PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE UNA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA DE LAS INECUACIONES LINEALES EN LIBROS DIDÁCTICOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

AUTOR

ALEXANDER SAUL GOMEZ HUACSO

ASESOR:

DR. FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

Agosto, 2018

RESUMEN

Diversas investigaciones en el campo de la educación matemática reportan las dificultades de los estudiantes al resolver inecuaciones, un ejemplo de dicho error se manifiesta al transponer factores negativos en una desigualdad, pues los estudiantes asumen que para resolver una inecuación se puede usar el mismo procedimiento que se emplea al resolver una ecuación. Por otro lado, al revisar los programas curriculares de educación básica regular de nuestro país, identificamos a nuestro objeto de estudio en dichos programas curriculares. Así pues, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar una praxeología matemática de las inecuaciones lineales, dicha praxeología reconstruida a partir de la revisión de una colección de libros didácticos de nivel secundaria, los cuales son distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú. Para la reconstrucción y el análisis de la praxeología matemática usamos como marco teórico y metodológico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesto por Chevallard (1999), así mismo, se presenta un análisis del grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida en base a los indicadores propuestos por Fonseca (2004). Como resultado de nuestro trabajo de investigación describimos las características del modelo epistemológico dominante presente en la colección de libros didácticos, donde identificamos el predominio de la resolución de inecuaciones mediante las técnicas algebraicas.

Palabras clave: Inecuaciones lineales; praxeología; Teoría Antropológica de lo Didáctico; indicadores de completitud.

ABSTRACT

Various investigations in the field of mathematics education report the students' difficulties in solving inequations, an example of this error is manifested by transposing negative factors in an inequality, since students assume that to solve an inequality the same procedure used to solve an equation can be used. On the other hand, when reviewing the curricular programs of regular basic education of our country, we identify our object of study in said curricular programs. Thus, this research work aims to analyze a mathematical praxeology of linear inequalities, said praxeology reconstructed from the review of a collection of didactic books at secondary level, which are distributed by the Ministry of Education of Peru. For the reconstruction and analysis of mathematical praxeology we use as a theoretical and methodological framework the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) proposed by Chevallard (1999), likewise, an analysis of the degree of completeness of the reconstructed mathematical praxeology is presented to the indicators proposed by Fonseca (2004). As a result of our research work we describe the characteristics of the dominant epistemological model present in the collection of didactic books, where we identify the predominance of the resolution of inequations by means of algebraic techniques.

Keywords: Linear inequalities; praxeology; Anthropological Theory of the Didactic; indicators of completeness

DEDICATORIA

Dedico a mis padres Pascual y Paulina, por su apoyo a lo largo de mi formación como profesional y sobre todo por su amor y comprensión.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis Dr. Francisco Ugarte Guerra, por su apoyo, orientación, exigencia y paciencia a lo largo de la elaboración del presente trabajo de investigación.

De igual manera a la Dra. Avenilde Romo Vásquez y la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por sus observaciones y sugerencias, para la mejora de este trabajo de investigación.

A la directora de la maestría Dra. Jesús Flores Salazar, por la orientación y los conocimientos compartidos durante las clases impartidas durante los años de estudio de la maestría.

A los profesores de la Maestría, a quienes agradezco por la contribución en mi formación durante mis años de estudio en la PUCP.

A mis padres Pascual y Paulina, así como a mi hermano Juan, por sus ánimos y apoyo durante el desarrollo de mi trabajo de investigación.

A mis compañeros y amigos de la Maestría con quienes tuve el gusto de compartir en aula y pasar gratos momentos durante nuestros años de estudio en la PUCP.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

El presente trabajo tiene como fin analizar una praxeología matemática de las inecuaciones lineales en una colección de libros didácticos de educación secundaria, los cuales son distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú a las instituciones educativas, tanto a profesores como alumnos.

El trabajo de investigación está organizado en cinco capítulos; en el primer capítulo presentamos la problemática, donde exponemos las investigaciones de referencia, así como la justificación y los objetivos de nuestra investigación. En dicho capitulo mostramos la relevancia de nuestro objeto de estudio tanto en la matemática, como en la didáctica de la matemática.

En el segundo capítulo, se realiza una descripción de algunos aspectos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y presentamos ejemplos de tareas referentes a las inecuaciones lineales. Además, exponemos los indicadores de completitud de una praxeología matemática pospuestos por Fonseca, así como, el aspecto metodológico considerado en nuestra investigación, el cual se fundamenta en la metodología que ofrece la TAD para el análisis de libros didácticos.

En el tercer capítulo, presentamos un análisis epistemológico de nuestro objeto de estudio, el cual junto a las consideraciones de las investigaciones de referencia nos permite señalar pautas para la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a las inecuaciones lineales.

En el cuarto capítulo, se expone un análisis ecológico y praxeológico de nuestro objeto de estudio, para el cual tomamos en cuenta el plan curricular peruano y la colección de libros didácticos escogidos para su análisis.

En el quinto capítulo, a partir de la praxeología matemática reconstruida en torno a las inecuaciones lineales, determinaremos el nivel de la praxeología matemática reconstruida e identificaremos si satisface cada uno de los indicadores de completitud propuestos por Fonseca (2004), así mismo, señalaremos las características del modelo epistemológico dominante.

Finalmente, señalamos las consideraciones finales de nuestra investigación, donde presentamos las conclusiones y las recomendaciones para futuros trabajos de investigación.

CAPITULO I: PROBLEMATICA

En este capítulo, presentamos las investigaciones de referencia en relación a nuestro objeto matemático de estudio, las inecuaciones. Así mismo, presentamos una investigación que hace referencia a nuestro objeto de estudio y al marco teórico de referencia que emplearemos en nuestra investigación, que en nuestro caso es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Además, presentamos la justificación, así como la pregunta y los objetivos de nuestra investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Comenzaremos con una descripción de los trabajos relacionados a nuestro objeto de estudio, las cuales están organizados del siguiente modo: investigaciones de tipo diagnóstico en relación a las dificultades de los estudiantes al resolver inecuaciones; investigaciones de tipo histórico epistemológico en referencia a las inecuaciones; investigaciones de tipo didáctico o cognitivo, donde se proponen secuencias didácticas que favorezcan la comprensión de nuestro objeto de estudio.

Investigaciones de tipo de diagnóstico en relación a las dificultades de los estudiantes al resolver inecuaciones

Tsamir y Bazzini (2001, 2002, 2004), realizan una investigación colaborativa en Israel e Italia, con el fin de indagar de qué manera los estudiantes resuelven tareas de inecuaciones. Para ello las investigadoras diseñan un cuestionario con 15 tareas, las cuales son clasificadas en dos clases, denominadas como tareas del tipo estándar y del tipo no estándar. Así, las investigadoras consideran como tareas del tipo estándar, a aquellas tareas que son frecuentes en la práctica escolar de los sujetos de investigación, mientras que tareas del tipo no estándar, a aquellas tareas que no son habituales en la práctica escolar. Dicho cuestionario es aplicado a 296 estudiantes de ambos países, cuyas edades están entre los 16 y 17 años. Luego de la aplicación del cuestionario, con el propósito de que los estudiantes expliquen sus respuestas, las investigadoras realizan entrevistas a los estudiantes para su posterior análisis.

Para realizar el análisis de las respuestas de los sujetos investigados, Tsamir y Bazzini (2001, 2002, 2004) adoptan el enfoque de Fischbein. Según Fischbein (1993), para analizar la actividad matemática de un estudiante hay que tener en cuenta como se interrelacionan tres aspectos, el aspecto formal, el aspecto algorítmico y el aspecto intuitivo. El aspecto formal hace referencia a las definiciones, teoremas, axiomas y demostraciones; el aspecto algorítmico a las técnicas y estrategias de resolución; y el aspecto intuitivo al nivel de aceptación del estudiante a un teorema o una solución, sin necesidad de ser demostrada (Fischbein, 1993).

Es así como bajo el enfoque de Fischbein, Tsamir y Bazzini (2001) presentan los resultados de dos de las tareas propuestas. En la tarea 1, del tipo no estándar, se pide explicar si $x=3$ puede ser o no, solución de alguna ecuación y de alguna inecuación, mientras que en la tarea 9, del tipo estándar, se pide identificar el conjunto solución de $5x^4 \leq 0$. A partir del análisis de la información obtenida, las autoras refieren que en ambos países, los sujetos investigados no tienen problema en asociar a $x=3$ como solución de alguna ecuación, pero tienen dificultades en identificar a $x=3$ como solución de alguna inecuación, esto a pesar que en la tarea 9 reconocen a $x=0$ como solución de la inecuación $5x^4 \leq 0$. De ese modo, los autores identifican la dificultad que tiene los estudiantes en aceptar como solución de una inecuación a $x=c$ para $c \in \mathbb{R}$, este hecho es similar a una investigación previa realizada por Tsamir y Almog (1999, citado por Tsamir y Bazzini, 2001) donde se reporta las dificultades al resolver inecuaciones que tengan como soluciones al conjunto vacío y al conjunto de los números reales. En el artículo publicado el 2004, Tsamir y Bazzini (2004) amplían el análisis de las respuestas de los estudiantes a ambas utilizando los aspectos cognitivos de Fischbein.

Según Fischbein (1987, citado por Tsamir y Bazzini, 2004), la intuición interfiere con las decisiones matemáticas de los estudiantes. De ahí que, tras el análisis, los investigadores logran identificar dos creencias intuitivas que tienen los estudiantes en relación a las inecuaciones, la primera creencia es que el conjunto solución de una inecuación se expresa necesariamente como desigualdad, esta creencia se ve reflejada, como ya mencionamos, al no considerar a $x=3$ como solución de alguna inecuación, mientras que la segunda creencia es que para resolver inecuaciones y ecuaciones se sigue un mismo proceso, señalan los autores que dicha creencia se observa en el desarrollo de la tarea 9, pues hubo estudiantes que intentaron resolver la inecuación $5x^4 \leq 0$ de forma algorítmica, tal cual como se resuelven las ecuaciones algebraicas.

Así, Tsamir y Bazzini (2004) señalan a manera de conclusión, que es importante que los profesores estén familiarizados con las creencias intuitivas que tienen los estudiantes y su influencia al resolver inecuaciones, los investigadores sugieren buscar la manera de que los estudiantes rompan con estas creencias que obstaculizan su aprendizaje. Así por ejemplo, sugieren incluir y discutir tareas como la tarea 1, es decir tareas donde se dé la solución y se pida determinar una inecuación para la cual sea su solución (Tsamir y Bazzini, 2004). Además, según las investigadoras es necesario discutir en clase la diferencia entre las relaciones de igualdad y desigualdad, así como discutir la tendencia intuitiva de pensar que resolver una inecuación es lo mismo que resolver una ecuación. Estas tareas, según las investigadoras, brindan la oportunidad de establecer las diferencias y similitudes entre las relaciones de igualdad y desigualdad.

Así mismo, en un artículo publicado el año 2002, Tsamir y Bazzini (2002) realizan el análisis de las respuestas de los estudiantes de las tareas de tipo no estándar, donde es necesario dividir la inecuación por un factor no necesariamente positivo. La primera tarea (tarea 1) pide analizar la siguiente afirmación: para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot x < 5$ entonces $x < 5/a$; la segunda tarea (tarea 2) pide analizar la afirmación: para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, $a \cdot x < 5$ entonces $x < 5/a$; dicho análisis consiste en determinar el valor de verdad de las afirmaciones. Mientras que la tercera tarea (tarea 3) pide resolver la inecuación $(5-a)x > 2a-1$, donde a es un parámetro.

Las autoras señalan que la tarea 1 y 2, tienen como fin que los participantes analicen la afirmación relativa a la equivalencia de inecuaciones paramétricas, de ese modo mencionan que en la tarea 1, un contraejemplo suficiente es mencionar que no cumple para $a = 0$, mientras que en la tarea 2, se observará si los estudiantes consideran la restricción $a \neq 0$ suficiente para resolver la inecuación. Respecto a la tarea 3, las autoras señalan que tiene la misma finalidad que las tareas 1 y 2, solo que es presentada de manera diferente, pues se pide resolver la inecuación.

Al revisar los resultados obtenidos, las autoras manifiestan, que en su mayoría los participantes no tiene dificultad en afirmar que la proposición de la tarea 1 es falsa, y una gran parte de los estudiantes da como contraejemplo el caso $a = 0$, mientras que otros realizan un análisis de los signos de a. Respecto a la tarea 2, con la condición $a \neq 0$, señalan que más de la mitad de los participantes responden que es verdadera, y en la tarea 3 menos del 15% de los participantes da una solución que considera las distintas opciones para $5-a$ (positivo, negativo y cero). Al realizar el análisis considerando los aspectos cognitivos de Fischbein, Tsamir y Bazzini (2002) refieren que si solo se analiza la tarea 1, concluirían que los estudiantes tienen una buena comprensión formal de tales tipos de inecuaciones paramétricas, pero al analizar los resultados y las explicaciones de los participantes respecto a las tareas 2 y 3, se llega a la conclusión de que la comprensión intuitiva de los estudiantes respecto a la resolución de inecuaciones es análoga a la de las ecuaciones, es decir que la manera de resolver ecuaciones les sirve como modelo algorítmico para resolver inecuaciones.

Es así como las investigadoras identifican dos modelos algorítmicos que usan los estudiantes al resolver inecuaciones, el primer modelo consiste en realizar la misma operación, con los mismos números, en ambos lados de la inecuación, mientras que el segundo modelo consiste en hacer la misma operación, con los mismos números, en ambos lados de la inecuación y excluir la posibilidad del cero en el denominador. Tsamir y Bazzini (2002) señalan que por lo general los estudiantes optan por aplicar el segundo modelo algorítmico, es decir, advierten que no se debe dividir por cero, y su resolución la basan en el modelo de resolución que emplean para las ecuaciones. Finalmente, las autoras sugieren que presentar tareas con inecuaciones que contengan parámetros podría ser útil si son discutidas en clase, de modo que el estudiante sea consciente de sus ideas intuitivas y del modelo algorítmico resultante que intuitivamente usan al resolver inecuaciones. Señalan además que debería investigarse más a fondo cómo implementar y que impacto tendría en el aprendizaje del estudiante presentar este tipo de cuestiones.

Consideramos el trabajo de Tsamir y Bazzini (2001, 2002, 2004) relevante para nuestro trabajo de investigación, pues en dicha investigación se sugieren problemas sobre inecuaciones lineales que se deberían discutir en clase. Al efectuar el análisis de la colección de libros didácticos verificaremos si están presentes el tipo de problemas que sugieren las investigadoras.

Investigaciones de tipo histórico epistemológico en referencia a las inecuaciones

Bagni (2005), Halmaghi y Liljedahl (2015) señalan que un estudio histórico epistemológico de un concepto matemático, permite identificar las dificultades con las que se encontraron los matemáticos para conceptualizarlo, además de encontrar situaciones o problemas que originaron y permitieron su desarrollo.

Bagni (2005) menciona que por lo general en la práctica escolar de Italia, la enseñanza de las ecuaciones e inecuaciones sigue un orden secuencial, y que las técnicas de resolución de ecuaciones, cuando son aplicadas en la resolución de inecuaciones, con frecuencia conlleva a cometer errores, tal como reportan Tsamir y Bazzini (2002). De allí que, el autor realiza una investigación histórica acerca del desarrollo de las ecuaciones y las inecuaciones, con el objetivo de analizar el rol que tuvo cada uno de ellos en sus diferentes etapas.

Con tal fin, el autor considera dos enfoques en su investigación, el enfoque basado en los obstáculos epistemológicos y el enfoque socio cultural de Radford. Ahora bien, la noción de obstáculo epistemológico que considera el autor es la de Brousseau (1981), quien considera a un obstáculo como un conocimiento, por otro lado, el enfoque de Radford se fundamenta en una perspectiva sociológica, según Bagni (2005) para realizar un estudio histórico bajo dicho enfoque, se debe tener en cuenta que el conocimiento no se desarrolla de forma individual, más bien está unido a la actividad del individuo dentro de un contexto socio cultural.

El autor señala que la historia del desarrollo de las inecuaciones no es abundante en comparación con la historia de las ecuaciones, menciona además, que las inecuaciones como expresiones algebraicas, están relacionadas con el desarrollo del Cálculo, como por ejemplo al maximizar o minimizar (Hairer y Wanner, 1996, citados por Bagni, 2005). Ampliaremos el trabajo del investigador en el análisis epistemológico del concepto de inecuación en el capítulo tres de nuestro trabajo de investigación.

A partir de su investigación, Bagni (2005) concluye que aunque se le ha reconocido a las inecuaciones un papel independiente en el ámbito educativo, en la práctica las inecuaciones tienen una dependencia con las ecuaciones, a la cual denomina “subordinación operativa”. Como ejemplo de dicha dependencia, el autor menciona que una inecuación tiene como conjunto solución a un subconjunto de los números reales, frecuentemente este subconjunto es infinito; en problemas de maximización o minimización, a veces los valores para obtener el máximo o mínimo se encuentran en los extremos del conjunto solución, de allí que, para obtener dichos extremos se resuelve la ecuación obtenida al reemplazar la desigualdad por la igualdad. Añade el autor que considerar los hechos históricos de forma conveniente, puede ayudar a mostrar los roles y enfatizar las diferencias en el proceder de la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Por otro lado, Halmaghi y Liljedahl (2015) señalan que al revisar investigaciones en educación matemática, la mayoría de los trabajos reportan los errores de los estudiantes al resolver inecuaciones, pero solo algunos trabajos intentan descifrar la naturaleza de dichos errores, de ahí que la pregunta de su investigación, dentro de un estudio histórico epistemológico es ¿Por qué los estudiantes cometen errores al resolver inecuaciones?

Los autores citan a Radford (1997), quien señala que la noción de obstáculo epistemológico de Brousseau ofrece una forma de analizar los errores recurrentes que realizan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de algún concepto, así mismo, los autores toman en cuenta la afirmación de Burn (2005), quien señala que el desarrollo histórico de un concepto puede darnos evidencia de caminos que permitan obtener una mejor comprensión de algún concepto matemático, sobre todo si las investigaciones nos muestran que la comprensión de dicho concepto se obstaculiza por las intuiciones de los estudiantes, tal como reportan Tsamir y Bazzini (2002). Burn (2005) afirma que las pruebas de igualdad mediante desigualdades preceden a la noción de límite, lo cual es un referente para Halmaghi y Liljedahl (2015) en la búsqueda en la historia de las matemáticas, con el propósito de aportar a la enseñanza. Detallaremos la información obtenida por los autores en la parte que corresponde a nuestro análisis epistemológico del concepto inecuación.

Halmaghi y Liljedahl (2015) señalan que en su búsqueda en la historia de las desigualdades, no se revelaron obstáculos epistemológicos, pero si observaron que la desigualdad no es un concepto fácil de manipular. Los autores concluyen que para comprender la razón de la dificultad de los estudiantes al resolver inecuaciones, puede no encontrarse de manera directa la respuesta en la historia del concepto, sin embargo, quizás la respuesta podría descifrarse de una manera inesperada en la historia del concepto. Los autores conjeturan que podría deberse a que los matemáticos dan mayor énfasis en presentar al público resultados de ecuaciones, tal como menciona Tanner (1962, citado por Halmaghi y Liljedahl, 2015). Para finalizar, los autores señalan que las desigualdades forman parte de los fundamentos de muchos conceptos, y es esa la razón que se debería tomar mayor interés en la investigación de los motivos que hacen difícil su tratamiento.

Por otro lado en México, Borello (2010) desde el enfoque socioepistemológico propuesto por Cantoral y Farfán, a partir de la revisión de trabajos de investigación en educación matemática cuyo objeto de estudio son las desigualdades e inecuaciones, concluye que el objeto matemático desigualdad es totalmente dejado de lado en dichas investigaciones, centrándose más en el objeto inecuación y sus técnicas de resolución. Así, la investigadora afirma que el objeto inecuación ha sido apartado de la desigualdad, es decir, no se presenta al objeto inecuación como un concepto que permita modelar situaciones con condiciones de desigualdad, o establecer comparaciones, lo cual implicaría establecer relaciones de desigualdad.

De allí que, la autora plantea como objetivo de su investigación identificar en el discurso matemático escolar, aquellos elementos que consiguen alejar a las inecuaciones de la influencia de las desigualdades, para luego desligarse de dichos elementos con el fin de devolverle el papel protagónico a las desigualdades en la práctica escolar. Con tal fin, la autora realiza un análisis epistemológico y cognitivo de la desigualdad, para ello toma en consideración que la desigualdad es un objeto matemático que permite modelar situaciones matemáticas de acotamiento y de comparación, así luego del análisis identifica que tanto en la matemática aplicada como en la matemática pura, las prácticas de comparación y acotamiento están presentes, mientras que las inecuaciones, como técnica, son un medio que permite manipular las desigualdades, según lo que se quiera establecer o demostrar. A partir de entrevistas con matemáticos puros y aplicados, Borello (2010) menciona que los entrevistados subrayan la importancia de las desigualdades en el desarrollo del pensamiento matemático, pues permiten modelar situaciones, realizar cotas y aproximaciones.

Asimismo, la autora realiza el análisis del currículo de educación básica regular y superior en México, además de los libros didácticos. A partir de dicho análisis la autora concluye que las prácticas escolares presentes han favorecido a la pérdida de sentido del objeto desigualdad, debido a que en el discurso escolar a nivel secundario y superior, el foco de atención pasa a ser la inecuación, y su técnica de resolución. La autora menciona entre las conclusiones de su investigación, que el objeto matemático desigualdad ha estado presente siempre en la actividad matemática, mientras que las inecuaciones, tal como hoy conocemos, solo a partir de la mitad del siglo pasado, sin embargo, en la práctica escolar se ha dado mayor énfasis al objeto inecuación, dejando apartado a la desigualdad y sus prácticas. Borello (2010) señala que para lograr la resignificación de las desigualdades e inecuaciones es necesario devolver la relación que existe entre ellas, mediante la propuesta de actividades que permitan a los estudiantes enfrentarse a situaciones de desigualdad, y como herramienta para manejarlas las inecuaciones.

Investigaciones de tipo didáctico o cognitivo

En cuanto a las investigaciones de tipo didáctico o cognitivo, tenemos los trabajos de Bazzini y Boero (2004), Barbosa (2006), Giusti (2007) y Conceição (2011), el primer trabajo desarrollado en el contexto educativo italiano, mientras los restantes en el contexto educativo brasileño. Bazzini y Boero (2004) proponen el uso de un enfoque basado en las funciones para la resolución de inecuaciones, mientras que Giusti (2007) y Conceição (2011) diseñan actividades desde el enfoque basado en las funciones en la resolución de inecuaciones. Los investigadores al hablar de un enfoque basado en las funciones se refieren al hecho de considerar ambos lados de la desigualdad como funciones reales de variable real.

Los investigadores Bazzini y Boero (2004) mencionan que en la educación básica regular, la enseñanza de las inecuaciones está “subordinada” al de las ecuaciones, asimismo se da mayor énfasis al tratamiento algebraico en su resolución. Entendemos el término “subordinada”, que usan los autores, en el mismo sentido que lo menciona Bagni (2005). Dicha subordinación, según los autores, conlleva a que la resolución de las inecuaciones se realicen de manera algorítmica y sin sentido para los estudiantes, y como consecuencia de ello, los estudiantes tienen dificultades en resolver inecuaciones que no sean iguales al tipo de tareas que se les enseña en clase, tal como mencionamos acerca del trabajo de Tsamir y Bazzini (2001, 2002).

Según Bazzini y Boero (2004) la razón por la que ocurre dicho fenómeno, si es analizado desde la perspectiva didáctico antropológica de Chevallard, podría ser que las ecuaciones e inecuaciones en la educación básica regular son consideradas contenidos exclusivos del álgebra, y están apartados de la Geometría Analítica y las funciones, de allí que ambos objetos matemáticos no son tratados desde un enfoque basado en funciones. Sin embargo, observan los autores, que aún en países en cuyo currículo incluyen la Geometría Analítica y las funciones en el álgebra escolar, como se puede observar en la *National Council of Teachers Of Mathematics* (NCTM, 2000), se presenta un predominio algebraico en la resolución de ecuaciones e inecuaciones en sus planes de estudio.

Debido a ello, los autores señalan que no es suficiente un análisis desde la perspectiva didáctico antropológica, que habría que integrar un análisis epistemológico, pues manifiestan la gran distancia entre el enfoque que se le da al objeto inecuación en la educación básica regular y el enfoque funcional que usan los matemáticos, pues en su práctica resuelven ecuaciones (diferenciales) con métodos de aproximación mediante el concepto de limite o al tratar problemas matemáticos aplicados que incluyan estabilidad asintótica. Es así como los investigadores plantean la hipótesis que asumir un enfoque basado en las funciones, llevado adecuadamente por el profesor, puede revelar y puede aprovechar la capacidad del estudiante más allá del concepto matemático involucrado, en este caso las inecuaciones.

Bajo esa misma propuesta, Giusti (2007) en su trabajo comienza señalando que los errores de los estudiantes al resolver inecuaciones algebraicas se evidencia cuando usan las mismas técnicas que emplean para la resolución de ecuaciones, tales como los llamados producto en cruz, extraer la raíz cuadrada, pasar al otro lado; de ahí que, la autora menciona que los estudiantes aplican reglas para la resolución de inecuaciones de forma autómata, y que carecen de significado para ellos. De ese modo, la autora señala que el objetivo de su investigación es analizar hasta qué punto el uso del enfoque gráfico funcional, para la resolución de inecuaciones, permite obtener mejores resultados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones.

En el mismo sentido, tenemos además el trabajo de Conceição (2011), así ambos investigadores, tanto Giusti (2007) como Conceição (2011), toman como referente teórico la Teoría de Representación Semiótica de Duval, con el fin de diseñar secuencias didácticas que permitan la coordinación de al menos tres registros de representación semiótica (lenguaje natural, gráfico y algebraico) al resolver problemas que involucren a inecuaciones. El trabajo de Giusti (2007) es aplicado a profesores en formación y de formación continua, mientras que el trabajo de Conceição (2011) con estudiantes de educación media, además dichos trabajos de investigación son mediados por el uso de un software, en el caso de Giusti (2007) el software Cabri-Geometre II y Graphmatica, mientras que Conceição (2011) el software Geogebra, dichos softwares les permitieron realizar las conversiones de la representación algebraica a la representación gráfica. Ambas investigadoras adoptan como metodología para su investigación aspectos de la ingeniería didáctica, así que comienzan con un análisis preliminar, para el posterior diseño de sus respectivas actividades.

Giusti (2007), a partir de su análisis preliminar, diseña cinco actividades, las cuales son aplicadas a dos grupos de profesores, el primer grupo conformado por 30 profesores en formación y otro grupo de 10 profesores de formación continua. Para realizar el análisis de los protocolos de los sujetos investigados, la autora al igual que Tsamir y Bazzini (2002, 2004) toma como referente la teoría de Fischbein, dicha teoría le permite analizar los aspectos formales, algorítmicos e intuitivos y cómo se relacionan cuando los sujetos investigados resuelven inecuaciones.

Luego del análisis, la autora concluye que los profesores muestran su comprensión de las inecuaciones basado únicamente en aspectos algorítmicos, sin relacionarlo con los aspectos formales e intuitivos de la resolución algebraica, de ahí que la autora menciona que es necesario reforzar los aspectos formales e intuitivos en el proceso de enseñanza de la resolución de inecuaciones. La elección de la ingeniería didáctica como marco metodológico se debió a que la autora planeaba más adelante aplicar las actividades diseñadas a estudiantes de educación básica regular, pero luego del análisis de los protocolos de los sujetos investigados, reflexionó si los conocimientos previos de un estudiante de educación básica eran suficientes para desarrollar las actividades propuestas sin problema, por lo tanto menciona que debe realizarse una reelaboración y corrección de las actividades diseñadas con el fin de poder aplicarlas a estudiantes de educación básica regular.

Por otro lado, Conceição (2011) señala que el enfoque que presentan los libros analizados acerca del concepto inecuación, ayuda al enfoque gráfico funcional que plantea en su investigación, pues las actividades presentadas en dichos libros permiten a los estudiantes realizar conversiones y tratamientos en distintos registros de representación, además en dichos libros se encuentran problemas de contexto que forman parte de la vida cotidiana de los estudiantes, lo cual favorece a la conversión de los registros de representación, añade al autor. De allí que, diseña 5 actividades, donde la actividad 4 es un problema contextualizado presentado en el registro del lenguaje natural, así el estudiante debe realizar al menos dos conversiones, primero al registro algebraico y luego al registro gráfico, mientras que la última actividad es un problema presentado en el registro gráfico, dicha actividad permite al investigador verificar si el enfoque gráfico funcional permite a los estudiantes lograr una mejor comprensión del objeto inecuación. Entre sus conclusiones, Conceição (2011) señala que los estudiantes tienen dificultades al interpretar las representaciones gráficas de las funciones que no son rectas y parábolas, y también al realizar la conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico.

Por otro lado, tenemos el trabajo de Barbosa (2006), quien señala que los estudiantes al resolver inecuaciones manifiestan errores de comprensión y de uso de los axiomas de cuerpo y de orden de los números reales, como por ejemplo al considerar que sí $ab > 0$ entonces solo se cumple que $a > 0 \wedge b > 0$. Así, la autora señala que el concepto inecuación debe ser comprendido desde dos acciones, la primera de *interpretación de la inecuación*, es decir la inecuación vista como un objeto matemático a interpretar, considerarla como un objeto en el cual se pueden realizar transformaciones mediante las propiedades del cuerpo de los números reales, examinar las equivalencias entre las inecuaciones, distinguir de lo que no sería parte de su conjunto solución, la segunda acción es la de *resolución de la inecuación*, es decir qué transformaciones son posibles realizar en ellas, además de los métodos de resolución que permitan determinar su conjunto solución.

Con tal fin, la autora desde el marco teórico y metodológico de la teoría APOE, realiza una investigación que le permite exponer las construcciones mentales que realizan estudiantes de educación superior cuando son enfrentados a situaciones problemáticas que involucren inecuaciones algebraicas de una variable, dichas construcciones mentales en ambas acciones consideradas, tanto el de interpretación y el de resolución de inecuaciones. Así, la autora realiza un esquema inicial para su investigación, para ello recolecta datos mediante un cuestionario aplicado a 69 estudiantes voluntarios de la carrera de Licenciatura en Ciencias Matemáticas de la Universidad Católica de Brasilia, además realiza una entrevista a uno de los estudiantes que respondieron el cuestionario. A partir de esos datos elabora una primera implementación metodológica de enseñanza del objeto inecuación, la cual es aplicada a 45 estudiantes del primer semestre de Ciencias de la Computación de la Universidad de Brasilia.

Así, luego del análisis de los resultados de la primera implementación de la metodología de enseñanza del objeto inecuación, Barbosa (2006) elabora un esquema intermedio y así repite nuevamente el ciclo mediante una segunda implementación y análisis, para finalmente elaborar un esquema final de inecuaciones. A partir del análisis de los resultados de la segunda implementación metodológica de enseñanza, la autora concluye que en todos los niveles educativos (primaria, secundaria y superior) en la enseñanza y aprendizaje del concepto inecuación es necesario implementar la resolución gráfica, el uso de tablas, establecer relación con las funciones, además del análisis de equivalencias entre inecuaciones, pues dichos aspectos permitirían relacionar distintos esquemas de conceptos matemáticos, de modo que se tenga una mejor compresión de las inecuaciones algebraicas tanto en su interpretación como en su resolución.

Investigación de nuestro objeto de estudio considerando a la TAD como marco teórico de referencia.

En Francia, Assude (2002) realiza un trabajo de investigación desde el punto de vista del currículo, para ello toma como marco teórico de referencia la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Así, la investigadora se plantea como objetivo analizar el currículo y los textos oficiales del sistema educativo en Francia, con el fin de identificar los distintos contextos en los cuales las inecuaciones están presentes en los programas curriculares diseñados a lo largo del siglo XX en Francia, para luego realizar una clasificación de los tipos de tareas y técnicas presentes en los libros de texto usados en cada una de las etapas de los programas curriculares.

A partir del análisis realizado, la autora identifica tres contextos presentes respecto a la evolución de la enseñanza de las inecuaciones. El primer contexto curricular, denominado *ecuacional*, está comprendido entre los años 1902 y 1970; en dicha etapa las inecuaciones forman parte del álgebra clásico, cuyo objeto principal de estudio son las ecuaciones, de ahí que las inecuaciones son tratadas como ecuaciones, salvo el hecho de multiplicar a la inecuación por un numero negativo, la técnica de resolución presente para su resolución es la algebraica (Assude, 2002). El segundo contexto curricular, denominado *estructural y funcional*, está comprendido entre los años 1970 y 1977, se denomina *estructural* pues las inecuaciones son asociadas a la relación de orden de los números reales, y *funcional* ya que depende de la noción de función y se hace uso de su representación gráfica en su resolución. Y por último, el tercer contexto curricular denominado *estructural, empírico y ecuacional*, está comprendido entre los años 1985 y 1997, en esta etapa las inecuaciones están asociadas a la relación de orden de los números reales, además sirven como herramientas para la resolución de problemas de modelización de la vida cotidiana, en el contexto *ecuacional* de esta etapa se reduce a la resolución de un solo tipo de tarea y a una técnica.

Con respecto al tipo de tareas y técnicas presentes en los textos escolares, la investigadora señala "la evolución de los tipos de tareas está relacionada con el contexto y la posibilidad de tener aplicaciones intramatemáticas o extramatemáticas compatibles con el tipo de inecuaciones y las técnicas existentes en el currículo en un momento dado" (p.19). La autora concluye que en la actualidad las inecuaciones sirven de herramientas para la resolución de problemas de la vida cotidiana, esto debido a que en el contexto académico se habla de la importancia de la contextualización en la matemática, mientras que en el contexto educativo, del retorno a lo cotidiano.

1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia señalan la tendencia por parte de los estudiantes a pensar que el proceso para resolver una inecuación es el mismo que se emplea para resolver una ecuación. De allí que, los investigadores sugieren adoptar nuevas perspectivas en cuanto a la enseñanza de las inecuaciones, es así como Boero y Bazzini (2004), Giusti (2007) y Conceição (2011) sugieren que implementar un enfoque gráfico funcional a la resolución de inecuaciones podría mejorar la comprensión del objeto inecuación. En esa línea de investigación, Bernardis, Nitti y Scaglia (2017) señalan que la utilización de distintos marcos (algebraico, funcional y geométrico) en el tratamiento con las desigualdades podría ayudar en su comprensión. Así mismo, Giusti, Nogueira y Campos (2015) sugieren que:

> Antes de discutir técnicas para resolver las inecuaciones con los estudiantes, podríamos usar enfoques algebraicos y gráficos para discutir el significado de las inecuaciones, y considerar aspectos formales y lógicos de la proposición "Si $c > 0$ y $a < b$, entonces $ac < bc$; si $c < 0$ y $a < b$, entonces $ac > bc$ ", cuyo

> entendimiento parece esencial para comprender las técnicas para resolver las inecuaciones (p.124).

Es importante precisar la importancia del concepto inecuación en la matemática, así pues, Tsamir y Bazzini (2004), Barbosa (2006) y Giusti (2007), señalan que está presente en los diferentes tópicos que se desarrollan en la matemática de nivel secundaria y de nivel superior. Halmaghi y Liljedahl (2015) señalan acerca de las inecuaciones que “crecieron omnipresentes en muchas áreas de la matemática, desde el cálculo hasta el álgebra, hasta la estadística, el análisis numérico y la teoría de juegos” (p.54).

Por otra parte, nuestro objeto de estudio se encuentra presente en los programas curriculares de nuestro país, así por ejemplo, en la Resolución Ministerial N° 199-2015, que modifica el Diseño Curricular Nacional del año 2009, observamos que las inecuaciones lineales de una incógnita están presentes en la competencia **actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio**, la cual se relaciona con los contenidos del álgebra. En la tabla 1 podemos observar las capacidades y los indicadores de desempeño en cada una de las cuatro capacidades que se establecen en el área curricular de matemática respecto a las inecuaciones lineales.

Tabla 1. *Capacidades e indicadores de desempeño de la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio*

	Ciclo VI		Ciclo VII		
Capacidad	1°	2°	3°	4°	5°
Matematiza situaciones	• Codifica condiciones de desigualdad considerando expresiones algebraicas al expresar modelos relacionados a inecuaciones lineales con una incógnita. • Asocia modelos referidos a inecuaciones lineales con situaciones afines.		• Identifica relaciones no explicitas que se presentan en condiciones de desigualdad, y expresa modelos relacionados a inecuaciones lineales con una incógnita. • Usa modelos referidos a inecuaciones lineales al plantear y resolver problemas.	• Examina modelos referidos a inecuaciones lineales que expresen situaciones de restricción.	
Comunica y representa ideas matemáticas	• Representa las soluciones de inecuaciones lineales de la forma $x>a$ $x<a$, $ax>b$ o $ax<b$. • Emplea la representación gráfica de una inecuación lineal para obtener su conjunto solución.		• Describe la resolución de una inecuación lineal relacionando miembros, términos, incógnitas, y el conjunto solución. • Emplea la representación gráfica de una inecuación lineal para obtener su conjunto solución.	• Describe las transformaciones que pueden realizarse en una inecuación lineal. • Expresa el conjunto solución de una inecuación lineal de forma gráfica y simbólica vinculando la relación entre ellos.	
Elabora y usa estrategias	• Realiza transformaciones de equivalencias para obtener la solución en problemas de inecuaciones lineales.	• Emplea estrategias heurísticas al resolver problemas de inecuaciones lineales.	• Emplea transformaciones de equivalencias en problemas de inecuaciones $ax\pm b<c$, $ax\pm b>c$, $ax\pm b\geq c$, $ax\pm b\leq c$, $\forall a\neq 0$.	• Emplea transformaciones de equivalencias en problemas de inecuaciones ($ax+b<cx+d$ y con expresiones $>$, $\leq$, $\geq$), $\forall a$, $c\neq 0$.	
Razona y argumenta generando ideas matemáticas	• Justifica si un número es solución de una inecuación dada.	• Justifica la obtención del conjunto solución de una inecuación lineal.	• Justifica los procedimientos de resolución de una inecuación lineal con una incógnita empleando transformaciones de equivalencia.	• Evalúa el conjunto de valores que cumplen una condición de desigualdad en una inecuación lineal.	

Fuente: Adaptado de Perú a (2015, p. 52-65)

Asimismo, al revisar el actual Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), observamos que las inecuaciones lineales de una incógnita están presentes en la competencia **resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**, y señala que:

> Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos (Perú, Ministerio de Educación, 2016a, p. 154).

Es decir, el actual CNEB señala la importancia del aprendizaje de las inecuaciones lineales de una incógnita, además su enseñanza corresponde a los ciclos VI y VII, es decir, de 1° a 5° año de educación secundaria, estudiantes que se encuentran entre los 12 y 17 años.

Por otra parte, con relación a los libros didácticos, Barbosa (2013) afirma que “aunque el libro didáctico no es el único material del cual se valen profesores y alumnos en el ámbito de enseñanza y aprendizaje, puede ser decisivo para la calidad del aprendizaje resultante de las actividades escolares” (Barbosa, 2013, p.34). De allí el interés de investigadores a realizar análisis de libros didácticos desde la TAD, como Assude (2002) en relación a las inecuaciones.

En síntesis, a partir de nuestros antecedentes identificamos la relevancia del objeto inecuación lineal en la matemática, así como el interés para la didáctica de la matemática de reconocer y comprender los fenómenos que interfieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. Asimismo, encontramos la presencia de las inecuaciones lineales en el CNEB, así como en los libros didácticos de matemáticas que distribuye el estado a través del MINEDU, tanto a profesores como estudiantes de educación secundaria. Por todo lo expuesto, consideramos pertinente realizar el análisis de una praxeología de las inecuaciones lineales en una colección de libros didácticos distribuidos por el MINEDU, de modo que nos permita reconocer como se encuentra presente nuestro objeto de estudio en los libros didácticos escogidos, para ello haremos uso de los elementos teóricos y metodológicos que ofrece la TAD.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

La pregunta que nos planteamos para nuestra investigación es:

¿Cómo es la praxeología matemática de las inecuaciones lineales presente en una colección de libros didácticos que brinda el MINEDU a los estudiantes de educación secundaria?

Para poder responder la pregunta de investigación planteada, el objetivo general que nos planteamos es:

- Analizar una praxeología matemática de las inecuaciones lineales presente en una colección de libros didácticos de educación secundaria que brinda el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).

Con la finalidad de alcanzar el objetivo general, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Analizar desde un punto de vista epistemológico el objeto inecuación para señalar criterios para la elaboración de un modelo epistemológico de referencia.
- Reconstruir una praxeología matemática de las inecuaciones lineales presente en una colección de libros didácticos de educación secundaria, determinar el nivel de la praxeología matemática, y señalar las características del modelo epistemológico dominante.
- Utilizar los criterios de completitud de Fonseca para analizar el grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida.

