PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UNA PERSPECTIVA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO BASADO EN LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA.

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Brian Joel Valenzuela Pagaza

ASESORA:

Katia Vigo Ingar

Noviembre, 2018

El esfuerzo y el tiempo preparando los contenidos para una clase es importante, pero más aún, si éstos son comprensibles para todos los estudiantes. La calidad no debe castigar al error, al contrario, lo debe ver como la oportunidad para corregir y mejorar la forma en que se imparten las clases.

Steve Jobs

DEDICATORIA

A mí querida hija, por el apoyo y la motivación constante durante cada día. Hija mía, eres la razón de mi felicidad, de mi esfuerzo, y de mis ganas de buscar lo mejor para ti; quiero que sepas que eres el mejor regalo que me dio la vida.

A mis padres, por apoyarme en todo momento en mis proyectos profesionales y académicos; pero sobre todo por inculcarme desde pequeño que la mejor herramienta que tengo para salir adelante es el estudio y la pasión que le ponemos para lograrlo.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Katia Vigo Ingar, por su constante apoyo en la investigación, revisión y sugerencias, por su paciencia, que hicieron posible mejorar las versiones preliminares y la versión final de la presente investigación.

A mi profesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo constante en mi formación, por sus sabias palabras, por sus sugerencias, que hicieron posible llevar a cabo esta etapa en mi vida.

A los miembros del jurado, Mg. Cintya Gonzales Hernández y Mg. Elizabeth Advíncula Clemente, por sus colaboraciones y sugerencias realizadas de los avances de la presente tesis.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por compartir sus conocimientos y experiencias profesionales durante las clases, despertando siempre mi interés en el campo de la docencia.

RESUMEN

Para realizar este trabajo, hemos revisado antecedentes de investigación que tienen como objeto matemático de estudio el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), ya sea con el empleo de la tecnología o sin ella. También, estudiamos las aplicaciones presentes en las experimentaciones realizadas en dichas investigaciones. Asimismo, hemos justificado la realización de nuestra investigación tomando en cuenta los aspectos académicos, curriculares, personales y profesionales para mostrar la pertinencia de la ejecución de nuestro trabajo.

El objetivo de nuestra investigación es analizar la coordinación de las representaciones en los Registros de Representación Semiótica: gráfico-algebraico-lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos, de una universidad pública de Lima, realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC.

El marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995), nos proporciona herramientas valiosas y necesarias para comprender e interpretar las transformaciones realizadas por los sujetos de investigación cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Asimismo, para guiar nuestra investigación escogemos como referencia aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica (ID) de Artigue (1995).

Finalmente, para analizar los resultados obtenidos de la situación problema, confrontamos el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori*, característica de la ID, para observar si los resultados fueron o no los previstos por el investigador. Este modo de realizar el análisis nos permitió concluir que el uso del GeoGebra favorece la conversión de representaciones en el registro algebraico al gráfico, además, de facilitar los tratamientos en el registro gráfico. Asimismo, la TRRS nos permite explicar cómo se desarrollan las conversiones y tratamientos además de identificar las dificultades por las cuales los estudiantes no realizan la coordinación.

Palabras clave: Teorema fundamental del cálculo, TFC, Conversión, Tratamiento, Coordinación, Situación Problema, Registro Gráfico, Registro Algebraico.

SUMMARY

To do this work, we have reviewed research backgrounds that have the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) as a mathematical object of study, whether with the use of technology or without it. Also, we study the applications present in the experiments carried out in these investigations. Likewise, we have justified the completion of our research considering the academic, curricular, personal and professional aspects to show the relevance of the execution of our work.

The objective of our research is to analyze the coordination of the representations in the Registers of Semiotic Representation: graphic-algebraic-natural language, that students of Food Engineering, of a public university of Lima, perform when they develop a problem situation related to FTC.

The theoretical framework of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR) of Duval (1995), provides valuable and necessary tools to understand and interpret the transformations made by research subjects when they develop a problem situation related to the FTC. Likewise, to guide our research we choose as a methodological referential aspects of the Didactic Engineering (ID) of Artigue (1995).

Finally, to analyze the results obtained from the problem situation, we compared the a priori analysis with the posteriori analysis, characteristic of the ID, to observe whether or not the results were those predicted by the researcher. This way of carrying out the analysis allowed us to conclude that the use of the GeoGebra favors the conversion of representations in the algebraic register to the graphic, in addition, to facilitate the treatments in the graphic register. Likewise, the TRSR allows us to explain how conversions and treatments are developed, as well as to identify the difficulties for which students do not coordinate.

Key words: Fundamental Theorem of Calculus, FTC, Conversion, Treatment, Coordination, Situation Problem, Graphic Registers, Algebraic Registers.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

consideraciones iniciales

El interés que tenemos por analizar procesos, como la coordinación de representaciones en diferentes registros que realizan estudiantes de Ingeniería, en particular Ingeniería de Alimentos, surgió a raíz de observar las dificultades que presentan los estudiantes, del curso Cálculo Integral o Matemáticas II de la carrera de ingeniería, al querer lograr el entendimiento y la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC); así como la aplicación del mismo. Por tal motivo, consideramos que los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de las matemáticas, nos brinda las herramientas necesarias para realizar nuestro estudio.

La presente tesis tiene como objetivo general analizar la coordinación de las representaciones en los Registros de Representación Semiótica: gráfico-algebraico-lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Para alcanzar dicho objetivo debemos analizar cómo se desarrollan las conversiones y tratamientos de las representaciones de los objetos presentes en el enunciado de dicho teorema. Para lo cual creemos importante establecer un marco teórico que nos permita realizar los procesos mencionados, conversiones y tratamientos.

La investigación la hemos estructurado en capítulos, de la siguiente manera:

En el primer capítulo se desarrolla la problemática de investigación, en la cual hemos realizado una revisión de antecedentes de investigaciones relacionadas al TFC, la justificación de nuestra investigación, y los aspectos teóricos tomando como referencia la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), además de presentar nuestros objetivos y pregunta de investigación, y los aspectos metodológicos tomados de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) lo cual establecerá la estructura de nuestra tesis.

En el segundo capítulo se desarrolla el análisis preliminar, así como aspectos relacionados con el TFC, además, una breve reseña histórica del TFC, la cual tiene el objetivo de ubicar nuestro objeto de estudio en el campo del conocimiento humano, estudio matemático del TFC, empleando un libro teórico de matemáticas, y la revisión de un libro didáctico de consulta para los estudiantes de ingeniería.

Por último, el tercer capítulo en el que se detalla el experimento y análisis, en el cual se describe el escenario donde se realiza la investigación: descripción de los sujetos de investigación, recursos e instrumentos a ser utilizados, la descripción de las actividades y, finalmente, un análisis *a priori* y *posteriori* de dichas actividades mediante el análisis de los datos recolectados, y la respectiva confrontación entre el análisis a *priori* y el análisis a *posteriori* según la Ingeniería Didáctica para validación.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo presentamos la problemática de nuestra investigación, abordando diferentes estudios relacionados con la enseñanza del cálculo a nivel superior respecto al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) que nos permitirá ubicar nuestro estudio dentro de las investigaciones realizadas en el área de educación matemática. Seguidamente, presentaremos la justificación, la formulación de la pregunta, los objetivos de investigación en nuestro estudio.

1.1 Antecedentes

En esta sección presentaremos trabajos realizados por diversos investigadores cuyo objeto matemático de estudio es el TFC. Estas investigaciones nos permitirán tener un panorama de los estudios realizados en relación con el TFC, así como de las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de nuestro objeto de estudio, además, de poder observar las propuestas de solución presentadas por los investigadores ante estas situaciones.

En la investigación realizada por Grande (2013), el autor afirma que emplear la noción de acumulación al abordar el concepto de integral, interpretar la derivada como variación o razón de cambio, la continuidad de una función, la noción de función y su representación gráfica, son fundamentales en la enseñanza y aprendizaje del TFC.

La noción de acumulación permitirá interpretar y manipular la siguiente expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, no sólo como el área bajo la curva sino en otras situaciones, lo cual permite diseñar situaciones contextualizadas las cuales se basan en obtener una función a partir de su variación, por ejemplo, hallar la función que modela el espacio recorrido de un móvil a partir de su velocidad, y con ello lograr relacionar el registro gráfico con el algebraico, permitiendo abordar dicho tema de modo diferente y con ello dejar la tradicional interpretación de la integral, el área bajo la curva.

Además, la noción de razón de cambio permitirá interpretar gráficos de variación de una función con respecto a determinada cantidad, tasas de variación de una función y con ello poder obtener el gráfico de la función mencionada, luego, la noción de función permitirá a los estudiantes manipular y entender la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, por último, la noción de continuidad permitirá a los estudiante analizar las condiciones necesarias que debe tener la función integrando para poder aplicar el TFC.

La investigación realizada utiliza los fundamentos teóricos planteados por Henri Poincaré (2008) sobre el uso de la intuición en la construcción del pensamiento matemático, además, de los conceptos y características del razonamiento intuitivo en la ciencia y las matemáticas descritas por el psicólogo Efrain Fischbein (1999).

Para analizar los resultados obtenidos en las actividades realizadas Grande (2013) empleó como marco teórico la visualización en la educación de cálculo y las interrelaciones con la intuición y rigor, planteados por David Tall (2002). Con respecto a la metodología, esta es cualitativa, y está basada en los fundamentos planteados por Creswell (2010), quien afirma que una investigación cualitativa puede interpretarse como una herramienta para explorar y comprender los significados que tiene una persona o un grupo de personas sobre un problema de naturaleza humana o social.

El estudio realizado por Grande (2013) tiene como objetivo hacer un estudio didáctico epistemológico del TFC, mostrando una actividad desarrollada en clase que permita emerger la relación entre las operaciones de integración y de derivación, además, bajo qué condiciones se establece esta relación, lo cual es la esencia del teorema. Para ello realizó un cuestionario piloto con 14 alumnos, de la facultad pública de Tecnología en el Estado de Sao Paulo, en el cual se analiza los conocimientos que tienen los estudiantes al abordar tópicos como, acumulación, funciones, razón de cambio, relaciones entre la función y su primitiva, los cuales influyen en el aprendizaje del TFC. Posteriormente, se realiza una actividad con otros estudiantes, de la misma institución, desarrollada con el GeoGebra.

Con respecto a los resultados obtenidos, el cuestionario piloto evidenció en un principio que los estudiantes tuvieron dificultades al interpretar la función representada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, pues, no realizaron la interpretación de la integral, la acumulación. La interpretación que tenían los estudiantes de la integral definida, una herramienta para calcular áreas; también, se evidenció que la derivada no era interpretada como una razón de cambio, sino como la pendiente a una curva; por último, se observó que la noción de función y continuidad no estaban muy desarrollados.

En el segundo cuestionario se realizaron dos tareas en el aula, las cuales permitieron relacionar conceptos tratados anteriormente por los estudiantes con el TFC, como la noción de función, continuidad, variación y acumulación, la continuidad de una función resultó ser una condición necesaria para aplicar el TFC, esto se evidenció en la primera tarea al calcular el volumen del sólido planteado. Además, la idea de acumulación estuvo presente en las dos tareas, al igual que la noción de variación entre dos cantidades.

Para el investigador abordar el TFC usando la noción de acumulación produjo una mejora significativa en la comprensión del concepto de integral, además, de permitir que logren articular los procesos de derivación e integración. Motivo por el cual Grande (2013) afirma que el uso del GeoGebra facilita el aprendizaje e interpretación de las nociones de acumulación y variación de una función, pues estos son conceptos dinámicos, siendo una herramienta que permite interpretar y observar patrones de ciertas cantidades, como la sección del sólido, la acumulación al calcular las integrales, entre otras, las cuales les permiten desarrollar las nociones mencionadas.

Por otro lado, la investigación desarrollada por Picone (2007) muestra los registros de representación semiótica que son empleados por los profesores de diversas instituciones, públicas y privadas en Sao Paulo, de Brasil. De los docentes que participan en la investigación, un profesor es PhD, cinco profesores tienen el grado de Doctor y sólo dos presentan el grado de Magister, los grados mencionados son en Matemáticas, Educación Matemática, Física y Educación. Además, se evidencia que tienen amplia experiencia, más de 10 años, en el dictado del Cálculo a excepción de uno que sólo cuenta con dos años de experiencia, lo cual hace importante su opinión en temas relacionados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo, en particular el TFC.

La metodología empleada por la investigadora no está explícita en la investigación, pero tiene características similares a investigaciones de tipo estudio de caso, el cual es un enfoque cualitativo. Esta metodología consiste en realizar cuestionarios y entrevistas, las cuales permitieron responder a las preguntas planteadas, los cuestionarios se desarrollan en tres etapas: en la primera, se realizan ocho preguntas que tienen la finalidad de identificar el perfil profesional de los profesores, la experiencia que tienen en el cálculo, además de conocer cómo abordan el TFC en su práctica en el aula, si lo hacen de manera gráfica, en forma algebraica o si plantean ambos, además, del uso de algún libro guía para desarrollar sus clases o si recomiendan libros de consulta para los estudiantes.

En la segunda, se realizaron nueve preguntas con la finalidad de conocer el significado que tienen los profesores sobre el TFC, es decir, muestran la conexión entre las derivadas y las integrales además de su uso como herramienta de cálculo de integrales definidas, además, conocer la opinión y las respuestas que tienen ante algunas situaciones planteadas en investigaciones realizadas en Educación Matemática, en los cuales se emplea la noción de acumulación y variación; por último, se realizan entrevistas con los profesores con la finalidad de afinar algunos detalles de la segunda etapa, por ejemplo, analizar a mayor detalle las respuestas en algunas preguntas. Podemos notar que en las dos primeras etapas se busca verificar si los profesores en realidad transitan entre dos o más registros de representación, o sólo realizan tratamientos en un sólo registro.

En la tercera etapa, se desarrollan las entrevistas, las cuales mostraron que los profesores están de acuerdo en que el transitar en diversos registros, como el gráfico, algebraico y verbal, es importante para abordar el TFC, están de acuerdo con que las nociones de acumulación y variación son buenas alternativas para mejorar la comprensión del TFC, pero no todos los ponen en práctica, lo cual se evidencia cuando el investigador afirma que sólo tres profesores movilizan los registros mencionados en su práctica. Otro resultado de las entrevistas es que los profesores dan algunas sugerencias para mejorar el desarrollo del TFC, entre las que se destaca realizar la interpretación geométrica del mismo, usar funciones que sean discontinuas para generar conflicto en los estudiantes, además, plantear evaluaciones o ejemplos en las cuales las funciones no posean antiderivadas con la finalidad de lograr que los estudiantes evidencien la conexión que establece el TFC entre los procesos de integración y derivación.

La investigación realizada por Anacleto (2007) consiste en analizar los conocimientos que retienen los estudiantes que han asistido a las asignaturas de cálculo diferencial e integral (CDI) en Matemáticas sobre el TFC teniendo en cuenta su importancia y su relación con los conceptos de derivación e integración. En un principio el estudio muestra que los conocimientos que retienen los estudiantes de Ciencias de la Computación en una Universidad Particular de Sao Paulo, sobre el TFC está incompleto dado que no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad, y esto es consecuencia de que sólo memorizaron los procedimientos y algoritmos de aplicación, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC; esto se evidenció en la prueba a la que fueron sometidos, la cual es denominada por el investigador prueba piloto. Por tal motivo, el investigador cambio a los sujetos de estudio por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, de la misma Universidad, pues debido a su formación recibieron mayor cantidad de horas de clase en relación con el TFC.

El estudio realizado por la investigadora tiene como objetivo investigar el conocimiento que moviliza a los estudiantes que asistieron a la disciplina previamente CDI, así como evidenciar la interrelación entre la derivación y la integración, y en qué nivel se da esta. Para ello el investigador intenta aumentar el conocimiento de los estudiantes y verificar si los estudiantes logran identificar los siguientes puntos:

Primero, la derivada de la integral es el integrando; segundo, la integral indefinida de la derivada de una función es la función original; tercero, la integral definida de una función resulta ser la diferencia entre el valor de una función primitiva evaluada en el límite superior y el límite inferior de la integración; por último, los procesos de diferenciación e integración son inversos entre sí. Además, de observar cómo los estudiantes manipulan los conceptos relacionados con el TFC, como la continuidad y la integrabilidad.

El marco teórico empleado por la investigadora es la dialéctica herramienta - objeto y juego de cuadros de Douady (1987). Para la autora estos componentes teóricos, incluyendo la dialéctica herramienta de objeto y los juegos de cuadros, son herramientas poderosas, ya que ofrecen una lectura de la evolución de las nociones matemáticas y permiten el análisis del aprendizaje matemático. El juego de cuadros consiste en analizar un objeto matemático y las relaciones de este con sus diversas formulaciones, por ello el término cuadro puede referirse a un cuadro algebraico, aritmético, geométrico entre otros.

Con respecto a la metodología empleada por el investigador, esta es cualitativa. La investigadora no muestra la metodología de manera explícita, pero lo que debemos de resaltar es que al realizar su primer cuestionario y notar que los estudiantes evaluados no cumplen sus expectativas, esta los cambia; esto es una característica de la metodología de investigación – acción; otra característica que sobresale es que, al elaborar el cuestionario con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, el investigador espera que es estos logren evidenciar algunos puntos que detallamos en el objetivo; esta es una característica de la ingeniería didáctica al contrastar la fase *a priori* con la a *posteriori*. Por tal motivo la metodología empleada tiene aspectos de investigación acción y de ingeniería didáctica.

En un primer momento el investigador desarrolla un cuestionario piloto con tres parejas de estudiantes de la carrera de Ciencias de la Computación, con preguntas que requieren conocimientos relacionados con: integral definida e integral impropia, derivada de una función, función continua, función primitiva y el teorema fundamental del cálculo; con el cual se logra mostrar que los estudiantes no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad, esto se debe a que sólo memorizaron técnicas de solución, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC; lo cual se puede deber a que no habían recibido el contenido de la disciplina de cálculo para la TFC a la profundidad requerida por nuestra investigación.

El cuestionario final estaba compuesto por ocho preguntas y se realizó con trece parejas de estudiantes en las horas de clase regulares en dos períodos de 45 minutos, con un intervalo de aproximadamente 10 minutos; esto muestra que los estudiantes pueden calcular la integral definida de funciones polinómicas sin problemas y que esta es interpretada como el área. En la segunda pregunta se evidencia que tienen algunos problemas para calcular la integral definida cuando la función es discontinua en un punto, es decir, no manejan bien las condiciones para aplicar la integral; en las preguntas 3 y 4 se evidencia que los estudiantes obtienen la integral definida, en la cual el límite superior es variable, de manera geométrica, se espera que realicen cálculos como en la primera pregunta. En la pregunta 5 tienen problemas al calcular la integral definida de una función con dominio partido; luego en la pregunta 6 los estudiantes tienen problemas con identificar el gráfico de la antiderivada a partir del gráfico de la función; en la pregunta 7 es el típico problema de derivar a la integral aplicando el TFC, en esta parte se evidencia que hay estudiantes que realizan la integral y luego derivan el resultado, esto muestra que algunos no aplican el TFC; por último en la pregunta 8 se pide a los estudiantes que planteen la importancia del TFC y que muestren un ejemplo donde se puede aplicar el mismo, es una pregunta abierta en la cual los estudiantes responden que la importancia radica en la relación que se establece con la derivada y la integral.

Por otra parte, el trabajo de Scucuglia (2006) muestra que realizar actividades utilizando herramientas tecnológicas, como softwares y calculadoras gráficas, permiten al estudiante coordinar representaciones de una función en registros como el gráfico, el algebraico y el tabular, lo cual resulta de gran ayuda, en la elaboración de conjeturas, que permitirán probar el

TFC usando un lenguaje no tan formal como el matemático, pero sin quitarle lógica a la prueba de la tesis de dicho teorema.

Para responder a esta pregunta ¿Cómo estudiantes con calculadoras gráficas investigan el Teorema Fundamental del Cálculo? El investigador realiza una secuencia de actividades con la calculadora y con lápiz y papel, las cuales le permitirán obtener datos que serán analizados con el marco teórico y metodológico: La concepción epistemológica Seres-Humanos-con-Medios, planteada por Borba y Villarreal (2005), la cual resalta el papel de los medios en el proceso de producción de conocimiento matemático.

La calculadora gráfica que se utiliza en las actividades es la Texas TI-83, tiene la finalidad de condicionar el aprendizaje en los estudiantes, dos parejas que cursan el primer año de graduación en matemática de la Universidad Estatal Paulista (UNESP).

Estas calculadoras permiten formar conjeturas de algunos procesos envueltos en la integración, como por ejemplo, primero, el área exacta bajo la curva que se da cuando la suma de Riemann se realiza con infinitos rectángulos; segundo, la siguiente suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ es negativa cuando la imagen de la función es negativa; tercero, la integral definida que es el límite de la suma de Riemann con lo cual relacionan la integral con el área bajo la curva; cuarto, la integral definida que coincide con el área bajo la curva sólo cuando el integrando es una función positiva y por último, relacionan la integral definida con la antiderivada identificando patrones que se muestran en el desarrollo de la cuarta actividad; los cuales les ayudarán a realizar formulaciones y pruebas sobre el TFC para el caso de una función positiva usando un lenguaje coloquial.

El investigador elaboró y aplicó cinco actividades con la calculadora, estas siguen una secuencia lógica la cual consiste en partir de lo visual e intuitivo para, posteriormente, ir formalizándolo poco a poco.

En, la primera actividad se plantea obtener el área bajo la curva para funciones positivas empleando sumas inferiores y superiores, esta actividad se realiza con la ayuda del comando AREA, el cual permite plantear la siguiente conjetura: al aumentar el tamaño de la partición el error en el cálculo del área disminuye, además, el área exacta se dará cuando el tamaño de la partición sea infinito. La segunda actividad se realiza con el comando AREA y SUMA, la diferencia entre estos comandos es que en el comando suma se puede obtener la suma de infinitos rectángulos y con ello validar la conjetura que tienen los estudiantes. En la tercera actividad se utiliza el comando $\int f(x)\,dx$, el cual permite obtener la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, el valor obtenido, mediante este comando, se puede comparar con resultado obtenido con el comando SUMA, lo cual permite a los estudiantes establecer la relación entre las sumas de Riemann y la integral definida, esto es: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ y como aplicación de este resultado se plantea la pregunta de cómo encontrar el área entre dos curvas, la cual es resuelta por los estudiantes. La cuarta actividad consiste en obtener distintos resultados para la integral definida, usando el comando $\int f(x)\,dx$ haciendo variar el límite superior.

