

Por otro lado, para esta tarea $t_{4,2}$ por usarse otra técnica, que no figura en esta tarea, pero que se puede adoptar teniendo en cuenta la proporcionalidad que debe haber en el grupo total de estudiantes, esta técnica consiste en elaborar una tabla de proporcionalidad directa como la que se halla en la página 143 del Cuaderno de Trabajo. La técnica alternativa la mostramos a continuación.

$\times 3$

N° de niños	1	2	3	4	5	6
N° de niñas	2	4	6	8	10	12

$\times 3$

$$Luego: 6\,niños + 12\,niñas = 18$$

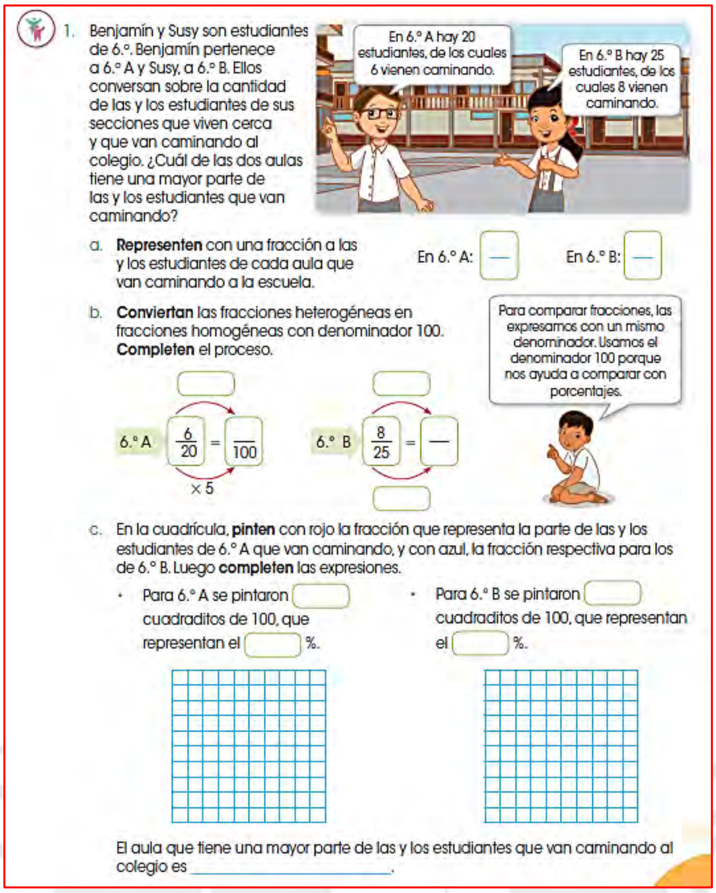
Tecnología θ_{12} ***- Teoría*** Θ_3: Razones y proporciones

El discurso tecnológico – teórico no se halla en el Cuaderno de Trabajo analizado, sino en las páginas 132 – 133 del texto escolar Matemática 6 (2012).

- ***Tarea*** $t_{5,4}$: *Hallar el porcentaje que representa una cantidad del total.*

Con respecto a esta tarea debemos mencionar que de acuerdo con nuestro MER en la página 69, el porcentaje es caso particular del significado razón, es decir se compara el valor a de una magnitud con respecto a 100 unidades y se forma una equivalencia de razones. En los Cuadernos de Trabajo de primaria se observa usualmente una representación fraccionaria para el porcentaje como $\frac{a}{100}$

A continuación, se presenta un ejemplo de esta tarea donde primero se moviliza el concepto de la fracción como relación parte – todo para representar la relación entre los estudiantes que vienen caminando al colegio y el total de alumnos de una sección, pero luego se asume concepto de fracción como razón para comparar ambas fracciones usando denominador 100 e introducir el concepto de porcentaje.



1. Benjamín y Susy son estudiantes de 6.°. Benjamín pertenece a 6.° A y Susy, a 6.° B. Ellos conversan sobre la cantidad de las y los estudiantes de sus secciones que viven cerca y que van caminando al colegio. ¿Cuál de las dos aulas tiene una mayor parte de las y los estudiantes que van caminando?

En 6.° A hay 20 estudiantes, de los cuales 6 vienen caminando.

En 6.° B hay 25 estudiantes, de los cuales 8 vienen caminando.

a. **Representen** con una fracción a las y los estudiantes de cada aula que van caminando a la escuela.

En 6.° A: $\frac{\square}{\square}$ En 6.° B: $\frac{\square}{\square}$

b. **Conviertan** las fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas con denominador 100. **Completen** el proceso.

Para comparar fracciones, las expresamos con un mismo denominador. Usamos el denominador 100 porque nos ayuda a comparar con porcentajes.

6.° A $\frac{6}{20} = \frac{\square}{100}$ × 5

6.° B $\frac{8}{25} = \frac{\square}{\square}$

c. En la cuadrícula, **pinten** con rojo la fracción que representa la parte de las y los estudiantes de 6.° A que van caminando, y con azul, la fracción respectiva para los de 6.° B. Luego **completen** las expresiones.

- Para 6.° A se pintaron ☐ cuadraditos de 100, que representan el ☐ %.
- Para 6.° B se pintaron ☐ cuadraditos de 100, que representan el ☐ %.

El aula que tiene una mayor parte de las y los estudiantes que van caminando al colegio es ____________________.

Figura 66. Reconocemos cuántos de cada cien

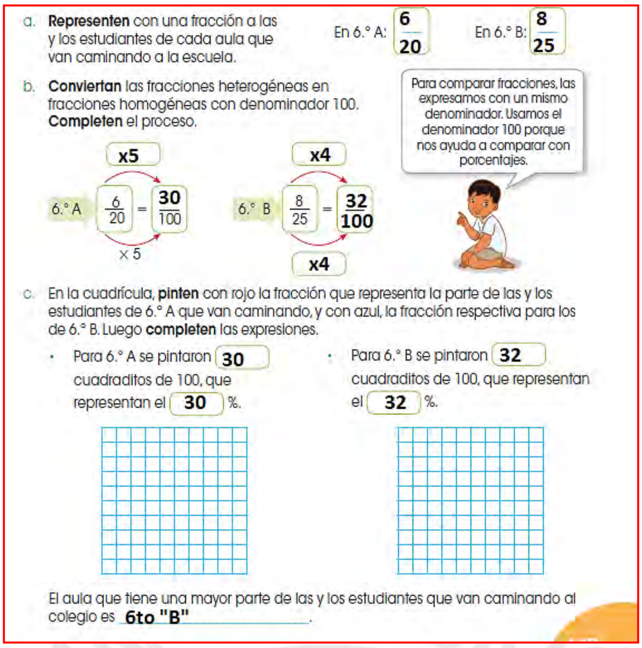
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 137)

Técnica $\hat{o}_{18}$: *Doble conteo de las partes y uso de fracciones equivalentes con denominador 100.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo de 6to grado de Primaria propone representar con una fracción a los estudiantes de cada aula que va caminando a la escuela y luego convertir las fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas con denominador 100 usando la técnica de amplificación de fracciones.

Finalmente se comparar ambas fracciones decimales para establecer qué aula tiene la mayor parte de alumnos que van caminando a la escuela.

A continuación, se ilustra la resolución de la tarea.



Tecnología θ_{12} ***- Teoría*** Θ_3: Razones y proporciones

El discurso tecnológico – teórico no se halla en el Cuaderno de Trabajo analizado, sino en la página 144 del texto escolar Matemática 6 (2012). Así pues, la técnica usada se ve justificada por la interpretación de porcentaje como una razón que expresa el número de partes tomadas de un total dividido en 100 partes iguales, así como su forma de representación como una fracción con denominador 100.

- ***Tarea*** $t_{5,5}$: Expresar en porcentaje la región sombreada de una figura dividida en partes iguales.

Para esta tarea solo registramos dos problemas que se hallan en la página 139 de los cuales mostramos el problema 2.

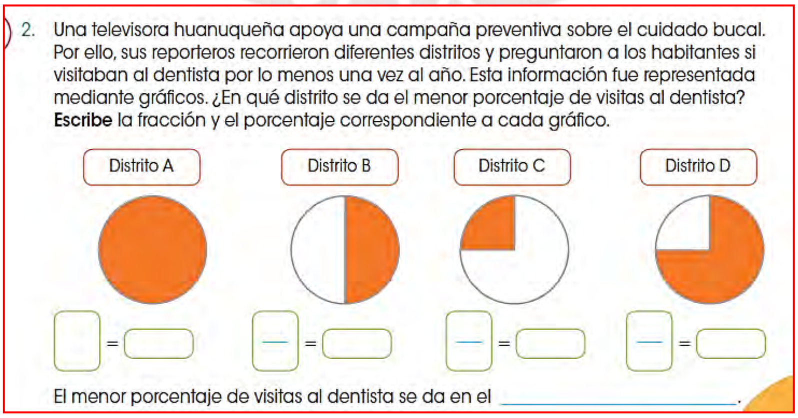


Figura 67. Expresamos porcentajes
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 139)

Técnica $\hat{o}_{19}$: *Doble conteo de las partes y dividir el numerador entre el denominador de la fracción.*

Para resolver esta tarea el Cuaderno de Trabajo sugiere aplicar primero el doble conteo de las partes y escribir la fracción en el primer recuadro de cada figura, luego dividir el numerador entre el denominador de la fracción para obtener la representación decimal.

Tecnología θ_{12} **-** ***Teoría*** Θ_3: Razones y proporciones

El discurso tecnológico – teórico no se halla en el Cuaderno de Trabajo analizado, sino en la página 144 del texto escolar Matemática 6 (2012) donde se aborda el concepto de porcentaje como un tipo de razón.

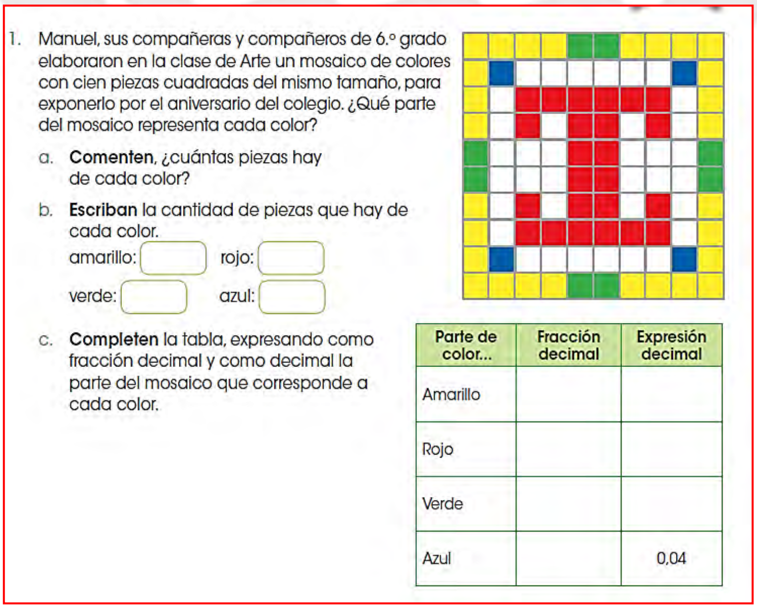
Significado de la fracción presente en este tipo de tarea:

Esta tarea relaciona los significados de la fracción como relación parte – todo y fracción como razón.

