

ESCUELA DE GRADUADOS



Ergodicidad, Rigidez y Topología
de Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$

TESIS
para obtener el grado de
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

presentada por
JOSÉ WALTER YSIQUE QUESQUÉN

Bajo la orientación del Doctor
PERCY FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

Miembros del Jurado
Dr. ROLAND RABANAL MONTOYA
Dr. ROGER METZGER ALVÁN

Noviembre del 2009
Lima-Perú

*A mis padres:
Carlos Walter y
María Encarnación,
a mis hermanos y sobrinos;
ellos son mi inspiración en
la búsqueda de nuevas metas.*



*A la Familia Calcina Isique,
mi eterna gratitud.*

*A Liliana, por existir
y representar una etapa
especial de mi vida.*

Agradecimiento:

Al Dr. Percy Fernández Sánchez, por su tiempo y dedicación en el asesoramiento para la elaboración de la presente tesis; a los miembros del jurado Dr. Roland Rabanal Montoya y Dr. Roger Metzger Alván, por sus valiosos aportes que me permitieron mejorar la versión final de la misma.

A mis profesores de la Sección Matemáticas-PUCP que de una u otra manera con su necesario apoyo han contribuido en el logro de mis objetivos profesionales.

Una mención especial al Dr. César Carranza Saravia, por su constante apoyo a los que venimos de las diferentes provincias del Perú a realizar estudios de Postgrado en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Resumen

La presente tesis basa su contenido en temas de dinámica compleja, tiene como primer objetivo el estudio de los teoremas de densidad, ergodicidad y rigidez de Y. Iliashenko [I2; I3]; y como segundo objetivo se estudia un teorema debido a C. Camacho [Ca1], el cual analiza el comportamiento topológico de un germen del tipo parabólico.

Para lograr los objetivos planteados introducimos las definiciones y resultados necesarios, los cuales buscamos expresarlos de tal modo que sean accesibles al lector y poder así de alguna manera que lo tratado en esta tesis se constituya en material de consulta y aplicación en otras áreas de la matemática.



Introducción

El estudio de la dinámica de una aplicación holomorfa en alguna vecindad de un punto fijo (teoría local), es una herramienta fundamental para una mejor comprensión de la dinámica global. Esto fue estudiado durante cientos de años por varios matemáticos de los cuales podemos citar a E. Schröder [Sch], G. Koenigs [Kœ], L. Leau [Le], L. E. Böttcher [Bö], P. Fatou [Fa1; Fa2; Fa3], G. Julia [Ju], H. Cremer [Cr1], C. L. Siegel [Si; SM], T. M. Cherry [Ch], A. D. Bryuno [Br1], J. Écalle [Éc1], M. Herman [He1; He2; He3], J. -C. Yoccoz [Y1; Y2; Y3; Y4] y R. Perez-Marco [P1; P2]. En particular, el matemático soviético Y. Iliashenko también ha hecho importantes contribuciones en el estudio de la dinámica holomorfa [I1; I2; I3]. En la presente tesis nos planteamos como un primer objetivo el estudio de los teoremas de densidad, ergodicidad y rigidez de Y. Iliashenko [I2; I3], para lo cual tomamos como referencia los trabajos realizados por X. Gomez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla [GO].

Sea $f(z)$ una aplicación holomorfa en una variable de la siguiente forma

$$f(z) = \lambda z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m,$$

definida en una vecindad del 0, el cual es un punto fijo de f (i.e. $f(0) = 0$). Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces existe una vecindad V de 0 tal que $f(V) \subset V$ y existe una aplicación holomorfa inyectiva $\psi(z)$, la cual está definida en V y satisfe la siguiente ecuación de Schröder

$$\psi(f(z)) = \lambda \psi(z).$$

Esto quiere decir que $f(z)$ es linealizable en una vecindad del origen 0. Este resultado fue probado por E. Schröder [Sch] y luego por G. Koenigs [Kœ]. Si λ no cumple tal condición, el problema de la linealización se torna complicado, como lo observó A. D. Bryuno [Br1] al dar una solución parcial; la solución completa fue hecha hace pocos años con los trabajos de J. -C. Yoccoz [Y2; Y4] y R. Perez-Marco [P2].

Un biholomorfismo es una aplicación holomorfa con inversa holomorfa. Al grupo de gérmenes de biholomorfismos de \mathbb{C} que fijan el 0, lo denotamos por $Bih_0(\mathbb{C})$. En cuanto a la linealización, damos un criterio para que toda aplicación lineal (expresada en un conveniente sistema de coordenadas) sea aproximada por los elementos de un grupo especial de aplicaciones holomorfas.

El siguiente resultado fue originalmente probado por Iliashenko y Sinaí [I2]:

Sea $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ un subgrupo con r generadores f_1, f_2, \dots, f_r ; tal que $D_0\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ el grupo generado por sus partes lineales $f'_1(0), f'_2(0), \dots, f'_r(0)$ es denso en \mathbb{C}^* , entonces Γ es ergódico.

La prueba que presentamos toma como referencia [GO], en la cual se usa el teorema de Koebe sugerida por E. Ghys.

El homeomorfismo h , que conjuga a los elementos de dos subgrupos $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$, conjuga a su vez a los gérmenes de las partes lineales de dichos elementos (expresados en una adecuada carta coordenada). Este resultado nos permite expresar explícitamente al homeomorfismo h , luego bajo ciertas condiciones h es un biholomorfismo. Es decir:

se establecen las condiciones bajo las cuales, la equivalencia topológica entre dos subgrupos de $\text{Bih}_0(\mathbb{C})$ implica la equivalencia analítica de los mismos.

Este hecho es llamado *rigidez absoluta* de subgrupos de $\text{Bih}_0(\mathbb{C})$.

P. Fatou ([Fa2], pp. 191-221) y G. Julia [Ju] discutieron extensamente el caso cuando $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, amparados en el análisis inicial para el caso $\lambda = 1$ hecha por L. Leau [Le]. Posteriormente, C. Camacho [Ca1] (de manera independiente A. A. Shcherbakov) trata la dinámica sobre la conjugación topológica, lo cual se establece en el siguiente resultado cuya demostración constituye el segundo objetivo de nuestra tesis.

Sea f una aplicación holomorfa local, $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, con $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, si $n > 1$ asumir $\lambda^m \neq 1$ para $1 \leq m < n$. Entonces -la n -ésima iteración f^n es la identidad; o existe un homeomorfismo local h , con $h(0) = 0$, y un entero $k \geq 1$, tal que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = f_{k,n}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$.

Una vez presentado el contexto en el cual está enmarcada la presente tesis, pasamos a describir como se encuentra estructurada:

- El Capítulo 1 es preliminar y está dedicado a la presentación de definiciones y resultados generales que necesitaremos a lo largo de este trabajo.
- En el Capítulo 2 se presenta la linealización de gérmenes para el caso $|\lambda| \neq 1$. También damos los criterios generales para que la acción de grupos de aplicaciones holomorfas actúe densa y ergódicamente en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.
- El Capítulo 3 está orientado a establecer bajo qué condiciones, la equivalencia topológica entre dos subgrupos de $\text{Bih}_0(\mathbb{C})$ implica la equivalencia analítica de los mismos.
- El Capítulo 4 está constituido exclusivamente por la demostración del Teorema de la Flor en su versión topológica.
- Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis.

Índice general

1. Definiciones y Resultados Previos.	1
1.1. Topología	1
1.2. Superficie de Riemann.	4
1.3. Homeomorfismo que Preserva Orientación.	6
1.4. Algunas Definiciones de Teoría de Medida.	10
1.4.1. Medida - Área de la imagen de un Conjunto.	11
1.5. El Espacio L^p	13
1.6. Punto de Densidad.	13
1.7. Serie de Fourier en \mathbb{T}^n	14
1.8. Resultados de Análisis Real.	15
1.9. Algunos Resultados Incluyendo Aplicaciones Holomorfas.	16
2. Teoremas de Densidad y Ergodicidad.	17
2.1. Linealización y Gérmenes en $Bih_0(\mathbb{C})$	17
2.1.1. Linealización.	17
2.1.2. Familia analítica de gérmenes biholomorfos de $(\mathbb{C}, 0)$	21
2.2. Aproximación por Elementos de un Grupo Especial de Aplicaciones Holomorfas.	27
2.3. Densidad en Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$	32
2.4. Ergodicidad en Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$	33
3. Grupos de Gérmenes de Aplicaciones Holomorfas: Equivalencia Topológica y Analítica.	43
3.0.1. Grupo de Gérmenes de Homeomorfismos de \mathbb{C} en el 0.	43
3.1. Conjugación de Dos Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$	47
3.1.1. Espacio de recubrimiento de Ω_m^*	51
3.1.2. Conclusión de la demostración del Teorema 3.3:	59
3.2. De Equivalencia Topológica a Equivalencia Analítica.	60
3.3. Conclusión:	65
4. Teorema de la Flor: Versión Topológica.	68
4.1. Aplicaciones Holomorfas de tipo Parabólico.	70



Capítulo 1

Definiciones y Resultados Previos.

El objetivo de este capítulo es introducir aquellas definiciones y resultados que nos servirán para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.1. Topología

Recordemos que, dado un conjunto X y una colección \mathcal{T} de subconjuntos, que llamaremos los abiertos de X , y que cumplen las siguientes condiciones:

- El conjunto vacío y el mismo X pertenecen a \mathcal{T} ,
 - Si $V_i \in \mathcal{T}$ para $i=1, \dots, n$; entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$,
 - Si $\{V_\alpha\}$ es una colección arbitraria de elementos de \mathcal{T} , entonces $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \mathcal{T}$;
- decimos que \mathcal{T} es una topología definida en X . El par (X, \mathcal{T}) es llamado un *espacio topológico*.

Se dice que un espacio topológico (X, \mathcal{T}) tiene la propiedad de *Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos $V(x), V(y) \in \mathcal{T}$ tales que $V(x) \cap V(y) = \emptyset$. Por ejemplo:

- El toro como subconjunto de R^3 con aquella topología inducida por conjuntos abiertos (rectángulos) de R^2 , es Hausdorff.
- En el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , se define \mathcal{T} como aquella topología tal que sus abiertos son \emptyset , \mathbb{R} y todos los subconjuntos de \mathbb{R} cuyo complemento tenga un número finito de elementos. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es de Hausdorff.

Un espacio topológico X se llama conexo cuando los únicos subconjuntos abiertos y cerrados simultáneamente son el conjunto vacío y el mismo X .

Por ejemplo, el subconjunto de \mathbb{R}^2 (con la topología usual) definido como $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \text{sen}(1/x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1]\}$

es conexo.

Un espacio topológico X es conexo si solamente si, no puede ser expresado como reunión de dos subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos. Intuitivamente, un espacio conexo es constituido de “un sólo pedazo”.

Un espacio topológico es simplemente conexo si y solo si toda trayectoria cerrada en X es contráctil a un punto, esto es, para toda $f : [0, 1] \rightarrow X$ con $f(0) = f(1) \in X$ (luego denotada por $f_0(x)$), existe una aplicación continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow \{f(0) = f(1)\}$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f(0) = f(1)$.

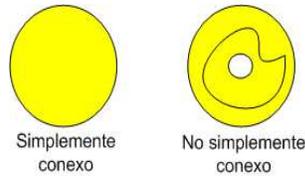


Figura 1.1:

Podemos citar como ejemplo de espacio simplemente conexo al \mathbb{R}^2 , y al $(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ como ejemplo de un espacio el cual no es simplemente conexo.

Un espacio topológico X es arco conexo o conexo por caminos si para cualesquiera dos puntos $a, b \in X$, estos pueden ser unidos por una curva. Un espacio arco conexo es también conexo. Un espacio topológico es localmente arco conexo si todo punto tiene una base de vecindades arco conexas.

Definición 1.1. [Espacio de Cubrimiento-Cubrimiento Universal]. Sean X y \tilde{X} espacios topológicos conexos. El par (\tilde{X}, π) , es llamado un espacio de cubrimiento de X si existe una aplicación $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que:

1. La aplicación π es sobreyectiva.
2. Para cada $x \in X$, existe un subconjunto abierto conexo $U \subset X$ con $x \in U$, tal que $\pi^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en \tilde{X} , cada uno de los cuales es enviado de forma homeomorfa sobre U mediante π .

En particular si \tilde{X} es simplemente conexo, (\tilde{X}, π) es llamado el espacio de recubrimiento universal de X .

Ejemplo 1.2. La aplicación $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $t \mapsto e^{2\pi it}$ es una aplicación cubriente con un número infinito de hojas.

Ejemplo 1.3. La aplicación $S^1 \rightarrow S^1$ dada por $z \mapsto z^n$ para un entero positivo fijo n , es una aplicación cubriente con n hojas.

Definición 1.4. [Levantamiento de una aplicación]. Sean X , Y y Z espacios topológicos, $p : Y \rightarrow X$ y $f : Z \rightarrow X$ aplicaciones continuas. Entonces un levantamiento de f con respecto a p es una aplicación continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

(Ver [Fr], p.22).

Teorema 1.5. [Existencia de un levantamiento]. Sean X e Y espacios de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Sea Z un espacio topológico simplemente conexo, arco conexo y localmente arco conexo, y $f : Z \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces para cualquier elección de puntos $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ con $f(z_0) = p(y_0)$ existe un único levantamiento $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$. (Ver [Fr], p.26).

Sea X un espacio topológico, y p un punto fijo de X . A una aplicación continua $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ que verifica la condición $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ se llama un lazo basado en p .

El producto de dos lazos α y β denotado por $\alpha * \beta$, se define por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \beta(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Esto indica que, primero se recorre el lazo α pero a doble velocidad y luego β también a doble velocidad.

Dos lazos $\alpha, \beta : I = [0, 1] \rightarrow X$ basados en un punto común p son *homotópicos* si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$ y $F(s, 1) = \beta(s)$, $F(0, t) = p = F(1, t)$.

Las *clases de homotopía* son las clases de equivalencia bajo la relación de ser homotópicas. Intuitivamente una clase de homotopía representa un paquete de curvas que se deforman entre sí.

El producto de dos clases de homotopía $[f]$ y $[g]$ se define por $[f] * [g] = [f * g]$, tal definición es independiente de la elección de los representantes. Este producto permite obtener una estructura de grupo, donde el elemento neutro será la clase

del lazo definido por $\gamma(t) = p$ para todo t y el elemento inverso de la clase del lazo f será la clase del lazo f^{-1} , definido por $f^{-1}(t) = f(1 - t)$.

Definición 1.6. [*Grupo Fundamental*]. *El grupo fundamental de un espacio topológico X basado en un punto p de X , denotado por $\Pi_1(X, p)$, es el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas con la operación $*$.*

Ejemplo 1.7. *Denotemos por $D^*(0, \rho)$ al disco con centro en 0 y radio ρ al cual le quitamos el 0 . El grupo fundamental de $D^*(0, \rho)$ es isomorfo \mathbb{Z} el grupo aditivo de los números enteros.*

En efecto:

Definimos la aplicación $\phi(D^*(0, \rho)) \rightarrow \mathbb{Z}$ como $\phi([f]) = n$, donde $[f]$ es la clase de lazos que dan n vueltas alrededor de 0 . Probaremos que ϕ es un isomorfismo.

1. ϕ es inyectiva: para $[f]$ y $[g]$ en $\phi(D^*(0, \rho))$, por definición de ϕ , si $[f] \neq [g]$ implica que $\phi([f]) \neq \phi([g])$.
2. ϕ es sobreyectiva: por definición de ϕ , para todo $n \in \mathbb{Z}$ es posible encontrar una clase $[f]$ en $\phi(D^*(0, \rho))$ tal que $\phi([f]) = n$.
3. ϕ es un homomorfismo: sea $[f]$ y $[g]$ en $\phi(D^*(0, \rho))$ tal que $\phi([f]) = n$ y $\phi([g]) = m$. Se sabe que $[f] * [g] = [f * g]$, luego $\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = m + n = \phi([f]) * \phi([g])$.

Por lo tanto ϕ es un isomorfismo.

Teorema 1.8. *Si $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, con $h(x_0) = y_0$. Entonces la aplicación $h^* : \Pi_1(Y, y_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ definida por la ecuación $h^*([f]) = [h \circ f]$, es un isomorfismo inducido por h .*

(Ver [Mu], p.380).

1.2. Superficie de Riemann.

Definición 1.9. [*Variedad n -dimensional*]. *Una variedad n -dimensional es un espacio topológico de Hausdorff X tal que todo punto $a \in X$ tiene una vecindad abierta la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .*

(Ver [Fr], p.2).

Ejemplo 1.10. [*El n -Toro \mathbb{T}^n*]. *El n -Toro \mathbb{T}^n es el cubo $[0, 1]^n$ con los puntos opuestos identificados. Así, los puntos $(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)$ y $(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$ son identificados siempre que 0 y 1 estén en la misma coordenada. Una mejor definición puede ser dada como sigue: para $x, y \in \mathbb{R}^n$, decimos que*

$$x \equiv y, \tag{1.2}$$

si $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Por lo tanto \mathbb{Z}^n es un subgrupo aditivo de \mathbb{R}^n . Si la Relación (1.2) se cumple, entonces escribimos $x = y(\text{mod})1$. La relación \equiv es una relación de equivalencia que particiona \mathbb{R}^n en clases de equivalencia. Por lo tanto el n -Toro \mathbb{T}^n es definido como el conjunto $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de todas las clases de equivalencia.

Cuando $n=2$, la identificación junta los lados derecho e izquierdo del cuadrado $[0, 1]^2$ así como los lados superior e inferior del mismo. Esto produce la siguiente figura que es una variedad bidimensional incrustada en \mathbb{R}^3 semejante a una dona.

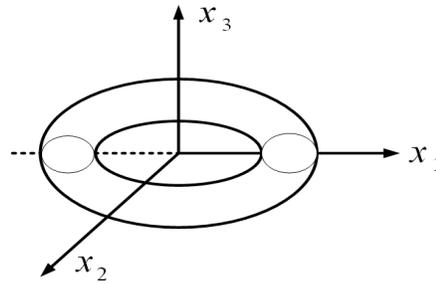


Figura 1.2:

Definición 1.11. Sea X una variedad bidimensional. Una carta compleja sobre X es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de un subconjunto abierto $U \subset X$ sobre un subconjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i=1,2$; son holomorfas compatibles si la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un biholomorfismo.

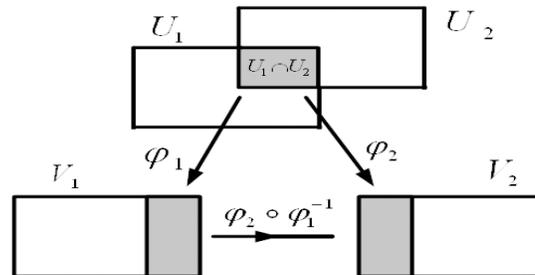


Figura 1.3:



Un atlas complejo en X es un sistema $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i, i \in I\}$ de cartas las cuales son holomorfas compatibles y cubren X , es decir, $\cup_{i \in I} U_i = X$.

Dos atlas complejos \mathcal{U} y \mathcal{U}' en X son llamados analíticamente equivalentes si toda carta de \mathcal{U} es holomorfa compatible con toda carta de \mathcal{U}' .

(Ver [Fr], p.2).

Definición 1.12. Una estructura compleja en una variedad bidimensional X , es la clase de equivalencia de atlas analíticamente equivalentes en X .

(Ver [Fr], p.2).

Definición 1.13. [Superficie de Riemann]. Una superficie de Riemann es un par (X, Σ) , donde X es una variedad bidimensional conexa y Σ es una estructura compleja en X .

Uno usualmente escribe X en vez de (X, Σ) , o también se escribe (X, \mathcal{U}) donde \mathcal{U} es un representante de Σ .

(Ver [Fr], p.3).

Ejemplo 1.14. El plano complejo \mathbb{C} es una superficie de Riemann. Su estructura compleja es definida por el atlas cuya única carta es la aplicación identidad $id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1.3. Homeomorfismo que Preserva Orientación.

Definición 1.15. Un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ preserva orientación, si $x, y \in S^1$ con $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$, considerando el orden natural de la circunferencia.

Proposición 1.16. Sea F un levantamiento de $f : S^1 \rightarrow S^1$, el homeomorfismo que preserva orientación. Entonces $F(x + 1) = F(x) + 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

(Ver [Ar], p.7).

Prueba: Por ser F un levantamiento de f , se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\
 \downarrow p=e^{2\pi i} & & \downarrow p=e^{2\pi i} \\
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1,
 \end{array}$$

(1.3)

tal que :

$$f \circ p = p \circ F . \tag{1.4}$$

a) Afirmación: la aplicación $k(x) = F(x+1) - F(x)$ es un número entero.

En efecto:

Se cumple que $f \circ p(x) = f \circ p(x+1)$, usando (1.4) en ambos miembros de esta última igualdad, obtenemos $p \circ F(x) = p \circ F(x+1)$, esto es $e^{2\pi i F(x)} = e^{2\pi i F(x+1)}$, luego $F(x+1) = F(x) + k(x)$, donde $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. Como F es continua, entonces $k(x) = F(x+1) - F(x)$ también lo es.

La imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es conexo, así $k(\mathbb{R})$ es un subconjunto conexo no nulo de \mathbb{Z} . Los únicos tales subconjuntos son unitarios, así k es constante. Por lo tanto $F(x+1)$ y $F(x)$ se diferencian en un número entero. Es decir $k(x) \equiv k \in \mathbb{Z}$. Esto prueba a).

b) Demostraremos que $k = 1$.

b1) Afirmación $k \leq 1$.

En efecto:

Supongamos que $k \geq 2$, esto es $F(x+1) - F(x) \geq 2$. Considere $x < y < x+1$ tal que por ejemplo $F(x) = 1$, $F(y) = 2$ y $F(x+1) = 3$. De la conmutatividad del diagrama 1.3, puesto que $|x - y| < 1$, x e y son llevados por $p = e^{2\pi i}$ a dos puntos diferentes en S^1 , como f es inyectiva lleva a $p(x)$ y $p(y)$ en dos puntos diferentes en S^1 , estos puntos son los mismos que se deben obtener si usamos la vía $p \circ F$. Pero $F(x)$ y $F(y)$ se diferencian en 1, así ambos son llevados por p al mismo punto en S^1 lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F(x+1) - F(x) = k \leq 1$. Esto prueba b1).

b2) Afirmación $k \neq 0$.

En efecto:

Si $k = 0$, para $x < y < x+1$ se puede presentar por ejemplo: $F(y) = F(x) = F(x+1)$. Usando la vía $f \circ p$ obtenemos dos puntos en S^1 , mientras que si usamos la vía $p \circ F$ obtenemos un sólo punto en S^1 , lo cual es una contradicción a la inyectividad de f . Esto prueba b2).

b3) Afirmación: El número entero k no es negativo.

En efecto:

Si k es un número entero negativo, para $x < y < x+1$ se puede presentar por ejemplo: $F(x) = 2,8$; $F(y) = 1,5$ y $F(x+1) = 0,8$. En este caso la única posibilidad para que se cumpla la conmutatividad del diagrama 1.3 es que el homeomorfismo f invierta la orientación, esto contradice a la hipótesis que el homeomorfismo f preserva orientación. Esto prueba b3).

Por lo tanto, $F(x+1) = F(x) + 1$. La prueba de la proposición terminó. ■

Corolario 1.17. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el levantamiento de un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, $F(x+n) = F(x) + n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.



Prueba: Por la Proposición 1.16, como F es el levantamiento de un homeomorfismo que preserva orientación, se tiene que $F(x + 1) = F(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $n > 0$, aplicamos inducción sobre n : para $n = 1$, por la Proposición 1.16, $F(x + 1) = F(x) + 1$; para $n = h$ suponemos que se cumple la igualdad $F(x + h) = F(x) + h$; para $n = h + 1$, $F(x + h + 1) = F(x + h) + 1 = F(x) + h + 1$.

Para $n < 0$, tenemos que $-n > 0$. Luego $F(x) = F(x + n - n) = F(x + n) - n$. Así, $F(x) + n = F(x + n)$.

Por lo tanto $F(x + n) = F(x) + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La prueba del Corolario está terminada. ■

Definición 1.18. Sea $h : D^*(0, \rho_1) \subset \mathbb{C}^* \rightarrow D^*(0, \rho_2) \subset \mathbb{C}^*$ un homeomorfismo, luego por el Teorema 1.8 se tiene que h induce un isomorfismo h^* entre los grupos fundamentales de $D^*(0, \rho_1)$ y $D^*(0, \rho_2)$. También (se puede considerar el Ejemplo 1.7) se tiene que el isomorfismo h^* induce un isomorfismo $h^\#$ de \mathbb{Z} en si mismo. Se sabe que el conjunto generador de \mathbb{Z} es $\{-1, 1\}$. Luego diremos que h es un homeomorfismo que preserva orientación si $-1 \mapsto h^\#(-1) = -1$ y $1 \mapsto h^\#(1) = 1$; e invierte orientación si $-1 \mapsto h^\#(-1) = 1$ y $1 \mapsto h^\#(1) = -1$.

Ejemplo 1.19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > -1$. La aplicación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de la forma $T(z) = Cz$, donde:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & (1 + b) \end{bmatrix},$$

preserva orientación.

Lema 1.20. Sea $\hat{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un levantamiento del homeomorfismo que preserva orientación $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Entonces $\hat{h}(z + 1) = \hat{h}(z) + 1$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

Prueba: Por ser \hat{h} un levantamiento del homeomorfismo h , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathbb{C} \\ e^{2\pi iz} \downarrow & & \downarrow e^{2\pi iz} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

(1.5)

Sea $\hat{h}(z+1) = \hat{h}(z) + k$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Consideramos la idea de la demostración de la Proposición 1.16. Así, sin pérdida de generalidad, para $z \in \mathbb{C}$ restringimos \hat{h} a un segmento de recta con extremos z y $z+1$, el cual denotamos por $\overline{z, (z+1)}$. Sean z_1 y z_2 dos puntos diferentes tomados en $\overline{z, (z+1)}$. Como $e^{2\pi iz_1}$ y $e^{2\pi iz_2}$ son dos puntos diferentes de una circunferencia incluida en \mathbb{C}^* , entonces por la inyectividad de h se cumple:

$$h(e^{2\pi iz_1}) \neq h(e^{2\pi iz_2}). \tag{1.6}$$

La idea de la demostración se ilustra en la Figura 1.4.

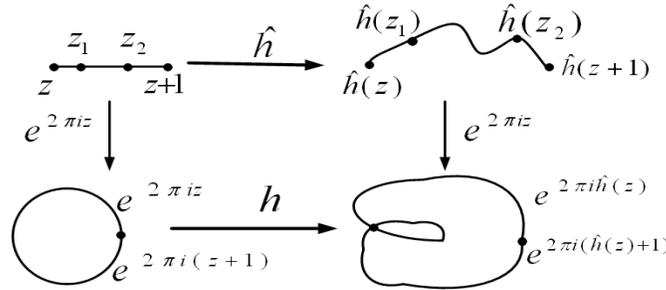


Figura 1.4:

Notación: $Re(z) =$ parte real de z e $Im(z) =$ parte imaginaria de z . Puesto que $Im(\hat{h}(z+1)) = Im(\hat{h}(z))$, supongamos que para los puntos elegidos z_1 y z_2 se cumple que $Im(\hat{h}(z_1)) = Im(\hat{h}(z_2))$ (esto se garantiza por la continuidad de \hat{h}). Si $Re(\hat{h}(z_2)) = \hat{h}(z_1) + m$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $0 < |m| < |k|$; entonces :

$$e^{2\pi i \hat{h}(z_1)} = e^{2\pi i \hat{h}(z_2)}. \tag{1.7}$$

Luego, lo obtenido en (1.6) y (1.7) contradice a la conmutatividad del diagrama 1.5. Esta contradicción se descarta si tal m no existe, lo cual se asegura si $k = 1$. Por lo tanto $\hat{h}(z+1) = \hat{h}(z) + 1$. La prueba está concluida. ■

Teorema 1.21. *Sea $\hat{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un levantamiento del homeomorfismo que preserva orientación $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Entonces $\hat{h}(z+n) = \hat{h}(z) + n$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Por el Lema 1.20 se tiene que $\hat{h}(z+1) = \hat{h}(z) + 1$, luego como en el Corolario 1.17 se aplica inducción sobre n . Esto concluye la prueba. ■

1.4. Algunas Definiciones de Teoría de Medida.

Definición 1.22. :

1. Una colección \mathcal{M} de subconjuntos de un conjunto X es llamado una σ -álgebra en X si \mathcal{M} tiene las siguientes tres propiedades:

- $X \in \mathcal{M}$
- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$, donde A^c es el complemento de A relativo a X .
- Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathcal{M}$ para $n=1,2,\dots$; entonces $A \in \mathcal{M}$.

2. Si \mathcal{M} es una σ -álgebra en X , entonces X es llamado un espacio medible, y los elementos de \mathcal{M} son llamados conjuntos medibles en X .

Definición 1.23. Sea \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X .

$$\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

es una medida positiva, si para toda colección $A_i \in \mathcal{F}, i=1,2,\dots$; de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$, se cumple:

$$\lambda \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \sum_{i \geq 1} \lambda(A_i) .$$

Definición 1.24. Sea X cualquier conjunto, \mathcal{M} cualquier σ -álgebra de subconjuntos de X y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Se dice que f es \mathcal{M} -medible si para todo $t \in [-\infty, \infty]$, el conjunto $f^{-1}([-\infty, t])$ pertenece a \mathcal{M} , en otras palabras,

$$\{x \in X / f(x) \leq t\} \in \mathcal{M}.$$

En caso $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, entonces decimos que una aplicación \mathcal{L} -medible es Lebesgue Medible.

(Ver [Jo], p. 113 .)

Ejemplo 1.25. Sea \mathcal{M} una σ -álgebra de subconjuntos de X . Si $A \in \mathcal{M}$ entonces la aplicación \mathcal{X}_A (llamada la aplicación característica de A), definida por:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \in A^c, \end{cases}$$

es \mathcal{M} -medible.