Estos resultados permiten a los estudiantes realizar la conexión entre la integral definida de una función con su antiderivada, esto es $F'(x) = f(x)$, donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por último, la quinta actividad consiste en calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, empleando el comando $\int f(x)\,dx$, el objetivo de esta actividad es que los estudiantes puedan deducir la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, para lo cual ellos completaron el cuadro 1.

Cuadro 1. Quinta actividad

Ecuación	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	3
	[2; 3]	5
	[1; 3]	8
	[a, b]	$b^2 - a^2$

Fuente: Adaptada de Scucuglia (2006, p.93)

A partir del cuadro 1 mostrado, los estudiantes elaboran la siguiente conjetura: para calcular la integral definida de una función sólo hay que evaluar la antiderivada del integrando en los límites superior e inferior y restarlos, debemos mencionar que el investigador realizó los cuadros con dos funciones más, $y = 3x^2$ y $y = 4x^3$. Con estos resultados y con el fin de establecer el resultado a más funciones se realiza una última actividad a lápiz y papel en la cual los estudiantes logran probar el TFC para funciones continúas y positivas.

Scucuglia (2006) señala que el uso de la calculadora y su carácter multirregistro permitió la formación de conjeturas que permitieron realizar la prueba del teorema, además las representaciones múltiples que ofrece la calculadora posibilitan que el hacer matemática sea vuelva un proceso experimental lo cual contribuye a la formación del aprendizaje como lo plantea la teoría Seres Humanos con Medios.

Con respecto al aspecto histórico y epistemológico de nuestro objeto de estudio, la investigación realizada por Gordillo y Pino-Fan (2016) es un estudio de tipo documental del objeto matemático antiderivada. La investigación tiene como objetivo presentar una propuesta de reconstrucción del significado holístico de referencia para la antiderivada cuya finalidad era determinar su origen. La investigación muestra que la antiderivada resulta ser es un intermediario entre las derivadas y las integrales lo que es conocido como el TFC.

Los investigadores utilizan la noción de configuración epistémica, que es una herramienta del Enfoque Onto-semiótico (EOS). Esta les permite analizar cuatro situaciones problema elaboradas tomando en cuenta la historia que son denominadas en el EOS como configuraciones epistémicas, en las que se evidencia como la antiderivada emerge y se formaliza como objeto matemático. Los investigadores señalan que las situaciones mencionadas llevan un significado parcial de la antiderivada.

Estas situaciones conforman el significado holístico del objeto y estas son: primero, el problema geométrico de las tangentes y cuadraturas, en esta etapa de la historia Barrow logra unir dos conceptos separados, hasta ese momento la tangente a una curva y la cuadratura de la misma utilizando construcciones geométricas, técnicas que fueron heredadas de los griegos. Segundo, el problema de las fluxiones y las fluentes, esta etapa Newton resolvió problemas de cinemática los cuales consistían en calcular la velocidad del movimiento en un tiempo cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa; tercero, el problema de la relación diferenciales – sumatorias, en esta etapa Leibnitz afirmaba que el proceso de integración, que consistía en el proceso de sumar, es inverso al proceso de diferenciación; por último el problema de la identificación de funciones elementales, en esta etapa Euler establece la diferencia entre la integral definida e indefinida, él introduce la constante de integración con la cual plantea la integral completa, la cual es conocida hoy actualmente como antiderivada general.

Para Gordillo y Pino-Fan (2016) realizar la reconstrucción de los significados parciales de un objeto matemático es importante porque estas permiten mostrar la evolución del TFC a través de la historia, lo cual debería ser tomado en cuenta como referencia en los currículos de matemáticas, además estos significados pueden ayudar a identificar las dificultades del objeto matemático las cuales son de utilidad al momento de diseñar actividades que se realizarán en clase.

La investigación de Robles, Tellechea y Font (2014) muestra que las representaciones dinámicas favorecen la articulación del lenguaje numérico, con el gráfico y con el analítico con el TFC pues permite visualizar la relación de la función con su integral, además los investigadores mencionan que el TFC representa un elemento clave porque articula objetos matemáticos del Cálculo como el límite, funciones, la derivada y la integral; sin embargo, su enseñanza toma una perspectiva analítica que deja de lado la experiencia intuitiva del estudiante.

La investigación tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del TFC que considere la complejidad de los objetos matemáticos del Cálculo y el rol de este teorema en la articulación de estos objetos, para ello presentan una propuesta de la secuencia didáctica de tareas en donde se resalta: la conceptualización de la integral por encima de la mecanización; las perspectivas gráficas y geométricas para dar significación a los procesos de derivación e integración, es decir, promueve el proceso de visualización mediante el uso de los recursos visuales mediante el uso del software Descartes.

El marco teórico utilizado por los investigadores es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) el cual les permite diseñar una secuencia de tareas que consiste en la aplicación de applets, empleando los seis criterios de idoneidad:

En relación a la epistémica, porque las actividades promovieron en los estudiantes la construcción del significado en torno al proceso aproximativo del área bajo una curva y el descubrimiento de la relación que existe entre la función estudiada y su función integral.

Con respecto a la cognitiva, porque cuando el alumno parte de la noción básica de función constante por intervalos el alumno se acerca a la idea de variación acumulada, después infiere sobre la existencia de una función que describe la variación de esta acumulación, además los alumnos grafican y conjeturan sobre la relación entre la curva obtenida y la función estudiada; interaccionar, porque la redacción del material impreso y las applets de trabajo muestra brevedad de texto, sencillez de lenguaje y modulación de los apartados.

Respecto a la mediacional, porque se adecúan los recursos materiales y temporales para todos los alumnos, es decir, a todos los alumnos se les asigna la manipulación de un applet en determinado momento y los demás observan en una pantalla las interacciones con los applets y hacen los apuntes que consideren necesarios.

Se verifica la emocional, porque los alumnos se encuentran motivados y entusiasmados por su participación con los materiales de trabajo, además que se muestra integración entre los alumnos rezagados y los aventajados.

Por último, la ecológica, por la correspondencia a las expectativas curriculares y porque se espera que los significados construidos con esta secuencia didáctica de tareas propuestas faciliten el tratamiento formal posterior del TFC.

Con respecto a la metodología que guía la investigación, los investigadores no la muestran de manera explícita, pero hemos percibido que esta tiene características similares con la ingeniería didáctica. Por ejemplo, la manera de contrastar los datos, lo que se esperaba que realicen los estudiantes (a *priori*) con lo realizado por ellos (a *posteriori*).

La secuencia de tareas propuesta por Robles *et al* (2014) está formada por cinco actividades de las cuales, las tres primeras serán trabajadas por los alumnos y los dos restantes por el profesor. A continuación, detallamos las actividades realizadas por los investigadores.

En la actividad 1, se les presenta a los alumnos la gráfica de tres funciones constantes en un intervalo para que construyan su respectiva función integral y observen que estas son lineales y que su representación gráfica tiene una pendiente que queda determinada por dicha constante, primero el alumno debe trabajar con lápiz y papel y luego los Applets Descartes se evalúan las conjeturas hechas por los alumnos *a priori*.

En la actividad 2, se trabaja de manera semejante, pero con un par de funciones escalonadas sencillas, aquí se espera la construcción gráfica que sugiera al alumno la existencia de un vínculo entre la discontinuidad de la función y la no derivabilidad de la función integral.

En la actividad 3 se espera llegar a la conclusión de que la integral de una función lineal es una parábola cuya concavidad depende del signo de la pendiente de la función y cuyo vértice queda determinado por la intersección de la función con el eje de las abscisas. Luego en la actividad 4 se constituye la visualización del TFC y se sugiere su institucionalización, y en la actividad 5 se constata de manera visual que la derivada de la integral es la función original lo que constituye la expresión del TFC.

Finalmente, los investigadores manifiestan que las representaciones dinámicas favorecen la mejor articulación del lenguaje numérico, con el gráfico y con el analítico sobre todo en relación con el TFC donde se genera evidencia visual de la relación de la función y su integral. Además, los autores expresan que, aunque los criterios de idoneidad del EOS se utilizaron *a priori* en el diseño de la secuencia didáctica de tareas presentada, también es necesario realizar diversas implementaciones y utilizar los mismos criterios de idoneidad *a posteriori* para que se pueda evaluar la calidad del proceso de instrucción y tener elementos para el rediseño si fuese necesario para así mejorar la secuencia didáctica de tareas presentada.

A continuación, presentamos un trabajo que nos servirá como referencial teórico y metodológico, esta investigación realizada tiene como título, el proceso de visualización durante el aprendizaje de las nociones de valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables en alumnos de ingeniería, y fue realizada por la investigadora Ingar (2014).

La investigación se enmarca en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, de manera particular en las aprehensiones perceptiva, discursiva, operatoria y secuencial de un gráfico representado en el *CAS Mathematica* y en la articulación entre el registro gráfico y el algebraico. El referencial teórico se fundamenta, también, en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, pues se inició con la propuesta de situaciones que tiene como escenario la posición del profesor investigador al frente de un grupo de estudiantes, en un *milieu* constituido por un laboratorio de computación, preguntas y devoluciones. Con respecto a la metodología, la investigadora emplea la Ingeniería Didáctica de Artigue.

Lo relevante de este trabajo para nuestra investigación no solo es el uso de la Teoría de Registros de Representación Semiótica sino, además, el tratamiento en el registro gráfico de funciones reales de varias variables así como las conversiones entre las representaciones en el registro algebraico, gráfico y gráfico CAS, centrando su estudio en las aprehensiones en el registro gráfico y en el uso de la tecnología, en este caso el *CAS Mathematica* como medio para el aprendizaje de los valores máximos y mínimos en varias variables.

Si bien la investigación de Ingar (2014) no tiene relación directa con nuestro objeto de estudio TFC, creemos que es de suma importancia por la perspectiva que tiene de la teoría de registros de representación semiótica que nos será de mucha ayuda en el desarrollo de nuestra investigación,

Hasta aquí hemos presentado seis investigaciones donde se evidencia la evolución del TFC a lo largo de la historia y el proceso de formación que ha tenido hasta hoy, considerado como un objeto matemático de estudio, los trabajos histórico-epistemológicos de Gordillo y Pino-Fan (2016), Grande (2013) muestran las dificultades que han tenido los matemáticos al estudiar y lograr formalizar el TFC, lo cual nos hace suponer que esta misma dificultad se encuentra en los estudiantes, motivo por el cual Scucuglia (2006), Picone (2007) y Anacleto (2007) afirman que estas dificultades presentes en el TFC hacen que los estudiantes fracasen y reprueben los cursos donde se desarrolla en el TFC.

Las investigaciones muestran que las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el TFC son diversas. En primer lugar, Grande (2013) y Picone (2007) afirman que no tener conceptos sólidos de función, evita que los estudiantes interpreten la siguiente expresión $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y peor aún que estos realicen ciertas operaciones relacionadas con tal expresión, por ello en las operaciones se manifiestan muchos cálculos repetitivos lo cual es consecuencia de la constante algebrización.

En segundo lugar, Picone (2007) afirma que cuando los profesores no muestran la relación que hay entre las derivadas y las integrales mediante el TFC los estudiantes no logran entender ciertas conclusiones que brinda la tesis del teorema, lo cual se manifiesta al calcular la derivada de la función $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, los estudiantes realizan la integral para luego derivar, por ello el investigador recomienda usar funciones que carezcan de primitiva.

Tercero, no abordar el TFC de manera geométrica ocasiona en los estudiantes la creencia de que la integral sólo sirve para calcular áreas, lo cual ocasiona que se pierda una oportunidad de generar en los estudiantes nuevos conocimientos referentes a la integral y las derivadas.

En cuarto lugar, en la investigación realizada por Grande (2013) el investigador resalta que la interpretación que tienen los estudiantes de la derivada sólo como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un determinado punto, no permite diseñar situaciones contextualizadas, pues para estas se necesita que los estudiantes interpreten la derivada como una razón de cambio. Asimismo, el investigador señala que plantear actividades usando el concepto de acumulación genera que los estudiantes relacionen la derivada con la integral en situaciones contextualizadas, además de mostrar que la continuidad no es una condición necesaria para aplicar el TFC.

A modo de resumen presentamos las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del TFC en la figura 1.

Figura 1. Dificultades presentes en el aprendizaje y la enseñanza del TFC

Fuente: Realizado por el investigador.

Debido a las dificultades mencionadas anteriormente, los investigadores recomiendan que para superar estas dificultades se deben emplear herramientas tecnológicas como las calculadoras Scucuglia (2006) y software Robles *et al.* (2014), y buscar otras interpretaciones a la integral definida como la acumulación que plantea Grande (2013); estos son medios que permitirán a los estudiantes interpretar gráficamente el TFC, construir conjeturas para mejorar la comprensión de los aspectos conceptuales del TFC, además de ayudar a la articulación con otros temas de cálculo como la derivada, la integral, los límites y las funciones.

Las investigaciones revisadas nos dan aportes para establecer nuestro foco de investigación, es decir el problema que deseamos atender y la formulación de nuestra pregunta de investigación, así como la teoría que nos permitirá responder y realizar el análisis propio de los resultados.

Con relación a ello, presentamos nuestra justificación basada en los antecedentes explicados y otros documentos formales de diferentes instituciones como el plan de estudios y los sílabos relacionados con la enseñanza del TFC en el Perú.

1.2 Justificación

La presente sección comprende las razones por las cuales realizamos esta investigación. En primer lugar mostraremos que el TFC es un tema pertinente para investigar debido a que es estudiado por la comunidad de educación matemática a la cual pertenecemos; en segundo lugar la importancia del GeoGebra en el desarrollo de la investigación, en tercer lugar indicaremos el espacio que ocupa nuestro objeto de estudio en la formación matemática de un estudiante que sigue la carrera de Ingeniería de Alimentos en la ciudad de Lima; y en cuarto lugar expondremos la importancia y el interés que tiene el TFC para nosotros según nuestra experiencia profesional. A continuación, presentaremos algunas conclusiones obtenidas por diversos autores al investigar el TFC.

Scucuglia (2006) y Robles *et al.* (2014) sostienen que reducir la enseñanza del concepto de integral al cálculo de antiderivadas, interpretar la integral definida sólo como el área bajo la curva, y mostrar el TFC como una definición, provoca que los estudiantes presenten dificultades al momento de interpretar y comprender dicho teorema, pues no analizan la geometría que se presenta en el TFC, esto quiere decir que, el no mostrar gráficos que permitan a los estudiantes conjeturar los conceptos y propiedades relacionadas al teorema fomenta la algebrización que ocasiona que sólo se dediquen a resolver preguntas y problemas de carácter algebraico. En este sentido Artigue (1995) señala que la enseñanza del cálculo en carreras de Ingeniería se ha formalizado a través del uso excesivo del álgebra.

En relación a esto Grande (2013) afirma que desarrollar actividades en las cuales el estudiante interprete la integral como un proceso de acumulación, fomenta que el estudiante borre la creencia que tiene de la integral, de ser una herramienta que sólo sirve para calcular el área; además, este proceso permitirá a los estudiantes explorar la hipótesis de continuidad del teorema y darle un significado diferente a la integral definida, el área bajo la curva, al cual los estudiantes están acostumbrados.

La noción de acumulación permite a los profesores formular actividades con un contexto en el cual la integral definida tome distintas interpretaciones las cuales contribuyen a la formación de significados como lo menciona Artigue (1995). La opinión que tienen los profesores en relación con esto es expuesta en la investigación de Picone (2007) en la cual la investigadora recoge la opinión que tienen los docentes en relación a lo mencionado y señala lo siguiente: los profesores de Cálculo consideran que desarrollar estas actividades es pertinente para el aprendizaje del TFC debido a que estas relacionan diversos conceptos del cálculo, sin embargo, no son muy empleadas.

Debido a los problemas que presenta la comprensión del TFC y conforme a las investigaciones realizadas por Grande (2013), Scucuglia (2006), y Robles *et al.* (2014) vamos a diseñar e implementar actividades que permitan a los estudiantes utilizar sus conocimientos previos, adquiridos en el curso de matemática, anteriores al TFC, con la finalidad de que comprendan el funcionamiento del TFC, además de mostrar la importancia del teorema en la matemática. Las actividades se realizarán utilizando un software de geometría dinámica, GeoGebra, el cual será usado como herramienta de cálculo, además de permitir la interpretación geométrica que tiene el TFC. Con lo mencionado anteriormente creemos que el objeto de estudio TFC, es un tema pertinente por investigar en el área de enseñanza de las matemáticas.

El uso del software es justificado por las investigaciones de Scucuglia (2006), Grande (2013), Robles *et al.* (2014). Por ejemplo Scucuglia, señala que el uso calculadoras gráficas condicionan un carácter experimental al hacer matemáticas, pues al emplear estas herramientas tecnológicas el estudiante relaciona y coordina distintas representaciones de un objeto en los registros gráfico, algebraico, tabular, además, de poder repetir las experiencias tantas veces como las desee; lo cual fue necesario en el proceso de probar la tesis del teorema, estas características de la calculadora se presentaron también la investigación de Grande con el GeoGebra, además, este último tiene la ventaja de ser gratuito.

En este sentido los investigadores Robles *et al.* (2014) consideran que el uso de applets empleando la plataforma Descartes es indispensable en el desarrollo de las tareas, porque estos proporcionan recursos visuales suficientes para abordar el TFC, esto provoca que el estudiante conjeture propiedades del TFC empleando el registro gráfico, las cuales ayudan a la comprensión de la tesis del teorema, los applets también se pueden diseñar en el GeoGebra, lo cual hace que este último se vuelva indispensable en nuestra investigación.

Las actividades que diseñaremos e implementaremos están basadas en nuestros antecedentes los cuales recomiendan que para alcanzar el entendimiento del TFC, estas deben de tener ciertas cualidades las cuales las presentamos a continuación:

- Las actividades se deben caracterizar por darle un significado a la integral definida diferente al acostumbrado, el área bajo la curva, para lo cual diseñaremos una situación problema, que consta de dos actividades, en un determinado contexto, la cual se desarrollará con el apoyo del GeoGebra y a lápiz y papel, logrando así que el hacer matemática tenga un carácter experimental como lo afirman Grande, Scucuglia y Robles *et al*.
- La segunda característica de la actividad que desarrollaremos es que debe ser de representación múltiple, esto quiere decir, que el estudiante al desarrollarla debe transitar por distintos registros (gráfico – algebraico – lengua natural) como lo afirma Scucuglia, Anacleto, Grande y Robles *et al*.
- La tercera característica es una recomendación que se plantea en la investigación de Picone, el investigador plantea que al diseñar ejemplos de aplicación o actividades relacionadas al TFC se deben emplear funciones cuya antiderivada sea difícil de calcular o simplemente que estas no posean antiderivada, de modo que cuando se plantee al estudiante derivar funciones de la forma $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ utilice el TFC, esto quiere decir que no obtenga la antiderivada y después la derive.
- Como cuarta característica, emplearemos funciones discontinuas, para que los estudiantes estudien las hipótesis del teorema como afirma Grande y Anacleto.

Con lo presentado anteriormente mostramos que la investigación que deseamos realizar contribuye a la educación matemática desarrollada en el Perú, pues será la primera en abordar el problema que tienen los estudiantes al conectar dos conceptos tan importantes como las derivadas y las integrales mediante el TFC, razón por la cual nuestro objeto de estudio es el TFC siendo nuestros sujetos de investigación estudiantes de segundo ciclo (entre 16 y 18 años) de la Facultad de Ingeniería de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao (UNAC).

El TFC es un tema del curso de Matemáticas II que es requisito y complemento para los cursos de Matemáticas III, Matemáticas IV, Física I, Física II, Fisicoquímica, Estadística, Estática y Resistencia de Materiales, Termodinámica e Ingeniería Económica, conforme se muestra en la figura 2.

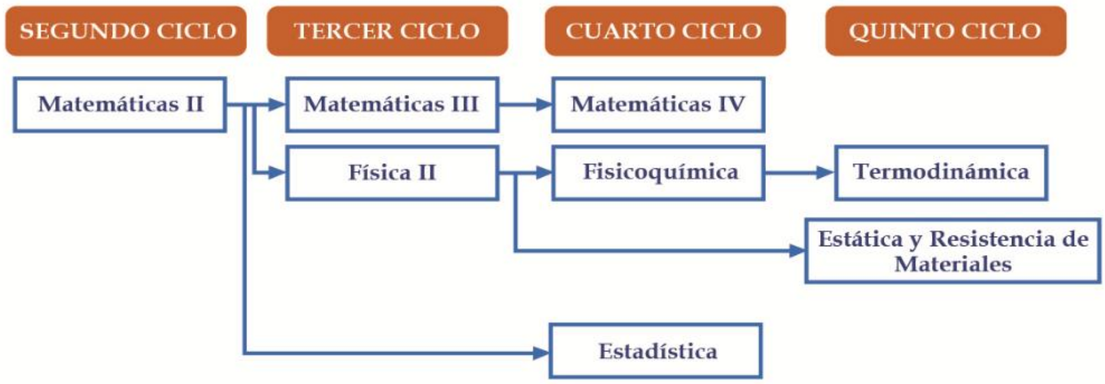


Figura 2. El desarrollo del curso de Matemáticas II en la malla curricular.

Fuente: Adaptado de la malla curricular de la Facultad de Ingeniería de Alimentos de UNAC.

El TFC es abordado en el curso de MATEMÁTICAS II, siendo desarrollado en la primera unidad del curso, en el tercer capítulo de la primera semana como se muestra en el sílabo del curso, el cual hemos adjuntado en los anexos, correspondiente a la integral definida. Luego, hemos notado que el TFC es usado como una herramienta de cálculo pues se empleará para realizar el cálculo de áreas, volúmenes, momentos de inercia y longitudes de arco como se puede observar en la figura 3. Además, se espera que con los conocimientos obtenidos del TFC en el curso de Matemáticas II este sea una herramienta de cálculo y de aprendizaje en cursos como Fisicoquímica, Estadística, Estática y Resistencia de Materiales, Termodinámica e Ingería Económica, etc.