Tipo de tarea T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.

- ***Tarea*** $t_{6,1}$: *Convertir una fracción decimal en número decimal.*

Para esta tarea registramos un solo problema que pertenece a la unidad 5 de la página 85 el cual será nuestro ejemplo.



1. Manuel, sus compañeras y compañeros de 6.º grado elaboraron en la clase de Arte un mosaico de colores con cien piezas cuadradas del mismo tamaño, para exponerlo por el aniversario del colegio. ¿Qué parte del mosaico representa cada color?

a. **Comenten**, ¿cuántas piezas hay de cada color?

b. **Escriban** la cantidad de piezas que hay de cada color.

amarillo: ____ rojo: ____

verde: ____ azul: ____

c. **Completen** la tabla, expresando como fracción decimal y como decimal la parte del mosaico que corresponde a cada color.

Parte de color...	Fracción decimal	Expresión decimal
Amarillo		
Rojo		
Verde		
Azul		0,04

Figura 68. Comparación de la cantidad de instrumentos musicales.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 85)

Técnica $\hat{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{12a}}$: *Doble conteo de las partes + Equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal.*

Esta técnica tiene la codificación de $\hat{o}_{12a}$ ya que consideraremos como variante de la técnica $\hat{o}_{12b}$ en tanto que tienen los mismos pasos, pero en orden inverso, es decir la técnica $\hat{o}_{12b}$ se enuncia como *Equivalencia entre fracción decimal y número decimal* + *doble conteo de las partes.*

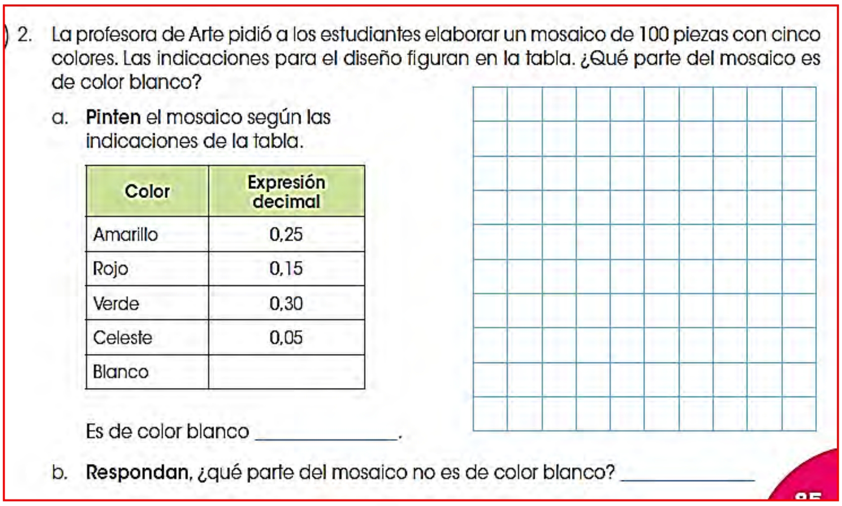
Para resolver el ejemplo de la tarea $t_{6,1}$ se debe contar las partes pintadas de cada color, luego completar la tabla escribiendo la fracción decimal que representa cada color usan do el doble conteo de las partes, por ejemplo, el color verde representa 8 partes de un total de 100, por lo tanto, su escritura será $\frac{8}{100}$, luego su expresión decimal será $0{,}08$ porque representa ocho centésimos. Del mismo modo se completa la tabla para los demás colores excepto el color azul donde solo es necesario usar el doble conteo de las partes ya que se pide expresar la parte pintada como fracción decimal.

Tecnología $\boldsymbol{\theta_8}$: Cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.

La técnica se ve justificada por el cambio de representación del número decimal como fracción decimal. Este discurso tecnológico no está en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado (2016) pero si lo hallamos en el texto escolar Matemática 6 (2012) en la página 68.

- ***Tarea*** $\boldsymbol{t_{6,2}}$: *Expresar un número decimal como fracción decimal*

Recordemos que esta tarea es la inversa de la tarea $\boldsymbol{t_{6,1}}$ y la técnica es la misma. Solo registramos un problema para esta tarea el cual se halla en la página 85 de la unidad 5 y lo mostramos a continuación.


2. La profesora de Arte pidió a los estudiantes elaborar un mosaico de 100 piezas con cinco colores. Las indicaciones para el diseño figuran en la tabla. ¿Qué parte del mosaico es de color blanco?

a. **Pinten** el mosaico según las indicaciones de la tabla.

Color	Expresión decimal
Amarillo	0,25
Rojo	0,15
Verde	0,30
Celeste	0,05
Blanco	

Es de color blanco ____________.

b. **Respondan**, ¿qué parte del mosaico no es de color blanco? ____________

Figura 69. Conversión de decimal a fracción decimal.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 85)

Técnica $\hat{o}_{12b}$: *Equivalencia entre fracción decimal y número decimal + doble conteo de las partes.*

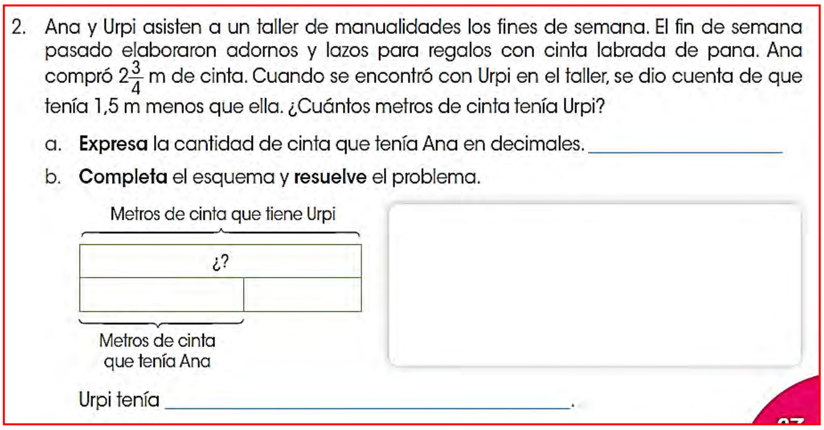
Para resolver la tarea es necesario realizar la conversión de decimal a fracción usando la equivalencia de fracción decimal y número decimal, por ejemplo 0,15 podrá ser escrito como $\frac{15}{100}$ .Luego usando el doble conteo de las partes se pintará 15 cuadriculas de rojo de un total de 100.

Tecnología θ_8: Cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa.

La técnica se ve justificada por el cambio de representación del número decimal como fracción decimal. Este discurso tecnológico no está en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado (2016) pero si lo hallamos en el texto escolar Matemática 6 (2012) en la página 68.

- ***Tarea*** $t_{6,3}$: *Convertir una fracción en una expresión decimal y realizar operaciones con decimales.*

Para esta tarea tenemos 5 problemas que se hallan en la unidad 5. Debemos mencionar que esta tarea incluye a la tarea $t_{5,1}$ que consistía en *Expresar una fracción decimal en número decimal.* A continuación, mostramos el problema 2 de la página 87.



2. Ana y Urpi asisten a un taller de manualidades los fines de semana. El fin de semana pasado elaboraron adornos y lazos para regalos con cinta labrada de pana. Ana compró $2\frac{3}{4}$ m de cinta. Cuando se encontró con Urpi en el taller, se dio cuenta de que tenía 1,5 m menos que ella. ¿Cuántos metros de cinta tenía Urpi?

a. **Expresa** la cantidad de cinta que tenía Ana en decimales. ____________

b. **Completa** el esquema y **resuelve** el problema.

Urpi tenía ______________________.

Figura 70. Problemas con fracciones y decimales.

Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 87)

Para resolver esta tarea es necesario usar dos técnicas de forma secuencial que hemos considerado como una sola técnica.

***Técnica* $\hat{o}_{20}$**: *Equivalencia entre una fracción a número decimal y sumar o restar números decimales.*

Primero se convierte la fracción mixta a número decimal para ello se separa la parte entera de la fraccionaria y se divide el numerador por el denominador, así:

$2 + \frac{3}{4} = 2 + 0{,}75 = 2{,}75m$. La expresión “Ana tenía $1{,}5m$ menos que Urpi” se traduce a que Urpi tenía $1{,}5m$ más que Ana, por tanto, la operación a realizar es una adición para obtener lo que tiene Urpi. Se completa con un cero los centésimos del segundo decimal y se procede a sumar. Luego Urpi tiene $4{,}25m$.

Tecnología θ_{13}: Cambio de representación de fracción a número decimal y operaciones con números decimales.

La técnica se ve justificada por el cambio de representación de una fracción a un número decimal y la adición de decimales. Este discurso tecnológico no está en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado (2016) pero si lo hallamos en el texto escolar Matemática 6 (2012) en las páginas 60 y 68.

A continuación, mostramos una tabla resumen que contiene la cantidad de tareas, técnicas y tecnologías, así como su ubicación en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado de primaria (2016).

Tabla 7: Tareas, técnicas y tecnologías halladas en el Cuaderno de Trabajo de 6to de primaria.