En efecto:

Para $\mathcal{X}_A < t$. Si $t \geq 1$ entonces el conjunto $\{x \in X : \mathcal{X}_A(x) \leq t\} = A \cup A^c$ pertenece a \mathcal{M} . Si $t < 1$ entonces el conjunto $\{x \in X : \mathcal{X}_A(x) \leq t\} = A^c$ también pertenece a \mathcal{M} .

Por lo tanto, \mathcal{X}_A es \mathcal{M} -medible.

Ejemplo 1.26. La σ -álgebra formada por los conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n es llamada la clase de conjuntos de Borel.

Dado el conjunto $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x \leq b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$, llamado *rectángulo especial*; definimos la medida de I como el número real no negativo dado por $\lambda(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$. Si $I = \phi$, $\lambda(I) = 0$; si I es un conjunto ilimitado, decimos que I tiene medida infinita.

Un *polígono especial* es una unión finita de rectángulos especiales, cada uno de los cuales tiene medida no nula (todos los polígonos especiales tienen "lados" paralelos a los ejes coordenados).

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, si $G \neq \phi$ definimos la medida de G como $\lambda(G) = \sup\{\lambda(P) : P \subset G, P \text{ es un polígono especial}\}$.

Definición 1.27. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario. Entonces

$\lambda^*(A)$ = la medida exterior de $A = \inf\{\lambda(G)/A \subset G = \text{conjunto abierto}\}$,

$\lambda_*(A)$ = la medida interior de $A = \sup\{\lambda(K)/A \supset K = \text{conjunto compacto}\}$.

(Ver [Jo], p. 42.)

Definición 1.28. Considere el conjunto $\mathcal{L}_0 = \{A \subset \mathbb{R}^n / \lambda^*(A) = \lambda_*(A) < \infty\}$. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces A es medible (o medible de Lebesgue para enfatizar) si para todo $M \in \mathcal{L}_0$, $A \cap M \in \mathcal{L}_0$. En este caso, podemos definir la medida (o la medida de Lebesgue) de A es

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(A \cap M) / M \in \mathcal{L}_0\}.$$

Denotemos por \mathcal{L} a la clase de todos los conjuntos medibles $A \subset \mathbb{R}^n$. Así,

$$A \in \mathcal{L} \text{ sí y sólo si } A \cap M \in \mathcal{L}_0 \text{ para todo } M \in \mathcal{L}_0.$$

(Ver [Jo], p. 48.)

1.4.1. Medida - Área de la imagen de un Conjunto.

Definición 1.29. Una aplicación simple de X en $[-\infty, +\infty]$ es cualquier aplicación la cual sólo asume un número finito de distintos valores. Así, si s es una aplicación simple, puede ser representada en la forma

$$s = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathcal{X}_{A_k}, \quad (1.8)$$

donde los conjuntos A_k son disjuntos y los números $\alpha_k \in [-\infty, +\infty]$ son los distintos valores que toma s .

Denotemos por S a la clase de aplicaciones simples medibles s sobre \mathbb{R}^n tal que $0 \leq s(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $s \in S$, entonces s se puede representar en la forma (1.8), donde $0 \leq \alpha_k < \infty$ y los conjuntos A_k son medibles y disjuntos. Bajo estas consideraciones se define la *integral* de s , denotada por $\int s d\lambda$, como el número dado por:

$$\int s d\lambda = \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda(A_k).$$

En esta definición se ha usado la convención $0 \cdot \infty = 0$, es decir, si algún $\alpha_i = 0$ con $\lambda(A_i) = \infty$, entonces $\alpha_i \cdot \lambda(A_i) = 0$.

Definición 1.30. [*Integral de Lebesgue*]. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ una aplicación medible. Entonces la *integral de Lebesgue* de f en \mathbb{R}^n se define como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda := \sup_{0 \leq s \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} s d\lambda,$$

donde $s \in S$.

(Ver [Jo], p. 123 .)

Sea B un conjunto de Borel en \mathbb{R}^n . Definimos la integral de f sobre B como $\int_B f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \cdot f d\lambda$. De esto tenemos que $\int_B f d\lambda := \lambda(B)$.

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 . El *Jacobiano* de f , denotado por J_f , es definida por $J_f(x) = \det(f'(x))$.

Teorema 1.31. Sean U y V subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , y sea T una aplicación biyectiva de U en V tal que T y T^{-1} son ambas de clase C^1 . Entonces cada subconjunto de Borel B de U satisface:

$$\lambda(T(B)) = \int_B |J_T(x)| d\lambda(x) .$$

(Ver [Co], p.171).

En particular, sean E un subconjunto de \mathbb{R}^2 , y $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ una aplicación diferenciable e inyectiva definida en un conjunto abierto conteniendo a E , entonces por del Teorema 1.31 se sigue que:

$$\lambda(f(E)) = \int_{f(E)} d\lambda(f(x, y)) = \int_E |J_f(x, y)| d\lambda(x, y) = \int_E |u_x v_y - u_y v_x| d\lambda(x, y). \tag{1.9}$$

Sea $z = x + iy$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una aplicación holomorfa e inyectiva definida en un conjunto abierto conteniendo al conjunto E , entonces en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x v_y - u_y v_x = |f'(z)|^2$, luego (1.9) se expresa como:

$$\lambda(f(E)) = \int_E |f'(z)|^2 d\lambda(z). \quad (1.10)$$

(Ver [Ah], p. 75-76).

1.5. El Espacio L^p .

El espacio L^p depende de la medida definida.

Cuando digamos “para casi todo punto” $x \in X$ nos referiremos a que el conjunto de puntos $x \in X$ que no cumplen la condición exigida en determinado momento son una cantidad bastante pequeña, de medida cero (o nula).

Definición 1.32. Sea X un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y f una aplicación \mathcal{L} -medible definida en X , se dice que f es esencialmente limitada si existe un número M tal que $0 \leq M < \infty$ y $|f(x)| \leq M$ para casi todo punto (c.t.p) $x \in X$.

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \mid |f(x)| \leq M \text{ para c.t.p } x \in X\}.$$

Definición 1.33. Sea G un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . El espacio local L^p sobre G consiste de todas las aplicaciones \mathcal{L} -medibles f definidas sobre casi todo G tal que para todo conjunto compacto $K \subset G$ la aplicación $f \cdot \chi_K$ tiene una norma finita L^p para $1 \leq p \leq \infty$. Esto es,

- $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ si $1 \leq p < \infty$;
- f es esencialmente limitada sobre K si $p = \infty$.

La colección de todas tales aplicaciones f es denotada por $L^p_{loc}(G)$.

(Ver [Jo], p. 242.)

1.6. Punto de Densidad.

En esta sección definimos lo que es un “punto de densidad”, el cual será una herramienta fundamental en la prueba de la Proposición 2.17.

Teorema 1.34. [Derivación de Lebesgue]. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 .$$

En particular, se sigue que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x) .$$

(Ver [Jo], p.456 .)

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, aplicamos el Teorema 1.34 a la aplicación característica \mathcal{X}_E . Notamos que para un punto fijado $x \in \mathbb{R}^n$, la aplicación \mathcal{X}_E evaluada en x , no cambia de signo. Por lo tanto podemos usar la segunda conclusión en el Teorema 1.34. Así, para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \mathcal{X}_E(x) dx = \mathcal{X}_E(x) . \text{ Esto es :}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} = \mathcal{X}_E(x) .$$

En particular, casi todo punto $x \in E$ satisface:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} = 1. \quad (1.11)$$

Definición 1.35. Si x satisface la (1.11), decimos que x es un punto de densidad de E . Así, casi todo punto de E es un punto de densidad de E .

(Ver [Jo], p.463 .)

1.7. Serie de Fourier en \mathbb{T}^n .

El n -Toro \mathbb{T}^n también es pensado como el siguiente subconjunto de \mathbb{C}^n

$$\{(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \dots, e^{2\pi i x_n}) \in \mathbb{C}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n\},$$

de la misma manera el intervalo $[0, 1]$ puede ser pensado como el círculo unitario en \mathbb{C} donde 0 y 1 son identificados.

Las aplicaciones f que satisfacen $f(x + m) = f(x)$ para todo x en \mathbb{R}^n y un m en \mathbb{Z}^n , son llamadas 1-periódicas en cada coordenada.

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ denota la norma usual de x . Esto es

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} .$$

Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} , esto determina un reticulado $\Gamma := \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, donde z_1 y z_2 están relacionados (i.e: $z_1 \sim z_2$) si y solo si $z_1 - z_2 \in \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, esta relación es de equivalencia. Con esto tenemos las clases de equivalencia $[z]$, donde z es un representante cualquiera, el conjunto de tales clases es el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Gamma$.

Diremos que f está en $L^1(\mathbb{T}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, si es integrable en el sentido de Lebesgue sobre el n-toro \mathbb{T}^n .

Definición 1.36. [Coeficientes de Fourier]. Para una aplicación compleja valuada $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, definimos

$$\hat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx . \quad (1.12)$$

Llamamos a $\hat{f}(m)$ el m -ésimo coeficiente de Fourier de f .

Definición 1.37. [Serie de Fourier]. La serie de Fourier de f en $x \in \mathbb{T}^n$ es la serie

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x} . \quad (1.13)$$

1.8. Resultados de Análisis Real.

Teorema 1.38. [“Principio de Extensión de Identidades”]. Sean f, g dos aplicaciones continuas de un espacio métrico E en un espacio métrico E' ; si $f(x) = g(x)$ para todos los puntos x de un subconjunto denso A en E , entonces $f = g$.

(Ver [Di], p.61).

Teorema 1.39. Sea A un subconjunto denso de un espacio métrico E , y f una aplicación uniformemente continua de A en un espacio métrico completo E' . Entonces existe aplicación continua \tilde{f} de E en E' que coincide con f en A ; además, \tilde{f} es uniformemente continua.

(Ver [Di], p.62).

Teorema 1.40. Toda aplicación continua de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ es del tipo $x \mapsto cx$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante.

(Ver [Di], p.83) .

Proposición 1.41. Sea H un subgrupo cerrado de \mathbb{R}^2 . Entonces H es isomorfo a uno de los grupos $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$ donde k, ℓ son enteros con $0 \leq k + \ell \leq 2$.

(Ver [Ca2], p.169).

1.9. Algunos Resultados Incluyendo Aplicaciones Holomorfas.

Teorema 1.42. [Un Cuarto de Koebe]. Sea $f : \mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa inyectiva tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces la imagen de \mathbb{D} bajo f contiene al círculo con centro en cero y radio un cuarto. (Ver [Ru], p.288).

Como una consecuencia del Teorema 1.42 tenemos:

Corolario 1.43. Dado un disco de centro z_0 y radio r denotado por $D(z_0, r)$. Si $g : D(z_0, r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa e inyectiva, con $g(z_0) = \omega_0$ y $g'(z_0) = \nu$; entonces $g(D(z_0, r))$ contiene al disco de centro ω_0 y radio $r|\nu|/4$ denotado por $D(\omega_0, r|\nu|/4)$.

Prueba:

Definamos $h(z) := \frac{g(rz + z_0) - \omega_0}{r|\nu|}$. Entonces h satisface las hipótesis del

Teorema 1.42. Por lo tanto $\mathbb{D}_{1/4} \subset h(\mathbb{D}) = \frac{g(r\mathbb{D} + z_0) - \omega_0}{r|\nu|}$. De esto se tiene, $D(\omega_0, r|\nu|/4) \subset g(D(z_0, r))$. ■

Lema 1.44. [Schwarz]. Sea f una aplicación holomorfa definida en el disco unitario \mathbb{D} del plano complejo \mathbb{C} con imagen contenida en el mismo disco \mathbb{D} y satisfaciendo $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$. La igualdad $f(z) = |z|$ con $z \neq 0$, ó $|f'(0)| = 1$ pueden solo ocurrir para $f(z) = \alpha z$ con α una constante de norma 1. (Ver [St], p.218).

Teorema 1.45. [Uniformización de Riemann]. Sea Ω un subconjunto propio y simplemente conexo de \mathbb{C} . Si $z_0 \in \Omega$, entonces existe una única aplicación holomorfa (inyectiva) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que

$$f(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(z_0) > 0.$$

(Ver [St], p.228).

Capítulo 2

Teoremas de Densidad y Ergodicidad.

En el presente capítulo estudiamos la linealización de gérmenes hiperbólicos. Damos un criterio para que toda aplicación lineal (expresada en un conveniente sistema de coordenadas) sea aproximada por los elementos de un grupo especial de aplicaciones holomorfas. También damos criterios generales para que la acción de grupos de aplicaciones holomorfas (inyectivas) actúe densa y ergódicamente en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.

2.1. Linealización y Gérmenes en $Bih_0(\mathbb{C})$.

En esta sección se estudia un importante teorema referente a linealización de gérmenes en $Bih_0(\mathbb{C})$, y su generalización a familias analíticas de gérmenes de biholomorfismos.

2.1.1. Linealización.

Cada aplicación holomorfa $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(0) = 0$ y U abierto, define un único *germen*

$$f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

como la clase de equivalencia de las aplicaciones holomorfas $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ cuya restricción $g|_W$ iguale a $f|_W$ en alguna vecindad abierta del origen $W \subset V \cap U$. En particular, si tal f es un biholomorfismo (f soporta una inversa holomorfa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$) la composición de aplicaciones hace de

$$Bih_0(\mathbb{C}) = \{f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0), f \text{ es biholomorfismo}\}$$

un grupo, que contiene a los gérmenes *hiperbólicos* $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que son definidos por aplicaciones cuyas derivadas en 0, $\lambda = f'(0)$, tienen norma diferente de 1 y las *linealizaciones* $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de gérmenes hiperbólicos $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, que son gérmenes inducidos por una aplicación holomorfa que

es inyectiva en un abierto W que contienen al 0 y hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

donde $\psi(z) = \lambda z$.

Observamos que si $h'(0) \neq 0$, existe W una vecindad abierta de 0 donde la restricción $h|_W$ es inyectiva.

Teorema 2.1. [Linealización de Schröder-Kœnigs]. *Cada germen hiperbólico $f \in \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ es linealizable. La linealización local h es única salvo multiplicación por una constante diferente de 0.*

Prueba: Sea :

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{2.1}$$

con $|\lambda| \neq 1$. Debemos encontrar un cambio holomorfo

$$h(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \tag{2.2}$$

tal que la ecuación

$$h(f(z)) = \psi(h(z)) \tag{2.3}$$

se cumpla.

① Unicidad: Supongamos que existen h y \tilde{h} como en (2.2) tales que

$$\tilde{h} \circ f \circ \tilde{h}^{-1} = \psi = h \circ f \circ h^{-1},$$

entonces ψ conmuta con $\tilde{h} \circ h^{-1}$:

Como

$$(\tilde{h} \circ h^{-1}) \circ (\tilde{h} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}) = (\tilde{h} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f \circ h^{-1})$$

$$(\tilde{h} \circ h^{-1}) \circ (\tilde{h} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}) = \tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$$

$$(\tilde{h} \circ h^{-1}) \circ \psi = (\tilde{h} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}) \circ (\tilde{h} \circ h^{-1})$$

$$(\tilde{h} \circ h^{-1}) \circ \psi = \psi \circ (\tilde{h} \circ h^{-1}),$$

$(\tilde{h} \circ h^{-1})$ conmuta con $\psi(\omega) = \lambda \omega$, así

$$(\tilde{h} \circ h^{-1})(\lambda \omega) = \lambda \cdot (\tilde{h} \circ h^{-1})(\omega), \text{ para todo } \omega \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Más aún, si $\tilde{h} \circ h^{-1}(\omega) = B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3 + \dots$, se tiene

$$B_1 \lambda \omega + B_2 \lambda^2 \omega^2 + B_3 \lambda^3 \omega^3 + \dots = \lambda B_1 \omega + \lambda B_2 \omega^2 + \lambda B_3 \omega^3 + \dots.$$

De esto último se deduce, que si $n \geq 2$, $B_n \lambda^n = \lambda B_n$, es decir

$$B_n \lambda (\lambda^{n-1} - 1) = 0, \quad \text{para todo } n \geq 2. \quad (2.5)$$

Como $\lambda \neq 0$ y $|\lambda| \neq 1$, la única posibilidad para que se cumpla (2.5) es que $B_n = 0$, para todo $n \geq 2$. Entonces

$$\tilde{h} \circ h^{-1}(\omega) = B_1 \omega,$$

luego tenemos

$$\tilde{h}(\omega) = B_1 h(\omega).$$

Observación 2.2. : De (2.4) y la penúltima igualdad se concluye que toda aplicación holomorfa que conjugue con una aplicación holomorfa lineal $(\psi(z) = \lambda z)$ es lineal.

Ⓐ Existencia: Demostraremos que la serie formal $h(z)$ converge en alguna vecindad del origen. Para ver esto construyamos una aplicación holomorfa h que satisface (2.3) y $h'(0) = 1$.

Como $|f'(0)| \neq 1$, trabajaremos con $|f'(0)| < 1$ (si $|f'(0)| > 1$, se considera f^{-1}), luego existen $r > 0$ y $0 < \mu < 1$ tal que $|z| \leq r$ implica que $|f'(z)| \leq \mu < 1$.

a) Si $|z| \leq r$ entonces $|f^n(z)| \leq \mu^n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Procederemos por inducción sobre n .

$$f(z) = \int_0^z f'(s) ds = \int_0^1 f'(tz) z dt,$$

$$|f(z)| = \left| \int_0^1 f'(tz) z dt \right| \leq \int_0^1 |f'(tz)| |z| dt,$$

$$|f(z)| \leq \text{long}(f([0, z])) = \int_0^1 |f'(tz)| |z| dt \leq \mu |z|,$$

donde long es la longitud de una curva. Así para $|z| \leq r$ tenemos:

$$|f(z)| \leq \mu |z|$$

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq \mu |f(z)| \leq \mu^2 |z|,$$

inductivamente:

$$|f^n(z)| \leq \mu^n |z|, \text{ para todo } n \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

esto prueba a) .

Cuando $|z| \leq r$ definimos la sucesión de aplicaciones

$$\phi_n(z) = \frac{f^n(z)}{\lambda^n}, \text{ para todo } n \geq 0. \quad (2.6)$$

b) Si existe h , tal que la sucesión $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a h en $|z| \leq r$, entonces

$$h \circ f = \psi \circ h, \quad (2.7)$$

donde $\psi(z) = \lambda z$.

En efecto:

$$\begin{aligned} h(f(z)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(z) = \lambda h(z) = \psi(h(z)), \end{aligned}$$

esto prueba b) .

c) La sucesión de (2.6) posee un límite uniforme h y cumple $h'(0) = 1$.

En efecto:

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_1(z) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\phi_{i+1}(z)}{\phi_i(z)},$$

pero

$$\frac{\phi_{i+1}(z)}{\phi_i(z)} = \frac{f^{i+1}(z)}{\lambda f^i(z)} = \frac{f(f^i(z))}{\lambda f^i(z)} = \frac{f(z_i)}{\lambda z_i},$$

donde $z_i = f^i(z)$. Observe también que

$$\frac{f(z)}{\lambda z} = 1 + \left(\frac{a_2}{\lambda} z + \frac{a_3}{\lambda} z^2 + \dots \right) = 1 + \xi(z),$$

siendo $\xi(z) = \frac{a_2}{\lambda} z + \frac{a_3}{\lambda} z^2 + \dots = z \left(\frac{a_2}{\lambda} + \frac{a_3}{\lambda} z + \dots \right)$ holomorfa, así continua y por tanto acotada en $|z| \leq r$. Luego:

$$\frac{f(z)}{\lambda z} = 1 + \xi(z),$$

con $|\xi(z)| \leq \alpha |z|$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $|z| \leq r$. Luego,

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{f(z)}{\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{f(z_i)}{\lambda z_i} = z(1 + \xi(z)) \prod_{i=1}^n \frac{f(z_i)}{\lambda z_i}$$

$$= z(1 + \xi(z)) \prod_{i=1}^n (1 + \xi(z_i)) = z \prod_{i=0}^n (1 + \xi(z_i)) .$$

Obsérvese que $z_0 = f^0(z) = z$.

Por otra parte, usando a) :

$$|\xi(z_i)| \leq \alpha|z_i| = \alpha|f^i(z)| \leq \alpha|z|\mu^i ,$$

puesto que $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i$ es una serie convergente (serie geométrica, $0 < \mu < 1$),

así lo es $\alpha|z| \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i$. Aplicando el Test de Weierstrass se tiene que $\sum_{i=0}^n \xi(z_i)$

es absolutamente y uniformemente convergente. Entonces $\prod_{i=0}^n (1 + \xi(z_i))$ es

absolutamente y uniformemente convergente. Por lo tanto, la sucesión de aplicaciones (ϕ_n) converge uniformemente a una aplicación h definida en el disco $|z| \leq r$, además $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi'_n(z) = h'(z)$, de esto último se tiene que $h'(0) = 1$.

La prueba del teorema está concluida. ■

Ejemplo 2.3. La aplicación $f(z) = 3\text{senz}$ holomorfa en $|z| < \infty$ con desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = 3z - \frac{1}{2}z^3 + \dots + 3(-1)^{2n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

(convergente) cumple las condiciones del Teorema 2.1, entonces $f(z)$ es analíticamente equivalente a su parte lineal.

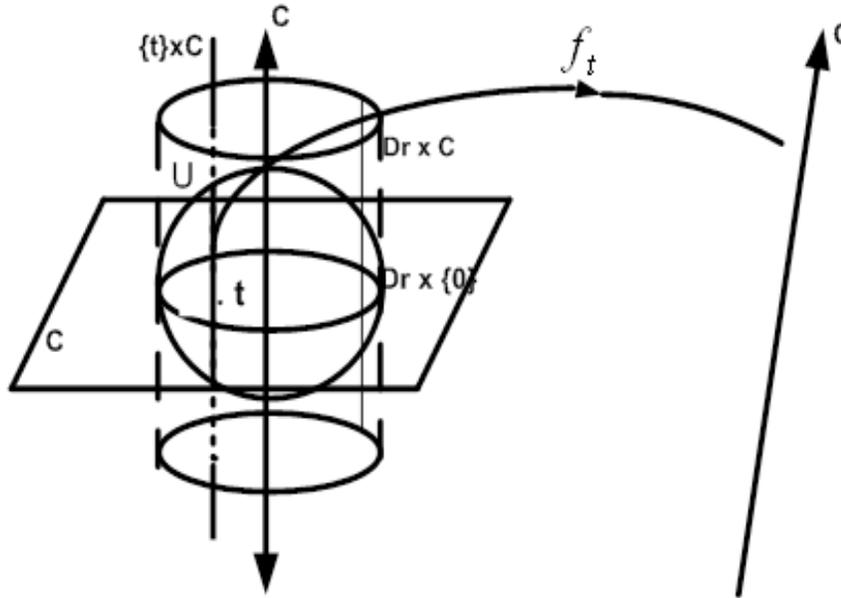
2.1.2. Familia analítica de gérmenes biholomorfos de $(\mathbb{C}, 0)$.

A continuación daremos algunas definiciones previas para la generalización del Teorema 2.1.

Definición 2.4. [Familia analítica de gérmenes biholomorfos de $(\mathbb{C}, 0)$]. Sea $\mathbb{D}_r = \{t \in \mathbb{C} : |t| < r\}$ y $U \subset \mathbb{C}^2$ una vecindad abierta del producto $\mathbb{D}_r \times \{0\}$ en $\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}$. Sea $f : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa tal que $f(t, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(t, 0) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{D}_r$.

Sea $f_t = f(t, -) : U_t \rightarrow \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{D}_r$, la restricción de f a $U_t = U \cap (\{t\} \times \mathbb{C})$.

El conjunto $\{f_t\}_{t \in \mathbb{D}_r}$ es una familia analítica de gérmenes biholomorfos de $(\mathbb{C}, 0)$, el cual definiremos por una aplicación biholomorfa $F : U \subset \mathbb{D}_r \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}_r \times \mathbb{C}$, en su imagen, tal que $F(t, z) = (t, f(t, z))$.



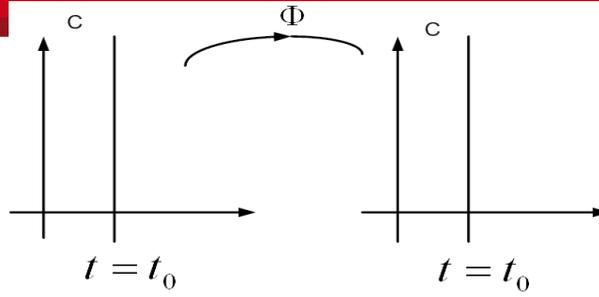
Ejemplo 2.5. : Sea U y \mathbb{D}_r como en la Definición 2.4. La aplicación holomorfa $f : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(t, z) = 2z$ cumple las condiciones de la Definición 2.4, esto es $f(t, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(t, 0) = 2 \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{D}_r$.

Definición 2.6. [Familia de cambio de coordenadas]. Sea $F : U \subset \mathbb{D}_r \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}_r \times \mathbb{C}$ la familia analítica definida previamente, con los mismos U, U_t, \mathbb{D}_r . **Una familia analítica de cambio de coordenadas** de la familia analítica F es un germen biholomorfo

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) &\longrightarrow (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) \quad , \\ (t, z) &\longmapsto \Phi(t, z) = (t, \phi(t, z)) \end{aligned}$$

donde $\phi(t, z)$ es un cambio de coordenadas para f_t , con t fija.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_r \times \{0\} \supset U & \xrightarrow{F} & F(U) \subset \mathbb{D}_r \times \{0\} \\ (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) & & (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) & \xrightarrow{\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}} & (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) \end{array}$$



$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} : (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{D}_r \times \mathbb{C}, \mathbb{D}_r \times \{0\})$ es el cambio de coordenadas de F por Φ .

Teorema 2.7. [*Schröder-Koenigs para familias analíticas*]. Sea F una familia de gérmenes biholomorfos de $(\mathbb{C}, 0)$ parametrizados por \mathbb{D}_r , tal que $|\nu(t)| = \left| \frac{\partial F}{\partial z}(t, 0) \right| \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{D}_r$. Entonces, existe una familia analítica de cambios de coordenadas Φ tal que, para todo $t \in \mathbb{D}_r$,

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(t, z) = (t, \nu(t).z) ,$$

donde $\nu(t).z$ es una aplicación lineal en z . Φ es único salvo por un cambio de coordenadas lineal para cada z fija.

Prueba: Sea F una familia analítica como en la hipótesis, $F(t, z)$ se puede expresar como :

$$F(t, z) = (t, \nu(t)z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \dots) ,$$

con $|\nu(t)| \neq 1$ y $\nu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{D}_r$.

Objetivos:

(i) Encontrar una expresión formal $\Phi(t, \xi) = (t, \phi(t, \xi))$,

$$\Phi(t, \xi) = (t, b_1(t)\xi + b_2(t)\xi^2 + b_3(t)\xi^3 + \dots) ,$$

tal que

$$\Phi(t, \nu(t, \xi)) = F(t, \phi(t, \xi)) , \tag{2.8}$$

donde $\nu(t, \xi) = \nu(t).\xi$ (aplicación lineal de ξ).

(ii) Demostrar que $\Phi(t, \xi)$ converge en alguna vecindad U_t .

Parte (i):

$$\Phi(t, \nu(t, \xi)) = (t, b_1(t)\nu(t)\xi + b_2(t)\nu^2(t)\xi^2 + b_3(t)\nu^3(t)\xi^3 + \dots) , \quad y$$

$$F(t, \phi(t, \xi)) = (t, \nu(t)\phi(t, \xi) + a_2(t)\phi^2(t, \xi) + a_3(t)\phi^3(t, \xi) + \dots)$$

$$= (t, \nu(t)(b_1(t)\xi + b_2(t)\xi^2 + b_3(t)\xi^3 + \dots) + a_2(t)(b_1(t)\xi + b_2(t)\xi^2 + b_3(t)\xi^3 + \dots)^2 + \dots) .$$

De (2.8) tenemos que :

$$b_1(t)\nu(t)\xi = \nu(t)b_1(t)\xi , \quad (2.9)$$

$$b_2(t)\nu^2(t)\xi^2 = (\nu(t)b_2(t) + a_2(t)b_1^2(t))\xi^2 . \quad (2.10)$$

De (2.9) tenemos que la aplicación holomorfa $b_1(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{D}_r$, puede ser elegida libremente, así elegimos $b_1(t) \equiv 1$ para todo $t \in \mathbb{D}_r$.

De (2.10) tenemos que :

$$b_2(t) = \frac{a_2(t)b_1^2(t)}{\nu(t)[\nu(t) - 1]} . \quad (2.11)$$

Como $|\nu(t)| \neq 1$ y $\nu(t) \neq 0$ tenemos que (2.11) está unívocamente determinada .

En (2.8); supongamos que para $n > 2$ las aplicaciones $b_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ya fueron determinadas. Luego (2.8) podemos expresarla como :

$$\underbrace{\Phi(t, \nu(t, \xi)) - \Phi(t, \nu(t) \cdot \phi(t, \xi))}_{(I)} = \underbrace{F(t, \phi(t, \xi)) - \Phi(t, \nu(t) \cdot \phi(t, \xi))}_{(II)} ,$$

$$(I) = \left(t, \nu(t)\xi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\xi^i \right) - \left(t, \nu(t)\phi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\phi^i \right) \\ = \left(0, \nu(t)\xi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\xi^i - \nu(t)\phi - \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\phi^i \right) .$$

$$(II) = \left(t, \nu(t)\phi + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\phi^i \right) - \left(t, \nu(t)\phi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\phi^i \right) \\ = \left(0, \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\phi^i - \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\phi^i \right) .$$

Puesto que (I) = (II), el término

$$\sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\phi^i$$

se anula, así resulta :

$$\left(0, \nu(t)\xi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\xi^i - \nu(t)\phi \right) = \left(0, \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\phi^i \right) .$$

Entonces:

$$\left(0, \nu(t)\xi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\nu^i(t)\xi^i - \nu(t) \left(\xi + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)\xi^i \right) \right) = \left(0, \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\phi^i \right) .$$

Finalmente:

$$\left(0, \sum_{i=2}^{\infty} (\nu^i(t) - \nu(t))b_i(t)\xi^i \right) = \left(0, \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\phi^i \right) .$$

De esta última igualdad, se deduce que $(\nu^n(t) - \nu(t))b_n(t)$ el coeficiente de ξ^n es un polinomio que depende de los a_k (para $k = 1, \dots, n$) y de los b_k (para $k = 1, \dots, n-1$) los cuales ya son conocidos (al desarrollar, observe el lado derecho de la igualdad). Además, por las condiciones para $\nu(\xi)$, se tiene que $b_n(t)$ está unívocamente determinado.