CAPITULO II: ASPECTOS TEÓRICOS DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capitulo presentaremos los elementos teóricos para nuestra investigación, los cuales se fundamentan en algunos aspectos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), así como en los indicadores de completitud propuestos por Fonseca (2004) para el análisis de las praxeologías matemáticas. Así mismo, presentamos la metodología de nuestra investigación, la cual adecuamos a nuestro trabajo de investigación a partir del modelo metodológico de análisis de libros didácticos presentado en Almouloud (2015), el cual se fundamenta en la TAD.

2.1 La Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propuesta por Chevallard (1999), posiciona a la actividad matemática en el ámbito del conjunto de actividades humanas y de las instituciones sociales. Así, el postulado que fundamenta la TAD es que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de praxeología" (p. 221). De allí que la noción de praxeología es una herramienta importante desde la TAD para modelizar la actividad matemática, como una actividad humana más (Lucas, 2010) en relación a una determinada institución, noción que definiremos a continuación.

2.1.1 Noción de institución

Las instituciones son "organizaciones sociales estables, que enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que éstas ponen a disposición de sus sujetos" (Traducción nuestra, Castela y Romo-Vásquez, 2011, p. 85).

Así pues, en nuestra investigación identificamos tres marcos institucionales, las matemáticas (como disciplina) que es la institución productora de saber, en la cual podemos identificar los recursos y las restricciones que se disponían durante el desarrollo de nuestro objeto matemático de estudio en sus diferentes momentos; así mismo, el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) que es la institución encargada de la educación en nuestro país, mediante la elaboración del currículo nacional que es el documento de referencia para la elaboración de los libros didácticos; y las escuelas públicas de educación básica de nuestro país, que son las instituciones donde se usan los materiales como los libros didácticos elaborados.

2.1.2 Noción de praxeología

Chevallard (2006) señala que "una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general" (p.23). Ahora bien, para conocer con exactitud que es una praxeología, el autor señala que podemos guiarnos de su etimología:

> Uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: praxis, i.e. la parte práctica, por un lado, y el logos, por el otro. «Logos» es una palabra griega que, desde los tiempos presocráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano (p. 23).

Al respecto, Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006) señalan que en toda actividad humana se pueden distinguir dos aspectos:

- El nivel de la praxis o del "saber hacer", que engloba un cierto tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos.
- El nivel de logos o del "saber" en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, y que recibe el nombre de tecnología. Dentro del "saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.

Es así como las nociones de tipos de tarea, técnica, tecnología y teoría permiten modelar la actividad humana en general, y de forma particular la actividad matemática en la TAD (Almouloud, 2015).

A continuación detallamos cada una de las componentes que conforman una praxeología u organización matemática.

2.1.3 Elementos de las praxeologías matemáticas

A partir del trabajo de Chevallard (1999), describiremos cada una de las componentes de una praxeología matemática.

Tipos de Tareas (*T*)

Un tipo de tareas, denotada por ***T***, es un conjunto conformado por una o más tareas ***t***, así cuando una tarea ***t*** forma parte de un tipo de tareas ***T***, será denotado por ***t*** $\in$ ***T***. La noción de tipo de tareas, es parcialmente específica, así por ejemplo, *Calcular el valor de una función en un punto* es un tipo de tareas, mientras que el verbo *calcular*, es lo que se denominará como género de tareas.

Chevallard (1999) señala que las tareas, los tipos de tareas y los géneros de tareas son construcciones institucionales propias de cada institución, cuya reconstrucción en una institución es un problema completo, que es el fin mismo de la didáctica.

Así por ejemplo, en la reconstrucción de una praxeología matemática de la colección de libros didácticos en nuestra investigación, identificamos el tipo de tarea *Resolver una inecuación lineal con una incógnita*. Una de las tareas que conforma dicho tipo de tareas es:

- Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a > 0$.

Para citar un ejemplo, tenemos en la página 95, del texto escolar Matemática 1.

Resolvamos cada inecuación:
a. $s - 10 > -20$

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

En el mismo tipo de tarea *Resolver una inecuación lineal con una incógnita*, identificamos otra tarea:

- Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a > 0$, obtenida a partir de un texto.

Un ejemplo de dicha tarea en la página 94, del texto escolar Matemática 1.

Si al triple de la cantidad de canicas que tiene Andrés se le agrega 13, resulta menor que 25. ¿Cuántas canicas tiene Andrés?

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 94)

Técnica (τ)

Dado un tipo de tareas ***T***, se requiere una manera de realizar las tareas que la conforman, a dicha manera de hacer se le da el nombre de técnica. De ese modo la técnica, denotada por τ, conforma con el tipo de tareas ***T***, el bloque práctico-técnico de una praxeología matemática, el cual se denota mediante el símbolo [***T***/τ], dicho bloque por lo general se le denomina “saber hacer”.

Como ejemplo, observamos la técnica que el texto escolar Matemática 1 presenta para hacer la tarea *Resolver una inecuación lineal de la forma* $ax+b<c, ax+b>c, ax+b\leq c$, o $ax+b\geq c$; con $a>0$. Al observar el procedimiento en el texto escolar, podemos caracterizar los pasos que se sigue para el desarrollo de la tarea propuesta.

a. $s-10>-20$

$$s+(-10)>-20$$
$$s+(-10+10)>-20+10$$
$$s+0>-10$$
$$s>-10$$

Fuente: Adaptado de Perú b (Perú, 2015, p.95)

Ahora bien, una técnica permite realizar las tareas de una parte del tipo de tareas ***T***, dicha parte se le denomina alcance de la técnica. De allí que, se puede decir que una técnica es superior a otra, si esta tiene mayor alcance, es decir que permite realizar tareas en mayor medida que otra técnica. Eso se puede notar en la tarea presente en el texto escolar Matemática 5, en la sección *cómo hacer* de la página 17.

Representa el conjunto de números reales x que satisfaga la desigualdad $2x+1<3.$

Fuente: Adaptado de Perú i (2016, p. 17)

Para resolver dicha tarea, la técnica mostrada no es suficiente para su resolución, de allí que en la Figura 1 podemos identificar una ampliación de la técnica, de modo que permita realizar la representación del conjunto de números reales que cumplan con la desigualdad.

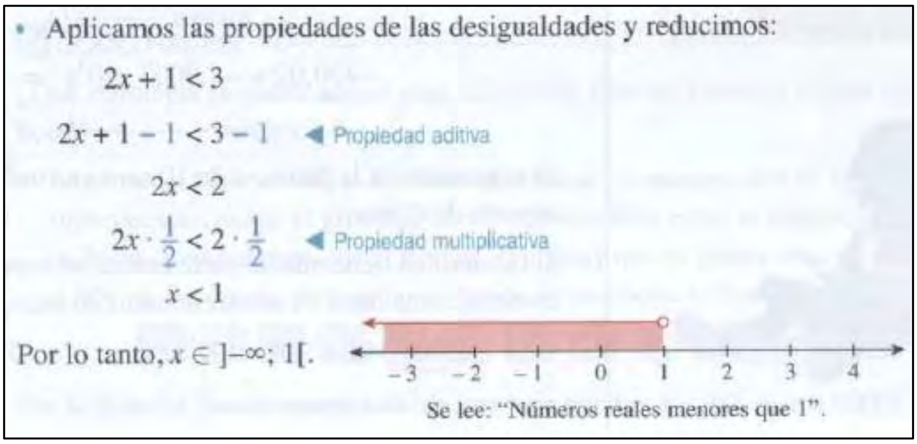


Figura 1. Tarea en cómo hacer

Fuente: Perú h (2016, p.17)

Si bien es cierto, identificamos un procedimiento estructurado en los ejemplos presentados, pero Chevallard (1999) menciona que una técnica no es necesariamente un procedimiento algorítmico o casi algorítmico, como ejemplo, presentamos a continuación una tarea del cuaderno de trabajo que corresponde al 1° de secundaria, en dicha tarea la técnica para su resolución no es posible caracterizarla mediante un procedimiento algorítmico.

¿Las palabras "máxima" y "distancia" te orientaron a plantear una ecuación o una inecuación?

Fuente: Adaptado de Perú c (2016, p. 163)

Además, señala Chevallard (1999) que en una institución por lo general existe una técnica o un conjunto de técnicas, las cuales son reconocidas en la institución, dejando fuera a otras técnicas que pueden ser reconocidas en otras instituciones. Así por ejemplo, una técnica no reconocida en el plan curricular peruano es la técnica de resolución de inecuaciones mediante la representación gráfica de funciones que se menciona en el trabajo de Giusti (2007) y a la cual Assude (2002) denomina técnica funcional-gráfica.

Tecnología (θ)

Chevallard (1999) menciona que la tecnología es el discurso racional de la técnica, cuyo primer objetivo es el de justificar la técnica, es decir asegurarse de que dicha técnica permite realizar las tareas que conforman el tipo de tareas ***T***. Así, en una institución, dado un tipo de tareas ***T***, la técnica τ relativa a ***T*** viene acompañada de al menos un vestigio de tecnología, que incluso en numerosos casos se encuentran algunos elementos tecnológicos incorporados en la técnica. El segundo objetivo de la tecnología, menciona el autor, es la de explicar y aclarar la técnica, es decir exponer la razón por la cual es correcta la técnica.

En el ejemplo que mostramos a continuación, podemos observar a la derecha del procedimiento realizado, la descripción y explicación de la técnica, lo cual identificamos como la tecnología presente en el texto escolar. Dicha tarea se encuentra en el ejemplo 2b de la página 95 del texto escolar Matemática 1.

b. $2g+5,8>-9$

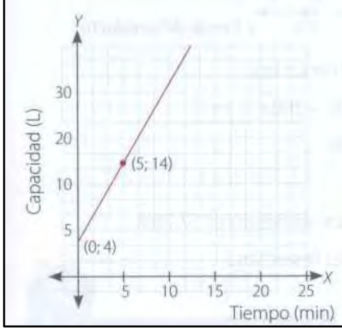
$2g+5,8+(-5,8)>-9+5,8$ Sumamos a ambos lados el opuesto de 5,8.

$2g>-14,8$ Efectuamos operaciones.

$g>-7,4$ Multiplicamos ambos lados por el reciproco de 2.

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

Finalmente, el tercer objetivo de la tecnología es la de producir nuevas técnicas, por ejemplo, en el texto escolar Matemática 2, identificamos la tecnología de la técnica que permite representar una función lineal afín en el plano cartesiano (ver Figura 2), a partir de dicha tecnología se puede caracterizar la técnica funcional-gráfica mencionada por Assude (2002).



El rango son los valores que toma el volumen de agua en el recipiente que corresponde a los números racionales desde 4 hasta 50.

e. La gráfica es un segmento de recta. Para trazarlo necesitamos dos de sus puntos. Escogemos dos valores en el dominio de la función, por ejemplo 0 y 5, y evaluamos la función en ellos:

$V(0) = 2(0) + 4 = 4$; $V(5) = 2(5) + 4 = 14$.

Ubicamos los puntos de coordenadas (0; 4) y (5; 14) en el plano cartesiano y trazamos el segmento (ver figura del margen). La recta que contiene al segmento anterior representa una función afín de la forma $f(x) = 2x + 4$.

Figura 2. Tecnología de la técnica para graficar una función lineal afín

Fuente: Perú b (2016, p.139)

En síntesis, la tecnología permitirá justificar, describir y explicar la técnica, además de permitir que se produzcan nuevas técnicas. Usaremos la notación θ, para indicar la tecnología.

Teoría (Θ)

El discurso tecnológico incluye afirmaciones de las cuales se pueden pedir su justificación, de ahí que es necesario pasar a un segundo nivel de justificación, explicación y producción, dicho nivel es el de la teoría, Θ, el cual en relación a la tecnología, adopta el mismo rol que tiene la tecnología respecto a la técnica. De ese modo junto a la tecnología, se forma un bloque tecnológico-teórico [**θ**/Θ].

Respecto a la teoría en relación a las inecuaciones, la identificamos en el cuerpo conmutativo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y el anillo conmutativo de polinomios $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$.

2.1.4 Niveles de praxeologías u organizaciones matemáticas

Chevallard (1999) de acuerdo el grado de complejidad de las componentes de una praxeología matemática realizó una clasificación, la cual describiremos a partir de los trabajos de Chevallard (1999) y Bosch et al. (2006). Además consideramos los aportes de Fonseca (2004).

- **Praxeología Matemática Puntual (PMP):** Alrededor de un tipo de tareas, ***T***, en principio encontramos una tripleta, la cual está conformada por al menos una técnica τ, por una tecnología θ de τ, y por una teoría Θ de θ. El bloque indicado por [***T***/ τ / θ / Θ] conforma una praxeología puntual, lo cual significa que dicha praxeología corresponde a un único tipo de tareas ***T***.
  Fonseca (2004) señala que en la educación secundaria se pueden encontrar diferentes PMP, tanto como tipos de tareas. Así por ejemplo: descomponer en factores un polinomio con raíces enteras, resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, etc. Así en lo referente a nuestra investigación, una PMP es *resolver una inecuación lineal con una incógnita*.
- **Praxeología Matemática Local (PML):** Las praxeologías puntuales se agrupan en primer lugar en praxeologías locales, [$\boldsymbol{T}_i$ / τ_i / θ / Θ], cada praxeología local se centra en una tecnología θ determinada. Dicha tecnología permite justificar, explicar y relacionar entre si las técnicas de todas las PMP que conforman la PML, además de producir nuevas técnicas.
  El fin de integrar las PMP, para conformar una PML, es por lo general para dar respuesta a un conjunto de cuestiones problemáticas que en ninguna de las PMP de partida se pueden resolver completamente (Fonseca, 2004). Así por

ejemplo, determinar el conjunto solución de la inecuación $3x + 2y < 5$ es una cuestión problemática que en la PMP *resolver una inecuación lineal con una incógnita* no se puede resolver.

- **Praxeología Matemática Regional (PMR):** La coordinación, articulación y posterior integración de praxeologías locales, alrededor de una teoría común Θ, conforman una praxeología regional, [$\boldsymbol{T}_{ij}$ / τ_{ij} / θ_j / Θ].

  Según Fonseca (2004), para realizar la reconstrucción institucional de una teoría matemática, se debe elaborar un lenguaje común, de modo que permita describir, relacionar, justificar y producir las distintas tecnologías de las PML que conforman la PMR. Los ejemplos de PMR que menciona Fonseca (2004) son: la teoría de Galois, el álgebra lineal, entre otros.
- **Praxeología Matemática Global (PMG):** Se manifiesta cuando se agregan diversas praxeologías regionales, a partir de la integración de distintas teorías.

2.1.5 Completitud de las praxeologías matemáticas locales

Fonseca (2004) propone siete indicadores que permiten analizar el grado de completitud de una PML. Así, a partir del trabajo del autor, expondremos cada uno de los indicadores del grado de completitud de una PML, tomando en cuenta las componentes de la praxeología, sus características y la relación que existe entre ellas.

PML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico

En una PML se agrupan varios tipos de tareas, así como técnicas, las cuales se centran en una tecnología común. De ese modo, el grado de completitud de una PML depende del grado de integración de los tipos de tarea. De allí que, diremos que una PML es menos completa si las cuestiones son tipos de tareas aisladas, es decir, que se pueden realizar por medio de técnicas que no se encuentran relacionadas entre sí por algún elemento tecnológico. Por otro lado, en una PML deben estar presentes tipos de tarea que estén asociados al "cuestionamiento tecnológico" de las técnicas, es decir, tareas relativas a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance de las técnicas, así como de su comparación.

PML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas

Según este criterio, una PML será más completa, si dado un tipo de tareas, T_i, se encuentran dos a más técnicas (pueden ser variaciones de una misma técnica) que permitan realizar algunas de las tareas del tipo de tareas T_i. Además la PML debería tener la existencia de elementos tecnológicos, que permitan juzgar la técnica más fiable y económica para resolver una tarea concreta.

PML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas

Bosch (2000), acerca de los objetos ostensivos señala que:

> Son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Para utilizar una expresión general, hablaremos de la "manipulación" de los objetos ostensivos aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos (p. 19).

Así, una PML será más completa si las técnicas que la conforman acepten diferentes representaciones ostensivas, dichas representaciones dependerán de la actividad matemática en la cual se encuentre inmersa, así como de la tarea en concreto del tipo de tarea. Además deberían existir criterios que permitan valorar la representación ostensiva más conveniente para la actividad en particular que se desarrolle.

PML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

El criterio señala que en una PML deberían existir para algunas técnicas y tareas, sus respectivas técnicas y tareas inversas.

PML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas

Una PML será más completa, si para cada técnica existe el tipo de tareas que permita la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar la técnica al realizar la tarea o el tipo de tareas de una PML. Con tal fin, en la PML deberían existir los elementos tecnológicos necesarios que permitan dicha tarea de interpretación.

PML6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

Según este criterio, en una PML deberían existir tipos de tareas en las cuales los datos y las incógnitas no estén previamente establecidos de forma completa. En un primer nivel, la tareas abiertas están conformados por datos que en primera instancia son tratados como desconocidos, es decir como parámetros, mientras que las incógnitas no son dadas de manera concreta en el enunciado de la tarea. Las tareas matemáticas abiertas en un segundo nivel deberían hacer que el estudiante decida los datos e incógnitas adecuadas para realizarlas, en este nivel están presentes la tarea de modelización matemática.

PML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica

Según este criterio, el grado de completitud de la PML dependerá del grado de integración interna de los elementos tecnológicos que conforman la tecnología que caracteriza a la PML, además de la incidencia efectiva de la tecnología en la práctica matemática sobre el bloque práctico – técnico. El indicador importante del grado de completitud de la PML es si la tecnología cumple su tercer objetivo, es decir la de producir nuevas técnicas, las cuales permitirían la ampliación de tipos de tareas.

2.2 Metodología de la investigación

Martínez (2006) menciona que “la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones” (p. 128). De allí que nuestro trabajo se enmarca en una investigación cualitativa, puesto que el interés de nuestra investigación es analizar una praxeología u organización matemática de las inecuaciones lineales en el ámbito de una institución. Para cumplir con el objetivo planteado en nuestra investigación, distinguimos tres instituciones donde habita nuestro objeto de estudio, las matemáticas (como disciplina), el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) y las escuelas públicas de educación básica.

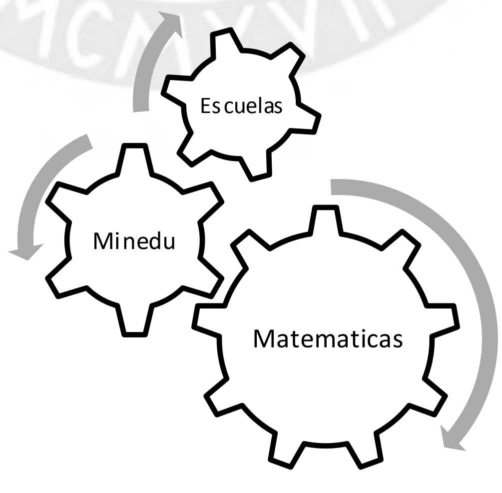


Figura 3. Relación entre tres instituciones sociales

Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, para nuestra investigación nos centramos en analizar la relación de dos de las instituciones mencionadas en el párrafo anterior. En la institución productora del saber, las matemáticas (como disciplina), mediante un análisis histórico-epistemológico de nuestro objeto matemático de estudio, de modo que nos permita señalar su razón de ser y así señalar criterios para la elaboración de un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a las inecuaciones lineales, considerando además las investigaciones de referencia.

Además, en la institución MINEDU, mediante el análisis de los libros didácticos de matemática, que son los recursos elaborados a partir de los lineamientos establecidos por el MINEDU mediante los planes curriculares. Así pues, para realizar dicho análisis seguiremos los aspectos del modelo metodológico de análisis de libros didácticos presentado en Almouloud (2015), dicho modelo metodológico considera realizar el análisis ecológico y el análisis praxeológico del objeto de saber para el análisis de libros didácticos.

En el análisis ecológico se intenta responder las siguientes preguntas:

> ¿El objeto de saber forma parte de las recomendaciones curriculares para la Educación Básica? ¿Está presente en los libros de texto? ¿Cómo se presenta y con qué finalidad? ¿Este objeto de saber es efectivamente trabajado en la escuela? Si es así, ¿en qué condiciones? Si no, ¿cuáles son los motivos para ser dejado de lado?
> Las respuestas a estas cuestiones permiten identificar la razón de ser de ese objeto de saber en la institución escolar (Traducción nuestra, Almouloud, 2015, p.15).

Teniendo en cuenta los elementos de la TAD, Almoloud (2015) señala que el análisis praxeológico se organiza del siguiente modo:

- **Identificación de tipo de tareas:** Para ello se analizan las actividades propuestas en los libros didácticos, ejemplos resueltos y problemas presentados en forma de desafíos. En esta etapa se realiza el agrupamiento de las tareas en tipos de tareas, al respecto Artaud (2005, citado en Chaachoua y Comiti, 2010) señala que:

  > La función principal de la noción de tipo de tareas en el análisis es permitir la agrupación de tareas que se consideran suficientemente cercanas, el tamaño de los grupos depende tanto de la realidad modelada, la institución en la que se colocan y el trabajo llevado a cabo (Traducción nuestra, p. 5).

- **Identificación de las técnicas:** Luego de la identificación de las tareas, se procede a la caracterización de las técnicas que permiten hacer las tareas, para ello se toma en consideración los ejemplos resueltos y/o el análisis matemático de las situaciones propuestas.
- **Identificación de las tecnologías:** La tecnología se construye a partir del análisis de los comentarios de los autores de los libros didácticos, eventualmente del análisis del libro del profesor o del análisis matemático de las situaciones propuestas para el afianzamiento del aprendizaje.

Almouloud (2015) señala además que uno de los aspectos importantes que ofrece la TAD es la posibilidad de evaluar los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático. Exponemos a continuación los criterios que propone Chevallard (1999) para evaluar los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías de una praxeología matemática.

- **Evaluar los tipos de tareas:** Para ello Chevallard (1999) propone los siguientes criterios:

  Criterio de identificación: Se verifica si los tipos de tareas son dados de forma clara y están bien identificadas.

  Criterio de las razones de ser: Verificar si las razones de ser de los tipos de tareas son explicitadas o son dados sin motivos válidos.

  Criterio de pertinencia: Verificar si los tipos de tareas considerados son una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas y si son pertinentes teniendo en cuenta las necesidades matemáticas de los estudiantes.
- **Evaluar las técnicas:** Chevallard (1999) señala que se siguen los mismos criterios para evaluar los tipos de tarea. Así mismo, se responden las preguntas “¿se elaboran efectivamente, o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de utilizar? ¿Su alcance es satisfactorio? ¿Su fiabilidad es aceptable dadas unas condiciones de empleo? ¿Son suficientemente inteligibles? ¿Tienen futuro y pueden evolucionar de manera conveniente?” (p. 28).
- **Evaluar tecnologías:** De acuerdo con Chevallard (1999) se pueden hacer observaciones análogas acerca del bloque tecnológico-teórico. Además, se responden las preguntas:

> ¿Se plantea únicamente el problema de su justificación? ¿O bien se considera tácitamente este enunciado como evidente, natural, o incluso bien conocido ("folclórico")? Las formas de justificación utilizadas, ¿son parecidas a las formas canónicas en matemáticas? ¿Se adaptan a sus condiciones de utilización? ¿Se favorecen las justificaciones explicativas? ¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles? (p. 30).

Finalmente, determinaremos el grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida de los libros didácticos analizados, para ello tomaremos en consideración los indicadores de completitud de Fonseca (2004) así como las características del modelo epistemológico dominante (MED) en torno a nuestro objeto de estudio.

CAPITULO III: ESTUDIO DE LAS INECUACIONES

En este capítulo, en el ámbito de la institución productora del saber, las matemáticas (como disciplina), presentamos un análisis histórico-epistemológico del objeto inecuación, el cual desarrollamos en base a las investigaciones de Fink (2000), Bagni (2005), Halmaghi (2011, 2015) y Bernardis, Nitti y Scaglia (2017). El objetivo del capítulo es identificar la razón de ser de nuestro objeto de estudio en las diferentes etapas de su desarrollo, de modo que nos permita señalar criterios para la elaboración de un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a las inecuaciones lineales, considerando además las investigaciones de referencia.

3.1 Aspectos históricos-epistemológicos

Las investigaciones de Fink (2000), Bagni (2005), Halmaghi (2011, 2015) y Bernardis, Nitti y Scaglia (2017) muestran que nuestro objeto de estudio se encuentra presente en el desarrollo de tres campos de las matemáticas (geometría, álgebra y cálculo). Exponemos a continuación los problemas que dieron origen o contribuyeron al desarrollo de nuestro objeto de estudio en cada uno de los marcos (geometría, algebra y cálculo), así mismo, en la parte final de la sección exponemos la razón de ser de nuestro objeto de estudio en cada uno de los momentos matemáticos estudiados.

En el marco de la geometría

La relación de desigualdad, en un inicio fue una herramienta para la resolución de problemas que involucraban comparar magnitudes, medir longitudes, perímetros y áreas de regiones planas. Si bien, aún no se contaban con los símbolos o notaciones que actualmente usamos para comparar expresiones, el lenguaje natural fue el medio por el cual se representaba las relaciones de desigualdad. Por ejemplo, en *Elementos* de Euclides (325 a.C–265 a.C), en el libro I, se presenta la definición “ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto” (Euclides, 1994), identificamos la palabra “mayor que”, que indica una relación de desigualdad entre un ángulo obtuso y un ángulo agudo.

Una desigualdad conocida por los matemáticos de la antigüedad, se encuentra registrada en el trabajo de Euclides, en la proposición XX del libro I, la cual conocemos como la desigualdad del triángulo, dicha proposición afirma que en todo triángulo la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo, es mayor que el tercer lado. Otro ejemplo de cómo se hacía uso de las desigualdades para comparar magnitudes lo encontramos en la proposición XXI del libro I de los *Elementos*, en la cual se postula:

> Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor (Euclides, 1994).

En la Figura 4 podemos observar la construcción de los segmentos dentro del triángulo, a partir de los vértices B y C, los cuales se intersectan en el punto D. Si usamos notaciones actuales, lo que se plantea en la proposición son las desigualdades $BD + DC < AB + BC$ y $\measuredangle(BDC) > \measuredangle(BAC)$.

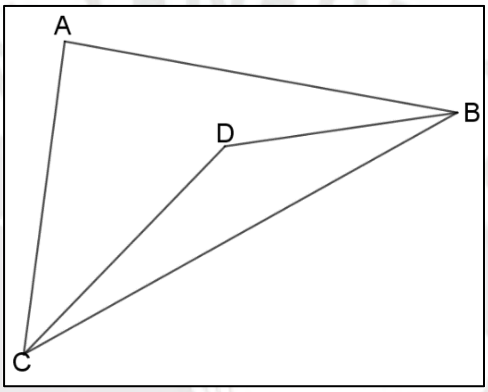


Figura 4. Construcción geométrica de la proposición XXI, libro I

Fuente: Elaboración propia

Definitivamente, podemos encontrar varios ejemplos de relaciones de desigualdad de magnitudes y longitudes en el trabajo de Euclides. Así mismo, se puede identificar en la proposición XIV del libro II, una prueba geométrica de la relación de desigualdad entre la media aritmética y geométrica para dos números Fink (2000). El objetivo de dicha proposición no es mostrar la relación de desigualdad que existe ente la media aritmética y geométrica, la proposición trata de un problema de área, pues pide "construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada" (Euclides, 1994). De allí que, al realizar la construcción geométrica, tal como se puede observar en la Figura 5, Euclides demuestra que el cuadrado de la longitud del segmento $\overline{HE}$, es igual al producto de las longitudes de los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{EF}$.

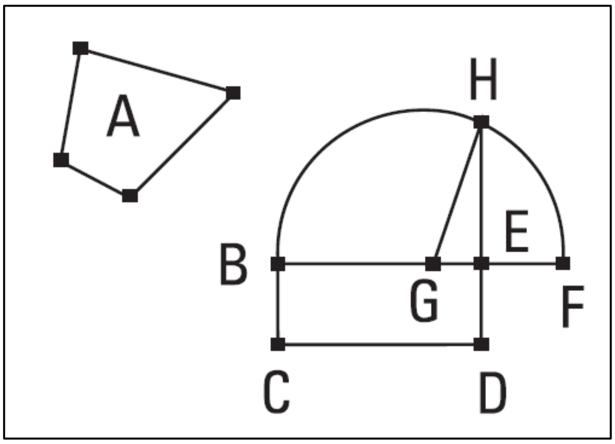


Figura 5. Construcción geométrica de la proposición XIV, libro II

Fuente: Bicudo (2009, p. 149)

Si hacemos uso de las notaciones actuales, y consideremos que las longitudes de los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{EF}$ son a y b unidades respectivamente, la longitud del segmento $\overline{HE}$ sería $\sqrt{ab}$ unidades, mientras que la longitud del radio $\overline{HG}$ de la semicircunferencia sería $(a+b)/2$. Así, a partir del gráfico que se muestra en la Figura 2, se puede observar que se verifica la relación de desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, la cual representamos en notación actual como $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$.

Por otro lado, Burn (2005) señala que los matemáticos griegos eran conocedores de un método de demostración de igualdades mediante el uso de desigualdades. El autor añade que la propiedad de desigualdad que usaron los matemáticos griegos para ayudarse a demostrar una igualdad, consiste en que si un número A esta entre dos cantidades pequeñas, es decir, si para todo número positivo ε, se cumple que $-\varepsilon < A < \varepsilon$, entonces el número A es igual a cero. El autor usa el término *vice*, cuya traducción es tornillo de banco, para denominar a dicha propiedad. Es así como, la desigualdad $-\varepsilon < A < \varepsilon$ funciona como el tornillo de banco del carpintero, de modo que comprime el valor de A tanto como para dejar espacio para un solo número entre $\pm\varepsilon$ y ese número es cero. De ese modo, si se buscan cantidades A , tales que para todo número positivo ε se cumpla que $-\varepsilon < A - C < \varepsilon$, a partir de la propiedad *vice* se demuestra que el único valor posible para A es C, es así como se llega a demostrar que $A = C$.

Ahora bien, tomando en cuenta la propiedad *vice* y la notación actual, explicaremos el razonamiento que seguían los matemáticos griegos para determinar un área o volumen, cuya magnitud denotaremos por A. Los matemáticos griegos analizaban las áreas o volúmenes $A-C$ y $C-A$, donde la magnitud C es un área o volumen conocido al cual se cree que el área o volumen a determinar es igual, y demostraban que ninguna de las diferencias puede ser distinta de cero, es decir que son imposibles que $A-C>0$ y $C-A>0$, para ello, si se acota dichas imposibilidades y se expresa mediante la desigualdad $-\varepsilon<A-C<\varepsilon$, a partir de la propiedad *vice* se tiene que $A=C$ (Burn, 2005).

Halmaghi (2011) menciona que los matemáticos griegos aun no tenían en cuenta la existencia de los números negativos, pero a pesar de ello, al parecer usaron la propiedad *vice*, pues se puede identificar en la proposición I del libro X de los *Elementos* de Euclides:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada (Gonzales, 2008).

A continuación describiremos en términos actuales, lo que afirma la proposición, para lo cual tomamos como referencia el trabajo de Burn (2005). Para ello, tomamos dos cantidades desiguales $\varepsilon=0,05$ y $B=1$, según la proposición, quitaremos a la cantidad B una cantidad mayor que su mitad, en nuestro caso la cantidad a quitar será 0,7; de modo que nos queda la cantidad $B_1=0,3$; al comparar, la cantidad B_1 es mayor que la cantidad ε. Continuamos con el mismo procedimiento, ahora a la cantidad $B_1=0,3$ le quitaremos 0,2; de ahí nos quedara la cantidad $B_2=0,1$; dicho valor es aún mayor que ε, así que seguiremos con el mismo procedimiento. Esta vez a la cantidad B_2 le quitaremos $0,07$; con lo cual nos quedará la cantidad $B_3=0,03$; nuevamente comparamos con $\varepsilon=0,05$ y esta vez tal como afirma la proposición, la cantidad B_3 es menor que la cantidad ε, la cual fue dada al inicio.

En general, si tomamos dos cantidades ε y B de modo que $\varepsilon<B$, y consideramos quitar en cada proceso exactamente la mitad de la cantidad mayor, lo que la proposición establece, es que, si a B le restamos $B/2$, luego al resultado de la diferencia que es $B/2$ le restamos su mitad $B/4$, y así sucesivamente, entonces

encontraremos un número natural n, para el cual obtenemos la desigualdad $B/2^n < \varepsilon$ a partir de dicha desigualdad se tiene la desigualdad equivalente $B < 2^n \varepsilon$. De la desigualdad equivalente, se tiene que la proposición I de Euclides implica el postulado 5 de Arquímedes (287 a.C–212 a.C), pues el postulado 5 afirma que dadas dos cantidades ε y B comparables, entonces un número suficiente de múltiplos de ε excedería a B, es decir, para algún número n se tiene que $n \cdot \varepsilon > B$. Según Burn (2005) los matemáticos griegos como Arquímedes conocían la utilidad de esa desigualdad para determinar áreas y volúmenes mediante el método exhaustivo.

Por otro lado, Halmaghi (2011) menciona que Arquímedes mediante el método exhaustivo, logra calcular un valor aproximado para π, para ello se procede a inscribir y circunscribir polígonos en una circunferencia, cuya cantidad de lados sea cada vez mayor. De ese modo, determinó la razón que hay entre el perímetro del polígono y el diámetro de la circunferencia, dicho valor que se obtiene es un número que se aproxima al valor real de π, esto a medida que aumenta el número de lados del polígono. Así, cuando se considera un polígono de 96 lados, Arquímedes pudo obtener que el valor de π se encuentra entre dos fracciones $223/71$ y $22/7$ (Boyer, 1968).

En el marco del álgebra

Ahora bien, la matemática desarrollada por los griegos no muestra la presencia de desigualdades en las cuales se pidan determinar valores desconocidos o incógnitas, dicho contexto de uso de las desigualdades está más ligada al álgebra, mediante el uso de la notación algebraica que hoy en día usamos. Nesselmann (1842, citado por Halmagui, 2011) identifica tres etapas en el desarrollo del álgebra, el álgebra retórica, el álgebra sincopada y el álgebra simbólica. Una descripción dada en Halmagui (2011) señala que el álgebra retórica es el álgebra de las palabras, el álgebra sincopada usa una mezcla de palabras y símbolos de modo que se puedan expresar generalidades.

Boyer (1968) ubica el trabajo de Diofanto (100 a. C - 350 d. C) en la etapa del álgebra sincopada. El trabajo de Diofanto contribuyó con el desarrollo de la aritmética, con la publicación de 13 tomos sobre la aritmética, de los cuales solo se han conservado seis de ellos. Ortiz (2005) señala que Diofanto se aleja del planteamiento geométrico, con el cual trabajaban sus antecesores, como Euclides y Arquímedes, para ello, para representar las incógnitas, hizo uso de abreviaturas, pero aún no se realizaban ningún tipo de tratamiento o trasformación algebraica con las abreviaturas usadas. En el trabajo de Rey Pastor y Babini (1997), se puede encontrar uno de los problemas planteados por Diofanto, denominado el problema de los vinos, cuyo enunciado dice:

> **Problemas de los vinos:** Determinar las cantidades de dos clases de vino, cuyos precios son proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades.

Para la resolución de dicho problema, representemos las cantidades a determinar mediante las letras x e y, mientras que el costo mediante la letra z. Por lo tanto, en términos actuales, tenemos las siguientes expresiones a partir del enunciado:

$$8x+5y=z^2 \ ; \ z^2+60=(x+y)^2$$

Así, el problema consiste en determinar las raíces positivas de una ecuación cuadrática, puesto que en los tiempos de Diofanto, solo se consideraba una solución positiva de las ecuaciones de segundo grado. Siendo así, Rey Pastor y Babini (1997) señalan que para resolver el problema, Diofanto hace uso de una incógnita auxiliar $u=x+y$, al reemplazarla en las expresiones iniciales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones $5u+3x=u^2-60=8u-3y$, de allí se tienen las siguientes desigualdades $5u<u^2-60<8u$. Al determinar las soluciones de las ecuaciones obtenidas al transformar las desigualdades en ecuaciones de segundo grado, Diofanto encuentra que u está entre 11 y 12. Como u^2-60 es un cuadrado perfecto, con el fin de reducir a una ecuación lineal, Diofanto introduce una nueva incógnita v tal que $u^2-60=(u-v)^2$ y usando el hecho de que u está entre 11 y 12, obtiene las desigualdades $22v<60-v^2<24v$. De las ecuaciones correspondientes se tiene que $19<v<21$, y se toma el valor $v=20$, de ahí, $u=23/2$ y así $x=59/12$; $y=79/12$ y $z=17/2$.

Es Viète (1540 - 1603) quien introduce la distinción entre variable y constante, tal como señala Halmagui (2011). Es así como antes de identificar el tratamiento algebraico en expresiones que representan desigualdades, se identifica en el trabajo de Viète la resolución de ecuaciones paramétricas. Así por ejemplo en la Figura 6, en el enunciado del teorema, haciendo uso de los términos actuales, se afirma que si $A^2=Z$

, y $A-B=E$, entonces se tiene que $E^2+2BE=Z-B^2$. Es así que a partir de los aportes de Viète, el álgebra estructural fue tomando su lugar en la historia de la matemática (Halmagui, 2011), dando a lugar al inicio de la etapa del álgebra simbólica.


ÆQVATIONVM. 19

THEOREMA. II.

Si A quadratum equetur Z plano. A — B esto E.

E quadratum + B in E bis } æquabitur. { Z plano — B quadrato.

Quoniam enim A quadratum æquatur Z plano, est autē A — B Radici E æqualis, A — B æquetur E, ergo E + B æquabitur A: itaque quadratum ab E + B æquabitur Z plano: quadratum autem istud constat singularibus planis.

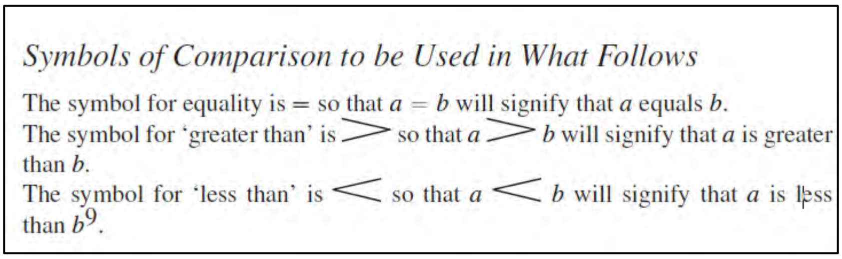
E quadrato.
+ B in E bis.
+ B quadrato.

quare omnib⁹ bene ordinatis + E quadratum + B in E bis } æquabitur { Z plano — B quadr. vt est enunciatum.

Figura 6. Ecuación paramétrica dada por Viete

Fuente: Viète (1615, p. 19)

Bagni (2005) señala que no es hasta el siglo XVI que se introduce el símbolo "=" para expresar la igualdad. Dicho símbolo fue introducido por Robert Recorde (1510-1558) en su trabajo titulado *Whetstone of Witte*, publicado el año 1557. Luego en el año 1631, en la publicación titulada *Clavis Mathematicae*, William Oughtred (1574-1660) introduce los símbolos , para representar "mayor que" y "menor que", respectivamente (Halmaghi, 2011). Mientras que los símbolos "$>$" y "$<$" fueron introducidos por el matemático Thomas Harriot (1560–1621), en su publicación póstuma *Artis Analyticae Praxis ad Aeguationes resolvendas*, del año 1631 (Tanner, 1962). Añade Tanner (1962) que Harriot modificó el signo para la igualdad introducido por Recorde, de modo que se pueda identificar de qué lado se encuentra el lado mayor, tal como se indica en la Figura 7.


Symbols of Comparison to be Used in What Follows

The symbol for equality is = so that $a = b$ will signify that a equals b.
The symbol for 'greater than' is $>$ so that $a > b$ will signify that a is greater than b.
The symbol for 'less than' is $<$ so that $a < b$ will signify that a is less than b[9].

Figura 7. Símbolos introducidos por Harriot para la desigualdad

Fuente: Seltman y Goulding (2007, p. 10)

Según Halmagui (2011) el trabajo de Oughtred fue más popular que la publicación de Harriot, debido a esa razón los símbolos introducidos por Oughtred fueron usados por más de cien años. Así por ejemplo, Byrne (1847) usa los símbolos de desigualdad introducidos por Oughtred, en su versión del libro *Elementos* de Euclides, en la demostración de la proposición XX del libro I, conocida como la desigualdad en el triángulo, se observa que para su demostración (ver Figura 8) se construye un triángulo y se establece la relación de desigualdad entre sus ángulos internos y de la longitud de sus lados opuestos, a partir de allí se obtiene que la suma de dos de los lados de un triángulo es mayor que el lado restante, para establecer las relaciones de desigualdad el autor usa el símbolo de "mayor que" $\sqsubset$ en la demostración.