Tipo de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología	Número de problemas y su ubicación
T_3: Transformar cantidades por la acción de operadores fraccionarios.	$t_{3,1}$: Transformar una cantidad entera por la acción de una fracción.	$\hat{o}_2$: Partición y doble conteo de las partes. $\hat{o}_{13a}$: Dividir entre el denominador de la fracción y multiplicar por el numerador de la fracción/ $\hat{o}_{13b}$: Multiplicar por el numerador de la fracción y dividir entre el denominador.	θ_9: Multiplicación de una fracción por un número entero.	1 (p. 65) 2 (p. 66) 3 y 4 (p. 67) 1 (p. 123) 3 (p. 126)
		$\hat{o}_{13a}$: Dividir entre el denominador de la fracción y multiplicar el resultado por el numerador		5 y 6 (p. 68) 2 (p. 123) 3 y 4 (p. 124)
	$t_{3,3}$: Dividir una fracción por un número entero.	$\hat{o}_2$: Partición y doble conteo de las partes. $\hat{o}_{14}$: Transformar la división en multiplicación por el inverso.	θ_{10}: División de una fracción por un número entero.	1 (p. 125) 5 (p.126)
T_4: Distribuir equitativamente unidades continuas o discretas en un número de partes.	$t_{4,1}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes menores que las unidades a dividir.	$\hat{o}_9$: Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes. $\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.	θ_4; Significado de fracción como cociente.	1 (p. 99) 3 y 4 (p. 100)
	$t_{4,2}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes mayores a las unidades a dividir.	$\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.		2 (p. 100)
	$t_{4,3}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes que es divisor del total.	$\hat{o}_9$: Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes. $\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.		5 y 6 (p. 100) 7 (p. 101)
	$t_{4,4}$: Distribuir equitativamente unidades discretas entre un número de partes.	$\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.		8 y 9 (p. 101)
T_5: Comparar dos cantidades de la misma magnitud.	$t_{5,1}$: Calcular la probabilidad de un suceso.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.	θ_7: Definición de probabilidad clásica.	1 y 2 (p. 77) 3 y 4 (p. 78) 1 y 2 (p. 155) 3 y 4 (p. 156)
	$t_{5,2}$: Escribir la razón que relacionan dos magnitudes.	$\hat{o}_{16}$: Doble conteo de las partes y simplificación.	θ_{12}: Razones y proporciones	2 (p. 63) 3 y4 (p. 64)
	$t_{5,3}$: Dada la razón entre dos magnitudes, hallar el valor de cada una de ellas.	$\hat{o}_{17}$:División de números naturales y conteo.		1 (p. 63)
	$t_{5,4}$: Hallar el porcentaje que representa una cantidad del total.	$\hat{o}_{18}$:Doble conteo de las partes y uso de fracciones equivalentes con denominador 100.		1 (p. 137) 2 y 3 (p. 138)
	$t_{5,5}$: Expresar en porcentaje la región sombreada de una figura dividida en partes iguales.	$\hat{o}_{19}$: Doble conteo de las partes + dividir el numerador entre el denominador de la fracción.		1 y 2 (p. 139)
T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.	$t_{6,1}$: Convertir una fracción decimal en número decimal.	$\hat{o}_{12a}$: Doble conteo de las partes + Equivalencia entre la fracción decimal y el número decimal	θ_{13}: Cambio de representación de fracción a número decimal y operaciones con números decimales.	1 (p. 85)
	$t_{6,2}$: Expresar un número decimal como fracción decimal	$\hat{o}_{12b}$: Equivalencia entre fracción decimal y número decimal + doble conteo de las partes.		2 (p. 85)
	$t_{6,3}$: Convertir una fracción en una expresión decimal y realizar operaciones con decimales.	$\hat{o}_{20}$: Equivalencia entre una fracción a número decimal y sumar o restar números decimales		1 y 2 (p. 87) 4 (p. 88)
4 tipos	14 tareas	12 técnicas	6 tecnologías	40 problemas

Fuente: Elaboración propia

Del análisis y la tabla mostrada podemos decir que la organización matemática del Cuaderno de Trabajo de 6to grado de primaria (2016) muestra el saber – hacer y rastros del saber. Es decir, el material didáctico presenta varios problemas (tareas) y las formas de cómo resolverlas (técnicas), así como vestigios de la justificación de las técnicas (tecnologías). Estos vestigios se hallan en muchos casos en las propias técnicas, por ejemplo, en la técnica que denominamos $\hat{o}_{14}$: *Transformar la división en multiplicación por el inverso* encontramos la forma de cómo dividir una fracción por un número entero.

Así mismo el texto escolar Matemática 6 (2012) proporciona algunos elementos tecnológicos para sustentar las técnicas usadas en este Cuaderno de Trabajo analizado tales como la definición de razón geométrica que permite asociarla a una representación fraccionaria.

Por otro lado, los significados asociados a la fracción que predominan en este Cuaderno de Trabajo son operador, cociente y razón, así como el cambio de representación de fracción decimal a número decimal y viceversa que se expresan en los tipos de tareas T_3, T_4 , T_5 y T_6 respectivamente, que se relacionan mediante el primer significado de fracción como relación parte – todo.

5.6 Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria

Como lo dijimos en un inicio de este capítulo la construcción de la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo, a la cual denominaremos en adelante con las iniciales OMCT, se realizará en base a las organizaciones matemáticas ya construidas para los Cuadernos de Trabajo de cada grado (3ero, 4to, 5to y 6to de primaria) con la finalidad de analizar su grado de completitud e identificar el modelo epistemológico dominante que forma parte del objetivo general de esta tesis.

En la Tabla 8 del Anexo de esta tesis estructuramos los tipos de tarea articulando las tareas, tecnologías y teorías encontradas en cada Organización Matemática de los Cuadernos de Trabajo de 3ero a 6to grado de primaria.

La OMCT construida acerca de los significados asociados a las fracciones nos proporciona una visión panorámica de la frecuencia de las tareas, técnicas y tecnologías empleadas en el nivel de educación primaria.

En cuanto a las teorías que sustentan las tecnologías debemos mencionar que dos de ellas las hemos hallado en los Textos Escolares Matemática 5 (2012) y Matemática 6 (2012) los cuales son textos de apoyo que utiliza el docente para la enseñanza de las fracciones en los grados de estudio respectivos. Las teorías consideradas son cuatro: relación de orden en los racionales, operaciones con números racionales, proporcionalidad y probabilidades.

Las dos primeras son exportadas del saber matemático formal y sirven para sustentar las tecnologías vinculadas a la comparación y operaciones con fracciones. Las dos últimas, proporcionalidad y probabilidades, se encuentran en el texto escolar Matemática 5 y Matemática 6 y sirven para justificar las tecnologías vinculadas a la definición de probabilidad clásica y la definición de razones y proporciones en las cuales la fracción es usada para el cálculo de probabilidades y para representar la razón de dos magnitudes.

Así mismo hemos debemos remarcar que no hemos considerado como teoría al significado de la fracción como relación parte – todo ya que no nace en la matemática misma. El doble conteo de las partes asociado a este significado es un recurso didáctico del docente para la introducción de las fracciones en la escuela primaria, ya que no encontramos esta técnica en los aspectos históricos – epistemológicos de la noción de número racional del capítulo IV de esta tesis.

La OMCT construida está compuesta por 147 problemas propuestos agrupados en 6 tipos de tarea, 26 tareas, 20 técnicas y 13 tecnologías y 4 teorías, las cuales se han ido desarrollando progresivamente en las organizaciones matemáticas de cada Cuaderno de Trabajo.

La técnica privilegiada para desarrollar estos 6 tipos de tarea es el doble conteo de las partes, siendo la técnica básica del primer tipo de tarea.

La OMCT construida es una Organización Matemática Global para esta institución que es el nivel de educación primaria, ya que se observan la presencia de más de una teoría: relación de orden en los racionales, operaciones con números racionales, proporcionalidad, probabilidades.

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE LA COMPLETITUD Y EL MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA COLECCIÓN DE CUADERNOS DE TRABAJO

En este capítulo analizamos el grado de completitud de la Organización Matemática de Colección de los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria (OMCT) usando los siete indicadores de completitud de una Organización Matemática Local (OML) propuestos por Fonseca. Luego, en base a los resultados de los indicadores y el MER descrito, identificamos el Modelo Epistemológico Dominante para los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria.

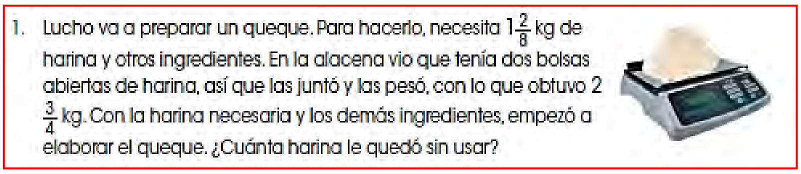
6.1 Con respecto al grado de completitud

- OML1: Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

La Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo no presentan tipos de tareas que integren otros tipos; sin embargo, se han identificado tareas que integran otras tareas propuestas previamente en el Cuaderno de Trabajo del grado correspondiente o en grados anteriores.

Tal es el caso de la tarea $t_{1,9}$ (sumar o restar fracciones de diferente denominador) propuesta en el Cuaderno de 5to de primaria cuya solución incluye la tarea $t_{1,7}$ (sumar o restar fracciones con el mismo denominador) propuesta en el Cuaderno de 4to de primaria.

A continuación, mostramos el ejemplo representativo de la tarea $t_{1,9}$ que se halla en la página 79 del Cuaderno de Trabajo de 5to de primaria.



1. Lucho va a preparar un queque. Para hacerlo, necesita $1\frac{2}{8}$ kg de harina y otros ingredientes. En la alacena vio que tenía dos bolsas abiertas de harina, así que las juntó y las pesó, con lo que obtuvo $2\frac{3}{4}$ kg. Con la harina necesaria y los demás ingredientes, empezó a elaborar el queque. ¿Cuánta harina le quedó sin usar?

Figura 71. Tarea integrada
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 79)

Para resolver esta tarea $t_{1,9}$ el Cuaderno de Trabajo propone dos técnicas explícitas: una gráfica, que hemos llamado $\hat{o}_4$ (uso de la tira de fracciones) y una simbólica que hemos denominado $\hat{o}_7$ (uso de fracciones equivalentes). En ambos casos se requiere el desarrollo de la tarea $t_{1,1}$ como parte de la técnica.

Las técnicas se muestran en el Cuaderno de Trabajo y el alumno deberá completarla.