Parte (ii): La expresión (2.8) es equivalente a :

$$G \circ H(t, \xi) = H \circ F(t, \xi) , \tag{2.12}$$

donde $G(t, \xi) = (t, \nu(t)\xi)$ y $H = \Phi^{-1}$.

Demostremos que $H_n(t, \xi)$ converge uniformemente a un biholomorfismo $H(t, \xi)$ en alguna vecindad $U_t \ni 0$ con t fijo. Además $\frac{\partial H}{\partial z}(t, 0) = (0, 1)$.

Sea $r > 0$. Escogemos una constante $\mu < 1$ tal que $\mu^2 < |\nu(t)| < \mu$.

Una vecindad $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, (t, z) \in U_t, \text{ con } t \text{ fijo}\}$, además podemos reducir r tal que por la continuidad se cumpla que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \right| \leq \mu < 1, \text{ para todo } z \in B_r .$$

Luego, en B_r definimos la sucesión

$$H_n(t, \xi) = (t, A_n(t, \xi)) ,$$

donde:

$$A_n \circ F(t, \xi) = \nu(t)A_{n+1}(t, \xi) , \tag{2.13}$$

con

$$A_1(t, \xi) = \frac{f(t, \xi)}{\nu(t)} .$$

Note que :

$$A_{n+1}(t, \xi) = \frac{f(t, \nu^n(t)A_n(t, \xi))}{\nu^{n+1}(t)} .$$

En efecto:

Para $n=1$:

$$A_2(t, \xi) = \frac{1}{\nu(t)} A_1 \circ F(t, \xi) = \frac{1}{\nu(t)} A_1(t, f(t, \xi))$$

$$= \frac{1}{\nu(t)} \frac{f(t, f(t, \xi))}{\nu(t)} = \frac{f(t, \nu(t)A_1(t, \xi))}{\nu^2(t)} .$$

Suponemos válido para $n = h - 1$:

$$A_h(t, \xi) = \frac{f(t, \nu^{h-1}(t)A_{h-1}(t, \xi))}{\nu^h(t)} .$$

Para $n = h$:

$$\begin{aligned} A_{h+1}(t, \xi) &= \frac{1}{\nu(t)} A_h \circ F(t, \xi) = \frac{1}{\nu(t)} A_h(t, f(t, \xi)) \\ &= \frac{1}{\nu(t)} \frac{f(t, \nu^{h-1}(t)A_{h-1}(t, f(t, \xi)))}{\nu^h(t)} \quad (\text{hip. inductiva}) \\ &= \frac{1}{\nu(t)} \frac{f(t, \nu^{h-1}(t) \cdot \nu(t)A_h(t, \xi))}{\nu^h(t)} \\ &\quad (\text{la anterior igualdad se da por (2.13)}) \\ &= \frac{f(t, \nu^h(t)A_h(t, \xi))}{\nu^{h+1}(t)} . \end{aligned}$$

Demostraremos que $A_n(t, \xi)$ converge a una aplicación holomorfa $A(t, \xi)$ en B_r para t fijo.

$$\begin{aligned} |A_{n+1}(t, \xi) - A_n(t, \xi)| &= \left| \frac{f(t, \nu^n(t)A_n(t, \xi))}{\nu^{n+1}(t)} - A_n(t, \xi) \right| \\ &= \frac{1}{|\nu(t)^{n+1}|} |f(t, \nu^n(t)A_n(t, \xi)) - \nu(t)\nu^n(t)A_n(t, \xi)| . \end{aligned}$$

Se sabe que $|f(t, z) - \nu(t)z| \leq \alpha|z|^2$, $\alpha > 0$, para todo $z \in B_r$.
Por lo tanto:

$$|A_{n+1}(t, \xi) - A_n(t, \xi)| \leq \frac{1}{|\nu(t)^{n+1}|} \cdot \alpha |\nu^n(t)A_n(t, \xi)|^2 = \alpha \cdot |\nu(t)|^{n-1} |A_n(t, \xi)|^2 . \quad (2.14)$$

En la demostración del Teorema 2.1 se verifica que :

$$|f^n(z)| \leq \mu^n |z| , n = 1, 2, \dots ; |z| \leq r .$$

Como en nuestro caso t es fijo, tenemos :

$$\begin{aligned} |A_1(t)| &= \left| \frac{f(t, z)}{\nu(t)} \right| \leq \frac{\mu}{|\nu(t)|} |z| , \\ |A_2(t)| &= \left| \frac{f(t, f(t, z))}{\nu^2(t)} \right| \leq \frac{\mu |f(t, z)|}{|\nu(t)|^2} \leq \frac{\mu^2}{|\nu(t)|^2} |z| . \end{aligned}$$

Así: $|A_n(t)| \leq \frac{\mu^n}{|\nu(t)|^n} |z|$, para todo $z \in B_r$.

Luego, en (2.14) :

$$\begin{aligned} |A_{n+1}(t, \xi) - A_n(t, \xi)| &\leq \alpha |\nu(t)|^{n-1} \frac{\mu^{2n}}{|\nu(t)|^{2n}} |\xi|^2 \\ &\leq \alpha \cdot \frac{|\nu(t)|^{n-1}}{|\nu(t)|^n} \left(\frac{\mu^2}{|\nu(t)|} \right)^n r^2 \\ &= \frac{\alpha r^2}{|\nu(t)|} \left(\frac{\mu^2}{|\nu(t)|} \right)^n < \frac{\alpha r^2}{\mu^2} K^n, \end{aligned}$$

donde $K = \frac{\mu^2}{|\nu(t)|} < 1$, pues $\mu^2 < |\nu(t)| < \mu < 1$.

Dado que K^n tiende a 0 cuando n tiende al infinito, entonces $|A_{n+1}(t, \xi) - A_n(t, \xi)|$ tiende a 0.

Por lo tanto $A_n(t, \xi)$ converge uniformemente a $A(t, \xi)$ en B_r . De esto se tiene:

$$A \circ F(t, \xi) = \nu(t)A(t, \xi).$$

Además: $H_n(t, \xi)$ converge uniformemente al biholomorfismo $H(t, \xi)$ para todo ξ en B_r , y t fijo.

Finalmente verificamos si se cumple (2.12):

$$\begin{aligned} G \circ H(t, \xi) &= G(\lim H_n(t, \xi)) = G(t, \lim A_n(t, \xi)) \\ &= G(t, A(t, \xi)) = (t, \nu(t)A(t, \xi)) = (t, A \circ F(t, \xi)) \\ &= (t, A(t, f(t, \xi))) = \lim (t, A_n(t, f(t, \xi))) \\ &= \lim H_n(t, f(t, \xi)) = \lim H_n \circ F(t, \xi) = H \circ F(t, \xi). \end{aligned}$$

La prueba está concluida. ■

2.2. Aproximación por Elementos de un Grupo Especial de Aplicaciones Holomorfas.

Sea $Bih_0(\mathbb{C})$ el grupo de gérmenes de biholomorfismos que dejan fijo el 0, y Ω un conjunto abierto conexo de \mathbb{C} con $0 \in \mathbb{C}$, de tal manera que dado f un representante de un germen que pertenece a $Bih_0(\mathbb{C})$ se tiene que $f(z) \in \Omega$. Bajo estas consideraciones, la operación de composición de aplicaciones define la acción de $Bih_0(\mathbb{C})$ en Ω , $(f, z) \mapsto f.z = f(z)$. Pues se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $Id.z = z$, para todo $z \in \Omega$, donde Id denota a la aplicación identidad en $Bih_0(\mathbb{C})$, y
2. $f.(g.z) = (f.g).z$ para todo $z \in \Omega$ y $f, g \in Bih_0(\mathbb{C})$.

Se define la órbita de $z \in \Omega$ como el conjunto $Bih_0(\mathbb{C}).z = \{f.z : \text{para todo } f \in Bih_0(\mathbb{C})\}$.

Definición 2.8. Sea $\Gamma \subset Bih_0(\mathbb{C})$ un subgrupo, con $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ sus generadores definidos en algún conjunto abierto y conexo Ω_0 alrededor de 0 en \mathbb{C} . Los elementos de un grupo especial de aplicaciones de holonomía $P\Gamma$ son las parejas (f, Ω_f) , donde $f \in \Gamma$ y Ω_f es el dominio de definición de f . Para $f, g \in \Gamma$, la operación de grupo está dada por: $(f, \Omega_f) \circ (g, \Omega_g) := (f \circ g, \Omega_{f \circ g})$.

El dominio Ω_f se construye como sigue: Sea

$$f = \prod_{k=1}^N f_{j_k}^{\epsilon_k} = f_{j_N}^{\epsilon_N} \circ \dots \circ f_{j_1}^{\epsilon_1}, \quad j_k \in \{1, \dots, r\}, \quad \epsilon_k \in \{-1, 1\} \quad (2.15)$$

cualquier representación de f en términos de los generadores. Cualquier germen arbitrario $\prod_{k=1}^n f_{j_k}^{\epsilon_k}$, con $n \leq N$, lo denominaremos germen intermedio (o representación intermedia) de f . Definimos Ω_{\prod_f} como la máxima región convexa con centro en el punto 0 , contenida en Ω_0 , en la cual el germen f y todos los gérmenes intermedios de la representación están definidos y además se tiene:

$$\left(\prod_{k=1}^n f_{j_k}^{\epsilon_k} \right) (\Omega_{\prod_f}) \subset \Omega_0.$$

Finalmente, Ω_f es definida como la unión de todas las regiones Ω_{\prod_f} correspondientes a todas las posibles representaciones de f de la forma de (2.15). De la definición se tiene que cada germen f obtiene su prolongación analítica en Ω_f .

Observación: Por construcción para $f, g \in \Gamma$, se tiene que por lo general $\Omega_{f \circ g}$ es diferente de $\Omega_f \cap \Omega_g$.

La construcción anterior nos permite definir la órbita de z bajo la acción del grupo $P\Gamma$ como el siguiente conjunto: $P_\Gamma(z) = \{f(z) : f \in \Gamma, z \in \Omega_f\} \subset \Omega_f$.

El siguiente teorema nos muestra un criterio para que toda aplicación lineal expresada en un conveniente sistema de coordenadas (el cual detallamos en el enunciado del mismo), sea aproximada por los elementos de un grupo especial de aplicaciones holomorfas.

Teorema 2.9. Sea Γ un subgrupo de $Bih_0(\mathbb{C})$ y f_j ($j=1, \dots, n$) sus generadores definidos en una vecindad Ω_0 del origen.

Supongamos que $|f'_1(0)| \neq 1$ y sea ξ la carta que linealiza a f_1 la cual está definida en una vecindad $U \subset \Omega_0$ del 0; supongamos también que en la carta coordenada ξ , $U = \{q \in \mathbb{C} : |\xi(q)| < \rho\}$.

Denotemos por $\overline{D_0\Gamma}$ a la cerradura del subgrupo $D_0\Gamma$ de \mathbb{C}^* generado por las derivadas $\nu_j = f'_j(0)$, $j = 1, \dots, n$. Entonces, para cualquier $\nu \in \overline{D_0\Gamma}$ existe una sucesión de biholomorfismos $F_\ell \in \Gamma$ la cual en coordenadas ξ converge uniformemente a la aplicación $\xi \rightarrow \nu\xi$ en cualquier subregión compacta K de la región

$$U \cap \nu^{-1}(U) = \left\{ q \in \Omega_0 : |\xi(q)| < \min \left\{ \rho, \frac{\rho}{|\nu|} \right\} \right\} .$$

En la convergencia uniforme de la sucesión $F_\ell \in \Gamma$ en el compacto $K \subset U \cap \nu^{-1}(U)$, se supone que $K \subset \Omega_{F_\ell}$ para toda ℓ suficientemente grande.

Prueba: Primero demostramos el caso en el que $\nu = f'(0)$ para alguna $f \in \Gamma$. Sea $\nu_1 = f'_1(0)$, con $|\nu_1| < 1$ (si $|\nu_1| > 1$ considerar f_1^{-1}).

Definamos : $F_\ell = f_1^{-\ell} \circ f \circ f_1^\ell$ donde $f_1^\ell = \underbrace{f_1 \circ \dots \circ f_1}_{\ell \text{ veces}}$ y $f_1^{-\ell} = \underbrace{f_1^{-1} \circ \dots \circ f_1^{-1}}_{\ell \text{ veces}}$.

Supongamos que ξ es la carta que linealiza a f_1 en U , además consideremos que en esta carta f y F_ℓ se expresan como $f(\xi)$ y $F_\ell(\xi)$ respectivamente.

Si

$$f(\xi) = \nu\xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \xi^k ,$$

es el desarrollo en serie de potencias para f , entonces el desarrollo en serie de potencias para F_ℓ es

$$\begin{aligned} F_\ell(\xi) &= f_1^{-\ell} \circ f \circ f_1^\ell(\xi) = f_1^{-\ell} \circ f(\nu_1^\ell \xi) = f_1^{-\ell} \left(\nu_1^\ell \xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu_1^{\ell k} \xi^k \right) \\ &= \nu_1^{-\ell} \left(\nu_1^\ell \xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu_1^{\ell k} \xi^k \right) = \nu\xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu_1^{\ell(k-1)} \xi^k . \end{aligned}$$

Afirmación: $F_\ell(\xi)$ está definida en $U = \{q \in \mathbb{C} : |\xi(q)| < \rho\}$ para ℓ suficientemente grande y $F_\ell(\xi)|_U$ converge uniformemente en compactos a $\nu\xi|_U$. Esto es; dado $\delta > 0$, existe $L \in \mathbb{N}$ ($L = L(\delta)$) tal que para toda $\ell > L$ se tiene $|F_\ell(\xi) - \nu\xi| < \delta$, donde $\xi \in U$, ($|\xi| < \rho$).

En efecto:

Sea $\delta > 0$, y supongamos que $|\xi| < \rho$. Sea $L \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\ell > L$,

$$|\nu_1^\ell| < \epsilon, \quad (\epsilon = \epsilon(\delta) > 0).$$

Como

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu_1^{\ell(k-1)} \xi^k \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |\nu_1^\ell|^{(k-1)} |\xi|^k < \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot \epsilon^{(k-1)} \rho^k.$$

Escogemos L grande tal que

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot \epsilon^{(k-1)} \rho^k < \delta, \quad \text{entonces} \quad |F_\ell(\xi) - \nu\xi| < \delta,$$

para toda $\ell > L$ y $|\xi| < \rho$.

Por lo tanto $F_\ell(\xi)$ converge uniformemente a $\nu\xi$ en el disco $|\xi| < \rho$.

Resta demostrar que Ω_{F_ℓ} contiene a cualquier compacto $K \subset U \cap \nu^{-1}(U)$ para ℓ suficientemente grande.

Recordemos que Ω_{F_ℓ} ha sido definida en base a Ω_0 (vecindad conexa del origen en la cual están definidas las transformaciones f_j , $j = 1, 2, \dots, n$). Sin pérdida de generalidad suponer que Ω_0 coincide con U .

Puesto que todas las representaciones intermedias de f (ver Definición 2.8) tienen como dominio a una región $V \subset \Omega_0 = U$, resta demostrar que todas las representaciones intermedias de F_ℓ ,

$$g_m = f_1^m \quad \text{y} \quad h_{m,\ell} = f_1^{-m} \circ f \circ f_1^\ell, \quad 0 \leq m \leq \ell;$$

están definidas en U y para todo compacto $K \subset U \cap \nu^{-1}(U)$, $g_m(K) \subset U$ y $h_{m,\ell}(U) \subset U$ para ℓ suficientemente grande.

En efecto:

$$1^\circ) \quad |g_m(\xi)| = |f_1^m(\xi)| = |\nu_1^m \xi| = |\nu_1|^m |\xi| < |\xi|, \quad \text{pues} \quad |\nu_1|^m < 1.$$

Esto es, $g(U) \subset U$; $U = \Omega_{g_m}$.

2°) Para el caso de $h_{m,\ell}$; observe que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} |f_1^\ell(\xi)| = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} |\nu_1^\ell \xi|, \quad \text{este tiende a } 0, \quad \text{pues } 0 \neq |\nu_1|^\ell \text{ que tiende a } 0.$$

Esto es, para ℓ suficientemente grande ($\ell > L$) $f_1^\ell(U)$ toma valores complejos muy cercanos a cero y para $\xi \in f_1^\ell(U)$,

$$f(\xi) - \nu\xi = a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

$$|f(\xi) - \nu\xi| \leq |\xi| \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |\xi|^{k-1}.$$

Puesto que para $\xi \in f_1^\ell(U)$, $|\xi|^{k-1}$ tiende a cero, para todo $k \geq 2$. Tenemos dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\xi| < \delta$ implica que $|f(\xi) - \nu\xi| < \epsilon|\xi|$.

De esta última desigualdad, dado $\epsilon > 0$, existe $L > 0$ tal que si $\ell \geq L$ y $|\xi| < \rho$ ($\Omega_0 = U$ es el dominio de f_1) entonces

$$|f(f_1^\ell(\xi)) - \nu f_1^\ell(\xi)| < \epsilon |f_1^\ell(\xi)| .$$

Puesto que $f_1(\xi) = \nu_1 \xi$, entonces

$$|f(f_1^\ell(\xi)) - \nu \nu_1^\ell \xi| < \epsilon |\nu_1^\ell \xi| < \epsilon |\nu_1^\ell \rho| ,$$

dividiendo esta última desigualdad por ν_1^m tenemos :

$$|\nu_1^{-m} f(f_1^\ell(\xi)) - \nu \nu_1^{\ell-m} \xi| < \epsilon |\nu_1^{\ell-m} \rho| ,$$

entonces

$$|h_{m,\ell}(\xi) - \nu \nu_1^{\ell-m} \xi| < \epsilon |\nu_1^{\ell-m} \rho| , \tag{2.16}$$

donde $\nu \nu_1^{\ell-m} \xi$ es una aplicación lineal multiplicación por $\nu \nu_1^{\ell-m}$.

Definamos $\epsilon^* := \epsilon |\nu_1^{\ell-m} \rho|$ el cual es arbitrariamente pequeño al hacer ℓ suficientemente grande ($\ell > L_\epsilon$) .

Así :

$$|h_{m,\ell}(\xi) - \nu \nu_1^{\ell-m} \xi| < \epsilon^* .$$

Dado $K \subset U \cap \nu^{-1}(U)$, hacemos $\epsilon^* < d(K, \partial(U \cap \nu^{-1}(U)))$.

Por lo tanto, de esto último junto con (2.16) deducimos que para $\ell \geq L_\epsilon$ y $0 \leq m \leq \ell$ el germen intermedio $h_{\ell,m}$ del grupo finitamente generado de aplicaciones holomorfas (inyectivas) Γ está definido en K .

Esto concluye la demostración para el caso $\nu = f'(0)$ para alguna $f \in \Gamma$.

Dado $\nu \in \overline{D_0 \Gamma}$, existe una sucesión $\{\nu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ la cual converge uniformemente a ν y $\nu_m = f'_m(0)$.

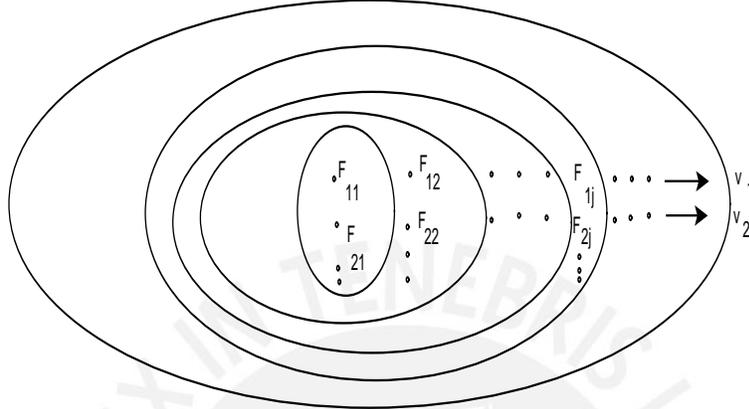
Por la primera parte de la demostración de este teorema se tiene que para cada ν_m existe una sucesión $\{F_{m,j}\}_{j \geq 1}$ en Γ tal que $\{F_{m,j}\}$ converge uniformemente a ν_m en compactos de $U \cap \nu_m^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{array}{cccccc} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} & \dots & \rightarrow & \nu_1 \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2k} & \dots & \rightarrow & \nu_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & F_{2k} & \dots & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mk} & \dots & \rightarrow & \nu_m \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \rightarrow & \cdot \end{array}$$

Luego, sea K_j una sucesión creciente de compactos tal que $\bigcup K_j = U \cap \nu_m^{-1}(U)$. Hacemos una reenumeración de la sucesión $\{F_{mj}\}$ de tal manera que F_{mj} esté bien definida en K_j y

$$|F_{mj} - \nu_m| < 2^{-j}, \tag{2.17}$$

sabemos que ν_m tiende a ν uniformemente, esto es, $|\nu_m - \nu| < \epsilon_m$ ($\epsilon_m > 0$).



De esto último junto con (2.17) se tiene :

$$|F_{mj} - \nu| \leq |F_{mj} - \nu_m| + |\nu - \nu_m| < 2^{-j} + \epsilon_m .$$

Haciendo $m = j$:

$$|F_{jj} - \nu| < 2^{-j} + \epsilon_j ,$$

así cuando $m = j$ tiende a $+\infty$, la sucesión diagonal $\{F_{jj}\}$ converge uniformemente a ν en compactos de $U \cap \nu^{-1}(U)$. La prueba está concluida. ■

2.3. Densidad en Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$.

El teorema que enunciamos a continuación nos proporciona explícitamente las condiciones para la existencia de órbitas densas bajo la acción de un subgrupo $\Gamma \subset Bih_0(\mathbb{C})$.

Teorema 2.10. *Sea $\Gamma \subset Bih_0(\mathbb{C})$ un subgrupo finitamente generado tal que $D_0\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ el grupo de partes lineales de Γ es denso en \mathbb{C}^* . Entonces existe una vecindad del origen $U \subset \mathbb{C}$, tal que la órbita de cualquier punto en $(U - \{0\})$ bajo la acción del grupo Γ es densa en U .*

Prueba: Se debe demostrar que $\overline{P_\Gamma(p)} = U$ con $p \neq 0$.

Sea $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r\}$ el conjunto de generadores del grupo $D_0\Gamma$, donde $\nu_j = f'_j(0)$ con $|\nu_j| \neq 1$ para algún j . En caso contrario, si para todo j , $|\nu_j| = 1$ entonces $|\nu| = 1$ para todo $\nu \in \overline{D_0\Gamma}$, esto implica que $\nu \in S^1$, así $\mathbb{C}^* = \overline{D_0\Gamma} \subset S^1$ lo cual es una contradicción.

Considerando sin pérdida de generalidad $|\nu_1| < 1$, también, sea ξ la carta que linealiza a f_1 en \tilde{U} , con $0 \in \tilde{U}$, donde

$$\tilde{U} = \{z \in \mathbb{C} : |\xi(z)| < \rho\} \subset \Omega_0,$$

con $\rho > 0$ como en el Teorema 2.9.

Sea $p, q \in \tilde{U} - \{0\}$ con $p \neq q$ tal que $\frac{\xi(q)}{\xi(p)} = \nu$; con $|\nu| \neq 1$.

En efecto: $\frac{|\xi(q)|}{|\nu|} = |\xi(p)| < \rho$, entonces $|\xi(q)| < \rho|\nu| < \rho$ siempre que $|\nu| < 1$ (de manera análoga siempre que $|\nu| > 1$).

Como $D_0\Gamma$ es denso en \mathbb{C}^* , entonces existe una sucesión $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_0\Gamma$ que converge a $\nu \in \overline{D_0\Gamma}$.

Por el Teorema 2.9 se tiene que para $\nu \in \overline{D_0\Gamma}$ existe una sucesión de aplicaciones $F_\ell \in \Gamma$ que converge uniformemente a $\nu(\xi)$ en $\tilde{U} \cap \nu^{-1}(\tilde{U})$.

Así, para $p \in \tilde{U}$, $F_\ell(\xi(p))$ converge a $\nu(\xi(p)) = \nu \cdot \xi(p) = \xi(q)$.

Puesto que $p \in \tilde{U}$ es tomado de manera arbitraria y $q \in \tilde{U}$; por la definición de densidad y de órbita se da la conclusión. La prueba está concluida. ■

El Teorema 2.10 asegura la existencia de una vecindad del origen $U \subset \mathbb{C}$, en la cual la órbita de cualquier punto en $(U - \{0\})$ bajo la acción del grupo Γ es densa. Ahora nos preguntamos ¿Cuándo tal vecindad U es todo \mathbb{C} ?, para responder a está interrogante, en la siguiente sección introduciremos las definiciones de invariancia y ergodicidad de un subgrupo finitamente generado $\Gamma \subset Bih_0(\mathbb{C})$.

2.4. Ergodicidad en Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$.

Para dos conjuntos medibles $A, B \subset \mathbb{C}$; la notación $A \doteq B$ indica que la diferencia simétrica $(A - B) \cup (B - A)$ tiene medida de Lebesgue cero. Es decir, los conjuntos A y B son casi iguales, si lo que está fuera de su intersección es casi nulo.

Definición 2.11. *Dos conjuntos medibles de Lebesgue $A, B \subset \mathbb{C}$ son equivalentes en 0 si existe un disco abierto U alrededor de 0 tal que $A \cap U \doteq B \cap U$.*

Definición 2.12. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto Boreliano. Un germen de conjunto Boreliano de A en el $0 \in \mathbb{C}$, denotado por $[A]$ (o también por \mathcal{A}), es la clase de equivalencia de A bajo la relación dada en la Definición 2.11.*

Usualmente llamaremos germen de conjunto Boreliano al conjunto $A \subset \mathbb{C}$, un representante de $[A]$.

Definición 2.13. [Γ -invariante]

Sea $[A]$ un germen de conjunto Boreliano en el $0 \in \mathbb{C}$. Dado $f \in \text{Bih}_0(\mathbb{C})$, decimos que $[A]$ es f -invariante si $[A] = [f(A)]$. Además, $[A]$ es Γ -invariante si $[A] = [f(A)]$ para todo $f \in \Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$.

Definición 2.14. [Γ es ergódico]

Un subgrupo finitamente generado $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ es ergódico si para todo germen de conjunto Boreliano $[A]$, Γ -invariante, se tiene $[A] = [\mathbb{C}]$ ó $[\emptyset]$. Es decir, A o su complemento tienen medida de Lebesgue cero en alguna vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.

Lema 2.15. Dado $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = \mu z$, B un conjunto boreliano h -invariante y $\delta, \eta = \eta(\delta)$ números reales positivos tales que:

$$1 \geq \frac{\lambda(D(z_0, \eta) \cap B)}{\lambda(D(z_0, \eta))} \geq (1 - \delta),$$

con $z_0 \in B$. Entonces para $D_h := h(D(z_0, \eta))$ se cumple:

$$1 \geq \frac{\lambda(D_h \cap B)}{\lambda(D_h)} \geq 1 - \delta,$$

donde λ denota la medida de Lebesgue.

Prueba: Como B es h -invariante, $B = h(B) \text{ mod } E$ con $\lambda(E) = 0$. Sin pérdida de generalidad, consideramos $B = h(B)$. Entonces $h(D(z_0, \eta)) \cap h(B) = D_h \cap h(B) \equiv D_h \cap B$. Además, usando (1.10), calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(D_h \cap B)}{\lambda(D_h)} &= \frac{\lambda(h(D(z_0, \eta)) \cap h(B))}{\lambda(h(D(z_0, \eta)))} = \frac{\lambda(h(D(z_0, \eta) \cap B))}{\lambda(h(D(z_0, \eta)))} = \frac{\int_{D(z_0, \eta) \cap B} |h'(z)|^2 dz}{\int_{D(z_0, \eta)} |h'(z)|^2 dz} \\ &= \frac{\int_{D(z_0, \eta) \cap B} |\mu|^2 dz}{\int_{D(z_0, \eta)} |\mu|^2 dz} = \frac{\int_{D(z_0, \eta) \cap B} dz}{\int_{D(z_0, \eta)} dz} = \frac{\lambda(D(z_0, \eta) \cap B)}{\lambda(D(z_0, \eta))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$1 \geq \frac{\lambda(D_h \cap B)}{\lambda(D_h)} \geq 1 - \delta.$$

La prueba está concluida. ■

Lema 2.16. Dado $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa con $h'(0) = \mu$, B un conjunto boreliano de \mathbb{C} , con B h -invariante. Sean también $\delta_1, \delta, \eta = \eta(\delta), R$ números reales positivos bastante pequeños tal que:

- (i) $|h'(z) - \mu| < \delta_1$ para todo $z \in D(0, R)$,
- (ii) para cualquier $z_0 \in B$,

$$1 \geq \frac{\lambda(D(z_0, \eta) \cap B)}{\lambda(D(z_0, \eta))} \geq 1 - \delta$$

con $D(z_0, \eta) \subset D(0, R)$ y

- (iii) sea la aplicación afín $\tilde{h}(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0)$ con $\tilde{h}(D(z_0, \eta/4)) = D(h(z_0), |h'(z_0)\eta/4|) \subset h(D(z_0, \eta))$ para todo $z \in D(z_0, \eta/4)$.