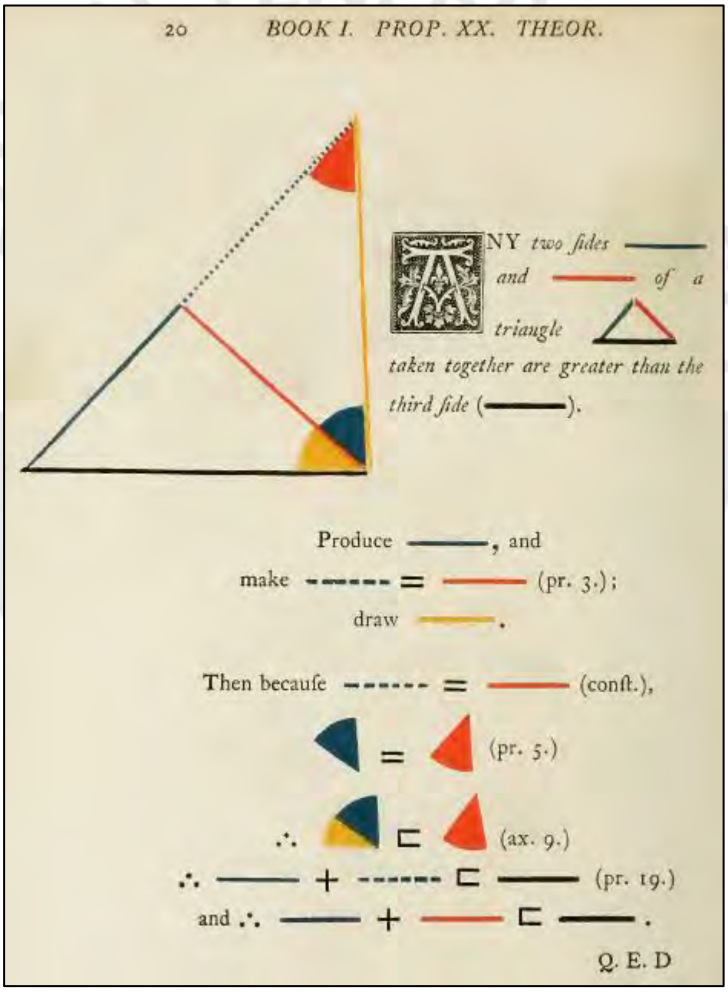


Figura 8. Demostración de la Proposicion XX, Libro I
Fuente: Bryne (1847, p. 20)

Mientras que el contexto de uso del símbolo introducido por Harriot, fue en primer lugar para transcribir desigualdades que son propiedades generales, además, para establecer ciertas condiciones sobre los coeficientes de las ecuaciones (Halmagui, 2011). En la Figura 9, podemos observar uno de los contextos de uso de los símbolos de desigualdad en el trabajo de Harriot, en el lema se afirma que la desigualdad $\left(p+q/2\right)^2 > pq$ es verdadera. Mientras que en la Figura 10, se observa que se da como condición a los coeficientes de una ecuación, la desigualdad $c > b$.

96 Section Five

LEMMA 1[3]

If a quantity be divided into two unequal parts, the square of half the total is greater than the product of the two unequal parts.

If p and q are two unequal parts of the magnitude, then it is true that

$$\left.\begin{array}{c}\frac{p+q}{2}\\ \frac{p+q}{2}\end{array}\right| > pq$$

For, from three (quantities) in continued proportion pp, pq and qq, of which pp is the greatest and qq the least, it is true that $pp - pq > pq - qq$.

Figura 9. Desigualdad general con notación de Harriot

Fuente: Seltman y Goulding (2007, p. 96)

PROPOSITION 1[5]

The ordinary equation $aaa - 3bba = +2ccc$ in which $c > b$, is explicable in terms of a single root.

Figura 10. Condición de desigualdad con notación de Harriot

Fuente: Seltman y Goulding (2007, p. 96)

Halmagui (2011) refiere que recién en el siglo XVIII se generaliza en toda Europa el uso de los símbolos $<$ y $>$. Mientras que en el año 1734, Pierre Bouguer (1698 - 1758) introduce los símbolos "$\leq$", "$\geq$" para representar las expresiones "menor o igual que" y "mayor o igual que" respectivamente.

Con respecto, al tratamiento algebraico en expresiones con desigualdades, podemos encontrar un ejemplo de ese tipo de tratamiento en el trabajo de Johann Rahn (1622 – 1676) en la publicación *Teutsche algebra* del año 1659. En la Figura 11, podemos ver como una expresión que en notación actual sería dada como $\frac{c^2+g^2-2bg}{2g} > 0$, mediante transformaciones algebraicas se llega a la desigualdad $c > g$. Puesto que las variables establecidas son cantidades positivas, podemos ver que el símbolo de la desigualdad no cambia, debido a que las variables usadas representan longitudes en el contexto del libro.

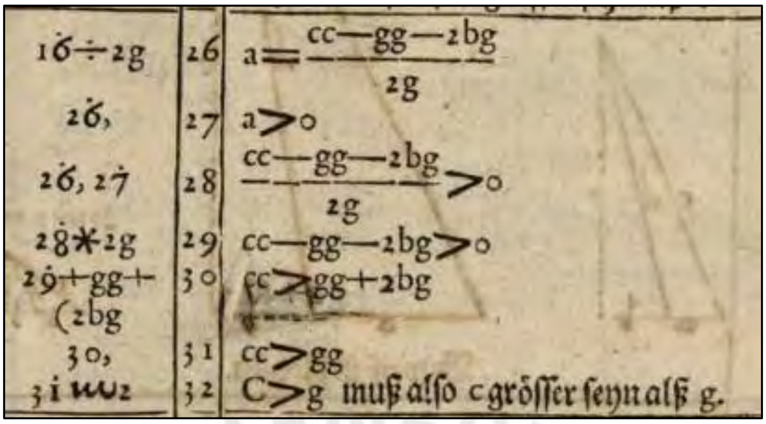


Figura 11. Tratamiento algebraico en una desigualdad, libro de Rahn

Fuente: Rahn (1659, p. 97)

Así mismo, en el volumen 3 de la publicación del año 1807, titulada *Corso di Matematiche* de Paolo Ruffini (1765-1822), identificamos la presencia de desigualdades algebraicas (inecuaciones) que permiten establecer condiciones a las ecuaciones que se plantean, así por ejemplo, en la pág. 149 se plantea el problema:

> Dos polígonos tienen en total 100 lados, si tomamos de ocho en ocho los lados de un polígono, sobran 7, y el mismo excedente de 7 se muestra cuando tomamos los lados del otro polígono de diez en diez. ¿Cuántos lados hay en cada uno de los polígonos?

Para su resolución se define como x el número de veces que ingresa 8 en la suma de los lados de un polígono, mientras que con la letra y el número de veces que entra 10 en la suma de los lados del otro polígono. Así se tiene la ecuación $8x+10y=86$, despejando la letra y se tiene la ecuación $y=\dfrac{43-4x}{5}=8+\dfrac{3-4x}{5}$, usamos la letra auxiliar $m=\dfrac{3-4x}{5}$ y se tiene que $x=\dfrac{3-5m}{4}=-m+\dfrac{3-m}{4}$, nuevamente usamos una letra auxiliar $n=\dfrac{3-m}{4}$ y se obtiene $m=3-4n$; sustituimos en x e y obtenemos $x=\dfrac{3-5(3-4n)}{4}=5n-3$ e $y=\dfrac{43-4x}{5}=\dfrac{43-4(5n-3)}{4}=11-4n$, como x e y son enteros positivos, se establecen las condiciones de desigualdad mediante las inecuaciones

$5n-3>0$ y $11-4n>0$, de donde resulta que $n>\frac{3}{5}$ y $\frac{11}{4}>n$, como n debe ser entero entonces los valores de n son 1 y 2, luego el valor de x es 2 y el valor de y es 7 cuando $n=1$ y si $n=2$ el valor de x es 7 y el valor de y es 3, de ese modo determinamos la cantidad de lados de los polígonos (Ruffini, 1807).

En el marco del cálculo y la constitución de las inecuaciones como disciplina de estudio

Por otra parte, señala Grabiner (1997) que en el trabajo de Maclaurin (1698-1746) se identifica la introducción de las desigualdades para la demostración de resultados propios del cálculo infinitesimal, pues en su libro *A Treatise of Fluxions: In Two Books* del año 1742 se presenta la demostración de un caso especial del teorema fundamental del cálculo, aplicado a una función específica. Lo que demostró Maclaurin es que si el área bajo la curva hasta x o AP está dado por x^n, la ordenada de la curva PM o y es igual nx^{n-1} (ver Figura 12), así pues, desde que x e y crecen juntos, además las áreas $PM\times Pp=y\times h$, $PM\mu\pi=x^n-(x-h)^n$ y $PMmp=(x+h)^n-x^n$ se tiene la siguiente desigualdad $x^n-(x-h)^n<yh<(x+h)^n-x^n$, aunque Maclaurin enuncia en lenguaje natural dicha desigualdad. Asimismo, Grabiner (1997) señala que las primeras demostraciones de límites de funciones mediante las pruebas de delta-épsilon son identificados en el trabajo de Cauchy (1789-1857), en dichas demostraciones el tratamiento algebraico en las inecuaciones es necesario.

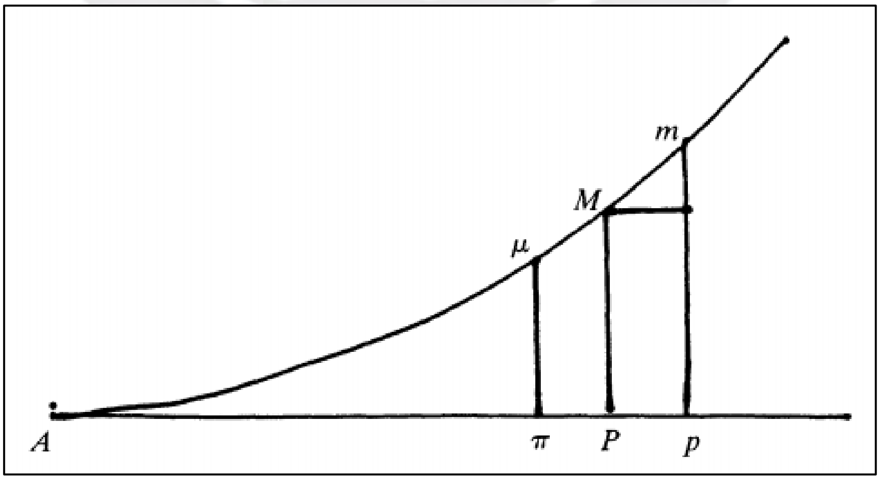


Figura 12. Curva de base AP cuya área es x^n

Fuente: Grabiner (1997, p. 398)

A partir del siglo XVIII, señala Fink (2000), a las desigualdades que resultaban ser propiedades generales, se les llamaba con el nombre del matemático que las declaraba o demostraba, así por ejemplo, tenemos la desigualdad de Cauchy-Shwarz, la desigualdad de Minkowski, etc. En el año 1934, dichas desigualdades y sus demostraciones, así como las aplicaciones de las desigualdades en distintos tópicos son recopilados en el libro *Inequalities* escrito por Godfrey Hardy (1877-1947) con colaboración de Littlewood y Pólya (Fink, 2000). El mismo autor señala que a partir de dicha publicación que se puede hablar de las desigualdades como una disciplina de estudio, pues se evidenció el interés de muchos matemáticos en la demostración de desigualdades, además de publicar dichas demostraciones.

Así mismo, en la primera mitad del siglo XX, con el desarrollo del capitalismo en Estados Unidos, se resolvieron problemas con la ayuda de criterios de optimización, donde las restricciones se establecen mediante inecuaciones lineales y el criterio de optimización mediante una función lineal (Bernardis, Nitti y Scaglia, 2017). Garzón (2014) señala que una técnica para la resolución de problemas de optimización fue presentada por Theodore Motzkin (1908-1970), quien redescubre una técnica presentada por Joseph Fourier (1768-1830) en el año 1826, en un artículo que titula *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités*. En dicho trabajo, señala el autor, Fourier resuelve un problema sobre la intersección de 6 rectas en un polígono irregular convexo, donde las inecuaciones asociadas son de la forma:

$$x < y(1+k),\ y < x(1+k)$$

$$y < z(1+k),\ z < y(1+k)$$

$$z < x(1+k),\ x < z(1+k)$$

$x+y+z=1$, donde k es una constante positiva.

El método propuesto por Fourier consiste en la eliminación de variables, es decir, usar la técnica de eliminación de variables para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. De Garzón (2014) mostramos la técnica a partir de en un ejemplo resuelto.

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = x_1 + x_2\\ &\text{s.a}\end{aligned}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

En primer lugar se introduce la función lineal z en el sistema de inecuaciones, para ello se reemplaza $x_1 = z - x_2$ en el sistema de inecuaciones, es así como se obtienen las siguientes desigualdades.

$$x_2 \leq \frac{15-z}{2}$$

$$x_2 \leq z$$

$$-4 + 2z \leq x_2$$

$$0 \leq x_2$$

El sistema de inecuaciones lineales se puede reescribir de la siguiente forma $\max\{-4+2z;0\} \leq x_2 \leq \min\left\{\frac{15-z}{2};z\right\}$ y equivale al siguiente sistema de inecuaciones con una incógnita.

$$-4 + 2z \leq \frac{15-z}{2}$$

$$-4 + 2z \leq z$$

$$0 \leq \frac{15-z}{2}$$

$$0 \leq z$$

La solución del sistema de inecuaciones es $0 \leq z \leq 4$, el valor máximo de z es 4.

Razón de ser de nuestro objeto del saber en cada uno de los momentos matemáticos estudiados

En síntesis, lo que nuestro análisis epistemológico nos muestra es que en la matemática desarrollada en la antigüedad, identificamos en el marco de la geometría la razón de ser de las desigualdades, pues permitió establecer propiedades generales, como la desigualdad del triángulo, además, Arquímedes por medio de desigualdades determinaba igualdades para calcular áreas y volúmenes. Según Fink (2000) no se encuentran trabajos donde se establezcan desigualdades de números, excepto la aproximación del valor de π dado por Arquímedes.

En el marco del álgebra, identificamos en el trabajo de Diofanto otra razón de ser de las desigualdades, pues mediante el uso de incógnitas auxiliares, Diofanto reduce ecuaciones cuadráticas a ecuaciones lineales y desigualdades, además, determina las soluciones de las desigualdades cambiándolas por igualdades. Es así como, las desigualdades eran usadas por Diofanto como herramientas de resolución de ecuaciones (problema de los vinos), más no es un problema donde se pida resolver una desigualdad, las desigualdades se manifiestan en el proceso de resolución (Bernardis, Nitti y Scaglia, 2017).

Además, ya con la introducción de los símbolos de desigualdad, identificamos en el trabajo de Rahn y Ruffini el tratamiento algebraico en las desigualdades, vinculado al marco de la geometría en el trabajo de Rahn y a la teoría de ecuaciones en Ruffini. Mientras que en los trabajos de Harriot y Bryne identificamos la representación de propiedades que son desigualdades generales mediante los símbolos de desigualdad, como la desigualdad del triángulo y la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica. Asimismo, identificamos en el trabajo de los matemáticos del siglo XVIII y XIX el tratamiento de las desigualdades como herramienta para el desarrollo del Cálculo, como se mostró acerca del trabajo de Maclaurin.

Finalmente, a partir del trabajo de Hardy a quien Fink (2000) denomina como "el padre de la disciplina de desigualdades" se incrementó las investigaciones referentes a las desigualdades y sus aplicaciones. Por ejemplo, identificamos a mediados del siglo XX el uso de las desigualdades en la teoría de optimización cuyo desarrollo está vinculado al desarrollo del capitalismo.

3.2 Criterios para la elaboración de un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a las inecuaciones lineales

Gascón (2011) señala que "para formular un problema didáctico en términos de la TAD se requiere tomar un MER como sistema de referencia" (p. 212). Así pues, en nuestro trabajo de investigación, daremos algunas pautas para la elaboración de un modelo epistemológico de referencia en torno a las inecuaciones lineales, lo cual nos servirá como referente en el análisis praxeológico de una organización matemática reconstruida a partir de la revisión de los libros didácticos escogidos. Posteriormente, dichos criterios son fundamento para la construcción de un modelo epistemológico alternativo.

Ahora bien, los criterios para la elaboración de un MER están basados en tres aspectos, el análisis histórico epistemológico de nuestro objeto de estudio, el análisis de textos matemáticos en relación a la definición de inecuación y las investigaciones en didáctica de la matemática en referencia a las inecuaciones.

1. El análisis histórico epistemológico muestra que:
    - El origen de las inecuaciones se encuentra en el concepto de desigualdad, que aparece en el marco de la geometría, allí encontramos la razón de ser de las desigualdades. Por lo tanto, una praxeología matemática inicial debería considerar tipos de tareas relacionadas al concepto desigualdad, en concreto a situaciones de comparación y acotamiento, así por ejemplo, tareas de representación de situaciones de desigualdad dentro del contexto intramatemático y extramatemático.
    - Las inecuaciones tienen su razón de ser en el marco del álgebra, tal como se evidenció en los problemas que resolvieron Diofanto y Ruffini, así pues, el MER debería considerar estos problemas de ecuaciones que se resuelven por inecuaciones, resolviéndolos en el lenguaje actual de inecuaciones, pues dichos problemas justificaron el desarrollo de las inecuaciones.
2. Para el análisis de textos matemáticos en relación a la definición de inecuación, consideramos el libro *Álgebra* de Lehmann (1992), puesto que en el capítulo que corresponde a nuestro objeto de estudio, distingue de la definición de desigualdad e inecuación. Así pues la definición presentada en dicho libro debe tomarse en cuenta en la propuesta del MER.

    Lehmann (1992) comienza señalando que si se tiene dos expresiones que nos son iguales, entonces se tiene una desigualdad, además se puede decir que una de las expresiones es mayor o menor que la otra. Diremos que dos desigualdades tienen el mismo sentido si sus símbolos apuntan a la misma dirección, caso contrario se diremos que tienen sentidos opuestos, por ejemplo las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tiene el mismo sentido, mientras que las desigualdades $a > b$ y $c < d$ tienen sentidos opuestos. Existen dos tipos de desigualdades, las desigualdades absolutas y las desigualdades condicionales o inecuaciones. Las desigualdades absolutas o incondicionales son aquellas en las cuales para cualquiera de los valores que pueden tomar las variables, en cada uno de los miembros de la desigualdad, esta tiene el mismo sentido. Por ejemplo, $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$ son desigualdades absolutas. Las desigualdades condicionales o inecuaciones son aquellas en las cuales la desigualdad tiene el mismo sentido solo para ciertos valores que pueden tomar las variables en cada uno de sus miembros. Por ejemplo, $x - 3 < 4$ es válida sí $x < 7$.

3. Además, para la construcción del MER deben considerarse las investigaciones en referencia a las inecuaciones desde la didáctica de la matemática.
    - La propuesta del MER debería contemplar tareas en las cuales se discuta las propiedades de desigualdad, pues según Giusti, Nogueira y Campos (2015) la comprensión de dichas propiedades es fundamental en la comprensión de las técnicas de resolución de inecuaciones. Así por ejemplo, tareas donde se manifieste la diferencia cuando se multiplica por un factor negativo a una relación de desigualdad y una de igualdad.
    - En relación al tratamiento algebraico en las inecuaciones, tareas que conforman el género Resolver, Bernardis, Nitti y Scaglia (2017) mencionan que no solo deberían considerarse tareas donde el modo de hacer consista en la aplicación repetitiva de una técnica, sino también, se deberían considerar tareas donde los procedimientos no se mecanizan, por ejemplo, las tareas que proponen Tsamir y Bazzini (2002), donde los coeficientes de la inecuación son parámetros.
    - Así mismo, no solo considerar la técnica algebraica para la resolución de inecuaciones, sino además, tal como señalan Bazzini y Boero (2004), Barbosa (2006), Giusti (2007) y Conceição (2011), hacer uso de distintos enfoques en la resolución de inecuaciones, de modo que se disponga de distintas técnicas y en consecuencia se haga uso de diversos objetos ostensivos para la representación de dichas técnicas, como por ejemplo la representación gráfica, tabular.

CAPITULO IV: ANÁLISIS DE UNA COLECCIÓN DE LIBROS DIDÁCTICOS DE 1° A 5° SECUNDARIA

En el presente capítulo, con la finalidad de cumplir con el segundo objetivo específico de nuestra investigación, presentamos el análisis ecológico y el análisis de una praxeología matemática reconstruida a partir de la revisión de una colección de libros didácticos, específicamente de la revisión en las unidades que corresponden a las inecuaciones lineales. Para ello seguimos algunos de los aspectos metodológicos presentados en Almouloud (2015).

4.1 Análisis ecológico

En principio, observamos cómo se aborda nuestro objeto de estudio en el actual Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), puesto que dicho documento “debe ser usado como fundamento de la práctica pedagógica en las diversas instituciones y programas educativos, sean públicas o privadas; rurales o urbanas; multigrado, polidocente o unidocente; modelos y formas de servicios educativos” (Perú, Ministerio de Educación, 2016b, p.8).

Así pues, observamos que nuestro objeto de estudio en el actual CNEB lo encontramos en la competencia **resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**. Según el CNEB dicha competencia consiste en que el alumno sea capaz de combinar las siguientes capacidades:

- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas: el estudiante a partir de una situación planteada es capaz de realizar la conversión del lenguaje natural al lenguaje algebraico, dicha situación dentro de un contexto intramatemático o extramatemático. De ese modo obtiene expresiones algebraicas que involucran a las desigualdades.

- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas: el estudiante es capaz de determinar el conjunto solución de una inecuación en sus distintas representaciones, ya sea mediante notación de intervalo, la representación en la recta numérica o en lenguaje natural.

- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales: el estudiante por realiza transformaciones algebraicas sobre la inecuación de modo que le permita determinar la solución de la inecuación.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia: el estudiante justifica las propiedades usadas al realizar las transformaciones algebraicas. Así como, según el contexto del problema, determina si es válida la solución o soluciones de la inecuación.

Ahora, respecto a los libros didácticos escogidos para nuestro análisis, estos libros comprenden los 5 años de educación secundaria, y son proporcionados a partir del año 2016 por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) a profesores y estudiantes de educación pública del país, así pues, dicha colección de libros didácticos son los de mayor uso en nuestro contexto educativo. Así mismo, los libros fueron diseñados siguiendo los lineamientos curriculares dados en la Resolución Ministerial N° 199-2015, que modifica el Diseño Curricular Nacional del año 2009.

Por cada año de educación secundaria se revisaron dos libros, el *texto escolar* y el *cuaderno de trabajo*. En la tabla 2, mostramos las páginas de los libros donde se encuentra presente nuestro objeto de estudio, así como los temas relacionados a él.

Tabla 2. *Lista de libros didácticos de Educación Básica Regular*

Libros		**Editorial**	**Año**	**Páginas**	**Código**
Matemática 1	Texto escolar	Norma	2015	90 - 96, 98	TE1
	Cuaderno de trabajo	Norma	2015	196 - 211, 232	CT1
Matemática 2	Texto escolar	Norma	2016	82 - 91	TE2
	Cuaderno de trabajo	Norma	2016	156 - 163, 188, 189	CT2
Matemática 3	Texto escolar	Santillana	2016	18 - 23, 77 - 80, 82, 104	TE3
	Cuaderno de trabajo	Santillana	2016	13 - 15, 36, 37, 40 - 43, 45 - 55	CT3
Matemática 4	Texto escolar	Santillana	2016	20, 21, 51, 76, 99	TE4
	Cuaderno de trabajo	Santillana	2016	180 - 187	CT4

Matemática 5	Texto escolar	Santillana	2016	16, 17	TE5
	Cuaderno de trabajo	Santillana	2016		CT5

En adelante nos referiremos a los textos escolares con la nomenclatura TE, mientras que para los cuadernos de trabajo usaremos la nomenclatura CT, acompañado en ambos casos de un número, el cual indica el año de estudio al cual corresponde, tal como se indica en la tabla 2.

A continuación presentamos una descripción tanto del TE y el CT de cada año de estudio de nivel secundaria, lo que nos permite presentar en un segundo momento el análisis praxeológico.

4.1.1 Descripción del texto escolar (TE)

Los libros didácticos TE1 y TE2, elaborados por la editorial Norma, están organizados en 12 capítulos, cada capítulo contiene una sección inicial, sección central y sección final. En la sección inicial, se puede encontrar el número y nombre del capítulo, así como la intencionalidad pedagógica, los conceptos fundamentales de los temas a tratar y los aprendizajes esperados. Mientras que en la sección central, encontramos una introducción del tema a tratar, así como la presentación de los conocimientos matemáticos a tratar, ejercicios o problemas resueltos y la bibliografía. En la Figura 13 podemos observar la estructura de la sección central del TE1.

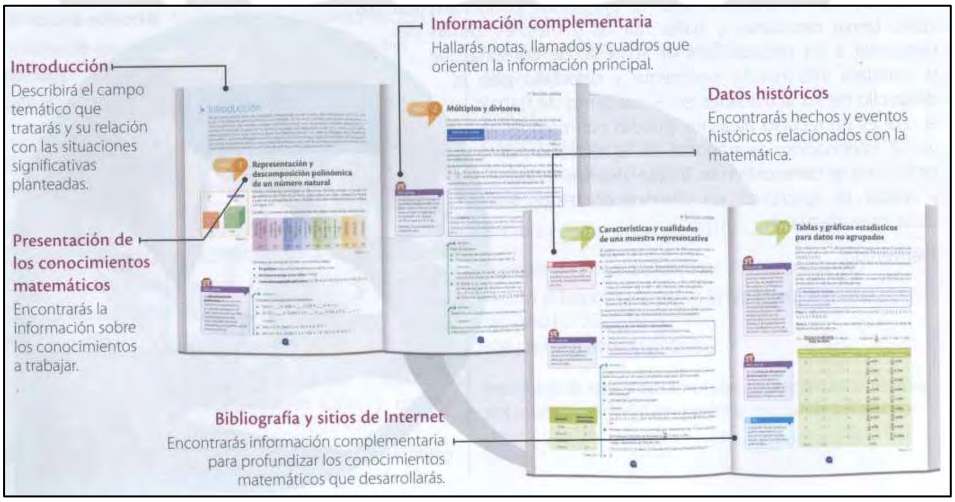


Figura 13. Sección central del libro TE1

Fuente: Perú b (2015, p. 4)

Por último, en la sección final del capítulo se presenta una lectura especializada, cuyo objetivo es ampliar los conocimientos matemáticos del capítulo tratado. Además, encontramos un organizador visual que resume los conocimientos desarrollados en el capítulo, y se presenta un problema en contexto cuya resolución es dada de forma detallada, al cual el libro denomina estrategias heurísticas.

Respecto a nuestro objeto de estudio, lo ubicamos en el capítulo 6 de ambos textos, y además tienen la misma denominación, el de *Inecuaciones lineales*. En el TE1 se señala que la intencionalidad pedagógica del capítulo es:

> En este capítulo aprenderás sobre inecuaciones lineales, con el fin de interpretar las condiciones de una desigualdad mediante expresiones algebraicas con una incógnita. También conocerás el proceso para ilustrar el conjunto solución de una inecuación haciendo uso de la recta numérica. Lo anterior te permitirá actuar y pensar matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio. Finalmente, podrás justificar si un número es solución de una inecuación dada (Perú, Ministerio de Educación, 2015a, p. 90)

Sin embargo, tras la revisión del TE1, en ninguno de los ejemplos resueltos se realiza la representación en la recta numérica del conjunto solución de la inecuación, esto se observa en el ejemplo que mostramos a continuación, pues solo se realiza el tratamiento algebraico hasta obtener una expresión equivalente a alguna de las expresiones $x < a, x > a, x \leq a, x \geq a$.

c. $6m < 24$

$$\left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) m < \frac{1}{6} \cdot 24$$

$$1 \cdot m < \frac{24}{6}$$

$$m < 4$$

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

Es en el TE2 donde identificamos la representación en la recta numérica del conjunto solución de una inecuación, así como la representación mediante la notación de intervalo (ver Figura 14).

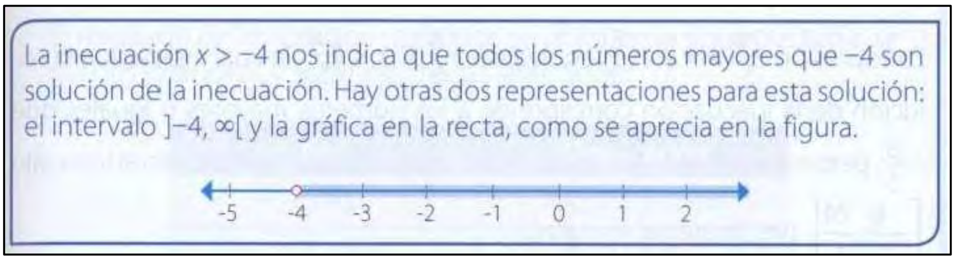
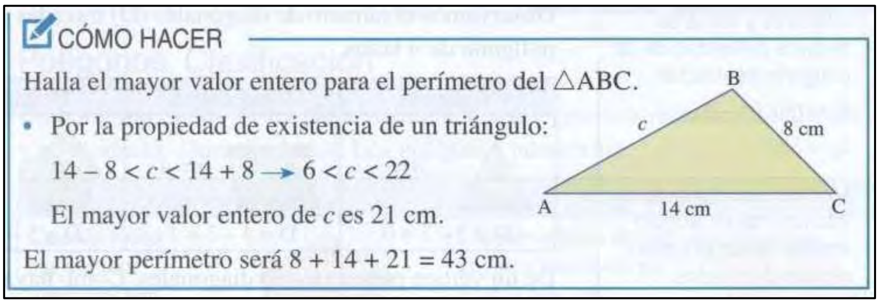

La inecuación $x > -4$ nos indica que todos los números mayores que -4 son solución de la inecuación. Hay otras dos representaciones para esta solución: el intervalo $]-4, \infty[$ y la gráfica en la recta, como se aprecia en la figura.

Figura 14. Representación del conjunto solución de una inecuación
Fuente: Perú b (2016, p. 87)

Por otra parte, los libros TE3, TE4 y TE5, elaborados por la editorial Santillana, están organizados en 12 capítulos, cada capítulo contiene una sección inicial, sección central y sección final. La estructura de cada una de las secciones está dada de forma similar al de los libros TE1 y TE2.

En lo que respecta a nuestro objeto de estudio, en el libro TE3 los temas o propiedades relacionados a nuestro objeto de estudio lo ubicamos en el capítulo 1, capítulo 5 y capítulo 7. En el capítulo 1 que lleva como título *Números racionales e irracionales*, encontramos el tema intervalos (p. 18-21) y el tema valor absoluto (p. 22-23). El tema intervalos está relacionado con nuestro objeto de estudio puesto que encontramos elementos tecnológicos y ejercicios resueltos de cómo representar un intervalo en la recta numérica así como su representación algebraica mediante el uso de los signos de desigualdad, esto a partir de un contexto dado en lenguaje natural, además encontramos operaciones con intervalos. Mientras que en el tema valor absoluto encontramos problemas resueltos de inecuaciones lineales que involucran usar las propiedades de valor absoluto.

En el capítulo 5 que lleva como título *Sistema de ecuaciones lineales. Inecuaciones*, el tema inecuaciones lineales (p. 77-80), presenta las propiedades de desigualdad, así como la representación del conjunto solución de una inecuación además de ejercicios resueltos y problemas de contexto resueltos. Finalmente, el capítulo 7 que titula *Polígonos. Triángulos* encontramos un problema resuelto que involucra usar la propiedad del triángulo, tal como podemos observar en la Figura 15.



CÓMO HACER

Halla el mayor valor entero para el perímetro del $\triangle ABC$.

- Por la propiedad de existencia de un triángulo:

  $14 - 8 < c < 14 + 8 \rightarrow 6 < c < 22$

  El mayor valor entero de c es 21 cm.

El mayor perímetro será $8 + 14 + 21 = 43$ cm.

Figura 15. Inecuación obtenida a partir de la propiedad del triángulo

Fuente: Perú d (2016, p. 104)

En libro TE4, los capítulos donde encontramos los temas o propiedades relacionadas a nuestro objeto de estudio son el capítulo 1, capítulo 3, capitulo 4 y capitulo 6. En el capítulo 1, *Números racionales e irracionales. Magnitudes*, encontramos el tema intervalos (p.20-21), como representar un intervalo en la recta numérica así como su representación algebraica mediante el uso de los signos de desigualdad, esto a partir de un contexto dado en lenguaje natural, además encontramos operaciones con intervalos. En el capítulo 3, *Sucesiones y progresión geométrica*, en el tema sucesiones crecientes y decrecientes (p. 51), encontramos un ejercicio resuelto en el cual se pide verificar que la sucesión es creciente, para ello se hace uso de las propiedades de desigualdad tal como se observa en la Figura 16. En el capítulo 4, *Sistemas de ecuaciones. Inecuaciones lineales*, encontramos el tema inecuaciones lineales (p.76), las propiedades de desigualdad para el tratamiento algebraico en las inecuaciones y dos problemas resueltos de inecuaciones. Finalmente, en el capítulo 6, *Triángulos*, encontramos un problema resuelto que involucra usar la propiedad del triángulo similar al mostrado en la Figura 15.

CÓMO HACER

Verifica que la sucesión $a_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$ es creciente. Luego, escribe los 4 primeros términos de dicha sucesión.

- Debemos comprobar que $a_n \leq a_{n+1}$, es decir:

$$\frac{3n-1}{4n+5} \leq \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5}$$

- Resolvemos:

$$\begin{aligned}(3n-1)(4(n+1)+5) &\leq (3(n+1)-1)(4n+5)\\ 12n^2+23n-9 &\leq 12n^2+23n+10\\ -9 &\leq 10\end{aligned}$$

- Se verifica que, para cualquier valor n (entero y positivo), se obtiene una desigualdad verdadera. Por ello, la sucesión $a_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$ sí es creciente.

Figura 16. Verificar si una sucesión es creciente mediante las desigualdades

Fuente: Perú f (2016, p. 51)

Para finalizar con los textos escolares, en el libro TE5 nuestro objeto de estudio lo encontramos en el capítulo 1, *Números reales. Magnitudes*, en el tema relación de orden en $\mathbb{R}$ e intervalos (p. 16-17), en dicha sección se establecen las propiedades de relación de orden de los números reales de forma formal, mediante el uso de los cuantificadores, tal como se puede observar en la Figura 17, dicha presentación de las propiedades de forma distinta a como se las presenta en los textos escolares que corresponden a los años anteriores, como se observa en la Figura 18. Cabe señalar, que solo se muestra un ejercicio resuelto de una inecuación lineal en el TE5.

Propiedad de tricotomía	$\forall a, b \in \mathbb{R}$, solo se da que $a = b$, $a < b$ o $a > b$
Propiedad transitiva	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
Propiedad aditiva	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
Propiedad multiplicativa	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Figura 17. Propiedades de la relación < en el TE5
Fuente: Perú h (2016, p. 16)

Propiedad	Significado
1. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.	 $25 - 5 > 15 - 5$ $25 > 15$ $25 + 5 > 15 + 5$ Al sumar o restar un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, esta se mantiene.
2. Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$.	Al sumar o restar los números correspondientes de una desigualdad, esta se mantiene.
3. Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.	Al multiplicar cada miembro de la desigualdad por un mismo número positivo, la desigualdad se mantiene.
4. Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$.	Al multiplicar cada miembro de la desigualdad por un mismo número real negativo, la desigualdad cambia.

Figura 18. Propiedades de la desigualdad en el TE2
Fuente: Perú b (2016, p. 86)

4.1.2 Descripción del cuaderno de trabajo (CT)

En los cuadernos de trabajo encontramos un conjunto de actividades en las cuales es necesario poner en práctica los conocimientos matemáticos adquiridos. Respecto al contenido de los cuadernos de trabajo, en el CT1 se señala que en el cuaderno de trabajo “encontrarás diversas actividades sobre situaciones cotidianas cuyo desarrollo permitirá encontrarle sentido y significatividad a la matemática” (Perú, Ministerio de Educación, 2015b, p. 3).

Los cuadernos de trabajo que corresponden a los dos primeros años de estudio de educación secundaria son el CT1 y CT2, elaborados por la editorial Norma, cada uno de ellos está organizado en 9 unidades, y cada unidad está conformada por fichas de trabajo, donde se presentan actividades en contexto. En cada una de las fichas encontramos las secciones *iniciemos*, *resolvamos*, *reflexiona*, *resuelve situaciones significativas*, *autoevaluación, coevaluación* y *metacognición*.

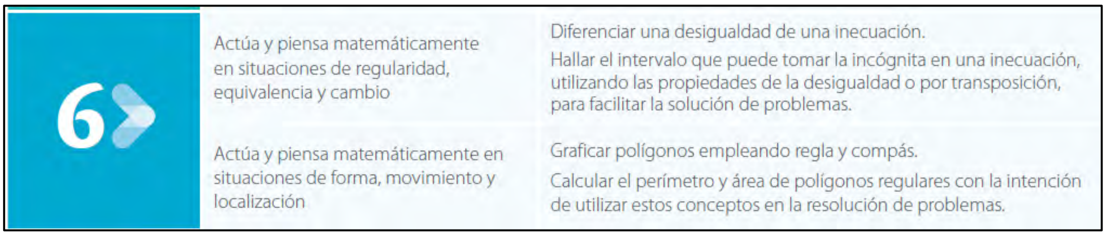
Describimos a continuación cada una de las secciones tal como se indican en el CT1:

- *Iniciemos,* permite reconocer saberes previos.
- *Resolvamos*, propone la estrategia a usar para resolver el problema planteado.
- *Reflexiona*, pide reflexionar acerca del proceso para el logro del aprendizaje que se desea obtener.
- *Resuelve situaciones significativas*, presenta situaciones significativas que ayuden al desarrollo de la competencia y capacidad en la ficha.
- *Autoevaluación y coevaluación*, presenta preguntas que favorecen la autorregulación de los procesos.
- *Metacognición*, presenta actividades que permita reflexionar sobre el proceso de aprendizaje.

Por finalizar cada unidad, se presenta una ficha de autoevaluación, donde se enuncian actividades que permitan reflexionar acerca de los conocimientos aprendidos a lo largo de toda la unidad.

En el CT1, nuestro objeto de estudio lo encontramos en la unidad 6, ***El Perú y su gente***, en la Figura 19 observamos la descripción de la competencia a desarrollar en dicha unidad en referencia a las inecuaciones lineales. Las fichas en las cuales encontramos a las inecuaciones lineales en dicha unidad son:

- Ficha 42. *Tiempo de descanso*
- Ficha 43. *Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones*
- Ficha 44. *Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones*
- Ficha 45. *Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones* y *evaluación*.



6	Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio	Diferenciar una desigualdad de una inecuación. Hallar el intervalo que puede tomar la incógnita en una inecuación, utilizando las propiedades de la desigualdad o por transposición, para facilitar la solución de problemas.
	Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización	Graficar polígonos empleando regla y compás. Calcular el perímetro y área de polígonos regulares con la intención de utilizar estos conceptos en la resolución de problemas.

Figura 19. Descripción de las competencias a desarrollar en la unidad 6 del CT1

Fuente: Perú c (2015 p. 5)

De la misma manera, nuestro objeto de estudio en el CT2, lo encontramos en la unidad 5, ***Números, formas y nuestros recursos***, tal como se observa en la descripción dada en la Figura 20. Mientras que las fichas en relación a las inecuaciones lineales son: Ficha 33. *Plataformas petrolíferas*, Ficha 34. *Perforación de pozos* y *evaluación*.

5	Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.	Emplear estrategias heurísticas al resolver problemas de inecuaciones lineales.
	Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización.	Calcular el perímetro y área de figuras poligonales regulares y compuestas, triángulos y círculos, componiendo y descomponiendo en otras figuras cuyas medidas son conocidas con recursos gráficos y otros.

Figura 20. Descripción de las competencias a desarrollar en la unidad 5 del CT2

Fuente: Perú c (2016, p. 5)

Respecto a los textos CT3, CT4 y CT5, elaborados por la editorial Santillana, cada uno de ellos está organizado en 8 unidades, los cuales contienen fichas basadas en situaciones en contexto. En la Figura 21 podemos observar la estructura que sigue cada una de las fichas que comprenden los cuadernos de trabajo.