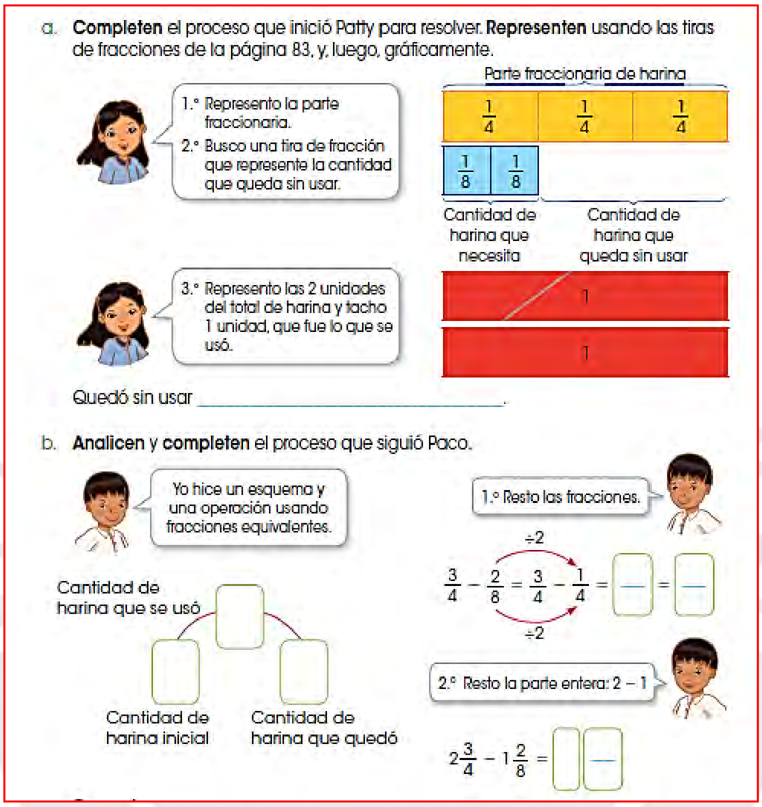


Figura 72. *Técnicas para la tarea integrada*
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 79)

Analicemos la técnica $\hat{o}_7$ (uso de fracciones equivalentes para resolver la tarea): Primero se debe completar un esquema escribiendo la cantidad de harina inicial $2\frac{3}{4}$ y como cantidad de harina que se usó $1\frac{1}{8}$, luego separar la parte entera de la parte fraccionaria en ambas fracciones mixtas, seguidamente convertir la fracción $\frac{2}{8}$ a la fracción equivalente $\frac{1}{4}$ dividiendo por dos el numerador y denominador, después restar las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{4}$ que ahora son homogéneas y que pertenecen a la tarea $t_{1,1}$. Finalmente se restan las partes enteras y se escribe la fracción mixta uniendo la parte entera con la parte fraccionaria de la resta anterior.

La siguiente tabla muestra algunas de las tareas integradas, la cantidad y su ubicación en la Colección de Cuadernos de Trabajo analizados.

Tabla 8. Tareas integradas

Tareas	Problemas propuestos	Ubicación
$t_{1,2} \subset t_{1,6}$ $t_{1,2}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica. $t_{1,6}$: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.	3a	(Matemática 3, p. 128)
	2a y 2b	(Matemática 4, p. 115)
	1 y 2	(Matemática 5, p. 61)
$t_{1,7} \subset t_{1,9}$ $t_{1,7}$: Hallar la suma o diferencia de fracciones de igual denominador. $t_{1,9}$: Hallar la suma y diferencia de fracciones con diferente denominador.	1 y 2	(Matemática 5, p. 65)
	3, 4 y 5	(Matemática 5, p. 66)
	1	(Matemática 5, p. 79)
	2	(Matemática 5, p. 80)
	3 y 4	(Matemática 5, p. 81)
	5 y 6	(Matemática 5, p. 82)
$t_{1,9} \subset t_{3,1}$ $t_{1,9}$:: Dividir el todo discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas. $t_{3,1}$:: Transformar un entero por la acción de una fracción.	1	(Matemática 4, p. 131)
	2	(Matemática 4, p. 132)
	1	(Matemática 5, p. 63)
	2 y 3	(Matemática 5, p. 64)
	1 y 2	(Matemática 5, p. 117)
	3, 4 y 5	(Matemática 5, p. 118)
	3	(Matemática 5, p. 150)
	2	(Matemática 5, p. 151)
	1	(Matemática 6, p. 65)
	2	(Matemática 6, p. 66)
	3 y 4	(Matemática 6, p. 67)
	1 y 2	(Matemática 6, p. 123)
	4	(Matemática 6, p. 126)
	5 y 6	(Matemática 6, p. 68)
	3 y 4	(Matemática 6, p. 124)

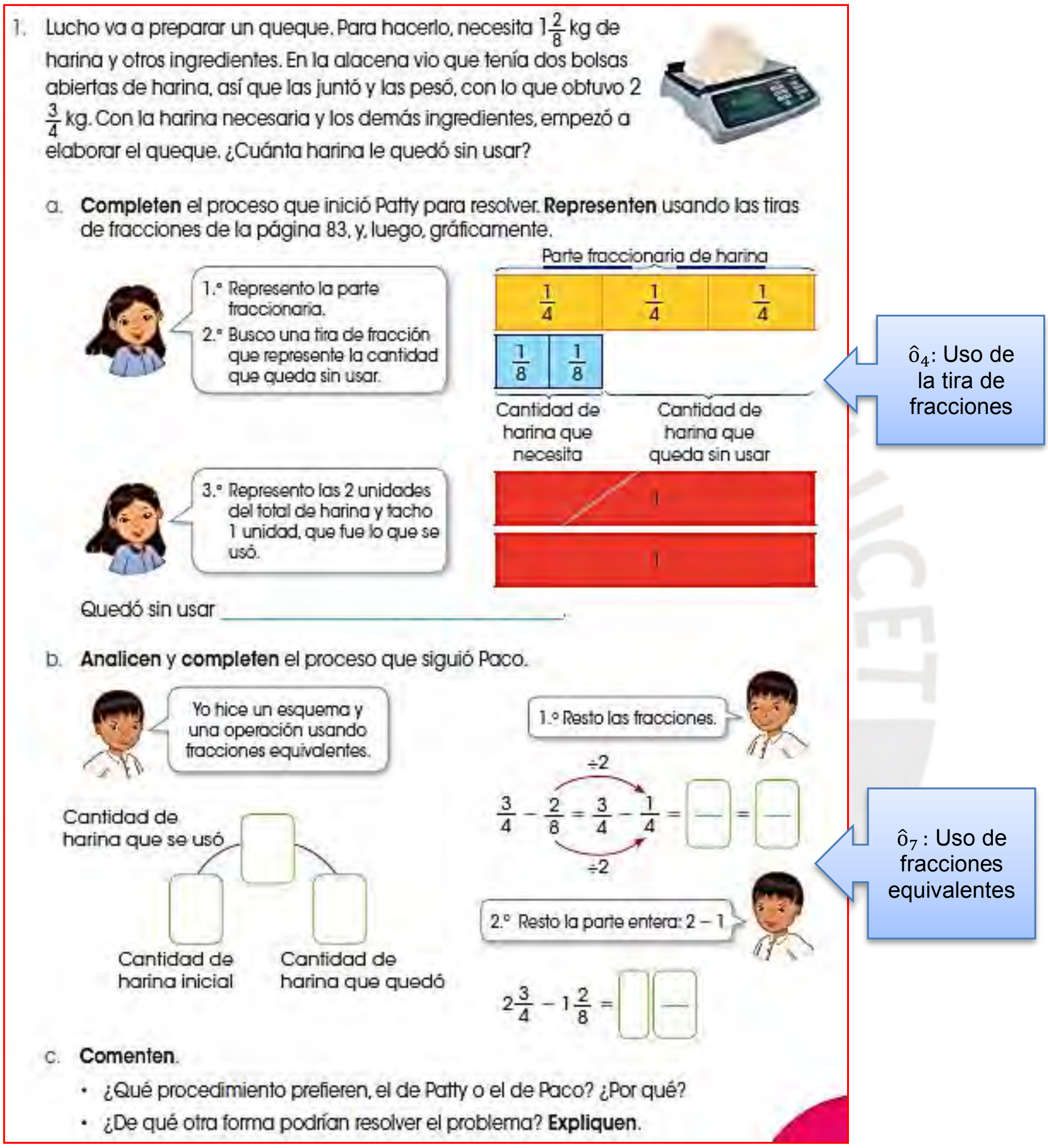
Fuente: Colección de Cuadernos de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria (2016)

Por otro lado, en cuanto a la presencia de tareas que cuestionen los elementos tecnológicos; esto es, que en nuestra OMCT figuren tareas donde se observe la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas; no hallamos ninguna tarea que cumpla con todos estos requisitos a la vez.

Sin embargo, la OMCT construida tiene tareas que permiten distinguir algunos de los elementos tecnológicos: economía (menor cantidad de pasos para resolver la tarea), fiabilidad (la técnica genera resultados precisos) y alcance (la técnica permite resolver la mayor cantidad de problemas de esa tarea). Estas tareas son $t_{1,9}$ (sumar o restar fracciones de diferente denominador),

$t_{3,1}$ (transformar un entero por la acción de una fracción) y $t_{3,2}$ (transformar una fracción por la acción de otra fracción).

A continuación, retomamos el ejemplo anterior de la tarea $t_{1,9}$ para analizar la economía, fiabilidad y alcance de la técnica.


1. Lucho va a preparar un queque. Para hacerlo, necesita $1\frac{2}{8}$ kg de harina y otros ingredientes. En la alacena vio que tenía dos bolsas abiertas de harina, así que las juntó y las pesó, con lo que obtuvo $2\frac{3}{4}$ kg. Con la harina necesaria y los demás ingredientes, empezó a elaborar el queque. ¿Cuánta harina le quedó sin usar?

a. **Completen** el proceso que inició Patty para resolver. **Representen** usando las tiras de fracciones de la página 83, y, luego, gráficamente.

Quedó sin usar ____________.

b. **Analicen** y **completen** el proceso que siguió Paco.

c. **Comenten.**

- ¿Qué procedimiento prefieren, el de Patty o el de Paco? ¿Por qué?
- ¿De qué otra forma podrían resolver el problema? **Expliquen.**

Figura 73. Tarea con cuestionamiento tecnológico
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 79)

Para resolver este ejemplo de la tarea $t_{1,9}$ el libro sugiere usar dos técnicas la $\hat{o}_4$ (uso de la tira de fracciones) y $\hat{o}_7$ (uso de fracciones equivalentes) que luego se cuestiona su fiabilidad y alcance a través de las preguntas del ítem c.

Del ejemplo podemos deducir que la técnica $\hat{o}_7$ es más fiable que la técnica $\hat{o}_4$ porque el resultado no depende de las “selección correcta de las tiras de fracciones” para realizar las operaciones, sino que depende de la sustracción de fracciones usando fracciones equivalentes para igualar denominadores.

Así mismo, la técnica $\hat{o}_7$ por ser simbólica tiene más alcance que la primera, ya que puede emplearse en varios contextos donde se requiera sumar o restar fracciones heterogéneas incluso acompañadas de un número entero sin necesidad de emplear un material concreto. Adicionalmente de plantea al estudiante en el ítem c proponer otra forma de resolver la tarea, que bien podría tener mayor alcance que las dos anteriores.