Entonces, existe :

$$\delta' = - \left[-1 + \frac{(|\mu| - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon)}{(|\mu| + \epsilon_1)^2} \right] \left[\frac{4(|\mu| - \epsilon_1)}{(|\mu| + \epsilon_1)} \right]^2 > 0$$

tal que :

$$1 \geq \frac{\lambda(D(h(z_0), |h'(z_0)\eta/4) \cap B)}{\lambda(D(h(z_0), |h'(z_0)\eta/4))} \geq 1 - \delta'.$$

Prueba: Puesto que $||h'(z)| - \mu| \leq |h'(z) - \mu|$ para todo $z \in D(0, R)$, por la parte (i) se concluye:

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \leq |h'(z)|^2 \leq (|\mu| + \delta_1)^2, \quad (2.18)$$

en particular para $z = z_0$:

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \leq |h'(z_0)|^2 \leq (|\mu| + \delta_1)^2. \quad (2.19)$$

Integrando sobre $D(z_0, \eta/4)$:

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta/4)} d\lambda \leq \int_{D(z_0, \eta/4)} |h'(z_0)|^2 d\lambda \leq (|\mu| + \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta/4)} d\lambda.$$

Como $\tilde{h}'(z) = h'(z_0)$, luego:

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta/4)} d\lambda \leq \int_{D(z_0, \eta/4)} |\tilde{h}'(z_0)|^2 d\lambda \leq (|\mu| + \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta/4)} d\lambda,$$

aplicamos (1.10):

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \lambda(D(z_0, \eta/4)) \leq \lambda(\tilde{h}(D(z_0, \eta/4))) \leq (|\mu| + \delta_1)^2 \lambda(D(z_0, \eta/4)). \quad (2.20)$$

Se sabe que $\lambda(D(z_0, \eta/4)) = \frac{\pi\eta^2}{16} = \frac{1}{16}\lambda(D(z_0, \eta))$. Reemplazando este último resultado en (2.20):

$$\frac{(|\mu| - \delta_1)^2}{16} \lambda(D(z_0, \eta)) \leq \lambda(\bar{D}) \leq \frac{(|\mu| + \delta_1)^2}{16} \lambda(D(z_0, \eta)), \quad (2.21)$$

donde $\bar{D} := \tilde{h}(D(z_0, \eta/4)) = D(h(z_0), |h'(z_0)\eta/4|)$.

Integrando sobre $D(z_0, \eta)$ en (2.18):

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta)} d\lambda \leq \int_{D(z_0, \eta)} |h'(z)|^2 d\lambda \leq (|\mu| + \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta)} d\lambda ,$$

aplicamos (1.10):

$$(|\mu| - \delta_1)^2 \lambda(D(z_0, \eta)) \leq \lambda(h(D(z_0, \eta))) \leq (|\mu| + \delta_1)^2 \lambda(D(z_0, \eta)) . \quad (2.22)$$

De (2.22):

$$(a) \quad \frac{\lambda(h(D(z_0, \eta)))}{(|\mu| + \delta_1)^2} \leq \lambda(D(z_0, \eta)) ,$$

$$(b) \quad \lambda(D(z_0, \eta)) \leq \frac{\lambda(h(D(z_0, \eta)))}{(|\mu| - \delta_1)^2} .$$

Reemplazando las expresiones (a) y (b) en (2.21):

$$\left[\frac{|\mu| - \delta_1}{4(|\mu| + \delta_1)} \right]^2 \lambda(h(D(z_0, \eta))) \leq \lambda(\bar{D}) \leq \left[\frac{|\mu| + \delta_1}{4(|\mu| - \delta_1)} \right]^2 \lambda(h(D(z_0, \eta))) . \quad (2.23)$$

Considerando (1.10), (2.18), la parte (ii) de la hipótesis y la expresión (a) tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(h(D(z_0, \eta) \cap B)) &= \int_{D(z_0, \eta) \cap B} |h'(z)|^2 d\lambda \geq (|\mu| - \delta_1)^2 \int_{D(z_0, \eta) \cap B} d\lambda \\ &= (|\mu| - \delta_1)^2 \lambda(D(z_0, \eta) \cap B) \geq (|\mu| - \delta_1)^2 (1 - \delta) \lambda(D(z_0, \eta)) \\ &\geq \frac{(|\mu| - \delta_1)^2 (1 - \delta)}{(|\mu| + \delta_1)^2} \lambda(h(D(z_0, \eta))) . \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lambda(h(D(z_0, \eta) \cap B)) \geq \frac{(|\mu| - \delta_1)^2 (1 - \delta)}{(|\mu| + \delta_1)^2} \lambda(h(D(z_0, \eta))) . \quad (2.24)$$

Es fácil ver que se cumple:

$$\bar{D} - B = \bar{D} - (\bar{D} \cap B) , \quad (2.25)$$

$$h(D(z_0, \eta)) - B = h(D(z_0, \eta)) - (h(D(z_0, \eta)) \cap B) . \quad (2.26)$$

Luego, por la parte (iii) de la hipótesis, $\bar{D} \subset h(D(z_0, \eta))$, así también $\bar{D} - B \subset h(D(z_0, \eta)) - B$, de (2.25) y (2.26), $\bar{D} - (\bar{D} \cap B) \subset h(D(z_0, \eta)) - (h(D(z_0, \eta)) \cap B) = h(D(z_0, \eta)) - h(D(z_0, \eta) \cap B)$. Por lo tanto se deduce que el área de $\bar{D} \cap B$ es mayor o igual al área de \bar{D} menos el área de $[h(D(z_0, \eta)) - h(D(z_0, \eta) \cap B)]$:

$$\lambda(\bar{D} \cap B) \geq \lambda(\bar{D}) - [\lambda(h(D(z_0, \eta))) - \lambda(h(D(z_0, \eta) \cap B))]$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda(\bar{D}) - \lambda(h(D(z_0, \eta))) + \lambda(h(D(z_0, \eta) \cap B)) \\
 &\geq \lambda(\bar{D}) + \left[-1 + \frac{(|\mu| - \delta_1)^2(1 - \delta)}{(|\mu| + \delta_1)^2} \right] \lambda(h(D(z_0, \eta))),
 \end{aligned}$$

esto último por (2.24).

De (2.23) se tiene:

$$\lambda(\bar{D} \cap B) \geq \left[1 + \underbrace{\left[-1 + \frac{(|\mu| - \delta_1)^2(1 - \delta)}{(|\mu| + \delta_1)^2} \right]}_{:= -\delta'} \left[\frac{4(|\mu| - \delta_1)}{(|\mu| + \delta_1)} \right]^2 \right] \lambda(\bar{D}),$$

de esto, $\lambda(\bar{D} \cap B) \geq (1 - \delta')\lambda(\bar{D})$. Por lo tanto, existe $\delta' > 0$ tal que

$$1 \geq \frac{\lambda(\bar{D} \cap A)}{\lambda(\bar{D})} \geq (1 - \delta'). \tag{2.27}$$

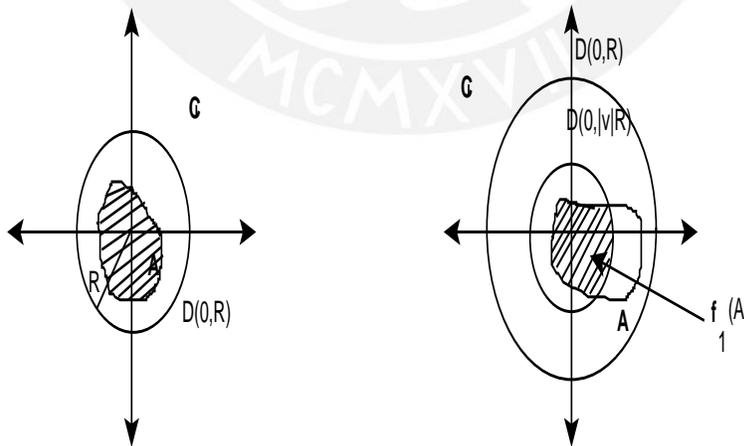
La prueba está terminada. ■

Proposición 2.17. *Sea $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ un subgrupo de gérmenes de aplicaciones holomorfas (inyectivas), con generadores f_1, f_2, \dots, f_r definidos en $\Omega_0 = U = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < \rho\}$, tal que $f_1(\xi) = \nu_1 \xi$, $|\nu_1| < 1$.*

Si $[A]$ es un germen Γ -invariante de un conjunto boreliano en el origen de \mathbb{C} , entonces $[A]$ es $D_0\Gamma$ -invariante (donde $D_0\Gamma$ representa a las partes lineales de Γ en 0).

Prueba:

Sea $A \subset D(0, R)$ un representante del germen $\mathcal{A} = [A]$ tal que $f_1(A) = A \cap D(0, |\nu|R)$.



Puesto que $f_1^m \in \Gamma$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, A es f_1^m -invariante. Luego elegimos como representante de \mathcal{A} al subconjunto $f_1^{-\ell}(A) \cap U \subset U$ con $\ell \gg 0$, el cual lo denotamos por A (pues necesitaremos que A sea $f_1^{-\ell}$ -invariante).

Por el Teorema de derivación de Lebesgue (1.34) y la Definición 1.35 respecto a punto de densidad, la diferencia entre A y sus puntos de densidad es un conjunto de medida nula, luego podemos suponer que A coincide con el conjunto de sus puntos de densidad.

Sea $S \in D_0\Gamma$, $S(z) = \mu z$, $z \in \mathbb{C}$ y $g \in \Gamma$ tal que $g'(0) = \mu$.

Sea z_0 un punto de densidad de A , con $|z_0| < \min(\rho, \frac{\rho}{|\mu|})$.

Bastará demostrar que:

- (1) $S(A) \subset A$, es decir, $S(z_0)$ es un punto de densidad de A .
- (2) $A \subset S(A)$ lo que equivale a demostrar que $S^{-1}(A) \subset A$. Así; de (1) y (2) obtenemos que $A = S(A) \text{ mod } E$, donde E es un conjunto de medida cero. Es decir existe una vecindad V de 0 tal que $A \cap V \doteq S(A) \cap V$ lo que implica que $[A] = [S(A)]$. Por lo tanto A es $D_0\Gamma$ -invariante.

La demostración de que $S(z_0)$ es un punto de densidad de A se hará en dos pasos:

- (a.1) La primera consiste en estimar las áreas de las imágenes de g , específicamente en hallar un número real positivo ϵ' tal que se cumple la siguiente relación:

$$1 \geq \frac{\lambda(\bar{D} \cap A)}{\lambda(\bar{D})} \geq (1 - \epsilon'), \quad (2.28)$$

donde: $\bar{D} := D(g(z_0), |g'(z_0)|r/4)$. Aquí usaremos el Corolario 1.43.

En efecto:

Sea $R > 0$ suficientemente pequeño tal que g está definido en $D(0, R)$ y $g(A) = A \cap g(D(0, R))$.

Considerando $g'(z) - \mu = 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots$, se tiene:

$$|g'(z) - \mu| \leq R(2a_2 + 3a_3R + \dots) := \epsilon_1(R) = \epsilon_1 \text{ para todo } z \in D(0, R).$$

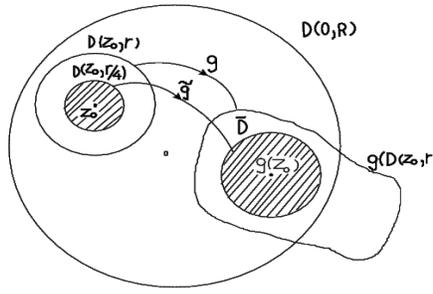
Como $z_0 \in A$ es un punto de densidad, dado $\epsilon > 0$, elegimos $r = r(\epsilon) > 0$ tal que:

$$1 \geq \frac{\lambda(D(z_0, r) \cap A)}{\lambda(D(z_0, r))} \geq (1 - \epsilon), \quad (2.29)$$

donde $D(z_0, r > 0) \subset D(0, R)$. Al considerar la aplicación afín $\tilde{g}(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0)$ tenemos:

$$|\tilde{g}(z) - g(z_0)| = |g'(z_0)||z - z_0| \leq |g'(z_0)|r/4, \text{ para todo } z \in D(z_0, r/4),$$

usamos la notación $\bar{D} := \tilde{g}(D(z_0, r/4)) = D(g(z_0), |g'(z_0)|r/4)$. Por el Corolario 1.43, $\bar{D} := D(g(z_0), |g'(z_0)|r/4) \subset g(D(z_0, r))$.



También, como $g \in \Gamma$ entonces A es g -invariante.
Aplicando el Lema 2.16, existe :

$$\epsilon' = - \left[-1 + \frac{(|\mu| - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon)}{(|\mu| + \epsilon_1)^2} \right] \left[\frac{4(|\mu| - \epsilon_1)}{(|\mu| + \epsilon_1)} \right]^2 > 0 ,$$

tal que

$$1 \geq \frac{\lambda(\bar{D} \cap A)}{\lambda(\bar{D})} \geq (1 - \epsilon'). \tag{2.30}$$

La primera parte está terminada.

(a.2) La segunda parte consiste en aplicar (2.28) a la sucesión $f_1^{-\ell} \circ g \circ f_1^\ell$ con ℓ tendiendo al infinito.

En efecto:

En (2.28) se establece una cota de la porción de área de $\bar{D} \cap A$ en \bar{D} . Ahora aplicamos esta estimación de área a $D_n := f_1^n(D)$, de la desigualdad $|f_1^n(z) - f_1^n(z_0)| = |\nu_1|^n |z - z_0| \leq |\nu_1|^n r$, el radio de D_n es $|\nu_1|^n r$. Luego $D_n = f_1^n(D) = D(\nu_1^n z_0, |\nu_1|^n r)$. Como $f_1^n \in \Gamma$ entonces A es f_1^n -invariante (pues A es Γ -invariante), adicionando (2.29), aplicamos el Lema 2.15, así tenemos:

$$1 \geq \frac{\lambda(D_n \cap A)}{\lambda(D_n)} \geq (1 - \epsilon) . \tag{2.31}$$

Sea $\bar{D}_n = \tilde{g}(D(z_n, |\nu_1|^n r/4)) = D(g(z_n), |g'(z_n)|r/4)$, donde $\tilde{g}(z) = g(z_n) + g'(z_n)(z - z_n)$ y $z_n = f_1^n(z_0) = \nu_1^n z_0$.

Por el Corolario 1.43, $\bar{D}_n \subset g(D_n)$. Adicionando (2.31), aplicamos el Lema 2.16, concluimos que existe :

$$\epsilon' = - \left[-1 + \frac{(|\mu| - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon)}{(|\mu| + \epsilon_1)^2} \right] \left[\frac{4(|\mu| - \epsilon_1)}{(|\mu| + \epsilon_1)} \right]^2 > 0 ,$$

tal que :

$$1 \geq \frac{\lambda(\bar{D}_n \cap A)}{\lambda(\bar{D}_n)} \geq (1 - \epsilon'). \quad (2.32)$$

Luego, sean $U_n = f_1^{-n}(\bar{D}_n)$ los discos de radio $|g'(z_n)|r/4$ y centro $f_1^{-n}gf_1^n(z_0)$. Por la demostración del Teorema 2.9, la sucesión $\{f_1^{-n}gf_1^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $S(z_0) = g'(0)z_0$. La sucesión de discos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al disco $D(S(z_0), |\mu|r/4)$. Puesto que $f_1^{-n} \in \Gamma$ entonces A es f_1^{-n} -invariante (pues A es Γ -invariante), adicionando (2.32), del Lema 2.15 resulta:

$$1 \geq \frac{\lambda(U_n \cap A)}{\lambda(U_n)} \geq (1 - \epsilon'). \quad (2.33)$$

Esto concluye la prueba de la segunda parte.

Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, la relación (2.33) implica que

$$1 \geq \frac{\lambda(D(S(z_0), |\mu|r/4) \cap A)}{\lambda(D(S(z_0), |\mu|r/4))} \geq (1 - \epsilon'). \quad (2.34)$$

Se tiene que para n suficientemente grande, z_n tiende a 0, por consiguiente ϵ_1 tiende a 0. Así, teniendo presente la definición de ϵ' , resulta:

$$1 \geq \frac{\lambda(D(S(z_0), |\mu|r/4) \cap A)}{\lambda(D(S(z_0), |\mu|r/4))} \geq (1 - 16\epsilon). \quad (2.35)$$

Luego $(1 - 16\epsilon)$ tiende a 1 cuando ϵ tiende a 0. Esto prueba que $S(z_0)$ es un punto de densidad de A y por lo tanto A es S -invariante como germen de conjunto boreliano.

Se hace la misma construcción anterior para S^{-1} . Así se demuestra que A es $D_0\Gamma$ -invariante.

La prueba de la proposición está concluida. ■

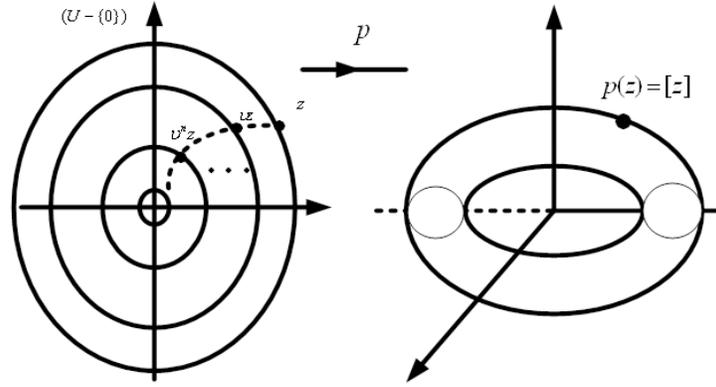
Recordemos que una aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal si y solo si $f(iz) = if(z)$, que es equivalente a la existencia de algún $\nu = a + ib$ tal que $f(z) = \nu z$.

Lema 2.18. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ un subgrupo finitamente generado de aplicaciones \mathbb{C} -lineales que tiene la propiedad de ser denso en \mathbb{C}^* , entonces $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ es ergódico.*

Prueba: De la hipótesis, Γ contiene al menos un elemento de la forma $f(z) = \nu z$ con $|\nu| < 1$ (en general $|\nu| \neq 1$, esto por la densidad de Γ en \mathbb{C}^* ; ver comentario en la demostración del Teorema 2.10).

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un germen de conjunto boreliano Γ -invariante, así elegimos un disco U que contiene al cero tal que $A \cap U \doteq (f(A)) \cap U$. Sea \mathbb{T}^2 , el

cociente de $(U - \{0\})$ bajo la acción del grupo $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ generado por f . Consideramos la aplicación proyección $p : (U - \{0\}) \rightarrow \mathbb{T}^2$, definida por $p(z) = [z] = \{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}_0\}$ para $z \in (U - \{0\})$. Así \mathbb{T}^2 está dado por $\{[z] : z \in (U - \{0\})\}$.



Además, denotamos por $\tilde{\Gamma}$ el grupo de las aplicaciones (traslaciones) de \mathbb{T}^2 inducidas por Γ y \tilde{A} el conjunto boreliano de \mathbb{T}^2 inducido por A . Para $\tilde{f} \in \tilde{\Gamma}$, definimos $\tilde{f}([z]) = [\nu][z]$. Notamos que para $z \in A \cap U$, $[z] = [f(z)] = [\nu z] = [\nu][z] = \tilde{f}([z])$. Podemos concluir que $\tilde{A} = \tilde{f}(\tilde{A})$ módulo un conjunto de medida nula. Por lo tanto \tilde{A} es $\tilde{\Gamma}$ -invariante.

Mostraremos que \tilde{A} ó $(\mathbb{T}^2 - \tilde{A})$ tiene medida cero.

Puesto que \mathbb{T}^2 es diferenciablemente equivalente a $S^1 \times S^1 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Identificamos \mathbb{T}^2 con $S^1 \times S^1$. Escribimos la aplicación característica de \tilde{A} como su desarrollo en serie de Fourier (ver Definiciones 1.36 y 1.37):

$$X_{\tilde{A}}(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn} e^{2\pi i(xm + yn)}, \quad (2.36)$$

donde $(x, y) \in S^1 \times S^1$ y $a_{mn} \in \mathbb{C}$.

Sea $\tilde{f} \in \tilde{\Gamma}$ la traslación en \mathbb{T}^2 tal que $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$.

Por la $\tilde{\Gamma}$ -invarianza de \tilde{A} tenemos:

$$\begin{aligned} X_{\tilde{A}} &= \sum_{m,n} a_{mn} e^{2\pi i(m(x+\alpha) + n(y+\beta))} \\ &= \sum_{m,n} a_{mn} e^{2\pi i(mx + ny)} \cdot e^{2\pi i(m\alpha + n\beta)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

De (2.36) y (2.37), por la unicidad de los coeficientes de Fourier, tenemos que $a_{mn} = 0$ ó $e^{2\pi i(m\alpha + n\beta)} = 1$, esto es $a_{mn} = 0$ ó $(m\alpha + n\beta) \in \mathbb{Z}$. Por la densidad de Γ en \mathbb{C}^* , $\tilde{\Gamma}$ contiene al menos una traslación irracional (caso contrario, la

órbita de cada punto sería un conjunto finito), de esto, descartamos la posibilidad que $(m\alpha + n\beta) \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $a_{mn} = 0$, para todo $(m, n) \neq (0, 0)$. Así:

$$X_{\tilde{A}} = a_{00} = \text{constante} .$$

Se sabe que toda aplicación característica toma exclusivamente valores 0 ó 1. Así, si $X_{\tilde{A}}$ es una constante, esta tiene que ser 0 ó 1.

Es decir $X_{\tilde{A}} = 0$ ó $X_{\tilde{A}} = 1$.

De esto, se deduce que \tilde{A} o su complemento en \mathbb{T}^2 tiene medida cero. Lo que implica que A o su complemento en \mathbb{C} tiene medida cero.

Esto prueba que $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ es ergódico. La prueba está terminada. ■

Teorema 2.19. *Sea $\Gamma \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ un subgrupo finitamente generado de germen de aplicaciones holomorfas (inyectivas) de \mathbb{C} , tal que sus partes lineales $D_0\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ son densas en \mathbb{C}^* , entonces Γ es ergódico.*

Prueba: Sea A un germen de conjunto boreliano en $0 \in \mathbb{C}$, Γ -invariante.

Sean f_1, \dots, f_r los generadores de Γ , $f_i : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con $|f'_i| \neq 1$ para algún i (por la densidad de $D_0\Gamma$ en \mathbb{C}^* , para todo i , $|f'_i|$ no puede ser igual a 1 ; ver comentario en la demostración del Teorema 2.10).

Por el Teorema 2.1, f_i es analíticamente equivalente a su parte lineal:

$$\nu_i = \xi \circ f_i \circ \xi^{-1} := f_i .$$

Es decir, $f_i(\xi) = \nu_i\xi$ con $|\nu_i| \neq 1$, en particular $|\nu_i| < 1$ para algún i . Luego, por la Proposición 2.17; A es $D_0\Gamma$ -invariante. Como $D_0\Gamma$ es denso en \mathbb{C}^* , por el Lema 2.18, $D_0\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ es ergódico. Es decir A o su complemento tienen medida cero.

En resumen:

A es germen de un conjunto boreliano en $0 \in \mathbb{C}$,

A es Γ -invariante y

A o su complemento tienen medida cero.

Por lo tanto, Γ es ergódico. Así la prueba está concluida. ■

Capítulo 3

Grupos de Gérmenes de Aplicaciones Holomorfas: Equivalencia Topológica y Analítica.

En este capítulo demostraremos que el homeomorfismo h que conjuga a los elementos de dos subgrupos finitamente generados Γ_1 y Γ_2 de $Bih_0(\mathbb{C})$ también conjuga a los gérmenes de las partes lineales de dichos subgrupos. Este importante resultado nos permite dar explícitamente el homeomorfismo h . Luego, por las características de h , vemos las condiciones que implican que h sea analítica.

A continuación presentamos a un grupo especial de gérmenes de homeomorfismos, el cual usaremos en la prueba de los teoremas de este capítulo.

3.0.1. Grupo de Gérmenes de Homeomorfismos de \mathbb{C} en el 0.

Consideremos el grupo $G = \{A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; A \text{ es automorfismo } \mathbb{R}\text{-afín en } \mathbb{C}\}$, donde $A(\cdot)$ es de la forma :

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 + \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (x - \beta_2 y + c_1, (1 + \beta_1)y + c_2), \quad (3.1)$$

con $\beta_1 > -1$, para $z = x + iy$.

De (3.1), $A(x, y) = (x, y) + (-\beta_2, \beta_1)y + (c_1, c_2)$. Así :

$$A(z) = z + i\beta \operatorname{Im}(z) + c, \quad (3.2)$$

$\beta = \beta_1 + i\beta_2$ y $c = c_1 + ic_2$. También de (3.1),

$$A(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u(x, y) = x - \beta_2 y + c_1$ y $v(x, y) = (1 + \beta_1)y + c_2$, luego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (1 + \beta_1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$A(x, y)$ es holomorfa si y sólo si satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por lo tanto; la transformación A es holomorfa si y sólo si $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Lema 3.1. Sea $\xi = e^{2\pi iz} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

1) El grupo G induce un grupo de difeomorfismos \tilde{G} de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^* dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{A} & \mathbb{C} \\ \downarrow e^{2\pi iz} & & \downarrow e^{2\pi iz} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\tilde{A}} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

(3.3)

con $A \in G$.

Si A es como en (3.2) entonces $\tilde{A}(\xi) = e^{2\pi ic} \xi |\xi|^\beta$, además \tilde{A} tiene una extensión a \mathbb{C} como homeomorfismo, con $\tilde{A}(0) = 0$.

2) El difeomorfismo analítico real A en (3.2) conjuga a la traslación $T_\lambda(z) = z + \lambda$ en la traslación

$$A \circ T_\lambda \circ A^{-1}(z) = z + \lambda + i\beta \text{Im}(\lambda). \quad (3.4)$$

3) El homeomorfismo \tilde{A} inducido por A en (3.2), conjuga a la aplicación \mathbb{C} -lineal $\nu(\xi) = \nu \cdot \xi$, $\nu \neq 0$ de \mathbb{C} en sí mismo, en la aplicación \mathbb{C} -lineal

$$\tilde{A} \circ \nu \circ \tilde{A}^{-1}(\xi) = (\nu |\nu|^{\beta_1 + i\beta_2}) \xi. \quad (3.5)$$

Prueba:

Para la afirmación (1):

Del diagrama 3.3 tenemos que :

$$\tilde{A} = \xi \circ A \circ \xi^{-1},$$

luego:

$$\tilde{A} \circ \xi(z) = \xi \circ A(z) = \xi(A(x, y)),$$

Así:

$$\tilde{A}(\xi) = e^{2\pi i A(x, y)}, \quad (3.6)$$

para $\xi = e^{2\pi iz} = e^{2\pi i(x+iy)}$, además $|\xi| = |e^{-2\pi y}| = e^{-2\pi y}$.

Reemplazando $A(x, y)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\xi) &= e^{2\pi i A(x,y)} = e^{2\pi i[(x-\beta_2 y+c_1)+i((1+\beta_1)y+c_2)]} \\ &= e^{2\pi i(x-\beta_2 y+c_1)} \cdot e^{-2\pi((1+\beta_1)y+c_2)} \\ &= \underbrace{e^{2\pi i x}}_* \cdot \underbrace{e^{-2\pi i \beta_2 y}}_{**} \cdot \underbrace{e^{2\pi i c_1}}_{***} \cdot \underbrace{e^{-2\pi y}}_* \cdot \underbrace{e^{-2\pi \beta_1 y}}_{**} \cdot \underbrace{e^{-2\pi c_2}}_{***} \\ &= e^{2\pi i(x+iy)} \cdot e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot e^{-2\pi y(\beta_1+i\beta_2)} \\ &= e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot e^{2\pi i(x+iy)} \cdot (e^{-2\pi y})^{(\beta_1+i\beta_2)} \\ &= e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot \xi \cdot |\xi|^{(\beta_1+i\beta_2)} \\ &= e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot \xi \cdot |\xi|^\beta \\ &= e^{2\pi i c_1} \xi |\xi|^\beta.\end{aligned}$$

Luego (ver la tercera igualdad anterior) :

$$|\tilde{A}(\xi)| = e^{-2\pi c_2} e^{-2\pi y(1+\beta_1)} = e^{-2\pi c_2} |\xi|^{1+\beta_1}.$$

Como $\beta_1 > -1$, entonces $\lim_{\xi \rightarrow 0} |\tilde{A}(\xi)| = 0$. Por lo tanto, \tilde{A} tiene una extensión continua al origen y $\tilde{A}(0) = 0$.

Puesto que para $A, B \in (G, \circ)$, $A \circ B \in G$; veamos que esta operación es inducida para elementos de \tilde{G} . Sean :

$$\begin{aligned}A(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 + \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \beta_2 y + c_1 \\ (1 + \beta_1)y + c_2 \end{bmatrix}, \\ B(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_2 \\ 0 & 1 + \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \gamma_2 y + d_1 \\ (1 + \gamma_1)y + d_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}B \circ A(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_2 \\ 0 & 1 + \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \beta_2 y + c_1 \\ (1 + \beta_1)y + c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x - \beta_2 y + c_1 - \gamma_2((1 + \beta_1)y + c_2) + d_1 \\ (1 + \gamma_1)((1 + \beta_1)y + c_2) + d_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De (3.6):

$$\begin{aligned}\widetilde{B \circ A}(\xi) &= e^{2\pi i B \circ A(x,y)} = \exp \left\{ 2\pi i \begin{bmatrix} x - \beta_2 y + c_1 - \gamma_2((1 + \beta_1)y + c_2) + d_1 \\ (1 + \gamma_1)((1 + \beta_1)y + c_2) + d_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= e^{2\pi i[x-\beta_2 y+c_1-\gamma_2((1+\beta_1)y+c_2)+d_1]} \cdot e^{2\pi i[1+\gamma_1]((1+\beta_1)y+c_2)+d_2} i \\ &= e^{2\pi i(x+iy)} \cdot e^{2\pi i(d_1+id_2)} \cdot e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot e^{-2\pi \beta_1 y(\gamma_1+i\gamma_2)} \cdot e^{-2\pi y(\gamma_1+i\gamma_2)} \\ &\quad \cdot e^{-2\pi y(\beta_1+i\beta_2)} \cdot e^{-2\pi c_2(\gamma_1+i\gamma_2)} \\ &= \xi \cdot e^{2\pi i(d_1+id_2)} \cdot e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot |\xi|^{\beta_1(\gamma_1+i\gamma_2)} \cdot |\xi|^{(\gamma_1+i\gamma_2)} \cdot |\xi|^{\beta_1+i\beta_2} \cdot e^{-2\pi c_2(\gamma_1+i\gamma_2)} \\ &= e^{2\pi i(d_1+id_2)} \cdot e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot \xi \cdot |\xi|^{(\beta_1+i\beta_2)} (|\xi|^\beta \cdot \xi \cdot e^{-2\pi c_2})^{(\gamma_1+i\gamma_2)} \\ &= e^{2\pi i(d_1+id_2)} \cdot e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot \xi \cdot |\xi|^{(\beta_1+i\beta_2)} (|e^{2\pi i(c_1+ic_2)} \cdot \xi \cdot |\xi|^{(\beta_1+i\beta_2)}|^{(\gamma_1+i\gamma_2)}) \\ &= \tilde{B} \circ \tilde{A}(\xi).\end{aligned}$$

De $\tilde{A} = \xi \circ A \circ \xi^{-1}$ se tiene:

$$\tilde{A}^{-1} = \xi \circ A^{-1} \circ \xi^{-1}, \quad (3.7)$$

donde :

$$A^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta_2}{1+\beta_1} \\ 0 & \frac{1}{1+\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2 c_2}{1+\beta_1} - c_1 \\ -\frac{c_2}{1+\beta_1} \end{bmatrix}.$$

Para hallar A^{-1} hacemos $A^{-1}(x, y) = (a, b)$ luego despejar a y b de la ecuación $A \circ A^{-1}(x, y) = (x, y)$ considerando A como antes .