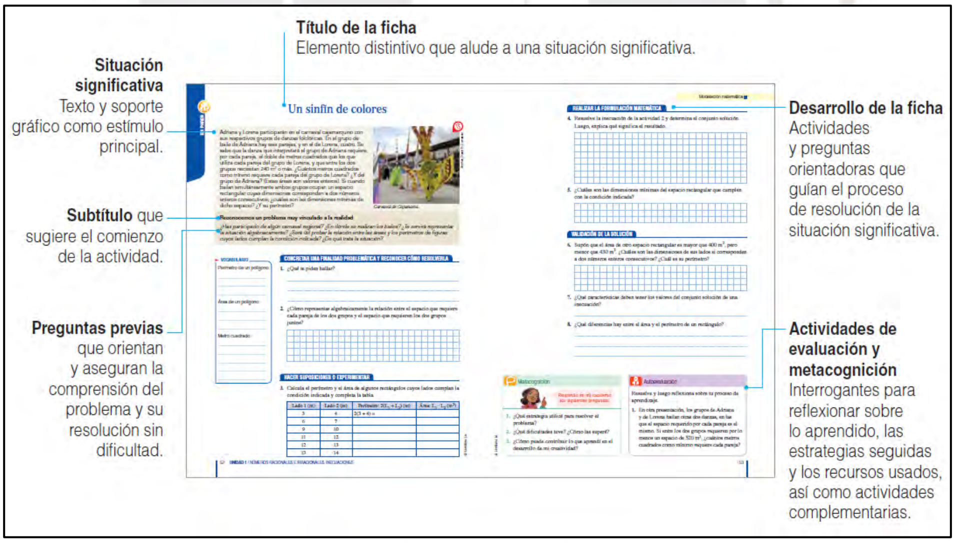


Figura 21. Estructura de las fichas del CT3

Fuente: Perú e (2016, p. 4)

En relación a nuestro objeto de estudio, en el CT3 lo ubicamos en la unidad 1, ***Números racionales irracionales. Inecuaciones***, y las fichas en las cuales se encuentran son: *Etapas de la vida humana*, *Bajas temperaturas*, *Presupuesto familiar*, *Chat entre amigos*, *Pasco, una región de altura*, *Buscamos la operación*, *Valor energético*, *Promedio de notas*, *Escalas termométricas*, *Cultivos peruanos*, *¿Quién tiene razón?*, *Un lugar para estacionar*, *Un sinfín de colores* y *El más rápido*. Mientras que en el CT4, las fichas en las cuales identificamos a nuestro objeto de estudio se encuentran en la unidad 4, ***Sistema de ecuaciones. Inecuaciones. Relaciones métricas***, y son: *Agua para la pecera*, *Huertos ecológicos*, *Fertilizante orgánico*, *Campaña solidaria*. Finalmente, en el CT5 ubicamos a nuestro objeto de estudio en la ficha *Cosecha de duraznos*, de la unidad 1, ***Números reales. Magnitudes***.

A partir de nuestro análisis ecológico, podemos interpretar que una posible razón de ser de las inecuaciones, en nuestro contexto educativo, es la resolución de problemas de contexto con condiciones de desigualdad, así mismo, tal como señala Bagni (2005) y Borello (2010) se encuentra subordinada al objeto matemático ecuación.

A continuación presentamos la descripción de la praxeología matemática reconstruida en torno a las inecuaciones lineales de la colección de libros didácticos descritos.

4.2 Análisis Praxeológico

En esta sección describimos la praxeología matemática reconstruida de los libros didácticos en torno a las inecuaciones lineales, es decir presentamos una descripción de los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnología y teoría identificados en la colección de libros didácticos.

Para presentar dicha praxeología consideraremos las siguientes notaciones:

T_i: Es el tipo de tarea i.

t_{ij}: Es la tarea j del tipo de tarea T_i.

τ_{ijk}: Es la técnica; donde i corresponde al tipo de tarea, j corresponde al número de tarea y k indica el número de técnica de la tarea j.

θ: Es la tecnología que justifica la técnica.

Θ: Es la teoría que justifica la tecnología.

A partir de nuestro análisis de la colección de libros didácticos, identificamos 9 tipos de tareas relacionadas con las inecuaciones lineales. A continuación mostramos los tipos de tareas identificados en la colección de libros didácticos analizados:

T_1: Representar una desigualdad.

T_2: Comprobar la solución o soluciones de una inecuación lineal.

T_3: Resolver una inecuación lineal con una incógnita.

$\boldsymbol{T_4}$: Resolver un sistema de dos inecuaciones lineales.

$\boldsymbol{T_5}$: Resolver un sistema conformado por un sistema de inecuaciones lineales y una ecuación lineal.

$\boldsymbol{T_6}$: Resolver una inecuación lineal que tiene parámetros.

$\boldsymbol{T_7}$: Comparar expresiones.

$\boldsymbol{T_8}$: Justificar las técnicas de resolución.

$\boldsymbol{T_9}$: Determinar el conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas.

Para la agrupación de las tareas y los tipos de tareas, como se podrá observar más adelante, se tomó en consideración las ampliaciones o variaciones de las técnicas, en el caso de los tipos de tarea $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_4}$, $\boldsymbol{T_5}$ y $\boldsymbol{T_6}$, así como, por el tipo de inecuaciones que se obtienen de su planteamiento. Así mismo, se tomó en consideración las tareas que tienen distinta naturaleza respecto al género de tareas al cual pertenecen, como es el caso de las tareas $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_7}$, $\boldsymbol{T_8}$ y $\boldsymbol{T_9}$. A continuación exponemos la evaluación de los tipos de tareas identificados, acompañamos a cada tipo de tareas un número entre paréntesis, el cual indica la frecuencia con la cual aparecen en la colección de libros analizados.

Según el *criterio de identificación* observamos que los tipos de tarea $\boldsymbol{T_1}$ (114) y $\boldsymbol{T_3}$ (58) son los tipos de tarea con mayor presencia en la colección de libros, seguido del tipo de tareas $\boldsymbol{T_4}$ (37), $\boldsymbol{T_2}$ (35), $\boldsymbol{T_7}$ (9), $\boldsymbol{T_8}$ (10) y $\boldsymbol{T_5}$ (14). Mientras que las tareas del tipo $\boldsymbol{T_6}$ (3) y $\boldsymbol{T_9}$ (4) son las de menor presencia, pues se identificaron solo en el libro CT1, que corresponde al primer año de educación secundaria.

Respecto a la frecuencia de tareas presentes por año de estudio, observamos mayor cantidad de ellos en los libros que corresponden al primer año de educación secundaria y al tercer año de educación secundaria, con 72 y 110 respectivamente. En contraste, en los libros que corresponden al quinto año de educación secundaria, notamos la ausencia de tareas relacionadas a nuestro objeto de estudio. En la tabla 3 se muestra la cantidad de problemas de cada tipo de tareas identificadas en la colección de libros analizados, así como la cantidad de problemas resueltos y propuestos en cada uno de los libros que pertenecen a la colección.

Tabla 3. *Cantidad de problemas en la colección de libros didácticos*

Nivel		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	Problemas resueltos	Problemas propuestos	Total
1° Sec.	TE1	8	0	7	1	0	0	0	0	0	15	1	16
	CT1	23	9	13	2	1	3	0	1	4	0	56	56
2° Sec.	TE2	16	5	2	5	0	0	0	0	0	24	4	28
	CT2	17	8	4	0	0	0	0	1	0	0	30	30
3° Sec.	TE3	13	3	1	8	3	0	0	0	0	26	2	28
	CT3	24	6	23	18	3	0	0	8	0	0	82	82
4° Sec.	TE4	3	0	3	2	0	0	1	0	0	9	0	9
	CT4	6	4	4	1	7	0	2	0	0	0	24	24
5° Sec.	TE5	2	0	1	0	0	0	2	0	0	5	0	5
	CT5	2	0	0	0	0	0	4	0	0	0	6	6
Total		114	35	58	37	14	3	9	10	4	79	202	281

En lo que se refiere a la *razón de ser* de los tipos de tareas identificados, esta se encuentra explicitada en las capacidades que se establecen en la competencia **actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio**, que se encuentra en la Resolución Ministerial N° 199-2015, así como en la colección de libros didácticos analizados.

Es así como, la presencia del tipo de tarea T_1 verifica los lineamientos que establecen que el alumno debe ser capaz de *matematizar situaciones*, así como de *comunicar y representar ideas matemáticas*, ya que en las tareas que conforman el tipo de tarea T_1, el estudiante a partir de situaciones con condiciones de desigualdad, debe realizar transformaciones del lenguaje natural al algebraico para obtener una inecuación que represente la situación dada, y además determinar las diferentes representaciones del conjunto solución de una inecuación.

Ahora bien, para determinar el conjunto solución de una inecuación es necesario realizar transformaciones algebraicas a las inecuaciones, dicho tratamiento se realizan en las tareas del tipo $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_4}$, $\boldsymbol{T_5}$ y $\boldsymbol{T_6}$, los tipos de tareas mencionados comprenden las tareas en las cuales el alumno debe ser capaz de *elaborar y usar estrategias*. Así mismo, esa capacidad se desarrolla al resolver las tareas del tipo $\boldsymbol{T_7}$, donde encontramos tareas en las cuales debe usarse las propiedades de desigualdades para establecer una relación de orden entre dos expresiones o más expresiones, por ejemplo determinar si una sucesión es creciente o decreciente (ver Figura 16 en la pág. 65).

Además, la razón de ser las tareas del tipo $\boldsymbol{T_6}$, $\boldsymbol{T_7}$ y $\boldsymbol{T_8}$ se explicita en la capacidad de *razonar y argumentar generando ideas matemáticas*, es decir justificar las propiedades de desigualdad usadas al realizar las transformaciones algebraicas. Así mismo, según dicha capacidad el estudiante debe ser capaz de validar la solución o soluciones de una inecuación de acuerdo al contexto del problema, esa capacidad se desarrolla al resolver las tareas planteadas en un contexto extramatemático, las cuales encontramos en los tipos de tareas $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_4}$, $\boldsymbol{T_5}$ y $\boldsymbol{T_9}$; y comprobar si un elemento es solución de una inecuación en las tareas del tipo $\boldsymbol{T_2}$.

Por otra parte, en los indicadores de desempeño dados en la Resolución Ministerial N° 199-2015 (ver tabla 1 en la pág. 27) no se señala de manera explícita la presencia de tareas del tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$ en ninguno de los años de educación secundaria, aunque podríamos señalar que está relacionada con la capacidad de *comunicar y representar ideas matemáticas*, pues para realizar las tareas que lo conforman es necesario representar en el plano cartesiano el conjunto solución de la inecuación, y la capacidad de *elaborar y usar estrategias* mediante la representación gráfica en el plano cartesiano para determinar el conjunto solución de la inecuación lineal de dos incógnitas.

En tanto al *criterio de pertinencia* al evaluar los tipos de tareas, consideramos que el tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$ no es pertinente, pues dicho tipo de tarea no se contempla en el programa curricular presente. Pero al revisar el plan curricular anterior, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2009), observamos que si se contempla el tipo de tareas $\boldsymbol{T_9}$ dentro de los conocimientos que deben adquirir los estudiantes de quinto año de secundaria (ver Figura 22).

- **Álgebra**
- Método gráfico y método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Inecuaciones lineales de dos incógnitas.
- Introducción a la programación lineal.
- Ecuaciones trigonométricas.

Figura 22. Conocimientos esperados de Álgebra en 5° secundaria

Fuente: Adaptado de Perú (2009, p. 337)

A continuación presentamos los tipos de tareas T_i y las tareas t_{ij} que lo conforman. Para cada tarea t_{ij} mostramos las páginas donde se encuentran los problemas que engloban dicha tarea, además de la respectiva técnica o técnicas que se presentan en la colección de libros didácticos, así como la tecnología que justifica las técnicas. Respecto a la teoría, la justificación de la tecnología, la encontramos en el cuerpo conmutativo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y el anillo conmutativo de polinomios $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$.

Al final de la presentación de cada uno de los tipos de tarea, las tareas, las técnicas y las tecnologías, realizamos la evaluación de las tareas identificadas, así como la evaluación de las técnicas y tecnologías, basándonos en los criterios propuestos por Chevallard (1999)

T_1: Representar una desigualdad

El tipo de tarea T_1 comprende las tareas en las cuales se debe realizar transformaciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa, a situaciones con condiciones desigualdad, así como la representación mediante notación de intervalo y/o en la recta numérica de una desigualdad (conjunto solución de una inecuación de una incógnita).

Identificamos 5 tareas del tipo T_1 presentes en los libros didácticos analizados, tanto en los textos escolares como en los cuadernos de trabajo. Detallamos a continuación las 5 tareas identificadas, así como la caracterización de sus respectivas técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t_{11}: Representar una desigualdad usando los signos de desigualdad $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, a partir del lenguaje natural

Tabla 4. *Problemas que comprenden la tarea t_{11}*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
1° Sec.	Pág. 92: ejemplo; pág. 93: ejemplo; pág. 94: tabla 36.1 (4 ejemplos). Problema propuesto: pág. 90.	Ficha 42 (***El tiempo de descanso***): problema 4 (propongo una expresión matemática) de la pág. 198 y pág. 199. Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) ítem 1 de problema 1 (crecimiento minero) de la pág. 200, ítem d del problema 2 (apoyo minero) en la pág. 201, pregunta 3 de finalicemos en la pág. 203. Ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem i de problema 2 (Cumplir con la meta) en la pág. 206, problema 3a de resuelve situaciones significativas en la pág. 207. Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem 1 de problema 1 (Fotocopias) en la pág. 208. Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem e, ítem I de problema 2 (Calidad asegurada) en la pág. 209-210; ítem a de problema 3 (¡Cuidado! Máquina trabajando) en la pág. 210.
2° Sec.	Pág. 84: 2 ejemplos; pág. 86: ejemplo. Problema propuesto: pág. 82 (2 problemas)	Ficha 33 (***Plataformas petrolíferas***) en la pág. 156: ítem 2 de Iniciemos; pág. 157: problema 1 (Planteo problemas de acuerdo con el contexto) ítems 1, 2 y 3; pág. 158: problema 4 (Propongo una expresión matemática) ítems 1 y 2; pág. 159: pregunta 1 de Finalicemos (4 ejercicios). Ficha 34 (***Perforación de pozos***) en la pág. 160: problema 1 (Precio máximo) ítem 1 y 2; Problema 2 (Perforación de un pozo) ítems 2, 3, 4, 5 y 6. Evaluación (***Producción de petróleo***) en la pág. 188: pregunta 1.

3° Sec.	Pág. 18: 2 ejemplos en *cómo hacer*; pág. 19: 2 ejemplo en *cómo hacer* Problema propuesto: pág. 19.	Fichas: ***Bajas temperaturas*** en la pregunta 8 de la pág. 15; ***Presupuesto familiar*** en la pregunta 6 de la pág. 25; ***Chat entre amigos*** en la pregunta 8 y 9 de la pág. 31; ***Pasco, una región de altura*** en la pregunta 7 de la pág. 32; ***Un sinfín de colores*** en la pregunta 2 de la pág. 52.
4° Sec.	Pág. 20: ejemplo en *cómo hacer*.	Fichas: ***Huertos ecológicos*** en la pregunta 6 de la pág. 182.
5° Sec.		Fichas: ***Cosecha de durazno*** en la pregunta 8 de la pág. 23.

Mostramos a continuación un ejemplo representativo de la tarea, identificada en el TE1.

La masa corporal de Juan es más de 35 kilogramos, pero menos de 50 kilogramos.

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 94)

Técnica (τ_{111}):

Paso 1: Asignar mediante letras la cantidad o cantidades desconocidas.

Sea m: masa corporal de Juan.

Paso 2: Modelar la expresión algebraica a partir del texto.

En el ejemplo la expresión es m.

Paso 3: Identificar la(s) palabra(s) cuyo significado corresponde(n) al signo o signos a usar ($<, >, \leq$ o $\geq$), así como la cota superior y/o cota inferior de la o las condiciones de desigualdad.

El frase "es más de 35" se expresa como $35 < m$ y la frase "menos de 50" se expresa como $m < 50$ entonces la desigualdad se expresa como $35 < m < 50$.

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

t_{12}: ***Representar una desigualdad en lenguaje natural, a partir de una expresión dada mediante los signos de desigualdad*** $<,\ >,\ \leq,\ \geq$

Tabla 5. *Problemas que comprenden la tarea* t_{12}

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
1° Sec.	Pág. 92: ejemplo.	Ficha 42 (***El tiempo de descanso***): problema 2 (3 ejercicios) (propongo una expresión matemática) de la pág. 199; ítem d del problema 3 (¡Cuidado! Máquina trabajando) en la pág. 211.
2° Sec.		Ficha 33 (***Plataformas petrolíferas***) en la pág. 158: problema 3 (Experimento para resolver el problema); pág. 159: pregunta 2 de Finalicemos (3 ejercicios). Ficha 34 (***Perforación de pozos***) en la pág. 160: problema 1 (Precio máximo) ítem 4.
3° Sec.	Pág. 78: pregunta 1 de *cómo hacer*.	Fichas: ***¿Quién tiene razón?*** en la pregunta 10 de la pág. 49; ***El más rápido*** preguntas 4 y 5 de la pág. 55
5° Sec.	Pág. 17: ejemplo.	Ficha: ***Cosecha de duraznos*** en la pregunta 8 de la pág. 23.

Un ejemplo representativo de la tarea se encuentra en la pág. 199 del CT1.

Escribe como proposición la siguiente expresión:

$x \leq 30$. *Supongamos que* x *representa la edad de tu maestro.*

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 199)

Técnica (τ_{121}):

Paso 1: Dado el o los signos de desigualdad ($<,>,\leq$ o $\geq$) en la expresión, establecer su significado en el lenguaje natural.

Paso 2: De acuerdo al contexto establecido en la situación establecer el significado de la expresión en lenguaje natural.

Tecnología (θ):

θ_1 **:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

***t_{13}*: Representar una desigualdad mediante notación de intervalo y/o en la recta numérica, a partir de una expresión dada mediante los signos de desigualdad** $<, >, \leq, \geq$

Tabla 6. *Problemas que comprenden la tarea t_{13}*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
1° Sec.		Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) ítem f, g del problema 2 (apoyo minero) en la pág. 201. Ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem j de problema 2 (Cumplir con la meta) en la pág. 206, problema 3a de resuelve situaciones significativas en la pág. 207.
2° Sec.	Pág. 85: ejemplo 3 (3 ejercicios).	Ficha 34 (***Perforación de pozos***) en la pág. 160: problema 1 (Precio máximo) ítem 4 y 5; pág. 162: Problema 2 (Perforación de un pozo) ítem 8.
3° Sec.	Pág. 19: ejemplo en *cómo hacer*; pág. 78: pregunta 2 de *cómo hacer*. Problema propuesto: pág. 19.	Fichas: ***Un lugar para estacionar*** en la pregunta 9 de la pág. 51.
4° Sec.		Fichas: ***Fertilizante orgánico*** en la pregunta 8 de la pág. 185; ***Campaña solidaria*** en la pregunta 6 (2 ejercicios) y 8 de la pág. 187.
5° Sec.	Pág. 17: ejemplo	

En la Figura 23, tenemos un ejemplo representativo de la tarea.

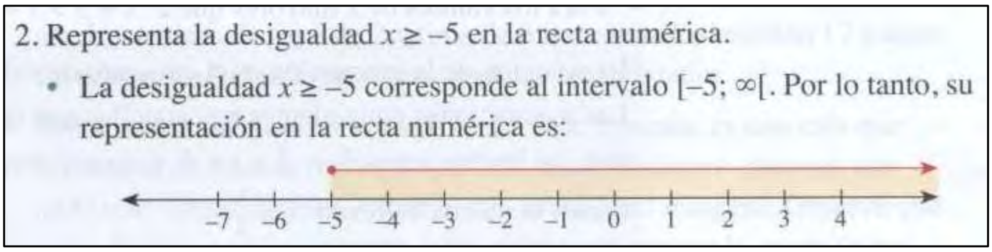


Figura 23. Representación de una inecuación mediante un intervalo

Fuente: Perú d (2016, p. 78)

Técnica (τ_{131}):

Paso 1: Identificar las forma de la desigualdad ($a \leq x \leq b,\ a < x < b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b,\ x > a,\ x \leq b$) que se presente, con su respectiva representación como intervalo y/o en la recta numérica.

Tecnología (θ):

θ_2 **:** Representación del conjunto solución de una inecuación

t_{14}*: *Representar una desigualdad mediante notación de intervalo o usando los signos de desigualdad $<,\ >,\ \leq,\ \geq$; a partir de su representación en la recta numérica

Esta tarea se encuentra en el CT1, Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) ítem a (6 ejercicios) del problema 2, pág. 201. Además, en la pág. 85 del TE2, como ejemplo 1 (4 ejercicios), ejemplo 2 (4 ejercicios), y en el CT3 en la actividad ***El más rápido*** ejercicios (2) en la pág. 54 y pregunta 4 en la pág. 55.

Un ejemplo representativo de dicha tarea se puede observar en la Figura 24.

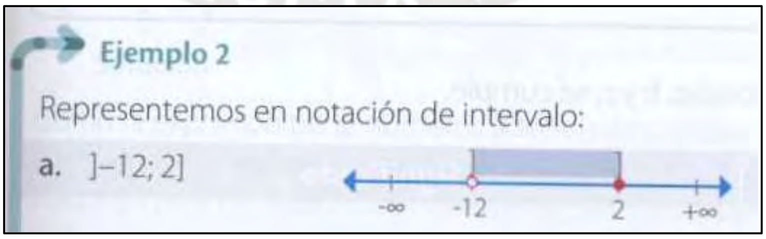


Figura 24. Representación de un intervalo a partir de su representación en la recta

Fuente: Perú b (2016, p. 85)

Técnica (τ_{141}):

Paso 1: Identificar en la representación en la recta numérica, su respectiva representación como intervalo y/o la forma de la desigualdad $a \leq x \leq b,\ a < x < b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b,\ x > a,\ x \leq b$.

Tecnología (θ):

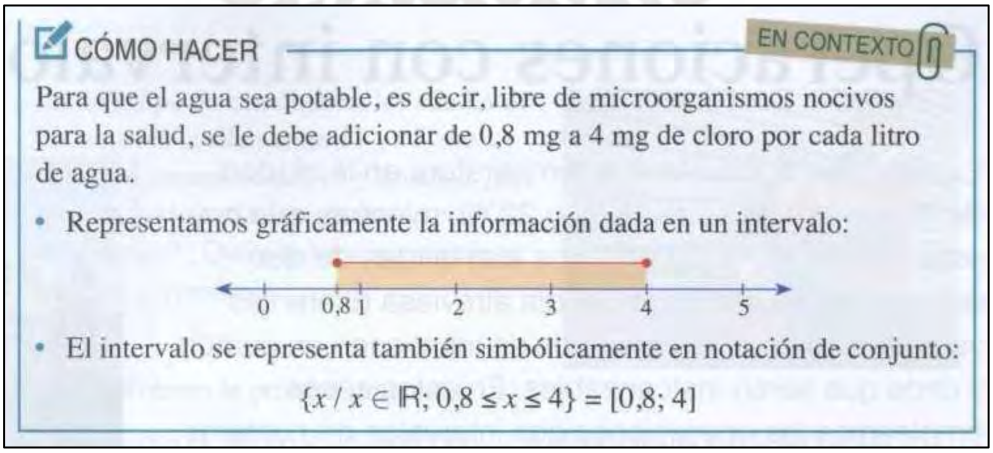
θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

t_{15}: Representar una desigualdad mediante notación de intervalo y/o en la recta numérica, a partir del lenguaje natural

Tabla 7. *Problemas que comprenden la tarea t_{15}*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
3° Sec.	Pág. 18: 2 ejemplos en *cómo hacer*; pág. 19: 1 ejemplo en *cómo hacer*; pág. 20: 1 ejemplo en *cómo hacer*.	Ficha: ***Etapas de la vida humana*** en la pregunta 6 y 7 de la pág. 13; ***Chat entre amigos*** en la pregunta 7 (4 ejercicios) de la pág. 31; ***Pasco, una región de altura*** en la pregunta 5, 7 de la pág. 32 y la pregunta 9, 10 de la pág. 33; ***Buscamos la operación*** en la pregunta 2 de *coevaluación* en la pág. 37.
4° Sec.	Pág. 21: 1 ejemplo en *cómo hacer*; pág. 20: 1 ejemplo en *cómo hacer*	Ficha: ***Fertilizante orgánico*** en la pregunta 5 de la pág. 185.

Un ejemplo representativo de dicha tarea, lo podemos observar en la Figura 25.


CÓMO HACER

EN CONTEXTO

Para que el agua sea potable, es decir, libre de microorganismos nocivos para la salud, se le debe adicionar de 0,8 mg a 4 mg de cloro por cada litro de agua.

- Representamos gráficamente la información dada en un intervalo:

- El intervalo se representa también simbólicamente en notación de conjunto:

$\{x / x \in \mathbb{R}; 0,8 \leq x \leq 4\} = [0,8; 4]$

Figura 25. Representación en la recta numérica a partir de un texto

Fuente: Perú d (2016, p. 20)

Técnica (τ_{151}):

Paso 1: Identificar en el contexto del enunciado la cota inferior y/o superior, así como las palabras cuyo significado corresponda a alguno de los símbolos $<$, $\leq$. Realizar el paso 2.1 y/o el paso 2.2.

Paso 2.1: Escribir la cota inferior y/o superior de menor a mayor e identificar el símbolo cerrado o abierto a usar en las cotas, según el signo de desigualdad identificado.

Paso 2.2: Ubicar en la recta real la cota inferior y/o superior, colocando un circulo en cada uno de ellos, pintar el circulo en caso que en la cota se identifique el símbolo $\leq$.

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_1

Las tareas que conforman el tipo de tarea T_1 son:

***t_{11}*:** Representar una desigualdad usando los signos de desigualdad $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, a partir del lenguaje natural

t_{12}: Representar una desigualdad en lenguaje natural, a partir de una expresión dada mediante los signos de desigualdad $<$, $>$, $\leq$, $\geq$

t_{13}: Representar una desigualdad mediante notación de intervalo y/o en la recta numérica, a partir de una expresión dada mediante los signos de desigualdad $<$, $>$, $\leq$, $\geq$

t_{14}: Representar una desigualdad mediante notación de intervalo o usando los signos de desigualdad $<$, $>$, $\leq$, $\geq$; a partir de su representación en la recta numérica

t_{15}: Representar una desigualdad mediante notación de intervalo y/o en la recta numérica, a partir del lenguaje natural

La tarea t_{11} (45) es la de mayor frecuencia en la colección de libros didácticos analizados, además podemos observar una distribución proporcionada en la cantidad de problemas que comprenden las tareas t_{12} (16), t_{13} (18), t_{14} (17) y t_{15} (18).

La tarea t_{11} la identificamos en los libros didácticos de 1°, 2°, 3° y 4° de educación secundaria, pues en las fichas de los cuadernos de trabajo se plantean situaciones en contexto, y encontramos preguntas en las que se pide representar mediante una inecuación una situación dada en un texto, así que cumple el criterio de pertinencia la tarea t_{11}. Por citar un ejemplo, mostramos el enunciado de un problema del CT2, donde se pide determinar la inecuación que modela la situación planteada con una condición de desigualdad.

Carlos necesita comprar una escalera para armar la base de una plataforma. Si tres veces el valor de una escalera disminuida en S/. 150 no puede ser mas de S/1500, ¿Cuál es el precio máximo que debe tener la escalera?

- *¿Con qué letra representamos el valor de la escalera?*
- *¿Qué inecuación modela la inecuación?*

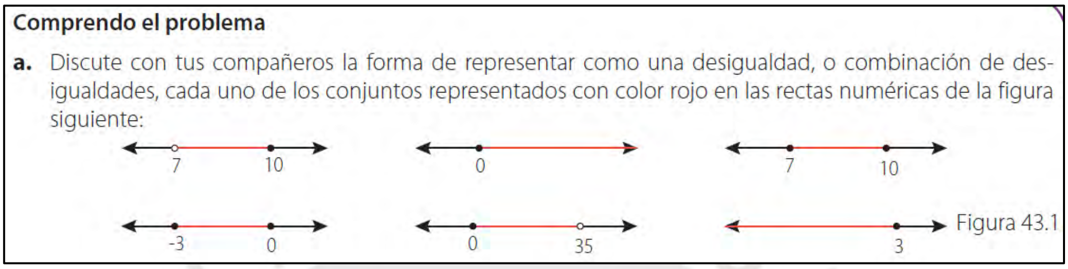
Fuente: Adaptado de Perú c (2016, p. 160)

Respecto a la tarea t_{12}, la identificamos en los libros didácticos de 1°, 2°, 3° y 5° de educación secundaria, mientras que la tarea t_{13} la identificamos en los libros didácticos de los 5 años de educación secundaria. La pertinencia de ambas tareas se fundamenta en el hecho de representar el conjunto solución de una inecuación, tanto en el lenguaje natural, o mediante la notación de intervalo y su representación en la recta numérica, mostramos un ejemplo de dicha tarea, donde se pide representar el conjunto solución de una inecuación, tanto en lenguaje natural como en notación de intervalo y además su representación en la recta numérica.

- *¿Cuál es el conjunto solución? ¿Por qué?*
- *Representa gráficamente el conjunto solución.*

Fuente: Adaptado de Perú c (2016, p. 160)

Mientras que los problemas que corresponden a la tarea t_{14} los identificamos en el CT1, el TE2 y el CT3. Los problemas que comprenden la tarea t_{14} son planteados dentro de situaciones en un contexto intramatemático (ver Figura 26). Pero, como ya se señaló en la descripción de los textos escolares, en el TE1 no se presenta la técnica ni la tecnología que permita realizar la representación en la recta numérica de una desigualdad, aun así, en el CT1 se propone un problema que involucra a la representación en la recta numérica de una desigualdad. La técnica y la tecnología para realizar la representación en la recta numérica de una desigualdad, la identificamos recién en el TE2, de allí que la presencia de la tarea t_{14} no es pertinente en los libros didácticos de 1° de educación secundaria.


Comprendo el problema

a. Discute con tus compañeros la forma de representar como una desigualdad, o combinación de desigualdades, cada uno de los conjuntos representados con color rojo en las rectas numéricas de la figura siguiente:

Figura 26. Ejemplo de la tarea t_{14}

Fuente: Perú c (2015, p. 201)

Finalmente, los problemas que corresponden a la tarea t_{15} los identificamos en los textos que corresponden al 3° y 4° de educación secundaria, en los cuales de manera directa se pide representar en la recta numérica o mediante notación de intervalo, una situación con condiciones de desigualdad, tal como se puede ver en el enunciado que mostramos a continuación.

> ***9.*** *Si el intervalo fuer desde -11°C, pero menor de 10°C, ¿cómo lo representarías en la recta numérica? ¿Qué tipo de intervalo sería?*

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 33)

La razón de ser de la tarea se fundamente en las tareas en las cuales se realizan operaciones con intervalos, tal como se señala en el CT3 (ver Figura 27), dichas tareas no forman parte de nuestro análisis.

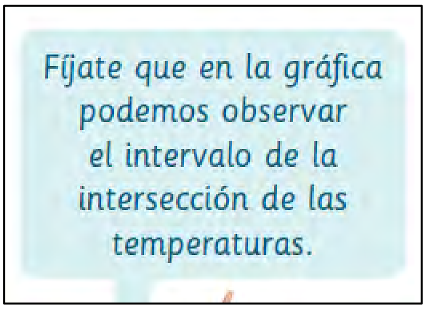


Figura 27. Razón de ser de la tarea t_{15}

Fuente: Perú e (2016, p. 33)

En la tabla que mostramos a continuación se observa la frecuencia de las tareas que corresponden al tipo de tareas T_1 en la colección de libros didácticos.

Tabla 8. *Cantidad de problemas de tareas del tipo T_1*

Nivel		t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	**Tareas Resueltas**	**Tareas Propuestas**	**Total**
1° Sec.	**TE1**	7	1	0	0	0	8	0	8
	CT1	9	4	4	6	0	0	23	23
2° Sec.	**TE2**	5	0	3	8	0	14	2	16
	CT2	10	5	2	0	0	0	17	17
3° Sec.	**TE3**	5	1	3	0	4	11	2	13
	CT3	6	3	1	3	11	0	24	24
4° Sec.	**TE4**	1	0	0	0	2	3	0	3
	CT4	1	0	4	0	1	0	6	6
5° Sec.	**TE5**	0	1	1	0	0	2	0	2
	CT5	1	1	0	0	0	0	2	2
Total		45	16	18	17	18	38	76	114

Evaluación de las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas del tipo T_1 y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

Respecto a la identificación de las técnicas para hacer las tareas del tipo $\boldsymbol{T_1}$ en los libros didácticos, podemos afirmar en general que para cada una de las tareas que la componen, identificamos la técnica que describe el modo de hacer la tarea, salvo el caso de la tarea $\boldsymbol{t_{14}}$, presente en el CT1, pero cuya técnica recién es identificada en el TE2.

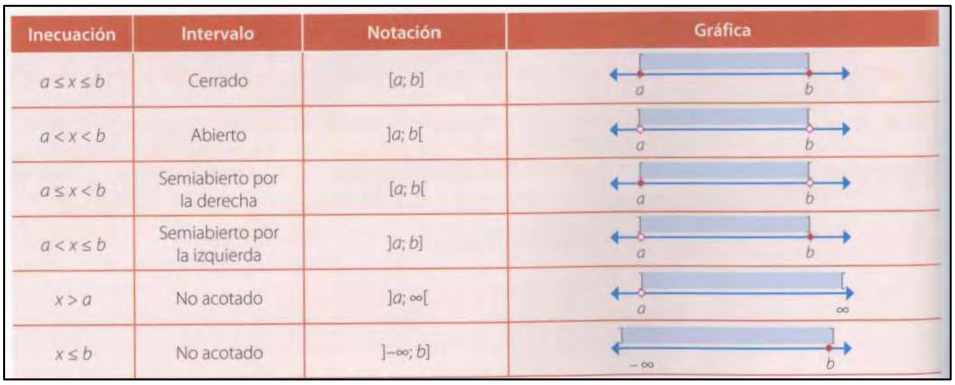
El alcance de las técnicas identificadas es satisfactorio, puesto que permiten hacer las tareas que conforman el tipo $\boldsymbol{T_1}$, más aun, las técnicas τ_{111}, τ_{121}, τ_{131} y τ_{141} se integran a las técnicas de los tipos de tareas que conforman el género de tareas *resolver*, que describiremos más adelante, de allí que su razón de ser y pertinencia está justificada. Mientras que la razón de ser y pertinencia de la técnica τ_{151} está ligada más a las tareas referentes a las operaciones con intervalos.

Respecto a la tecnología, la justificación de la técnica, identificamos su presencia en la colección de libros didácticos analizados. Así por ejemplo, en el TE1 encontramos la tecnología que justifica las técnicas τ_{111}, τ_{121} y τ_{141}, también identificamos la tecnología que justifica las técnicas τ_{131}, τ_{141} y τ_{151}. Ambas tecnologías se pueden observar en la Figura 28 y Figura 29, respectivamente.

Desigualdades				
Palabras	Es menor que	Es mayor que	• Es menor que o igual a • No es mayor que • Es a lo más	• Es mayor que o igual a • No es menor que • Es por lo menos
Signos	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
Ejemplo	$3 < 4$	$4 > 3$	$3 \leq 3 + x$	$4 \geq 3 + 1 - x$

Figura 28. Tecnología de las técnicas τ_{111}, τ_{121} y τ_{141} identificada en el TE1

Fuente: Perú b (2015, p. 93)



Inecuación	Intervalo	Notación	Gráfica
$a \leq x \leq b$	Cerrado	$[a; b]$	a b
$a < x < b$	Abierto	$]a; b[$	a b
$a \leq x < b$	Semiabierto por la derecha	$[a; b[$	a b
$a < x \leq b$	Semiabierto por la izquierda	$]a; b]$	a b
$x > a$	No acotado	$]a; \infty[$	a ∞
$x \leq b$	No acotado	$]-\infty; b]$	$-\infty$ b

Figura 29. Tecnología τ_{131} y τ_{141} identificada en el TE2

Fuente: Perú a (2016, p. 84)

***T*₂: Comprobar la solución o soluciones de una inecuación lineal**

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ comprende los problemas que consisten en comprobar si un elemento es solución de una inecuación lineal, el elemento al cual nos referimos, puede ser un par ordenado, para el caso de una inecuación lineal con dos incógnitas, o puede ser un número, en el caso de que se trate de una inecuación lineal con una incógnita.

A continuación mostramos la tarea, así como la caracterización de sus técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t_{21}: *Comprobar si un elemento pertenece al conjunto solución de una inecuación lineal*

Tabla 9. *Problemas que comprenden la tarea t_{21}*

Año	Texto escolar	Cuaderno de trabajo
1° Sec.		Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) ítem 2 del problema 1 (crecimiento minero) de la pág. 200, problema 1 (Resuelve situaciones significativas) de la pág. 203. Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem 3 de problema 1 (Fotocopias) en la pág. 208, ítem h del problema 2 (Calidad

		asegurada) en la pág. 210, pregunta 2 (4 ejercicios) de resuelve situaciones significativas y metacognición en la pág. 211.
2° Sec.	Pág. 85: ejemplo 1 (4 ejercicios); pág. 91: problema *cercando un terreno de dimensión máxima.*	Ficha 33 (***Plataformas petrolíferas***) problema 1 (Planteo problemas de acuerdo con el contexto) ítem 4 en la pág. 157, ítem 3 y 4 de propongo una expresión matemática de la pág. 158, ítem 1 de valido la solución del problema en la pág. 159. Ficha 34 (***Perforación de pozos***) ítem 1 y 2 de transfiero lo aprendido en la pág. 162, problema de *finalicemos* en la pág. 163. Problema 2 de ***Evaluación*** en la pág. 188.
3° Sec.	Pág. 19: ejemplo en *cómo hacer*; pág. 77: ejemplo; pág. 80: *comprobar*.	Fichas: ***Bajas temperaturas*** pregunta 10 de la pág. 15; ***Pasco, una región de altura*** pregunta 8 de la pág. 32; ***Promedio de notas*** en la pregunta 9 de la pág. 43; ***Cultivos peruanos*** pregunta 1 de *heteroevaluación* en la pg. 187; ***Un lugar para estacionar*** pregunta 7 en la pág. 51; ***Un sinfín de colores*** pregunta 6 en la pág. 53.
4° Sec.		Fichas: ***Agua para la pecera*** pregunta 8 en la pág. 181; ***Huertos ecológicos*** pregunta 9 en la pág. 183; ***Fertilizante orgánico*** pregunta 10 en la pág. 185; ***Campaña solidaria*** pregunta 10 en la pág. 187

En la Figura 30, se muestra un ejemplo representativo de la tarea.

COMPROBACIÓN

Para $x = 18$ en las dos condiciones:

$$32x > 400$$
$$32(18) > 400$$
$$576 > 400$$

$$22x < 400$$
$$22(18) < 400$$
$$396 < 400$$

Figura 30. Comprobación en las inecuaciones del TE3.
Fuente: Perú d (2016, p. 80)

Técnica (τ_{211}):

Paso 1: Asignar un valor a la incógnita o incógnitas.

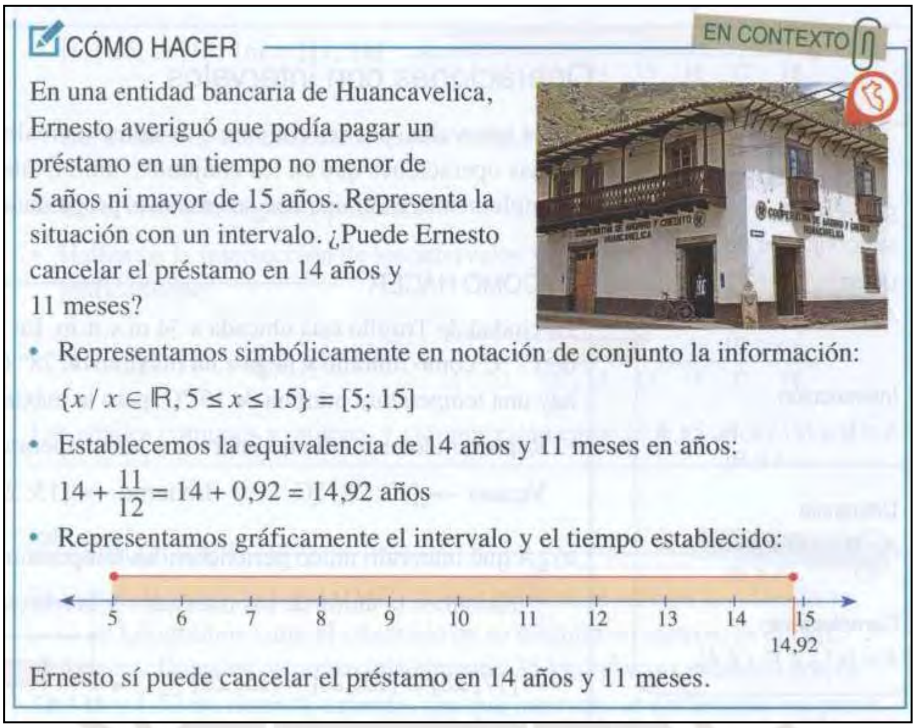
Paso 2: Reemplazar dicho valor o valores y realizar las operaciones respectivas, puede usar la representación tabular.