De lo anterior podemos concluir que el grado de completitud de la OMCT con respecto a este *indicador integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico es relativamente completa* por poseer varias tareas integradas y algunas tareas que cuestionan la economía, alcance y fiabilidad de las técnicas de manera implícita.

- OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.

Los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria se caracterizan por presentar más de una forma de resolución para una tarea. Tales así que en la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo (OMCT) podemos hallar tareas como $t_{1,7}$, $t_{1,9}$, $t_{2,1}$, $t_{3,1}$ y $t_{3,2}$ donde hay más de una técnica para resolverlas.

Por lo general estas tareas tienen dos formas de resolución: un procedimiento usando figuras y otro usando operaciones con fracciones de manera simbólica. Sij embargo a pesar de que se muestra las dos formas de resolución, en muchos casos el Cuaderno de Trabajo es el que determina la técnica a usar en los demás ejemplos de la tarea.

A continuación, ilustramos la tarea $t_{1,9}$ (sumar o restar fracciones de diferente denominador) que debe ser resuelta usando dos técnicas $\hat{o}_2$ (partición de la unidad y doble conteo de las partes) y $\hat{o}_7$ (usar fracciones equivalentes).

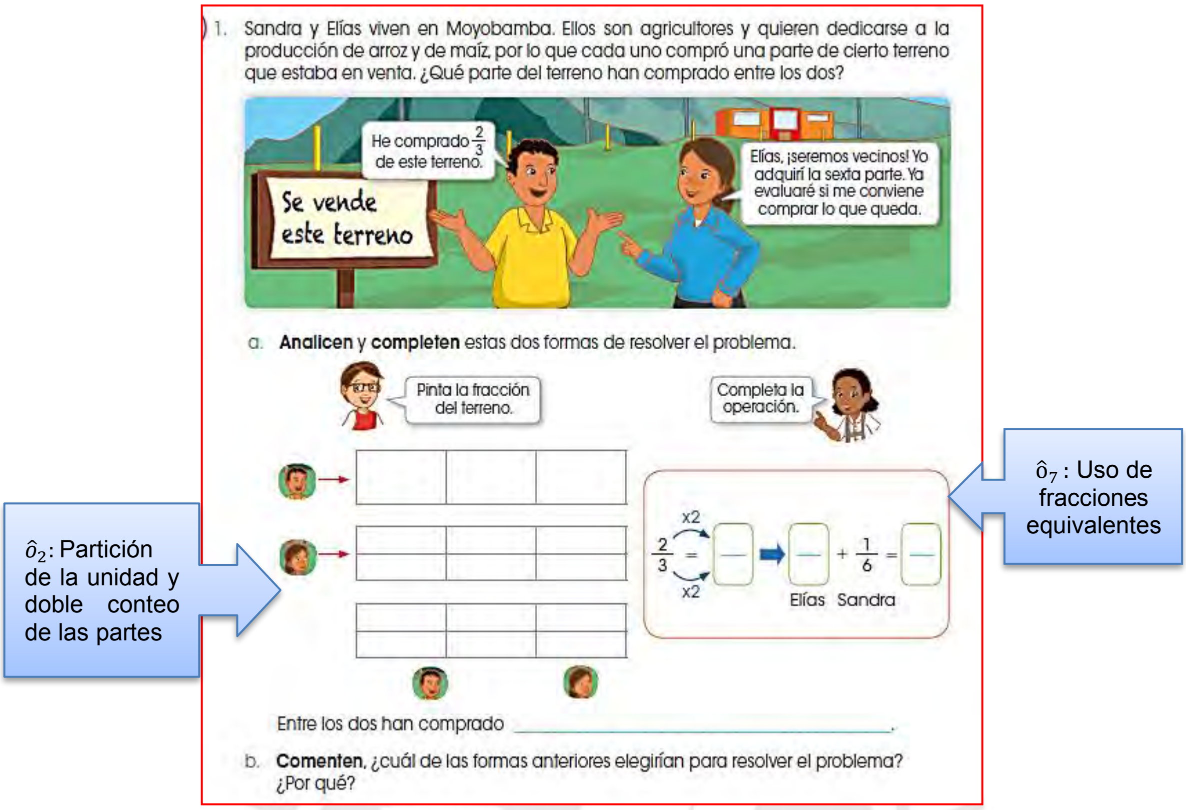


Figura 74. Existencia de dos técnicas para una misma tarea.
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 65)

A continuación, mostramos una tabla con las tareas que poseen dos o más técnicas de resolución y los problemas para cada tarea donde se observen las dos técnicas a usar. Es necesario recalcar que el nombre de las técnicas no figura como tal en el Cuaderno de Trabajo, sino que son propuestas de esta investigación.

Tabla 9. Tareas con más de una técnica

Tareas	**Técnicas empleadas**	**Número de problema**	**Ubicación**
$t_{1,7}$: Sumar o restar fracciones con el mismo denominador.	$\hat{o}_4$:Usar de la tira de fracciones / $\hat{o}_5$:Sumar o restar numeradores y colocar el mismo denominador.	1	(Matemática 4, p. 117)
		3 y 4	(Matemática 4, p. 118)
$t_{1,9}$: Sumar o restar fracciones de diferente denominador.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes) / $\hat{o}_7$ Uso de fracciones equivalentes.	1 y 2	(Matemática 5, p. 65)
		1	(Matemática 5, p. 79)
		3 y 4	(Matemática 5, p. 81)
		5 y 6	(Matemática 5, p. 82)
		1	(Matemática 5, p. 85)
		2	(Matemática 5, p. 86)
		4	(Matemática 5, p. 87)
$t_{2,1}$:: Comparar dos fracciones de diferente denominador.	$\hat{o}_8$: Uso de la recta numérica / $\hat{o}_7$: Uso de fracciones equivalentes.	2	(Matemática 5, p. 124)

$t_{3,1}$:Transformar un entero por la acción de una fracción.	$\hat{o}_2$: *Partición de la unidad y doble* / $\hat{o}_{10}$:División y multiplicación con soporte gráfico	1	(Matemática 5, p. 117)
	$\hat{o}_2$:Partición de la unidad y doble conteo de las partes. / $\hat{o}_{13a}$: Dividir por el denominador de la fracción y multiplicar por el numerador. /$\hat{o}_{13b}$: Multiplicar por el numerador y dividir por el denominador de la fracción.	1	(Matemática 6, p. 65)
		2	(Matemática 6, p. 66)
		1	(Matemática 6, p. 123)
$t_{3,2}$: Transformar una fracción por la acción de otra fracción.	$\hat{o}_2$:Partición de la unidad y doble conteo de las partes / $\hat{o}_{11}$: Multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones.	1 y 2	(Matemática 5, p. 119)
		3	(Matemática 5, p. 120)
		4	(Matemática 5, p. 121)

Fuente: Colección de Cuadernos de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria (2016)

Ahora en cuanto a los criterios para elegir una técnica con respecto a su fiabilidad (resultados precisos), economía (pocos pasos) y alcance (si logra resolver varias tareas con algunas variantes) está vinculada a la tecnología que sustenta la técnica empleada.

En el ejemplo anterior de la tarea $t_{1,9}$ (sumar o restar fracciones de diferente denominador) se observa una pregunta (ítem b) sobre cuál de las formas de resolución $\hat{o}_2$ (partición de la unidad y doble conteo de las partes) y $\hat{o}_7$ (usar fracciones equivalentes) escogería el alumno para abordar el problema y la razón de su elección. Esta pregunta implícitamente se vincularía a la economía y alcance y fiabilidad de la técnica $\hat{o}_7$.

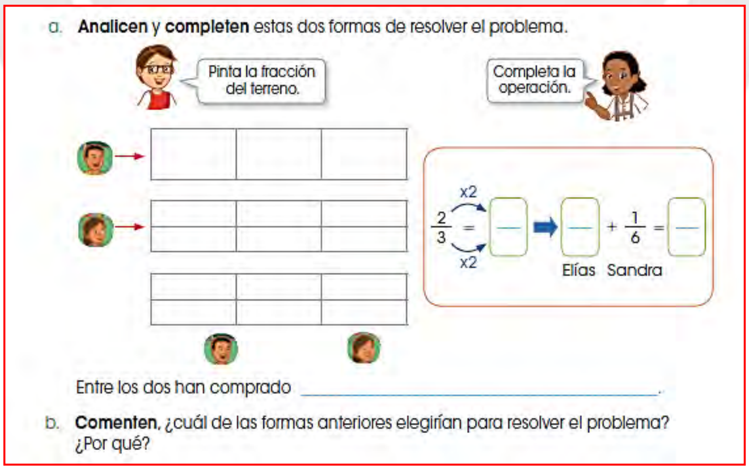


Figura 75. Cuestionamiento tecnológico
Fuente: Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. (2016, p. 65)

Desde nuestro punto de vista para que existan criterios explícitos es necesario que en el Cuaderno de Trabajo planteen preguntas para discernir cuál de las técnicas $\hat{o}_2$ / $\hat{o}_7$ es más fiable, por ejemplo ¿cuál de las dos formas de resolución permitirá obtener resultados precisos?; en cuanto a la economía de la técnica, sugerimos plantear la pregunta ¿cuál de las dos formas de resolución tiene menor cantidad de pasos?; en el caso del alcance de las técnicas, sugerimos preguntar ¿para qué tipos de fracciones podemos aplicar la primera forma ($\hat{o}_2$) y la segunda forma ($\hat{o}_7$)?, ¿la segunda forma ($\hat{o}_7$) podrá resolver problemas donde las fracciones no tengan denominadores que sean múltiplos de otro? Luego no hemos hallado criterios explícitos con respecto a la elección de una técnica en las tareas de la Colección de Cuadernos de Trabajo.

De lo anterior podemos concluir que el grado de completitud de la OMCT con respecto al indicador *diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas es menos completa* por poseer tareas con más de una técnica y ninguna tarea que contenga criterios explícitos para seleccionar la técnica en términos de su economía, alcance y fiabilidad.

- OML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.

En la Colección de los Cuadernos de Trabajo hemos identificado tareas como $t_{1,10}$, $t_{2,1}$, $t_{3,1}$, $t_{3,2}$ que evidencian una sola representación ostensiva para presentar las técnicas. Usualmente estas representaciones son las pictóricas y las aritméticas que siempre se presentan en el primer ejemplo de la tarea. Es más, en la mayoría de ejemplos de las tareas se le indica al estudiante que técnica y representación usar.