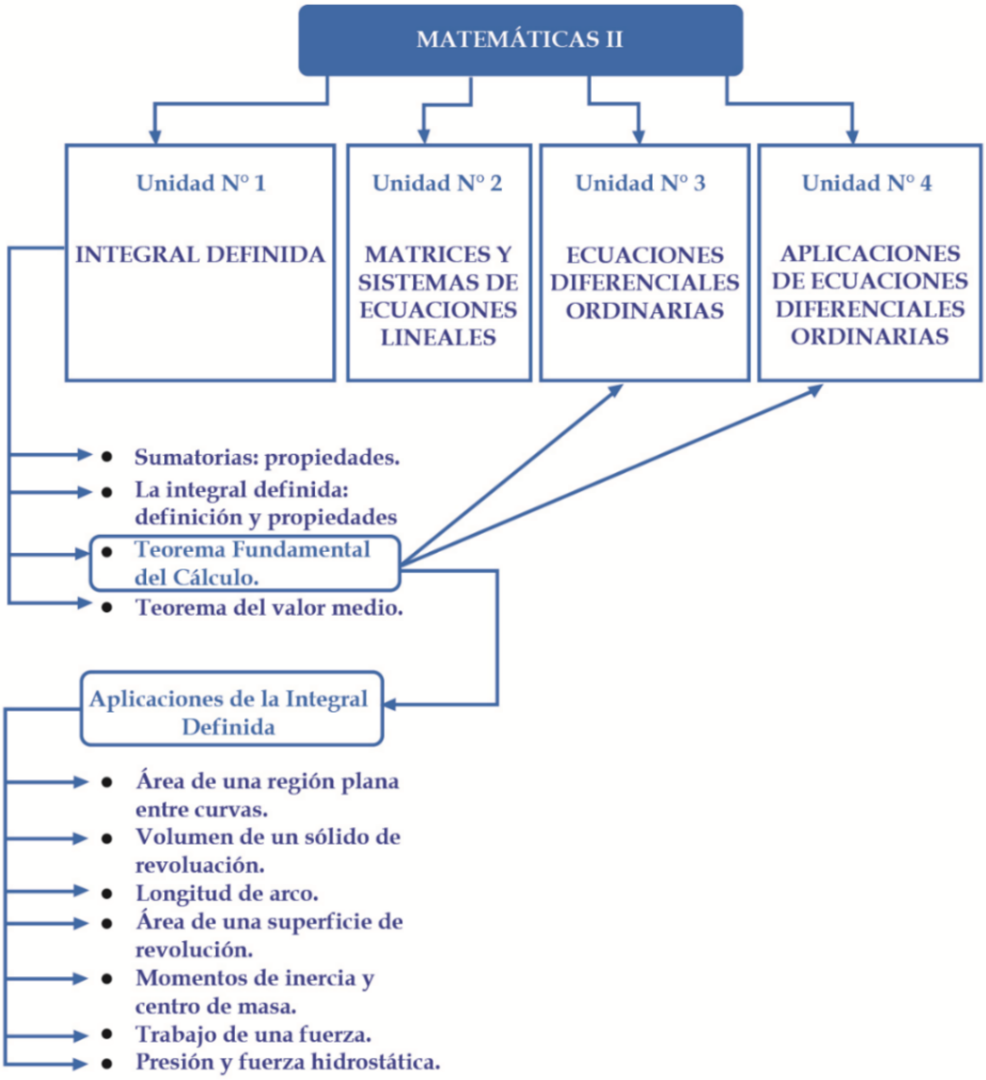


Figura 3. Desarrollo del sílabo de Matemáticas II

Fuente: Adaptado del sílabo del curso de Matemáticas II impartido en la Facultad de Ingeniería de Alimentos de UNAC.

Se puede hacer más explícito el uso del TFC para el estudiante de Ingeniería de Alimentos, al mostrar su aplicación en algunos cursos como Estática y Resistencia de materiales en donde el TFC permitirá manipular y comprender ciertos modelos que se presentan, por ejemplo, la relación existente en la fuerza cortante (V) y el momento flector (M) de una viga viene dada por una integral, la cual mostramos en la figura 4.

$$\Delta M = \int V \, dx$$

$$\text{Cambio en el momento flexionante} = \text{Área bajo el diagrama fuerza cortante}$$

Figura 4. Relación entre el momento flector (M) y la fuerza cortante (V)

Fuente: Hibbeler (2010, p. 355)

Asimismo, en la facultad de Ingeniería de Industrias Alimentarias que ofrece la Universidad Agraria La Molina se desarrolla el TFC en el curso de Cálculo Integral, el cual es prerrequisito de cursos como termodinámica, el cual a su vez permitirá llevar el curso de resistencia de materiales para la industria alimentaria. Así los conocimientos adquiridos relacionados al TFC en el curso de Cálculo integral serán una herramienta en cursos venideros como se puede mostrar en la figura 5.

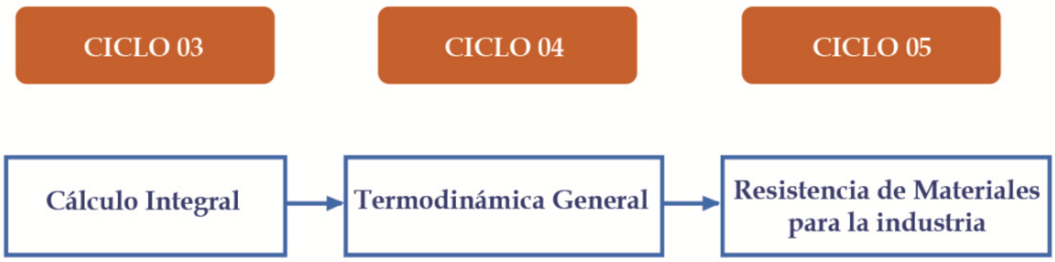


Figura 5. El desarrollo del curso de Cálculo Integral en la malla curricular.

Fuente: Adaptado de la malla curricular de la Facultad de Industrias Alimentarias de Universidad Agraria La Molina.

Con respecto al desarrollo del curso de cálculo integral, este empieza con el cálculo de integrales definidas para luego definir la integral definida como sumas de Riemann y recién ahí abordar el TFC, el cual le permitirá desarrollar al profesor desarrollar las aplicaciones mencionadas anteriormente de la integral definida. A continuación, en la figura 6, se muestra el desarrollo del sílabo del curso del sílabo del curso de Cálculo integral en donde se puede evidenciar que el TFC es una herramienta de cálculo en el curso.

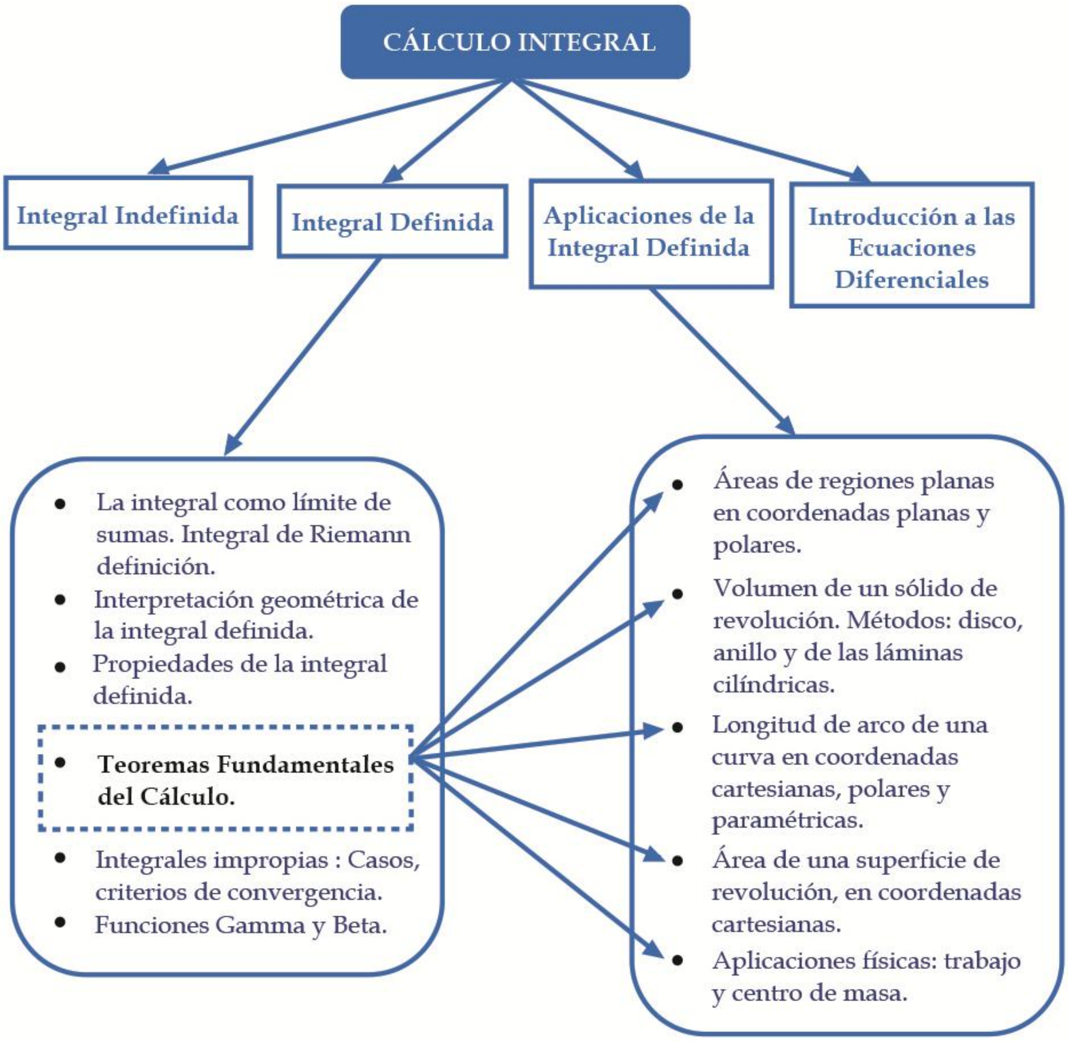


Figura 6. Desarrollo del sílabo del curso de Cálculo integral impartido por la Facultad de Industrias Alimentarias de la Universidad Agraria la Molina.

Fuente: Adaptado de la malla curricular de la Facultad de Industrias Alimentarias de la Universidad Agraria La Molina.

Otra Universidad en la ciudad de Lima que ofrece la carrera de Ingeniería Alimentaria es la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL), la cual aborda el TFC en el curso de Cálculo de una variable que es impartido en el segundo ciclo de formación del ingeniero.

Este curso es prerrequisito del curso de Cálculo de Varias Variables correspondiente al área de matemáticas, en el área de física tenemos al curso de Física I, así como también de otros cursos de ingeniería entre los que destacan la asignatura de Estadística para Ingeniería, el curso de Fisicoquímica y más; esto lo podemos observar en la figura 7.

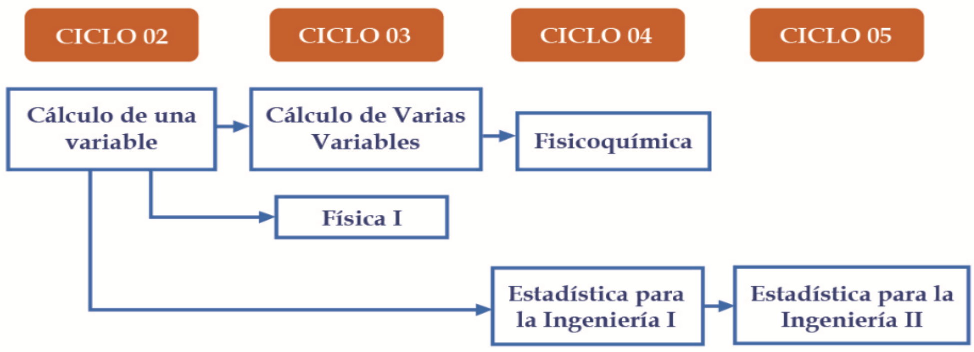


Figura 7. Malla curricular de la carrera de Industrias Alimentarias.

Fuente: Adaptado de la malla curricular de la Facultad de Industrias Alimentarias de la Universidad San Ignacio de Loyola.

Nuevamente podemos observar que el TFC es relevante para la formación del Ingeniero en Industrias Alimentarias debido a que el teorema es una herramienta de cálculo en los cursos de su formación. En cuanto al curso de Cálculo de una variable, el TFC se aborda en la Unidad N.° 3 la cual corresponde a Integración de funciones, después de haber desarrollado integrales indefinidas, métodos de integración e integral definida. A continuación, mostraremos el desarrollo del curso en la figura 8.

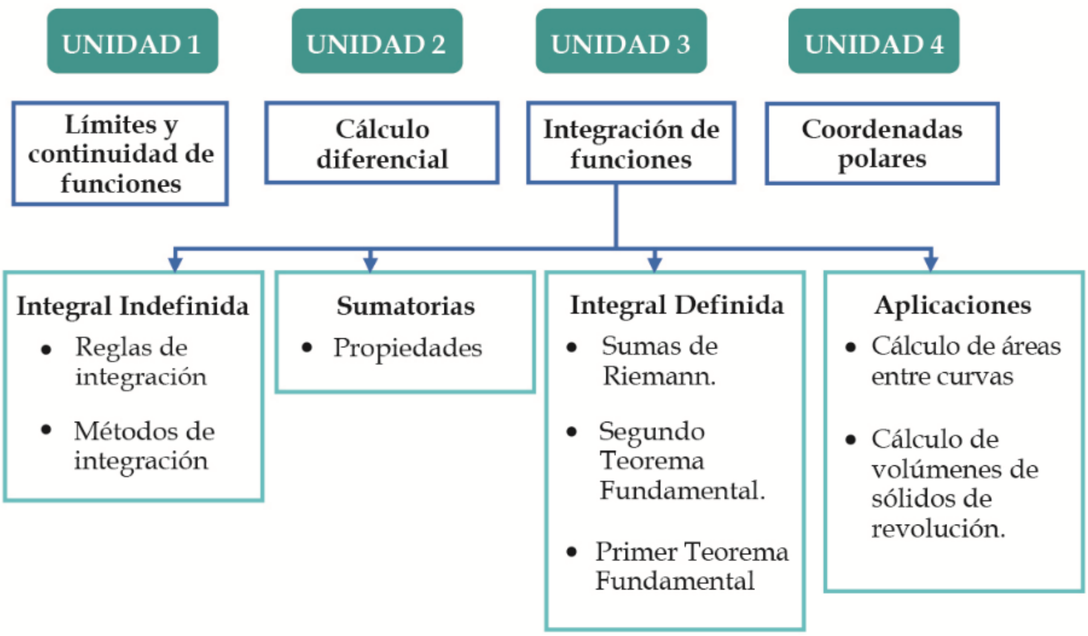


Figura 8. Desarrollo del sílabo del curso de Cálculo integral impartido por la Facultad de Industrias Alimentarias de la Universidad San Ignacio de Loyola.

Fuente: Adaptado de la malla curricular de la Facultad de Industrias Alimentarias de la Universidad San Ignacio de Loyola.

Se puede observar que en las dos primeras universidades el TFC se desarrolla en un curso donde el tema central es la integral a diferencia de la última universidad en donde el TFC se aborda en un curso que comprende las derivadas e integrales.

Con lo mostrado creemos que el estudio de la enseñanza y aprendizaje del TFC es relevante debido a que este es una herramienta que utilizará el ingeniero en su formación para articular y desarrollar nuevos conocimientos.

En nuestra práctica docente en una universidad de Lima, en el curso de Cálculo no se realiza la prueba del teorema debido a que el sílabo del curso no lo amerita, esto quiere decir, que solo se presenta el teorema de manera algebraica, como un resultado terminado, el cual permite relacionar las antiderivadas o integrales indefinidas con la integral definida, es decir, solo se presenta el segundo teorema fundamental del cálculo, el cual mostramos en el cuadro 2 **.**

Cuadro 2. Segunda parte del TFC

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2
Si f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f entonces $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ Donde F es una antiderivada de f si se verifica que $F' = f$

Fuente: Adaptado de Stewart (2006, p384)

Sin embargo, pensamos que sería importante utilizar una situación problema para que el estudiante encuentre el significado del TFC generando así el entendimiento del mismo. Lo cual creemos que resultará beneficioso para el aprendizaje y comprensión de un resultado importante del cálculo. En este sentido Camarena (2010) señala que una de las causas que repercuten en la problemática del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en las carreras de Ingeniería tiene que ver con la enseñanza de esta en los primeros ciclos, la matemática que se enseña esta fuera del contexto de la propia ingeniería ocasionando que el estudiante no relacione los conocimientos matemáticos adquiridos con los impartidos en los cursos de ingeniería.

En referencia a lo anterior, hemos mencionado diferentes procesos y conceptos importantes en la enseñanza del TFC, además de las dificultades que este ocasiona en los estudiantes para su entendimiento si se sigue el enfoque tradicional, por tal motivo suponemos que el uso de un *software* apoyaría a los estudiantes a generar conjeturas sobre las articulaciones que tiene el TFC con el cálculo diferencial e integral. Además, la relación y coordinación entre distintos registros de representación ayudaría a la comprensión de nuestro objeto de estudio.

1.3 Aspectos Teóricos

1.3.1 Representación semiótica

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemática constituyen un reto para los docentes en el sentido que estos deben buscar estrategias para trasmitir el contenido matemático y sobre todo lograr que el estudiante lo interiorice. Para la comunidad de educación matemática, según Duval (1995), estos procesos involucran actividades cognitivas como la conceptualización, la reflexión, el planteamiento y la resolución de problemas.

Debido a esto Duval (2016) afirma que los investigadores en Educación Matemática han desarrollado diversos enfoques, los cuales se caracterizan por utilizar representaciones, pues en matemáticas los objetos son abstractos a diferencia de otras ciencias donde los objetos son tangibles, entre los enfoques que destacan tenemos los didácticos y epistemológicos.

Para el autor las representaciones constituyen una herramienta importante en el aprendizaje de las matemáticas, pues estas permiten acceder a los objetos matemáticos, por ejemplo, una representación del objeto integral indefinida de una función real de variable real es $\int f(x)dx$.

Las representaciones pueden ser internas y externas; las primeras son las que poseen un sujeto y se caracterizan porque no son comunicadas, en cambio las externas son generadas por la aplicación de un sistema semiótico y son entendibles por todos aquellos que entienden el sistema semiótico considerado.

En este sentido, el autor afirma que las representaciones “también pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos que pueden ser mentales, computacionales y semióticos” (Duval, 2016, p.62). Esto quiere decir que las representaciones semióticas son representaciones externas y no sólo se utilizan para comunicar algo, sino, también para el desarrollo de la actividad matemática, esto es, ellas son una herramienta que genera un nuevo conocimiento.

Además, el investigador señala que las representaciones semióticas son el único medio de acceso a los objetos matemáticos, por consiguiente, se debe emplear distintas representaciones para estudiarlas y para ello es importante reconocer que estas no son el objeto matemático, sino que ayudan a su comprensión, lo cual hace que, pasar de la representación de un objeto a otra representación del mismo, sea un problema.

Para el autor, las representaciones semióticas quedan determinadas por un sistema particular de signos, lenguajes, expresiones algebraicas, gráficos cartesianos; pudiendo ser transformadas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico para el sujeto que las moviliza.

Por sistema semiótico el autor plantea:

> Un sistema semiótico considera reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí, de modo que la asociación formada tenga también un sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan la capacidad inventiva al sistema semiótico permitiendo efectuar, en su interior, transformaciones de expresión o de representación. Estas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio [...]. (Duval, 2004, p.43 citado en Ingar, 2014, p.42)

En nuestra investigación utilizaremos diversos sistemas semióticos los cuales presentan reglas que nos permiten escribir e interpretar símbolos, expresiones de una manera determinada, por ejemplo, la escritura algebraica $\frac{df}{dx}$ es la representación de la derivada de la función f. Un sistema semiótico es un registro de representación semiótica siempre que permita realizar tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis[1].

---

[1]Se denomina "semiosis" a la aprehensión o producción de una representación semiótica, y "noesis", a la aprehensión conceptual de un objeto. Es preciso afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. Para que ocurra la aprehensión de un objeto matemático es necesario que la noesis (conceptualización) ocurra por medio de semiosis (representaciones).

1.3.2 Registro de Representación Semiótica

Duval (1995) afirma que un registro de representación semiótica es un sistema semiótico que permite desarrollar tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis que son: la formación, el tratamiento y la conversión.

La **formación** de una representación semiótica en un determinado registro "implica siempre una selección en el conjunto de caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar" (Duval, 1995, p.43). Esto quiere decir, que realizar la formación de una representación semiótica consiste en el empleo de reglas de cumplimiento y de selección de ciertas características y propiedades de lo que queremos representar. Esas reglas ya están establecidas por la comunidad científica, en nuestro caso la Matemática, de modo que al usarlas podamos reconocer tales representaciones.

Según el autor es de suma importancia respetar las reglas de formación, no sólo por razones de comunicación, sino también porque estas permitirán el uso de los medios de tratamiento que brinda el sistema semiótico empleado. Por ejemplo, la formación de la representación de la familia de antiderivadas de una función real de variable real en el registro algebraico es dada por $\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, pues en su formación se identifican variables x, $F(x)$, el integrando $f(x)$, la escritura algebraica $\int . dx$, la pertenencia, el signo de adición, el símbolo de los números reales y las integrales indefinidas.

Debemos mencionar que los s*oftware*s computacionales como el *Mathematica* y el GeoGebra contribuyen, también, a la producción de representaciones semióticas. Para llevar a cabo estas representaciones los usuarios deben conocer los comandos necesarios del software empleado, así como los conceptos matemáticos movilizados a representar. (Duval, 2011, citado en Ingar, 2014, p.44).

Asimismo, para realizar la formación de una representación gráfica del objeto matemático integral definida mediante el GeoGebra nos basamos en el trabajo de Ingar (2014), en el cual esta formación se da por medio de los comandos del *software*, GeoGebra, se envían órdenes a su núcleo para mostrar las representaciones en pantalla, para ser más exactos en la vista gráfica del software. Por ejemplo, para formar la representación gráfica de la función acumulación evaluada en cuatro, $F(4) = \int_1^4 f(x)dx$, previa definición de la función $f(x) = 0.1x^3 - x + 3$, debemos ingresar en la entrada, el comando ***Integral(f, 1, 4)***, para después presionar la tecla *enter*, obteniendo así la representación gráfica mostrada en la figura 9.