Entonces el grupo G induce un grupo \tilde{G} y de (3.7) los elementos \tilde{A} son homeomorfismos de \mathbb{C} (difeomorfismos de \mathbb{C}^*).

De esta manera queda demostrada la primera parte del lema.

Para la afirmación (2):

Antes veamos $A(x+h, y+k)$:

$$\begin{aligned} A(x+h, y+k) &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1+\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1+\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h - \beta_2 k \\ k + \beta_1 k \end{bmatrix} \\ &= A(x, y) + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1+\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sea $T_\lambda(x, y) = (x, y) + (\lambda_1, \lambda_2)$, por simplicidad considere $A^{-1}(x, y) = (u, v)$, entonces por (3.8) :

$$\begin{aligned} A \circ T_\lambda \circ A^{-1}(x, y) &= A \circ T_\lambda(u, v) = A(u + \lambda_1, v + \lambda_2) \\ &= A(u, v) + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1+\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1+\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= z + \lambda + Im(\lambda)\beta i. \end{aligned}$$

Queda demostrada la segunda parte del lema.

Para la afirmación (3):

Primero, $\tilde{T} = \xi \circ T_\lambda \circ \xi^{-1}$, así $\tilde{T} \circ \xi(z) = \xi \circ T_\lambda(z)$; luego:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\xi) &= e^{2\pi i T_\lambda(z)} = e^{2\pi i(\lambda+z)} = e^{2\pi i(\lambda)} \cdot e^{2\pi i(z)} \\ &= e^{2\pi i(\lambda)} \xi = \nu \xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{T}(\xi) = \nu\xi. \quad (3.9)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \circ \nu \circ \tilde{A}^{-1}(\xi) &= \tilde{A} \circ \tilde{T} \circ \tilde{A}^{-1}(\xi) = (A \circ \widetilde{T_\lambda} \circ A^{-1})(\xi) \\ &= e^{2\pi i(A \circ T_\lambda \circ A^{-1}(x,y))} \\ &= e^{2\pi i[(x+\lambda_1 - \beta_2\lambda_2) + i(y+\lambda_2 + \lambda_2\beta_1)]} \\ &= e^{2\pi i(x+iy)} \cdot e^{2\pi i(\lambda_1 + i\lambda_2)} \cdot e^{-2\pi\lambda_2(\beta_1 + i\beta_2)} \\ &= e^{2\pi iz} \cdot e^{2\pi i\lambda} \cdot e^{-2\pi\lambda_2\beta} \\ &= \xi \cdot \nu|\nu|^\beta = \nu|\nu|^\beta\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto; $\tilde{A} \circ \nu \circ \tilde{A}^{-1}(\xi) = (\nu|\nu|^{\beta_1 + i\beta_2})\xi$.

Así termina la demostración del lema. ■

Note también que toda aplicación \mathbb{R} -lineal de \mathbb{C} en si mismo que lleva el 1 en el 1 y preserva orientación, es de la forma

$$T(z) = Cz, \quad (3.10)$$

donde:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1 + \beta_1) \end{bmatrix}.$$

En efecto :

1. $T(1,0)=(1,0)$.
2. Puesto que $T(x, y) = (x - \beta_2y, (1 + \beta_1)y) := (u(x, y), v(x, y))$,

$$JT(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1 + \beta_1) \end{vmatrix} = (1 + \beta_1) > 0,$$

pues $\beta_1 > -1$.

Como $JT(x, y) > 0$, T preserva orientación.

3.1. Conjugación de Dos Subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$.

Empezamos con la siguiente definición:

Definición 3.2. *Dos subgrupos $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset Bih_0(\mathbb{C})$ son analíticamente (o topológicamente) equivalentes si existe un germe de biholomorfismo (o homeomorfismo) h definido en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$, con $h(0) = 0$, tal que $h \circ f \circ h^{-1} \in \Gamma_2$ si y solo si $f \in \Gamma_1$.*

Se sigue que la aplicación $f \mapsto k(f) := h \circ f \circ h^{-1} : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ es un isomorfismo, además el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{k(f)} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

(3.11)

Si Γ_1 y Γ_2 son subgrupos con generadores f_1, \dots, f_r y g_1, \dots, g_r respectivamente, entonces también requerimos que $k(f_i) = g_i$.

El teorema que presentamos a continuación nos da de manera explícita las características que debe tener todo homeomorfismo que conjuga a dos subgrupos de $Bih_0(\mathbb{C})$. Esto en aras de probar que la equivalencia topológica de dos subgrupos finitamente generados de $Bih_0(\mathbb{C})$ conduce a la equivalencia analítica de los mismos.

Teorema 3.3. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos finitamente generados de $Bih_0(\mathbb{C})$ topologicamente equivalentes. Supongamos que para algún elemento $f_1 \in \Gamma_1$, tenemos que $|f_1'(0)| \neq 1$; y supongamos que el homeomorfismo h preserva orientación en \mathbb{C} . Entonces:*

(1) *Existen cartas analíticas ξ_1 y ξ_2 que linealizan a las aplicaciones f_1 y $k(f_1)$ respectivamente.*

(2) *Existe un número complejo β y una aplicación continua $F(\xi)$ tales que, en las cartas ξ_1 y ξ_2 , el homeomorfismo h se expresa como*

$$\xi_2 = h(\xi_1) = \xi_1 |\xi_1|^\beta F(\xi_1), \quad (3.12)$$

con F invariante bajo $D_0\Gamma_1$:

$$F(f'(0)\xi_1) = F(\xi_1), \quad (3.13)$$

para cualquier $f \in \Gamma_1$.

(3) *Para toda $f \in \Gamma_1$*

$$k(f)'(0) = f'(0) |f'(0)|^\beta. \quad (3.14)$$

Prueba de la afirmación (1):

Objetivo: demostrar que $|f_1'(0)| \neq 1$ implica que $|k(f_1)'(0)| \neq 1$, para tal fin se usará el Teorema 2.1.

En efecto:

Supongamos que $|f_1'(0)| < 1$. Considerar Ω_1 una vecindad del origen, simplemente conexa, suficientemente pequeña con $f_1(\Omega_1) \subsetneq \Omega_1$ (para valores de z cercanos al origen $|f_1(z)| < |z|$, para todo $z \in \Omega_1$) y $h(\Omega_1) = \Omega_2$ tal que $k(f_1) \circ h|_{\Omega_1} = h \circ f_1|_{\Omega_1}$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \xrightarrow{f_1} & \Omega_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Omega_2 & \xrightarrow{k(f_1)} & \Omega_2 \end{array}$$

conmuta. Como $f_1(\Omega_1) \subsetneq \Omega_1$ tenemos,

$$\begin{aligned} k(f_1)(\Omega_2) &= k(f_1)(h(\Omega_1)) = (k(f_1) \circ h)(\Omega_1) \\ &= (h \circ f_1)(\Omega_1) = h(f_1(\Omega_1)) \subsetneq h(\Omega_1) = \Omega_2. \end{aligned}$$

Así; $k(f_1)(\Omega_2) \subsetneq h(\Omega_1) = \Omega_2$.

A continuación demostraremos que $|k(f_1)'(0)| < 1$.

Puesto que $\Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa, por el Teorema de Uniformización de Riemann 1.45, existe un biholomorfismo $g : \Omega_2 \rightarrow D$ en $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ y $g(0) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_2 & \xrightarrow{k(f_1)} & \Omega_2 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{\tilde{g}} & D \end{array}$$

(3.15)

En el diagrama 3.15, $\tilde{g} = g \circ k(f_1) \circ g^{-1}$ tal que $\tilde{g}(0) = 0$ y $|\tilde{g}(z)| < 1$, para toda $z \in D$.

Luego; por el Lema de Schwarz 1.44, tenemos que $|\tilde{g}(z)| \leq |z|$ y $|\tilde{g}'(0)| \leq 1$. Las igualdades $|\tilde{g}(z)| = |z|$ y $|\tilde{g}'(0)| = 1$ ocurren sólo si $\tilde{g}(z) = \alpha z$ con α constante de norma 1, es decir $\alpha = e^{i\beta}$, donde β es una constante real. Esto último no puede ocurrir ya que $k(f_1)(\Omega_2) \subsetneq \Omega_2$ (ver diagrama 3.15) implica que $\tilde{g}(D) \subsetneq D$. Por lo tanto, $|\tilde{g}(z)| < |z|$ y $|\tilde{g}'(0)| < 1$, para toda $z \in D$.

De $|\tilde{g}'(0)| < 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &> |\tilde{g}'(0)| = |(g \circ k(f_1) \circ g^{-1})'(0)| \\ &= |Dg_{k(f_1)(g^{-1}(0))} \cdot Dk(f_1)_{g^{-1}(0)} \cdot Dg^{-1}(0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |Dk(f_1)(0)| \quad (\text{pues } Dg^{-1}(g(z_0)) = \frac{1}{Dg(z_0)}) \\ &= |k(f_1)'(0)| . \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|k(f_1)'(0)| < 1 .$$

Como $|f_1'(0)| < 1$ y $|k(f_1)'(0)| < 1$, por el Teorema 2.1, existen cartas analíticas ξ_1 y ξ_2 que linealizan a las aplicaciones f_1 y $k(f_1)$ respectivamente. Así, queda demostrada la afirmación (1).

Para demostrar las afirmaciones (2) y (3), veamos primero los siguientes lemas.

Lema 3.4. *Supongamos satisfechas las condiciones del Teorema 3.3 y también que ξ_1 y ξ_2 son las cartas que linealizan a las aplicaciones f_1 y $k(f_1)$ respectivamente. Entonces para cualquier $f \in \Gamma_1$, el homeomorfismo h conjuga a los gérmenes de las partes lineales de las aplicaciones f y $k(f)$ en las cartas ξ_1 y ξ_2 :*

$$\begin{array}{ccc} h \circ \nu_1 = \nu_2 \circ h , & & \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\nu_1} & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\nu_2} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

donde $\nu_1(\xi_1) = \nu_1 \cdot \xi_1$ y $\nu_2(\xi_2) = \nu_2 \cdot \xi_2$; con $\nu_1 = f'(0)$, $\nu_2 = k(f)'(0)$.

Prueba: Por hipótesis $f_1(\xi_1) = \nu_1 \xi_1$ y $k(f_1)(\xi_2) = \nu_2 \xi_2$. Consideremos las sucesiones dadas por

$$F_\ell^1 = f_1^{-\ell} \circ f \circ f_1^\ell \in \Gamma_1 \quad \text{y} \quad F_\ell^2 = k(f_1)^{-\ell} \circ k(f) \circ k(f_1)^\ell .$$

Recuerde que $k : (\Gamma_1, \circ) \rightarrow (\Gamma_2, \circ)$ es un homomorfismo, entonces se cumple: $k(f_1^\ell) = k(f_1)^\ell$, $k(f_1^{-\ell}) = k(f_1)^{-\ell}$ (observe que $k(f_1^{-1}) = k(f_1)^{-1}$) y $k(F_\ell^1) = k(f_1^{-\ell} \circ f \circ f_1^\ell) = k(f_1^{-\ell}) \circ k(f) \circ k(f_1^\ell) = k(f_1)^{-\ell} \circ k(f) \circ k(f_1)^\ell = F_\ell^2$.

Por la demostración del Teorema 2.9: Si $f, g \in \Gamma_1$ tal que $|g'(0)| < 1$ (en general $|g'(0)| \neq 1$) y ξ la carta que linealiza a g ; la sucesión $g^{-\ell} \circ f \circ g^\ell$ converge a la aplicación $\xi \rightarrow f'(0)\xi$. De esto último, puesto que $|f_1'(0)| < 1$ y de la parte 1) se tiene $|k(f_1)'(0)| < 1$, luego existen sucesiones $F_\ell^k(\xi)$ que convergen a $\nu_k(\xi)$ cuando ℓ tiende a $+\infty$ para $k = 1, 2$; sobre un disco $U = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < \rho\}$.

Como $F_\ell^1 \in \Gamma_1$, $F_\ell^2 \in \Gamma_2$ y h es un homeomorfismo que conjuga Γ_1 y Γ_2 , se tiene que $h \circ F_\ell^1 = F_\ell^2 \circ h$, es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \xrightarrow{F_\ell^1} & \Omega_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Omega_2 & \xrightarrow{F_\ell^2} & \Omega_2 \end{array}$$

Luego; sobre U tenemos :

$$h \circ \nu_1 = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} h \circ F_\ell^1 = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} F_\ell^2 \circ h = \nu_2 \circ h .$$

Por lo tanto, el homeomorfismo h conjuga $D_0\Gamma_1$ en $D_0\Gamma_2$. ■

Corolario 3.5. *El isomorfismo $k : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ induce un isomorfismo de las partes lineales $k^* : D_0\Gamma_1 \longrightarrow D_0\Gamma_2$.*

Prueba: Tenemos que $k(f) = h \circ f \circ h^{-1}$ es un isomorfismo para $f \in \Gamma$. Definimos:

$$\begin{array}{ccc} k^* : D_0\Gamma_1 & \longrightarrow & D_0\Gamma_2 \\ f'(0) & \longmapsto & k^*(f'(0)) := (kf)'(0) \end{array} ,$$

por el Lema 3.4, $(kf)'(0) = h \circ f'(0) \circ h^{-1}$. Pero k es isomorfismo, así por definición de k , $k(f'(0)) = h \circ f'(0) \circ h^{-1}$ sigue siendo isomorfismo. Por lo tanto $k^* : D_0\Gamma_1 \longrightarrow D_0\Gamma_2$ es un isomorfismo. ■

Note que al juntar las condiciones del Teorema 3.3 y la afirmación (1) del mismo forman el Lema 3.4, este nos sirve para justificar el Corolario 3.5, el cual nos da un isomorfismo entre las partes lineales de Γ_1 y Γ_2 .

Sea $g(z) = f'(0)(z) = f'(0).z$ la parte lineal de $f \in \Gamma$. De donde se tiene que $g'(z) = f'(0)$ y $g'(0) = f'(0)$. Luego :

$$\begin{aligned} (k(f))'(0) &= (h \circ f'(0) \circ h^{-1}) \quad (\text{por el Lema 3.4}) \\ &= (h \circ g'(0) \circ h^{-1}) \quad (\text{por definición de } g'(0)) \\ &= (k(g))'(0) \quad (\text{por el Lema 3.4}) \\ &= (k(f'(0)))'(0) \quad (\text{por definición de } g); \end{aligned}$$

esto indica que para probar las afirmaciones (2) y (3) del Teorema 3.1 basta considerar $f'(0) \in D_0\Gamma_m$, $m = 1, 2$ en vez de $f \in \Gamma_m$, $m = 1, 2$.

3.1.1. Espacio de recubrimiento de Ω_m^* .

Sea $\Omega_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < \rho\}$, en el cual está definido el homeomorfismo h , con $\Omega_2 = h(\Omega_1)$.

Denotemos con $\Omega_m^* = \Omega_m - \{0\}$ para $m = 1, 2$; y sea $k^* : D_0\Gamma_1 \longrightarrow D_0\Gamma_2$ el isomorfismo inducido por $k : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ (ver Corolario 3.5).

Sea $\nu \in D_0\Gamma_m$ tal que $\Omega_m = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < \rho_m\}$,

$$\begin{array}{ccc} \nu : \Omega_m^* & \longrightarrow & \Omega_m^* \\ \xi & \longmapsto & \nu\xi \end{array} ,$$

implica que $|\nu\xi| < \rho_m$ siempre que $|\nu| < 1$, para toda $\nu \in D_0\Gamma_m$.

Bajo estas consideraciones aquellas aplicaciones cuyos gérmenes pertenecen a $D_0\Gamma_m$ y tales que llevan a la región Ω_m^* en sí misma, $m = 1, 2$; es un semigrupo el cual lo denotaremos por Γ_m^+ (si $\nu \in \Gamma_m^+$, entonces $\nu^{-1} \notin \Gamma_m^+$, pues $|\nu^{-1}| > 1$).

Note también que si $\nu \in \Gamma_1^+$ está definido en Ω_1^* , entonces $k^*(\nu) \in \Gamma_2^+$ está definido en Ω_2^* . Luego, de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1^* & \xrightarrow{\nu} & \Omega_1^* \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Omega_2^* & \xrightarrow{k^*(\nu)} & \Omega_2^* \end{array}$$

(3.16)

se tiene que $k^*(\nu) = h \circ \nu \circ h^{-1}$. Luego :

$$\begin{array}{ccc} k^* : \Gamma_1^+ & \longrightarrow & \Gamma_2^+ \\ \nu & \longmapsto & k^*(\nu) = h \circ \nu \circ h^{-1} \end{array} ,$$

donde $\nu \circ \xi_1 = \nu \cdot \xi_1$ y $k^*(\nu) \circ \xi_2 = k^*(\nu) \cdot \xi_2$.

Sean $\widehat{\Omega}_m$ las cubiertas universales de Ω_m^* con coordenadas z_m y proyecciones $\Phi_m : \widehat{\Omega}_m \longrightarrow \Omega_m^*$, $\Phi_m(z_m) = e^{2\pi iz_m} = \xi_m$, $m = 1, 2$. Es claro que para cada $\Phi_m(z_m)$ existen infinitos valores para z_m , esto es ;

$$2\pi iz_m = \log|\Phi_m(z_m)| + i(\arg(\Phi_m(z_m)) + 2s\pi), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

donde $0 \leq \arg(\Phi_m(z_m)) < 2\pi$, $m = 1, 2$. Entonces;

$$z_m = \left(\frac{1}{2\pi} \arg(\xi_m)\right) + i\left(-\frac{1}{2\pi} \log|\xi_m|\right) + s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \quad (3.17)$$

$$0 \leq \arg(\Phi_m(z_m)) < 2\pi, \quad m = 1, 2.$$

Como $\Phi_1 : \widehat{\Omega}_1 \rightarrow \Omega_1^*$ y $h : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$ son continuas, entonces $\tilde{h} := h \circ \Phi_1 : \widehat{\Omega}_1 \rightarrow \Omega_2^*$ es continua. Así, (observe el diagrama 3.18) existe el levantamiento de \tilde{h} (en el

cubrimiento universal) el cual lo denotaremos por \hat{h} .

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\Omega}_2 \\ & \nearrow \hat{h} & \downarrow \Phi_2 \\ \hat{\Omega}_1 & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Omega_2^* \end{array}$$

(3.18)

De hecho, $\hat{h} : \hat{\Omega}_1 \rightarrow \hat{\Omega}_2$ es el levantamiento (en el cubrimiento universal) del homeomorfismo h (ver el siguiente diagrama conmutativo),

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Omega}_1 & \xrightarrow{\hat{h}} & \hat{\Omega}_2 \\ \xi_1 = \Phi_1(z_1) = e^{2\pi iz_1} \downarrow & & \downarrow e^{2\pi iz_2} = \Phi_2(z_2) = \xi_2 \\ \Omega_1^* & \xrightarrow{h} & \Omega_2^* \end{array},$$

el cual se define por :

$$z_2 = \hat{h}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \arg(h(e^{2\pi iz_1})) + i \left(-\frac{1}{2\pi} \log |h(e^{2\pi iz_1})| \right) + s, \quad (3.19)$$

donde $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $0 \leq \arg(h(e^{2\pi iz_1})) < 2\pi$, además dado que h es un homeomorfismo que preserva orientación se tiene que:

$$\hat{h}(z_1 + n) = \hat{h}(z_1) + n, \quad (3.20)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ver Teorema 1.21). Luego, notamos que (3.20) complementa a la definición dada en (3.19) y hace que para cada valor de s , \hat{h} sea un homeomorfismo. Denotaremos por \hat{h} a alguno de estos homeomorfismos que elegimos arbitrariamente y de aquí en adelante consideraremos fijo.

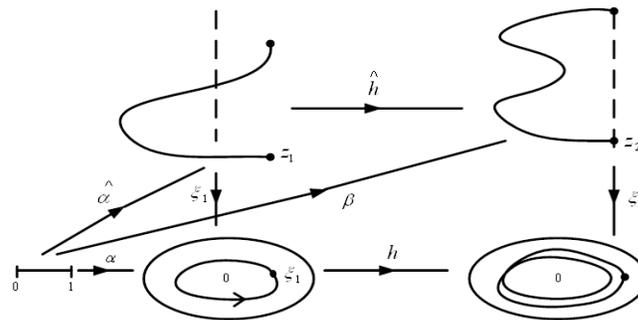


Figura 3.1:

Lema 3.6. :

1. Los grupos de traslaciones lineales $D_0\Gamma_m$ se levantan al espacio cubriente de \mathbb{C}^* como grupo de traslaciones Λ_m de \mathbb{C} , $\Lambda_m = \{w \in \mathbb{C} : w.z = z + w, z \in \mathbb{C}\}$. El isomorfismo $k : D_0\Gamma_1 \rightarrow D_0\Gamma_2$ y el homeomorfismo \hat{h} inducen un levantamiento (un isomorfismo) $\hat{k} : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ entre estos dos grupos de traslaciones.
2. El isomorfismo $\hat{k} : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ es la restricción a $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$ de una aplicación \mathbb{R} -lineal $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma:

$$A(\lambda) = \lambda + i\beta \text{Im}(\lambda), \quad \text{Re}(\beta) > 1. \quad (3.21)$$

Prueba: Sea $\Omega_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < \rho\}$ el disco agujerado con centro en el origen y radio ρ . Así, si $\xi_1 = \Phi_1(z_1) = e^{2\pi iz_1} \in \Omega_1^*$, entonces la relación $+\infty > \text{Im}(z_1) > -\frac{1}{2\pi} \log \rho$ y (3.17) con s fijo, definen a los elementos de $\hat{\Omega}_1$.

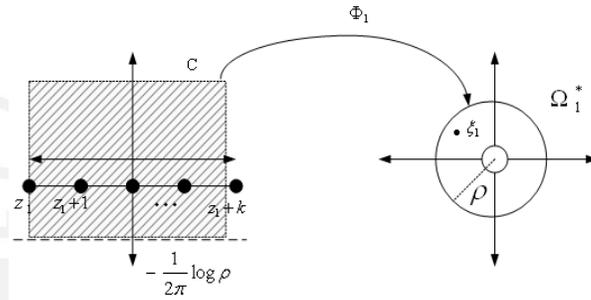


Figura 3.2:

El semigrupo Γ_m^+ representa a las rotaciones y contracciones de Ω_m^* en sí misma (si $\nu \in \Gamma_m^+$, se tiene que $|\nu| < 1$) y se levanta al semigrupo de traslaciones $\Lambda_m^+ = \{w \in \mathbb{C} : w.z = z + w \text{ con } \text{Im}(w) > 0, z \in \Omega_m^*\}$ que llevan a $\hat{\Omega}_m$ en sí misma. Veamos:

La condición $|\nu| = |e^{2\pi i\lambda}| = e^{-2\pi \text{Im}(\lambda)} < 1$ implica que $\text{Im}(\lambda) > 0$ y $\lambda \in \Lambda_1^+$; como $\nu = e^{2\pi i\lambda} = e^{2\pi i(\lambda+n)}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$; se tiene que $n + r\lambda \in \Lambda_1^+$, para toda $r \in \mathbb{Z}^+$. Así, se tiene la acción de $\mathbb{Z} \oplus \lambda\mathbb{Z}^+$ sobre $\hat{\Omega}_1$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z} \oplus \lambda\mathbb{Z}^+, \hat{\Omega}_1) & \longrightarrow & \hat{\Omega}_1 \\ (n + \lambda r, z) & \longmapsto & z + n + r\lambda \end{array},$$

la cual está bien definida dado que, $\text{Im}(z + n + r\lambda) = \text{Im}(z) + r\text{Im}(\lambda) > \text{Im}(z) > -\frac{1}{2\pi} \log \rho$.

Antes de seguir, veamos el comportamiento de $\Phi_m(z_m) = e^{2\pi iz_m} = \xi_m$:

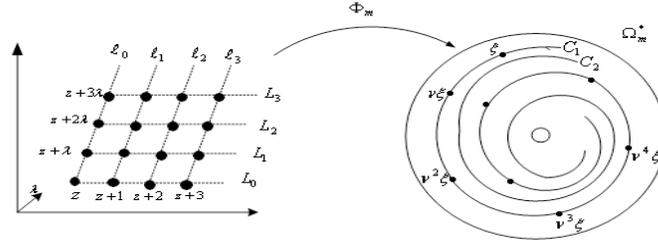


Figura 3.3:

Notamos que si hacemos variar $z \in \widehat{\Omega}_m$ a lo largo de las rectas ℓ_i , para todo i ; consiguiremos la línea espiralada C_1 , es decir $\Phi_m(\ell_i) = C_1$, para todo i ; si en la recta L_0 cogemos $z_1 \neq z$, sobre los puntos $z_1 + n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tendremos las líneas ℓ'_i paralelas a ℓ_i , luego $\Phi_m(\ell'_i) = C_2$, para todo i ; así sucesivamente se cubre Ω_m^* . En resumen, $\Phi_m(z + n + r\lambda) = \nu^r \xi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$.

Retomando la prueba del Lema 3.6:

Las traslaciones $T_\lambda(z_m) = z_m + \lambda$ vía la aplicación exponencial $\lambda_j \rightarrow e^{2\pi i \lambda_j}$ son llevados en las transformaciones \mathbb{C} -lineales $S(\xi_m) = e^{2\pi i \lambda} \xi_m$, teniendo en cuenta que venimos usando la notación $e^{2\pi i z_m} = \xi_m$. Además, para $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_m^+$ se tiene que $e^{2\pi i(\lambda_1 + \lambda_2)} = e^{2\pi i \lambda_1} \cdot e^{2\pi i \lambda_2} = \nu_1 \cdot \nu_2$. Esto indica que la aplicación exponencial induce un homomorfismo $\Phi_{m\bullet} : \Lambda_m^+ \rightarrow \Gamma_m^+$ definido por $\Phi_{m\bullet}(\lambda_1 + \lambda_2) = \Phi_{m\bullet}(\lambda_1) \cdot \Phi_{m\bullet}(\lambda_2)$, para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_m^+$ y $m = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\Omega}_m & \xrightarrow{T_\lambda} & \widehat{\Omega}_m \\
 \downarrow e^{2\pi i} & & \downarrow e^{2\pi i} \\
 \Omega_m^* & \xrightarrow{\nu = \Phi_{m\bullet}(\lambda)} & \Omega_m^*
 \end{array}$$

Observamos que el $\text{Ker}(\Phi_{m\bullet}) = \mathbb{Z}_0$, pero $n \notin \Lambda_m^+$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0$, esto indica que el dominio de definición de $\Phi_{m\bullet}$ no es únicamente Λ_m^+ .

Dado que $k^*(\nu) : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$ es continua y $e^{2\pi i} : \widehat{\Omega}_2 \rightarrow \Omega_2^*$ es continua, entonces $\tilde{k}(\nu) := k^*(\nu) \circ e^{2\pi i} : \widehat{\Omega}_1 \rightarrow \widehat{\Omega}_2$ es continua. Luego, existe $k^+ : \widehat{\Omega}_1 \rightarrow \widehat{\Omega}_2$ el

levantamiento de \tilde{k} , ver el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{\Omega}_m \\ & \nearrow^{k^+(\lambda)} & \downarrow e^{2\pi i} \\ \widehat{\Omega}_m & \xrightarrow{\tilde{k}(\nu)} & \Omega_2^* \end{array}$$

El homomorfismo $k^*|_{\Gamma_1^+} : \Gamma_1^+ \rightarrow \Gamma_2^+$ definido por conjugación con el homeomorfismo h se levanta al homomorfismo $k^+ : \Lambda_1^+ \rightarrow \Lambda_2^+$ definido por conjugación con el homeomorfismo \hat{h} .