Un ejemplo de la tarea $t_{3,1}$ (transformar un número entero por la acción de una fracción) nos permitirá evidenciar estas dos representaciones y lo afirmado.

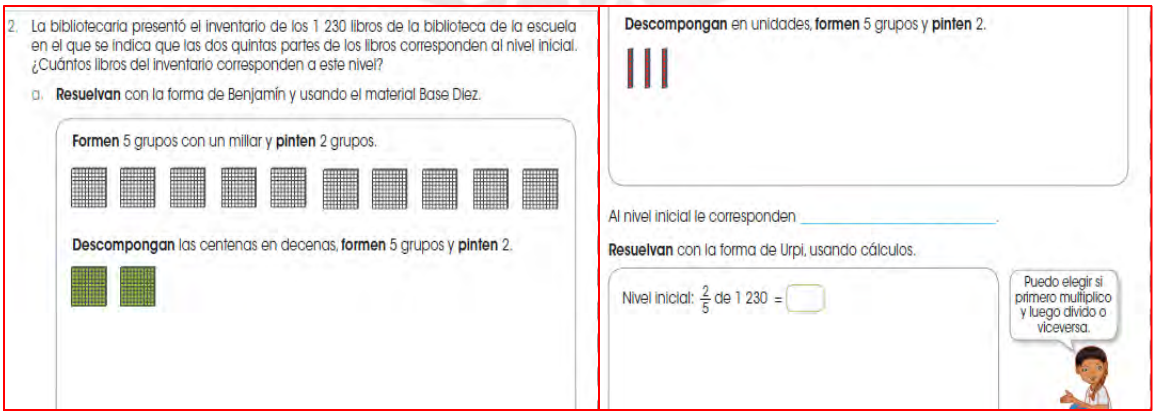


Figura 76. Técnica con ostensivos para hallar la fracción de un número
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 66)

El Cuaderno de Trabajo muestra dos técnicas para resolver esta tarea, las cuales hemos denominado $\hat{o}_2$ (partición de la unidad y doble conteo de las partes), $\hat{o}_{13a}$ (dividir por el denominador de la fracción y multiplicar por el numerador) / $\hat{o}_{13b}$ (multiplicar por el numerador y dividir por el denominador de la fracción).

La representación pictórica de la técnica $\hat{o}_2$ hace uso de la representación pictórica del material de base 10 y los pasos de esta técnica están pre determinados por medio de los dibujos. La técnica $\hat{o}_{13a}$ y su variante $\hat{o}_{13b}$ usa la representación aritmética ya que simbolizar la fracción dos quintos y 1230 permitirá realizar la operación de la multiplicación de la fracción por un número entero, en este caso la representación aritmética es la única forma de usar esta técnica.

En los ejemplos siguientes de esta tarea $t_{3,1}$ se le demarca al estudiante que técnica y representación usar, creando una dependencia entre la técnica y el ostensivo. A continuación, evidenciamos lo dicho mostrando los ejemplos de esta tarea que se halla en el Cuaderno de Trabajo de 6to grado.

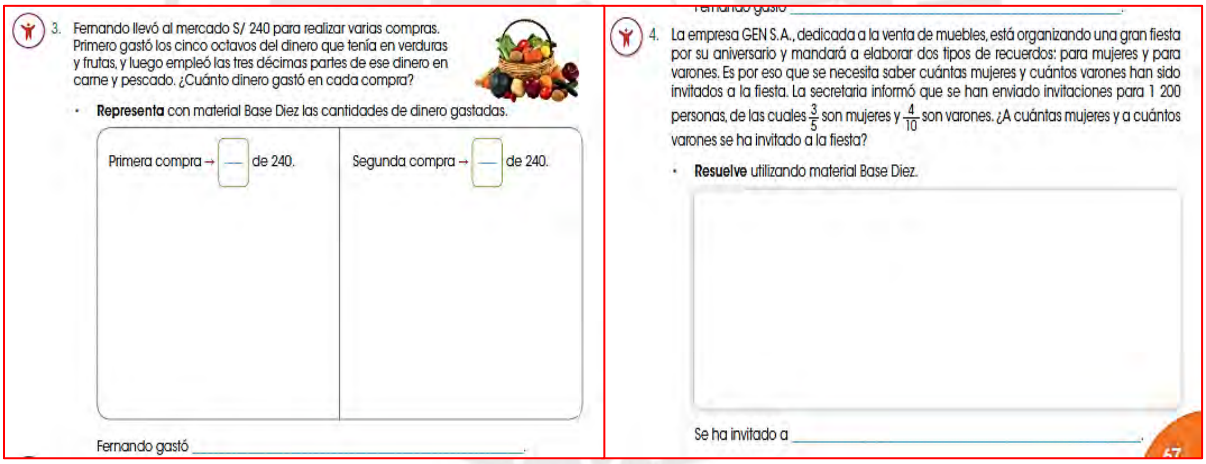


Figura 77. Dependencia de los ostensivos para representar una técnica.
Fuente: Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. (2016, p. 67)

De lo anterior podemos concluir que este indicador con respecto a la *independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas no se cumple en nuestra OM* ya que posee tareas que tienen técnicas con una representación predeterminada, lo que impide dar libertad de elegir otra representación para la resolución de la misma.

➢ OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

En la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo hemos identificado muy pocas tareas inversas dentro de un tipo de tarea dado. Así mismo para resolverlas se emplean técnicas muy similares a las que se usaron en las tareas directas y en un solo caso hemos podido hallar técnicas inversas.

Tal es así es el caso de la tarea $t_{6,1}$: Convertir una fracción decimal como un número decimal (tarea directa) y la tarea $t_{6,2}$: Convertir un número decimal como fracción decimal (tarea inversa) que se resuelven con las técnicas $\hat{o}_{12a}$ y $\hat{o}_{12b}$ respectivamente y que son consideradas inversas por tener los mismos pasos, pero en orden contrario.

$\hat{o}_{12a}$: Doble conteo de las partes + equivalencia entre fracción decimal y número decimal (técnica directa) y $\hat{o}_{12b}$: Equivalencia entre fracción decimal y número decimal + doble conteo de las partes (técnica inversa).

La siguiente tabla muestra las tareas y las técnicas empleadas, así como su ubicación dentro de los Cuadernos de Trabajo.

Tabla 10. Tareas directas e inversas

Tipo de tarea	Tarea directa	Técnica	Ubicación	Tarea inversa	Técnica	Ubicación
T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas	$t_{1,3}$: Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.	Matemática 4 4a (p. 85)	$t_{1,4}$: Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes	Matemática 3 4 (p.130) Matemática 4 5a (p. 86)
T_5: Comparar dos magnitudes	$t_{5,2}$: Escribir la razón que relacionan dos magnitudes	$\hat{o}_{15}$: Conteo y simplificación / $\hat{o}_{16}$: Doble conteo de las partes y simplificación.	Matemática 6 2 (p.63) 3 y 4 (p.64)	$t_{5,3}$: Dada la razón entre dos magnitudes hallar el valor de cada una de ellas.	$\hat{o}_{17}$: División de números naturales y conteo.	Matemática 6 1 (p.63)
T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.	$t_{6,1}$: Convertir una fracción decimal como un número decimal.	$\hat{o}_{12a}$: Doble conteo de las partes + equivalencia entre fracción decimal y número decimal.	Matemática 5 1 (p.99) 2 (p.100) 1 (p.103) 2 (p.104) Matemática 6 1 (p.85)	$t_{6,2}$: Convertir un número decimal como fracción decimal.	$\hat{o}_{12b}$: Equivalencia entre fracción decimal y número decimal + doble conteo de las partes.	Matemática 5 3a (p.100) Matemática 6 2 (p.85)

Fuente: Elaboración propia

De lo anterior podemos concluir que el grado de completitud de la OMCT con respecto a la *existencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas es menos completa* por poseer sólo 3 tareas inversas de un total de 26 tareas, que en problemas propuestos equivalen a 5 de un total de 147 problemas.

- OML5. <u>Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas</u>

En nuestra Organización Matemática de las fracciones no se registran tareas que permitan interpretar el cómo funcionan las técnicas empleadas, tampoco se hallan tareas que permitan interpretar el resultado de aplicar dichas técnicas.

Por ejemplo, no hay tareas que pidan interpretar la técnica $\hat{o}_7$ uso de fracciones equivalentes porque no hay un discurso tecnológico – teórico explícito en los Cuadernos de Trabajo que lo sustente. *Por lo tanto, este indicador no se cumple en nuestra OM.*

- OML6. <u>Existencia de tareas matemáticas “abiertas”</u>

Según Fonseca (2004) las tareas abiertas incluyen datos e incógnitas no fijados desde un inicio y estas tareas pueden nacer en un contexto intra o extra matemático. De acuerdo con ello nuestra OM posee cinco problemas propuestos que son considerados tareas abiertas las cuales se registran en los Cuadernos de Trabajo de 3ero, 4to y 6to de primaria.

Un ejemplo de tarea abierta la podemos encontrar en la página 86 del Cuaderno de Trabajo de 4to de Primaria. Esta tarea proviene de una situación extramatemática más amplia el cual es la confección de chalinas que se halla en la misma página.

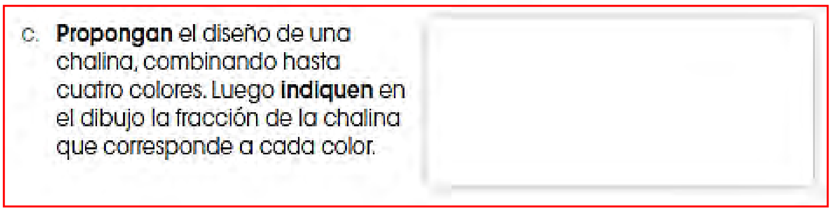

c. **Propongan** el diseño de una chalina, combinando hasta cuatro colores. Luego **indiquen** en el dibujo la fracción de la chalina que corresponde a cada color.

Figura 78. Tarea abierta
Fuente: Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. (2016, p. 86)

La condición general de este ejemplo consiste en dibujar una chalina dividida en partes iguales de tal manera que se combinen cuatro colores diferentes, por tanto, las fracciones que se obtengan pueden tener distintos denominadores, todo dependerá del número de partes en que se divida la chalina.

La siguiente tabla muestra la ubicación de las cuatro tareas abiertas de la OM.