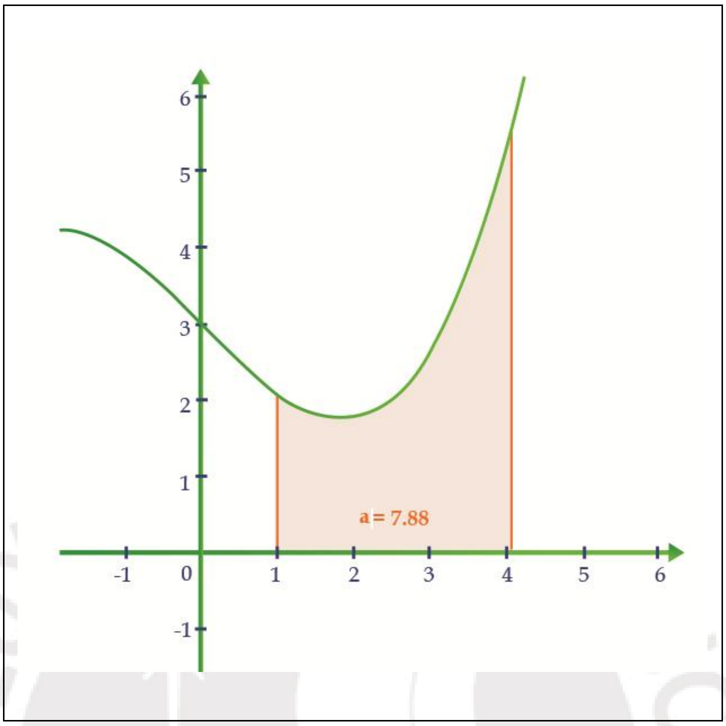


Figura 9. Representación gráfica de la integral definida empleando el GeoGebra

Además, el software permite facilitar y acelerar los cálculos, esto quiere decir, que para obtener el valor de la integral $F(4) = \int_1^4 f(x)dx$ emplearemos el comando ***integral***.

El **tratamiento** de una representación es la transformación de esta representación en el mismo registro en el cual formó, en otras palabras, el tratamiento de una representación es una transformación interna en el mismo registro. Así en el registro de lengua natural, un ejemplo de tratamiento es el parafraseo; en cambio, en el registro algebraico los tratamientos son las posibles operaciones que se pueden realizar a una determinada representación, por ejemplo, en nuestra investigación un tratamiento en el registro algebraico es, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Además, un ejemplo de tratamiento en el registro gráfico es la traslación de la representación gráfica de la recta vertical $x = 2$ a $x = 4$ lo cual ocurre cuando la función $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ es evaluada en $x = 2$ y $x = 4$ conforme se muestra en la figura 10.

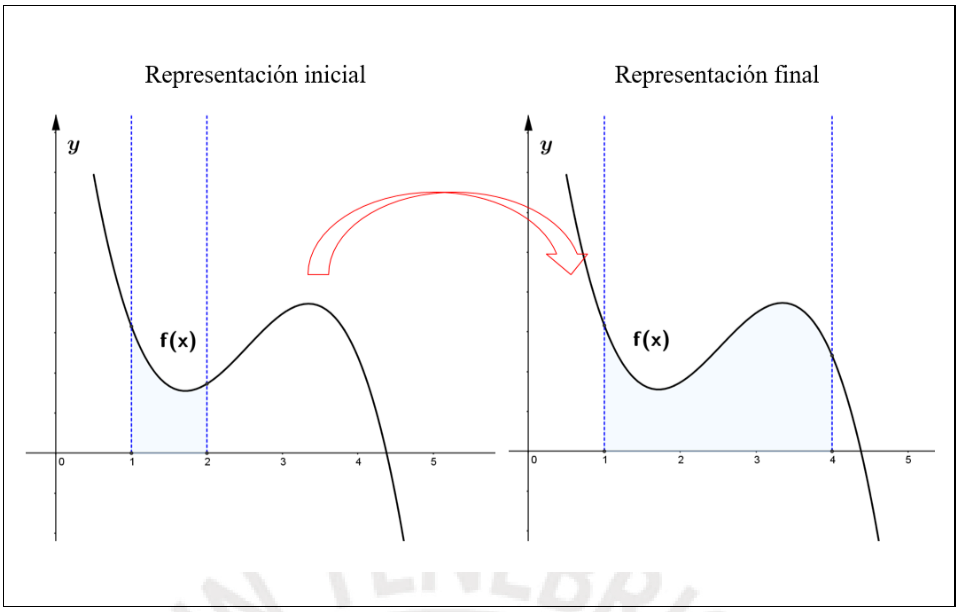


Figura 10. Tratamiento de la representación del proceso de acumulación en el registro gráfico.

Según Duval (2011) la computadora desempeña un papel importante en la realización de tratamientos debido a que muestra las representaciones que son resultado de efectuar tratamientos, de manera rápida. Citado en Ingar (2014, p46). Esto quiere decir, por ejemplo, que realizar gráficos y cálculos que pueden tomar horas y días son realizados por el software de manera inmediata. Además, el empleo del software permite que los sujetos manipulen las representaciones, por ejemplo, realizar un acercamiento "zoom" a una representación gráfica equivale a realizar un tratamiento en el registro grafico tal como se muestra en la figura 11**.**

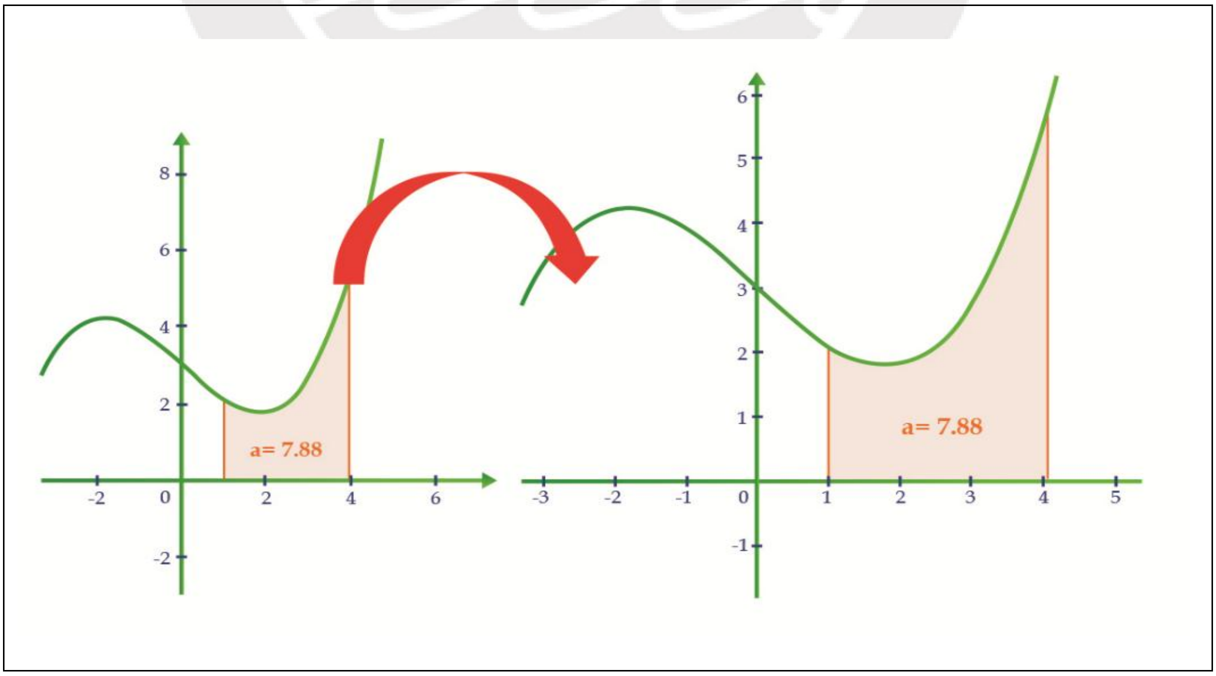


Figura 11. Tratamiento realizado en el registro gráfico por medio del GeoGebra

Debemos aclarar dicho tratamiento se puede realizar con el uso *mouse* o con el comando aproximar  del GeoGebra.

Duval (1995) afirma que escoger un registro de representación adecuado para representar un determinado objeto puede favorecer el tratamiento. Por ejemplo, en nuestra investigación para llevar a cabo el proceso de acumulación $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es recomendable representar la función en el registro gráfico empleando el GeoGebra.

La **conversión** de una representación semiótica es la transformación de esta representación de un registro en una representación en otro registro, conservando la totalidad o una parte del objeto matemático en cuestión. En otras palabras, la conversión es una transformación externa al registro de representación inicial. Por ejemplo, la traducción de un texto en una o más expresiones algebraicas corresponde a una conversión de representaciones de estas expresiones de la lengua natural hacia el registro algebraico, con esto podemos notar que la conversión es una actividad independiente y diferente al tratamiento.

Para explicar cómo se da la conversión de las representaciones usando el GeoGebra nos basaremos en el trabajo de Ingar (2014) en el cual la investigadora señala que una conversión de la representación en el registro algebraico hacia una representación en el registro gráfico CAS, se da cuando empleamos los comandos propios del *software*. A continuación, presentamos en la figura 12 un ejemplo de esta transformación.

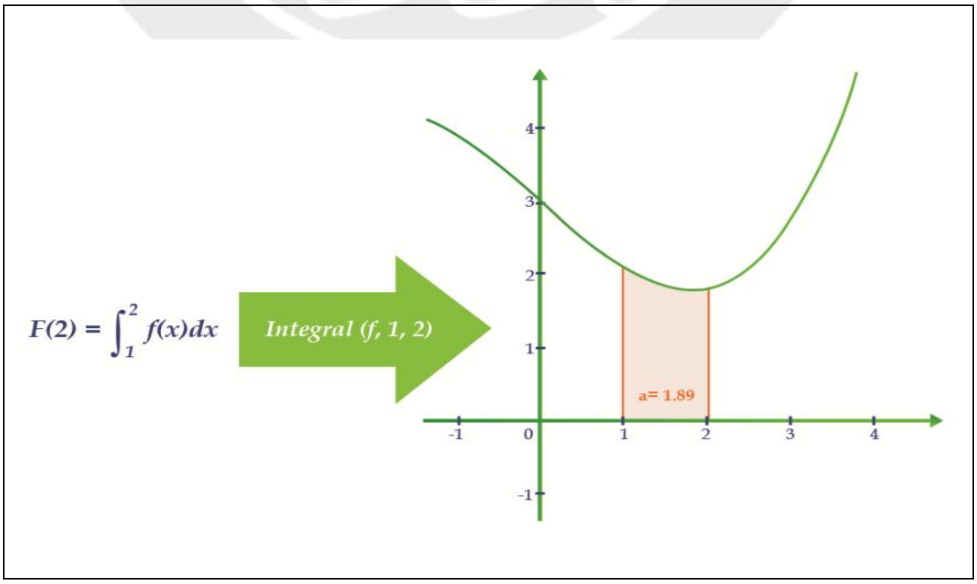


Figura 12. Conversión de la representación de la función acumulación del registro algebraico hacia el registro gráfico CAS.

En la figura 12, se muestra la conversión de la representación de la función acumulación evaluada en dos, por medio del GeoGebra del registro algebraico hacia el registro gráfico CAS. Esta transformación se da cuando la representación de la integral definida en el registro algebraico va hacia el registro gráfico CAS, empleando el comando ***Integral (f, 1, 2)*** del GeoGebra; previa definición de la función $f(x) = 0.1x^3 - x + 3$.

Debemos tener en cuenta que cuando representamos la integral definida de la función f en el intervalo $[1, 2]$ en dos representaciones diferentes, la algebraica y la gráfica, propia del GeoGebra, movilizamos actividades cognitivas, por ejemplo, establecemos relaciones entre los conocimientos matemáticos y los comandos del GeoGebra.

Duval (1995) afirma que disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión, se necesita de una segunda condición, la cual consiste en la capacidad que tiene un sujeto para reconocer una representación de un objeto en dos o más registros diferentes. A esta capacidad se le denomina la coordinación de representaciones.

Debemos señalar que la coordinación es la única posibilidad de la que se dispone para no confundir el objeto matemático con su representación, por ello el autor plantea, para analizar las dificultades en matemática es necesario estudiar las conversiones de representaciones y no los tratamientos debido a que la capacidad de convertir representaciones implica la coordinación de las mismas.

En este sentido el autor afirma,

> La originalidad de la actividad matemática está en la movilización simultánea de al menos dos registros de representación al mismo tiempo o en la posibilidad de intercambiar en todo momento de registro de representación. […] la comprensión en matemática supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. (Duval, 2003, p. 14) Traducción nuestra.

Además, el autor señala que la conversión no tiene ningún papel esencial en los procesos matemáticos de demostración o prueba, debido a que estos se realizan en base a tratamientos efectuados en un determinado registro discursivo; lo cual nos servirá para analizar las transformaciones que se dan el libro matemático de Lima (1997).

A continuación, presentamos en la figura 13 la coordinación de la representación del objeto matemático integral definida en los registros de representación lengua natural, algebraico, gráfico. También, podemos evidenciar la formación de la representación del área en el registro algebraico, es decir, se muestran los símbolos de pertenencia $\in$, los pares ordenados $(\,,\,)$, las variables x e y, etc. Así como los tratamientos que se realizan en el registro algebraico y numérico.

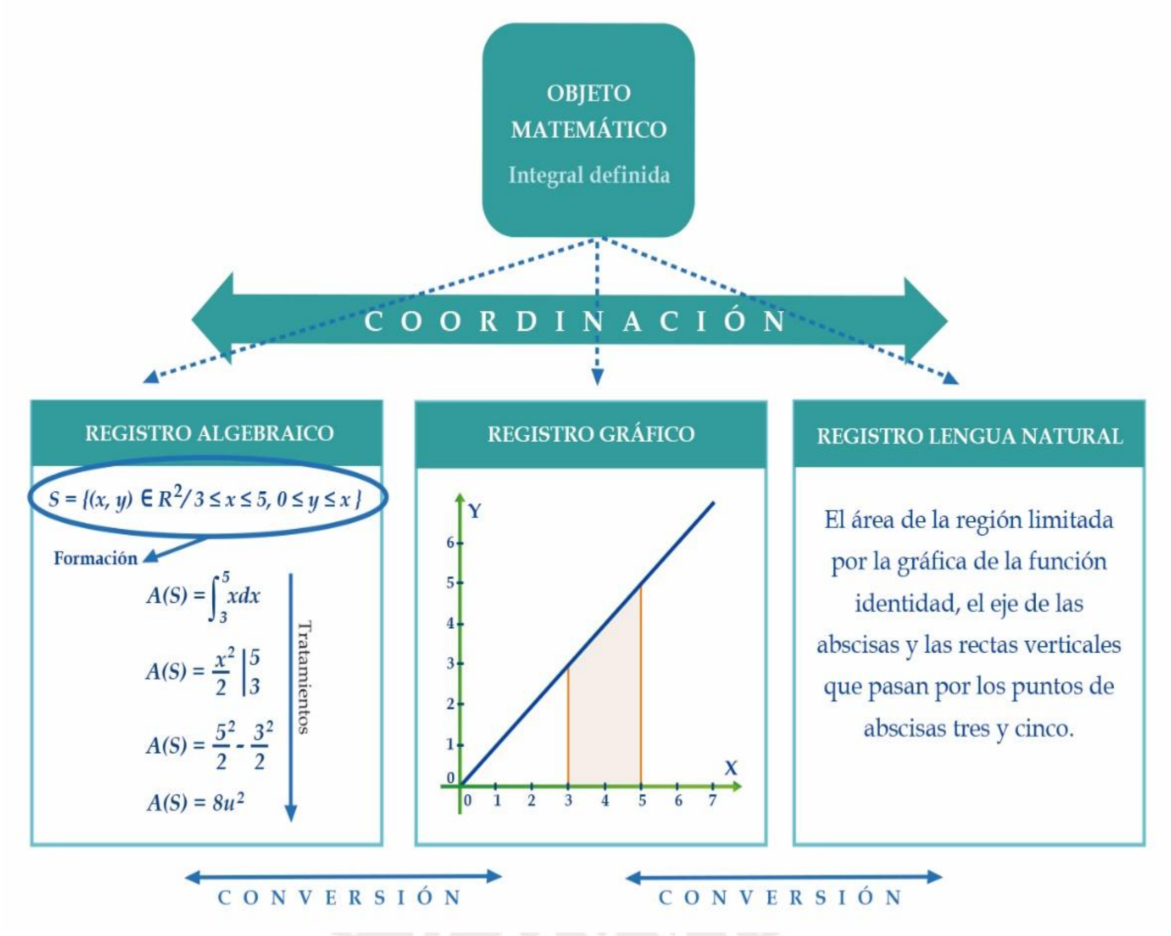


Figura 13. Formación, tratamiento, conversión y coordinación de la representación del objeto matemático integral definida de una función real de variable real.

En nuestra investigación utilizaremos los registros de representación semiótica: registro verbal o de lengua natural, registro gráfico (lápiz y papel), registro gráfico CAS (por medio del GeoGebra), registro algebraico y registro numérico; los cuales son movilizados en la actividad matemática y pueden ser agrupados como se muestra en el cuadro 3.

Cuadro 3. Registros movilizados en la actividad matemática

	Representación discursiva	**Representación no discursiva**
Los tratamientos no son algorítmizables	• Registro de lengua natural.	• Registro figural.
Los tratamientos son algorítmizables	• Registro algebraico. • Registro numérico.	• Registro gráfico. • Registro gráfico CAS.

Fuente: Adaptado de Campos (2007, p.77)

Las investigaciones de Grande (2013), Anacleto (2007) y Picone (2007) mencionadas en nuestros antecedentes nos muestran que los estudiantes logran una comprensión incompleta del significado del TFC, esto se debe a que sólo realizan tratamientos en el registro algebraico y a lo mucho conversiones de representaciones de un determinado objeto matemático, involucrado con el TFC, del registro algebraico al registro de lengua natural.

Por tal motivo se han realizado investigaciones que buscan mejorar la compresión del TFC, como las de Scucuglia (2006), Robles *et al* (2014), sugiriendo actividades mediante el uso de un software, en nuestro caso el GeoGebra, que permita al estudiante coordinar representaciones de un determinado objeto en el registro gráfico con los registros mencionados anteriormente, por ello creemos que además del trabajo tradicional a lápiz y papel, realizar actividades que permitan al estudiante hacer tratamientos en el registro gráfico.

Por todo esto, y de acuerdo con Duval (1995) creemos necesario que el estudio sobre los tratamientos en el registro gráfico permite elaborar conjeturas, las cuales serán validadas y con ello los estudiantes podrán concluir propiedades y condiciones de nuestro objeto de estudio.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta

¿Los estudiantes de ingeniería de alimentos coordinan los Registros de Representación Semiótica cuando desarrollan una situación problema relacionadas al TFC?

Para responder a la siguiente pregunta de investigación nos proponemos el siguiente objetivo general.

Objetivo general

Analizar la coordinación de las representaciones en los Registros de Representación Semiótica: gráfico - algebraico – lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC.

Objetivos específicos

Con el fin de lograr este objetivo nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los tratamientos realizados en el registro gráfico y algebraico, por los estudiantes de Ingeniería de Alimentos cuando solucionan una situación problema relacionada al TFC.
- Estudiar la conversión de las representaciones en el registro gráfico para el registro algebraico y viceversa, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando solucionan una situación problema relacionada al TFC.

1.5 Metodología de Investigación

En esta sección presentaremos la metodología de nuestra investigación, la cual corresponde a una investigación del tipo cualitativo, para ser más específicos la ingeniería didáctica. Además, mostraremos la justificación de su pertinencia y relevancia en nuestra investigación.

Para Taylor y Bogdan (1986) la manera o la forma con la que un investigador enfoca un determinado problema y busca una respuesta al mismo sintetizan lo que entendemos por metodología, es decir, es el modo o la manera de realizar la investigación. Además, los investigadores señalan que los conocimientos y supuestos teóricos persuaden a un investigador o grupo de investigadores a escoger una determinada metodología.

1.5.1 Investigación cualitativa

Una metodología cualitativa en un sentido amplio se caracteriza porque: “los datos que se obtienen son descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (Taylor y Bogdan, 1987, p. 20). Una investigación que sigue una metodología cualitativa se denomina investigación cualitativa.

El problema que se presenta en nuestra investigación parte de proposiciones a partir de nuestro marco teórico, el problema planteado no está basado en hipótesis determinadas *a priori*, esto hace que nuestra investigación sea inductiva. Por lo mencionado anteriormente y de acuerdo con los criterios planteados por Taylor y Bogdan (1987) nuestra investigación es cualitativa.

Para Bogdan y Biklen (1994), una investigación que sigue una metodología cualitativa tiene las siguientes características:

i) En una investigación cualitativa el ambiente natural es la fuente directa de los datos, y el investigador es el instrumento principal. Es clave para la investigación la compresión que pueda tener el investigador luego de analizar los datos obtenidos.

ii) La investigación cualitativa es descriptiva. Consiste en recolectar los datos mediante diversos instrumentos, entre estos tenemos a los cuestionarios, entrevistas, registros de observación, grabación de videos o audios.

iii) En una investigación cualitativa, los investigadores se interesan más en los procesos que los productos. Esto quiere decir que su preocupación radica en la comprensión de los procedimientos y las interacciones de los sujetos en su ambiente natural.

iv) Las investigaciones cualitativas tienden a analizar los datos de manera inductiva. Es decir, no se formulan hipótesis que se han de verificar o refutar con la recolección de los datos. La investigación utiliza un marco teórico que guiará la recolección y análisis de datos.

v) El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. El investigador busca la interpretación de los datos recogidos considerando tal información desde el punto de vista del informante.

Con respecto al ítem i) y ii) en nuestra investigación los datos van a ser recolectados en el aula de clase, que viene a representar el entorno donde se desenvuelven los estudiantes, donde se desarrollaran las actividades que elaboraremos. Para el recojo de datos emplearemos las fichas de trabajo, fichas de observación, equipos de grabación de audio y video como una filmadora además del programa Cam Estudio que nos permitirá grabar las acciones que realizan los estudiantes en GeoGebra. Además, la investigación se llevará a cabo con la participación de dos observadores, así como el investigador, quien también participará como formador.