Paso 3: De acuerdo al signo de la desigualdad, determinar el valor de verdad de la desigualdad.

Tecnología (θ):

θ_3: Definición de conjunto solución de una inecuación

Ahora bien, en el TE3 identificamos otra técnica que permite realizar la tarea de comprobar si un número pertenece al conjunto solución de la inecuación, pero esta técnica solo se puede aplicar para comprobar las soluciones de inecuaciones lineales con una incógnita, de allí que el alcance de dicha técnica es limitado en comparación a la técnica τ_{211}, puesto que no se puede aplicar a inecuaciones lineales con dos incógnitas. En la Figura 31 se muestra un ejemplo resuelto de la tarea t_{21}, donde se usa la técnica que denotamos con τ_{212}.



CÓMO HACER

EN CONTEXTO

En una entidad bancaria de Huancavelica, Ernesto averiguó que podía pagar un préstamo en un tiempo no menor de 5 años ni mayor de 15 años. Representa la situación con un intervalo. ¿Puede Ernesto cancelar el préstamo en 14 años y 11 meses?

- Representamos simbólicamente en notación de conjunto la información:
  $\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, 5 \leq x \leq 15\} = [5; 15]$
- Establecemos la equivalencia de 14 años y 11 meses en años:
  $14 + \frac{11}{12} = 14 + 0{,}92 = 14{,}92$ años
- Representamos gráficamente el intervalo y el tiempo establecido:

Ernesto sí puede cancelar el préstamo en 14 años y 11 meses.

Figura 31. Técnica τ_{212} identificada en el TE3

Fuente: Perú d (2016, p. 19)

Mostramos a continuación los pasos que comprende la técnica.

Técnica (τ_{212}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{131} para representar en la recta numérica la desigualdad.

Paso 2: Ubicar en la recta numérica el valor a comprobar.

Paso 3: Verificar si el valor ubicado en la recta numérica se encuentra dentro de la representación del conjunto solución.

Tecnología (θ):

θ_4: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_4: Definición de intervalo.

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_2, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

Tras la revisión de la colección de libros didácticos, identificamos problemas propuestos de la tarea t_{21} en el CT1, aunque no hay presencia de un problema resuelto en el CT1 de dicha tarea, se identifica un esbozo de la técnica para hacer la tarea t_{21}, tal como se puede observar en la Figura 32, ya que a partir de las preguntas que se plantean se puede caracterizar una técnica, pues primero se pide evaluar ciertos valores en cada una de las incógnitas y completar una tabla, para luego de ello considerar los pares ordenados que satisfagan la condición de desigualdad.

Diseño una estrategia

g. Completa la siguiente tabla:

Máquina *X*		Máquina *Y*	
Piezas mal ubicadas	Costo de pérdida	Piezas mal ubicadas	Costo de pérdida
0		0	
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
6		6	

Tabla 45.1

h. Plantea las parejas de piezas mal ubicadas por hora que no permiten exceder el costo de pérdida.

X				
Y				

Tabla 45.2

Figura 32. Técnica para validar soluciones de una inecuación con dos incógnitas

Fuente: Perú c (2015, p. 210)

Problemas resueltos de la tarea t_{21} encontramos en el TE2 y el TE3, pero con inecuaciones lineales con una incógnita, mientras que los problemas propuestos de dicha tarea, con inecuaciones lineales con una incógnita, los encontramos en los cuadernos de trabajo de los cuatro primeros años de educación secundaria.

En referencia al alcance de las técnicas, la técnica τ_{211} tiene mayor alcance que la técnica τ_{212}, puesto que la técnica τ_{211} permite hacer todas las tareas del tipo T_2, mientras que la técnica τ_{212} solo se puede aplicar a inecuaciones lineales con una incógnita.

En la tabla 10 que mostramos a continuación presentamos la frecuencia con la cual aparecen las tareas que corresponden al tipo de tareas T_2 en la colección de libros didácticos analizados. Se puede observar que solo en los libros didácticos que corresponden al 5° de secundaria no se identifica la presencia de la tarea t_{21}, pues solo se identificó un problema resuelto de una inecuación lineal en el TE5.

Tabla 10. *Cantidad de problemas resueltos y propuestos de tareas del tipo* T_2

Nivel		t_{21}	Problemas resueltos	Problemas propuestos	Total
1° Sec.	TE1	0	0	0	0
	CT1	9	0	9	9
2° Sec.	TE2	5	5	0	5
	CT2	8	0	8	8
3° Sec.	TE3	3	3	0	3
	CT3	6	0	6	6
4° Sec.	TE4	0	0	0	0
	CT4	4	0	4	4
5° Sec.	TE5	0	0	0	0
	CT5	0	0	0	0
Total		35	8	27	35

Respecto a la tecnología que permite justificar las técnicas identificadas, en el caso de la tecnología de la técnica τ_{211}, se puede identificar un discurso sobre la técnica en el TE1, aunque identificamos un error en dicho discurso, ya que se utiliza el término igualdad, como se puede ver en la Figura 33.

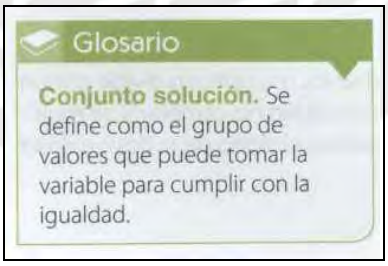


Figura 33. Discurso que justifica la técnica τ_{211}

Fuente: Perú b (2015, p. 94)

Mientras que la tecnologia de la técnica τ_{212} la identificamos en la definicion que se da en el TE2 de intervalo, como una representacion del conjunto solucion de una inecuacion (ver Figura 29).

T$_3$: Resolver una inecuación lineal con una incógnita

El tipo de tarea ***T***$_3$ comprende tareas en las cuales se pide resolver una inecuación lineal con una incógnita, 6 tareas comprenden el tipo de tarea. Una inecuación lineal con una incógnita dada como expresión algebraica, como es el caso de las tareas ***t***$_{31}$, ***t***$_{33}$ y ***t***$_{35}$, o una inecuación lineal con una incógnita obtenida a partir de un texto, es decir que primero es necesario realizar una transformación del lenguaje natural al algebraico, como es el caso de las tareas ***t***$_{32}$, ***t***$_{34}$ y ***t***$_{36}$.

En la reconstrucción de la praxeología matemática consideramos las inecuaciones que se presentan en la forma simplificada $ax+b<c$ (incluidas sus variantes respecto a los signos de desigualdad). Una característica de la resolución de ese tipo de inecuaciones es que se pueden resolver mediante operaciones aritméticas, es decir se puede hacer uso del principio de transposición de términos en los números reales para su resolución, pero teniendo en cuenta el signo del coeficiente a, de allí que se ha considerado el caso donde $a>0$ en las tareas ***t***$_{31}$ y ***t***$_{32}$, y el caso donde $a<0$ en las tareas ***t***$_{33}$ y ***t***$_{34}$.

Las tareas ***t***$_{33}$ y ***t***$_{34}$, según Tsamir y Bazzini (2001, 2002, 2004), son aquellas en las que los estudiantes tienen mayor dificultad, pues los estudiantes no toman en cuenta el signo del coeficiente lineal de una inecuación al realizar las transformaciones algebraicas en el tratamiento con inecuaciones.

Por último, las tareas ***t***$_{35}$ y ***t***$_{36}$ contemplan los problemas donde las inecuaciones lineales no se dan en la forma simplificada, es decir, las inecuaciones son del tipo $P(x)<c$ o $P(x)<Q(x)$ (incluidas sus variantes respecto a los signos de desigualdad), donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones polinómicas de una variable, las cuales mediante reglas de cálculo algebraico se pueden reducir a la forma $ax+b$, con $a \neq 0$.

A continuación mostramos las 6 tareas que conforman el tipo de tareas ***T***$_3$, además de la ubicación de los problemas que conforman las tareas en la colección de libros didácticos, así como sus técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t$_{31}$: ***Resolver una inecuación lineal de la forma $\boldsymbol{ax+b<c, ax+b>c, ax+b\leq c}$, o $\boldsymbol{ax+b\geq c}$; con $\boldsymbol{a>0}$***

Esta tarea comprende los ejemplos 2a, 2b, 2c de la pág. 95 del TE1, además el ejemplo 1 en la sección en sección *cómo hacer* de la pág. 17 del TE5.

El problema resuelto 2b del TE1, es un ejemplo representativo de la tarea.

Resolvamos la inecuación $2g+5,8>-9$

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

Técnica (τ_{311}):

Paso 1: Restar b o sumar el opuesto de b a ambos lados de la desigualdad, o en todo caso transponer el término b al lado derecho de la desigualdad invirtiendo la operación.

$2g+5,8+(-5,8)>-9+(-5,8)$ o $2g>-9-5,8$ entonces $2g>-14,8$

Paso 2: Multiplicar por $1/a$ o transponer el coeficiente a al otro lado de la desigualdad invirtiendo la operación, como $a>0$ el signo de la desigualdad no cambia.

$\left(\frac{1}{2}\right)2g>\left(\frac{1}{2}\right)-14,8$ o $g>\frac{-14,8}{2}$ entonces $g>-7,4$

Tecnología (θ):

θ_5 : Principios de equivalencias de desigualdades

Principio aditivo:

Si se suma o resta a los miembros de una desigualdad una misma cantidad o expresión algebraica, se obtiene una desigualdad que resulta ser equivalente a la primera.

Principio multiplicativo:

Si se multiplica o divide a los miembros de una desigualdad por una misma cantidad positiva, se obtiene una desigualdad que resulta ser equivalente a la primera.

Si se multiplica o divide a los miembros de una desigualdad por una misma cantidad negativa, se obtiene una desigualdad que resulta ser equivalente a la primera con el signo de desigualdad en sentido contrario.

θ_6 **:** Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

Si a, b y c son números reales tales que $a+b<c$ entonces $a<c-b$.

Si a, b y c son números reales tales que $b>0$ y $ab<c$ entonces $a<c/b$.

Si a, b y c son números reales tales que $b<0$ y $ab<c$ entonces $a>c/b$.

En el TE2 encontramos una variación de la técnica τ_{311}, la cual denotaremos como τ_{311^*}, dicha técnica permite resolver las inecuaciones de la forma $ax+b<c$ (incluidos sus variantes respecto al signo de desigualdad), donde a, b y c son fracciones de la forma m/n con $n \neq 0,1$. Dicha técnica es identificada en la resolución de una inecuación en el ejemplo 2 de la pág. 87 del TE2, con el coeficiente $a<0$, apoyándonos de dicho ejemplo caracterizamos la técnica.

Técnica (τ_{311^*}):

Paso 1: Determinamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones y multiplicamos ambos lados de la desigualdad por dicho número.

Paso 2: Usar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y propiedades de multiplicación.

Paso 3: Realizar los pasos de la técnica τ_{311}.

Tecnología (θ):

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6**:** Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8**:** Definición de mínimo común múltiplo

Las técnicas presentadas nos permiten resolver la inecuación lineal hasta obtener una expresión equivalente de una de las formas: $x>m, x<m, x\leq m$ o $x\geq m$. Sin embargo, es necesario ampliar la técnica para poder representar el conjunto solución de la inecuación, como por ejemplo en el problema resuelto en el TE5.

Representa el conjunto de números reales x *que satisfaga la desigualdad* $2x+1<3$.

Fuente: Adaptado de Perú h (2016, p. 17)

De allí que, la técnica ampliada sería:

Técnica (τ_{312}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{311} o τ_{311^*}.

Se obtiene la expresión $x < 1$.

Paso 2: Usar la técnica τ_{121} y/o τ_{131}.

Representar el conjunto solución, tal como se observa en la Figura 34.

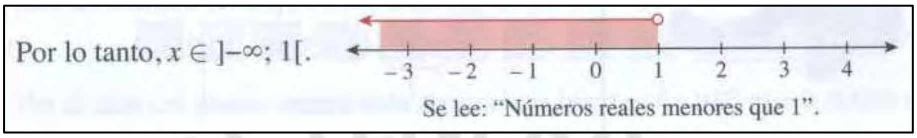


Figura 34. Ampliación de la técnica τ_{311} al resolver una inecuación en TE5

Fuente: Perú h (2016, p. 17)

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

t_{32}*: *Resolver una inecuación lineal de la forma* $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a > 0$, *obtenida a partir de un texto

Tabla 11. *Problemas que comprenden la tarea t_{32}*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
1° Sec.	Pág. 94: Ejemplo 1; pág.96: ejemplo 4.	Ficha 42 (***El tiempo de descanso***) problema 2d en finalicemos en la pág. 199. Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) *reflexiona* (problema 1) de *finalicemos* de la pág. 203. Ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem 1 de problema 1 (Taxi) en la pág. 204; ítem j y k de problema 2 (Cumplir

		con la meta) y ítem 1 de problema 3 (Alquiler de DVD) en la pág. 206; preguntas 2 y 3 de resuelve situaciones significativas de finalicemos en la pág. 207. Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem 2 de problema 1 (Fotocopias) en la pág. 208; ítem b y f de problema 2 (Calidad asegurada) en la pág. 209.
2° Sec.		Ficha 34 (***Perforación de pozos***) en la pág. 160: problema 1 (Precio máximo) ítems 1, 2 y 3; pág. 162: ítem 7; pág. 163: problema 3 (Importación de piezas) y problema de finalicemos.
3° Sec.		Fichas: ***Promedio de notas*** en la pregunta 7, 12 de la pág. 43; ***Un lugar para estacionar*** en la pregunta 13 de la pág. 51; ***El más rápido*** ejercicios (2) en la pág. 54.
4° Sec.		Actividad: ***Campaña solidaria*** en la pág. 187: *heteroevaluación* (problema 2).

Un ejemplo representativo de la tarea es el ejemplo 4 del TE1.

El sueldo mínimo en el Perú es S/.750. El papá de Carlos es obrero y percibe dicho monto después de los descuentos de ley. Sabiendo que cuando trabaja en sus horas extras percibe por hora 1/15 de dicho monto. ¿Cuántas horas debe trabajar para que su remuneración total sea mayor a S/. 1000?

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 96)

Técnica (τ_{321}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111}.

$x =$ Número de horas que debe trabajar el papá de Carlos

$$750 + \frac{1}{15} \cdot 750 \cdot x > 1000$$

Paso 2: Usar la técnica τ_{311} o τ_{311*}.

Se obtiene la expresión $x > 5$

Paso 3: Dar una respuesta según el contexto del problema, usar la técnica τ_{121}.

De acuerdo al contexto del problema, la respuesta es: deberá trabajar más de 5 horas.

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8: Definición de mínimo común múltiplo

***t_{33}*: *Resolver una inecuación lineal de la forma* $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a < 0$**

Esta tarea comprende el ejemplo 2d de la pág. 95 del TE1, además el ejemplo 1 y 2 de la pág. 87 del TE2.

El ejemplo 2d del TE1 es un ejemplo representativo de la tarea.

Resolvamos la inecuación $\left(\frac{-5}{3}\right)p > 20$

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

Técnica (τ_{331}):

Paso 1: Restar b o sumar el opuesto de b a ambos lados de la desigualdad, o en todo caso transponer el término b al lado derecho de la desigualdad invirtiendo la operación.

En el ejemplo 2d, el valor de b es igual a cero, $\left(-\frac{5}{3}\right)p > 20$.

Paso 2: Multiplicar por $1/a$ o transponer el coeficiente a al otro lado de la desigualdad invirtiendo la operación, como $a<0$ el signo de la desigualdad se invierte.

$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)p<20\left(-\frac{3}{5}\right)$, entonces $p<-12$.

Tecnología (θ):

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

Como ya se mencionó para la técnica de la tarea t_{31}, en el ejemplo 2 de la pág. 87 del TE2 identificamos una variación de la técnica τ_{331}, la cual denotaremos como τ_{331^*}, dicha técnica permite resolver las inecuaciones de la forma $ax+b<c$ (incluidos sus variantes respecto al signo de desigualdad), donde a, b y c son fracciones de la forma m/n con $n\neq 0,1$.

Técnica (τ_{331^*}):

Paso 1: Determinamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones y multiplicamos ambos lados de la desigualdad por dicho número.

Paso 2: Usar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y propiedades de multiplicación.

Paso 3: Realizar los pasos de la técnica τ_{331}.

Tecnología (θ):

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8: Definición de mínimo común múltiplo

Del mismo modo que la tarea t_{31}, para poder obtener la representación del conjunto solución de la inecuación es necesario realizar una ampliación de la técnica. En el ejemplo 1 del libro TE2 identificamos una ampliación de la técnica τ_{331}.

Resolvamos y escribamos el intervalo solución de la inecuación $-\frac{1}{2}x+3<5$

Fuente: Adaptado de Perú b (2016, p. 87)

Por lo tanto la técnica ampliada es:

Técnica (τ_{332}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{331} o τ_{331^*}.

Se obtiene la expresión $x>-4$.

Paso 2: Usar la técnica τ_{121} y/o τ_{131}.

Representar el conjunto solución, tal como se observa en la Figura 35.

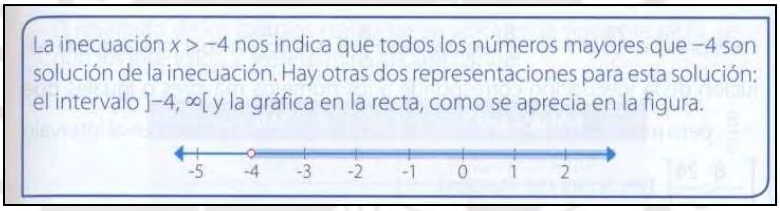


Figura 35. Ampliación de la técnica τ_{331} al resolver una inecuación en TE2

Fuente: Perú b (2016, p. 87)

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8: Definición de mínimo común múltiplo

t_{34}: *Resolver una inecuación lineal de la forma $ax+b<c, ax+b>c, ax+b\leq c$, o $ax+b\geq c$; con $a<0$, obtenida a partir de un texto*

Podemos encontrar esta tarea en la pág. 96 de TE1, ejemplo 3.

La hipotermia ocurre cuando la temperatura corporal de una persona desciende a menos de 35°C. Escribamos y resolvamos una desigualdad que describa la diferencia que puede haber entre la temperatura corporal de una persona con hipotermia y temperatura corporal normal de 37°C.

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 96)

Técnica (τ_{341}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111}.

$x =$ Número de grados °C, $37 - x > 35$

Paso 2: Usar la técnica τ_{331} o τ'_{331}.

Se obtiene la expresión $x > 2$.

Paso 3: Dar una respuesta según el contexto del problema, usar técnica τ_{121}.

De acuerdo al contexto del problema, la respuesta es: la diferencia es mayor a 2°C.

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8: Definición de mínimo común múltiplo

t_{35}*: *Resolver una inecuación lineal de la forma $P(x)<c$ o $P(x)<Q(x)$ (incluido sus variantes respecto a los signos de desigualdad)

Esta tarea engloba a la pregunta 3 de *cómo hacer* en la pág. 78 del TE3, además de las preguntas en las fichas: ***Cultivos peruanos***, pregunta 9 (5 ejercicios) de la pág. 46; ***Un lugar para estacionar*** en la pregunta 2 de *coevaluación* de la pág. 51; ***El más rápido*** ejercicios (4) en la pág. 54 y pregunta 3 y problema en *desafío* de la pág. 55. Así como de los problemas en la pág. 76: *ten en cuenta* (2 ejemplos), *cómo hacer* (ejemplo 1) del TE4.

La pregunta 3 de *cómo hacer* del TE3, es un ejemplo representativo de la tarea.

Resuelve la inecuación $x+3(x-5)<6-4(2-3x)$.

Fuente: Adaptado de Perú d (2016, p. 96)

Si las inecuaciones tienen denominadores igual a 1, como en el ejemplo mostrado, la técnica es:

Técnica (τ_{351}):

Paso 1: Si es de la forma $P(x)<c$, usar transformaciones algebraicas (propiedad distributiva y/o reducción de términos semejantes) para expresar $P(x)$ en la forma simplificada $ax+b$ o si es de la forma $P(x)<Q(x)$, usar transformaciones algebraicas (propiedad distributiva y/o reducción de términos semejantes) para expresar $P(x)$ y $Q(x)$ en la forma simplificada $ax+b$.

$x+3x-15<6-8+12x$

$4x-15<-2+12x$

Paso 2: Transponer los términos o usar los principios de equivalencia de desigualdades para reducir la inecuación a algunas de las formas: $ax<m, ax>m, ax\leq m$ o $ax\geq m$.

$4x-15+15-12x<-2+12x+15-12x$ o $4x-12x<-2+15$ entonces $-8x<13$

Paso 3: Usar la técnica τ_{312} o τ_{332}, según el signo del número a .

Como el signo del término lineal es negativo, usamos la técnica τ_{332}, así $x>-13/8$, y la representación del conjunto solución se observa en la Figura 36.

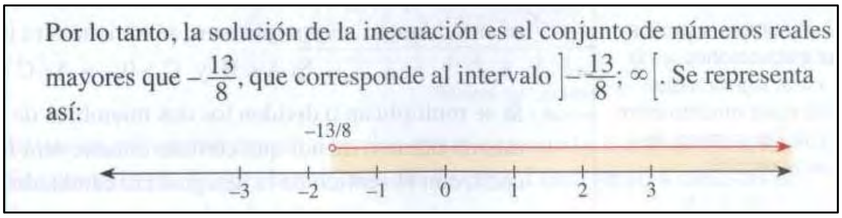

Por lo tanto, la solución de la inecuación es el conjunto de números reales mayores que $-\frac{13}{8}$, que corresponde al intervalo $\left]-\frac{13}{8}; \infty\right[$. Se representa así:

Figura 36. Solución de una inecuación en TE3

Fuente: Perú d (2016, p. 96)

Tecnología (θ):

θ_1 **:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2**:** Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6**:** Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_9**:** Propiedad distributiva de multiplicación en $\mathbb{R}$

Si a, b y k son números reales entonces $k\left(a+b\right)=k.a+k.b$.

θ_{10}**:** Adición y sustracción de polinomios

En el caso que las inecuaciones tengan denominadores enteros, como el ejemplo que mostramos a continuación.

$$\boxed{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}<1}$$

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 46)

La técnica se caracteriza del siguiente modo:

Técnica (τ_{351^*}):

Paso 1: Determinamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones y multiplicamos ambos lados de la desigualdad por dicho número.

Paso 2: Usar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y propiedades de multiplicación.

Paso 3: Realizar los pasos de la técnica τ_{351}.

Tecnología (θ):

θ_1 **:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2**:** Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6**:** Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8**:** Definición de mínimo común múltiplo

θ_9**:** Propiedad distributiva de multiplicación en $\mathbb{R}$

θ_{10}: Adición y sustracción de polinomios

En el CT3 identificamos un problema de la tarea t_{35} para la cual la técnica τ_{351} no es suficiente para su resolución, pero identificamos elementos tecnológicos que permiten caracterizar una técnica para su resolución.

$$\boxed{(x+3)^2-(x-3)^2 > x+1}$$

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 46)

Técnica (τ_{352}):

Paso 1: Desarrollar el o los binomios al cuadrado de las desigualdades.

Paso 2: Realizar los pasos de la técnica τ_{351}.

Tecnología (θ):

θ_1 : Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_{10}: Adición y sustracción de polinomios

θ_{11}: Desarrollo de un binomio al cuadrado

t_{36}: ***Resolver una inecuación lineal de la forma*** $P(x)<c$ ***o*** $P(x)<Q(x)$ ***(incluido sus variantes respecto a los signos de desigualdad), obtenida a partir de un texto***

La tarea comprende las preguntas planteadas en el CT1 en la ficha 42 (***El tiempo de descanso***) problema 5 (Valido la solución del problema) en la pág. 199, ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) pregunta 1 de resuelve situaciones significativas en la pág. 207.

En el CT3, en las fichas: ***Valor energético*** en las pregunta 7 y pregunta 1 de *autoevaluación* en la pág.41, ***Un sinfín de colores*** en la pregunta 4, 5 y pregunta 1 de *autoevaluación* de la pág. 53, ***El más rápido*** ejercicios (2) de la pág. 54.

Además en el CT4, las preguntas planteadas en las fichas: ***Fertilizante orgánico*** en la pregunta 7 y 9 de la pág. 185, pregunta en *heteroevaluación* de la pg. 185; ***Campaña solidaria*** en la pregunta 4 y 5 de la pág. 186.

Técnica (τ_{361}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111}.

Paso 2: Usar los pasos de las técnicas τ_{351} o τ_{351*} para obtener la expresión equivalente $x < m$ (o su respectivas variantes respecto al signo de la desigualdad)

Paso 3: Dar una respuesta según el contexto del problema, usar técnica τ_{121}.

Tecnología (θ):

θ_1 **:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6**:** Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_8**:** Definición de mínimo común múltiplo

θ_9**:** Propiedad distributiva de multiplicación en $\mathbb{R}$

θ_{10}**:** Adición y sustracción de polinomios

Evaluación de las tareas que conforman que conforman el tipo de tarea T_3

Las tareas que conforman el tipo de tarea T_3 son:

t_{31}**:** Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a > 0$

t_{32}: Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a > 0$, obtenida a partir de un texto

t_{33}: Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a < 0$

t_{34}: Resolver una inecuación lineal de la forma $ax + b < c, ax + b > c, ax + b \leq c$, o $ax + b \geq c$; con $a < 0$, obtenida a partir de un texto

t_{35}: Resolver una inecuación lineal de la forma $P(x) < c$ o $P(x) < Q(x)$ (incluido sus variantes respecto a los signos de desigualdad)

t_{36}: Resolver una inecuación lineal de la forma $P(x)<c$ o $P(x)<Q(x)$ (incluido sus variantes respecto a los signos de desigualdad), obtenida a partir de un texto

Luego de la revisión de la colección de libros didácticos, en el TE1 identificamos problemas resueltos de las tareas ***t_{31}***, ***t_{32}***, ***t_{33}*** y ***t_{34}***. En el TE2 solo identificamos 2 problemas resueltos de la tarea ***t_{33}***, mientras que en el TE3 identificamos un problema resuelto de la tarea ***t_{35}***, y en el TE4 encontramos 3 problemas resueltos de la tarea ***t_{35}***; en ninguno de los textos escolares identificamos un problema resuelto de la tarea ***t_{36}***.

Se puede observar en la tabla 12 que hay una mayor incidencia de las tareas del tipo ***T_3*** (7) en el TE1, y de ahí va disminuyendo la cantidad de problemas resueltos en los textos escolares posteriores. Al verificar la cantidad de problemas resueltos por tarea, identificamos mayor presencia de las tareas ***t_{31}*** (4) y ***t_{35}*** (4) en los textos escolares.

Tabla 12. *Cantidad de problemas resueltos de tareas del tipo T_3*

Nivel		***t_{31}***	***t_{32}***	***t_{33}***	***t_{34}***	***t_{35}***	***t_{36}***	**Total**
1° Sec.	**TE1**	3	2	1	1	0	0	7
2° Sec.	**TE2**	0	0	2	0	0	0	2
3° Sec.	**TE3**	0	0	0	0	1	0	1
4° Sec.	**TE4**	0	0	0	0	3	0	3
5° Sec.	**TE5**	1	0	0	0	0	0	1
Total		4	2	3	1	4	0	14

En lo que respecta a la presencia de problemas propuestos en los cuadernos de trabajo, podemos ver que a pesar de que en el TE1 se identificaron 4 de las tareas que conforman el tipo ***T_3***, en el CT1, que es el cuaderno de trabajo que le corresponde, los problemas propuestos que se identificaron son únicamente de las tareas ***t_{32}*** y ***t_{36}***, en el CT2 solo se identificaron problemas propuestos de la tarea ***t_{32}***, mientras que en el CT3 se identificaron problemas propuestos de las tareas ***t_{32}***, ***t_{35}*** y ***t_{36}***, finalmente, en el CT4 solo se identificaron problemas propuestos de las tareas ***t_{36}***. En el CT5 no se identificaron tareas del tipo ***T_3***.

Como se puede observar en la tabla 13, en ambos textos, el CT1 y CT3, se identifica la mayor frecuencia de problemas propuestos de las tareas del tipo $\boldsymbol{T_3}$. Al verificar la cantidad de problemas propuestos por tarea, se observa que las tareas $\boldsymbol{t_{32}}$, $\boldsymbol{t_{35}}$ y $\boldsymbol{t_{36}}$ son las de mayor frecuencia, en contraste con la ausencia de las tareas $\boldsymbol{t_{31}}$, $\boldsymbol{t_{33}}$ y $\boldsymbol{t_{34}}$.

Tabla 13. *Cantidad de problemas propuestos del tipo T_3*

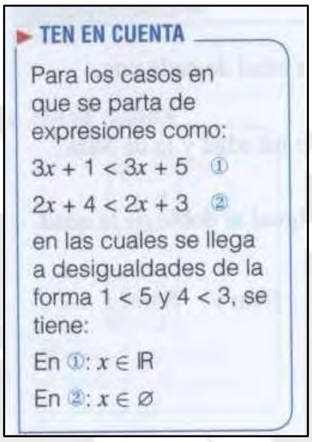
Nivel		t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}	t_{35}	t_{36}	Total
1° Sec.	**CT1**	0	11	0	0	0	2	13
2° Sec.	**CT2**	0	4	0	0	0	0	4
3° Sec.	**CT3**	0	5	0	0	12	6	23
4° Sec.	**CT4**	0	0	0	0	0	4	4
5° Sec.	**CT5**	0	0	0	0	0	0	0
Total		0	20	0	0	12	12	44

Como en las fichas de los cuadernos de trabajo se plantean situaciones en contexto, las tareas $\boldsymbol{t_{32}}$ y $\boldsymbol{t_{36}}$ son los de mayor frecuencia, puesto que las inecuaciones se obtienen a partir de un texto dado en un contexto intramatemático o extramatemático. Así mismo, verificamos que las inecuaciones dadas mediante expresiones algebraicas no son abordadas en los cuadernos de trabajo, una excepción es la tarea $\boldsymbol{t_{35}}$, puesto que en el CT3 se identificaron 10 problemas propuestos de dicha tarea, mostramos a continuación el contexto en el cual se plantea un problema de dicha tarea en el CT3.

> *Resuelve la inecuación, gráfica y escribe su conjunto solución. Describe tu procedimiento* $7(x-3)+4>25$

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 55)

Es importante señalar que en dos de los ejemplos resueltos del TE4 de la tarea $\boldsymbol{t_{35}}$, el conjunto solución de cada una de las inecuaciones son el conjunto vacío y el conjunto de números reales, respectivamente. Tsamir y Almog (1999, citado por Tsamir y Bazzini, 2001) reportan la dificultad que tienen los estudiantes al resolver inecuaciones con esa característica en su conjunto solución, sin embargo, tras la revisión de la colección de textos, solo se identificaron dos ejemplos con esa característica, tal como se observa en la Figura 37. Más aun, en los cuadernos de trabajo no identificamos inecuaciones lineales cuyo conjunto solución tengan dicha característica.



TEN EN CUENTA

Para los casos en que se parta de expresiones como:

$3x + 1 < 3x + 5$ ①

$2x + 4 < 2x + 3$ ②

en las cuales se llega a desigualdades de la forma $1 < 5$ y $4 < 3$, se tiene:

En ①: $x \in \mathbb{R}$

En ②: $x \in \varnothing$

Figura 37. Ejemplo de la tarea t_{35}

Fuente: Perú f (2016, p. 76)

Por otro lado, en el cuaderno de trabajo verificamos que no se abordan las inecuaciones donde el coeficiente del término lineal es negativo, que son las tareas $\boldsymbol{t_{33}}$ y $\boldsymbol{t_{34}}$. La ausencia de dichas tareas no permite que los estudiantes tomen conciencia de las diferencias de resolver una ecuación y resolver una inecuación, pues la sola presencia de tareas donde el coeficiente del termino lineal es positivo, refuerza la concepción de que para resolver una inecuación se usan las mismas técnicas que se usan en la resolución de ecuaciones, tal como reportan las investigaciones de Tsamir y Bazzini (2001, 2002), Bagni (2005), Barbosa (2006) y Giusti (2007).

Evaluación de las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas del tipo T_3 y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

Las técnicas son elaboradas efectivamente en la colección de libros didácticos analizados, así pues, podemos caracterizar las técnicas a partir de los problemas resueltos en los textos escolares. Es así como identificamos las técnicas τ_{311} y τ_{331} en el TE1, donde se usa los principios de equivalencia de desigualdades, dicho principio es denominado en el TE1 como transformaciones algebraicas de equivalencia.

Mostramos a continuación el ejemplo 2b del TE1, donde podemos observar que la técnica τ_{311} es presentada de manera inteligible.

b. $2g + 5,8 > -9$

$2g + 5,8 + (-5,8) > -9 + 5,8$ Sumamos a ambos lados el opuesto de 5,8.

$2g > -14,8$ Efectuamos operaciones.

$g > -7,4$ Multiplicamos ambos lados por el reciproco de 2.

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 95)

Así mismo, la tecnología que justifica ambas técnicas, la identificamos en el TE1 (ver Figura 38), donde se afirma que para resolver una inecuación, al igual que en las ecuaciones, se puede emplear la transposición de términos, teniendo en cuenta el cambio del signo de desigualdad en el caso de transponer factores negativos.

Resolución de inecuaciones de primer grado

Resolver una inecuación es hallar el (los) valor(es) de la incógnita que hace verdadera la desigualdad. El conjunto formado por esos valores es el **conjunto solución**. Para resolver una inecuación, se puede emplear la **transposición de términos**. Las reglas de transposición en las inecuaciones son similares a las de las ecuaciones, pero se debe tener en cuenta que al transponer factores o divisores negativos, el sentido de la desigualdad cambia.

Figura 38. Identificación de la justificación de las técnicas τ_{311} y τ_{331}

Fuente: Perú b (2015, p. 94)

Si la inecuación en su forma simplificada tiene como coeficientes a fracciones, donde sus denominadores son números enteros positivos, identificamos en un problema resuelto en el TE2 una variación de la técnica τ_{331}, lo cual nos permitió caracterizar las técnicas τ_{311^*} y τ_{331^*} para su resolución. Ambas técnicas consisten en multiplicar ambos lados de la desigualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores y luego se incluyen los pasos de las técnicas τ_{311} y τ_{331}.

La tecnología que justifica las técnicas τ_{311^*} y τ_{331^*}, lo identificamos en las propiedades de desigualdad y en el discurso sobre la técnica en el problema resuelto, así como en la definición de mínimo común múltiplo. Presentamos a continuación la solución del problema que nos permitió caracterizar las técnicas τ_{311^*} y τ_{331^*}, la solución que presentamos la consideramos hasta el paso en el cual se puede usar la técnica τ_{331}.

Resolvamos y tracemos la gráfica de la solución de la inecuación $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}\geq\frac{1}{2}$.

***Solución**:*

Como la expresión tiene números fraccionarios, debemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores, para obtener números enteros. En este caso, m. c. m. (3; 5; 2)=30.

$30\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}\right)\geq 30\left(\frac{1}{2}\right)$ Multiplicamos por el m. c. m de los denominadores.

$30\left(-\frac{1}{3}x\right)+30\left(\frac{2}{5}\right)\geq 30\left(\frac{1}{2}\right)$ Propiedad distributiva de la multiplicación.

$-10x+12\geq 15$ Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

Fuente: Adaptado de Perú b (2016, p. 87)

Las técnicas τ_{311} (τ_{311^*}) y τ_{331} (τ_{331^*}) son básicas de las tareas del tipo $\boldsymbol{T_3}$, así pues, las técnicas ampliadas τ_{312} y τ_{332}, se obtienen al integrar a las técnicas τ_{311} (o τ_{311^*}) y τ_{331} (o τ_{331^*}) los pasos de las técnicas τ_{121} y τ_{131}, que son técnicas de las tareas del tipo $\boldsymbol{T_1}$. La necesidad de ampliar las técnicas se debe a que a partir del TE2 se pide la representación del conjunto solución de las inecuaciones, como en el ejemplo 1 del TE2.

Resolvamos y escribamos el intervalo solución de la inecuación $-\frac{1}{2}x+3<5$

Fuente: Adaptado de Perú b (2016, p. 87)

En relación a la justificación de las técnicas τ_{312} y τ_{332}, identificamos un discurso de la técnica τ_{332} en el TE2, así como la justificación de las técnicas τ_{121}, τ_{131} τ_{311} (o τ_{311^*}) y τ_{331} (o τ_{331^*}).

Ahora bien, la técnicas τ_{311} (o τ_{311^*}) y τ_{331} (o τ_{331^*}) incluyendo los pasos de las técnicas τ_{111} y τ_{121}, conforman las técnicas τ_{321} y τ_{341}, que permiten hacer las tareas $\boldsymbol{t_{32}}$ y $\boldsymbol{t_{34}}$, que son tareas de situaciones matemáticas con condición de desigualdad, dichas situaciones en un contexto intramatemático o extramatemático. La tecnología que justifica las técnicas τ_{321} y τ_{341} son identificadas en la justificación de las técnicas τ_{312}, τ_{332}, τ_{121} y τ_{111}.

Por otra parte, como ya se mencionó, por lo general las inecuaciones lineales no son dadas exclusivamente de la forma $ax+b<c$ (incluido sus variantes respecto al signo de desigualdad), de allí que la técnica que permite resolver las inecuaciones del tipo $P(x)<c$ o $P(x)<Q(x)$ (incluidas sus variantes respecto a los signos de desigualdad), asume primero la técnica de reducción de términos semejantes, de modo que permitan reducir las expresiones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$ a la forma simplificada $ax+b$, con $a\neq 0$. En la unidad que corresponde a las inecuaciones lineales en el TE1 no se encontró la justificación de la técnica de reducción de términos semejantes, pero si se logró identificar, no de manera explícita, dicha justificación en la unidad que correspondiente a las ecuaciones lineales del TE1, tal como se puede observar en la Figura 39, la pertinencia de la tecnología se debe a que en el CT1 encontramos 2 problemas propuestos de la tarea t_{36}, cuya traducción al lenguaje algebraico en los dos problemas se expresa mediante la forma $P(x)<c$.

$2x-3x+7x=54$	Ecuación inicial.
$(2-3+7)x=54$	Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación.
$6x=54$	Realizamos las operaciones.

Figura 39. Identificación de la justificación de la técnica de reducción de términos semejantes
Fuente: Perú b (2015, p. 84)

De ese modo la técnica τ_{351} se obtiene de la integración de las técnicas de cálculo algebraico para reducir términos semejantes y la técnica τ_{312} o τ_{332}, esto dependiendo del signo del coeficiente del término lineal de la inecuación en su forma simplificada. Recién en el TE3 identificamos el discurso de la técnica τ_{351}, puesto que en dicho texto encontramos un problema resuelto de una inecuación de la forma $P(x)<Q(x)$, tal como se puede observar en la Figura 40.

3. Resuelve la inecuación $x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$.

- Realizamos los siguientes pasos:

$x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$ ◄ Inecuación.

$x + 3x - 15 < 6 - 8 + 12x$ ◄ Se aplica la propiedad distributiva.

$x + 3x - 15 + 15 - 12x < 6 - 8 + 12x + 15 - 12x$ ◄ Se resta $12x$ y se suma 15 a cada miembro.

$-8x < 13$ ◄ Se reducen términos semejantes.

$x > -\frac{13}{8}$ ◄ Se divide entre -8 y se cambia el sentido de la desigualdad.

Figura 40. Identificación de la justificación de la técnica τ_{351}

Fuente: Perú d (2016, p. 78)

No obstante, en la identificación de las tareas en el CT3, encontramos problemas propuestos de la tarea t_{35}, donde las inecuaciones tienen coeficientes fraccionarios y además en dos problemas propuestos encontramos la expresión de la forma $(x \pm a)^2$, tal como se puede observar en la Figura 41.

C	$(3x - 1)/5 > (x + 1)/2 + (7 - x)/7$
M	$x/2 + x/3 + x/6 < 1$
A	$(x - 1)/3 + 2x/5 \leq 2x/3$
U	$7/10x - 1/3 \geq 1/5x + 2$
A	$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 > x + 1$

Figura 41. Proplemas propuestos de la tarea t_{35}

Fuente: Perú e (2016, p. 46)

En el TE3 no se identificaron problemas resueltos con dichas características, de allí que, no identificamos la técnica de manera explícita, pero en el TE2 encontramos elementos tecnológicos y el discurso de la técnica τ_{331^*}, el cual nos permite caracterizar la técnica τ_{351^*} para resolver los problemas donde las inecuaciones tienen coeficientes fraccionarios.