Tabla 11. Tareas abiertas

Tipo de tarea	**Tarea**	**Problema propuesto**	**Ubicación**
T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.	$t_{1,2}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.	1b	(Matemática 3, p. 127)
		5c	(Matemática 4, p. 86)
	$t_{1,3}$: Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.	4b	(Matemática 4, p. 85)
	$t_{1,7}$: Sumar o restar fracciones con el mismo denominador.	5	(Matemática 4, p. 118)
T_5: Comparar dos magnitudes	$t_{5,2}$: Escribir la razón que relaciones dos magnitudes.	4	(Matemática 6, p. 64)

Fuente: Elaboración propia

De lo anterior podemos concluir que, al haber solo 5 problemas propuestos considerados como tareas abiertas de un total de 147 problemas propuestos, la presencia del indicador OML6 es mínima, por lo cual nuestra OM no cumple con este indicador.

- <u>OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.</u>

En cuanto a la integración de los elementos tecnológicos la mayoría de las tecnologías son generadas por una teoría matemática (operaciones con números racionales y relación de orden en los racionales) que no está presente en los Textos Escolares ni mucho menos en los Cuadernos de Trabajo por ser un nivel de educación primaria. Por ejemplo, la teoría de las operaciones con números racionales a través de las tecnologías que hemos denominado $\boldsymbol{\theta_2}$: Adición y sustracción de fracciones permitirían construir la técnica del mínimo común múltiplo para homogenizar denominadores donde uno de ellos no sea múltiplo de otro, que de por cierto no se observó en estos Cuadernos de Trabajo.

En la Colección de los Cuadernos de Trabajo no todas las tecnologías están integradas. A continuación, mostramos una tabla donde se observa la integración de las tecnologías para las teorías que se hallan implícitas.

Tabla 12. Integración de tecnologías – teorías.

Tecnología	Teoría
θ_2: Adición y sustracción de fracciones.	$\boldsymbol{\Theta_1}$: Operaciones con números racionales
θ_6: Multiplicación de fracciones.	
θ_{10}: División de una fracción por un número entero.	
θ_4: División de números naturales.	$\boldsymbol{\Theta_5}$: Operación con números naturales
θ_5 División y multiplicación de números naturales.	
θ_3: Comparación de fracciones	$\boldsymbol{\Theta_4}$: Relación de orden en los números racionales

Fuente: Elaboración propia

De lo anterior podemos concluir que el grado de completitud de la OMCT con respecto a la *interpretación de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica* es menos completa.

Luego de haber hecho el análisis sobre del grado de completitud de la OMCT construida usando los siete indicadores de completitud para las Organizaciones Matemáticas Locales (OML) podemos decir que nuestra OM es relativamente completa, pues cumple parcialmente cinco indicadores de un total de siete.

6.2 Con respecto al Modelo Epistemológico Dominante

Tomando en cuenta el Modelo Epistemológico de Referencia sobre los significados de las fracciones y los resultados obtenidos sobre del grado de completitud de la Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo, identificaremos las características del Modelo Epistemológico Dominante sobre la enseñanza de las fracciones en la Educación Primaria.

- La integración de las tareas de T_1 (Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas) con las tareas $T_2, T_3, T_4, T_5 \; y \; T_6$ asociadas a los significados de fracción como medida, operador, cociente, razón y la representación decimal como una extensión de la escritura fraccionaria respectivamente; muestran la predominancia del significado de fracción como relación parte – todo en la enseñanza de las fracciones en este nivel de educación básica. Así mismo la técnica del doble conteo de las partes, técnica básica del primer tipo de tarea, es usada para desarrollar la mayoría de tareas perteneciente a los cinco tipos de tareas restantes.

- Las tareas pertenecientes al tipo de tarea T_2 (Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submúltiplos de la unidad) no presentan el uso de la recta numérica que según nuestro MER es útil para la operación de adición de fracciones y facilitar la comprensión del concepto de fracciones mayores que la unidad. Así mismo las tareas del tipo T_3 (Transformar cantidades por la acción de una fracción) no contemplan el uso del todo continuo mediante la ampliación y reducción de figuras que contribuye a la comprensión de la fracción como un objeto matemático que transforma unidades continuas.
- La mayoría de tareas propuestas en la Colección de Cuadernos de Trabajo presentan dos formas de abordar la tarea; la primera está asociada a una representación gráfica, como dibujos de tortas rectangulares, cuadraditos, la tira de fracciones, barras y el material base 10; y la segunda forma está asociada a la representación simbólica de la fracción para realizar la comparación y operaciones con fracciones. Sin embargo, se privilegia los procedimientos usando gráficos e incluso en los Cuadernos de Trabajo de 5to y 6to de Primaria donde se supone un trabajo más simbólico para generalizar las operaciones con fracciones.
- Todos los problemas sobre fracciones se sitúan en un contexto extramatemático lo cual va de la mano con el énfasis en los procedimientos gráficos para resolverlos. Esto refuerza la idea de que las fracciones solo tienen un uso en situaciones cercanas a los estudiantes y no se descontextualiza para ser usados en otros ámbitos como son los puramente operativos que permiten la familiarización con las reglas operatorias de adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones.
- Otro aspecto predominante es el escaso uso de problemas con más de una respuesta, estos son las llamadas tareas abiertas. Solo se han hallado 5 problemas de un total de 147, lo cual afirma la idea de que los problemas matemáticos siempre tienen una única respuesta e incluso una sola forma de solución.

- Finalmente, el estudio de las fracciones en la Educación Primaria se vincula con otros campos temáticos como la proporcionalidad y a la probabilidad, en el caso de las tareas vinculadas al significado de la fracción como razón lo cual permite afianzar su uso en otros contextos.

De todas las características mostradas podemos afirmar que el Modelo Epistemológico Dominante asociado a los significados de las fracciones es similar al MER construido, ya que el significado de fracción como relación parte - todo está presente en los cinco tipos de tarea restante asociados a los significados de fracción como medida, operador, cociente, razón y la representación decimal como una extensión de la escritura fraccionaria. Además, se tiene la visión de una matemática pragmática donde toda tarea está asociada a un contexto extramatemático.

CONSIDERACIONES FINALES

La revisión de la literatura acerca de las fracciones, como una representación del número racional, nos permitió confirmar las dificultades que poseen los estudiantes de primaria y secundaria para trabajar con ellas; así mismo, nos facilitó reconocer los diferentes significados que puede tomar la representación $\frac{a}{b}$ en determinadas situaciones matemáticas.

A partir de los antecedentes planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuál es la Organización Matemática sobre los significados asociados a las fracciones presente en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática de Educación Primaria?* que luego lo expresamos en el siguiente objetivo general: Analizar una Organización Matemática de las unidades que contienen el tema de fracciones en una Colección de Cuadernos de Trabajo de Matemática del 3er grado al 6to grado de Primaria, para identificar el Modelo Epistemológico Dominante.

Para alcanzar nuestro objetivo empleamos una metodología basada en el estudio bibliográfico y el análisis de texto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) lo cual nos proporcionó una secuencia de seis pasos que desarrollamos exhaustivamente.

La articulación de los diversos trabajos de Kieren (1980), Behr et al. (1983) y Freudenthal (1983) nos permitió construir un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) sobre los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria. Esto nos consintió definir los tipos de tareas para construir una Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo y reconocer los significados que se trabajan con mayor predominancia y su articulación en la Educación Primaria.

Luego realizamos la construcción y análisis de las organizaciones matemáticas de los Cuaderno de Trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria y la Colección de Cuadernos de Trabajo en general. Seguidamente analizamos el grado de completitud de la Organización Matemática de Colección de Cuadernos de Trabajo y las características del Modelo Epistemológico Dominante sobre la enseñanza de las fracciones en la Educación Primaria.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) nos permitió identificar los tipos tareas, las tareas, técnicas y tecnologías que se hallan en los Cuadernos de Trabajo y de esta manera describir los criterios de completitud de la organización matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo e identificar que significados asociados a las fracciones son los más predominantes.

Como conclusiones finales consideramos lo siguiente:

La Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 3ero de primaria posee un tipo de tarea asociado al significado de fracción como relación parte – todo y cuya técnica predominante es el doble conteo de las partes y cuyo discurso tecnológico – teórico es el mismo significado de fracción al cual está asociado el tipo de tarea.

La Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 4to de primaria posee cuatro tipos de tarea asociados a los significados de fracción como relación parte – todo, medida, operador y cociente. Sin embargo, los tipos de tarea que predominan son los asociados al significado de fracción como relación parte – todo y medida.

La Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 5to de primaria posee cinco tipos de tarea asociados a los significados de fracción como relación parte – todo, medida, operador y razón, así como su representación decimal. Sin embargo, los tipos de tarea que predominan son los asociados al significado de fracción como relación parte – todo y operador y se nota la ausencia del tipo de tarea asociado al significado de medida.

La Organización Matemática del Cuaderno de Trabajo de 6to de primaria muestra una clara ausencia del primer tipo de atarea asociado al significado de fracción como relación parte – todo. Las tareas de este tipo se convirtieron en técnicas para los tres tipos de tarea asociados a los significados de fracción como operador, cociente y razón, así como su representación decimal. Los tipos de tarea que predominan son los asociados al significado de fracción como operador y razón.

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las organizaciones matemáticas evidencian que la Organización Matemática de los Cuadernos de Trabajo (OMCT) posee 6 tipos de tareas, 26 tareas, 20 técnicas y 13 tecnologías y 4 teorías, las cuales se han ido desarrollando progresivamente en las organizaciones matemáticas de cada Cuaderno de Trabajo.

Las características del Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre los significados asociados a las fracciones en la Educación Primaria mostró que la mayoría de tareas del tipo de tarea asociado al significado de fracción como relación parte – todo forman parte de la gran mayoría de tareas de los cinco tipos restantes, lo que confirma la teoría de los subconstructos del número racional de Kieren (1980) y Behr et al. (1983) los cuales postulan que existe una conexión entre el subconstructo de la representación fraccionaria del número racional como relación parte - todo con los de medida, operador, razón y cociente.

Sin embargo, en este MED, faltan incluir tareas que abarquen otros aspectos como el uso de la recta numérica, la medida de áreas usando un patrón de medida desconocido para la comprensión de la fracción como medida; así como la ampliación y reducción de figuras para ampliar la comprensión de la fracción como operador.

Finalmente, todos los problemas propuestos son de contexto extra matemático lo cual facilita la comprensión del concepto de fracción y por ende del concepto del número racional en niveles de estudio posteriores tal y como lo afirman nuestros antecedentes.

SUGERENCIAS

Proporcionar en 6to grado de primaria tareas que involucren más de un tipo de tarea de tal forma que se logre la conexión entre los cinco significados de la fracción, así como el uso de su representación decimal.

Construir un Modelo Epistemológico Alternativo sobre los significados asociados a los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria.