Como $0 \in \text{Ker}(\Phi_m \bullet)$, para todo $\lambda \in \Lambda_1^+$, se tiene que $-\lambda \in \Lambda_1$ (el grupo de traslaciones en \mathbb{C}). Luego, el homomorfismo $k^+(\lambda)$ se prolonga a un homomorfismo $\hat{k} : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ el cual está definido por $\hat{k}(\lambda) = \hat{h} \circ \lambda \circ \hat{h}^{-1}$, como \hat{h} lo hemos fijado, $\hat{k}(\lambda)$ está bien definido. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_1 & \xrightarrow{T_\lambda} & \widehat{\Omega}_1 \\ \downarrow \hat{h} & & \downarrow \hat{h} \\ \widehat{\Omega}_2 & \xrightarrow{T_{\hat{k}(\lambda)}} & \widehat{\Omega}_2 \end{array}$$

(3.22)

además, $\hat{k}(\lambda_1 + \lambda_2) = \hat{h} \circ (\lambda_1 + \lambda_2) \circ \hat{h}^{-1} = \hat{h} \circ (\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \hat{h}^{-1} = (\hat{h} \circ \lambda_1 \circ \hat{h}^{-1}) \circ (\hat{h} \circ \lambda_2 \circ \hat{h}^{-1}) = \hat{k}(\lambda_1) \circ \hat{k}(\lambda_2) = \hat{k}(\lambda_1) + \hat{k}(\lambda_2)$. También $\hat{k}(-\lambda) = \hat{h} \circ (-\lambda) \circ \hat{h}^{-1} = \hat{h} \circ (\lambda^{-1}) \circ \hat{h}^{-1} = (\hat{h} \circ \lambda \circ \hat{h}^{-1})^{-1} = (\hat{k}(\lambda))^{-1}$, para todo $\lambda \in \Lambda_1^+$. De esta manera se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{\Omega}_1 & \xrightarrow{T_\lambda} & \widehat{\Omega}_1 \\ & \swarrow \hat{h} & \downarrow \Phi_1 & & \swarrow \hat{h} \\ \widehat{\Omega}_2 & \xrightarrow{T_{\hat{k}(\lambda)}} & \widehat{\Omega}_2 & & \widehat{\Omega}_2 \\ \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_2 \\ \Omega_1^* & \xrightarrow{\Phi_1 \bullet (\lambda) = \nu} & \Omega_1^* & & \Omega_1^* \\ \swarrow h & & \downarrow \Phi_2 & & \swarrow h \\ \Omega_2^* & \xrightarrow{\Phi_2 \bullet \hat{k}(\lambda) = k^*(\nu)} & \Omega_2^* & & \Omega_2^* \end{array}$$

(3.23)

donde $T_\lambda(z_1) = z_1 + \lambda$ y $T_{\hat{k}(\lambda)}(z_2) = z_2 + \hat{k}(\lambda)$, para toda $\lambda \in \Lambda_1^+$.

Si ρ tiende al infinito entonces Ω_m^* tiende a \mathbb{C}^* y $\widehat{\Omega}_m$ tiende a \mathbb{C} pues $-\frac{1}{2\pi}\log\rho$ tiende a negativo infinito.

Lo anterior prueba la primera parte del Lema 3.6.

El homomorfismo $\hat{k} : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ es una aplicación \mathbb{Z} -lineal de Λ_1 en Λ_2 .

$$\hat{k}(n\lambda) = \hat{k}(\underbrace{\lambda + \dots + \lambda}_{n\text{-términos}}) = \underbrace{\hat{k}(\lambda) + \dots + \hat{k}(\lambda)}_{n\text{-términos}} = n\hat{k}(\lambda).$$

Por definición $\hat{k}(-\lambda) = \hat{k}(\lambda)^{-1} = -\hat{k}(\lambda)$. Para $n \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $-n \in \mathbb{Z}^+$ y por la parte anterior $\hat{k}(-n\lambda) = -n\hat{k}(\lambda)$, luego $n\hat{k}(\lambda) = -\hat{k}(-n\lambda) = \hat{k}(-(-n\lambda)) = \hat{k}(n\lambda)$.

Para demostrar la parte (2) del Lema 3.6, demostraremos que \hat{k} tiene una prolongación a una transformación \mathbb{R} -lineal A de \mathbb{C} en \mathbb{C} .

Primero probaremos que $\hat{k} : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ es continua. Por ser \hat{k} un homomorfismo, es decir :

$$\hat{k}(\lambda_1 + \lambda_2) = \hat{k}(\lambda_1) + \hat{k}(\lambda_2), \quad (3.24)$$

se tiene que $\hat{k}(0) = 0 \in \Lambda_1$. Si suponemos que \hat{k} es continua en $0 \in \Lambda_1$, entonces:

$$\text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } |\lambda| < \delta \text{ implica que } |\hat{k}(\lambda) - \hat{k}(0)| < \epsilon. \quad (3.25)$$

Haciendo en (3.25), $\lambda = \tilde{\lambda} - \lambda_0$, para todo $\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0 \in \Lambda_1$ con λ_0 fijo, se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\tilde{\lambda} - \lambda_0| < \delta$ implica que $|\hat{k}(\tilde{\lambda}) - \hat{k}(\tilde{\lambda}_0)| = |\hat{k}(\tilde{\lambda} - \lambda_0)| < \epsilon$. Como $\tilde{\lambda} \in \Lambda_1$ es arbitrario se concluye que \hat{k} es continua en Λ_1 . Así pues es suficiente probar que \hat{h} es continua en $0 \in \Lambda_1$.

Sean $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en Λ_1 que convergen a 0 y $q \in \widehat{\Omega}_2$. Debemos demostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{h}(\lambda) = \hat{h}(0) = 0$. Pero $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{h}(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}(\lambda_n)$.

Sabemos que:

$$\underbrace{\hat{k}(\lambda_n)}_{=\hat{k}(\lambda_n)+q} (q) = \hat{h} \circ T_{\lambda_n} \circ \hat{h}^{-1}(q)$$

entonces $\hat{k}(\lambda_n) = \hat{h} \circ T_{\lambda_n} \circ \hat{h}^{-1}(q) - q$. Luego bastará probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h} \circ T_{\lambda_n} \circ \hat{h}^{-1}(q) = q. \quad (3.26)$$

En efecto: $\hat{h} \circ T_{\lambda_n} \circ \hat{h}^{-1}(q) = \hat{h}(\hat{h}^{-1}(q) + \lambda_n)$, puesto que \hat{h} es un homeomorfismo, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h} \circ T_{\lambda_n} \circ \hat{h}^{-1}(q) = \hat{h} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{h}^{-1}(q) + \lambda_n) \right) = q$. Por lo tanto \hat{k} es continua en $0 \in \Lambda_1$.

Haciendo en (3.24), $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, se tiene que $\hat{k}(\lambda_3) - \hat{k}(\lambda_1) = \hat{k}(\lambda_2)$; de la continuidad del lado derecho se sigue la continuidad del lado izquierdo, puesto que

λ_3 y λ_1 son cualesquiera en Λ_1 , se tiene la continuidad uniforme de \hat{k} .
Sea $\overline{\Lambda}_1$ la cerradura de Λ_1 , por ser Λ_1 denso en $\overline{\Lambda}_1$ y $\hat{k} : \Lambda_1 \subset \overline{\Lambda}_1 \rightarrow \Lambda_2$ uniformemente continua, aplicamos el Teorema 1.39. Entonces existe una aplicación continua $\bar{k} : \overline{\Lambda}_1 \rightarrow \overline{\Lambda}_2$ que coincide con \hat{k} en Λ_1 ; además \bar{k} es uniformemente continua. Por el Principio de Extensión de Identidades (Teorema 1.38), la propiedad de (3.24) se extiende a \bar{k} .

Los subgrupos $\Lambda_m \subset \mathbb{C}$ son \mathbb{Z} -módulos finitamente generados que contienen al 1 (recuerde que $n \in \Lambda_m$, para toda $n \in \mathbb{Z}$).

De la teoría de aplicaciones elípticas (ver Proposición 1.41), si $\Lambda_m \neq \{0\}$ es un subconjunto discreto de \mathbb{C} , entonces $\Lambda_m = \alpha\mathbb{Z}$ ó $\Lambda_m = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$, α y β \mathbb{R} -linealmente independientes. Si $\Lambda_m \neq \{0\}$ es un subconjunto no discreto entonces las posibilidades para $\overline{\Lambda}_m$ (la cerradura de Λ_m) son: $\overline{\Lambda}_m \approx \mathbb{R}$ ó $\overline{\Lambda}_m \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}\lambda_0$ ó $\overline{\Lambda}_m \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}\lambda_0$ ó $\overline{\Lambda}_m = \mathbb{C}$.

Si $\overline{\Lambda}_1 \subset \mathbb{R}$ ó $\overline{\Lambda}_1 \subset \lambda_0\mathbb{R}$, tomando como base a 1 en el primer caso o a λ_0 en el segundo caso, tenemos que $\bar{k}|_{\Lambda_1}(\lambda) = c_0\lambda$ (ver Teorema 1.40). En el caso de \mathbb{R} , $c_0 = 1$ pues:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{k}(1)(z)} &= \underbrace{\hat{h}(\hat{h}^{-1}(z) + 1)} \\ \bar{k}(1) + z &= \hat{h}(\hat{h}^{-1}(z)) + 1 = z + 1, \text{ entonces } \bar{k}(1) = 1. \end{aligned}$$

En el caso que $\overline{\Lambda}_1 = \mathbb{R}$, $\bar{k}(\lambda) = \lambda$; así que podemos extender \bar{k} a todo \mathbb{C} como la identidad.

En el caso que $\overline{\Lambda}_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}\lambda_0$ ó $\overline{\Lambda}_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}\lambda_0$, tomando $\{1, \lambda_0\}$ como una \mathbb{R} -base de \mathbb{C} , \bar{k} se puede extender a la aplicación lineal diagonal A con entradas $1 = \bar{k}(1)$ y $\bar{k}(\lambda_0)$, es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{k}(\lambda_0) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, si $\overline{\Lambda}_1 = \mathbb{C}$, además \bar{k} cumple (3.24), por Teorema 1.40, \bar{k} es \mathbb{R} -lineal, con $\bar{k}(1) = 1$.

Ahora, denotando por A a esta extensión de \hat{k} a todo \mathbb{C} ; como tenemos que $A(1) = 1$ y por el argumento dado debajo de la demostración del Lema 3.1, podemos representar a A como en (3.21). Es decir,

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & (1 + \beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda + i\beta Im(\lambda).$$

La prueba del lema ha concluido. ■

3.1.2. Conclusión de la demostración del Teorema 3.3:

De la conmutatividad del diagrama 3.22 se tiene que

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{h} \circ T_\lambda(\xi_1)}_{\hat{h}(\xi_1 + \lambda)} &= \underbrace{T_{A(\lambda)} \circ \hat{h}(\xi_1)}_{\hat{h}(\xi_1) + A(\lambda)}. \end{aligned}$$

Definimos la aplicación holomorfa $f(\xi_1) := \hat{h}(\xi_1) - A\xi_1$, la cual satisface $f(\xi_1 + \lambda) = \hat{h}(\xi_1 + \lambda) - A(\xi_1 + \lambda) = \hat{h}(\xi_1) + A(\lambda) - A(\xi_1) - A(\lambda) = \hat{h}(\xi_1) - A(\xi_1) = f(\xi_1)$.

Así:

$$f(\xi_1 + \lambda) = f(\xi_1) \text{ para toda } \lambda \in \Lambda_1^+. \quad (3.27)$$

Juntando los resultados obtenidos hasta ahora, concluimos la demostración del Teorema 3.3.

Primero, puesto que A es una extensión de \hat{k} , del diagrama 3.23 se tiene que para $\lambda \in \Lambda_1$:

$$k^*(\nu) = \Phi_2 \bullet A(\lambda) = e^{2\pi i A(\lambda)}.$$

Así: $k^*(e^{2\pi i \lambda}) = e^{2\pi i A(\lambda)}$ y escribiendo A como en (3.21) se tiene:

$$k^*(e^{2\pi i \lambda}) = e^{2\pi i(\lambda + i\beta \text{Im}(\lambda))} = e^{2\pi i \lambda [e^{-2\pi \text{Im}(\lambda)}]^\beta},$$

entonces $k^*(\nu) = \nu \cdot |\nu|^\beta$ para $\nu \in D_0\Gamma_1$, donde $\nu = f'(0)$ y $k^*(\nu) = (kf)'(0)$, para $f \in \Gamma_1$. Por lo tanto, queda demostrado (3.14) en el enunciado del Teorema 3.3.

Por último definimos la aplicación

$$F(\zeta) := F(e^{2\pi i \xi_1}) := e^{2\pi i f(\xi_1)}.$$

Observamos que $F(e^{2\pi i \xi_1}) = F(e^{2\pi i(\xi_1 + n)}) := e^{2\pi i f(\xi_1 + n)}$, pero:

$$\begin{aligned} f(\xi_1 + n) &= \hat{h}(\xi_1 + n) - A(\xi_1 + n) \\ &= \hat{h}(\xi_1) + n - A\xi_1 - An \\ &= \hat{h}(\xi_1) - A\xi_1 = f(\xi_1), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, F está bien definida en Ω_1^* .

La aplicación F así definida resulta invariante con respecto a la acción de Γ_1^+ , pues, de (3.27), para $\nu \in \Gamma_1^+$ se tiene:

$$\begin{aligned} F(\nu\zeta_1) &= F(e^{2\pi i \lambda} \cdot e^{2\pi i \xi_1}) = F(e^{2\pi i(\lambda + \xi_1)}) \\ &= e^{2\pi i f(\lambda + \xi_1)} = e^{2\pi i f(\xi_1)} = F(\zeta_1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para ver que F sea invariante para todo $\nu \in D_0\Gamma_1$, consideramos $\nu \in D_0\Gamma_1$ tal que $|\nu| > 1$. De esto, $|\nu^{-1}| < 1$, entonces si $\zeta_1 \in \nu^{-1}\Omega_1^*$, $\zeta_1 = \nu^{-1}\xi'_1$ para algún $\xi'_1 \in \Omega_1^*$. Por lo tanto $\nu\zeta_1 \in \Omega_1^*$ y puesto que $\nu^{-1} \in \Gamma_1^+$, considerando (3.28) se tiene que $F(\nu\zeta_1) = F(\nu^{-1}\nu\zeta_1) = F(\zeta_1)$.

Ahora, recordando que $\xi_2 = \hat{h}(\xi_1) = A(\xi_1) + f(\xi_1)$, aplicando la proyección $e^{2\pi i}$ y puesto que $A(\xi_1) = \xi_1 + i\beta \text{Im}(\xi_1)$, entonces

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \xi_2} &= e^{2\pi i(A(\xi_1) + f(\xi_1))} = e^{2\pi i(f(\xi_1))} \cdot e^{2\pi i(\xi_1 + i\beta \text{Im}(\xi_1))} \\ \underbrace{e^{2\pi i \xi_2}}_{\zeta_2} &= \underbrace{e^{2\pi i(f(\xi_1))} \cdot e^{2\pi i \xi_1} \cdot (e^{-2\pi \text{Im}(\xi_1)})^\beta}_{F(\zeta_1)\zeta_1|\zeta_1|^\beta} \end{aligned}$$

Así, la demostración del teorema ha terminado. ■

3.2. De Equivalencia Topológica a Equivalencia Analítica.

El siguiente teorema nos da las condiciones necesarias para que la conjugación topológica de subgrupos finitamente generados de $Bih_0(\mathbb{C})$ sea analítica.

Teorema 3.7. *Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 3.3: Sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos finitamente generados de $Bih_0(\mathbb{C})$ topologicamente equivalentes, conectados por un homeomorfismo que preserva orientación h tal que el diagrama 3.11 es conmutativo.*

Agregamos las dos siguientes condiciones:

1. *Existen $f_1, g_1 \in \Gamma_1$ tal que, $D_0\Gamma_1$, el subgrupo multiplicativo de \mathbb{C}^* generado por $f'_1(0), g'_1(0)$ es denso en \mathbb{C}^* .*
2. *El grupo Γ_1 es no conmutativo.*

Entonces h es actualmente un biholomorfismo, así Γ_1, Γ_2 son analíticamente equivalentes.

Prueba:

De la condición $D_0\Gamma_1 \subset \mathbb{C}^*$ es denso en \mathbb{C}^* y de (3.13) se sigue que $F \equiv \sigma$, con σ constante.

En efecto, sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tal que $z_1 \neq z_2$. De la densidad de $D_0\Gamma_1$ en \mathbb{C}^* , existe una sucesión $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D_0\Gamma_1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \frac{z_2}{z_1}$ sí sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n z_1 = z_2$. Luego, por (3.13) y la continuidad de F tenemos: $F(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\nu_n z_1) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n z_1) = F(z_2)$. Por lo tanto F es constante.

Así, h se puede escribir de la forma

$$\zeta_2 = h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^\beta .$$

De la condición 2, el conmutador del grupo es distinto de la identidad, esto es, el conjunto $\{f_1g_1f_1^{-1}g_1^{-1} : \text{para todo } f_1, g_1 \in \Gamma_1\}$ no se reduce a la identidad. Así, el conmutador del grupo contiene al gérmen de una aplicación f de la forma

$$f(\zeta_1) = \zeta_1 + a_m\zeta_1^m + \dots + a_m \neq 0, m > 1 .$$

Denotemos por \mathcal{F}_1 el conjunto de gérmenes de f ; como $f \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1]$, entonces $f = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.

Si $k(f) = h \circ f \circ h^{-1}$ entonces:

$$k(f) = h \circ (\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ h^{-1} = k(\varphi) \circ k(\psi) \circ k(\varphi)^{-1} \circ k(\psi)^{-1} .$$

Por lo tanto $k(f) \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1]$.

Suponemos que $k(f)$ se expresa como

$$k(f)(\zeta_1) = \zeta_1 + b_n\zeta_1^n + \dots, b_n \neq 0, n > 1 .$$

Demostraremos que si las aplicaciones f y $k(f)$ son conjugadas por el homeomorfismo $h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^\beta$, es decir, $k(f) \circ h = h \circ f$, entonces $\beta = 0$. Por lo tanto $h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1$ el cual es un biholomorfismo, lo cual demostraría el teorema.

Recordemos que el orden de pequeñez k de una aplicación univaluada $f(\xi)$ en el cero, es $k = \sup\{x \in \mathbb{R} : |f(\xi)|/|\xi|^x \rightarrow 0 \text{ si } \xi \rightarrow 0\}$.

Afirmación (1):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{|b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{(\beta_1+i\beta_2)n}|}{|\zeta|^{(n-1)(1+\beta_1)}} = 0 .$$

En efecto:

De la equivalencia topológica de Γ_1 y Γ_2 , se tiene que $h \circ f = k(f) \circ h$, haciendo $\zeta = \zeta_1$ y recordando que $|z| = z^{1/2}\bar{z}^{1/2}$, tenemos :

$$\begin{aligned} hf(\zeta) &= h(\zeta + a_m\zeta^m + \dots) = \sigma(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)|\zeta + a_m\zeta^m + \dots|^\beta \\ &= \sigma(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)^{\beta/2}(\xi + \bar{a}_m\xi^m + \dots)^{\beta/2} \\ &= \sigma(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)^{1+\beta/2}(\xi + \bar{a}_m\xi^m + \dots)^{\beta/2} \\ &= \sigma(\zeta^{1+\beta/2} + (1 + \beta/2)\zeta^{\beta/2}a_m\zeta^m + \dots)(\xi^{\beta/2} + (\beta/2)\xi^{\beta/2-1}\bar{a}_m\xi^m + \dots) \end{aligned}$$

y

$$k(f) \circ (h(\zeta)) = k(f)(\sigma\zeta|\zeta|^\beta) = \sigma\zeta|\zeta|^\beta + b_n(\sigma\zeta|\zeta|^\beta)^n + b_{n+1}(\sigma\zeta|\zeta|^\beta)^{n+1} + \dots .$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \sigma(\zeta^{1+\beta/2} + (1 + \beta/2)\zeta^{\beta/2}a_m\zeta^m + \dots)(\xi^{\beta/2} + (\beta/2)\xi^{\beta/2-1}\bar{a}_m\xi^m + \dots) \\ & = \sigma\zeta|\zeta|^\beta + b_n(\sigma\zeta|\zeta|^\beta)^n + b_{n+1}(\sigma\zeta|\zeta|^\beta)^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Efectuando la multiplicación en el primer miembro de la igualdad :

$$\begin{aligned} & = \sigma[\zeta^{1+\beta/2}\xi^{\beta/2} + (1 + \beta/2)\zeta^{\beta/2}a_m\zeta^m\xi^{\beta/2} + \zeta^{1+\beta/2}(\beta/2)\xi^{\beta/2-1}\bar{a}_m\xi^m \\ & \quad + (1 + \beta/2)\zeta^{\beta/2}a_m\zeta^m(\beta/2)\xi^{\beta/2-1}\bar{a}_m\xi^m + \dots] \\ & = \sigma[\zeta|\zeta|^\beta + (1 + \beta/2)a_m\zeta^m|\zeta|^\beta + (\beta/2)\bar{a}_m\zeta|\zeta|^\beta\xi^{m-1} \\ & \quad + (1 + \beta/2)(\beta/2)a_m\bar{a}_m\zeta^m|\zeta|^\beta\xi^{m-1} + \dots] \\ & = \sigma\zeta|\zeta|^\beta + b_n\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n} + b_{n+1}\sigma^{n+1}\zeta^{n+1}|\zeta|^{\beta(n+1)} + \dots \end{aligned}$$

Dividiendo los términos de la igualdad por $\sigma\zeta|\zeta|^\beta$.

Primero:

$$\begin{aligned} & = \frac{\sigma[\zeta|\zeta|^\beta + (1 + \beta/2)a_m\zeta^m|\zeta|^\beta + (\beta/2)\bar{a}_m\zeta|\zeta|^\beta\xi^{m-1} + (1 + \beta/2)(\beta/2)a_m\bar{a}_m\zeta^m|\zeta|^\beta\xi^{m-1} + \dots]}{\sigma\zeta|\zeta|^\beta} \\ & = 1 + (1 + \beta/2)a_m\zeta^{m-1} + (\beta/2)\bar{a}_m\xi^{m-1} + (1 + \beta/2)(\beta/2)a_m\bar{a}_m\zeta^{m-1}\xi^{m-1} + \dots \\ & = 1 + (1 + \beta/2)a_m\zeta^{m-1} + (\beta/2)\bar{a}_m\xi^{m-1} + (1 + \beta/2)(\beta/2)a_m\bar{a}_m|\zeta^{m-1}|^2 + \dots \\ & = 1 + (1 + \beta/2)a_m\zeta^{m-1} + (\beta/2)\bar{a}_m\xi^{m-1} + o(|\zeta|^{m-1}). \end{aligned}$$

Considerando $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. En la otra parte se tiene

$$\begin{aligned} & = \frac{\sigma\zeta|\zeta|^\beta + b_n\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n} + b_{n+1}\sigma^{n+1}\zeta^{n+1}|\zeta|^{\beta(n+1)} + \dots}{\sigma\zeta|\zeta|^\beta} \\ & = 1 + b_n\sigma^{n-1}\zeta^{n-1}|\zeta|^{\beta(n-1)} + b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n} + \dots \\ & = 1 + b_n\sigma^{n-1}\zeta^{n-1}|\zeta|^{\beta(n-1)} + o(|\zeta|^{(\beta_1+1)(n-1)}), \end{aligned}$$

donde $o(|\zeta|^{(\beta_1+1)(n-1)})$ se ha obtenido al analizar el término $b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n}$ de esta serie. Así, si hacemos $g(\zeta) = b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{(\beta_1+i\beta_2)n}$, se tiene:

$|g(\zeta)| = |b_{n+1}||\sigma^n||\zeta|^{(1+\beta_1)n} = |b_{n+1}||\sigma^n||\zeta|^{(1+\beta_1)}|\zeta|^{(n-1)(1+\beta_1)}$; como $(\beta_1 > -1)$, esto indica que $(\beta_1 + 1)$ con seguridad es el menor número positivo tal que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta|^{(n-1)(1+\beta_1)}} = 0.$$

La prueba de la afirmación (1) está concluida.

Afirmación (2):

$$a_m e^{i\varphi(m-1)}(1 + \beta/2) + \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)}(\beta/2) - b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} = o(1). \quad (3.30)$$

En efecto:
Definiendo:

$$\begin{aligned}\ell(\zeta) &:= a_m \zeta^{m-1}(1 + \beta/2) + \bar{a}_m \xi^{m-1}(\beta/2) \\ L(\zeta) &:= 1 + \ell(\zeta) + o(|\zeta|^{m-1}) \\ p(\zeta) &:= b_n \sigma^{n-1} \zeta^{n-1} |\zeta|^{\beta(n-1)} \\ P(\zeta) &:= 1 + p(\zeta) + o(|\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)}).\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$L(\zeta) := 1 + \ell(\zeta) + o(|\zeta|^{m-1}) = 1 + p(\zeta) + o(|\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)}) := P(\zeta). \quad (3.31)$$

Entonces :

$$L(\zeta) - 1 = \ell(\zeta) + |\zeta|^{m-1} B(\zeta) = p(\zeta) + |\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)} \tilde{B}(\zeta) = P(\zeta) - 1,$$

donde B y \tilde{B} denotan aplicaciones que dependen de ζ tal que $B(0) = \tilde{B}(0) = 0$.
De esto último se tiene:

$$\begin{aligned} & a_m \zeta^{m-1}(1 + \beta/2) + \bar{a}_m \xi^{m-1}(\beta/2) + |\zeta|^{m-1} B(\zeta) \\ &= b_n \sigma^{n-1} \zeta^{n-1} |\zeta|^{\beta_1(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} + |\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)} \tilde{B}(\zeta), \end{aligned}$$

dividiendo toda la igualdad por $|\zeta|^{\min\{(m-1), (\beta_1+1)(n-1)\}}$ resulta :

$$\begin{aligned} & \frac{a_m \zeta^{m-1}(1 + \beta/2) + \bar{a}_m \xi^{m-1}(\beta/2) + |\zeta|^{m-1} B(\zeta)}{|\zeta|^{\min\{(m-1), (\beta_1+1)(n-1)\}}} \\ &= \frac{b_n \sigma^{n-1} \zeta^{n-1} |\zeta|^{\beta_1(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} + |\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)} \tilde{B}(\zeta)}{|\zeta|^{\min\{(m-1), (\beta_1+1)(n-1)\}}}. \end{aligned}$$

Si $(m-1) = \min\{(m-1), (\beta_1+1)(n-1)\}$, tomando límite cuando $|\zeta|$ tiende a cero, la parte de la derecha de la igualdad tiende a cero mientras que la parte de la izquierda no. En caso que $(\beta_1+1)(n-1) = \min\{(m-1), (\beta_1+1)(n-1)\}$, ocurre lo contrario, la parte de la izquierda tiende a cero mientras que la parte de la derecha no. Por lo tanto la única posibilidad es que $(m-1) = (\beta_1+1)(n-1)$.

En la siguiente ecuación :

$$\ell(\zeta) + o(|\zeta|^{m-1}) = p(\zeta) + o(|\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)}),$$

hacemos $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}$, entonces $\xi = |\xi|e^{-i\varphi} = |\zeta|e^{-i\varphi}$, además $(m-1) = (\beta_1+1)(n-1)$.

Así:

$$\begin{aligned} & \ell(|\zeta|e^{i\varphi}) + o(|\zeta|^{m-1}) = p(|\zeta|e^{i\varphi}) + o(|\zeta|^{m-1}), \\ & a_m |\zeta|^{m-1} e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta_2) + \bar{a}_m |\zeta|^{m-1} e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) + o(|\zeta|^{m-1}) \end{aligned}$$

$$= b_n \sigma^{n-1} |\zeta|^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{\beta_1(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} + o(|\zeta|^{m-1}).$$

Al hacer un reacomodo en los términos de la igualdad y considerando como antes $o(|\zeta|^{m-1}) = |\zeta|^{m-1} B(\zeta)$ en el lado izquierdo y $o(|\zeta|^{m-1}) = o(|\zeta|^{(\beta_1+1)(n-1)}) = |\zeta|^{m-1} \tilde{B}(\zeta)$ en el lado derecho, resulta:

$$\begin{aligned} a_m |\zeta|^{m-1} e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta_2) + \bar{a}_m |\zeta|^{m-1} e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) \\ - b_n \sigma^{n-1} |\zeta|^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{\beta_1(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} = |\zeta|^{m-1} (B(\zeta) - \tilde{B}(\zeta)), \end{aligned}$$

dividiendo todo por $|\zeta|^{m-1}$ se obtiene :

$$a_m e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta/2) + \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) - b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} = o(1). \quad (3.32)$$

La prueba de la afirmación (2) está concluida.

Para demostrar que $\beta = 0$, lo haremos por el método del absurdo, es decir supongamos que sea diferente de 0.

En efecto:

Consideremos $\beta \neq 0$. Sea $\tilde{f}_r(\varphi)$ la restricción del lado izquierdo de (3.30) a la vecindad $|\zeta| = r$.

Sea $n_r := \|\tilde{f}_r(\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}$. Se demostrará que $n_r \geq |a_m| |\beta|/2$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_r(\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)} \\ = \int_0^{2\pi} |a_m e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta/2) + \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) - b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)}|^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Recuerde que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Luego :

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_r(\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)} &= \int_0^{2\pi} [|a_m|^2 |1 + \beta/2|^2 + |\bar{a}_m|^2 |\beta/2|^2 + |b_n|^2 |\sigma^{n-1}|^2 \\ &+ a_m e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta/2) \bar{a}_m e^{i\varphi(m-1)} (\bar{\beta}/2) - a_m e^{i\varphi(m-1)} (1 + \beta/2) \bar{b}_n \bar{\sigma}^{n-1} e^{-i\varphi(n-1)} |\zeta|^{-i\beta_2(n-1)} \\ &+ \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (1 + \bar{\beta}/2) \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) - \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (\beta/2) \bar{b}_n \bar{\sigma}^{n-1} e^{-i\varphi(n-1)} |\zeta|^{-i\beta_2(n-1)} \\ &- \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)} (1 + \bar{\beta}/2) b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} - \bar{a}_m e^{i\varphi(m-1)} (\bar{\beta}/2) b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)}] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [|a_m|^2 |1 + \beta/2|^2 + |\bar{a}_m|^2 |\beta/2|^2 + |b_n|^2 |\sigma^{n-1}|^2 + a_m^2 (\bar{\beta}/2) (1 + \beta/2) e^{2i\varphi(m-1)} \\ &- a_m (1 + \beta/2) \bar{b}_n \bar{\sigma}^{n-1} e^{i\varphi(m-n)} |\zeta|^{-i\beta_2(n-1)} + \bar{a}_m^2 (1 + \bar{\beta}/2) (\beta/2) e^{-2i\varphi(m-1)} \\ &- \bar{a}_m (\beta/2) \bar{b}_n \bar{\sigma}^{n-1} e^{-i\varphi(m+n-2)} |\zeta|^{-i\beta_2(n-1)} - \bar{a}_m (1 + \bar{\beta}/2) b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-m)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)} \\ &- a_m (\bar{\beta}/2) b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(m+n-2)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)}] d\varphi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Puesto que $(m - 1) = (n - 1)(\beta_1 + 1)$; se concluye que $m > 1$, $n > 1$ y $m \neq n$. Entonces $e^{2i\varphi(m-1)}$, $e^{i\varphi(m-n)}$, $e^{i\varphi(m-n)}$ es diferente de 1. Observe que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a_m^2(\bar{\beta}/2)(1 + \beta/2)e^{2i\varphi(m-1)} d\varphi &= \frac{1}{2i(m-1)} a_m^2(\bar{\beta}/2)(1 + \beta/2) e^{2i\varphi(m-1)} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2i(m-1)} a_m^2(\bar{\beta}/2)(1 + \beta/2) [e^{4\pi(m-1)i} - 1] = \frac{1}{2i(m-1)} a_m^2(\bar{\beta}/2)(1 + \beta/2) [1 - 1] = 0. \end{aligned}$$

Procediendo del mismo modo con los demás términos que dependen de φ , obtenemos de (3.33):

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_r(\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)} &= \int_0^{2\pi} [|a_m|^2 |1 + \beta/2|^2 + |\bar{a}_m|^2 |\beta/2|^2 + |b_n|^2 |\sigma^{n-1}|^2] d\varphi \\ &= 2\pi [|a_m|^2 |1 + \beta/2|^2 + |\bar{a}_m|^2 |\beta/2|^2 + |b_n|^2 |\sigma^{n-1}|^2] \\ &\geq 2\pi [|a_m|^2 |\beta/2|^2] \geq \sqrt{2\pi} |a_m| |\beta/2| \geq |a_m| |\beta/2|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

De (3.30), por definición de $o(\cdot)$ se tiene que $a_m e^{i\varphi(m-1)}(1 + \beta/2) + \bar{a}_m e^{-i\varphi(m-1)}(\beta/2) - b_n \sigma^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} |\zeta|^{i\beta_2(n-1)}$ tiende a 0 cuando $|\zeta| = r$ tiende a 0. Esto último contradice a lo obtenido en (3.34). Por lo tanto, $\beta = 0$.