Debido a los procedimientos que seguiremos para recolectar los datos buscamos comprender los procesos de cómo los estudiantes investigan el TFC al desarrollar una situación problema, la cual fue guiada por nuestro marco teórico referente al proceso de acumulación de una función, más que el producto final. Con lo mencionado estamos verificando que nuestra investigación posee las características de un estudio cualitativo señalados en los ítems iii) y iv).

Respecto al ítem v) nuestra investigación se apoya en socializar para verificar y comprender los significados producidos por los estudiantes que forman parte del estudio, ya que es necesario conocer, retroalimentar y validar las acciones o declaraciones de los estudiantes al realizar las actividades.

Por lo descrito anteriormente afirmamos que nuestra investigación es cualitativa pues tiene todas las características que debe tener un estudio cualitativo según Bogdan y Biklen (1994).

1.5.2 Aspectos de la Ingeniería didáctica.

Considerando que nuestro estudio es una investigación cualitativa en educación matemática, se hace indispensable reflexionar en un método que nos guie de modo sistemático para alcanzar nuestros objetivos de investigación, por ello consideramos como método en nuestra investigación trabajar con algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue, cuya elección fundamentamos a continuación.

La ingeniería didáctica se característica principalmente por ser una metodología de carácter experimental la cual está basada en las intervenciones didácticas en clase, las cuales toman la forma de una secuencia de lecciones de enseñanza. Artigue (1995). Es decir, trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de hacer emerger determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados.

Según la autora la metodología mencionada lleva ese nombre, debido a que esta describe el modo de abordar el trabajo de profesor con el trabajo que realiza un ingeniero. Por ejemplo, cuando un ingeniero va a llevar a cabo un proyecto, este se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, accede a someterse a controles científicos, pero a la vez está obligado a encargarse de objetos mucho más complicados que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede tomar o no ha tomado aún a su cargo (Artigue, 1989)

Según Brousseau (2016, p.4)

> La ingeniería didáctica se ocupa de la creación de modelos coherentes y pertinentes y de lograr dispositivos educativos sobre el conocimiento preciso, la intención de describir o predecir y explicar los acontecimientos observables de un episodio de enseñanza específica (situaciones o curriculum) observado o propuesto: 1) observadas, con el fin de reunir información que apreciarán, explican posteriormente su progreso y resultados, y para permitir su reproducción, 2) la intención de determinar las condiciones reproducibles (viables y comunicables) de su progreso y sus resultados observables. El estudio de la coherencia y pertinencia de estos modelos se refiere a una revisión crítica de los conceptos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la constitución de la materia que se enseña.

Según Artigue (1995) la ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por:

- Estar basada en las intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
- La validación que se realiza es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis *a priori y a posteriori* (y no la validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control). Con respecto a esta característica de la ingeniería, la autora afirma que:

  > Las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*. (Artigue 1995, p. 37)

De acuerdo con la autora, la ingeniería presenta las siguientes fases:

Análisis preliminar. En esta fase, la autora señala que se debe explorar el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza de un determinado objeto matemático, por ejemplo, se debe analizar la enseñanza tradicional, las concepciones que tienen los estudiantes en relación con el objeto matemático en estudio, así como las dificultades y obstáculos que se presenta en la compresión del mismo, además de analizar las restricciones donde se realizará el estudio. En nuestra investigación esto se encuentra desarrollado en los antecedentes (investigaciones que tomamos de referencia) y en nuestra justificación (malla curricular, sílabos), los cuales guardan relación con el estudio del TFC.

A continuación, detallaremos los aspectos explicados anteriormente para el objeto matemático, el TFC, que estudiamos en nuestra investigación.

- **Aspecto epistemológico**, según Artigue (1995, p.40) este aspecto está "asociado con las características del saber en juego". En nuestra investigación este aspecto está compuesto por las cuestiones históricas y matemáticas del TFC, es decir, como emerge el TFC en la historia hasta que se formaliza como objeto matemático de estudio. Para realizar este estudio nos basaremos en los trabajos de Boyer (1987), Grande (2013) y Campos (2007) cuyos trabajos forman parte de nuestros antecedentes.
- **Aspecto cognitivo**, según Artigue (1995, p.40) este aspecto está "asociado con las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza". En nuestra investigación esto se desarrolla cuando realizamos el levantamiento de antecedentes, investigaciones de referencia, los cuales tienen relación directa o indirecta con el estudio, enseñanza y aprendizaje del TFC y con las características de los sujetos implicados a los considerados en nuestra investigación, por ejemplo, nivel similar de instrucción, formación matemática similar.
- **Aspecto Didáctico**, según Artigue (1995, p.40) este aspecto está "asociado con las características del funcionamiento del sistema de enseñanza". Este aspecto será tratado en nuestra investigación al analizar el libro de texto *Cálculo de una variable trascendentes tempranas* cuyo autor es James Stewart, el cual se encuentra como libro de consulta en el sílabo del curso de Matemática II impartido por la facultad de Ingeniería de Alimentos de la UNAC. Este análisis nos permitirá conocer la manera en que el conocimiento, el estudio del TFC, se transmite a los estudiantes.

Concepción y análisis *a priori*.

Con respecto a la concepción, en esta etapa se toman en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes, es decir, sus errores más frecuentes y las dificultades que tienen cuando abordan el TFC, así como el estudio del objeto matemático; lo cual fundamenta el análisis preliminar y nos permitirá iniciar el proceso de ingeniería para lograr la génesis esperada.

En palabras de la autora: “la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares” (Artigue, 1995, p. 38).

Con respecto al diseño de la situación problema, este debe contener tales supuestos, además, debe guardar relación directa con los objetivos de la investigación. Las actividades que conforman la situación problema deben estar diseñadas con la finalidad de permitir la génesis artificial del conocimiento, en nuestro caso la génesis del TFC, para ello el profesor ingeniero manipula las variables de comando, las cuales permitirán esta génesis.

En relación con las variables de comando la autora distingue las variables macro-didácticas o globales y las variables micro-didácticas o locales.

- **Variables macro-didácticas,** según Artigue (1995, 42) “concernientes a la organización global de la ingeniería”
- **Variables micro-didácticas,** según Artigue (1995, 42) “concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase”.

En nuestro trabajo queremos conseguir que el estudiante aprenda un conocimiento matemático a partir de una situación problema diseñada por el profesor-investigador, para lo cual vamos a controlar y modificar ciertas condiciones (variables didácticas) que tienen la finalidad de adquirir dicho conocimiento.

En este sentido Brousseau (2007) señala que “las variantes de una situación relativa a un mismo saber matemático pueden presentar grandes diferencias de complejidad y en consecuencia conducir a estrategias óptimas diferentes y también maneras diferentes de conocer un mismo saber” (p.41).

“[…] El aprendizaje por adaptación supone que se elijan las variables de modo tal que el conocimiento que se quiere “hacer descubrir” sea más ventajoso que cualquier otro” (p.42)

Además, en relación con las variables didácticas, nos apoyamos en lo que afirma Almouloud (2007), la elección de las variables didácticas y sus valores, los cambios elegidos logran modificar estrategias óptimas, y si estos cambios son significativos generan un cambio informacional lo cual puede llevar a un cambio de estrategia para resolver el problema en cuestión. Las variables son elegidas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes por esta razón serán importantes en la elaboración de las actividades que conforman la situación problema que vamos a diseñar.

Por lo anterior, el análisis *a priori* tiene como objetivo analizar previamente si las modificaciones realizadas en las variables didácticas permitieron controlar las acciones de los estudiantes y darles sentido.

Según la autora del objetivo del análisis *a priori* es,

> Determinar en qué las selecciones hechas permitan controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. (p. 45)

Además, el *análisis a priori* generalmente comprende una parte descriptiva y una predictiva, pues, describe las selecciones del nivel local (vinculándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden; analiza qué puede estar en juego en una situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor; prevé los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje. Notamos que en este análisis el estudiante es considerado en los niveles descriptivo y predictivo, por ello es el actor principal; en cambio el profesor esta poco presente, sólo interviene en el nivel descriptivo o al realizar una devolución.

Experimentación

Esta etapa se realiza en la ingeniería con nuestros sujetos de investigación, esta inicia en el momento en que se da el contacto entre el investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes que son objeto de investigación. En este sentido Artigue (1995) plantea que en esta etapa se ejecutan los diseños y se recoge información, los datos cualitativos, que comunican los fenómenos identificados en el análisis *a priori*.

La experimentación considera los siguientes puntos:

- Explicar los objetivos y las condiciones de realización de la investigación, por ejemplo: se muestran las herramientas que emplearán para recoger los datos, a los estudiantes que participarán en la investigación, con la finalidad de que estos no interrumpan el desarrollo del a génesis del conocimiento. Es decir, establecer el contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación; que abarcan las actividades diseñadas para ser trabajadas en las sesiones pactadas con los sujetos de investigación, empleando el software de geometría dinámica GeoGebra, además, de trabajar a lápiz y papel, con apoyo del marco teórico de la presente investigación y los objetivos específicos
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, se debe hacer un análisis *a posteriori* local, confrontando con los análisis *a priori*.

Análisis *a posteriori* y validación

Para la autora,

> Esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con frecuencia con otros (…), como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (…) En la confrontación de los dos análisis, el a *priori* y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (Artigue, 1995, p. 48).

Con lo señalado por la autora, el objetivo de realizar el análisis *a posteriori* es realizar conclusiones en función de las relaciones que se presentan entre los objetivos, establecidos *a priori*, con las observaciones realizadas y el producto obtenido en la fase de la experimentación con la intención de evaluar la reproducibilidad y la regularidad de los eventos observados.

Las acciones realizadas y resultados obtenidos por los estudiantes, luego de la experimentación, serán recogidos de manera física (los procedimientos y respuestas de los estudiantes), en forma de audios (grabaciones de las acciones realizadas por los estudiantes), en forma de video (grabaciones realizadas por cámara de video), también se pueden utilizar *softwares* que permiten capturar las acciones que realizan los estudiantes en una computadora al resolver las actividades planteadas por el profesor investigador.

La validación de las hipótesis propuestas en la investigación se da cuando se realiza la confrontación o comparación entre el producto realizado por los estudiantes y lo que esperábamos que ellos respondan al desarrollar las actividades que conforman la situación problema planteada. Esto corresponde a lo que denomina la autora como validación interna.

capítulo II: Estudio del objeto matemático

2.1 Un panorama histórico del Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las etapas del análisis preliminar de nuestro marco metodológico, la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), corresponde al estudio de los aspectos epistemológicos, la cual corresponde a la manera en la cual, el TFC ha evolucionado a lo largo de la historia como objeto matemático de estudio, es decir, los cambios que ha tenido este conocimiento hasta ser presentado en la actualidad.

En la presente sección presentaremos algunos aspectos del desarrollo del cálculo, sobre todo los relacionados al Teorema Fundamental del Cálculo, el cual establece la relación entre los procesos de derivación e integración como inversos entre sí, por tal motivo ocupa una posición destacada en el cálculo, Grande (2013). Esta relación fue planteada por Newton y Leibniz de manera independiente, los cuales son considerados los inventores de cálculo pues establecieron la relación entre las integrales y las derivadas, así como reglas y anotaciones que permitieron darle bases sólidas a este nuevo conocimiento.

Desde el punto de vista geométrico, la derivada está ligada al problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, en cambio la integral está relacionada al problema de encontrar el área bajo la curva.

El desarrollo histórico del cálculo muestra que este siguió un orden contrario a lo abordado en las lecciones y en los libros de cálculo usados hoy en día, Eves citado en Campos (2007, p35). La historia evidencia que los inicios de la integración se manifestaron al realizar procesos de suma, los cuales estaban relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes; en cambio, la noción de diferenciación fue desarrollada siglos después al abordar los problemas de las tangentes a una curva y los valores máximos y mínimos que alcanzan estas. Años más adelante se mostró que los procesos de integración y diferenciación estaban relacionados entre sí, siendo uno el inverso del otro.

Según Campos (2007) la relación entre las integrales y las derivadas no sólo fue desarrollada por Newton y Leibniz, sino que hubo matemáticos que ya la habían explorado, entre los que destacan Torricelli, Barrow y Gregory, los cuales no alcanzaron la notoriedad de Newton y

Leibniz debido a que solo mantuvieron un tratamiento geométrico y no lograron formular una notación específica, como los matemáticos ya mencionados que lograron formular nuevas nociones y reglas que les permitieron establecer tratamientos analíticos para las nociones y reglas desarrolladas.

Hablar de la génesis del TFC, es hablar de la génesis del cálculo diferencial e integral, que se da en el siglo XVII, pero los inicios de las nociones del cálculo se dan en la antigua Grecia cuando se abordan los problemas de las cuadraturas y cubaturas en las cuales sobresalen matemáticos como Eudoxo y Arquímedes. El problema de las cuadraturas está relacionado con las integrales, este problema consistía en calcular el área de figuras planas relacionándolas con el área de un cuadrado, el cual es considerado una figura cuya área es fácil de calcular; en cambio el problema de las cubaturas consistía en obtener el volumen de ciertos sólidos.

Entre los matemáticos griegos que sobresalieron en el cálculo de cuadraturas tenemos a:

- Hipócrates de Chios, según Campos (2007) este matemático realizo las primeras cuadraturas, alrededor del año 440 a.C., cuando calculó el área de ciertas lúnulas [2], las cuales son conocidas como las lúnulas de Hipócrates. Según Boyer (1987, p.98) el problema de las lúnulas debió surgir al abordar el famoso problema de la cuadratura del círculo.
- Antífon, según Grande (2013) es un matemático que contribuye al desarrollo de las cuadraturas, alrededor del 430 a.C., al plantear la idea de que es posible inscribir un polígono regular en un círculo, además, si se duplica el número de lados de dicho polígono regular la diferencia de áreas entre el circulo y el polígono se vuelve cada vez menor. Antífon planteaba que al seguir este proceso se podría obtener la cuadratura del círculo debido a que la cuadratura de los polígonos regulares se conocía, sin embargo, este proceso tenía un problema, no tenía fin, por lo tanto, este no terminaría. Según Campos (2007) a este método, planteado por Antífon, le falto el concepto moderno de límite para poder terminar el proceso y así darle el rigor matemático que se acostumbraba en aquella época; el proceso desarrollado por este matemático brinda los inicios del método de exhaución[3].
- Eudoxo, según Boyer (1987) plantea el lema que hoy en día es conocido como el Axioma de Arquímedes, este lema es la base del método de exhaución, el cálculo integral griego,

[2] Es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios diferentes. Boyer (1987, p98).
[3] El método de exhaución atribuido a Eudoxo, consiste en que toda cantidad puede ser subdividida indefinidamente, Boyer (1987).

debido a que permite cerrar los procesos de aproximación planteados en la época para realizar el cálculo de cuadraturas y cubaturas. El método de exhaución permite que el proceso de aproximación realizado para calcular las cuadraturas curvilíneas, como el círculo y la parábola, se convierta en un proceso completamente riguroso.

El aporte de Eudoxo fue muy importante para el desarrollo de la matemática en la época, tal es así que Arquímedes atribuye a Eudoxo la primera demostración de la relación de volúmenes, es decir, el volumen de un cono es igual a un tercio del volumen de un cilindro que tiene igual base y altura, Boyer (1987).

- Arquímedes, nacido en la ciudad de Siracusa, es "considerado el mejor matemático de la antigüedad" Boyer (1987, p28). Para Grande (2013) este matemático perfecciona el método del exhaución, por tal motivo es quien más se aproxima al cálculo integral de hoy en día.

  Este matemático se caracteriza por emplear el método mecánico[4], también conocido como el método de la palanca, el cual le permitía intuir resultados por medio del equilibrio de los cuerpos, los que más adelante serían demostrados rigurosamente utilizando el método de exhaución apoyándose en el método de reducción al absurdo, dándole así la rigidez matemática acostumbrada en la época. A continuación, mostramos en la figura 14 una ilustración que representa el método de la palanca empleado por Arquímedes.

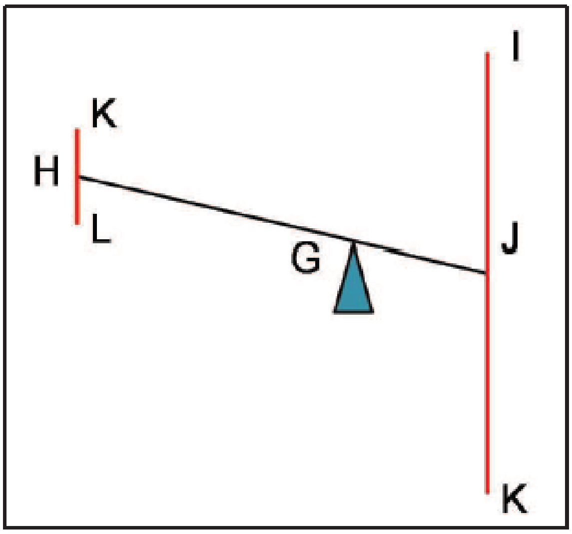
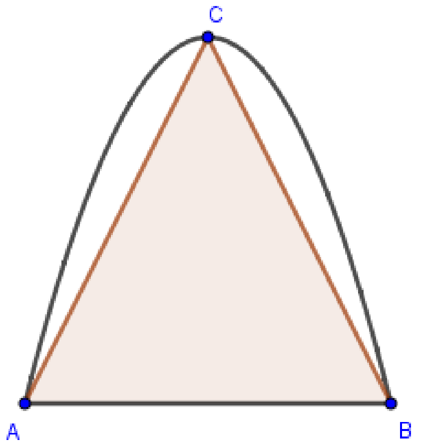


Figura 14. Representación del método de la palanca
Fuente: Grande (2012, p.120)

[4] Según Campos (2007, p39) este método consistía en equilibrar dos cuerpos, figuras geométricas, para relacionar sus áreas o volúmenes, la comparación la realizaba cortando la figura en pequeñas tiras paralelas las cuales las colocaba en los extremos de una balanza hasta lograr el equilibrio.

Entre los cálculos realizados por Arquímedes sobresale la cuadratura de la parábola, el cual consistía en obtener el área de un segmento parabólico. Este resultado lo representamos en la siguiente figura 15.



$$\text{ÁREA}_{\text{Segmento parabólico}} = \frac{4}{3}\text{ÁREA}_{\text{Triángulo ABC}}$$

Figura 15. Cuadratura del segmento parabólico
Fuente: Realizado por el investigador.

Con respecto al cálculo de esta cuadratura Boyer (1987, p174) señala que para cuadrar una sección cónica se necesitó de la habilidad del más grande genio de la antigüedad.

Tuvo que pasar un largo tiempo para que las ideas de Arquímedes se desarrollen contribuyendo de esta manera al florecimiento del Cálculo, el cual se da en los tiempos modernos, siendo más exactos en el siglo XVII con trabajos realizados por Newton y Leibniz.

A continuación, presentaremos el aporte realizado por algunos matemáticos, que antecedieron a Newton y a Leibniz.

- Nicole Oresme (1323-1382) es uno de los matemáticos que se sumó al estudio de los cambios dinámicos que por esas épocas estaba reemplazando a la matemática arquimediana la cual era esencialmente estática en el sentido que se estaba estudiando problemas que relacionaban el movimiento de los cuerpos. En su trabajo “*Tractatus de latitudinibus formarum*” utilizaba un método grafico que relacionaba el álgebra con la geometría, por ello es considerado uno de los precursores de la geometría analítica. Oresme obtiene el espacio recorrido por un móvil, que se desplaza con cierta velocidad que se incrementa de manera uniforme durante un determinado intervalo de tiempo, a partir del gráfico velocidad (latitud) versus tiempo (longitud), siendo este el área bajo la curva, lo que hoy en día seria obtener el valor de la integral $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$.

- Cavalieri (1598-1647) en su libro "*Geometria indivisibulus continuorum nova quadam ratione promotora*" aplica la teoría de los indivisibles[5] de manera exitosa para calcular la medida de áreas y volúmenes. En la obra de este matemático sobresale los famosos principios de Cavalieri:
    1. Si dos porciones planas son tales que toda recta secante a ellas es paralela a una determinada recta y determina segmentos cuya razón es constante, entonces la razón de las áreas es la misma constante.
    2. Si dos sólidos son tales que todo plano secante a ellos es paralelo a un plano y determina secciones cuya razón es constante, entonces la razón entre los volúmenes de los sólidos es la misma constante. Boyer (1992, p.11)

  Los principios establecidos por este matemático representaron herramientas útiles para el cálculo de áreas y volúmenes, con los cuales se pudo extender los cálculos realizados por Oresme, quien calculó la integral $\int_0^T t dt = \frac{T^2}{2}$, hasta calcular la integral $\int_0^T t^n dt = \frac{T^{n+1}}{n+1}$. Debemos mencionar que este resultado era conocido por matemáticos como Torricelli, Fermat, Barrow entre otros, pero Cavalieri fue el primero en publicarlo (Boyer, 1992, p.) Con esto mostramos que el método de los indivisibles no es exclusivo de Cavalieri, sino que era conocido y empleado por otros matemáticos de la época.

Con lo desarrollado hasta ahora mostramos el desarrollo que tuvo el cálculo de cuadraturas y como este va evolucionando de la mano con otras áreas como la geometría analítica. A continuación, presentamos la evolución de la derivada, objeto matemático presente en nuestro objeto de estudio el teorema fundamental del cálculo.

Los primeros problemas relacionados a las derivadas son aquellos ligados al cálculo de las tangentes. En un principio, en la época de la Grecia antigua, se pensaba que la tangente a una curva es aquella recta que intercepta a una curva en un solo punto, generalización que se plantea

[5]Los indivisibles de una región plana son las líneas que conforman la sección y los indivisibles de un sólido son las secciones que conforman dicho sólido.

al observar algunas curvas como la circunferencia y la parábola que satisfacen esta observación. Entre las investigaciones realizadas destacan los trabajos de:

- Euclides (cerca del 300 a.C.) este gran matemático logra demostrar que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio.
- Arquímedes, realiza un procedimiento para determinar las tangentes a la curva conocida como la espiral de Arquímedes.
- Apolonio, plantea métodos para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas.

Debemos mencionar que en esta época no hay indicios de alguna relación entre los problemas de las cuadraturas y las tangentes.