Construir una Organización Matemática de los Cuadernos de Trabajo de Educación Secundaria sobre los Números Racionales para observar la ampliación de las técnicas básicas empleadas para resolver las tareas de la Organización Matemática de los Cuadernos de Trabajo de Educación Primaria.

Analizar si los Cuadernos de Trabajo de Secundaria integran más de un tipo de tarea considerados para esta investigación.

REFERENCIAS

Almoloud, S. (2015) Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *Unión. Revista Iberoámericana de Educación Matemática*, *42*, 9-34. Recuperado de https://goo.gl/n4GTNs

Álvarez, V. (2016) *Análisis de la organización matemática de los números racionales en un texto de primero de secundaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/8071

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_2.html

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_1.html

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 89-113. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1636/

Borba, M. (2010). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.* São Paulo: Autentica.

Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1547

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, *19*(2), pp. 221-266. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/237274102

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* New York, Estados Unidos: Klumer Academic Plublishers.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria. (Tesis Doctoral, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*. *22*(2). pp. 5–34.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 14*(2), 203-231.

Gil, A. (2002). *Como elaborar projectos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

González, D. (2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones con alumnos de 12/13 años en Cantabria. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1

Kieren, T. (1980). *Recent Research on Number Learning.* Recuperado de https://eric.ed.gov/?id=ED212463

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* Madrid, España: Síntesis.

Matute, K. (2010). Concepciones matemáticas en los estudiantes de 7mo grado de la escuela normal mixta “Pedro Nufio” acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones (Tesis de Maestría). Recuperado de http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmckk9z3

Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 3. Texto Escolar de tercer grado de primaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 4. Texto Escolar de cuarto grado de primaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 5. Texto Escolar de quinto grado de primaria. Lima: El Nocedal S.A.C.

Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 6. Texto Escolar de sexto grado de primaria. Lima: El Nocedal S.A.C.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Matemática 3. Cuaderno de Trabajo de tercer grado de primaria. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Matemática 4. Cuaderno de Trabajo de cuarto grado de primaria. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Matemática 5. Cuaderno de Trabajo de quinto grado de primaria. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Matemática 6. Cuaderno de Trabajo de sexto grado de primaria. Lima.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6747

Sánchez, J. (Sin fecha). La Matemática en la India. Disponible en matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI. Volumen* (29), pp. 173-198.

Silva, M. J. (2005). *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* (Teses de Doutorado em Educação Matemática, Pontificia Universidade Católica de São Paulo). Recuperado de https://www.ime.usp.br/~iole/significados%20da%20fra%E7%E3o.pdf

Unidad de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (2015). *¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemáticas?* Informe para Docentes. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

Unidad de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (2013). *¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* Informe de evaluación de Matemática en sexto grado. Recuperado de http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4639

Valdez, V. (2008). Los conjuntos numéricos a través de la historia. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/buscar/documentos?querysDismax.DOCUMENTAL_TODO=Los+conjuntos+num%C3%A9ricos+a+trav%C3%A9s+de+la+historia

Vargas, C. (2003). La construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Revista de Ciencia y Tecnología* (14), 4-18.

ANEXO

Tabla 13: Organización Matemática de la Colección de Cuadernos de Trabajo (OMCT)

TIPO DE TAREA ($\boldsymbol{T}$)	TAREA ($\boldsymbol{t}$)	TÉCNICA ($\hat{\boldsymbol{o}}$)	Tecnología ($\boldsymbol{\theta}$)	Teoría (Θ)	3°	4°	5°	6°	TOTAL
T_1: Dividir el todo continuo o discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.	$t_{1,1}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y tomar una de las partes.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes.	$\boldsymbol{\theta}_1$: Significado de fracción como relación parte – todo.	Significado de fracción como relación parte – todo.	5	3	0	0	8
	$t_{1,2}$: Dividir el todo continuo en partes iguales y escribir la fracción que se indica.				2	5	0	0	7
	$t_{1,3}$: Escribir la fracción que representa las partes tomadas de un todo continuo dividido en regiones congruentes.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.			1	3	0	0	4
	$t_{1,4}$: Dado un todo continuo dividido en partes iguales pintar la fracción que se indica.				1	1	0	0	2
	$t_{1,5}$: Reconstrucción del entero.				1	0	0	0	1
	$t_{1,6}$: Escribir la fracción que representa una parte tomada de un todo continuo dividido en regiones no congruentes.	$\hat{o}_3$: Composición/descomposición y doble conteo de las partes.			1	1	2	0	4
	$t_{1,7}$: Sumar o restar fracciones con el mismo denominador.	$\hat{o}_4$: Uso de la tira de fracciones / $\hat{o}_5$: Sumar o restar numeradores y colocar el mismo denominador.	$\boldsymbol{\theta}_2$: Adición y sustracción de fracciones.	$\boldsymbol{\Theta}_1$: Operaciones con números racionales	0	4	0	0	4
	$t_{1,8}$: Dividir el todo discreto en partes iguales y tomar alguna de ellas.	$\hat{o}_1$: Doble conteo de las partes.			0	0	5	0	5
	$t_{1,9}$ Sumar o restar fracciones de diferente denominador.	$\hat{o}_2$: Partición de la unidad y doble conteo de las partes. / $\hat{o}_7$: Usar fracciones equivalentes	$\boldsymbol{\theta}_1$: Significado de fracción como relación parte – todo.	Significado de fracción como relación parte – todo.	0	0	19	0	19

T_2: Medir un objeto de una, dos o tres dimensiones usando submultiplos de la unidad.	$t_{2,1}$: Comparar dos fracciones de diferente denominador	$\hat{o}_4$:Uso de la tira de fracciones / $\hat{o}_8$: Uso de la recta numérica / $\hat{o}_7$: Uso de fracciones equivalentes.	$\boldsymbol{\theta_3}$: Comparación de fracciones	$\boldsymbol{\Theta_4}$: Relación de orden en los números racionales	0	6	5	0	11
	$t_{2,2}$: Medir la capacidad de un cuerpo usando submúltiplos de la unidad.	$\hat{o}_6$: Iteración de la unidad / $\hat{o}_2$:Partición de la unidad y doble conteo de las partes.	$\boldsymbol{\theta_4}$: División de números naturales.	$\boldsymbol{\Theta_1}$: Operación con números racionales	0	5	5	0	10
T_3: Transformar cantidades por la acción de una fracción.	$t_{3,1}$: Transformar una cantidad entera por la acción de una fracción.	$\hat{o}_2$:Partición de la unidad y doble conteo de las partes / $\hat{o}_{10}$:División y multiplicación con soporte gráfico / $\hat{o}_{13a}$: Dividir por el denominador de la fracción y multiplicar por el numerador. /$\hat{o}_{13b}$: Multiplicar por el numerador y dividir por el denominador de la fracción.	θ_5 División y multiplicación de números naturales.		0	2	10	11	23
	$t_{3,2}$: Transformar una fracción por la acción de otra fracción.	$\hat{o}_2$:Partición de la unidad y doble conteo de las partes / $\hat{o}_{11}$: Multiplicar el numerador y denominador de dos fracciones.	θ_6: Multiplicación de fracciones.		0	0	6	0	6
	$t_{3,3}$: Dividir una fracción por un número entero.	$\hat{o}_2$: Partición y doble conteo de las partes. $\hat{o}_{14}$: Transformar la división en multiplicación por el inverso.	θ_{10}: División de una fracción por un número entero.		0	0	0	2	2
T_4: Dividir equitativamente una cantidad entera en un número de partes.	$t_{4,1}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes menores que las unidades a dividir.	$\hat{o}_9$: Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes. $\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.	θ_4; Significado de fracción como cociente.	Significado de fracción como cociente.	0	1	0	3	4
	$t_{4,2}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes mayores a las unidades a dividir.	$\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.			0	0	0	1	1
	$t_{4,3}$: Distribuir equitativamente unidades continuas entre un número de partes que es divisor del total.	$\hat{o}_9$: Dividir todos los objetos en b partes iguales y tomar a partes. $\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.			0	0	0	3	3
	$t_{4,4}$: Distribuir equitativamente unidades discretas entre un número de partes.	$\hat{o}_{15}$: Expresar el cociente de dos números naturales como una fracción.			0	0	0	2	2

T_5: Comparar dos magnitudes	$t_{5,1}$: Calcular la probabilidad de un suceso.	$\hat{o}_1$:Doble conteo de las partes.	θ_7 Definición de probabilidad clásica.	$\boldsymbol{\Theta}_2$: Probabilidad clásica	0	0	4	8	12
	$t_{5,2}$: Escribir la razón que relacionan dos magnitudes.	$\hat{o}_{15}$: Conteo y simplificación / $\hat{o}_{16}$: Doble conteo de las partes y simplificación.	θ_{12} : Razones y proporciones	$\boldsymbol{\Theta}_3$: Proporcionalidad	0	0	0	3	3
	$t_{5,3}$: Dada la razón entre dos magnitudes, hallar el valor de cada una de ellas.	$\hat{o}_{17}$:División de números naturales y conteo.			0	0	0	1	1
	$t_{5,4}$: Hallar el porcentaje que representa una cantidad del total.	$\hat{o}_{18}$:Doble conteo de las partes + Uso de fracciones equivalentes con denominador 100.			0	0	0	3	3
	$t_{5,5}$: Expresar en porcentaje la región sombreada de una figura dividida en partes iguales.	$\hat{o}_{19}$: Doble conteo de las partes + equivalencia entre una fracción y un número decimal.			0	0	0	2	2
T_6: Convertir la escritura fraccionaria a la forma decimal y viceversa.	$t_{6,1}$: Convertir una fracción decimal como un número decimal.	$\hat{o}_{12a}$:Doble conteo de las partes + equivalencia entre fracción decimal y número decimal.	θ_{13}: Cambio de representación de fracción a número decimal y operaciones con números decimales.	$\boldsymbol{\Theta}_1$: Operaciones con números racionales	0	0	4	1	5
	$t_{6,2}$: Convertir un número decimal como una fracción decimal.	$\hat{o}_{12b}$: Equivalencia entre fracción decimal y número decimal + doble conteo de las partes.			0	0	1	1	2
	$t_{6,3}$: Convertir una fracción en una expresión decimal y realizar operaciones con decimales.	$\hat{o}_{20}$:Equivalencia entre una fracción a número decimal y sumar o restar números decimales			0	0	0	3	3
6 tipos de tareas	26 tareas	20 técnicas	13 tecnologías	5 teorías	11	31	61	44	147

Fuente: Elaboración propia.