Respecto al problema propuesto donde aparece la expresión de la forma $(x \pm a)^2$, en la unidad 5 del TE2, que corresponde al tema *ecuaciones lineales*, identificamos la técnica que permite desarrollar el binomio al cuadrado en el TE2, así como la tecnología que justifica la técnica, tal como se observa en la Figura 42. Así, podemos caracterizar una técnica a la que denotamos como τ_{352} y además identificamos la justificación de la técnica.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{Aplicamos las potencias de igual base.}\\
&= a^2 + ab + ba + b^2 && \text{Aplicamos la propiedad distributiva.}\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && \text{Adicionamos términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

Figura 42. Proplemas propuestos de la tarea t_{35}

Fuente: Perú b (2016, p. 71)

En lo que respecta al trabajo con las técnicas para la resolución algebraica de las inecuaciones identificadas en los problemas que conforman el tipo de tarea T_3, la técnica τ_{311} es la de mayor alcance, pues permite resolver 24 inecuaciones lineales de la forma simplificada, lo que representa el 41,38% de los 58 problemas que conforman el tipo de tarea T_3.

Le siguen las técnicas τ_{351} y τ_{351^*}, pues permiten resolver 16 y 10 inecuaciones, lo que representa el 27,59% y 17,24% de los problemas que conforman el tipo de tarea T_3, respectivamente. Dichas técnicas permiten resolver inecuaciones de la forma $P(x) < c$ o $P(x) < Q(x)$. Ahora bien, al realizar los pasos de ambas técnicas para reducir las expresiones a la forma simplificada, identificamos que el coeficiente del término lineal es positivo, lo que implicaría que se usan los pasos de la técnica τ_{311} para resolver la inecuación.

De la observación hecha en el párrafo anterior, además de la cantidad de problemas en los cuales se usa la técnica τ_{331} para su resolución, según la tabla 14, podemos afirmar que el alcance de dicha técnica en los libros analizados se reduce al 6,9% del total de problemas identificados del tipo T_3.

Tabla 14. *Alcance de las técnicas identificadas de tipo de tarea T_3*

Nivel Educativo				**1° Sec.**		**2° Sec.**		**3° Sec.**		**4° Sec.**	
Técnicas			**Características**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**
$ax+b<c$	$a>0$	τ_{311}	Coeficientes enteros	3							
		τ_{311^*}	Coeficientes fracciones								
		τ_{312}	$\tau_{311} \cup \tau_{131}$								

	τ_{321}	$\tau_{311} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$	2	11		4		3		1
		$\tau_{311*} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$						2		
$ax+b<c$ $a<0$	τ_{331}	Coeficientes enteros	1							
	τ_{331*}	Coeficientes fracciones			1					
	τ_{332}	$\tau_{331} \cup \tau_{131}$			1					
	τ_{341}	$\tau_{331} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$	1							
$P(x)<c$ **o** $P(x)<Q(x)$	τ_{351}	Coeficientes enteros					1	3	3	
	τ_{351*}	Coeficientes fracciones						7		
	τ_{352}	Cuadrática						2		
	τ_{361}	$\tau_{351} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$		2				6		1
		$\tau_{351*} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$								3

Ahora bien, en la Figura 43 podemos observar el modo como se integran las técnicas de las tareas del tipo $\boldsymbol{T_3}$, por cuestión de orden se ha omitido en la figura las variantes de las técnicas τ_{311}, τ_{331} y τ_{351}, así como las técnicas de representación τ_{111}, τ_{121} y τ_{131} que se observan en la tabla 14. En la figura se muestra las técnicas que se usan para resolver los problemas de los libros didácticos, mostramos que para la resolución de las tareas $\boldsymbol{t_{35}}$ y $\boldsymbol{t_{36}}$ la técnica τ_{311} es básica, mientras que la técnica τ_{331} solo se usa en la resolución de las tareas $\boldsymbol{t_{33}}$ y $\boldsymbol{t_{34}}$.

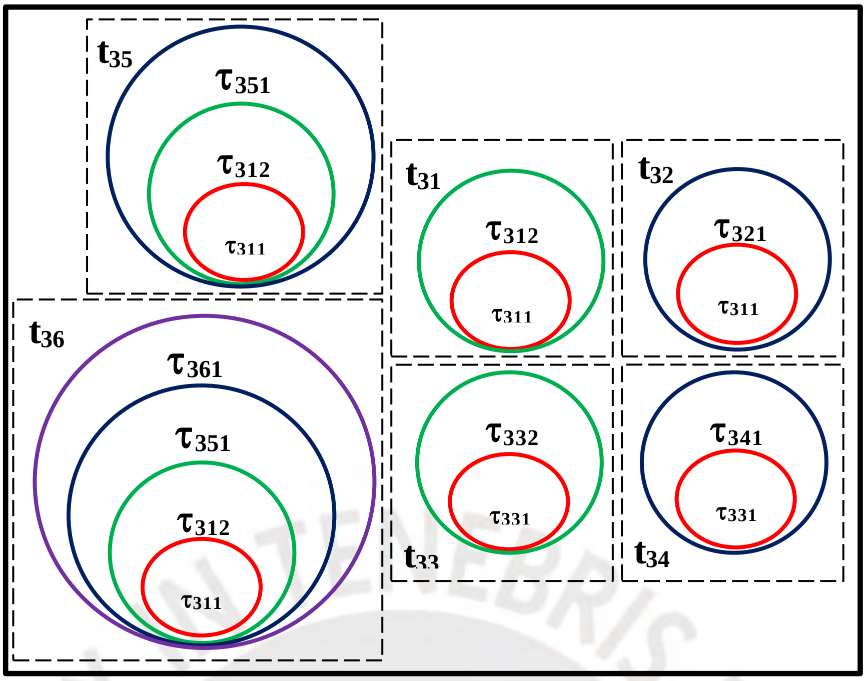


Figura 43. Integración de las técnicas identificadas de las tareas del tipo T_3

Fuente: Elaboración propia

T_4: Resolver un sistema de dos inecuaciones lineales

El tipo de tarea T_4 comprende las tareas en las cuales se pide resolver un sistema de dos inecuaciones lineales, 3 son las tareas que la conforman. Las tareas t_{41} y t_{42}, donde las inecuaciones son dadas como expresiones algebraicas, de modo que se pueden expresar de la forma $c < ax + b < d$ o sus variantes respecto a los signos de desigualdad ($<$, $\leq$). Para no colocar cada una de las variantes en la descripción de la tarea, se consideró colocar uno de los casos en la descripción de la tarea, entendiéndose que también engloba las demás variantes de los signos de desigualdad.

Lo que diferencia a las tareas t_{41} y t_{42} es el signo del coeficiente del termino lineal, pues en una tarea se considera que es mayor que cero y en la otra tarea se considera menor que cero. Por otro lado, identificamos la tarea t_{43}, que conforma a los problemas en contexto con condiciones de desigualdad, de los cuales se obtienen dos inecuaciones lineales.

A continuación mostramos las 3 tareas identificadas del tipo de tareas T_4, además de la ubicación de los problemas que conforman las tareas en la colección de libros, así como sus técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t_{41}: ***Resolver un sistema de inecuaciones lineales que se expresa de la forma*** $c < ax + b < d$ ***; con*** $a > 0$

La tarea comprende los ejercicios resueltos en el TE3 de la pág. 22: ejemplo en *cómo hacer*; pág. 23: 2 ejemplos en *cómo hacer*; pág. 79: 2 ejemplos. Además en el CT3, las preguntas de las fichas: ***Buscamos la operación*** en la pregunta 7 de pág. 37; ***¿Quién tiene razón?*** en la pregunta 7 de la pág. 49; ***El más rápido*** pregunta 5 y pregunta 1 (4 ejercicios) de *coevaluación* en la pág. 55.

El problema resuelto en *cómo hacer* del TE3 es un ejemplo representativo de la tarea.

Resuelve $-1 < x + 3 \leq 5$.

Fuente: Adaptado de Perú d (2016, p. 79)

Dos técnicas son identificadas en la colección de libros para resolver el problema, una de ellas caracterizamos continuación.

Técnica (τ_{411}):

Paso 1: Identificar las dos inecuaciones que se obtienen de la expresión dada, $c < ax + b$ y $ax + b < d$.

$-1 < x + 3$ y $x + 3 \leq 5$

Paso 2: Usar la técnica τ_{311} o τ_{311^*} a cada una de las inecuaciones.

$-4 < x$ y $x \leq 2$

Paso 3: Usar la técnica τ_{131} para representar en la recta numérica ambas desigualdades e identificar su intersección.

En la Figura 44 se observa la representación e intersección de los conjuntos.

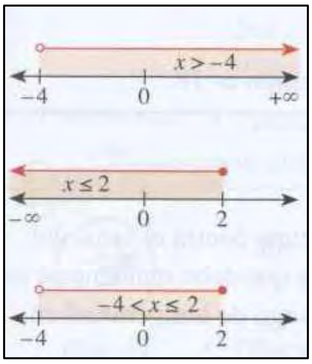


Figura 44. Representación de ambas desigualdades en la técnica τ_{411}.

Fuente: Perú d (2016, p. 79)

Paso 4: Usar las técnicas τ_{141} y/o τ_{121} para representar el conjunto solución.

$C.S =]-4;2]$

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5 : Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6 : Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_{12} : Intersección de intervalos

La otra técnica la caracterizamos a partir del ejemplo 3 resuelto en la pág. 88 del TE2.

Técnica (τ_{412}):

Paso 1: Restar b o sumar el opuesto de b a las tres partes de la desigualdad.

$-1+(-3) < x+3+(-3) \leq 5+(-3)$ entonces tenemos $-4 < x \leq 2$.

Paso 2: Multiplicar por $1/a$ a las tres partes de la desigualdad, como $a > 0$ el signo de la desigualdad no cambia.

Al multiplicar por 1, tendríamos la misma desigualdad $-4 < x \leq 2$.

Paso 3: Usar las técnicas τ_{131} y/o τ_{121} para representar el conjunto solución.

$C.S =]-4;2]$

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

Identificamos una variación de la técnica τ_{412} en el TE3, en el ejemplo de *cómo hacer* en la pág. 23, puesto que se identifica una desigualdad de la forma $c < \frac{ax+b}{e} < d$, con $e > 0$. Presentamos a continuación la técnica caracterizada.

Técnica (τ_{412^*}):

Paso 1: Multiplicar por e a las tres partes de la desigualdad.

Paso 2: Restar b o sumar el opuesto de b a las tres partes de la desigualdad.

Paso 3: Multiplicar por $1/a$ a las tres partes de la desigualdad, como $a > 0$ el signo de la desigualdad no cambia.

Paso 4: Usar las técnicas τ_{131} y/o τ_{121} para representar el conjunto solución.

Tecnología (θ):

θ_1**:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2**:** Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

Es necesario una variación de la técnica, cuando la tarea presenta una expresión algebraica con valor absoluto, un problema resuelto es identificado en el TE3 en la pág. 22, de allí podemos caracterizar la técnica que presentamos a continuación.

Técnica (τ_{413}):

Paso 1: Usar las propiedades de desigualdad de valor absoluto

Paso 2: Usar la técnica τ_{412} o τ_{412*}.

Tecnología (θ):

θ_1**:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2**:** Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_{11} **:** Propiedad de valor absoluto en desigualdades.

t$_{42}$: ***Resolver un sistema de inecuaciones lineales que se expresa de la forma*** $c < ax + b < d$ ***; con*** $a < 0$

Dicha tarea la podemos encontrar en el TE2 en el ejemplo 3 de la pág. 88, además en el TE3 como ejemplo en *cómo hacer* de la pág. 79.

El ejercicio resuelto en el TE2 es un ejemplo representativo de la tarea.

Solucionemos la inecuación $-12 < -5x + 12 \leq 20$.

Fuente: Adaptado de Perú b (2016, p. 88)

En la tarea $\boldsymbol{t_{41}}$ identificamos dos técnicas para la resolución de dicha tarea.

Técnica (τ_{421}):

Paso 1: Restar b o sumar el opuesto de b a las tres partes de la desigualdad.

$-12-12 < -5x+12-12 \leq 20-12$ entonces tenemos $-24 < -5x \leq 8$.

Paso 2: Multiplicar por $1/a$ a las tres partes de la desigualdad, como $a < 0$ el signo de la desigualdad cambia.

$\left(\frac{1}{-5}\right)(-24) > \left(\frac{1}{-5}\right)(-5x) \geq \left(\frac{1}{-5}\right)(8)$ entonces tenemos $\frac{24}{5} > x \geq -\frac{8}{5}$

Paso 3: Usar las técnicas τ_{131} y/o τ_{121} para representar el conjunto solución.

En la Figura 45 se observa la representación del conjunto solución.

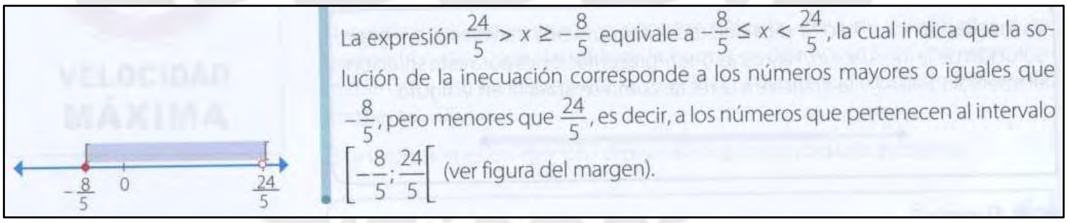

La expresión $\frac{24}{5} > x \geq -\frac{8}{5}$ equivale a $-\frac{8}{5} \leq x < \frac{24}{5}$, la cual indica que la solución de la inecuación corresponde a los números mayores o iguales que $-\frac{8}{5}$, pero menores que $\frac{24}{5}$, es decir, a los números que pertenecen al intervalo $\left[-\frac{8}{5}; \frac{24}{5}\right[$ (ver figura del margen).

Figura 45. Representación del conjunto solución de un sistema de inecuaciones
Fuente: Perú b (2016, p. 88)

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

Identificamos una variación de la técnica τ_{421} en el TE3, en el ejemplo de *cómo hacer* en la pág. 79, puesto que se identifica una desigualdad de la forma $c < \frac{ax+b}{e} < d$, con $e > 0$. La técnica caracterizada presentamos a continuación.

Técnica (τ_{421^*}):

Paso 1: Multiplicar por e a las tres partes de la desigualdad.

Paso 2: Restar b o sumar el opuesto de b a las tres partes de la desigualdad.

Paso 3: Multiplicar por $1/a$ a las tres partes de la desigualdad, como $a < 0$ el signo de la desigualdad cambia.

Paso 4: Usar las técnicas τ_{131} y/o τ_{121} para representar el conjunto solución.

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

t_{43}*: *Resolver un sistema de ecuaciones lineales, obtenida a partir de un texto

Tabla 15. *Problemas que comprenden la tarea t_{43}*

Año	Texto escolar	Cuaderno de trabajo
1° Sec.	Pág. 96: ejemplo 5.	Ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) ítem e del problema 2 (apoyo minero) de la pág. 201, pregunta de transfiero lo aprendido en la pág. 202.
2° Sec.	pág. 88: ejemplo 4 y problema en *conexiones*; pág. 91: problema *cercando un terreno de dimensión máxima* y ejercicio propuesto en transferimos lo aprendido.	

3° Sec.	Pág. 80: ejemplo 1; pág. 104: ejemplo en *cómo hacer*.	Fichas: ***Etapas de la vida humana*** en la pregunta 5 y *coevaluación* de la pág. 13; ***Bajas temperaturas*** en la pregunta 8, 9, 12 y *autoevaluación* de la pág. 15; ***Presupuesto familiar*** en la pregunta 6, *autoevaluación* de la pág. 25; ***Promedio de notas*** en la pregunta de *coevaluación* de la pág. 43; ***Cultivos peruanos*** en la pregunta 2 de *heteroevaluación* de la pág. 47; ***¿Quién tiene razón?*** en la pregunta 1 de *heteroevaluación* de la pág. 49; ***Un lugar para estacionar*** en la pregunta 6, 7 y 8 de la pág. 50-51.
4° Sec.	Pág. 76: ejemplo 2 de *cómo hacer*; pág. 99: ejemplo en *cómo hacer*.	Ficha: ***Campaña solidaria*** pregunta 7 y 9 en la pág. 187.

El problema resuelto en el TE2 es un ejemplo representativo de la tarea.

Una de las aerolíneas peruanas tiene normado que los pasajeros no pueden transportar piezas de equipaje que superen los 48 125 cm³. Si las medidas del alto y ancho de una maleta son 55 cm y 35 cm, ¿Cuál es la medida máxima permitida de su profundidad?

Fuente: Adaptado de Perú b (2016, p. 88)

Técnica (τ_{431}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111}.

Volumen máximo permitido: 48 125 cm^3; alto: 55 cm; ancho: 35 cm; profundidad máxima: ¿?.

El volumen de la pieza de equipaje expresada en función de los modelos del largo y ancho; esta es: $55 \cdot 35 \cdot x$.

Por la condición del problema, la inecuación tiene entre los limites 0 y 48 125; esto es $0 \leq 55 \cdot 35 \cdot x \leq 48125$

Paso 2: Usar la técnica τ_{412} o τ_{412^*} considerando el signo del coeficiente lineal.

En el caso del ejemplo resuelto, la técnica a usar es la técnica τ_{412} de modo que se obtiene la inecuación $0 \leq x \leq 25$, siendo el conjunto solución representado mediante el intervalo $[0;25]$.

Paso 3: Usar la técnica τ_{211} para validar soluciones en la inecuación $a < x < b$ de acuerdo al contexto del problema y dar una respuesta.

La medida máxima permitida de su profundidad es 25 cm.

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

En la colección de libros no solo identificamos la técnica τ_{431}, pues la técnica no es suficiente si la situación planteada presenta dos condiciones de desigualdad, es decir que es necesario plantear dos inecuaciones, como se puede identificar en el ejemplo resuelto del TE3.

Un grupo de estudiantes dispone de S/ 400 para comprar las entradas para visitar la ciudadela de Machu Picchu. Si compran la entrada a precio normal de S/ 32, les faltaría dinero, pero si compran la entrada a la tarifa promocional de S/ 22 establecida por el Ministerio de Cultura para fomentar la visita a la ciudadela a partir de las 13 horas, les sobraría dinero. ¿Cuántos estudiantes como máximo hay en este grupo?

Fuente: Adaptado de Perú d (2016, p. 80)

A partir de la resolución de dicho problema, caracterizamos la técnica que mostramos a continuación.

Técnica (τ_{432}):

Paso 1: Identificar las dos condiciones de desigualdad y usar la técnica τ_{111} para representar dichas condiciones.

Existen dos condiciones, sea x el número de entradas:

Si se compran entradas de S/ 32, les falta dinero: $32x > 400$.

Si se compran entradas de S/ 22, les sobra dinero: $22x < 400$.

Paso 2: Usar la técnica τ_{351} o τ_{351^*} a cada una de las inecuaciones planteadas.

Se obtienen las desigualdades $x > 12{,}5$ y $x < 18{,}18$.

Paso 3: Escribir la inecuación de forma unificada, es decir de la forma $a < x < b$.

Entonces $12{,}5 < x < 18{,}18$

Paso 4: Usar la técnica τ_{211} para validar soluciones en la inecuación $a < x < b$ de acuerdo al contexto del problema y dar una respuesta.

$C.S = \{13;14;15;16;17;18\}$, el número máximo de estudiantes que conforman el grupo es 18.

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6 : Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_9 : Propiedad distributiva de multiplicación en $\mathbb{R}$

θ_{10}: Adición y sustracción de polinomios

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea *T*4

Las tareas que conforman el tipo de tarea T_4 son:

t_{41}: Resolver un sistema de inecuaciones lineales que se expresa de la forma $c < ax + b < d$; con $a > 0$

t_{42}: Resolver un sistema de inecuaciones lineales que se expresa de la forma $c < ax + b < d$; con $a < 0$

t_{43}: Resolver un sistema de ecuaciones lineales, obtenida a partir de texto

Luego de la revisión de la colección de libros didácticos, identificamos problemas resueltos de las tareas t_{41}, t_{42} y t_{43} en el TE3, en dicho texto encontramos la mayor frecuencia de problemas resueltos de tareas del tipo T_4. En el TE2 identificamos 1 problema resuelto de la tarea $\boldsymbol{t_{42}}$ y 3 problemas de la tarea $\boldsymbol{t_{43}}$, de los cuales 2 problemas son propuestos. Mientras que en el TE1 y TE4 solo identificamos problemas propuestos de la tarea $\boldsymbol{t_{43}}$, y en el TE5 no se identificaron problemas de tareas del tipo $\boldsymbol{T_4}$.

En lo que respecta a la frecuencia de problemas por tarea, podemos observar que la mayor cantidad corresponde a la tarea $\boldsymbol{t_{43}}$, seguido de la tarea $\boldsymbol{t_{41}}$ y nuevamente verificamos, al igual que en las tareas del tipo $\boldsymbol{T_3}$, la poca presencia de problemas resueltos en los cuales el coeficiente del termino lineal es negativo, los cuales conformarían la tarea $\boldsymbol{t_{42}}$.

En la tabla 16 mostramos la frecuencia de las tareas que corresponden al tipo de tareas $\boldsymbol{T_4}$.

Tabla 16. *Cantidad de problemas de tareas del tipo T_4 en los textos escolares.*

Nivel		t_{41}	t_{42}	t_{43}	Total
1° Sec.	TE1	0	0	1	1
2° Sec.	TE2	0	1	4	5
3° Sec.	TE3	5	1	2	8
4° Sec.	TE4	0	0	2	2
5° Sec.	TE5	0	0	0	0
Total		5	2	9	16

De los problemas propuestos en los cuadernos de trabajo, observamos que la mayor incidencia de ellos se encuentra en el CT3, mientras que en el CT1 y CT4 solo identificamos problemas de la tarea $\boldsymbol{t_{43}}$, y no identificamos tareas del tipo $\boldsymbol{T_4}$ en el CT2 y CT5. En lo que respecta a la cantidad de problemas propuestos por tarea, podemos observar la ausencia de problemas de la tarea $\boldsymbol{t_{42}}$, dicha ausencia no permite que el estudiante tome conciencia del uso adecuado de las propiedades de desigualdad al resolver inecuaciones, cuando se multiplica por un factor negativo cada una de las partes de la desigualdad, tal como se mencionan en los trabajos de investigación de nuestros antecedentes. En la tabla 17 se muestra la frecuencia de los problemas de las tareas del tipo T_4 en los cuadernos de trabajo.

Tabla 17. *Cantidad de problemas de tareas del tipo T_4 en los cuadernos de trabajo.*

Nivel		t_{41}	t_{42}	t_{43}	Total
1° Sec.	CT1	0	0	2	2
2° Sec.	CT2	0	0	0	0
3° Sec.	CT3	7	0	11	18
4° Sec.	CT4	0	0	1	1
5° Sec.	CT5	0	0	0	0
Total		7	0	14	21

Evaluación de las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas del tipo T_4 y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas.

La técnica τ_{411} la identificamos en un ejemplo resuelto del TE3, mas no identificamos la técnica cuando el coeficiente del término lineal es negativo. La justificación de la técnica se encuentra en los elementos tecnológicos que justifican las técnicas τ_{311} o τ_{331}, además de la intersección de intervalos, en la Figura 46 podemos identificar la justificación de la técnica.

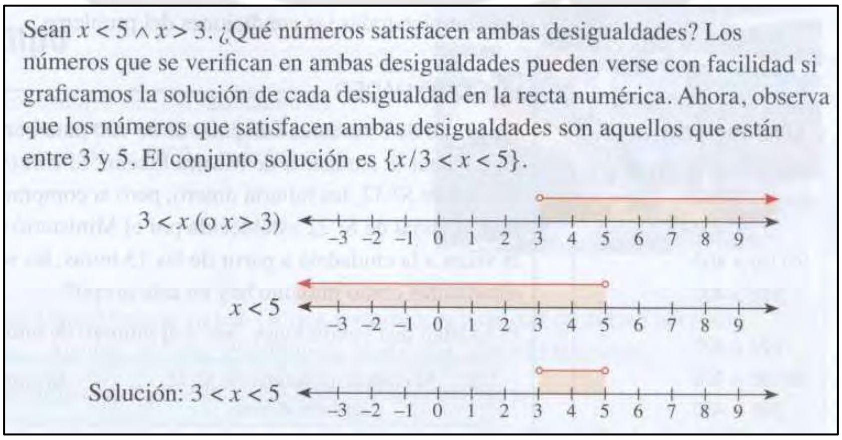


Figura 46. Identificación de la tecnología de τ_{411}

Fuente: Perú d (2016, p. 79)

La técnica τ_{421} la identificamos en el TE2 y la técnica τ_{421^*} en el TE3, a partir de dichas técnicas caracterizamos las técnicas τ_{412} y τ_{412^*}, cuando el coeficiente del termino lineal es positivo. La justificación de las técnicas lo identificamos en el discurso de las técnicas al momento de resolver los problemas, como ejemplo podemos observar en la Figura 47 la justificación de la técnica τ_{421^*}, donde además se encuentra un comentario acerca de lo que sucede con el signo de la desigualdad si se multiplica o divide por un numero negativo.

RECUERDA

Cuando multiplicamos o dividimos una desigualdad por un número negativo, la dirección del signo de desigualdad se invierte.

CÓMO HACER

Resuelve la desigualdad $-2 < \frac{4-3x}{5} \leq 8$.

- Multiplicamos las tres partes por 5 para eliminar el denominador:

$-2(5) < (5)\frac{4-3x}{5} \leq 8(5) \rightarrow -10 < 4 - 3x \leq 40$

- Restamos 4 a las tres partes:

$-10 - 4 < 4 - 3x - 4 \leq 40 - 4 \rightarrow -14 < -3x \leq 36$

- Dividimos entre -3 las tres partes de la desigualdad:

$\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{36}{-3} \rightarrow \frac{14}{3} > x \geq -12$

Como por lo general escribimos desigualdades con el valor más pequeño a la izquierda, reescribimos la solución como: $-12 \leq x < \frac{14}{3}$

C.S. $= [-12; \frac{14}{3}[$

Figura 47. Identificación de la tecnología de τ_{421^*}

Fuente: Perú d (2016, p. 79)

Además, en el TE3 identificamos 3 problemas de inecuaciones con valor absoluto, cuya técnica para su resolución es identificada en dicho texto, así como su justificación en las propiedades de valor absoluto, en la Figura 48 podemos observar la técnica y la justificación de la técnica en las propiedades de valor absoluto.

CÓMO HACER

Determina el conjunto solución de $|3x - 4| \leq 7$.

- Aplicamos la propiedad: $|a| \leq b \rightarrow b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$

$|3x - 4| \leq 7 \rightarrow -7 \leq 3x - 4 \leq 7$ ◄ Sumamos 4 a cada miembro.

$-7 + 4 \leq 3x - 4 + 4 \leq 7 + 4$ ◄ Reducimos términos.

$-3 \leq 3x \leq 11$ ◄ Dividimos entre 3 cada miembro.

$-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$

C.S. $= [-1; 11/3]$

Figura 48. Identificación de la técnica τ_{413} y su justificación

Fuente: Perú d (2016, p. 19)

La técnica τ_{432} de la tarea t_{43} la identificamos en la resolución de un problema del TE1, tal como se observa en la Figura 49, la justificación de la técnica τ_{432} se identifica en los elementos tecnológicos que justifican las técnicas τ_{111}, τ_{351} o τ_{351^*} y τ_{211}, puesto que la técnica τ_{432} incluye los pasos de dichas técnicas.

Ejemplo 5

Andrés y Sonia desean pasear por el lago Titicaca y necesitan saber cuánto dinero les queda. Andrés dice así: "El triple de lo que nos queda es más de S/. 900 y el cuádruplo es menos de S/. 1208". Sonia afirma lo siguiente: "Tenemos una cantidad exacta de nuevos soles".

Solución

Sea x el dinero que nos queda, entonces:

El triple de lo que nos queda es más de S/. 900		El cuádruplo de lo que nos queda es menos de S/. 1208
$3x > 900$		$4x < 1208$
$x > \frac{900}{3}$	y	$x < \frac{1208}{3}$
$x > 300$		$x < 302$

Luego, por condición de la situación, el único valor entero que verifica las desigualdades es 301. Entonces, les queda S/. 301.

Figura 49. Identificación de la técnica τ_{432}

Fuente: Perú b (2015, p. 96)

En el CT1 identificamos dos problemas que corresponden a la tarea t_{43}, como ejemplo mostramos el fragmento del enunciado de uno de los problemas propuestos.

Uno de los directivos solicita realizar un estimado de la cantidad del mineral nuevo para ingresar y así justificar la inversión de dinero. El ingeniero estima que la cantidad de roca es tres millones (3M) de toneladas menos que el doble del mineral acostumbrado, haciendo que esta producción esté por encima de un millón de toneladas (1M) pero sin llegar a los 7 millones de toneladas (7M).

Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p. 200)

Las técnica τ_{432}, presentada en el TE1, nos permite resolver el problema propuesto, ya que al hacer la transformación del lenguaje natural al algebraico podemos expresar las condiciones de desigualdad mediante las inecuaciones $2x-3>1$ y $2x-3<7$. Finalmente, la técnica τ_{431} la identificamos en el TE2 y puesto que integra a las técnicas τ_{412} o τ_{421} y τ_{111}, podemos afirmar la presencia de la justificación de la técnica τ_{431}.

En lo que respecta al trabajo con las técnicas para la resolución algebraica de los sistemas de inecuaciones lineales identificados en los problemas que conforman el tipo de tarea ***T*4**, concluimos que la técnica τ_{431} es la de mayor alcance pues permite resolver 16 problemas de los 37 que conforman el tipo de tarea ***T*4**, lo cual representa el 43,24%, así mismo, como dicha técnica incluye los pasos de la técnica τ_{351} o τ_{351^*}, al reducir cada una de las dos inecuaciones que conforman el sistema a su forma simplificada $ax+b<c$, observamos que todas las inecuaciones tienen la característica de que el coeficiente del termino lineal es positivo, es decir en su resolución incluye los pasos de la técnica τ_{311}.

Por otro lado, para la resolución del sistema de inecuaciones de la forma $c<ax+b<d$ la técnica de mayor alcance es la técnica τ_{412}, donde $a>0$, puesto que se identificó que en 12 de los problemas, para su resolución se usa dicha técnica, y representa el 32,43% de los 37 problemas del tipo de tarea ***T*4**. En contraste a las técnicas τ_{421} y τ_{421^*}, que solo permiten resolver 2 problemas del total que conforman el tipo de tarea ***T*4**.

En la tabla 18, se muestra el alcance de las técnicas del tipo de tarea ***T*4**.

Tabla 18. *Alcance de las técnicas identificadas de tipo de tarea T4*

Nivel Educativo				**1° Sec.**		**2° Sec.**		**3° Sec.**		**4° Sec.**	
Técnicas			**Características**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**	**TE**	**CT**
$c<ax+b<d$	$a>0$	τ_{411}	$\tau_{311} \cup \tau_{141} \cup \tau_{121} \cup \tau_{131}$					2			
		τ_{412}	$\tau_{131} \cup \tau_{121}$						6		
		τ_{412^*}	$\tau_{412} \cup \tau_{131} \cup \tau_{121}$						1		
		τ_{413}	$\tau_{412} \cup$ valor absoluto					2			

		$\tau_{412^*} \cup$ valor absoluto					1			
$c < ax + b < d$ $a < 0$	τ_{421}	$\tau_{131} \cup \tau_{121}$			1					
	τ_{421^*}	$\tau_{421} \cup \tau_{131} \cup \tau_{121}$					1			
Sistema obtenido de un texto	τ_{431}	$\tau_{351} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$	1	2	2		1	5		
		$\tau_{351^*} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$						3	1	1
	τ_{432}	$\tau_{412} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$			2		1	2	1	
		$\tau_{412^*} \cup \tau_{111} \cup \tau_{121}$						1		

Ahora bien, en la Figura 50 mostramos el modo como se integran las técnicas de las tareas del tipo T_4, se ha omitido en la figura las técnicas que permiten la representación, es decir las técnicas $\tau_{111}, \tau_{121}, \tau_{131}$ y τ_{141}, las cuales se observan en la tabla 18. En la figura se muestra las técnicas que se usan para resolver los problemas de los libros didácticos, mostramos que para la resolución de las tareas que conforman el tipo de tarea T_4, las técnicas básicas son τ_{311} y τ_{412}, mientras que las técnicas τ_{411}, τ_{421} y su variante solo se usa en la resolución de las tareas t_{41} y t_{42}, que son únicamente 4 del total de los 37 problemas que conforman el tipo de tarea T_4.

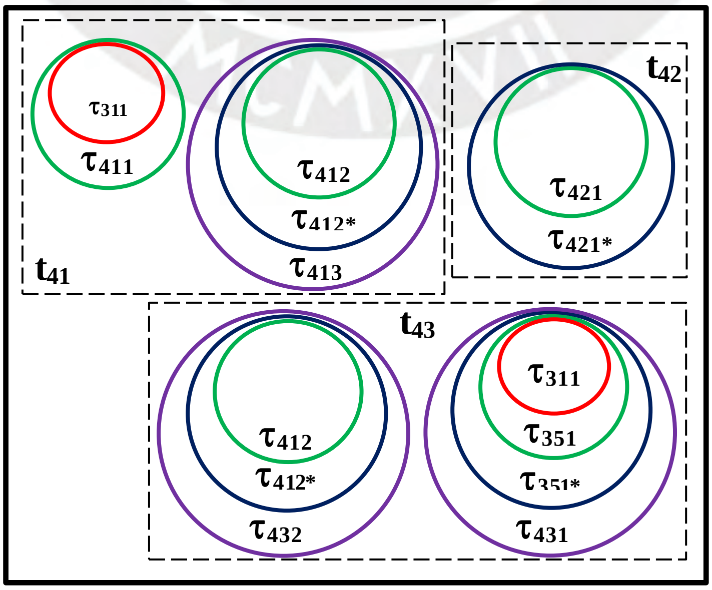


Figura 50. Integración de las técnicas identificadas en las tareas del tipo T_4

Fuente: Elaboración propia

***T_5*: Resolver un sistema conformado por una inecuación lineal o sistema de inecuaciones lineales y una ecuación lineal**

En el análisis de los libros de texto se identificó una única tarea t_{51} del tipo T_5, la característica de los problemas que conforman la tarea t_{51} es que a partir de una situación en contexto con condiciones de desigualdad, se obtiene una inecuación lineal o un sistema de inecuaciones lineales y una ecuación lineal asociada.

A continuación mostraremos la tarea identificada y los libros didácticos en los cuales se ubicaron, así como sus técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t_{51}*: *Resuelve un sistema conformado por un sistema de inecuaciones y una ecuación lineal, obtenidas a partir de una situación en contexto

Tabla 19. *Problemas que comprenden la tarea t_{51}.*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
1° Sec.		Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) problema 1 de resuelve situaciones significativas en la pág. 211.
3° Sec.	Pág. 19: ejemplo en *cómo hacer*; pág. 20: ejemplo en *cómo hacer*; pág. 80: ejemplo 2.	Fichas: ***Escalas termométricas*** en la pregunta 2, 3 y pregunta 2 de *coevaluación* en la pág. 45.
4° Sec.		Fichas: ***Agua para la pecera*** en las preguntas 5, 6 y 7 de la pág. 180 y 181; pregunta 11 de la pág. 181; ***Huertos ecológicos*** en las preguntas 7, 8 y 11, *autoevaluación* preguntas 1 y 2 de la pg. 183; ***Campaña solidaria*** pregunta 1 de *heteroevaluación*

Un ejemplo de dicha tarea lo identificamos en el TE3, como problema propuesto.

El índice de masa corporal (IMC) de una persona se calcula dividiendo su peso en kilogramos entre el cuadrado de su estatura en metros. Si el IMC de Javier y Dante es de, aproximadamente, 35 kg/m² y sus estaturas son de 1,64 m y 1,52 m, respectivamente, ¿en qué intervalo se encuentran los pesos de Javier y Dante si el error en el IMC es menor de un décimo?

Fuente: Adaptado de Perú d (2016, p. 19)

En el TE3 identificamos dos técnicas para la resolución de dicha tarea, la primera técnica en el problema resuelto de *cómo hacer* en la pág. 19, dicha técnica la caracterizamos a continuación.

Técnica (τ_{511}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111} para representar la(s) inecuación(es) o la técnica τ_{151} para representar el intervalo o intervalos.

$34,9 < IMC < 35,1$ o $]34,9;35,1[$

Paso 2: Representar la ecuación planteada en el problema.

$$34,9 = \frac{Peso(Kg)}{Altura(\mathrm{m})^2}$$

Paso 3: Evaluar los valores, en la variable que le corresponda, de la cota inferior y/o superior de la inecuación o del intervalo, en la ecuación.

Javier	Dante
$34,9 = \frac{Peso(Kg)}{(1,64)^2}$ entonces $x \approx 93,9kg$	$34,9 = \frac{Peso(Kg)}{(1,52)^2}$ entonces $x \approx 80,6kg$
$35,1 = \frac{Peso(Kg)}{(1,64)^2}$ entonces $x \approx 94,4kg$	$35,1 = \frac{Peso(Kg)}{(1,52)^2}$ entonces $x \approx 81,1kg$

Paso 4: Identificar la cota inferior y/o cota superior de los valores obtenidos al evaluar, determine el conjunto solución, en alguna de las representaciones, para ello usar τ_{131}.

Establecemos el intervalo en que están los pesos de ambos: $]80,6;94,4[$

Pasa 5: Usar la técnica τ_{121} para que a partir de la desigualdad obtenida, según el contexto de la situación planteada, responder la pregunta.

Los pesos de Javier y Dante se encuentran en el intervalo $]80,6;94,4[$.

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_{13}: Resolución de ecuaciones

Mientras que en la pág. 80 del mismo libro, identificamos un problema resuelto donde se presenta la otra técnica que permite resolver la tarea ***t_{51}***.

Un laboratorio peruano importa la muestra de una vacuna contra el virus del papiloma humano, en cuyas especificaciones se indica que debe mantenerse a una temperatura entre los 34°F y 60°F. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados centígrados en que la muestra debe mantenerse?

Fuente: Adaptado de Perú d (2016, p. 80)

A continuación presentamos la caracterización de la técnica, a partir de la resolución presentada en el TE3.

Técnica (τ_{512}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111} para representar la inecuación.

$$34 \leq F \leq 60$$

Paso 2: Representar la ecuación planteada en el problema.

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$$

Paso 3: Despejamos en la ecuación, la variable acotada en la inecuación.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Paso 4: Sustituir la variable despejada, en la inecuación planteada y usar la técnica τ_{412} o τ_{421}.

$34 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 60$, luego de usar la técnica τ_{412} se obtiene la inecuación equivalente $1{,}1 \leq C \leq 15{,}6$

Paso 5: Usar la técnica τ_{121} para que a partir de la desigualdad obtenida, según del contexto de la situación planteada, responder la pregunta.

La muestra debe mantenerse entre 1,1°C y 15,6°C.

Tecnología (θ):

θ_1**:** Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_5**:** Principios de equivalencia de desigualdades

θ_{13}**:** Resolución de ecuaciones

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_5, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

En la revisión de la colección de libros didácticos, identificamos un problema propuesto en el CT1 que corresponde a la tarea t_{51}, mas no encontramos en el TE1 un problema resuelto que nos permita identificar y caracterizar la técnica para hacer la tarea t_{51}. Dicha técnica recién es identificada de manera explícita en el TE3, más aún, como ya se señaló, identificamos dos técnicas (τ_{511} y τ_{512}) en dicho libro. A continuación mostramos el enunciado del único problema propuesto de la tarea t_{51} en el CT1.

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la altura y luego dividiendo por dos. Si se desea que la base del triángulo sea 2,5 m y el área A varié entre 5 m² y 10 m², ¿entre que valores debe estar la altura?

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 211)

Mostramos a continuación la solución del problema propuesto, para ello usamos las técnicas τ_{511} y τ_{512} que hemos caracterizado.

Técnica τ_{511}	***Técnica*** τ_{512}
Paso 1: $5 < A < 10$ *o* $]5;10[$	*Paso 1:* $5 < A < 10$
Paso 2: $A = \frac{b.h}{2}$	*Paso 2:* $A = \frac{b.h}{2}$
Paso 3: $5 = \frac{(2,5)h}{2} \rightarrow h = 4$ $10 = \frac{(2,5)h}{2} \rightarrow h = 8$	*Paso 3: Ya está despejado.* *Paso 4:* $5 < \frac{(2,5)h}{2} < 10$
Paso 4: Así $4 < h < 8$ *o* $]4;8[$	$4 < h < 8$
Paso 5: La altura debe estar entre 4 m y 8 m.	*Paso 5: La altura debe estar entre 4 m y 8 m.*

Fuente: Elaboración propia.