El problema de las tangentes estuvo olvidado por muchos años, recién en el siglo XVII reaparecieron de la mano con el desarrollo de la geometría analítica, por ejemplo, con la representación de una curva mediante una ecuación, con la introducción de símbolos algebraicos como herramienta para estudiar la geometría de las curvas. Con la geometría analítica se trataba de generalizar el método de encontrar la tangente a una curva, pues hasta esa época el modo de encontrar la tangente dependía mucho de la curva en consideración.

Entre los métodos planteados destaca el método diferencial de Fermat, planteado en 1629, el cual permitía encontrar los valores máximos y mínimos de una función, que actualmente es equivalente a realizar el siguiente cálculo $f'(A) = \lim_{E \to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E} = 0$. Debemos considerar que al plantear este método Fermat no se preocupaba de la notación, pues representaba las variables con minúsculas y mayúsculas, no había diferencia, además, el ignoraba que si $f'(A) = 0$ esto no implicaría que $f(A)$ sea un máximo o mínimo.

Con respecto a las tangentes, Fermat logró determinar las tangentes a curvas de la forma $y = x^n$ así como también de un método para calcular su integral. Boyer (1993) señala que Fermat conocía muy bien las reglas de diferenciación e integración para funciones de la forma $y = x^n$, tanto así que conocía que al derivar la función el exponente multiplicaba y disminuía en uno, y al integrar el exponente dividía aumentado en uno, pero no encontró nada significativo en estas relaciones al igual que sus contemporáneos matemáticos como Torricelli, James Gregory e Isaac Barrow.

2.2 El Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección presentaremos el estudio del TFC, el cual nos permitirá identificar sus representaciones en los registros lengua natural, algebraico y gráfico, además de los tratamientos realizados en el registro algebraico, para transformar la expresión algebraica a expresiones equivalentes. También las conversiones realizadas de representaciones en el registro algebraico al registro lengua natural, las cuales permiten presentar el teorema de un modo que facilite su comprensión y entendimiento.

Lima (1997) presenta el TFC en el capítulo 11 denominado "Cálculo con integrales", que comienza en la página 151 y finaliza en la página 169. Este capítulo está compuesto de cuatro secciones, la cuales mostraremos en el cuadro 4, además, de una breve introducción, en la cual se presenta el capítulo explicando brevemente la relación que se hay entre las derivadas y las integrales a la cual denomina TFC.

Cuadro 4. Contenido del capítulo 11

Capítulo 11 Cálculo con integrales	1. Teoremas clásicos del Cálculo Integral.
	2. La integral como límite de sumas de Riemann
	3. Logaritmos y exponenciales
	4. Integrales impropias

Fuente: Adaptado de Lima (1997)

A continuación, el Teorema Fundamental del Cálculo es presentado al lector, incluyendo el enunciado y la demostración, en las páginas 151 y 152. Sin embargo, apreciamos, sin mayores detalles, algunas otras partes del texto como el capítulo 10, titulado sumas de Riemann, con la finalidad de estudiar las definiciones y conceptos previos a la presentación del teorema, esto debido a que las ideas presentadas por el autor están basadas en conceptualizaciones precisas y en el encadenamiento lógico de las proposiciones, la cual es una característica de los textos de matemáticas.

Posteriormente, el autor expone en el capítulo 10 (páginas 140 y 141) algunas definiciones y teoremas que sobre integrabilidad de funciones, esto es, establece las condiciones que debe tener una función para que sea denominada integrable. Por ejemplo, cuando establece la definición de integrabilidad para funciones acotadas, como se muestra en la figura 16.

> Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *integrable* cuando su integral inferior y su integral superior son iguales. Este valor común se llama *integral* (de Riemann) de f, y se denota $\int_a^b f(x)dx$.

Figura 16. Definición de función integrable para funciones acotadas.

Fuente: Lima (1997, p140)

También en páginas anteriores el autor señala, respectivamente, que la integral superior e inferior de la función acotada $f: [a, b] \to R$ son representadas por $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ y $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$. Para denominar estas integrales el autor emplea representaciones en los registros lengua natural y algebraico; sin embargo, no se realiza ninguna coordinación, ya que, en este caso, el autor sólo utiliza dichos registros para designar una noción.

Debemos mencionar que cuando el autor plantea la definición de función integrable realiza un pequeño comentario sobre la notación empleada para representar a la integral, es decir, la variable x es denominada "variable muda" lo cual quiere decir que no hay ningún inconveniente en reemplazarla por otras variables como y, t, etc. Esto es $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\,(y)dy = \int_a^b f\,(t)dt$, por tal motivo en ocasiones representará la integral $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b f$.

En cuanto a la notación de la integral, el autor utiliza dos representaciones diferentes ($\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f$) para el mismo objeto, integral definida, ambas en el registro algebraico. El autor enfatiza que, a veces, por cuestión de "simplicidad" escribirá $\int_a^b f$.

Debemos mencionar que la representación simplificada empleada por el autor no posibilita algunas formas de tratamiento, debido a que no es evidente la variable que se desea integrar, es decir, que en el sentido de encontrar alguna primitiva de la función f. Sin embargo, pensamos que el autor empleará esta notación cuando la misma no afecte la comprensión de la noción involucrada, por ejemplo, cuando se muestren las propiedades de la integral definida.

Seguidamente a la definición de función integrable, el autor presenta y demuestra algunos lemas, teoremas y corolarios. En lo que respecta a nuestro trabajo, enfocado a la presentación del TFC, mostraremos en la figura 17 el enunciado del teorema 3, debido a que este resultado es usado en la demostración del TFC.

Teorema 3. *Sean $a < c < b$. Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si, sus restricciones $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son integrables. En caso afirmativo, se tiene $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Figura 17. Propiedad de la integral definida.

Fuente: Lima (1997, p142)

El teorema 3, viene enunciado principalmente, a través de representaciones en el registro algebraico y lengua natural, debemos mencionar que este último se emplea cuando las representaciones realizadas en el registro algebraico limitan la relación del objeto con su representación. Por ejemplo, la representación en lengua natural "integrable" complementa los registros simbólicos utilizados en el teorema 3, pues el autor podría usar en lugar de $f|_{[a,c]}$ “integrable" la representación algebraica $\int_{\underline{a}}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{c}} f(x)dx$, pero pensamos que esta podría dificultar la comprensión de las nociones presentadas.

El término "integrable" se utiliza como un registro complementario, que, según Duval, es fundamental en el sentido de su parcialidad en relación con el objeto. Tal vez, propiedades de ese tipo se presentan, principalmente, en el registro simbólico porque el mismo posibilita tratamientos más eficaces.

A continuación, mostraremos una propiedad importante que debe presentar el integrando para que sea integrable, es decir, la continuidad de la función f en el intervalo $[a, b]$ y, por lo tanto, que existe la Integral (número real) definida en dicho intervalo. Esta condición de integrabilidad se muestra figura 18.

Teorema 5. *Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable.*

Figura 18. Condición suficiente de integrabilidad

Fuente: Lima (1997, p143)

Este teorema resulta esencial para el entendimiento del TFC y además para nuestro análisis basado en la teoría de registros de representación. Podemos observar que el teorema es presentado empleando representaciones en los registros algebraico y lengua natural.

Con respecto a la demostración realizada por el autor, esta emplea representaciones en el registro algebraico y lengua natural, siendo este último una guía para los tratamientos realizado en el registro algebraico, como lo podemos observar en la figura 19.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f en el compacto $[a, b]$. existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$, $|y - x| < \delta$ implican $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Sea P una partición de $[a, b]$ tal que rodos sus intervalos tienen longitud $< \delta$. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existen x_i, y_i tales que $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(y_i)$, de donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b - a)$. Así, $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Por el Teorema 2, f es integrable. $\square$

Figura 19. Demostración de la condición de integrabilidad.

Fuente: Lima (1997, p143)

A continuación, el autor en el capítulo 11 presenta el enunciado y demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, como lo podemos observar en la figura 20, para funciones continuas previamente señala que con este resultado se establecerá la conexión entre la derivada y la integral.

Teorema 1. (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo I. Las siguientes afirmaciones sobre la función $F : I \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

(1) F es una integral indefinida de f, esto es, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$.

(2) F es una primitiva *de f, esto es, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Figura 20. Teorema Fundamental del Cálculo.

Fuente: Lima (1997, p144)

Observamos que el autor enuncia el teorema empleando representaciones en el registro algebraico y lengua natural, actuando esta última como guía para dar un orden lógico a las representaciones presentes en el registro algebraico. Debemos mencionar que el teorema esta presentado como la equivalencia entre dos proposiciones compuestas, esto es, están relacionadas mediante un bicondicional.

Debemos mencionar que el teorema presentado no promueve ningún tipo de transformación interna o externa de las representaciones presentes pues el autor solo emplea estas para designar una noción.

Con respecto a la demostración del teorema, esta, consiste en dos etapas, en la primera etapa se muestra que la proposición 1 implica la proposición 2, y en la segunda etapa se muestra la prueba de su recíproco. Se muestra que el autor realiza tratamientos solo en el registro algebraico los cuales son guiados con representaciones en el registro lengua natural que permiten darle un orden lógico a la prueba. A continuación, mostramos en la figura 21 la demostración planteada por el autor.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Si $x_0, x_0+h \in I$ entonces $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ y $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, por tanto:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en el punto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implican $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Entonces, $0 < |h| < \delta$, $x_0 + h \in I$ implican:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\\ &< \frac{1}{|h|}|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $F'(x_0) = f(x_0)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $F' = f$. Como acabamos de ver, si fijamos $a \in I$ y definimos $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$, tendremos $\varphi' = f$. Las dos funciones $F, \varphi : I \to \mathbb{R}$ tiene la misma derivada, luego difieren en una constante. Como $\varphi(a) = 0$, esta constante es $F(a)$. Por tanto $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, esto es, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$. $\square$

Figura 21. Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo.

Fuente: Lima (1997, p145)

Notamos que el autor al presentar la demostración del teorema no muestra de manera explícita algunos resultados que utiliza, por ejemplo, en la primera parte del teorema se muestra la siguiente relación $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$, sin embargo, no muestra los tratamientos realizados en el registro algebraico que conducen a este resultado, con esto pensamos que el autor promueve que el lector realice los tratamientos para llegar a dicha relación.

Al finalizar la demostración del teorema, el autor realiza dos comentarios.

En el primer comentario, establece una ampliación del teorema, es decir, se establece la validez del teorema para funciones no necesariamente continuas sino basta que estas sean integrables.

Con lo cual podemos notar que el autor da énfasis a las cuestiones que involucran condiciones de existencia de la primitiva: continuidad e integrabilidad.

En el segundo comentario, el autor presenta algunas propiedades de la función F, primitiva de la función f, por ejemplo, F es una función cuya derivada es continua. Además, muestra una técnica para calcular la integral de la función f en un intervalo $[a, b]$ conociendo una primitiva F. Esto es $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

En seguida, presentamos algunas características que presenta el texto.

El autor da énfasis a las cuestiones que involucran condiciones de existencia de la primitiva: continuidad e integrabilidad. La interrelación derivada-integral es sugerida al lector, pero no es tratada de forma explícita.

Debemos mencionar que el texto no sugiere la contextualización, es decir, se presentan las nociones sólo en definiciones, teoremas, ejemplos y más adelante, ejercicios. El registro de representación usado en mayor proporción es el algebraico y los tratamientos hechos en él, están, como acabamos de mostrar, implícitos. El registro en lengua natural se utiliza en menor proporción y las representaciones utilizadas sirven para guiar los tratamientos en el registro algebraico, es decir, permiten darle un orden lógico a la prueba.

Los ejercicios están al final del capítulo y no muestran de manera explícita una relación directa con el TFC. Por medio de nuestra investigación, hemos podido observar que sus enunciados sugieren el desarrollo de aspectos conceptuales, principalmente aquellos tratados a lo largo de este capítulo, siendo la mayoría de ellos teoremas, y a su vez estos privilegian las demostraciones. En cuanto a los registros, estos ejercicios están representados en el registro algebraico y la lengua natural, e indican que, en sus resoluciones, se efectuarán tratamientos en el registro algebraico. Podemos notar también que tales ejercicios no sugieren la conversión de los registros, y mucho menos, la coordinación de ellos.

2.3 Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las etapas del análisis preliminar de nuestro marco metodológico, la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), corresponde al estudio de los aspectos didácticos, y a la manera en la cual, el TFC es enseñado a los sujetos implicados en nuestro estudio, quienes son estudiantes del curso de Matemáticas II de la carrera de Ingeniería de Alimentos.

Bajo esta consideración, hemos seleccionado un libro de consulta, con el propósito de revisar cómo se aborda el objeto de estudio TFC en el nivel de instrucción indicado.

El texto que analizaremos será el libro Cálculo de Stewart (2006) el cual en el capítulo 5, titulado "Integrales", presenta una pequeña introducción y está subdividido en cinco secciones, entre las cuales está el TFC, las cuales son mostradas en el cuadro 5.

Cuadro 5. Contenido del quinto capítulo del libro Cálculo de J. Stewart.

CAPÍTULO 5 **Integrales**	**Sección 5.1**	ÁREAS Y DISTANCIAS
	Sección 5.2	LA INTEGRAL DEFINIDA
	Sección 5.3	EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO
	Sección 5.4	INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL
	Sección 5.5	REGLA DE LA SUSTITUCIÓN

Fuente: Adaptado de Stewart (2006)

Debemos mencionar que al final de cada sección, se encuentran ejercicios variados ya sea por los enunciados que presentan o por los objetivos que deben alcanzar cada uno de ellos.

Nuestro análisis estuvo centrado en la sección 5.3; sin embargo, investigamos diferentes partes importantes a la presentación y aplicación del TFC. Así, subrayamos que estas partes se analizaron sin mayores detalles.

Al finalizar la sección 5.2, el autor presenta uno de los "Proyectos para un descubrimiento" el cual lleva el título de "Funciones Áreas", el cual se muestra en la figura 22. Este proyecto está compuesto de 4 actividades que tienen como objetivo adelantar algunos resultados que serán estudiados en el siguiente capítulo.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.
   (b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.
   (c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?

2. (a) Si $x \geq -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

   $A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.
   (b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.
   (c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?
   (d) Si $x \geq -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.
   (e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

   (f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rectángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.
   (b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

   entonces $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]
   (c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, . . . , $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.
   (d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

   Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

Figura 22. Proyecto Funciones Áreas.

Fuente: Stewart (2006, p.379)

Básicamente, estas actividades consisten en bosquejar algunas curvas y relacionar las funciones que originan esas curvas y el área limitada por ellas con el eje de las abscisas. El contenido de estas actividades tiene la finalidad de que el lector perciba de manera intuitiva, que la derivada de la función "área" es la misma función que origina el gráfico que está sobre esa área, esto es, el contenido de estas actividades expresa la tesis del TFC.

Con respecto a los enunciados de estas actividades estos se presentan en el registro de la lengua natural y algebraico, e invitan al lector a que, en sus resoluciones, utilice representaciones en el registro gráfico y en menor proporción, en el registro numérico, además sugiere realizar tratamientos en el registro algebraico. Con lo mencionado, las actividades sugieren el cambio de registros, que es una condición para la comprensión de las Matemáticas según Duval.

La sección 5.3 presenta al inicio un pequeño texto en el cual el autor señala que el TFC establece la conexión entre la Derivada y la Integral, rememorando los clásicos problemas de la tangente y del área, que las originaron. También, resalta la relación inversa entre las dos, atribuyendo a Isaac Barrow el descubrimiento de tal relación. Sin embargo, resalta que fueron Newton y Leibniz los descubridores de dicha relación, además, de usarla para desarrollar el Cálculo como un método matemático sistemático.

Stewart presenta el TFC en dos partes, la primera está destinada a la explotación de la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, cuando f es continua en $[a, b]$ y x variando entre a y b. Se dice que si x es fijo, entonces la integral es definida por un número, y, si x varía, la integral define una función denotada por $g(x)$. El autor emplea los registros lengua natural y algebraico para resaltar que $g(x)$ representa un número que depende de x, señalando de manera explícita que si la función f es positiva, entonces $g(x)$ es interpretada como el área bajo el gráfico de f en $[a, x]$, lo cual era la finalidad del Proyecto de Descubrimiento. Debemos mencionar que el autor también utiliza el registro gráfico para representar estas ideas, como se puede mostrar en la figura 23.

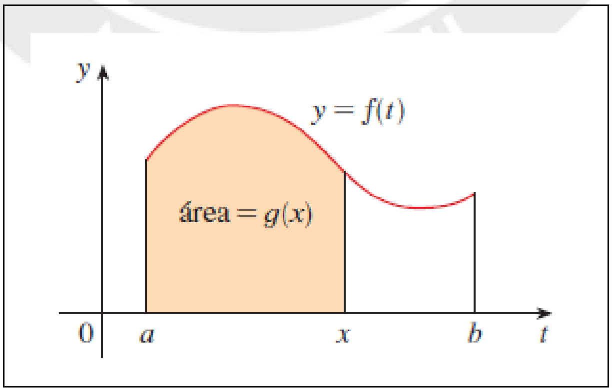
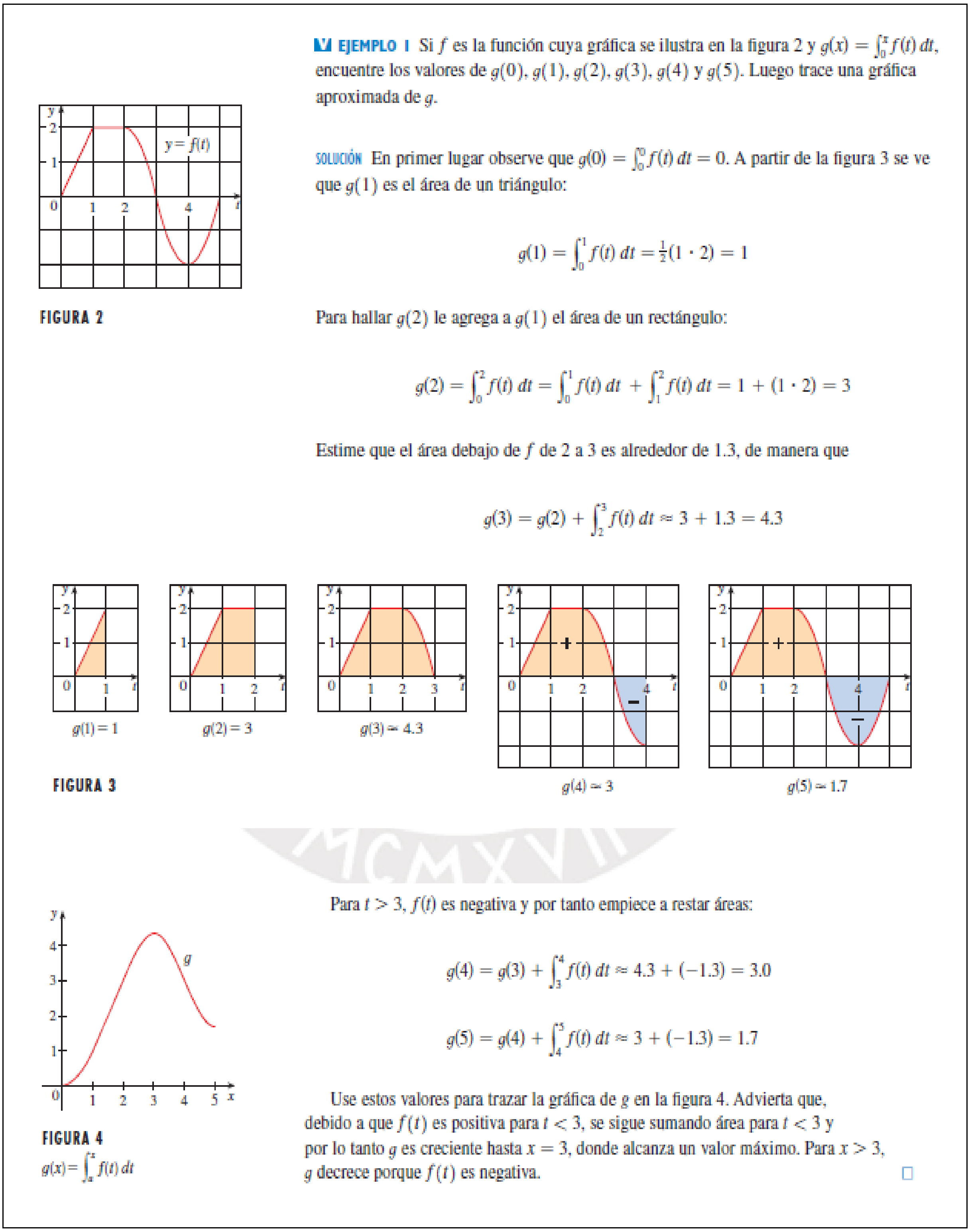


Figura 23. Representación gráfica realizada por el autor.

Fuente: Stewart (2006, p.380)

Antes de seguir con el discurso presentado por el autor con relación a la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, y mostrar la conclusión a la que llegará $g'(x) = f(x)$.

El autor presenta un primer ejemplo en el cual muestra un bosquejo en cinco etapas del gráfico de la función f con las respectivas áreas representadas por la función g en los puntos de abscisa 1, 2, 3, 4 y 5 el cual se muestra en la figura 24.



EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

$g(1) = 1$ $g(2) = 3$ $g(3) \approx 4.3$ $g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1.7$

FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. □

Figura 24. Procedimientos realizados para construir la función área

Fuente: Stewart (2006, p380-381)

Podemos observar en la figura 24 el cálculo de las áreas respectivas a cada zona realizado por el autor. Estas se basan en cálculo de áreas de triángulos, rectángulos y en aproximaciones realizadas con el área de estas figuras, mostrando que el resultado es la suma de las áreas que están por encima del eje t (representa en el eje de las abscisas), menos la suma de las áreas que están debajo del eje t. Las figuras 2 y 4 muestran las funciones f y g respectivamente, además en la figura 3 se presentan los procedimientos realizados para la construcción de g en las áreas bajo el gráfico de f.

Debemos señalar que, en este ejemplo, el autor presenta representaciones en los registros lengua natural, algebraico, numérico y gráfico, también se puede evidenciar conversiones de la representación de la integral definida en el registro algebraico al gráfico y viceversa, así como tratamientos en los registros numérico, algebraico y gráfico. Sin embargo, debemos señalar que no se muestra la conexión entre la derivada y la integral.