La prueba del Teorema está concluida. ■

Observe (3.29), cuando $\beta = 0$ tenemos que $m = n$ y $\sigma a_m = \sigma^m b_m$, de esto último, $a_m = \sigma^{m-1} b_m$, luego:

- Si $m = 2$, $a_2 = \sigma b_2$, entonces $\sigma = \frac{a_2}{b_2}$, así para $f(\zeta_1) = \zeta_1 + a_2 \zeta_1^2 + \dots$, $h(\zeta_1) = \zeta_2 = \sigma \zeta_1$ queda definido unívocamente.
- Si $m \neq 2$, $\sigma = \sqrt[m-1]{\frac{a_m}{b_m}} \zeta_1$, es decir h queda definido módulo multiplicación por alguna raíz de la unidad.

3.3. Conclusión:

Empezamos introduciendo la siguiente definición, necesaria para emitir nuestra conclusión.

Definición 3.8. Una foliación holomorfa no singular por curvas \mathcal{F} de un abierto V de \mathbb{C}^n es una descomposición de V en subconjuntos conexos disjuntos $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ donde A es el conjunto de índices, las $\{\mathcal{L}_\alpha\}$ son denominadas hojas de la foliación, tal que todo punto p de V tiene una vecindad V_p y un biholomorfismo

$\varphi : V_p \rightarrow W_p \subset \mathbb{C}^n$, que satisface que para toda hoja \mathcal{L}_α , las componentes conexas de $V_p \cap \mathcal{L}_\alpha$ quedan descritas por las ecuaciones

$$w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1}$$

en W_p . A las parejas (V_p, φ) así definidas se les denomina cartas coordenadas distinguidas de la foliación.

(Ver [GO], p.9.)

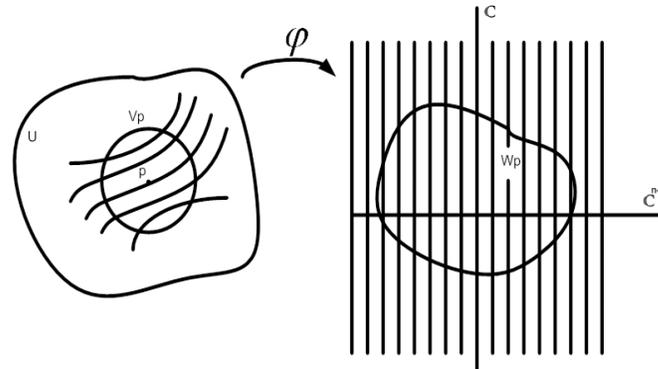


Figura 3.4:

Sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 dos foliaciones holomorfas no singulares por curvas. La equivalencia topológica de \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 implica la conjugación topológica de sus grupos de holonomía (ver [GO], p.54). Luego, si estos grupos de holonomía satisfacen las condiciones del Teorema 3.7, tenemos que la equivalencia topológica de las foliaciones \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 implica la equivalencia analítica de sus grupos de holonomía.



Figura 3.5:

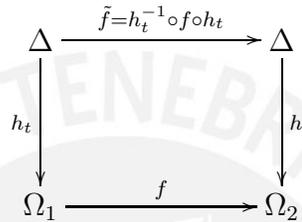
Corolario 3.9. Sea $\Gamma_1 \subset \text{Bih}_0(\mathbb{C})$ un subgrupo finitamente generado de gérmenes de biholomorfismos de \mathbb{C} , y sea $\{h_t\}$ una familia continua de gérmenes de homeomorfismos preservando orientación parametrizados por un disco Δ en el plano complejo \mathbb{C} , tal que $\Gamma_t := h_t^{-1} \circ \Gamma_1 \circ h_t$ es una familia holomorfa de subgrupos de gérmenes de biholomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$. Supongamos además que:

- 1) El subgrupo multiplicativo $D_0\Gamma_1$ de \mathbb{C}^* es denso en \mathbb{C}^* .
- 2) El grupo Γ_1 es no conmutativo.

Entonces existe una familia holomorfa de biholomorfismos que conjugua Γ_1 en Γ_t .

Prueba:

Sea $f \in \Gamma_1$, tal que $|f'(0)| < 1$.



Se tiene que $\tilde{f} = h_t^{-1} \circ f \circ h_t$ es holomorfa (por dato), como en la demostración del Teorema 3.3 (aplicando el Lema 1.44 de Schwarz),

$$|\tilde{f}'(0)| = |(h_t^{-1} \circ f \circ h_t)'(0)| < 1, \text{ para todo } t \in \Delta.$$

Por el Teorema 2.7, existe una familia analítica de cambio de coordenadas ξ_t tal que

$$\xi_t \circ (h_t^{-1} \circ f \circ h_t) \circ \xi_t^{-1} = \nu_t,$$

donde $\nu_t \xi_t$ es \mathbb{C} -lineal con $\nu_t = (h_t^{-1} \circ f \circ h_t)'(0)$ holomorfa en t .

Puesto que $h_t^{-1} \circ f \circ h_t = f_t$, con $f_t \in \Gamma_t$ y $f \in \Gamma$; entonces $f \circ h_t = h_t \circ f_t$. Tomando ξ en el dominio y ξ_t en el contradominio y siguiendo la demostración del Teorema 3.7 se tiene que $h_t(\xi) = \sigma_t \xi$.

Como σ_t puede variar continuamente con respecto a t , $g_t = \sigma_t^{-1} \cdot h_t(\xi)$ es una familia de cambio de coordenadas holomorfa que conjugua Γ_1 en Γ_t . ■

Capítulo 4

Teorema de la Flor: Versión Topológica.

Sea $f(z)$ una aplicación holomorfa local (inyectiva) con $0 \in \mathbb{C}$ como punto fijo, cuya representación en una serie de potencias está dada por:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (4.1)$$

El número $\lambda = f'(0)$ es llamado el multiplicador de f .

En los capítulos anteriores hemos considerado el caso cuando f es de tipo hiperbólico, es decir cuando $|\lambda| \neq 0$ y 1 . Completando la clasificación, decimos que f es de tipo:

- (a) Hiperbólico: si $|\lambda| \neq 0$ y 1 .
- (b) Superatrayente: si $\lambda = 0$.
- (c) Parabólico: si $|\lambda| = 1$, $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta \in \mathbb{Q}$.
- (d) Elíptico: si $|\lambda| = 1$, $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta \notin \mathbb{Q}$.

A continuación, algunos resultados referentes a cada tipo mencionado:

- (a) Hiperbólico:
Schröder, 1871 [Sch]; Koenigs, 1884 [Kœ]: f es localmente holomorfa conjugada a $g(z) = \lambda z$.
Este resultado ya fue probado (ver Teorema 2.1).
- (b) Superatrayente:
Böttcher, 1904 [Bö]: f es localmente holomorfa conjugada a $g(z) = z^r$, donde $r \geq 2$ es el orden del punto superatrayente (ver [Mi]).
- (c) Parabólico:

- (c.1) Leau, 1897 [Le]; Fatou 1919 [Fa2]: Ver el Teorema 4.4.
- (c.2) Camacho, 1978 [Ca1]: Ver el Teorema 4.2. Este Teorema es lo que probaremos en este capítulo.
- (c.3) Écalle, 1981 [Éc2; Éc3]; Voronin 1981 [Vo] : Establecen las condiciones para que dadas f_1 y f_2 de la forma (4.1) sean localmente holomorfas conjugadas.

(d) Elíptico:

Para este caso, los resultados dados a continuación son a modo de referencia, no serán probados en esta tesis, pues por su complejidad es tema de estudio para otra tesis.

(d.1) Siegel, 1942 [Si]:

Consideremos $\Omega_\lambda(m) := \min_{1 \leq k \leq m} |\lambda^k - 1|$, para $\lambda \in S^1$ y $m \geq 1$.

Sea $\lambda \in S^1$ tales que si existen $\beta \geq 1$ y $\gamma > 0$ de tal manera que :

$$\frac{1}{\Omega_\lambda(m)} \leq \gamma m^\beta, \quad (4.2)$$

para todo $m \geq 2$. Entonces toda f de la forma (4.1) es holomorfa linealizable. Además, el conjunto de λ 's $\in S^1$ que satisfacen (4.2) para algún $\beta \geq 1$ y $\gamma > 0$ es de medida completa en S^1 .

Decimos que 0 es un “punto de Siegel” si f es holomorfa linealizable en 0.

(d.2) Bryuno, 1965 [Br1]-[Br3]:

Sea $\lambda \in S^1$. Si λ satisface

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-2^{-k} \log \Omega_\lambda(2^{k+1})) < +\infty, \quad (4.3)$$

entonces 0 es un punto de Siegel para toda f de la forma (4.1).

(d.3) El primero en probar que existen aplicaciones holomorfas del tipo elíptico (con multiplicador λ) no linealizables fue Cremer, en 1927 [Cr1]. Después demostró lo siguiente:

Cremer, 1938 [Cr2]: Si $\lambda \in S^1$ es tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup \left(-\frac{1}{m} \log \Omega_\lambda(m) \right) = +\infty. \quad (4.4)$$

Entonces existe una aplicación holomorfa f de la forma (4.1) la cual no es holomorfa linealizable.

Como $\lambda = e^{2\pi i\theta}$; un número θ para el cual λ satisface (4.4) es llamado un número de Cremer. Los números de Cremer forman un subconjunto denso de \mathbb{R} con medida de Lebesgue cero.

Si f es del tipo elíptico no linealizable en 0, decimos que 0 es un punto de Cremer para f .

(d.4) Yoccoz, 1988 [Y2; Y4]: Si λ no satisface (4.3), entonces el 0 es un punto de Cremer para alguna f de la forma (4.1). En particular, 0 es un punto de Cremer para $f(z) = \lambda z + z^2$.

(d.5) Los resultados dados en (d.2) y (d.4) también se pueden expresar como:

Teorema 4.1. [Bryuno, 1965 [Br1]-[Br3]; Yoccoz, 1988 [Y2; Y4]]. Sea $\lambda \in S^1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) el 0 es un punto de Siegel para el polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$;
- (ii) el 0 es un punto de Siegel para toda f de la forma (4.1) (con multiplicador λ);
- (iii) el número λ satisface la condición de Bryuno (condición (4.3)).

Bryuno: (iii) implica (ii); Yoccoz: (i) es equivalente a (ii) y (ii) implica (iii).

Si 0 es un punto de Siegel para f , tenemos que la dinamica local de f es bastante clara. En cambio, si 0 es un punto de Cremer para f , la dinamica local de f es muy complicada y aún no es totalmente entendida, a pesar de los extraordinarios trabajos hechos recientemente por Pérez-Marco [P3; P4].

4.1. Aplicaciones Holomorfas de tipo Parabólico.

Pierre Fatou ([Fa2], pp. 191-221) y Gaston Julia [Ju] discutieron extensamente el caso cuando $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, amparados en el análisis inicial para el caso $\lambda = 1$ hecha por Leau [Le]. Los trabajos que hicieron se relacionan con el estudio del comportamiento de órbitas bajo iteración. Posteriormente, Camacho [Ca1] (de manera independiente A. A. Shcherbakov) trata la dinámica sobre la conjugación topológica lo cual detallamos en esta sección.

A continuación dos teoremas a manera de referencia e introducción :

Teorema 4.2. *Dada $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ una aplicación holomorfa con $\lambda^n = 1$ y $\lambda^j \neq 1$ para $j = 1, \dots, n-1$. Si $f^{on} \neq id$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$ tal que f es formalmente conjugado a $\lambda z + z^{nk+1} + a z^{2nk+1}$. Además, k y a están determinados por la clase de conjugación formal de f .*

Definición 4.3. Dada $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ una aplicación holomorfa con $\lambda^n = 1$ y $\lambda^j \neq 1$ para $j = 1, \dots, n-1$, y sea N una pequeña vecindad de 0 tal que f aplica de manera difeomorfa a N sobre alguna vecindad N' de 0 . Decimos que un conjunto abierto conexo U , con clausura compacta $\bar{U} \subset N \cap N'$, es un pétalo atrayente para f en el origen si:

$$f(\bar{U}) \subset U \cup \{0\} \text{ y } \bigcap_{k \geq 0} f^{ok}(\bar{U}) = \{0\}.$$

De manera similar, $U' \subset N \cap N'$ es un pétalo repelente para f si U' es un pétalo atrayente para f^{-1} .

El siguiente teorema es conocido como el “Teorema de la Flor”, el cual nos proporciona información analítica

Teorema 4.4. [Leau -Fatou]. Sea $f(z) = \lambda z + a_2 z^{n+1} + \dots$ una aplicación holomorfa en una vecindad del origen con $n + 1 \geq 2$ y suponga que $\lambda^n = 1$ y $\lambda^m \neq 1$ para $1 \leq m < n$. Entonces existen n pétalos atrayentes disjuntos U_i y n pétalos repelentes U'_i tal que la unión de estos $2n$ pétalos, junto con el origen, forman una vecindad N_0 del origen. Estos pétalos alternan uno con otro, así cada U_i intercepta sólo a U'_i y a U'_{i-1} (donde U'_0 es identificado con U'_n). Ver [Mi].

En esta sección y por ende en el capítulo restringimos nuestro estudio unicamente al siguiente teorema, el cual es una versión topológica del Teorema de la Flor, cuya prueba toma como referencia [Ca1; Bra].

Teorema 4.5. [C. Camacho]. Dada una aplicación holomorfa local

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \tag{4.5}$$

con $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, si $n > 1$ asumir $\lambda^m \neq 1$ para $1 \leq m < n$. Entonces la n -ésima iteración f^n es la identidad, o existe un homeomorfismo local h , $h(0) = 0$, y un entero $k \geq 1$, tal que

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = f_{k,n}(z) = \lambda z(1 + z^{kn}). \tag{4.6}$$

La idea de la prueba es mirar a f como un difeomorfismo de una apropiada superficie de Riemann de tal manera que f actúa de la misma manera que un automorfismo en tal superficie y así resulta topológicamente conjugado a tal automorfismo.

Análisis de la dinámica de $\lambda z(1 + z^{kn})$:

La aplicación $f_{k,n}$ deja invariante la unión de las kn líneas en \mathbb{C} , dadas por $A = \{z : z^{kn} \in \mathbb{R}\}$. Sea $z = r e^{i\theta}$. Si $z \in A$, entonces $z^{nk} = r^{nk} e^{i\theta nk} \in \mathbb{R}$,

esto sucede si $\text{sen}(\theta nk) = 0$, equivalentemente si $\theta nk = N\pi$, $N \in \mathbb{Z}$. Luego el conjunto A es expresado como: $L_N = \{z = re^{i\theta} : \theta = \frac{N\pi}{nk}\}$, donde $N = 0, \dots, nk - 1$. Por ejemplo:

Si: $k = 3$ y $n = 1$, $N \in \mathbb{Z}$, obtenemos tres rectas para los valores de $N = 0, 1, 2$; dado que para los demás valores de $N \in \mathbb{Z}$, estas rectas coinciden (ver Figura (4.1)).

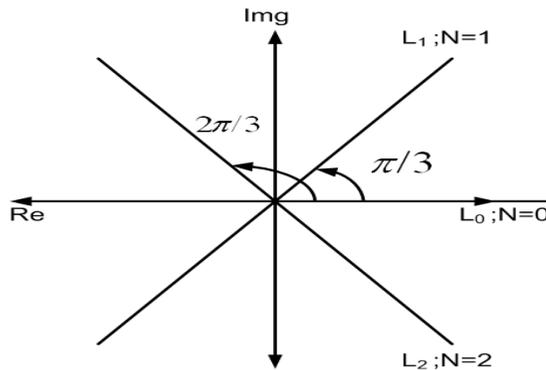


Figura 4.1:

- Verificamos que $f_{k,n}(L_N) \subset L_N$, es decir $f_{k,n}$ deja invariante la unión de las kn líneas L_N . En efecto: sea $z \in L_N$, se cumple que $z^{kn} \in \mathbb{R}$. Luego $[f_{k,n}(z)]^{kn} = [\lambda z(1 + z^{kn})]^{kn} = [(\lambda)^n]^k z^{kn}(1 + z^{kn})^{kn} = z^{kn}(1 + z^{kn})^{kn} \in \mathbb{R}$, esto indica que $f_{k,n}(z) \in L_N$.
- Estas kn líneas dividen a \mathbb{C} en $2kn$ sectores $\{A_j\}$, los cuales podemos enumerar de manera antihoraria por $A_j = \{z : \frac{(j-1)\pi}{nk} < \text{arg}z < \frac{j\pi}{nk}\}$, $j = 1, \dots, 2nk$.
- La aplicación $T_{kn}(z) = z(1 + z^{kn})$ deja invariante a cada uno de los sectores de medida angular π/kn . Este comportamiento de invarianza sólo ocurre en una pequeña vecindad de 0, es decir, $A_j^\delta := A_j \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\} \xrightarrow{T_{kn}} A_j$ para $0 < \delta \ll 1$.

Por ejemplo:

- (1) Para $k = n = 1$, $T_1(z) = z(1 + z)$ deja invariante cada uno de los sectores $A_{j \in \{1,2\}}^\delta$, ambos de medida angular π . Además, para cualquier $z \in A_{j \in \{1,2\}}^\delta$, el conjunto de puntos $\{z, T_1^{\circ 1}(z), T_1^{\circ 2}(z), T_1^{\circ 3}(z), \dots\}$ (donde $T_k^{\circ n} := T_k \circ T_k \circ \dots \circ T_k$ n-veces) forman cada una de las trayectorias (pétalos) que se muestran en la Figura (4.2).

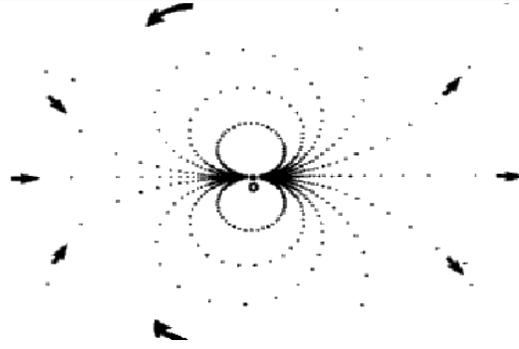


Figura 4.2:

El sentido de las flechas en la Figura (4.2) indica el sentido que siguen los puntos que forman los pétalos así como también los puntos ubicados en la línea de frontera de los $A_{j \in \{1,2\}}^\delta$ (el eje real), esto es, si se toma un punto z en el eje real, la imagen vía T_1^{on} para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta a la derecha de la ubicación de z .

- (2) Para $k = 1$ y $n = 2$, $T_2(z) = z(1 + z^2)$ deja invariante cada uno de los sectores $A_{j \in \{1,2,3,4\}}^\delta$, todos ellos de medida angular $\pi/2$. El comportamiento del conjunto de puntos $\{z, T_2^{\circ 1}(z), T_2^{\circ 2}(z), T_2^{\circ 3}(z), \dots\}$ para cada $z \in A_{j \in \{1,2,3,4\}}^\delta$ es análogo al caso 1) y se muestra en la Figura (4.3).

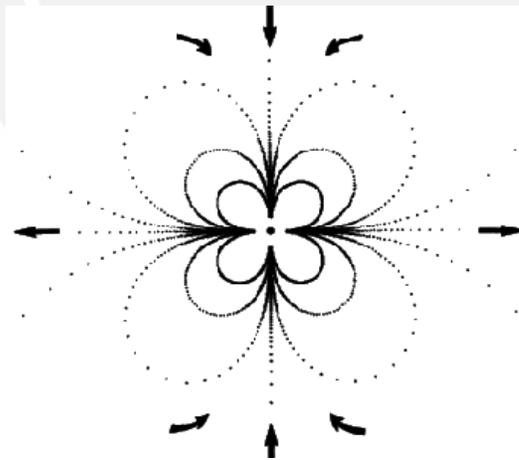


Figura 4.3:

- (3) Para $k = 1$ y $n = 3$, $T_3(z) = z(1 + z^3)$ deja invariante cada uno de los sectores $A_{j \in \{1,2,3,4,5,6\}}^\delta$, todos ellos de medida angular $\pi/3$. El

comportamiento del conjunto de puntos $\{z, T_3^{\circ 1}(z), T_3^{\circ 2}(z), T_3^{\circ 3}(z), \dots\}$ para cada $z \in A_{j \in \{1,2,3,4,5,6\}}^\delta$ es análogo al caso 1) y se muestra en la Figura (4.4).

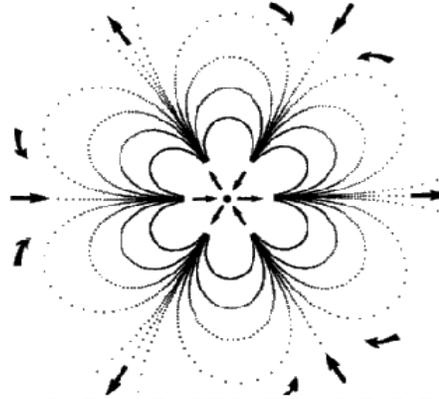


Figura 4.4:

- Si $\lambda = e^{2\pi i q/n}$ con $m.c.d(q, n) = 1$, $0 < q < n$, entonces $\psi(z) = \lambda z$ es una rotación la cual aplica cada sector A_j en A_{j+2kq} módulo $2kn$. Por ejemplo, si $n = 2$ y $k = q = 1$, entonces \mathbb{C} es dividido en 4 sectores : A_1, A_2, A_3 y A_4 , $\psi(z) = -z$.

$$\psi(A_1) = A_{1+2(1)(1)} = A_3$$

$$\psi(A_2) = A_{2+2(1)(1)} = A_4$$

$$\psi(A_3) = A_{3+2(1)(1)} = A_5 = A_{1 \bmod 4}$$

$$\psi(A_4) = A_{4+2(1)(1)} = A_6 = A_{2 \bmod 4}.$$

- La aplicación $f_{k,n}$ es la composición de $T_{kn}(z) = z(1+z^{kn})$ con $\psi(z) = \lambda z$. Esto es, $f_{k,n}(z) = \psi \circ T_{kn}(z)$.
- Sea $S_j = A_{2j-1} \cup A_{2j} \cup L_j^+$, donde $L_j^+ = (\partial A_{2j-1} \cap \partial A_{2j}) \setminus \{0\}$, para $j = 1, \dots, kn$. Por ejemplo, para $k = 1$ y $n = 2$, tenemos:

$$S_1 = A_1 \cup A_2 \cup L_1^+, \quad L_1^+ = (\partial A_1 \cap \partial A_2) \setminus \{0\}$$

$$S_2 = A_3 \cup A_4 \cup L_2^+, \quad L_2^+ = (\partial A_3 \cap \partial A_4) \setminus \{0\}$$

Nota: cada S_j contiene un pétalo (atrayernte) de Leau-Fatou.

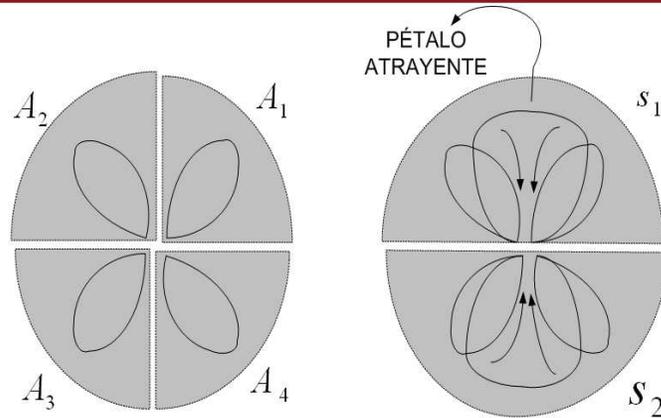


Figura 4.5:

Superficie de Riemann de la Aplicación Raíz kn -ésima:

Consideramos la aplicación holomorfa $z \mapsto z^{-kn}$. Esta aplicación tiene la propiedad que cada sector S_j es aplicado en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$. Para el caso $n = k = 1$, $z \mapsto z^{-kn}$ aplica \mathbb{C} en \mathbb{C}^* ; en este caso la superficie de Riemann asociada es $\mathcal{S}_1 = \mathbb{C}^*$. Para el caso $nk > 1$, detallamos la construcción y definición de la superficie de Riemann \mathcal{S}_{kn} que es un nk -cubrimiento de \mathbb{C}^* .

Sean U_1, U_2, \dots, U_{nk} ; nk copias de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$. Pegamos U_1 a lo largo de la frontera superior del corte $[0, +\infty]$ con U_2 a lo largo de la frontera inferior del corte $[0, +\infty]$. Procediendo de esta manera, pegamos U_j a lo largo de la frontera superior del corte $[0, +\infty]$ con U_{j+1} a lo largo de la frontera inferior del corte $[0, +\infty]$ para $j = 1, \dots, nk - 1$; finalmente pegamos U_{nk} a lo largo de la frontera superior del corte $[0, +\infty]$ con U_1 a lo largo de la frontera inferior del corte $[0, +\infty]$. Esta superficie (topológica) que acabamos de describir, la denotamos por \mathcal{S}_{kn} .

La inversa de la aplicación holomorfa $z \mapsto z^{-kn}$ tiene nk ramas, las cuales denotamos por $z \mapsto B_j(z)$ y de tal manera que $B_j(\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]) = S_j$, para $j = 1, \dots, nk$.

Definimos una aplicación inyectiva $\pi_{nk} : \mathcal{S}_{kn} \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\pi_{nk}|_{U_j} = B_j$, esta forma de definir a la aplicación π_{nk} permite extenderla continuamente a todo \mathcal{S}_{kn} . Así π_{nk} es un homeomorfismo en \mathbb{C}^* . Luego π_{nk} es un biholomorfismo.

Damos a \mathcal{S}_{kn} una estructura de superficie de Riemann. Definimos un nk -cubrimiento de \mathbb{C}^* por la aplicación $P : \mathcal{S}_{kn} \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que para cada $q \in U_j$, $P(q) = q \in \mathbb{C}^*$, esto se extiende a todo \mathcal{S}_{kn} .

La aplicación P es holomorfa. En efecto: usando $(U_j, \pi_{nk}|_{U_j})$ como una carta, en coordenadas locales (S_j, ξ) , se tiene que (ver abajo el diagrama conmutativo)

$p(\xi) = P[\pi_{nk}^{-1}(\xi)] = \xi^{-kn}$ el cual es un holomorfismo en \mathbb{C}^* .

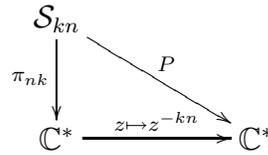


diagrama 4 · 1

Observamos que $\{(U_j, \pi_{nk}|_{U_j})\}$ no es un atlas para \mathcal{S}_{nk} , pues faltan cubrir algunas semilíneas. Para solucionar esto, considerar conjuntos abiertos de la forma

$$U'_j = \mathbb{C} \setminus i[0, +\infty]$$

$$S'_j = A_{2j} \cup A_{2j+1}, \text{ para } j = 1, \dots, (nk - 1) \text{ y}$$

$$S'_{nk} = A_1 \cup A_{2kn}.$$

En el siguiente gráfico se muestra para el caso $n = 2$ y $k = 1$:

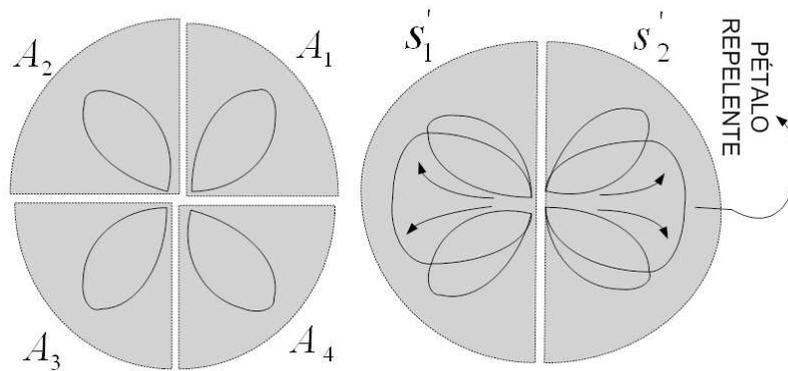


Figura 4.6:

Nota: cada S'_j contiene un pétalo (repelente) de Leau-Fatou.

Entonces el atlas deseado es de la forma $\{(U_j, \pi_{nk}|_{U_j}) \cup (U'_j, \pi_{nk}|_{U'_j})\}$.