Como se mencionó, la técnica no es mostrada de forma explícita en el TE1, ni en el CT1, pero encontramos elementos tecnológicos en el TE1 que permiten justificar algunos de los pasos de ambas técnicas. Por ejemplo, el paso 1 está justificado por la tecnología de la técnica τ_{111} y de la técnica τ_{151}, mientras que la justificación para el paso 2 y el paso 3, lo identificamos en el tema ecuaciones lineales que se desarrolla en un capítulo anterior del TE1. Mas no identificamos la tecnología que justifique el paso 4 de la técnica τ_{511}, es decir el discurso que argumente que al evaluar los extremos de la inecuación en la ecuación $A = 2,5h/2$, se obtienen la cota inferior y la cota superior de la incógnita h. Respecto al paso 4 de la técnica τ_{512}, que viene hacer la técnica τ_{412}, como ya se mencionó dicha técnica no es explicitado en el TE1, pero si encontramos la tecnología que justifica la técnica τ_{412} en el TE1. Pues bien, por lo expuesto, la presencia de dicha tarea en el CT1 no es pertinente, pues es una tarea que aparece aislada en relación a las tareas identificadas en el TE1 y el CT1.

Por otra parte, respecto a la presencia de la tecnología de la técnica τ_{511} en el TE3, en referencia al paso 4, identificamos un comentario que justifica el paso 4, dicho comentario lo identificamos en la resolución de un problema resuelto, en el cual pide calcular el menor perímetro y mayor perímetro de un cuadro, en la explicación de la técnica se afirma que si se quiere obtener el menor perímetro, se eligen las menores medidas y para el perímetro mayor las mayores medidas. En la Figura 51 observamos el comentario al cual nos referimos como la tecnología del paso 4 de la técnica τ_{511}.

- Determinamos el intervalo que contamos para el ancho y el largo:

  Ancho = [4; 9] Largo = [7; 12]

- Observamos que para el cuadro de menor perímetro necesitamos las menores medidas que son 4 cm y 7 cm. Entonces:

  $P_{menor} = 2(4 + 7) = 2(11) = 22$ cm.

- Para el perímetro mayor, las mayores medidas son 9 cm y 12 cm. Entonces:

  $P_{mayor} = 2(9 + 12) = 2(21) = 42$ cm

El perímetro menor será de 22 cm, y el mayor, de 42 cm.

Figura 51. Justificación del paso 4 de la técnica τ_{511}.

Fuente: Perú d (2016, p. 19)

Ahora bien, en lo que concierne a la tecnología de la técnica τ_{512}, la cual está conformada por las técnicas τ_{111}, τ_{141}, τ_{412} o τ_{421} y τ_{121}, además del paso 2 y el paso 3, podemos afirmar que las justificaciones han sido identificadas en la colección de libros didácticos.

En la tabla 20 mostramos la frecuencia con la cual aparecen las tareas que corresponden al tipo de tareas T_5.

Tabla 20. *Cantidad de problemas resueltos y propuestas de la tarea t_{51}*

Nivel		**Problemas Resueltos**		**Problemas Propuestos**
1° Sec.	**TE1**	0	**CT1**	1
2° Sec.	**TE2**	0	**CT2**	0
3° Sec.	**TE3**	3	**CT3**	3
4° Sec.	**TE4**	0	**CT4**	7
5° Sec.	**TE5**	0	**CT5**	0

En la Figura 52, podemos observar la integración de las técnicas de las tareas del tipo T_4, se ha omitido en la figura las técnicas que permiten la representación, es decir las técnicas τ_{111}, τ_{121}, τ_{131} y τ_{141}. Además, podemos identificar la técnica básica que es la técnica τ_{412}. Respecto al alcance de la técnica, en dos de los problemas propuestos se hace uso de la técnica τ_{511}, mientras que para los problemas propuestos se puede elegir entre ambas técnicas para su resolución.

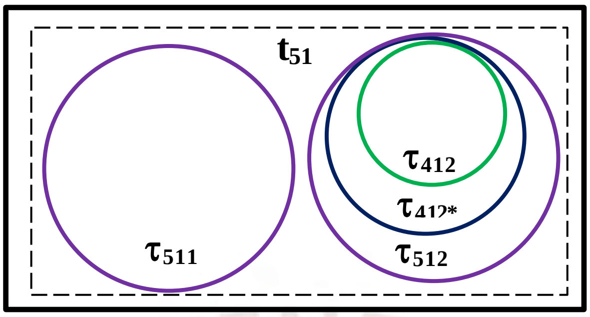


Figura 52. Integración de las técnicas de la tarea del tipo T_5.

Fuente: Elaboración propia.

T_6: Resolver una inecuación lineal con parámetros

La característica de este tipo de tarea es que los coeficientes de la expresión algebraica dada no son números establecidos, por lo tanto al momento de realizar la tarea, se tendría que analizar y establecer ciertas condiciones a los parámetros para poder determinar el conjunto solución de la inecuación. Tal como referimos en nuestros antecedentes, Tsamir y Bazzini (2002) mencionan que los estudiantes tienen dificultades al resolver ese tipo de tareas, de allí que recomiendan la presencia de dicho tipo de tarea en la práctica escolar, y en consecuencia en los libros de texto usados en la práctica escolar.

A continuación mostraremos la tarea identificada y los libros didácticos en los cuales se ubicaron, así como su técnica y el bloque tecnológico-teórico que justifica la técnica.

t_{61}*: *Resolver una inecuación lineal con parámetros de la forma* $ax+c>b$, *estableciendo condiciones sobre los parámetros

La tarea la encontramos en el CT1 en la ficha 43 (***Aplicaciones de desigualdades en variadas situaciones***) *reflexiona* (problema 3) de Finalicemos de la pág. 203. Además en la ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) preguntas 1, 2 de *reflexiona* de en la pág. 207.

Un ejemplo representativo de la tarea es el problema propuesto en la pregunta 1 de *reflexiona* en la pág. 207.

Si queremos determinar el conjunto solución de la expresión $ax+c>b$, ¿qué relación numérica debe existir entre a, c y b para que el conjunto solución empiece en un número entero?

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 207)

El TE1 no presenta la técnica de forma explícita de cómo resolver una inecuación lineal con parámetros, pero a partir de las técnicas τ_{311} y τ_{331}, que son técnicas básicas para la resolución de inecuaciones, podemos caracterizar una técnica que permita darnos una forma de hacer la tarea t_{61}, la cual presentamos a continuación.

Técnica (τ_{611}):

Paso 1: Restar c o sumar el opuesto de c a ambos lados de la desigualdad, o en todo caso transponer el término c al lado derecho de la desigualdad invirtiendo la operación.

$ax+c+(-c)>b+(-c)$ o $ax>b-c$ entonces $ax>b-c$

Paso 2: Establecer la condición de que $a\neq 0$. Multiplicar por $1/a$ o transponer el coeficiente a al otro lado de la desigualdad invirtiendo la operación, si $a>0$ el signo de la desigualdad no cambia, y si $a<0$ el signo de la desigualdad cambia.

Si $a>0$ entonces $x>\frac{b-c}{a}$ o si $a<0$ entonces $x<\frac{b-c}{a}$

Paso 3: Establecer la condiciones para a, c y b, según la pregunta del problema.

Los números a, b y c son números enteros y cumplen que a es divisor de $b-c$ así $a\cdot n=b-c$, donde n es un número natural.

Tecnología (θ):

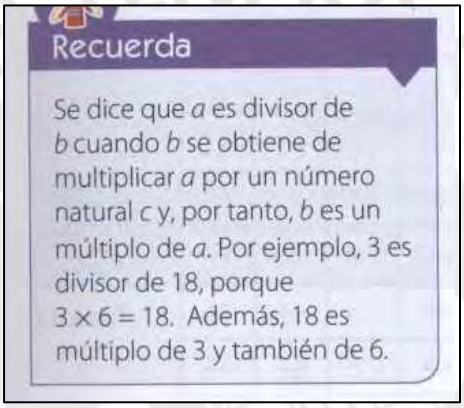
θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_6: Principios de transposición de términos en $\mathbb{R}$

θ_{14}: Divisibilidad de números enteros.

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_6, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

Los tres problemas propuestos de la tarea del tipo $\boldsymbol{T_6}$ se encuentran en el CT1, en la colección de libros didácticos no identificamos una técnica elaborada para la tarea $\boldsymbol{t_{61}}$, pero como ya se mencionó, a partir de las técnicas τ_{311} y τ_{331} podemos caracterizar los pasos 1 y 2 de la técnica τ_{611}, y para establecer la relación que debe existir entre los parámetros de la inecuación, para los dos problemas propuestos, la tecnología la identificamos en el TE1, como se puede observar en la Figura 53, en el capítulo que corresponde al tema *Números enteros y teoría de números*. Sin embargo, no identificamos un discurso o esbozo de técnica que nos permita caracterizar el paso 3 de la técnica que hemos caracterizado, la caracterización la hemos obtenido a partir del análisis matemático de la situación propuesta.


Recuerda

Se dice que *a* es divisor de *b* cuando *b* se obtiene de multiplicar *a* por un número natural *c* y, por tanto, *b* es un múltiplo de *a*. Por ejemplo, 3 es divisor de 18, porque $3 \times 6 = 18$. Además, 18 es múltiplo de 3 y también de 6.

Figura 53. Justificación del paso 3 de la técnica τ_{611}

Fuente: Perú b (2015, p. 11)

Ahora bien, de acuerdo a lo que se señala en la investigación de Tsamir y Bazzini (2002), consideramos que la presencia del tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ no solo debería estar presente en los libros didácticos de 1° de secundaria, pues la presencia de dicho tipo de tareas, en los libros didácticos que corresponden a los años posteriores, permitiría que los estudiantes analicen los parámetros, y no manipular de manera mecánica las inecuaciones, pues como ya se ha evidenciado a partir de nuestro análisis praxeológico, los tipos de inecuaciones que hemos identificado son aquellos donde el coeficiente del termino lineal es positivo, en consecuencia al realizar el trabajo con la técnica, esta se mecaniza y se manifiesta el fenómeno identificado por Tsamir y Bazzini (2002), quienes reportan que los estudiantes cometen errores al no usar de manera correcta las propiedades de las desigualdades.

T_7: Comparar expresiones

El tipo de tarea T_7 engloba las tareas en las cuales se comparan expresiones mediante el uso de las propiedades de las desigualdades o propiedades de relación de orden. A continuación mostraremos la tarea identificada y los libros didácticos en los cuales se identificaron, así como sus técnicas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas.

t_{71}: Comparar dos o más expresiones mediante el uso de las propiedades de relación de orden

Tabla 21. *Problemas que comprenden la tarea t_{71}*

Año	Texto escolar (TE)	Cuaderno de trabajo (CT)
4to Sec.	Pág. 51: ejemplo en *cómo hacer*.	Fichas: **Protegiendo la fauna latinoamericana** en la pregunta 8 de la pág. 135, ***Distancia entre planetas*** en la pág. 150
5to Sec.	Pág. 16: 2 ejemplos en *cómo hacer*.	Ficha ***Cosecha de duraznos*** en la pregunta 8, 9 y *coevaluación* (3 ejercicios) de la pág. 23.

Un ejemplo de dicha tarea lo identificamos en el TE4, como problema resuelto.

Verifica que la sucesión $a_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$ *es creciente.*

Fuente: Adaptado de Perú f (2016, p. 51)

La técnica para hacer la tarea la caracterizamos a continuación.

Técnica (τ_{711}):

Paso 1: Escribir en una desigualdad las dos expresiones a comparar.

$$\frac{3n-1}{4n+5} \leq \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5}$$

Paso 2: Usar los principios de equivalencia de desigualdades o transposición de términos.

$\left(3n-1\right)(4(n+1)+5) \leq (3(n+1)-1)\left(4n+5\right)$

Paso 3: Usar las propiedad distributiva de multiplicación y/o propiedad de cálculo algebraico en cada lado de la desigualdad.

$12n^2+23n-9 \leq 12n^2+23n+10$

Paso 3: Usar los principios de equivalencia de desigualdades o transposición de términos o propiedad cancelativa en $\mathbb{R}$.

$-9 \leq 10$

Paso 5: Verificar que si la desigualdad obtenida es verdadera y concluir.

La desigualdad $-9 \leq 10$ es verdadera, entonces la sucesión es creciente.

Tecnología (θ):

θ_5: Principios de equivalencia de desigualdades

θ_7: Propiedad cancelativa en $\mathbb{R}$

Si a , c y b son números reales tales que $a+c<b+c$ entonces $a<b$.

Si a , c y b son números reales tales que $c>0$ y $a.c<b.c$ entonces $a<b$.

Si a , c y b son números reales tales que $c<0$ y $a.c<b.c$ entonces $a>b$.

θ_9: Propiedad distributiva de multiplicación en $\mathbb{R}$

θ_{10}: Adición y sustracción de polinomios

Ahora bien, en el TE5 podemos identificar otra técnica en la resolución de un problema resuelto.

Compara $-5+c$ *y* $-5+d$ *si* $c<d$.

Fuente: Adaptado de Perú h (2016, p. 16)

La técnica para hacer la tarea queda caracterizada a continuación.

Técnica (τ_{712}):

Paso 1: Mediante los principios de equivalencia de desigualdades, obtener las expresiones a comparar.

Por el principio aditivo de equivalencia de desigualdades se tiene la desigualdad $-5+c<-5+d$

Tecnología (θ):

θ_5: Principios de equivalencias de desigualdades

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_7, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

Identificamos 3 problemas que conforman la tarea t_{71} en los libros didácticos que corresponden al 4° de secundaria, en el tema que corresponde a sucesiones y progresiones. Mientras que en los libros didácticos que corresponden al 5° de secundaria, identificamos 6 problemas, 2 en el TE5 y 4 en el CT5. Las técnicas τ_{711} y τ_{712} son efectivamente elaboradas en los libros didácticos, la primera en el TE3 y la segunda técnica en el TE4

Respecto a la justificación de las técnicas τ_{711} y τ_{712}, puesto que sus pasos se justifican en las propiedades de equivalencia de inecuaciones y los cuales se encuentran explicitados en los libros didácticos (ver Figura 54), podemos afirmar que la tecnología de la técnica se encuentra presente en la colección de libros didácticos.

Propiedades

Para resolver inecuaciones, hay que ir transformándolas en otras equivalentes más sencillas. Para ello, hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene una inecuación equivalente a la primera.

$$\text{Si } A \leq B \longrightarrow A + C \leq B + C$$

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número mayor que cero, se obtiene otra inecuación equivalente.

$$\text{Si } A \leq B \text{ y } C > 0 \longrightarrow A \cdot C \leq B \cdot C$$

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número menor que cero, se obtiene otra inecuación equivalente a la dada, con el sentido de la desigualdad cambiado.

$$\text{Si } A \leq B \text{ y } C < 0 \longrightarrow A \cdot C \geq B \cdot C$$

Figura 54. Justificación de la técnica τ_{712} en el TE3

Fuente: Perú d (2016, p. 77)

Borello (2010) señala que la práctica de comparar, donde la técnica de resolución de inecuaciones es una herramienta para poder realizar la práctica de comparar, es una tarea que se ha dejado de lado en la educación secundaria, y es necesario retomar en la práctica dichas tareas que son la razón de ser de las inecuaciones, así por ejemplo, identificar si una sucesión es creciente o decreciente. A partir de nuestro análisis praxeológico podemos verificar la poca presencia del tipo de tarea comparar expresiones, al respecto, Borello (2010) recomienda elaborar actividades o tareas "que permitan al estudiante manejar situaciones de desigualdad las que, a su vez, necesitarán de herramientas aptas al manejo de dichas desigualdades, es decir, las inecuaciones" (p. 163).

T_8: Justificar las técnicas de resolución

El tipo de tarea T_8 engloba los problemas que se refieren a la justificación de los procedimientos o pasos de las técnicas de resolución de inecuaciones. A continuación mostraremos la tarea identificada y los libros didácticos en los cuales se identificaron. Las técnicas para resolver los problemas que conforman la tarea, no son técnicas algorítmicas o estructuradas, de allí que no es posible caracterizarlas, pero la justificación de ellas se fundamenta en el bloque tecnológico-teórico de los tipos de tarea T_1, T_2, T_3 y T_4.

t_{81}: Justificar los procedimientos o pasos de las técnicas de resolución de inecuaciones

Dicha tarea la identificamos en el CT1 en la ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) preguntas 3 de *reflexiona* de en la pág. 207. En el CT2 en la Ficha 34 (***Perforación de pozos***) ítem 3 de *reflexiona* en la pág. 163. En el CT3 en las fichas: ***Promedio de notas*** en la pregunta 11 de la pág. 43, ***¿Quién tiene razón?*** en la pregunta 5, 6 y la pregunta 2 de *heteroevaluación* de la pág. 48 y pág. 49, ***Un lugar para estacionar*** en la pregunta 1 de *coevaluación* de la pág. 51, ***Un sinfín de colores*** en la pregunta 7 de la pág. 53, ***El más rápido*** pregunta 1 y 2 de la pág. 55.

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea T_8, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas.

Identificamos la tarea t_{81} en el CT1, como problema propuesto, donde se cuestiona acerca de la diferencia entre el conjunto solución de una ecuación y de una inecuación.

¿Será posible que una ecuación y una inecuación tengan el mismo conjunto solución?

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 207)

Así mismo, en el CT2, identificamos un problema para reconocer las palabras que están relacionadas con el planteamiento de una inecuación, mostramos a continuación la pregunta en cuestión.

¿Las palabras "máxima" y "distancia" te orientaron a plantear una ecuación o una inecuación?

Fuente: Adaptado de Perú c (2016, p. 163)

Mientras que en el CT3, identificamos 8 problemas, en el ejemplo que mostraremos a continuación, se cuestiona acerca de las propiedades de desigualdades al resolver un sistema de inecuaciones.

Si se suma una cantidad negativa a los tres miembros de la inecuación ¿cambia la relación de la inecuación?

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 48)

Como se puede observar en los ejemplos mostrados, no es posible caracterizar una técnica que permita hacer los problemas que conforman la tarea, pues las preguntas son diversas y se plantean en referencia a la resolución de las inecuaciones. Sin embrago, la justificación de las técnicas que permiten resolver los problemas que conforman la tarea $\boldsymbol{t_{81}}$, si la identificamos en los libros didácticos pues son las mismas justificaciones de las técnicas de los tipos de tarea $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_4}$.

T_9: Determinar el conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas

El tipo de tareas $\boldsymbol{T_9}$ está conformado por las tareas en las cuales se presenta una inecuación lineal con dos incógnitas y se pide determinar su conjunto solución, pero para resolver dicha tarea es necesario hacer uso de la representación gráfica en el plano cartesiano de la inecuación. Por lo tanto, el segundo nivel de justificación de la técnica para resolver las tareas que lo conforman se encuentra en la teoría de la geometría analítica y la tecnología es la representación de rectas.

A continuación mostraremos las tareas identificadas y los libros de texto en los cuales se ubicaron, así como su técnica y el bloque tecnológico-teórico que justifica la técnica.

t_{91}: ***Determinar o identificar el conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas a partir de su representación en el plano cartesiano.***

Dicha tarea la podemos encontrar en el libro CT1 en la Ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem i, j y m de problema 2 (Calidad asegurada) en la pág. 210; ítem b del problema 3 (¡Cuidado! Máquina trabajando) en la pág. 211. Mostramos a continuación un ejemplo de representativo de la tarea.

Una empresa se encarga de ensamblar dos tipos de máquinas. Estima que en el armado de la máquina X por cada pieza mal colocada genera un costo de S/. 2 y por cada pieza mal ubicada en la máquina Y produce un costo de S/. 1. Estos costos no ponen en riesgo las ganancias si no sobrepasan los S/. 6 por hora. Para presentar el conjunto de piezas que se pueden ubicar mal y no generar pérdidas se realiza la gráfica asociada a los valores establecidos. Para ello, se debe establecer la ecuación que represente dicha situación, en la cual se presente la suma de los costos que se generan por la mala ubicación de las piezas de cada máquina que no exceda los S/. 6. ¿Cuál de las siguientes gráficas presenta el conjunto solución de la situación? Para esto se recomienda establecer la inecuación que modele el costo máximo en pérdidas por la mala ubicación de piezas en ambas máquinas.

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 209)

La Figura 55 muestra las gráficas a las que se refiere el problema propuesto.

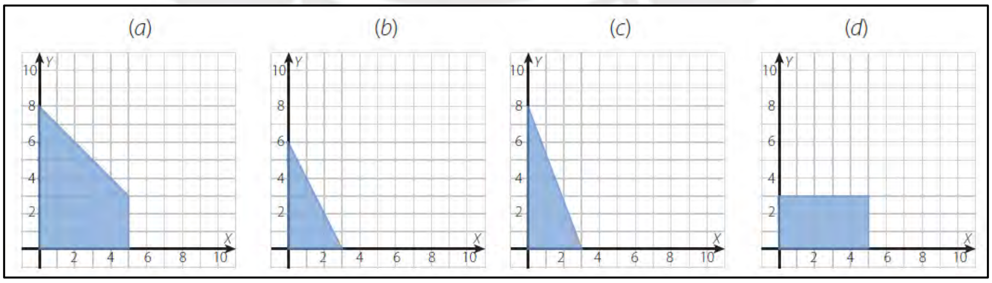


Figura 55. Alternativas de la representación gráfica del conjunto solución de una inecuación. Fuente: Perú c (2015, p. 209)

En el TE1 no se encuentra un problema resuelto de la tarea del tipo ***T*₉**, pero identificamos en las preguntas que se plantean en el CT1, respecto al problema 2 (Calidad asegurada), un esbozo de la técnica para identificar el conjunto solución.

Técnica (τ_{911}):

Paso 1: Usar la técnica τ_{111} para representar la inecuación.

$2x + y \leq 6$

Paso 2: Usar la técnica τ_{121} para obtener los valores de x e y que satisfacen la desigualdad y colocarlas en una tabla.

x	0	0	0	0	0	…
y	6	5	4	3	2	…

Paso 3: Representar los puntos $(x;y)$ en el plano cartesiano de la tabla.

En la Figura 56, se tiene la representación en el plano cartesiano de los puntos $(x;y)$ que son soluciones de la inecuación.

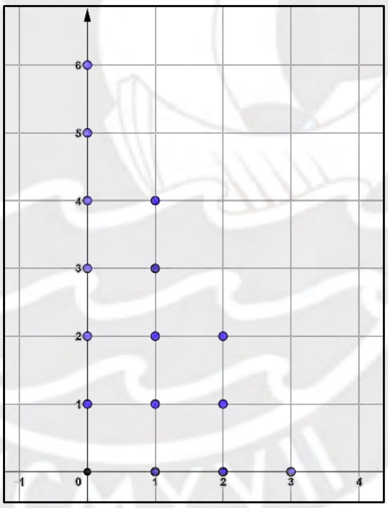


Figura 56. Representación en el plano cartesiano de los puntos (x;y)

Fuente: Elaboración propia.

Paso 4: Compara la gráfica con las gráficas propuestas e identificar el conjunto solución.

El gráfico obtenido corresponde a la alternativa (b)

Tecnología (θ):

θ_1: Significado de los signos de desigualdad en el lenguaje natural

θ_3: Definición de conjunto solución de una inecuación

θ_{15}: Representación gráfica de una recta

***t_{92}*: Determinar la solución en la representación del conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas, al restringir la incógnita x a un valor x_0**

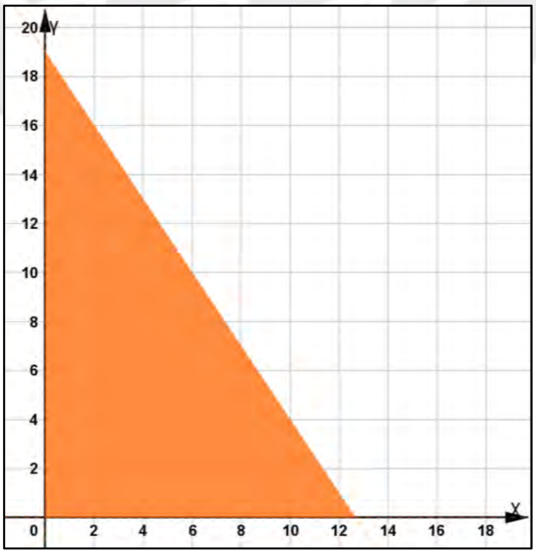
La tarea la encontramos en el CT1 en la ficha 45 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) ítem c y d del problema 3 (¡Cuidado! Máquina trabajando) en la pág. 211.

Un ejemplo representativo de la tarea el ítem c y d del problema 3 (¡Cuidado! Máquina trabajando) del CT1.

El uso continuo de la maquinaria genera el llamado estrés del material, producto de su dilatación lo cual genera riesgos de fisuras y deformaciones importantes que impiden su correcto funcionamiento. Por este motivo, cada fabricante da unas especificaciones que se deben cumplir para su óptimo desempeño. Por ejemplo; el fabricante de una máquina ensambladora determina que solo puede ser usada un máximo de 38 horas diarias. Esta máquina se utiliza para ensamblar dos productos: el primero necesita 3 horas, mientras que el segundo 2 horas.

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 210)

Una vez que se obtiene la inecuación $3x+2y\leq 38$ y la representación de su conjunto solución.



Fuente: Elaboración propia.

La técnica para hacer la tarea, la caracterizamos de las indicaciones que se dan en el ítem c y d.

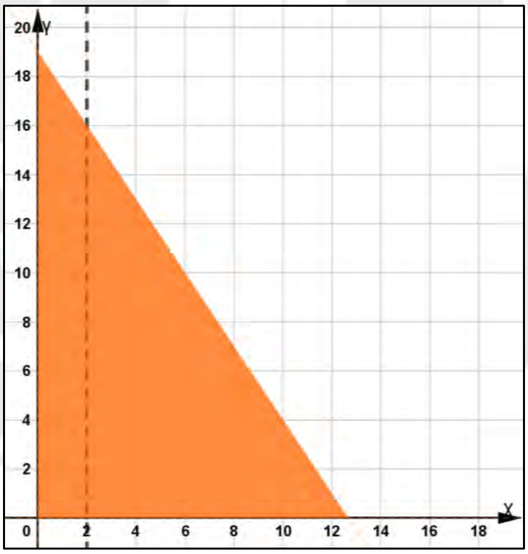
> ***c.*** *Traza una línea punteada vertical tal que pase por x = 2 y determina el intervalo de la recta en valores de y que se encuentran dentro de la región sombreada.*
>
> ***d.*** *Completa:*
>
> • *El segmento empieza en y =_____ y termina en y = ________*
>
> • *Por tanto, los valores de y están en el intervalo: ____________*

Fuente: Adaptado de Perú c (2015, p. 211)

Técnica (τ_{921}):

Paso 1: Trazar una línea punteada vertical que pasa por $x = x_0$.

Trazar la línea punteada vertical que pasa por $x = 2$



Fuente: Elaboración propia.

Paso 2: Identificar los valores de inicio y final del segmento que se encuentra dentro de la región sombreada, y representarlos en un intervalo.

El segmento comienza en $y = 0$ y termina en $y = 16$, de allí que los valores de y están en el intervalo $[0;16]$.

Tecnología (θ):

θ_2: Representación del conjunto solución de una inecuación

θ_{15}: Representación gráfica de una recta

Evaluación de las tareas que conforman el tipo de tarea *T_9*, las técnicas identificadas que permiten hacer las tareas y el bloque tecnológico-teórico que permite justificar las técnicas

En el CT1, identificamos 3 problemas propuestos de la tarea t_{91}, y solo 1 problema propuesto de la tarea t_{92}. Las técnicas no son efectivamente elaboradas, pues como ya se mencionó, se caracterizaron a partir de las indicaciones dadas en las preguntas.

Así mismo, no identificamos la justificación de las técnicas caracterizadas en el TE1, salvo los pasos que involucran la representación mediante una expresión algebraica la condición de desigualdad. De allí que, la presencia de dicho tipo tarea en el CT1 no es pertinente, pues los estudiantes no tienen la tecnología y una técnica efectivamente elaborada que le permita desarrollar los problemas que conforman las tareas. Pero, el tipo de tarea T_9 si podría estar presente en los libros didácticos que corresponden a los siguientes años de estudio, puesto que se tienen ya los elementos tecnológicos suficientes que permitan justificar la técnica para su desarrollo.

CAPITULO V: COMPLETITUD DE LA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA RECONSTRUIDA

En el presente capítulo, exponemos el análisis de la praxeología matemática reconstruida en base a los 7 indicadores de completitud propuestos por Fonseca (2004). Este análisis nos permitirá identificar el grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida en torno a las inecuaciones lineales. Para realizar dicho análisis tomamos como referencia los trabajos de Fonseca (2004) y Serrano (2013).

PML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico

Según Fonseca (2004) la integración de los tipos de tareas depende de la relación que se puede encontrar entre las diferentes técnicas que integran la PML de estudio. Así pues, en la praxeología matemática reconstruida en torno a las inecuaciones lineales, identificamos la integración de los tipos de tareas T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6. Puesto que las técnicas para resolver las tareas que conforman el tipo de tarea T_1, permiten obtener la transformación del lenguaje natural al algebraico de un problema dado en texto, así como las distintas representaciones del conjunto solución de una inecuación, de allí que dichas técnicas se relacionan con las técnicas para resolver los tipos de tareas T_3, T_4, T_5, y T_6, los cuales son parte del género de tareas *resolver*, y además estos tipos de tareas más el tipo de tarea T_7 (Comparar expresiones) están integrados, pues las técnicas para resolver las tareas que los conforman son variaciones y/o ampliaciones de ellas (las técnicas), así mismo, dichas técnicas se justifican en las propiedades de desigualdades, es decir bajo un mismo bloque tecnológico-teórico.

Respecto al tipo de tarea T_8 (Justificar las técnicas de resolución), esta se integra con los tipos de tareas mencionados en el párrafo anterior, pues en dicho tipo de tarea encontramos tareas relativas al cuestionamiento tecnológico de las técnicas de los tipos de tarea T_3, T_4, T_5, y T_6. Podemos mencionar como ejemplo, la pregunta 6 en el CT3, una tarea que corresponde al tipo T_7, en la cual se tiene que justificar la técnica, puesto que la relación de desigualdad cambia, si la cantidad a multiplicar es un número negativo.

***6.** Si se multiplica por una misma cantidad a los miembros de la inecuación ¿cambia la relación de la inecuación?*

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 49)

En contraste, tenemos la tarea $\boldsymbol{T_9}$, que es un tipo de tarea aislado en la praxeología matemática reconstruida, pues las técnicas caracterizadas no se relacionan con las técnicas trabajadas en los tipos de tareas asociados al género de tarea *resolver*, ya que para poder hacer una tarea del tipo $\boldsymbol{T_9}$, es necesario la representación en el plano cartesiano, cuya tecnología la encontramos en la geometría analítica. Además, los problemas que conforman dicho tipo de tareas solo la encontramos presente en el CT1, que corresponde al primero de educación secundaria.

En síntesis, a partir de la reconstrucción de las técnicas presentes en los libros de texto analizados, podemos concluir que hay una integración de los tipos de tareas identificados, a excepción del tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$, cuya justificación y descripción de la técnica lo encontramos en la geometría analítica. En lo que se refiere a la existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, son pocas las tareas presentes en los libros didácticos que permitan realizar dicho cuestionamiento tecnológico (ver Tabla 22), lo que confirma lo expuesto por Sierra, Bosch y Gascón (2013), al afirmar que la presencia de cuestiones relacionadas al cuestionamiento tecnológico de las técnicas es una práctica ausente en el ámbito de la educación secundaria.

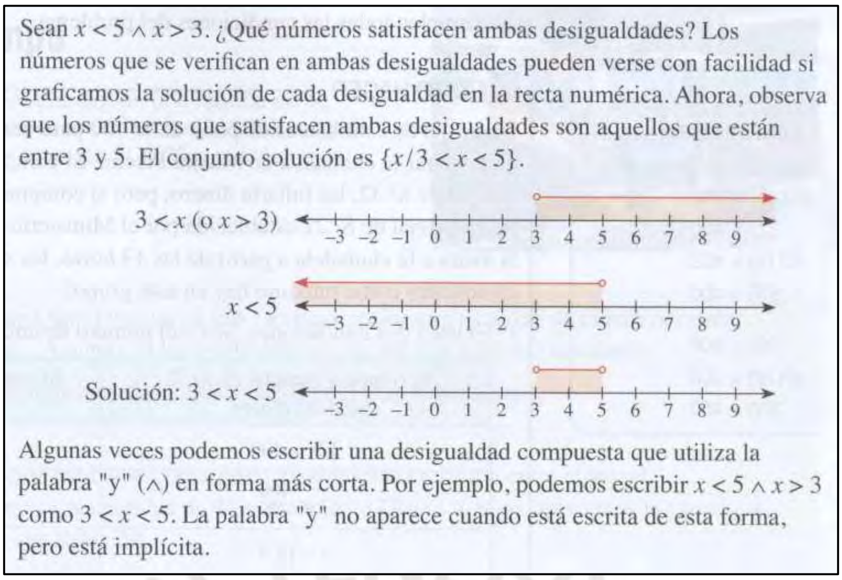
Tabla 22*. Cuestiones relativas al cuestionamiento tecnológico de la técnica*

Libro didáctico	Tarea	Ubicación en el libro didáctico
CT1	$\boldsymbol{t_{61}}$	Ficha 44 (***Aplicaciones de inecuaciones en variadas situaciones***) pregunta 2 de *reflexiona* de Finalicemos en la pág. 207
CT3	$\boldsymbol{t_{71}}$	Ficha: ***Promedio de notas*** en la pregunta 11 de la pág. 43, ***¿Quién tiene razón?*** en la pregunta 5, 6 y la pregunta 2 de *heteroevaluación* de la pág. 48 y 49.

PML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas

En la reconstrucción de la praxeología matemática de nuestro objeto de estudio, hemos identificado para los tipos de tarea T_2, T_3, T_4, T_5 al menos dos técnicas. Así por ejemplo, en el tipo de tarea T_3 (Resolver una inecuación lineal con una incógnita), de las tres técnicas identificadas para la resolución de las tareas t_{31} y t_{33}; una técnica es la ampliación de la otra técnica, así pues, las técnicas τ_{311} y τ_{331} permiten hacer transformaciones algebraicas a inecuaciones, donde no todos los coeficientes son fraccionarios, para el caso de que todos los coeficientes son fracciones identificamos las técnicas τ_{311*} y τ_{331*}. Los pasos que conforman las técnicas mencionadas se consideran hasta obtener una expresión algebraica equivalente a la forma $x<m$, o sus respectivas variantes respecto al signo de desigualdad, ahora, si se quiere obtener la representación en lenguaje natural o mediante intervalo o en la recta numérica del conjunto solución, se tienen las técnicas τ_{312} y τ_{332}; las cuales se obtienen integrando a las técnicas τ_{311} (o τ_{311*}) y τ_{331} (τ_{331*}) los pasos de las técnicas τ_{121} y/o τ_{131}; las cuales permiten representar el conjunto solución de una inecuación.

Mientras que, para el tipo de tarea T_4 (Resolver un sistema de dos inecuaciones lineales), dos de sus técnicas identificadas para realizar las tareas t_{41} y t_{42} son variaciones, una de la otra, pues el primer paso de las técnicas τ_{411} y τ_{421} consiste en identificar las dos inecuaciones del sistema y resolver cada una de ellas mediante las técnicas τ_{311} y/o τ_{331}; en cambio en las técnicas τ_{412} y τ_{421} se realizan directamente las transformaciones algebraicas al sistema de inecuaciones planteado. Además, podemos identificar un criterio para elegir entre ellas en el TE3, pues encontramos la descripción de las técnicas τ_{411} y τ_{412}, en la cual se muestra la economía de la técnica τ_{412}, puesto que se puede obviar la intersección de intervalos en la representación en la recta numérica y escribir de forma directa la inecuación de la forma $3<x<5$, tal como podemos ver en la Figura 57.


Sean $x < 5 \wedge x > 3$. ¿Qué números satisfacen ambas desigualdades? Los números que se verifican en ambas desigualdades pueden verse con facilidad si graficamos la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Ahora, observa que los números que satisfacen ambas desigualdades son aquellos que están entre 3 y 5. El conjunto solución es $\{x / 3 < x < 5\}$.

Algunas veces podemos escribir una desigualdad compuesta que utiliza la palabra "y" ($\wedge$) en forma más corta. Por ejemplo, podemos escribir $x < 5 \wedge x > 3$ como $3 < x < 5$. La palabra "y" no aparece cuando está escrita de esta forma, pero está implícita.

Figura 57. Descripción y comparación de las técnicas τ_{411} y τ_{412}

Fuente: Perú d (2016, p. 79)

Por último, para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$ (Resolver un sistema conformado por una inecuación lineal o sistema de inecuaciones lineales y una inecuación lineal) identificamos dos técnicas para la tarea $\boldsymbol{t_{51}}$, contrario a las técnicas identificadas para los tipos de tarea $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_4}$, las técnicas $\boldsymbol{\tau_{511}}$ y $\boldsymbol{\tau_{512}}$ no son ampliaciones o variaciones una de la otra, puesto que en los pasos de técnica $\boldsymbol{\tau_{511}}$ no se realiza tratamiento algebraico alguno, tal como se puede ver en la Figura 58.

CÓMO HACER

EN CONTEXTO

El índice de masa corporal (IMC) de una persona se calcula dividiendo su peso en kilogramos entre el cuadrado de su estatura en metros. Si el IMC de Javier y Dante es de, aproximadamente, 35 kg/m^2 y sus estaturas son de 1,64 m y 1,52 m, respectivamente, ¿en qué intervalo se encuentran los pesos de Javier y Dante si el error en el IMC es menor de un décimo?

- Determinamos el intervalo del IMC tomando en cuenta como error un décimo: $34{,}9 < \text{IMC} < 35{,}1$
- Expresamos algebraicamente: $\text{IMC} = \dfrac{\text{Peso (kg)}}{\text{Altura (m)}^2}$
- Calculamos el peso en cada extremo del intervalo de cada persona, con aproximación por redondeo al décimo:

Javier	Dante
$34{,}9 = \dfrac{x}{1{,}64^2} \rightarrow x = 93{,}867 \approx 93{,}9$ kg	$34{,}9 = \dfrac{x}{1{,}52^2} \rightarrow x = 80{,}632 \approx 80{,}6$ kg
$35{,}1 = \dfrac{x}{1{,}64^2} \rightarrow x = 94{,}404 \approx 94{,}4$ kg	$35{,}1 = \dfrac{x}{1{,}52^2} \rightarrow x = 81{,}095 \approx 81{,}1$ kg

- Establecemos el intervalo en que están los pesos de ambos: $]80{,}6; 94{,}4[$

Los pesos de Javier y Dante se encuentran en el intervalo $]80{,}6; 94{,}4[$.

Figura 58. Técnica τ_{511}

Fuente: Perú d (2016, p. 21)

Tal como se muestra, la técnica τ_{511} consiste en tratar una inecuación como una ecuación, de ese modo se toma los valores de la cota superior e inferior de la inecuación para luego reemplazarlos en la ecuación lineal, y así obtener las cota inferior y/o superior de la incógnita a acotar. En contraste con la técnica τ_{512}, en la cual se privilegia el tratamiento algebraico.

Pues bien, la técnica dominante para la resolución de inecuaciones para los tipos de tarea identificados en los libros didácticos analizados, tiene su fundamento en el tratamiento algebraico. Así, confrontando con las propuestas en las investigaciones de Bazzini y Boero (2004), Giusti (2007) y Conceição (2011), quienes proponen incluir una técnica para la resolución de inecuaciones, la cual se fundamenta en el enfoque basado en funciones. En nuestro análisis praxeológico, no identificamos dicha técnica (a la cual Assude (2002) denomina técnica funcional-gráfica) en los libros didácticos, salvo para el tipo de tarea T_9, pero como ya se mencionó está solo presente en el CT1.

Al respecto, luego de la revisión de los libros didácticos encontramos elementos tecnológicos que podrían justificar la técnica funcional-gráfica, y a su vez podrían servir para realizar el cuestionamiento tecnológico de la técnica algebraica. Un ejemplo de un elemento tecnológico que permite considerar introducir la técnica funcional-gráfica en la resolución de inecuaciones, lo encontramos en el TE3, en el cual se muestra una técnica para obtener la resolución grafica de un sistema de ecuaciones, tal como que se puede observar en la Figura 59.