Seguidamente el autor realiza un comentario que permitirá al lector establecer una correspondencia entre la derivada y la integral, apoyándose en el ejemplo anterior y en el ejercicio 27 de la sección 5.2 el cual consiste en demostrar $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$. Posteriormente, el autor considera que el valor de las constantes $a = 0$ y $b = x$, obteniendo así el resultado $\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$, el cual en seguida es derivado y lo cual le permite al autor establecer la relación $\frac{d}{dx}\int_0^x t dt = x$ la cual muestra la conexión entre la derivada y la integral. A continuación, en la figura 25 mostramos el desarrollo realizado por el autor para mostrar este importante resultado.

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Figura 25. Ejemplo utilizado por el autor para mostrar la conexión entre la derivada y la integral.

Fuente: Stewart (2006, p381)

En el desarrollo planteado por el autor en la figura 25, este emplea representaciones en los registros algebraico y lengua natural, siendo este último una guía para los tratamientos realizados. También rescatamos que el autor incentiva a los estudiantes a realizar representaciones, previa conversión, en el registro gráfico indicando los tratamientos a realizar en este registro utilizando como modelo el primer ejemplo. Con esto Stewart sugiere una coordinación de los registros algebraico y gráfico, explicitando los tratamientos en cada uno de ellos. Según Duval, la coordinación entre diferentes registros de representación es una condición para que haya la aprehensión del objeto o noción matemática.

Usando nuevamente el primer ejemplo, Stewart continúa su discurso, presentando de manera intuitiva la relación $g'(x) = f(x)$ pero esta vez no de manera particular, como se realizó en el comentario anterior, sino para una situación el cual la función integrando $f(x)$ es una función continua y positiva. Para esto el autor realiza conversiones de representaciones entre los registros gráfico y algebraico, haciendo tratamientos, principalmente en este último registro.

Debemos mencionar que el registro de lengua natural está presente en el discurso. Esto se muestra cuando el autor señala que $g(x+h) - g(x)$ es aproximadamente igual al área del rectángulo de ancho $h > 0$ y altura $f(x)$, planteando que $g(x+h) - g(x) \approx h \cdot f(x)$, para llegar a esta conclusión el autor emplea una representación gráfica, la cual mostramos en la figura 26, y con ella establecer el resultado $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \approx f(x)$.

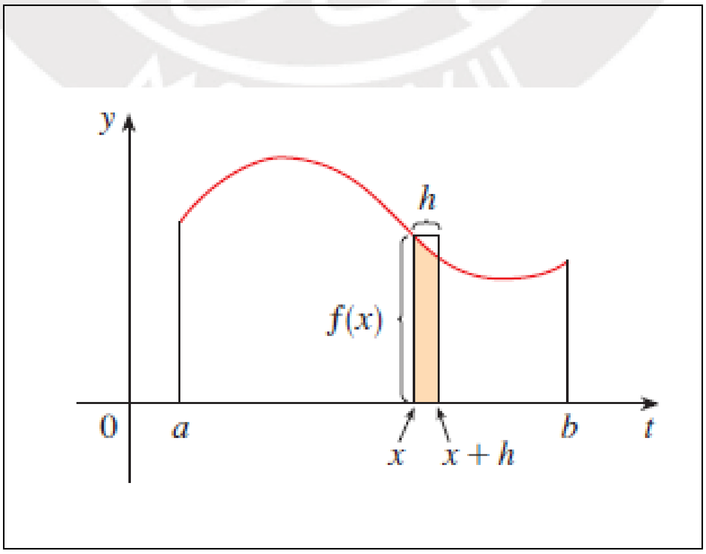


Figura 26. Representación gráfica empleada por el autor.

Fuente: Stewart (2006, p381)

Posteriormente el autor considera que si h tiende a cero, el límite del primer miembro de esta relación coincide con la definición de la derivada de g en x, con lo cual se logra concluir intuitivamente que $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$.

Al finalizar la prueba el autor menciona que dicho resultado también es válido para la situación en que la función no sea necesariamente positiva. Debemos mencionar que a partir de una nota histórica; de una noción intuitiva relativa a la función integral y su derivada; y, usar dos ejemplos, utilizando diferentes registros de representación, Stewart, enuncia la "parte 1" del TFC, conocido también como el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, y resalta aún más esta interrelación, explicando que “este teorema señala que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en su límite superior” Stewart (2006, p381), tal como se muestra en la figura 27.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Figura 27. Presentación TFC, parte 1 realizada por el autor.

Fuente: Stewart (2006, p381)

Este teorema señala que la continuidad de la función f en el intervalo $[a, b]$ es una condición suficiente para que la función integral, denotada por g, sea derivable en $]a, b[$ y tenga a la función f como su derivada, para todo x en $[a, b]$. Debemos mencionar que el enunciado del teorema es un discurso en el cual están presentes representaciones en el registro lengua natural y algebraico, cabe señalar que el enunciado no sugiere ninguna conversión de estas representaciones, sin embargo, debemos indicar que estas fueron realizadas anteriormente.

En cuanto a la demostración del TFC, el autor comienza utilizando la hipótesis de la continuidad de f para probar que la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $]a, b[$, esto quiere decir, que existe el siguiente límite $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ para todo x en $]a, b[$, y además, para mostrar que ese límite es igual a $f(x)$.

Debemos mencionar que la secuencia lógica utilizada en la demostración está basada en propiedades de la integral, las cuales son expuestas en el desarrollo, tal como se muestra en la figura 28.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Figura 28. Demostración del TFC. Primera parte.

Fuente: Stewart (2006, p382)

Para mostrar que el límite $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ es igual a $f(x)$ el autor utiliza algunos resultados como el teorema del valor extremo, toda función continua en un intervalo $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo valor, y del teorema de la compresión o más conocido con el teorema del Sándwich. A continuación, mostramos en la figura 29 la aplicación de estos teoremas.

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

es decir,

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)h$$

Figura 29. Demostración del TFC. Segunda parte.

Fuente: Stewart (2006, p382)

Hasta ahora podemos notar que en el desarrollo de la demostración planteada por el autor predominan las representaciones en el registro algebraico y lengua natural, actuando esta última como una guía que acompaña el desarrollo del discurso planteado. También observamos que el autor representa la tesis del teorema del valor extremo utilizando representaciones en el registro gráfico como se puede observar en la figura 30.

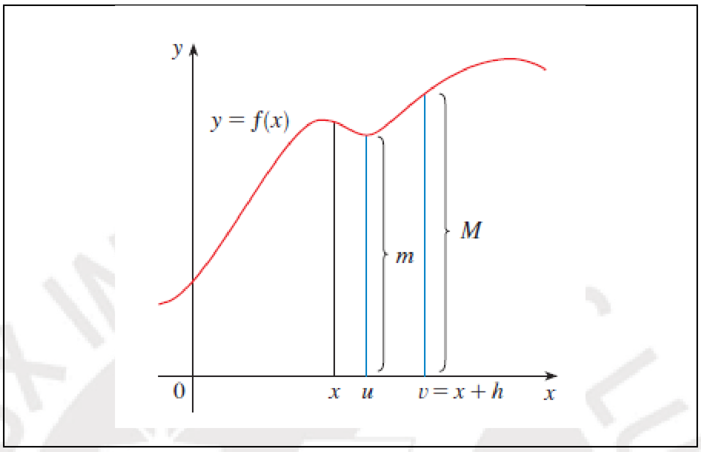


Figura 30. Representación gráfica realizada por el autor.

Fuente: Stewart (2006, p382)

La representación mostrada en la figura 30 solo acompaña la prueba y creemos que el objetivo de esta es ilustrar la acción del teorema del valor extremo para que el lector tenga un mejor entendimiento del mismo.

Con la finalidad de probar el límite mencionado líneas arriba, el autor realiza tratamientos en el registro algebraico, los cuales mostramos en como se muestra en la figura 31.

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

Figura 31. Demostración del TFC. Tercera parte.

Fuente: Stewart (2006, p382)

Los tratamientos que podemos evidenciar, en la figura 31, en el registro son la división por h y la sustitución de la representación $\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt$ por la representación $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. El registro lengua natural como en todo el proceso es una guía en el desarrollo de la demostración.

Seguidamente el autor utiliza las tesis del teorema del Sándwich, previamente se sobreentiende que verifico las hipótesis del mismo, y emplea la continuidad de la función $f(x)$, para poder concluir que $g'(x) = f(x)$, todo estos procesos se realizaron con representaciones en el registro algebraico tal como se muestra en la figura 32.

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Figura 32. Demostración del TFC. Cuarta parte.

Fuente: Stewart (2006, p382-383)

Al finalizar la prueba el autor utiliza el registro lengua natural para señalar que la función $g(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Además, expresa la tesis del teorema en el registro algebraico utilizando la notación de Leibniz para las derivadas tal como se muestra en la figura 33.

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} f(t)\, dt = f(x)$$

Figura 33. Tesis del TFC “parte uno”

Fuente: Stewart (2006, p383)

El resultado mostrado en la figura 33 es conocido con el TFC "parte uno". Observamos que el autor emplea representaciones en el registro lengua natural y algebraico para realizar su argumentación, además, los tratamientos son realizados en el registro algebraico. También el autor efectúa la conversión de representaciones en el registro algebraico hacia el registro gráfico, las cuales tienen la finalidad de mostrar algunas propiedades de la integral $\left(mh \leq \int_{x}^{x+h} f(t)dt \leq Mh\right)$ que son empleadas en la demostración, por ejemplo cuando h tiende a cero, u y v tienden a x y debido a la continuidad de f se tiene que $f(u)$ y $f(v)$ tienden a $f(x)$ tal como se muestra en la figura 30.

El "intercambio" de ciertos registros de una determinada representación en todo instante, es denominado coordinación de registros y está según Duval es una condición para la comprensión en Matemáticas, particularmente en nuestra investigación, de las nociones que involucran al TFC.

Antes de presentar el TFC "parte 2", el autor presenta los ejemplos 2, 3 y 4 que se refieren también, como los vistos anteriormente, a la relación entre la función definida por la integral, $\int_{a}^{x} f(t)dt$, y su derivada. El objetivo de estos ejemplos es enfatizar el contenido de la "parte uno" del teorema referido.
A continuación, mostramos el ejemplo 2 planteado por el autor en la figura 34.

V EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2} \qquad \square$$

Figura 34. Ejemplo 2. Enunciado y solución

Fuente: Stewart (2006, p383)

La figura 34 muestra que el autor presenta el ejemplo 2 empleando representaciones en el registro lengua natural y algebraico (con tratamientos en él). El ejemplo demanda determinar la derivada de la función $g(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1+t^2}dt$. Al plantear la solución el autor destaca la continuidad de $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, entonces por TFC, se concluye que $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

En seguida, mostramos el ejemplo 4 planteado por el autor en la figura 35.

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\ &= \sec u \,\frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\ &= \sec(x^4)\cdot 4x^3 \end{aligned}$$

□

Figura 35. Ejemplo 4. Enunciado y solución

Fuente: Stewart (2006, p384)

El enunciado y la resolución del ejemplo 4 se muestra en la figura 35, en este ejemplo el autor emplea representaciones en el registro algebraico y lengua natural, además, realiza tratamientos sólo en este primer registro. Sin embargo, debemos señalar que el autor utiliza representaciones en el registro lengua natural para subrayar el uso de la regla de la cadena sin explicitar el porqué de su empleo en la resolución, creemos que esto se da por los conocimientos previos que tienen los estudiantes de las derivadas.

En estos dos últimos ejemplos el autor no propone realizar ninguna conversión, debido a que los tratamientos son realizados solo en el registro algebraico los cuales son notados gracias a las representaciones realizadas en lengua natural, esto se da cuando el autor señala la propiedad utilizada en un determinado paso de la solución.

Sin embargo, la coordinación de una representación en diversos registros es propiciada en el ejemplo 3. Podemos notar que en este la lengua natural se utiliza también para resaltar algunos aspectos históricos, además de algunas aplicaciones de la función de Fresnel, la cual según el autor tiene la siguiente regla de correspondencia $S(x) = \int_0^x sen\frac{\pi t^2}{2}dt$. Además, debido a el TFC, el autor deriva esta función obteniendo $S'(x) = sen\frac{\pi x^2}{2}$.

Seguidamente el autor representa las funciones S y su derivada S', la cual es denotada por f, en un mismo sistema cartesiano, realizando así una conversión de representación del registro algebraico al gráfico tal como se muestra en la figura 36.

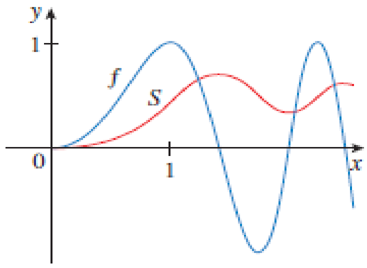


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

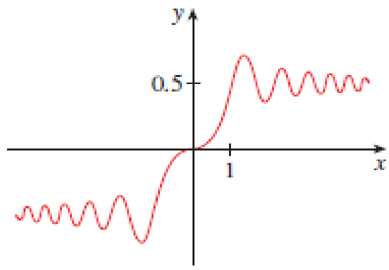


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

Figura 36. Representaciones realizadas por el autor.
Fuente: Stewart (2006, p383)

Debemos mencionar que la relación presentada entre la función f y su integral S en el registro algebraico y gráfico, promueve la coordinación de estas representaciones en estos registros, debido a que permite al lector efectuar tratamientos en uno de estos registros y luego realizar la conversión para efectuar estos tratamientos en el otro registro. Este ejemplo a diferencia de los ejemplos 2 y 4 propicia la conversión en todo instante, lo cual permite reconocer al objeto matemático en distintos registros tal como se muestra en la figura 36.

Podemos observar que no se plantean discusiones ni referencias en el libro, a casos más generales de funciones integrables, es decir, en ningún momento se discute la continuidad de la función f pues en los ejemplos presentados todas las funciones empleadas como integrando son continuas, por lo que sus funciones integrales, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ son derivables.

Posteriormente al ejemplo 4, el autor recuerda que el proceso de calcular un integral definida como un límite de sumas de Riemann, resulta a veces "largo y difícil". Por tal motivo señala que la "parte 2" del TFC muestra un "método más sencillo" para el cálculo de la misma. En seguida, mostramos en la figura 37 el enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo, parte 2; conocido también como el segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

Figura 37. Enunciado del TFC, parte 2.

Fuente: Stewart (2006, p384)

Podemos observar en el enunciado del teorema, mostrado en la figura 37, que el autor emplea representaciones en el registro algebraico y lengua natural, notando la relación entre la derivada y la integral, además en la hipótesis de este teorema solo se pide que la función f sea continua y que se verifique $F' = f$ en el intervalo $[a, b]$, siendo estas condiciones suficientes para poder plantear la siguiente igualdad $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Cabe mencionar que el autor, no discute la existencia de funciones antiderivadas (primitivas) en el sentido de la continuidad e integrabilidad de la función del integrando. Esto puede deberse al resultado de que las continuas en un intervalo siempre poseen primitivas en ese intervalo. Sin embargo, menciona más adelante, en el ejemplo 9, que la Integral $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx$ no existe debido a que la función integrando presenta "una discontinuidad infinita" en el intervalo $[-1, 3]$. El autor también discute, la necesidad de que la función integrando debe ser acotada, debido a que, en el TFC, al pedir que sea continua en un intervalo cerrado, conlleva a que sea acotada. Con esto el autor aborda en un ejemplo y en algunos ejercicios cuestiones sobre la existencia de la Integral, pero no hace énfasis acerca de la existencia de primitivas.

Luego, para llevar a cabo la demostración de la parte 2 del TFC, el autor se basa en la hipótesis de la continuidad f, para así poder usar la "parte 1" del TFC y plantear que la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una antiderivada de f, seguidamente establece una relación con función F, antiderivada de f, y afirma que estas difieren por una constante, pues tienen la misma derivada f. Por lo tanto, como $g(a) = 0$ y $g(b) = \int_a^b f(t)dt$, emplea $F(x) = g(x) + C$ para $x = a$ y $x = b$, logrando concluir que $F(b) - F(a) = g(b)$. A continuación, presentamos, en la figura 38, la demostración planteada por el autor.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

□

Figura 38. Demostración del TFC, parte 2

Fuente: Stewart (2006, p384)

Podemos observar que en esta demostración el autor emplea representaciones en el registro algebraico y lengua natural. Además, podemos identificar una conversión de la representación de una propiedad, mencionada en la prueba, del registro lengua natural al registro algebraico, esto es, la conversión hecha de la representación “F y g difieren por una constante”, hacia $F(x) = g(x) + C$. Posteriormente se realizan tratamientos en el registro algebraico, debido a que en este registro son más sencillos de realizar.

Una vez terminada la demostración el autor resalta que si se conocer una antiderivada de una función, se puede obtener la integral definida de esta simplemente haciendo la diferencia de los valores de esa antiderivada, en los extremos del intervalo de integración, refiriéndose a la "parte 2" del teorema, con lo cual realiza una conversión de la $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en el registro algebraico al registro lengua natural. Posteriormente al comentario realizado, el autor, muestra una aplicación de este resultado a la cinemática la cual consiste en encontrar el espacio recorrido por un objeto a partir de su velocidad, todo esto empleando el registro algebraico y lengua natural.

A continuación, se presentan cinco ejemplos, donde los cuatro primeros presentan como integrando funciones continúas, en estos, se promueve el uso del TFC para el cálculo de áreas e integrales definidas. Además, en sus enunciados y resoluciones, se emplea el registro lengua natural como soporte para los tratamientos realizado en los registros algebraico y numérico.

En seguida presentamos el ejemplo 8, que sobresale de los cuatro ejemplos debido a que en él se emplea el registro gráfico a diferencia de los otros en los que solo hay representaciones en el registro algebraico y numérico. Con respecto a la representación en el registro gráfico esta solo se utiliza para representar la función integrando tal como se muestra en la figura 39.

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leq b \leq \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9.

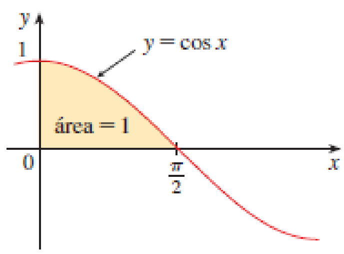


FIGURA 9

Figura 39. Enunciado y resolución del ejemplo 8

Fuente: Stewart (2006, p386)

En este ejemplo, se realiza una conversión de la representación de la medida del área, limitada por la función coseno en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, del registro lengua natural al registro algebraico. Siendo este último el registro donde se efectúan los tratamientos, además, se identifican tratamientos en el registro numérico. También se debe mencionar que el texto no promueve la coordinación, pues, aunque presenta diferentes registros de representación, no propicia el cambio en todo momento de estos. Con respecto a la conversión, esta ocurre, sin embargo, como un simple cambio de registros.

A diferencia de los otros cuatro, el objetivo del último ejemplo de esta sección es verificar la posibilidad de un error, pues la función integrando no es continua en el intervalo de integración, el cual viene representado por $[-1, 3]$, por tal motivo no puede aplicarse el TFC, según el autor. A continuación, en la figura 40 mostramos el enunciado y la solución, de este ejemplo, planteada por el autor.

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$

Figura 40. Enunciado y resolución del ejemplo 9.

Fuente: Stewart (2006, p387)

En este ejemplo el autor hace hincapié en la imposibilidad de usar el TFC cuando alguna de sus hipótesis no se cumplen, en este caso el autor considera la continuidad en el intervalo de integración. Con respecto a los tratamientos, estos se realizan en el registro algebraico y numérico, pero debemos mencionar que el registro de lengua natural es importante debido a que permite al lector la verificación del error.

El autor termina la sección 5.3 mostrando la unión de las dos partes del Teorema conforme se muestra en la figura 41, resaltando ambos resultados establecen que los procesos de diferenciación e integración son inversos, lo cual es la esencia del TFC y la razón por la cual adquiere el nombre que tiene.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

Figura 41. Enunciado del TFC parte 1 y 2

Fuente: Stewart (2006, p388)

Con respecto a los registros empleados, estos son los mismos que se presentaron anteriormente cuando en cada parte de manera separada. Cabe destacar que se representan las partes 1 y 2 respectivamente por $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ y $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, ambas en el registro algebraico. También debemos mencionar que estas representaciones algebraicas presentadas por el autor resaltan la relación inversa entre la Derivada y la Integral, sin embargo, que estas representaciones no son conversiones, dado que solo son tratamientos en el registro algebraico.

Posteriormente el autor presenta otra nota histórica, en la que cita a algunos matemáticos que contribuyeron al desarrollo del Cálculo, destacando la dificultad de medir áreas, volúmenes, etc., antes de la sistematización de tal método, debido principalmente, a Newton y Leibniz.

En cuanto a los ejercicios propuestos, son en total 70 y se encuentran al final de la sección, estos se caracterizan por su diversidad debido a los objetivos que presenta cada uno como al empleo de los registros de representación en el enunciado y en las resoluciones. Sin embargo, muchos ejercicios que se presentan solo emplean funciones continuas en intervalos de la forma $[a, b]$ lo cual hace que el lector no se cuestione las hipótesis del teorema.

Además, muchos de los ejercicios planteados sugieren el bosquejo de los gráficos de la función F (antiderivada) y su respectiva derivada f (función integrada), proporcionando al lector verificar la relación entre esas dos funciones. La primera cuestión, incluso, pide explicar "claramente" lo que se entiende por diferenciación e integración como procesos inversos (esta, como notamos, en la lengua natural).

Debemos mencionar que el autor hace referencia a algunas aplicaciones que se mencionan en los ejercicios, algunas de ellas, relativas a la ingeniería, la probabilidad, la estadística. La mayoría de las aplicaciones ligadas al TFC, sin embargo, son intrínsecas a las matemáticas.

También, observamos que muchos de estos ejercicios propician tratamientos en por lo menos dos registros, sugiriendo explícitamente la conversión. Algunos de ellos sugieren al lector el simple cambio de registros, otros, la coordinación entre ellos también. Cabe mencionar que pocos ejercicios o casi ninguno privilegian la demostración.

El análisis que acabamos de realizar muestra que la presentación del TFC en esta sección sugiere la coordinación, predominantemente, entre los registros simbólico y gráfico, y en algunos casos, la lengua natural también sugiere esa coordinación.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo presentaremos las características de nuestros sujetos de investigación además de los recursos con los que contamos para la consumación de las actividades de la fase experimental, también describiremos los instrumentos que emplearemos para la recolección de datos, terminando con el desarrollo del análisis *a priori*, *a posteriori* y la validación de la ingeniería, como lo indica la metodología de la Ingeniería Didáctica.