Alternativamente, (observe el diagrama 4.1) considerando la aplicación holomorfa P es más natural dotar a \mathcal{S}_{nk} de la estructura de superficie de Riemann, con un atlas dado por $\{(U_j, \varphi_j)\} \cup \{(U'_j, \varphi'_j)\}$ donde $\varphi_j(\xi) = \xi$ y $\varphi'_j(\xi) = \xi$. En estas coordenadas, para $\xi \in U_j$, se tiene que $\pi_{nk} \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \pi_{nk}|_{U_j}(\xi) = B_j(\xi) = \xi^{-1/kn}$.

Usamos las ramas de $i^{-1/kn}$ como indicadores tal que $i^{-1/kn} \in S_j$, esto es, reenumeramos $B_j(\xi)$ de modo que para $\xi \in U_j$, $B_j(\xi) = \xi^{-1/kn} \in S_j$. Es decir, la elección de la rama de $B_j(\xi)$ se hace buscando que $i^{-1/kn} \in S_j$, para $\xi \in U_j$.

Observe que esta superficie se puede realizar como un subconjunto de \mathbb{C}^2 :

$$\mathcal{S}_{kn} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* : w = z^{-kn}\},$$

donde $\pi_{nk}(z, w) = z = w^{-1/kn}$ y $P(z, w) = w$.

Prueba del teorema:

Sea:

$$f(z) = \lambda z + a_{m+1}z^{m+1} + a_{m+2}z^{m+2} + \dots = \lambda z + a_{m+1}z^{m+1} + O(z^{m+2}), \quad (4.7)$$

donde a_{m+1} para $m \geq 1$ denota el primer coeficiente no nulo en la serie de f .

Intentamos eliminar el término de grado $m + 1$, lo que equivale a eliminar el coeficiente a_{m+1} , usamos el cambio de coordenadas holomorfo $\varphi(z) = z + \alpha z^{r+1}$ de tal manera que

$$(\varphi \circ f)(z) = (f_1 \circ \varphi)(z), \quad (4.8)$$

donde $f_1(z) = \lambda z + O(z^{m+2})$. Es decir, tenemos que resolver la siguiente ecuación funcional:

$$f(z) + \alpha[f(z)]^{r+1} = \lambda\varphi(z) + O(z^{m+2}). \quad (4.9)$$

Resolviendo esta ecuación funcional se tiene:

$\lambda z + a_{m+1}z^{m+1} + \alpha\lambda^{r+1}z^{r+1} + O(z^{m+2}, z^{r+2}) = \lambda z + \lambda\alpha z^{r+1} + O(z^{m+2})$. De aquí se deduce que debemos de elegir $r = m$; resolviendo obtenemos el valor de α , $\alpha = \frac{-a_{m+1}}{\lambda(\lambda^m - 1)}$, el cual está bien definido siempre que $m \neq nq$ para $q \in \mathbb{N}$ (pues $\lambda^n = 1$). Si al repetir el proceso descrito en (4.8) encontramos un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = kn$, entonces a_{kn+1} es el primer coeficiente que no se anula, luego la nueva $f(z)$ quedará de la siguiente forma:

$$f(z) = \lambda z + a_{kn+1}z^{kn+1} + a_{kn+2}z^{kn+2} + \dots = \lambda z \left(1 + \frac{a_{kn+1}}{\lambda} z^{kn} + \frac{a_{kn+2}}{\lambda} z^{kn+1} + \dots \right),$$

sea $b_{kn+i} := \frac{a_{kn+1+i}}{\lambda}$ para $i = 0, 1, 2, \dots$. Así la forma normal quedará como:

$$f(z) = \lambda z (1 + b_{kn} z^{kn} + O(z^{kn+1})). \quad (4.10)$$

Usando el cambio de coordenadas $\phi(z) = \alpha^{-1}z$ tal que $\alpha^{-kn} = b_{kn}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi \circ f \circ \phi^{-1} &= \phi \circ f(\alpha z) = \phi[\lambda\alpha z (1 + b_{kn}(\alpha z)^{kn} + O(z^{kn+1}))] \\ &= \alpha^{-1}\lambda\alpha z (1 + z^{kn} + O(z^{kn+1})) = \lambda z (1 + z^{kn} + O(z^{kn+1})). \end{aligned}$$

Por lo tanto la forma normal de (la nueva) f es:

$$f(z) = \lambda z (1 + z^{kn} + O(z^{kn+1})). \quad (4.11)$$

De no existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = qn$ entonces se puede eliminar todos los términos de grado mayor o igual a 2, luego $f(z)$ es conjugada (formalmente) a λz . Pues existe un difeomorfismo $\hat{\varphi}$ (dado por la composición de los difeomorfismos φ 's) tal que $\hat{\varphi} \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}(z) = \lambda z$. Además, $\lambda^n = 1$, así $z = \lambda^n z = (\hat{\varphi} \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1})^n(z) = \hat{\varphi} \circ f^{on} \circ \hat{\varphi}^{-1}(z)$. Esto implica que $\hat{\varphi} \circ f^{on} \circ \hat{\varphi}^{-1} = id$,

luego $f^{on} = \hat{\varphi}^{-1} \circ id \circ \hat{\varphi} = id$. Por lo tanto $f^{on} = id$.
 Analizamos (4.11) en una vecindad (muy pequeña) de 0, esto equivale a llevar el análisis a una vecindad del punto infinito, para ello usamos la aplicación holomorfa $z \mapsto z^{-kn}$. Observemos el siguiente esquema:

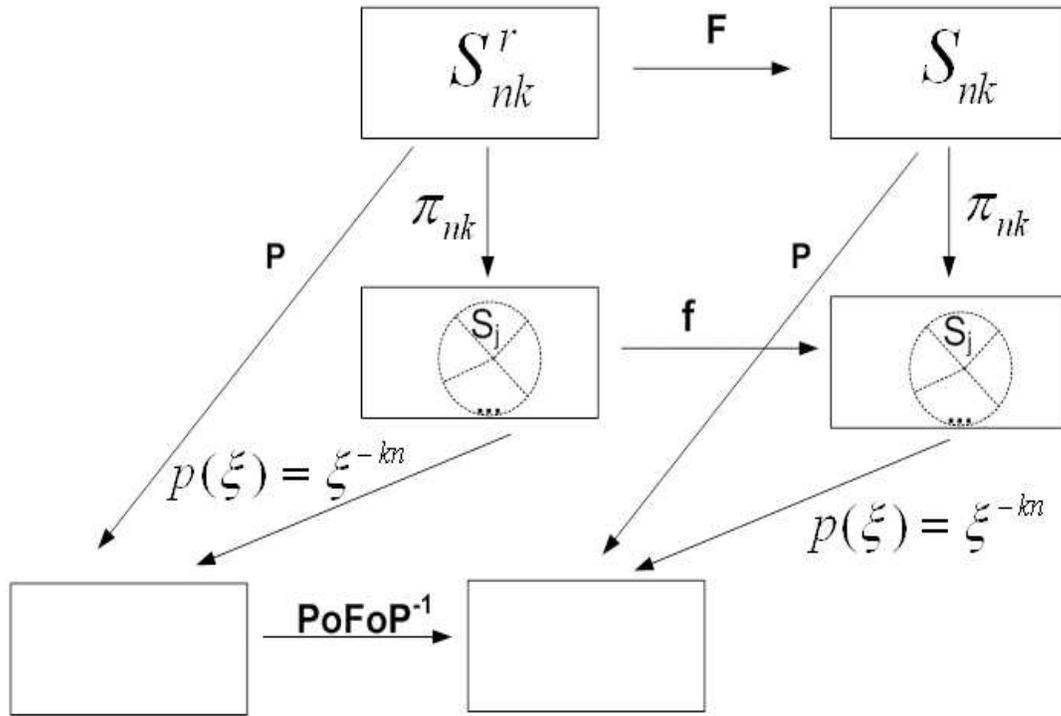


Figura 4.7:

Sea $\mathbb{C}_r^* = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| < r\}$ para $r > 0$ pequeño. Sea $\mathcal{S}_{kn}^r = \pi_{kn}^{-1}(\mathbb{C}_r^*)$.

Definimos una aplicación holomorfa inyectiva $F : \mathcal{S}_{kn}^r \rightarrow \mathcal{S}_{kn}$ como:

$$F = \pi_{nk}^{-1} \circ f \circ \pi_{nk} . \tag{4.12}$$

Asumimos que $x \in U_j$ y $F(x) \in U_\ell$. En las coordenadas locales $(U_j, \pi_{nk}|_{U_j})$ y $(U_\ell, \pi_{nk}|_{U_\ell})$ se observa que $F = f$. En efecto: $\pi_{nk} \circ F \circ \pi_{nk}^{-1} = \pi_{nk} \circ (\pi_{nk}^{-1} \circ f \circ \pi_{nk}) \circ \pi_{nk}^{-1} = f$.

Pero si usamos las coordenadas locales (U_j, φ_j) y (U_ℓ, φ_ℓ) , una expresión local para F con $\xi \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$ es: $F_{j\ell}(\xi) = \varphi_\ell \circ F \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \varphi_\ell \circ \pi_{nk}^{-1} \circ f \circ \pi_{nk} \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \varphi_\ell \circ \pi_{nk}^{-1} \circ f(\xi^{-1/kn}) = \varphi_\ell \circ [f(\xi^{-1/kn})]^{-kn} = [f(\xi^{-1/kn})]^{-kn} = \xi - kn + a\xi^{-1/kn} + \dots$, donde la rama de $\xi^{-1/kn}$ es elegida de tal modo que $i^{-1/kn} \in S_j$.

Definimos una aplicación holomorfa inyectiva $G : \mathcal{S}_{kn}^r \rightarrow \mathcal{S}_{kn}$. Si $x \in U_j$ y

$F(x) \in U_\ell$ entonces

$$G(x) := \varphi_\ell^{-1}(\varphi_j(x) - kn) . \quad (4.13)$$

En caso que $x \in U'_j$ y $F(x) \in U'_\ell$ entonces

$$G(x) := (\varphi'_\ell)^{-1}(\varphi'_j(x) - kn) . \quad (4.14)$$

Si $x \in U_j \cap U'_j = U_j \setminus i[0, +\infty] = U'_j \setminus [0, +\infty]$, indistintamente se puede aplicar φ_j o bien φ'_j . Si $x \notin U_j \cap U'_j$ se aplica φ_j en caso $x \in i[0, +\infty]$, y φ'_j en caso $x \in [0, +\infty]$. Por lo tanto, $G(x)$ está bien definido.

En coordenadas locales

$$G_{j\ell}(\xi) = \varphi_\ell \circ G \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \varphi_\ell \circ G(\varphi_j^{-1}(\xi)) = \xi - kn . \quad (4.15)$$

Se debe mostrar que F es topológicamente conjugada a G en \mathcal{S}_{kn}^r , lo cual implica que f es topologicamente conjugada a $g := \pi_{nk} \circ G \circ \pi_{nk}^{-1} = \lambda z(1 - knz^{kn})^{-1/kn}$ en \mathbb{C}_r^* .

Por otra parte, si en la definición de $F = \pi_{nk}^{-1} \circ f \circ \pi_{nk}$ cambiamos la aplicación holomorfa f por $f_{k,n}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$; en las coordenadas locales (U_j, φ_j) y (U_ℓ, φ_ℓ) , la expresión local para F con $\xi \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$ es : $F_{j\ell}(\xi) = \varphi_\ell \circ F \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \varphi_\ell \circ \pi_{nk}^{-1} \circ f_{k,n} \circ \pi_{nk} \circ \varphi_j^{-1}(\xi) = \varphi_\ell \circ \pi_{nk}^{-1} \circ f_{k,n}(\xi^{-1/kn}) = \varphi_\ell \circ [f_{k,n}(\xi^{-1/kn})]^{-kn} = [f_{k,n}(\xi^{-1/kn})]^{-kn} = [\lambda(\xi^{-1/kn})(1 + \xi^{-1})]^{-kn} = \xi - kn + a\xi^{-1} + \dots$, en consecuencia la definición de la aplicación holomorfa inyectiva $G : \mathcal{S}_{kn}^r \rightarrow \mathcal{S}_{kn}$ es la misma. Por lo tanto $f_{k,n}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$ es topologicamente conjugado a $g := \pi_{nk} \circ G \circ \pi_{nk}^{-1}$, esto lleva a la versión final del teorema.

Para “pegar” F y G , definimos un nuevo difeomorfismo C^∞ , $K : \mathcal{S}_{kn}^r \rightarrow \mathcal{S}_{kn}$ de tal manera que $F = G$ fuera de algún (grande) subconjunto compacto de \mathcal{S}_{kn} y $K = G$ en un conjunto abierto contenido en tal subconjunto compacto. Definimos K en $\mathbb{C}_r^* = \pi_{nk}(\mathcal{S}_{kn}^r)$. Para esto considere $0 < r_2 < r_1 < r < 1$ y una aplicación C^∞ , $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que :

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0; \\ 0 \leq \rho(t) \leq 1, & \text{para } 0 < t < 1; \\ 1, & \text{para } t \geq 1 . \end{cases}$$

En particular elegimos

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0; \\ \int_0^t \exp(\frac{1}{t(t-1)}) dt / \int_0^1 \exp(\frac{1}{t(t-1)}) dt , & \text{para } 0 < t < 1; \\ 1, & \text{para } t \geq 1 . \end{cases}$$

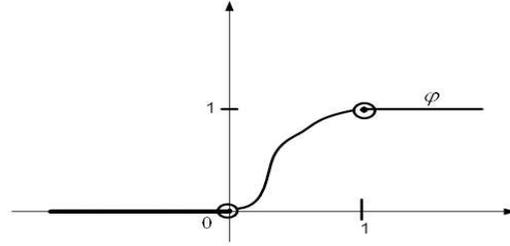


Figura 4.8:

Así, en $\mathbb{C}_r^* = \pi_{nk}(\mathcal{S}_{kn}^r)$ definimos $k(z) = g(z) + \varphi\left(\frac{r_1 - |z|}{r_1 - r_2}\right) [f(z) - g(z)]$. Por lo tanto, se define $K = \pi_{nk}^{-1} \circ k \circ \pi_{nk}$. Tenemos que mostrar que K es un difeomorfismo. Puesto que $|F_{j\ell}(\xi) - G_{j\ell}(\xi)|$ tiende a cero cuando ξ tiende al infinito, se tiene que $|f(z) - g(z)|$ tiende a cero para $r \ll 1$. En particular, k es C^1 pues g es difeomorfismo en \mathbb{C}_r^* . También:

- Si $|z| \leq r_2$, entonces $\varphi(t) = 1$, así $k(z) = f(z) \in \text{Dif}(\mathbb{C}, 0)$;
- Si $r_2 < |z| < r_1$, entonces $0 < \varphi(t) < 1$, así $k(z) = (1 - \rho) \cdot g(z) + \rho \cdot f(z)$;
- Si $|z| \geq r_1$, entonces $\varphi(t) = 0$, así $k(z) = g(z)$.

(4.16)

Por lo tanto K es un difeomorfismo.

Sea $\mathcal{S}_{kn}^{r_1} = \pi_{nk}^{-1}(\mathbb{C}_{r_1}^*)$, análogamente $\mathcal{S}_{kn}^{r_2} = \pi_{nk}^{-1}(\mathbb{C}_{r_2}^*)$; tal que $\mathcal{S}_{kn}^{r_1} \cap U_j = \{\xi \in U_j : |\xi| > r_1^{-kn}\}$ y $\mathcal{S}_{kn}^{r_2} \cap U_j = \{\xi \in U_j : |\xi| > r_2^{-kn}\}$.

Por definición (observe también (4.16)), se tiene que $K \equiv G$ en $B := \mathcal{S}_{kn}^r \setminus \mathcal{S}_{kn}^{r_1}$, mientras que $K \equiv F$ en $\mathcal{S}_{kn}^{r_2}$.

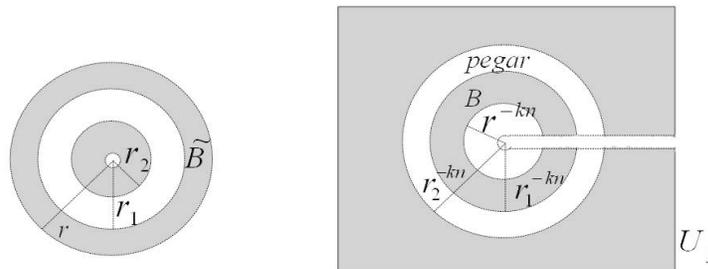


Figura 4.9:

Como $K \equiv F$ en \mathcal{S}_{kn}^r , es suficiente mostrar que K es topologicamente conjugado a G . Para esto, se plantea definir una conjugación H en un conjunto E dentro de \mathcal{S}_{kn}^r , este conjunto E es llamado “dominio fundamental exagerado”, de manera que para $x \in \mathcal{S}_{kn}^r$ existe un $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $G^\alpha(x) \in E$, es decir, para $x \in \mathcal{S}_{kn}^r$ mediante un necesario número de traslaciones determinados por $\alpha \in \mathbb{Z}$, $G^\alpha(x) \in E$; luego se extiende la conjugación mediante la relación $H \circ G \circ H^{-1} = K$. Sea L_t definida de tal manera que $L_t \cap U_t = \{\xi \in \mathcal{S}_{kn}^r : Re(\xi) = 0\}$, para $t = 1, \dots, kn$. Por la definición de G y L_t se tiene que $L'_t := G^n(L_t) \subset U_t$, esto es, L'_t es una línea en $U_t \cap \mathcal{S}_{kn}^r$ resultado de la traslación de L_t . Queda claro que G^n es una traslación de distancia $d(L_1, L'_1)$ en cada U_t . Definimos el conjunto fundamental exagerado E como el conjunto B unido con las $2kn$ semifranjas de B al infinito delimitado por $L_t \cap U_t$ y $L'_t \cap U_t$.

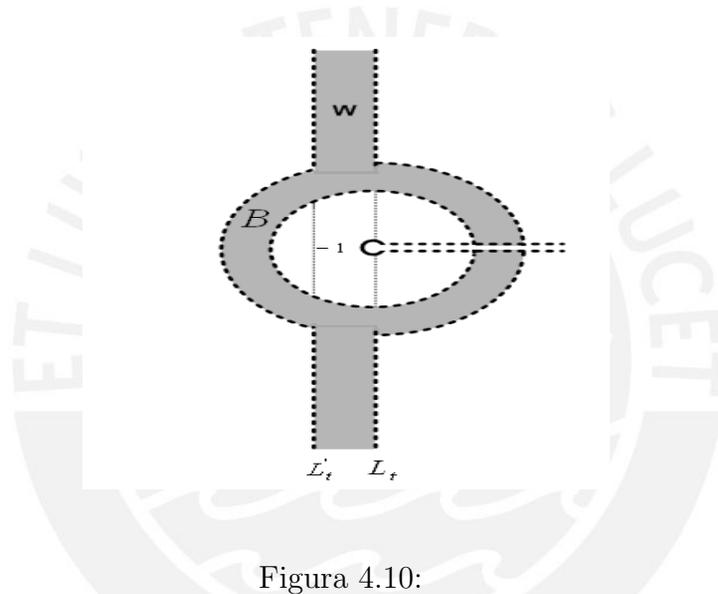


Figura 4.10:

Considerando que $K \equiv G$ en B , definimos $H|_{L_t} = Id$ y $H|_B = Id$, entonces $H|_{L'_t}$ es definido por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L_t & \xrightarrow{G} & L'_t \\
 \downarrow H=Id & & \downarrow H \\
 L_t & \xrightarrow{K} & K(L_t)
 \end{array}$$

Por lo tanto, $H|_{L'_t} := K|_{L_t}$ para $t = 1, 2, \dots, kn$. Puesto que H conjuga a G y K en $B \cup L_t \cup L'_t$, extendemos esta conjugación por medio de un homeomorfismo arbitrario en el interior de cada semifranja delimitada por L_t y L'_t . Luego, dado $x \in \mathcal{S}_{kn}^r$, definimos $H(x) := K^{-\alpha} \circ H \circ G^\alpha(x)$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ es el mínimo

entero tal que $G^\alpha \in E$. Para la buena definición de H , tenemos que asegurar que $K^{-\beta}(H \circ G^\alpha(x)) \in \mathcal{S}_{kn}^r$ para $\beta = 1, 2, \dots, \alpha$; si $\alpha > 0$ y $\beta = -1, -2, \dots, -\alpha$; si $\alpha < 0$ (pues las traslaciones pueden ser hacia la izquierda o hacia la derecha hasta llegar a E). En efecto, si $x \in B$, entonces $G^\alpha(x) \in E$. Si $G^\alpha(x) \in B$, dado que $H|_B = Id$, se tiene que $H(G^\alpha(x)) \in B \subset E$, como $K = G$ en B , entonces $K^{-\beta}(H \circ G^\alpha(x)) = G^{-\beta}(H \circ G^\alpha(x)) \in E \subset \mathcal{S}_{kn}^r$ para $\beta = 1, 2, \dots, \alpha$; si $\alpha > 0$ y $\beta = -1, -2, \dots, -\alpha$; si $\alpha < 0$; pues α es el mínimo entero tal que $G^\alpha(x) \in E$.

En caso $x \in E \setminus B \subset \mathcal{S}_{kn}^r$, tal como hemos considerado, $G^\alpha(x) \in E$, luego en $U_t \cap \mathcal{S}_{kn}^r$, $G^\alpha(x) \in \tilde{L}_t$ homeomorfo a L_t . Por lo tanto $K^{-\beta}(H \circ G^\alpha(x)) \in \mathcal{S}_{kn}^r$.

Tal como se ha construido, H es un difeomorfismo. ■

Para el caso $n = k = 1$, $\mathcal{S}_{kn} = \mathbb{C}^*$. El dominio fundamental exagerado se muestra en la Figura 4.11.

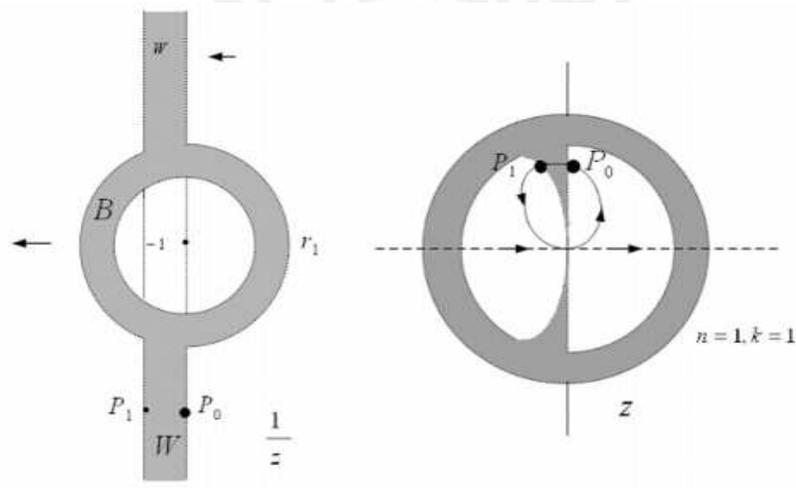


Figura 4.11:

Capítulo 5

Conclusiones.

1) La equivalencia topológica de \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 implica la conjugación topológica de sus grupos de holonomía (ver [GO], p.54). Luego, si estos grupos de holonomía satisfacen las condiciones del Teorema 3.7, tenemos que la equivalencia topológica de las foliaciones \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 implica la equivalencia analítica de sus grupos de holonomía.

2) Si una aplicación holomorfa local $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ es parabólica, no siempre es linealizable.

Como ejemplo podemos considerar $f(z) = -z + (1/6)z^3 - (1/120)z^5 + (1/5040)z^7 - \dots$, la cual es la representación en de serie de potencias de la aplicación $f(z) = -\text{sen}(z)$.

3) Para $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ una aplicación holomorfa con $\lambda^n = 1$ y $\lambda^j \neq 1$ para $j = 1, \dots, n-1$. Si $f^{on} \neq id$ entonces:

a) Existe $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$ tal que f es formalmente conjugado a $\lambda z + z^{nk+1} + a z^{2nk+1}$.

b) Existe un entero $k \geq 1$, tal que f es topologicamente conjugado a $f_{k,n}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$.

Bibliografía

- [Ah] L. V. Ahlfors, Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable, McGraw-Hili, 1979.
- [Ar] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, Dynamical Systems, Cambridge University Press 1994.
- [Bö] L. E. Böttcher, The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis (Russian), Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. **14** (1904) 155-234.
- [Bra] F. Bracci, Local holomorphic dynamics of diffeomorphisms, Dipartimento Di Matematica Università Di Roma “Tor Vergata” Via Della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italy.
- [Br1] A. D. Bryuno, Convergence of transformations of differential equations to normal forms, Dokl. Akad. Nauk USSR **165** (1965) 987-989.
- [Br2] A.D. Bryuno, Analytical form of differential equations, I. Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131-288.
- [Br3] A.D. Bryuno, Analytical form of differential equations, II. Trans. Moscow Math. Soc. **26** (1972), 199-239.
- [Ca1] C. Camacho, On the structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in C^2 , Sciété Mathématique de France, Astérisque 59-60 (1978) 83-94.
- [Ca2] C. Camacho, Alcides Lins Neto, Teoría Geométrica de las Foliaciones. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, 1979.
- [Ch] T. M. Cherry , A singular case of iteration of analytic functions: a contribution to the small divisors problem, Non-linear problems of Engineering, Academic Press, New York, 1964.
- [Co] D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser Boston, 1980.

- [Cr1] H. Cremer, Zum Zentrumproblem, Math. Annalen, **98**, 1927, 151-163.
- [Cr2] H. Cremer, Über die Häufigkeit der Nichtzentren. Math. Ann. **115** (1938), 573-580.
- [Di] J. Dieudonné, Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial Reverté S.A, 1960.
- [Éc1] J. Écalle, Théorie itérative: introduction a la théorie des invariants holomorphes, J. Math. Pure Appl. **54** (1975) 183-258.
- [Éc2] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome I: Les algèbres de fonctions résurgentes, Publ. Math. Orsay **81-05**, Université de Paris-Sud, Orsay (1981).
- [Éc3] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome II: Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération, Publ. Math. Orsay **81-06**, Université de Paris-Sud, Orsay (1981).
- [Fa1] P. Fatou, Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelle, C. R. Acad. Sci. Paris **143** (1906) 546-548.
- [Fa2] P. Fatou, Sur les equations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. France **47**(1919), 161-271.
- [Fa3] P. Fatou, Sur l'itération des fonctions transcendentes entières, Acta Math. **47** (1926) 337-370.
- [Fr] O. Forster, Lectures on Riemann Surfaces, Springer-Verlag New York Inc, 1981.
- [GO] X. Gomez-Mont, L. Ortiz-Bobadilla, Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación **3**, 1989.
- [He1] M. Herman, Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann, Bull. Soc. Math. France **112** (1984) 93-142.
- [He2] M. Herman, Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic iffeomorphisms of \mathbb{C}^n near a fixed point, pp. 138-198 of Proc 8th Int. Cong. Math. Phys., World Sci. 1986.
- [He3] M. Herman, Sur la conjugation différentiables des difféomorphismes du cercle à les rotations, Pub. I.H.E.S. **49** (1979) 5-233.
- [I1] Y. Iliashenko, Density of an individual solution and ergodicity of a family of solutions to the equation \dots , Math. Zametki **4** (1968) 741-750.

- [I2] Y. Iliashenko, Global and local aspects of the theory of complex differential equations, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, Finland, 1978, 821-826.
- [I3] Y. Iliashenko, Topology of phase portraits of analytic differential equations in the complex projective plane, Trudy Sem. Petrovskii, **4** (1978) 84-136 (in Russian), English Translation in Sel. Math. Sov., **5** (1986) 140-199.
- [Jo] F. Jones, Lebesgue Integration on Euclidean Space, Jones and Bartlett Publishers, 2001.
- [Ju] G. Julia, Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles, J. Math. Pure Appl. **8** (1918), 47-245.
- [Kœ] G. Kœnigs, Recherches sur les integrals de certains equations fonctionelles, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (3e ser.) **1** (1884) supplém. 1 - 41.
- [Le] L. Leau, Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **11** (1897).
- [Mi] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Annals of Mathematics Studies 2006.
- [Mu] J. R. Munkres, Topología: un primer curso, Prentic-Hall, 1975.
- [P1] R. Pérez-Marco, Sur la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$ et des difféomorphismes analytiques du cercle, Thèse Université de Paris-Sud, décembre 1990.
- [P2] R. Pérez-Marco, Solution Complète au Problème de Siegel de Linéarisation d'une Application Holomorphe au Voisinage d'un Point Fixe (d'après J.C. Yoccoz), Séminaire Bourbaki, **753** (1991-1992) 1-31.
- [P3] R. Pérez-Marco, Non-linearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries. Invent. Math. **199**, (1995), 67-127.
- [P4] R. Pérez-Marco, Fixed points and circle maps. Acta Math. **179**, (1997), 243-294.
- [Ru] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [Si] C. L. Siegel, Iteration of analytic functions, Ann. of Math. **43** (1942), 607-612.
- [SM] C.L. Siegel, J.K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag (1971).

- [Sch] E. Schröder, Über iterirte Functionen, Math. Ann. **3** (1871).
- [St] E. M. Stein y Rami Shakarchi, Complex Analysis, Princeton University Press, 2003.
- [Vo] S. M. Voronin, Analytic classification of germs of conformal maps $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with identity linear part, Func. Anal. Appl. **15** (1981), 1-17.
- [Y1] J.-C. Yoccoz, Conjugation différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, Ann. Sci. E.N.S. Paris (4) **17** (1984) 17333-359.
- [Y2] J.-C. Yoccoz, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}; 0)$, C. R. Acad. Sci. Paris **306** (1988) 55-58.
- [Y3] J.-C. Yoccoz, Recent developments in dynamics, Proceedings of the International Congress of the Mathematicians in Zürich, Birkhäuser Verlag, 1994.
- [Y4] J.-C. Yoccoz, Théoreme de Siegel, polynomes quadratiques et nombres de Bryuno. Asterisque **231**(1995) 3-88.