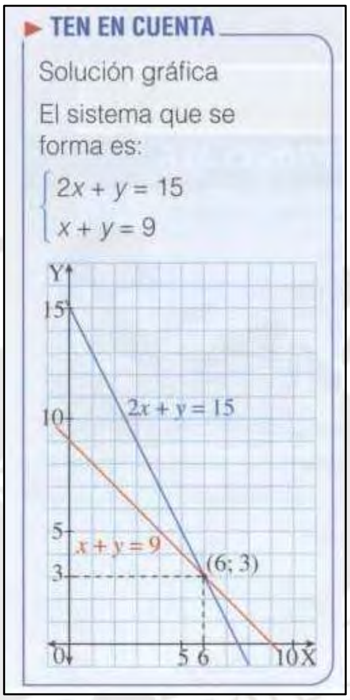


Figura 59. Solución gráfica de un sistema de ecuaciones

Fuente: Perú d (2016, p. 68)

Así por ejemplo, si se pide resolver la inecuación $15-2x<9-x$, la técnica gráfico funcional consiste en obtener las representaciones gráficas en el plano cartesiano de las funciones $f(x)=15-2x$ y $g(x)=9-x$, cuyas representaciones la encontramos en la Figura 59, identificamos el punto de intersección de las representaciones gráficas, que en nuestro caso es $(6;3)$, podemos así identificar como el conjunto solución de la inecuación a los valores que se encuentran a la derecha del 6, esto si consideramos que el símbolo $<$ se puede interpretar en el lenguaje natural como *debajo de*, por consiguiente obtenemos el conjunto solución de la inecuación propuesta.

En conclusión, solo en los tipos de tareas $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_5}$ identificamos dos técnicas distintas para resolver las tareas que las conforman. Además, solo encontramos un elemento tecnológico que nos permitan obtener un criterio para poder elegir entre la técnica más fiable y económica para la resolución de las tareas en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$.

PML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas

La técnica dominante identificada en la colección de libros didácticos es la técnica algebraica, de allí que el objeto ostensivo predominante para representar la técnica es la representación algebraica, pero también, podemos encontrar algunas tareas en la que se hace uso de la representación tabular como medio para comprobar los valores que satisfacen una inecuación lineal de una incógnita, tal como podemos ver en la Figura 60. Además, podemos encontrar la representación verbal que permite describir la técnica algebraica, tal como se muestra en la Figura 61.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen cierta la desigualdad. Estos valores son las raíces de la inecuación. Así, la desigualdad $x + 3 < 7 - x$ es una inecuación, ya que si damos valores a x, obtenemos:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$x+3$	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$7-x$	…	10	9	8	7	6	5	4	…
	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$=$	$>$	$>$

- Para los valores de x menores que 2, se verifica que $x + 3 < 7 - x$.
- Para el valor de x igual a 2: $x + 3 = 7 - x$
- Para los valores de x mayores que 2: $x + 3 > 7 - x$

Figura 60. Comprobación de valores que cumplen con la desigualdad algebraica

Fuente: Perú d (2016, p. 77)

CÓMO HACER

Resuelve la desigualdad $-2 < \frac{4-3x}{5} \leq 8$.

- Multiplicamos las tres partes por 5 para eliminar el denominador:
  $-2(5) < (5)\frac{4-3x}{5} \leq 8(5) \rightarrow -10 < 4 - 3x \leq 40$
- Restamos 4 a las tres partes:
  $-10 - 4 < 4 - 3x - 4 \leq 40 - 4 \rightarrow -14 < -3x \leq 36$
- Dividimos entre -3 las tres partes de la desigualdad:
  $\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{36}{-3} \rightarrow \frac{14}{3} > x \geq -12$

Como por lo general escribimos desigualdades con el valor más pequeño a la izquierda, reescribimos la solución como: $-12 \leq x < \frac{14}{3}$

C.S. $= [-12; \frac{14}{3}[$

Figura 61. Representación verbal de la técnica τ_{432^*}

Fuente: Perú d (2016, p. 79)

Si bien es cierto, identificamos la representación tabular y verbal como objetos ostensivos para representar las técnicas en los textos escolares, estas no son suficientemente usadas en los cuadernos de trabajo, pues como ya mencionamos en el párrafo anterior la representación algebraica es el objeto ostensivo de mayor uso.

Serrano (2013) menciona que “la variabilidad y flexibilidad de las técnicas supone que se acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas e incluso de la tarea específica abordada dentro de un mismo tipo de tareas” (p. 27). Así por ejemplo, la técnica gráfico funcional, la cual describimos en el segundo indicador del grado de completitud de Fonseca, permitiría el uso de la representación gráfica como objeto ostensivo en las tareas de resolver inecuaciones.

Solo para el tipo de tarea ***T*₉**, se hace uso de la representación tabular y gráfica para la resolución de las tareas que lo conforman, para ello primero se presenta una lista de gráficas, como se observa en la Figura 62, de las cuales se identificará cual representa al conjunto solución de la inecuación, la cual se obtiene a partir de un problema en contexto, cuya inecuación es $2x+y\leq 6$, con la restricción de que ambas incógnitas no son negativas.

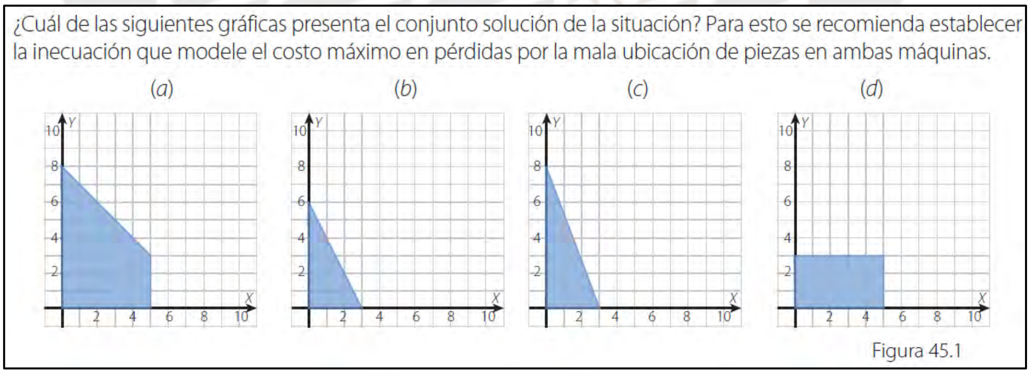


Figura 62. Representación gráfica del conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas

Fuente: Perú c (2015, p. 209)

Pues bien, con el fin de poder identificar la representación gráfica del conjunto solución de la inecuación, el CT1 describe la técnica, para la cual se hace uso de la representación tabular en el ítem g y h, luego en el ítem i se hace uso de la representación gráfica en el plano cartesiano, pues se pide ubicar en el plano cartesiano los puntos que satisfacen la inecuación de dos incógnitas, los cuales han sido ubicados en la tabla del ítem h, y finalmente se pide comparar la gráfica obtenida con las que son propuestas para poder identificar el conjunto solución de la inecuación. Mostramos a continuación la manera en la que se describe la técnica en el CT1, para la identificación del conjunto solución de la Figura 63.

Diseño una estrategia

g. Completa la siguiente tabla:

Máquina *X*		Máquina *Y*	
Piezas mal ubicadas	Costo de pérdida	Piezas mal ubicadas	Costo de pérdida
0		0	
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
6		6	

Tabla 45.1

h. Plantea las parejas de piezas mal ubicadas por hora que no permiten exceder el costo de pérdida.

X				
Y				

Tabla 45.2

Figura 63. Representación tabular para la determinación del conjunto solución

Fuente: Perú c (2015, p. 210)

PML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

Respecto a este criterio, en el cual se afirma, que deberían existir para alguna de las técnicas y tareas de la praxeología matemática, sus respectivas técnicas y tareas inversas. En la tabla 23 mostramos las tareas y sus respectivas tareas inversas, las cuales fueron identificadas en los libros didácticos analizados.

Tabla 23. *Tareas y sus respectivas tareas inversas*

Tarea	Tarea inversa
t_{11}: *Representar una desigualdad usando los signos de desigualdad* $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, *a partir del lenguaje natural*	t_{12}: *Representar una desigualdad en lenguaje natural, a partir de una expresión dada mediante los signos de desigualdad* $<$, $>$, $\leq$, $\geq$
t_{13}: *Representar una desigualdad mediante un intervalo y/o en la recta numérica, a partir de una expresión*	t_{14}: *Representar una desigualdad mediante notación de intervalo o usando los signos de desigualdad*

dada mediante los signos de desigualdad $<, >, \leq, \geq$	$<, >, \leq, \geq$; *a partir de su representación en la recta numérica.*

Como se puede ver en la tabla mostrada, solo se identificaron dos tareas y sus respectivas inversas en los libros didácticos analizados, dichas tareas pertenecen al tipo de tarea ***T*1**, el cual pertenece al género de tareas *representar*.

La cuestión que se plantea es ¿si es posible plantear tareas inversas a los demás tipos de tareas?, en respuesta a esa pregunta, identificamos en nuestros antecedentes que una de las recomendaciones de Tsamir y Bazzini (2001) es que se debería incluir tareas donde dada una solución, se pida determinar una inecuación para la cual la solución dada sea su solución.

De ese modo, los problemas que planteamos a continuación serian tareas inversas a las tareas que conforman el tipo ***T*3** y ***T*4**.

- *A partir del conjunto* $S=\langle 1;4\rangle$ *determinar una inecuación cuya solución sea el conjunto* S *.*
- *Si* $-2\leq x<3$ *acotar la expresión* $2x-5$*.*
- *Determine una inecuación cuyo conjunto solución sea el conjunto de números reales.*
- *Determine una inecuación cuyo conjunto solución sea vacío.*
- *Determine un sistema de inecuaciones cuya solución sea* $\{-3\}$*.*

El ultimo problema planteado seria la inversa de una tarea que no se encuentra presente en la colección de libros, que es un sistema de inecuaciones lineales de la forma $ax+b<c$ y $dx+e<f$, un ejemplo de dicha tarea mostraremos a continuación, donde su conjunto solución es $\{5\}$.

Resolver el sistema de inecuaciones $x-3\leq 2 \wedge -5x+2\leq -23$*.*

En síntesis, encontramos poca presencia de tareas inversas en el análisis de la praxeología matemática reconstruida en la colección de libros didácticos analizados.

PML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas y PML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

Fonseca (2004) señala que “los diferentes indicadores no son independientes entre sí y que algunos indicadores de la completitud hacen referencia a aspectos globales de la organización matemática en cuestión” (p. 183). Añade que un ejemplo son los indicadores de completitud PML5 y PML6, de allí que hemos considerado ambos criterios en conjunto, para el análisis de la praxeología matemática reconstruida.

Así pues, en referencia a la interpretación del funcionamiento de aplicar las técnicas, identificamos en el tipo de tarea T_2 (Comprobar) la técnica que permite la interpretación del funcionamiento de la técnica algebraica, para la resolución de inecuaciones, como ejemplo tenemos la pregunta 10 en CT3, donde se pide comprobar cualquier valor del intervalo obtenido luego de aplicar las técnicas τ_{111} y τ_{432^*} en las preguntas 8 y 9 respectivamente.

***8.** Simboliza la expresión algebraica que representa la expresión “la mitad de la suma de la temperatura registrada más 1°C no será menor que -3°C ni mayor que 2°C.*   ***9.** Determina el intervalo solución (temperaturas registradas) de la expresión simbólica mencionada en la pregunta anterior y ubícalo en la recta numérica en la recta numérica.*   ***10.** Reemplaza cualquier valor del intervalo donde se ubica la temperatura registrada en la expresión $\frac{x+1}{2}$ y comprueba que el resultado pertenece al intervalo $[-3;2]$*

Fuente: Adaptado de Perú e (2016, p. 15)

Por otra parte, en referencia a la interpretación del resultado obtenido de aplicar una técnica, podemos encontrar dicha tarea en la resolución de tareas matemáticas abiertas, según Fonseca (2004):

> En un primer nivel, las tareas abiertas son aquellas en las que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (como, por ejemplo, valores numéricos) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea (p. 183).

En la colección de libros didácticos analizados, encontramos pocas tareas donde los datos son tratados como parámetros y las incógnitas no son prefijadas de antemano, en el tipo de tareas $\boldsymbol{T_6}$ y $\boldsymbol{T_7}$ encontramos las tareas matemáticas abiertas, un ejemplo de una tarea matemática abierta se observa en la Figura 64, donde los datos y las incógnitas no están previamente establecidas.

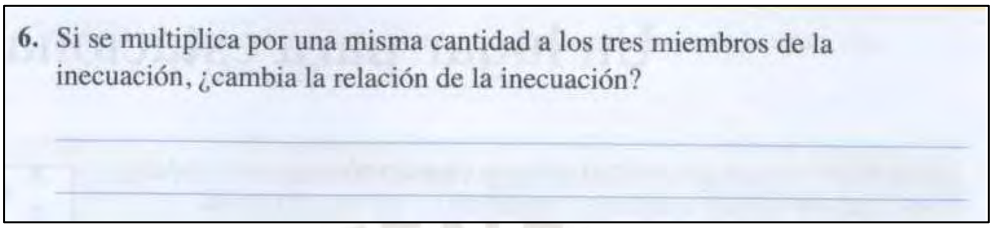
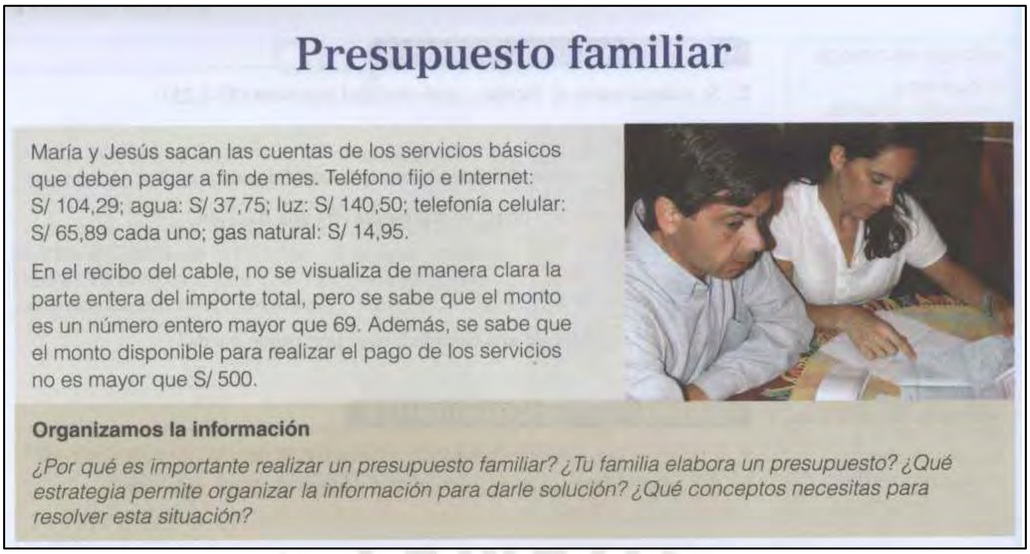

6. Si se multiplica por una misma cantidad a los tres miembros de la inecuación, ¿cambia la relación de la inecuación?

Figura 64. Tarea matemática abierta

Fuente: Perú e (2016, p. 49)

Fonseca (2004) señala que en un segundo nivel de tareas matemáticas abiertas se encuentran las tareas de modelización matemática, en las que se debe de escoger los datos e identificar las incógnitas, ya sea a partir de una situación extramatemática o intramatemática. Tras la revisión de los libros didácticos, encontramos en los cuadernos de trabajo de los cinco años de estudio, tareas de modelización matemática relacionadas a nuestro objeto de estudio, un ejemplo de ello lo encontramos en la Figura 65, en la cual es necesario interpretar el resultado obtenido de aplicar la técnica, puesto que se establece que el monto desconocido es un número entero, de allí que para su solución se debe considerar un conjunto restringido a los números enteros.

Ahora bien, en contraste a lo que señala Fonseca (2004) respecto a los datos e incógnitas de las tareas de modelización matemática, por lo general en las tareas de modelización matemática propuestas en los libros didácticos analizados, la cantidad de datos para su resolución son dados de manera exacta, dejando de lado la posibilidad de que el estudiante escoja los datos e incógnitas que permitan resolver la tarea.



Presupuesto familiar

María y Jesús sacan las cuentas de los servicios básicos que deben pagar a fin de mes. Teléfono fijo e Internet: S/ 104,29; agua: S/ 37,75; luz: S/ 140,50; telefonía celular: S/ 65,89 cada uno; gas natural: S/ 14,95.

En el recibo del cable, no se visualiza de manera clara la parte entera del importe total, pero se sabe que el monto es un número entero mayor que 69. Además, se sabe que el monto disponible para realizar el pago de los servicios no es mayor que S/ 500.

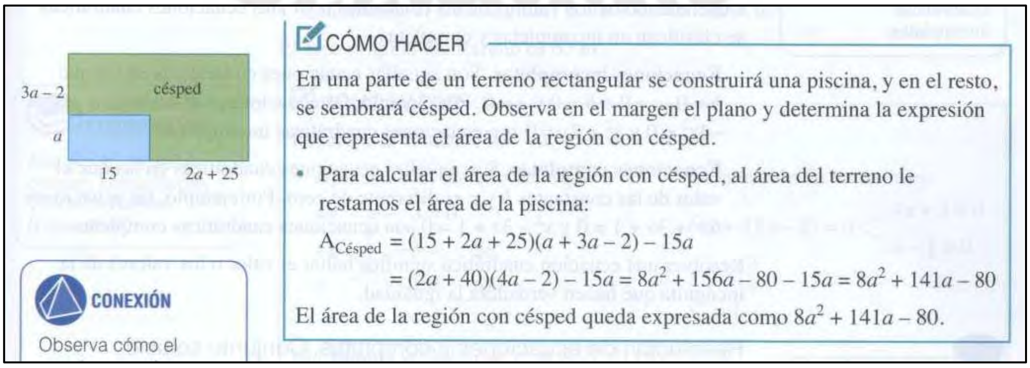
Organizamos la información

¿Por qué es importante realizar un presupuesto familiar? ¿Tu familia elabora un presupuesto? ¿Qué estrategia permite organizar la información para darle solución? ¿Qué conceptos necesitas para resolver esta situación?

Figura 65. Tarea de modelización matemática

Fuente: Perú e (2016, p. 24)

Por otra parte, Assude (2002) en su trabajo de investigación identifica el tipo de tarea *solución de problemas con discusión sobre las condiciones de existencia de incógnitas*, cuya técnica consiste en identificar las ecuaciones o sistema de ecuaciones y luego realizar la discusión de las condiciones de desigualdad sobre las incógnitas de las ecuaciones. En los libros didácticos analizados identificamos problemas donde se podría realizar la discusión sobre las condiciones de existencia de las incógnitas dentro del contexto del problema propuesto, así por ejemplo, identificamos una tarea abierta en el TE3 (ver Figura 66), donde no se realiza la discusión de la existencia de la incógnita a, así se podría dar la condición de que $3a-2>0$.



CÓMO HACER

En una parte de un terreno rectangular se construirá una piscina, y en el resto, se sembrará césped. Observa en el margen el plano y determina la expresión que representa el área de la región con césped.

- Para calcular el área de la región con césped, al área del terreno le restamos el área de la piscina:

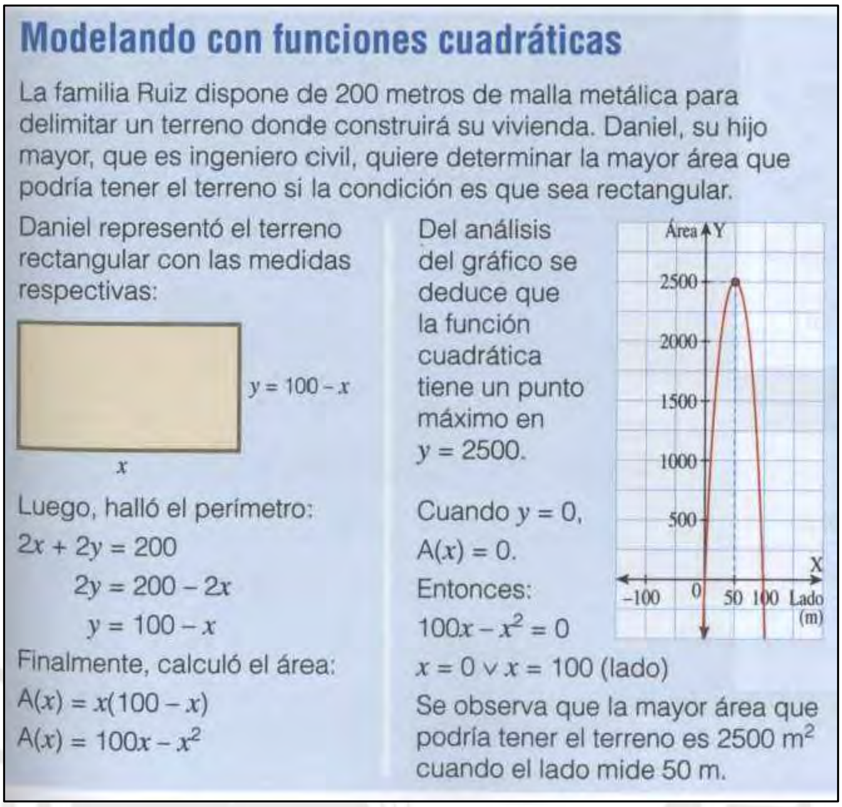
$$A_{\text{Césped}} = (15 + 2a + 25)(a + 3a - 2) - 15a$$
$$= (2a + 40)(4a - 2) - 15a = 8a^2 + 156a - 80 - 15a = 8a^2 + 141a - 80$$

El área de la región con césped queda expresada como $8a^2 + 141a - 80$.

Figura 66. Problema donde la condición de la incógnita a sería $3a-2>0$

Fuente: Perú d (2016, p. 87)

Del mismo modo, identificamos en un problema resuelto en el TE4 (ver Figura 67), donde se podría dar la condición sobre la incógnita de que $100 - x > 0$.



Modelando con funciones cuadráticas

La familia Ruiz dispone de 200 metros de malla metálica para delimitar un terreno donde construirá su vivienda. Daniel, su hijo mayor, que es ingeniero civil, quiere determinar la mayor área que podría tener el terreno si la condición es que sea rectangular.

Daniel representó el terreno rectangular con las medidas respectivas:

$y = 100 - x$

x

Luego, halló el perímetro:

$2x + 2y = 200$

$2y = 200 - 2x$

$y = 100 - x$

Finalmente, calculó el área:

$A(x) = x(100 - x)$

$A(x) = 100x - x^2$

Del análisis del gráfico se deduce que la función cuadrática tiene un punto máximo en $y = 2500$.

Cuando $y = 0$, $A(x) = 0$.

Entonces:

$100x - x^2 = 0$

$x = 0 \vee x = 100$ (lado)

Se observa que la mayor área que podría tener el terreno es 2500 m^2 cuando el lado mide 50 m.

Figura 67. Problema donde la condición de la incógnita x sería $100 - x > 0$

Fuente: Perú c (2016, p. 95)

PML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica

A partir del análisis de los libros didácticos podemos identificar la integración de los elementos tecnológicos de los tipos de tareas T_3, T_4, T_5, y T_6, que son tareas que pertenecen al género de tareas *resolver*. Sin embargo, en el análisis de la colección de libros, hemos identificado la ausencia de elementos tecnológicos de algunas tareas en los textos escolares, así por ejemplo, en el CT1 hemos identificado problemas donde es necesario usar la técnica para representar las soluciones de una inecuación lineal, pero en el TE1 no se identificaron los elementos tecnológicos que justifiquen la técnica, tal como señalamos en la evaluación de la técnica (ver pág. 84). Lo mismo ocurre con el tipo de tarea T_5, pues los elementos tecnológicos que permiten justificar la técnica es identificada en el TE3, pero identificamos una tarea del tipo de tarea T_5 en el CT1 (ver pág. 132). Así mismo, los elementos tecnológicos del tipo de tarea T_9 (Determinar el conjunto solución de una inecuación lineal de dos incógnitas) se encuentra totalmente aislado, pues no se articula con los elementos tecnológicos de los demás tipos de tarea, puesto que la tecnología que justifica la técnica se encuentra en la geometría analítica.

Señala Fonseca (2004) que "un indicador importante del grado de completitud de OML lo constituye la medida en que θ permita *construir técnicas nuevas* (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de OML" (p. 183). Así pues, identificamos la incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica hasta los libros didácticos que corresponden hasta el 3° de secundaria, en los libros didácticos posteriores no identificamos nuevas técnicas y en consecuencia una ampliación de los tipos de tareas, esto a pesar que se puede encontrar ciertos elementos tecnológicos que nos permitirían construir nuevas técnicas y por ende ampliar los tipo de tareas. En el TE4 y CT4 solo se proponen y resuelven tareas de inecuaciones lineales de una incógnita, mediante la técnica algebraica, mientras que en el TE5 y CT5 solo identificamos un problema resuelto de una inecuación lineal con una incógnita.

5.1 Grado de completitud de la praxeología matemática

Podemos afirmar que la praxeología matemática reconstruida en torno a las inecuaciones lineales en la colección de libros didácticos analizados, no es una praxeología matemática puntual (PMP), puesto que hemos identificado 9 tipos de tareas, donde cada una de ellas conformaría una praxeología matemática puntual, pero tampoco es una praxeología matemática local (PML), puesto que no todos los tipos de tareas identificados están integrados, pues las técnicas del tipo de tarea T_9 es aislada de las demás técnicas identificadas. Si usamos los términos usados por Fonseca y Gascón (2000) podemos afirmar que se trata de una *amalgama de praxeologías matemáticas puntuales* integradas de manera parcial.

Por otra parte, no podemos considerarla una praxeología matemática completa, ya que solo cumple parcialmente los indicadores de completitud de Fonseca.

- Respecto a la integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, identificamos un tipo de tarea aislado, el tipo de tarea T_9. Además, solo se identificaron pocas tareas relativas al cuestionamiento tecnológico de las técnicas (ver tabla 22).

- En la colección de libros analizados, solo en dos de los tipos de tareas, $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_5}$, identificamos dos técnicas distintas y solo se ofrece un criterio para poder elegir entre ellas, en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$ (ver pág. 150).
- En la colección de libros analizados, para representar las técnicas identificadas, los objetos ostensivos que se usan son la representación algebraica, la representación tabular, el lenguaje natural. Pero, con mayor incidencia en la representación algebraica debido a que la técnica dominante es la algebraica. Solo en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$ se usa la representación gráfica.
- Solo se identificó las tareas inversas a las tareas $\boldsymbol{t_{11}}$ y $\boldsymbol{t_{13}}$, que son las tareas $\boldsymbol{t_{12}}$ y $\boldsymbol{t_{14}}$ respectivamente. De acuerdo a los ejemplos resueltos presentes en los libros, se podrían haber planteado tareas inversas a las tareas $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_4}$ (ver pág. 157).
- Respecto a la interpretación del funcionamiento y resultado de aplicar las técnicas, la técnica del tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ permite realizar la tarea de interpretación del resultado de aplicar la técnica algebraica, así mismo, identificamos tareas abiertas en la colección de libros didácticos, que permiten realizar la tarea de interpretación del resultado obtenido al usar las técnicas algebraicas, pero no se aprovecha la discusión de la existencia de las incógnitas en problemas que se plantean en otras unidades de los libros didácticos, dicha discusión implicaría una mayor presencia de la interpretación de los resultados, y además se integraría con los praxeologías matemáticas presentes en los libros didácticos, en torno a la teoría del Álgebra.
- Identificamos la incidencia sobre la práctica de los elementos tecnológicos de los libros didácticos solo hasta el 3° de secundaria. Por otra parte, la técnica caracterizada para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$, permitiría ampliar los tipos de tareas, pues tal como menciona Assude (2002), se pondrían considerar las tareas de programación lineal, lo cual permitiría una mayor integración de elementos tecnológicos.

En conclusión, la praxeología matemática reconstruida cumple parcialmente los indicadores de completitud de Fonseca, de ahí que afirmamos que es una praxeología matemática relativamente completa.

5.2 Características del modelo epistemológico dominante (MED)

A partir de nuestro análisis ecológico y praxeológico en torno en las inecuaciones lineales en la educación básica regular, identificamos las siguientes características del MED:

- Fuerte relación con las ecuaciones, pues se señala que para resolver una inecuación lineal con una incógnita se usan los mismos pasos para resolver una ecuación, salvo el factor negativo (ver Figura 38), asimismo, nuestro objeto de estudio en los libros didácticos analizados los identificamos justo después del tema ecuaciones.
- Predominio del tratamiento algebraico en la resolución de inecuaciones lineales, basado en las propiedades de relación de orden, tal como identificamos en las técnicas que se usan para su resolución.
- Predominio de tareas en contexto en los libros didácticos, donde los pasos para su resolución solo considera el factor positivo del término lineal en su forma reducida $ax+b<c$.
- Identificamos una praxeología puntual aislada que está conformada por las tareas que consisten en determinar el conjunto solución de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

En relación a las pautas dadas para la construcción de un modelo epistemológico de referencia en torno a las inecuaciones lineales que planteamos en el capítulo 3 de nuestra investigación, podemos señalar acerca del MED:

- Ausencia de tareas donde se discuta las propiedades de desigualdad.
- Ausencia de técnicas alternativas, que permitan determinar el conjunto solución de una inecuación, como la técnica grafico funcional que presentamos en la pág. 152.
- Ausencia de tareas donde se explicite una de las razones de ser de las inecuaciones, la cual permite establecer condiciones de desigualdad a los elementos que conforman una ecuación, tal como expusimos en la pág. 159.
- Muy poca presencia de tareas donde la técnica no solo consiste en una aplicación repetitiva de pasos, pues solo se identificaron los tipos de tarea $\boldsymbol{T_6}$, $\boldsymbol{T_7}$ y $\boldsymbol{T_8}$, pues en dichos tipos de tarea se podría hacer más evidente las diferencias entre la resolución de una ecuación y de una inecuación.

CONSIDERACIONES FINALES

Las conclusiones de nuestro trabajo de investigación son las siguientes:

La elección de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como referencial teórico y metodológico en nuestro trabajo de investigación ha sido pertinente, pues los elementos teóricos y metodológicos que ofrece dicha teoría, nos permitieron analizar a nuestro objeto de estudio en relación a una determinada institución. En primera instancia a la institución productora del saber, la matemáticas (como disciplina), a través de un análisis histórico epistemológico de nuestro objeto de estudio, así mismo, a la institución encargada de la educación en nuestro país, el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU), para lo cual hemos realizado un análisis ecológico y praxeológico de nuestro objeto de estudio a través de los planes curriculares y los libros didácticos distribuidos por la institución.

En lo referente a nuestro objetivo general, analizar la praxeología matemática de las inecuaciones lineales presente en una colección de libros escolares de educación secundaria que brinda el MINEDU, se ha podido cumplir con el objetivo planteado, puesto que para cumplir con dicho objetivo, nos planteamos tres objetivos específicos.

El primer objetivo específico fue realizar un análisis epistemológico de nuestro objeto de estudio de modo que nos permita dar pautas para la construcción de un modelo epistemológico de referencia en torno a las inecuaciones. Así pues, nuestro análisis epistemológico nos reflejó que si bien las inecuaciones es un concepto que se consideró como disciplina de estudio a partir de la mitad del siglo XX, no era un concepto ajeno a los matemáticos de la antigüedad, puesto que en un principio las desigualdades fueron una herramienta importante para el desarrollo de disciplinas como la geometría, álgebra y cálculo. De ese modo hemos identificado en cada momento estudiado la razón de ser de nuestro objeto de estudio, lo cual nos permitió dar criterios para la construcción de un modelo epistemológico de referencia, considerando además las reflexiones y conclusiones de los trabajos de referencia de nuestra investigación.

El segundo objetivo específico fue reconstruir la praxeología matemática de las inecuaciones lineales presente en una colección de libros didácticos de educación secundaria, y determinar el nivel de la praxeología matemática reconstruida. Para cumplir dicho objetivo tomamos en consideración algunos aspectos teóricos y metodológicos que ofrece la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de allí que, identificamos 9 tipos de tarea (***T***i), 22 tareas (***t***ij), 33 técnicas (τ_{ijk}) caracterizadas y el bloque tecnológico-teórico que justifica las técnicas dentro de la teoría del cuerpo conmutativo ordenado $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y el anillo conmutativo de polinomios $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ excepto el tipo de tarea ***T*9**, cuya teoría que justifica las técnicas se encuentra en la geometría analítica, de allí que los elementos tecnológicos que justifican las técnicas de dicho tipo de tarea no se integra en la práctica de los demás tipos de tareas.

Además, en contraste con las recomendaciones dadas por las investigaciones consideradas en nuestros antecedentes, no identificamos tareas que permitan verificar o comprobar si el resultado obtenido luego de obtener la inecuación equivalente mediante el tratamiento algebraico es el correcto, la única excepción es el tipo de tarea ***T*2**, tal como se menciona en las investigaciones de referencia, considerar la técnica gráfico funcional sería una herramienta más en el trabajo de verificar o comprobar.

Así mismo, en el encuentro con las tareas, pudimos observar que las técnicas donde se toman en cuenta el signo del coeficiente del termino lineal, al momento de hacer la transposición de términos, es la técnica menos aplicada puesto que la cantidad de problemas para usar dicha técnica es mínimo, solo 6 problemas con dicha característica, de allí que, tal como refieren las investigaciones de referencia, la ausencia de dichas tareas refuerza la idea de que resolver una ecuación es lo mismo que resolver una inecuación. Respecto al nivel de la praxeología matemática, afirmamos que la praxeología matemática reconstruida es una *amalgama de praxeologías matemáticas puntuales* integradas de manera parcial a través de la ampliación de técnicas, pues está conformada por 9 tipos de tareas, donde el tipo de tarea ***T*9** se encuentra aislado de los demás tipos de tarea.

El tercer objetivo específico fue utilizar los criterios de completitud de Fonseca (2004) para analizar el grado de completitud de la organización matemática construida, luego del análisis de cada uno de los criterios, concluimos que se trata de una praxeología matemática relativamente completa, puesto que cumple parcialmente cada una de los criterios de completitud propuestos por Fonseca. Así mismo, nos permitió identificar las características del modelo epistemológico dominante, además de evidenciar ausencias de tareas que deberían estar presentes, según como indicamos en las características de un modelo epistemológico de referencia en relación a nuestro objeto de estudio.

Un futuro trabajo nos plateamos la construcción de una praxeología matemática alternativa en torno a las inecuaciones lineales, en base a lo expuesto en nuestro análisis de la praxeología matemática reconstruida en nuestra investigación en relación a los libros didácticos analizados, además, tomando en consideración las características consideradas para un modelo epistemológico de referencia. Así mismo, en nuestra investigación ha quedado pendiente la construcción de un modelo epistemológico de referencia en relación a nuestro objeto de estudio.

En lo referente a nuestro objeto de estudio, aún en nuestro país son pocas las investigaciones en educación matemática donde el foco de atención son las inecuaciones, así pues, un análisis implicatívo acerca de la comprensión en relación a la resolución de inecuaciones lineales de los estudiantes de educación secundaria que hacen uso de los libros didácticos analizados.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2015) Teoría antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *Unión. Revista Iberoámericana de Educación Matemática*, *42*, 9-34. Recuperado de https://goo.gl/n4GTNs

Assude, T. (2002). Un phénomène d'évolution curriculaire: le cas des inéquations au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, *22*(2-3), 209-236. Recuperado de http://emf.unige.ch/files/6714/5467/5553/EMF2000_Communication_Assude.pdf

Bagni, G. (2005). Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica. *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI, (SFIDA 21, 22, 23, 24, 25)*, 53–64. Resuperado de http://www.syllogismos.it/education/Sfida22.pdf

Barbosa, K. (2006). *Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios.* (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional- México, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/barbosa_2006.pdf

Barbosa, K. (2013). *O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações* (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10943/1/Karly%20Barbosa%20Alvarenga.pdf

Bernardis, S., Nitti, L., & Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática*, *29*(3). Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/06REM29-3.pdf

Bicudo, I. (2009). *Os Elementos/Euclides*. São Paulo: UNESP.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 139-143). Recuperado de https://www.emis.de/proceedings/PME28/RF/RF002.pdf

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque Socioepistemológico* (Tesis de Doctorado). Instituto politécnico Nacional, México, México. Recuperado de: goo.gl/SHKAEU

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 15-28). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1427/

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, *18*(2), 37-74. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Brousseau, G. (1981). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas (Trad. Departamento de Matemática Educativa). *México: Cinvestav.(Original en francés, 1976)*. Recuperado de https://mealejandrofm.files.wordpress.com/2012/03/5oprocesoscognitivosycambioconceptualenmatemc3a1ticasyciencias-docx.pdf

Byrne, O. (1847). *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering.

Castela, C., & Romo-Vásquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(1), 79-130.

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Apports de la théorie anthropologique, Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils et connaissances d'action*, 771-790. Recuperado de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/9%20-%20Chaachoua-Comiti-congres_TAD_2.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *19*(2), 221-266. Recuperado de http://www.ing.unp.edu.ar/asignaturas/algebra/chavallard_tad.pdf

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 21-30). Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_2_Plenaries.pdf#page=3

Conceição, F. (2011). *Uma abordagem funcional para o Ensino de inequações no Ensino Médio* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10863/1/Fernando%20da%20Silva%20Conceicao%20Junior.pdf

Euclides (1991). *Los Elementos. (Libros I – IV)*. (M. L. Puertas, Trad). España: Editorial Gredos S. A.

Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of mathematical analysis and applications*, *249*(1), 118-134. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X00969348

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 231-245. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47204-X#page=231

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis Doctoral, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wpcontent/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.

Fonseca, C., & Gascón, J. (2000). Integración de praxeologías puntuales en un praxeología matemática local. La derivación de funciones en secundaria. In *IV Simposio de la SEIEM*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huelva/Fonseca_Gascon.doc

Garzón, G. R. (2014). Una aplicación didáctica del método de Fourier-Motzkin a los problemas de programación matemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, (86), 6. Recuperado de http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/[field_volumen-formatted]/epsilon86_6.pdf

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(2), 203-231. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a4.pdf

Gil, A. (2002). *Como elaborar projectos de pesquisa*. São Paulo: atlas.

Giusti, V. (2007). *O uso de vários registros na resolução de inequações - uma abordagem funcional gráfica* (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_Giusti.pdf

González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma*, *33*, 101-130. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2932730

Grabiner, J. V. (1997). Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's treatise of fluxions. *The American mathematical monthly*, *104*(5), 393-410. Recuperado de https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Grabiner393-410.pdf

Halmaghi, E., & Liljedahl, P. (2015). Inequalities in the history of mathematics: from peculiarities to a hard discipline. *GeoGebra International Journal of Romania*, *4*(2), 43-56. Recuperado de goo.gl/uZi3zN

Lehmann, C. H. (1992). Álgebra. México: Limusa.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación de Diploma de Estudios Avanzados, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/DEA-CatarinaLucas_versi% C3%B 3n-preliminar.pdf

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología*, *9*(1), 123-146. doi: http://dx.doi.org/10.15381/rinvp.v9i1.4033

National Council of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles and standards for mathematics education.*

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática. Volumen 1*. Pontificia Universidad Católica del Perú

Perú, Ministerio de Educación. (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Lima: MINEDU. Obtenido de https://es.slideshare.net/tellinos/diseo-curricular-nacional-2009-presentation

Perú, Ministerio de Educación (2015a). Resolución Ministerial N° 199-2015. Lima. Recuperado de http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015b). Matemática 1 Secundaria. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2015c). Matemática 1 Secundaria. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2016b). Matemática 2 Secundaria. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016c). Matemática 2 Secundaria. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016d). Matemática 3 Secundaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016e). Matemática 3 Secundaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016f). Matemática 4 Secundaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016g). Matemática 4 Secundaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016h). Matemática 5 Secundaria. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016i). Matemática 5 Secundaria. Lima: Santillana.

Rahn, J. H. *Teutsche algebra*. JJ Bodmer.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I y II. 3a. ed. España: Gedisa.

Ruffini, P. (1807). *Corso di matematiche: ad uso degli aspiranti*. Soc. Tipografica.

Seltman, M., & Goulding, R. (2007). *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis*. Springer Science+ Business Media, LLC.

Serrano, L. (2013). La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica. (Tesis Doctoral, Universitat Ramon Llull). Recuperado de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_LidiaSerrano_2013.pdf?sequence=1

Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación. *BOLEMA*, 27(47), 805-828. Recuperado de https://search.proquest.com/openview/0460a7183818f3aa4c3afc19efd23883/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2030146

Tanner, R. C. (1962). On the role of equality and inequality in the history of mathematics. *The British Journal for the History of Science*, *1*(2), 159-169.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2001). Can x= 3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-303). Recuperado de http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/TSAMI%2601.pdf

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). Student'algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. In *Proceedings of Second International Conference On The Teaching Of Mathematics–ICTM (at the Undergraduate Level)*. Recuperado de http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap511.pdf

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value'inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(6), 793-812. doi: http://dx.doi.org/10.1080/00207390412331271357

Viète, F. (1615). *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo.* Paris.