3.1 Escenario donde se desarrolla la Experimentación

La investigación se realiza con estudiantes de Ingeniería de Alimentos de una universidad nacional de Lima, que cursan por primera vez la asignatura Matemáticas II, durante el ciclo académico 2017-2. El curso está compuesto por 70 estudiantes entre varones y mujeres, cuyas edades varían entre 17 y 19 años. Nuestro objeto de estudio, el Teorema Fundamental del Cálculo, es desarrollado durante la primera semana de iniciado el ciclo junto con los temas de sumatorias, integral definida, así como las propiedades de estas.

3.2 Sujetos de investigación

Los sujetos de investigación tienen como conocimientos previos conceptos de funciones reales de variable real así como de límites, de funciones reales de variable real, continuidad de una función real de variable real, derivada de una función real de variable real y cálculo de antiderivadas; estos temas fueron tratados en el curso de Matemáticas I, además, tienen conocimientos que adquirieron en el curso de Matemáticas II como sumatorias, la integral definida como el límites de las sumas de Riemann y la interpretación de la integral como el área bajo la curva, siendo esto último imprescindible para el desarrollo de nuestra investigación.

La parte experimental se desarrolla con 10 estudiantes quienes participaron de forma voluntaria, firmando el Protocolo de Consentimiento Informado para Participantes (ver anexo), agrupados en parejas, pero en nuestros análisis solamente consideraremos dos parejas debido a que mostraron mayor desempeño desde el inicio de la experimentación hasta el final. A continuación, en el cuadro 6 detallaremos a cada pareja asignándole un nombre a cada integrante.

Cuadro 6. Sujetos de investigación

N.° Pareja	Integrantes
1	Camila y Ricardo
2	Amalia y Joel

Para el desarrollo de la experimentación contamos con el apoyo del profesor del curso y con el apoyo de la Facultad de Ingeniería de Alimentos, que nos brindó su laboratorio de cómputo para llevar a cabo la experimentación.

3.3 Situación problema

La experimentación consta de una situación problema, de acuerdo con Almouloud (2017) es una actividad, en la cual la intención de enseñar no está implícita, pero fue pensada y diseñada con ese fin, que se encuentra constituida por un conjunto de cuestiones abiertas y/o cerradas en un contexto más o menos matematizado las cuales presentan problemas en uno o varios dominios de saber y de conocimiento.

Para el autor la finalidad de una situación problema es el empleo de implícito, en un principio, y después explícito de nuevos objetos matemáticos mediante cuestiones que se manifiestan los estudiantes al resolver el problema.

Con respecto al diseño de la situación problema, se debe buscar que los estudiantes comprendan los datos del problema y desarrollen el problema usando lo conocimientos previos que traen consigo, además, la situación debe lograr poner en juego el objeto matemático de estudio que queremos efectivamente explorar. Además, es imprescindible que el estudiante perciba que sus conocimientos antiguos resultan insuficientes para la resolución inmediata del problema.

En este sentido, la situación problema que diseñaremos se sitúa en el contexto de la ingeniería de alimentos, en la producción de jugos, dentro de la situación problema se presentan dos actividades las cuales se realizarán en dos sesiones durante una semana.

3.3 Descripción de la situación problema

La primera actividad se realizó a lápiz y papel ya que nuestro interés es analizar la forma en la cual los estudiantes encuentran el significado al valor de la integral definida de acuerdo con el contexto presentado.

La segunda actividad se realizó con lápiz y papel, además, del uso del *software* GeoGebra, el cual fue necesario debido a que los estudiantes necesitaban realizar tratamientos en el registro gráfico.

Para recoger los datos realizados contaremos con una grabadora de audio y para poder grabar el trabajo en el GeoGebra usaremos el programa "*screem record*", del paquete Tube Catcher que es un *software* de uso libre. A continuación, presentamos los análisis *a priori* y *a posteriori* tal como lo indica nuestra metodología.

3.4 Análisis de la situación problema.

Las actividades que conforman nuestra situación problema están basadas en nuestros análisis preliminares y en nuestros antecedentes, en este sentido, Grande (2013), Robles *et al* (2014), Anacleto (2007) recomiendan realizar actividades donde se presenten tasas de variación, razones de cambio, lo que cual permitirá darle un significado al valor de la integral definida, además estas deben ser abordadas empleando el proceso de acumulación, con la ayuda de un software que permita economizar tratamientos en el registro gráfico así como, también, facilita la percepción de estos.

Nuestros análisis están basados en la teoría de Registros de Representación Semiótica porque nos interesa conocer cómo los estudiantes transitan por los diferentes registros y cómo coordinan las representaciones de los objetos presentes en el TFC, en los registros algebraico, gráfico, gráfico CAS y lengua natural.

A continuación, presentamos, en el cuadro 7, como está compuesta la situación problema que hemos diseñado para realizar nuestra experimentación.

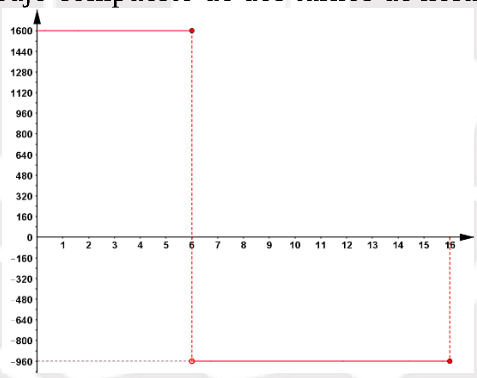
Cuadro 7. Descripción de la situación problema

SITUACIÓN PROBLEMA	**Actividad 1**	En esta actividad los estudiantes relacionan el valor de la integral definida con el volumen acumulado en un tanque de pasteurizado.
	Actividad 2	En esta actividad los estudiantes perciben la relación inversa, entre los procesos de integración y derivación, presente en el Teorema Fundamental del Cálculo, además de cómo obtener el valor de una integral definida sin emplear las sumas de Riemann.

A continuación, presentamos la actividad 1 y su respectivo análisis *a priori* y *a posteriori* tal como lo indica la Ingeniería Didáctica.

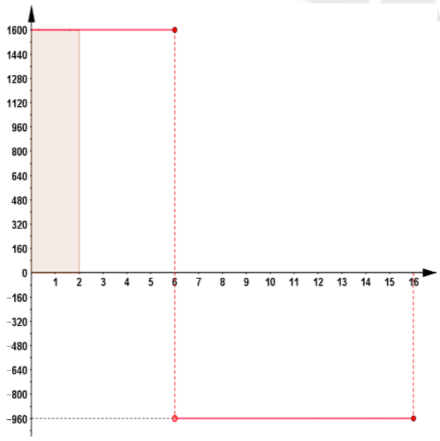
Actividad 1: Producción del jugo de mango

El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla del zumo de mango en un tanque de pasteurizado inicialmente vacío, cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de horas cada uno.

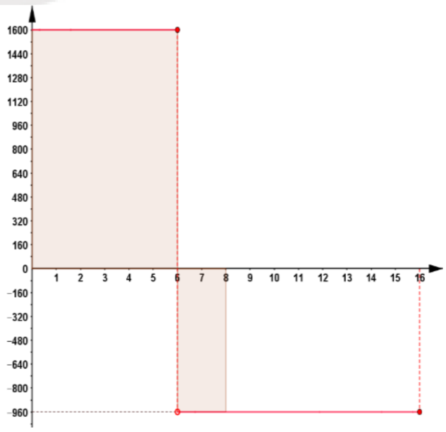


Tomando en cuenta las variables involucradas en el proceso de producción del jugo de mango, ¿qué significado tiene para usted la región sombreada en cada caso?

a)



b)



A continuación, presentamos una posible solución al problema. Con la información presentada en el registro de lengua natural y con las representaciones gráficas mostradas identificamos al tiempo como variable independiente, la cual representamos por t, y la razón de cambio del volumen de zumo mango en un tanque de pasteurizado inicialmente vacío, con respecto al tiempo como variable dependiente, la representaremos por $V'(t)$.

Además, el gráfico mostrado en la actividad representa el comportamiento de $V'(t)$ a medida que transcurren las horas, donde el tiempo viene representado por el eje de las abscisas y la razón el cambio del volumen por el eje de las ordenadas, con esto se puede concluir que la región sombreada mostrada en cada ítem de la pregunta representa el volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas.

En el ítem a), la región sombreada correspondiente representa el volumen acumulado en el tanque durante las dos primeras horas, y el valor de la medida del volumen la representamos con la siguiente integral definida, es decir:

$$\int_0^2 V'(t)dt = 1600(2) = 3200 \text{ litros}$$

En el ítem b), la región sombreada representa el volumen acumulado en el tanque durante las ocho primeras horas, y la medida de este volumen se representa mediante la siguiente integral definida:

$$\int_0^8 V'(t)dt = 1600(6) - 960(2) = 7680 \text{ litros}$$

Análisis *a priori* de la actividad 1

El objetivo de esta actividad es lograr que los estudiantes relacionen la región sombreada bajo la curva con el volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurización; a partir de los valores que presenta la razón de cambio. Consideramos que los estudiantes podrían resolver la actividad debido a que el concepto de razón de cambio es trabajado en la asignatura de Matemáticas I, prerrequisito al curso de Matemáticas II.

A continuación, presentamos las variables micro-didácticas asociadas a esta actividad y los valores que toman estas en el siguiente cuadro 8.

Cuadro 8. Variables micro-didácticas presentes en la actividad 1.

Variable didáctica	Valores de la variable
El instante de tiempo en el cual se debe significar la región sombreada.	• Dos horas • Ocho horas
El signo que tiene la función: $V'(t)$	• Función es positiva: $V'(t) > 0$ • Función es negativa: $V'(t) < 0$

Por lo que se refiere al desarrollo de la actividad, esperamos que las parejas lean el enunciado e intercambien ideas. Luego, podrían realizar la conversión de las representaciones presentes en el registro en lengua natural a sus respectivas representaciones en el registro algebraico, como, por ejemplo, que representen la variable independiente tiempo, con la letra t y la variable dependiente razón de cambio del volumen, con $V'(t)$ que viene a ser la representación algebraica de la derivada de la función volumen. Seguidamente esperamos que los estudiantes representen al eje de las abscisas y el eje de las ordenadas con la variable t con la variable $V'(t)$ respectivamente con la finalidad de encontrar el significado de la región sombreada mostrada en los ítems a) y b).

Una vez identificada las variables independiente y dependiente como el tiempo, en horas, y la razón de cambio del volumen, en litros por hora, suponemos que los estudiantes podrían movilizar sus conocimientos previos sobre tasas de variación y razones de cambio, las cuales fueron trabajadas en cursos anteriores como Matemáticas I y Física I, para poder realizar la conversión de la representación de la región sombreada en el registro gráfico presentado hacia el registro en lengua natural, es decir, concluir que la región sombreada representa el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado; y así realizar la conversión de esta representación hacia otra en el registro algebraico movilizando sus conocimientos de integral definida. Esto es la medida del volumen acumulado, luego de t horas, se representa mediante la integral definida $\int_0^t V'(t)dt$. En seguida, mostraremos en la figura 42 las conversiones que esperamos que realicen los estudiantes.

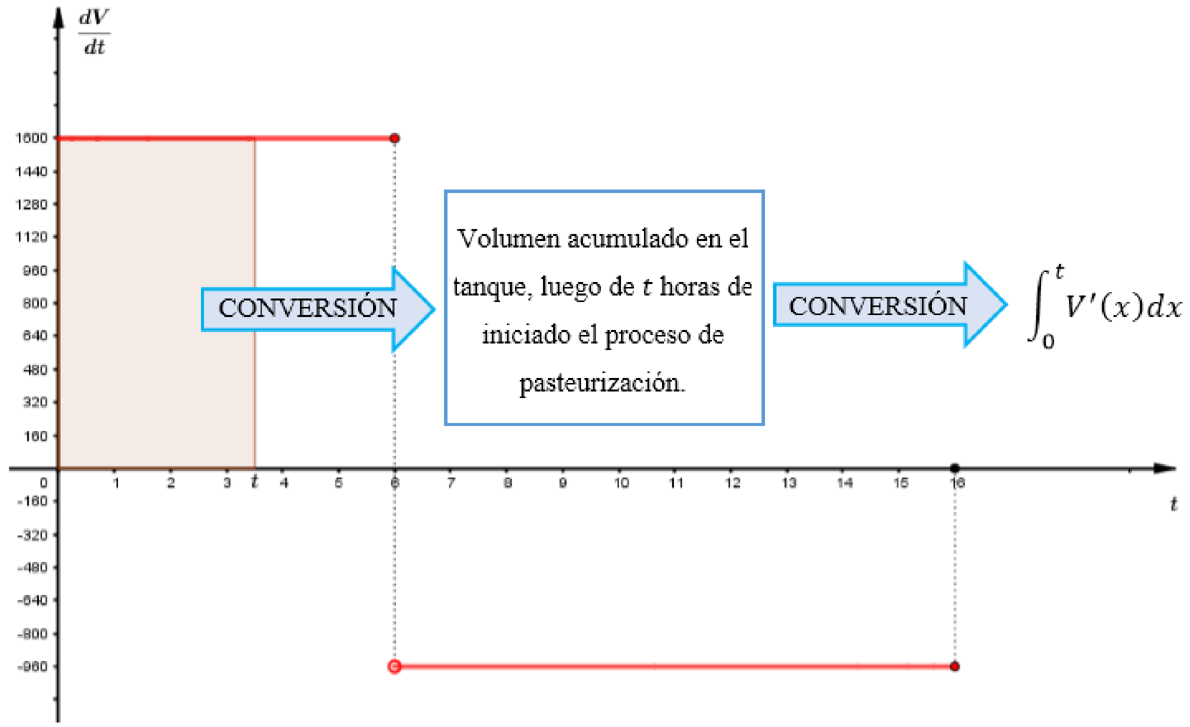


Figura 42. Conversiones esperadas en el análisis *a priori*.

También, se espera que los estudiantes logren identificar propiedades de la función que modela la razón de cambio del volumen acumulado a medida que transcurren las horas mediante la percepción de la representación gráfica mostrada, esto quiere decir, que durante las seis primeras el volumen de la mezcla en el tanque aumenta a razón constante de 1600 litros/hora y durante las siguientes horas el volumen de la mezcla en el tanque disminuye a razón de 960 litros/hora.

Esto permitiría a los estudiantes realizar la conversión de esta propiedad de la razón de cambio representada en el registro lengua natural al registro algebraico, como por ejemplo, $V'(t) = 1600, t \in [0, 6]$ y $V'(t) = -960, t \in]6, 16]$.

Asimismo, para obtener la medida del volumen acumulado, de la mezcla de zumo de mango, en cada ítem esperamos que las parejas realicen tratamientos en el registro numérico, cálculos numéricos (sumas, restas , multiplicaciones y divisiones); por ejemplo en el ítem a) se realizaría la siguiente multiplicación $1600(2) = 3200$, previamente las parejas relacionarían la región sombreada con el área de un rectángulo y con ello realizarían la conversión de la representación de la medida del área de dicha región del registro gráfico al registro numérico. También, esperamos que las parejas realicen la conversión de la representación del volumen acumulado al cabo de dos horas en el registro gráfico al registro algebraico, es decir, $\int_0^2 V'(t)\,dt$. Luego, suponemos que los estudiantes perciban que ambas representaciones (en el registro numérico y en el registro algebraico) corresponden al mismo objeto matemático (volumen acumulado al cabo de dos horas) esto quiere decir,

$$\int_0^2 V'(t)dt = 1600(2) = 3200\ litros$$

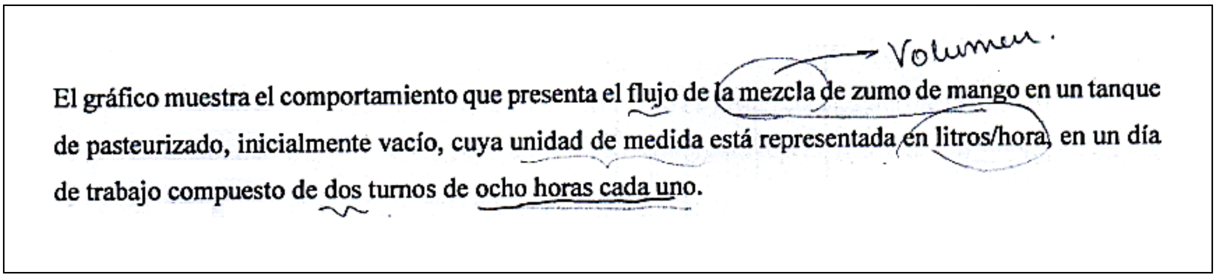
Para resolver el ítem b) esperamos que los estudiantes realicen los mismos tratamientos y las conversiones explicadas para el ítem a). Además, conviene subrayar, que este ítem movilizaría sus conocimientos previos del concepto razón de cambio, los cuales corresponden a la monotonía de una función en un intervalo en relación con el signo que presente su derivada, y así nuevamente perciban que ambas representaciones (en el registro numérico y en el registro algebraico) corresponde al mismo objeto matemático (volumen acumulado al cabo de ocho horas) es decir,

$$\int_0^8 V'(t)dt = 1600(6) - 960(2) = 7680\ litros$$

Análisis a *posteriori* de la actividad 1

Al inicio de esta actividad las parejas leyeron el enunciado que se planteó en el problema e intercambiaron ideas tal como lo habíamos previsto en el análisis a *priori*. Debemos mencionar que los estudiantes identificaron frases que les permitieron encontrar significado al problema planteado en la actividad, lo cual se manifestó en las acciones realizadas por ellos como subrayar frases y atribuirle significado a estas.

En la figura 43, presentamos las acciones realizadas por la pareja 1, como subrayar frases y encerrar estas en círculos, al interactuar con el enunciado de la actividad 1 con la finalidad de encontrar unidades significantes para darle sentido al enunciado.



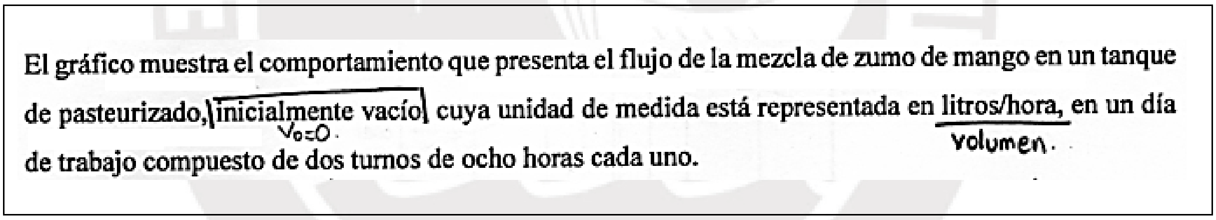
Volumen.

El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla de zumo de mango en un tanque de pasteurizado, inicialmente vacío, cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de ocho horas cada uno.

Figura 43. Acciones realizadas por la pareja 1 al interactuar con la actividad 1

Podemos notar que la primera pareja asocia el término *mezcla* con el volumen en el tanque de pasteurizado, afirmamos esto debido a los comentarios que realizaba la pareja, si bien no es correcto debido a que este término hace referencia a la razón de cambio del volumen a medida que transcurren las horas. Otra acción importante es el reconocimiento de la representación de las unidades que adquiere la razón de cambio del volumen. Lo cual se dio cuando la pareja realizaba comentarios "nos dan información de la derivada del volumen".

Seguidamente mostramos, en la figura 44, las acciones realizadas por la pareja 2 como el subrayado y el enmarcado de frases, al interactuar con el enunciado de la primera actividad.



El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla de zumo de mango en un tanque de pasteurizado, $\boxed{\text{inicialmente vacío}}$ cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de ocho horas cada uno.

Vo=0.

volumen.

Figura 44. Subrayado y significado de frases realizados por la pareja 2.

Con respecto a las acciones realizadas por la segunda pareja, podemos notar que esta pareja representa la condición inicial del volumen en el registro algebraico con $V_O = 0$. Además, representan la unidad de medida $litros/hora$ con el volumen, lo cual no es correcto debido a que esas unidades corresponden a la razón de cambio del volumen.

Si bien las acciones realizadas por las parejas no son del todo correctas, estas muestran la intención de los estudiantes en darle significado a las determinadas frases al leer el enunciado. A continuación, presentamos el producto realizado por las parejas al dar solución a los ítems a) y b) de la primera actividad.

Pareja 1

En esta actividad la pareja logró identificar las variables presentes, las cuales fueron representadas en el registro lengua natural en el enunciado tal como lo habíamos previsto en nuestro análisis a *priori*. Por ejemplo, esto se evidencia cuando la pareja señala que la representación gráfica muestra el comportamiento de la variación del flujo en $litros/hora$, tal como se muestra en la figura 45.

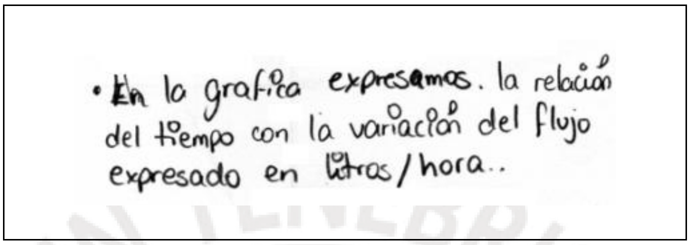

• En la grafica expresamos. la relación del tiempo con la variación del flujo expresado en litros/hora..

Figura 45. Identificación de las variables presentes, en el enunciado, en el registro lengua natural.

La pareja identificó las variables presentadas en la actividad, es decir, que la variable independiente: tiempo (en horas) el cual además representa al eje de las abscisas, y la variable dependiente: variación del flujo (en litros por hora) la cual fue representada en el eje de las ordenadas por el símbolo L/h. Estas representaciones las mostramos en la figura 46, las cuales las enmarcamos para poder resaltarlas.

Debemos mencionar que la pareja identificó las variables presentes en el registro de lengua natural tal como lo habíamos previsto en nuestro análisis *a priori*, sin embargo, los integrantes de esta pareja no lograron realizar la conversión de estas representaciones, variable independiente y dependiente, al registro algebraico.

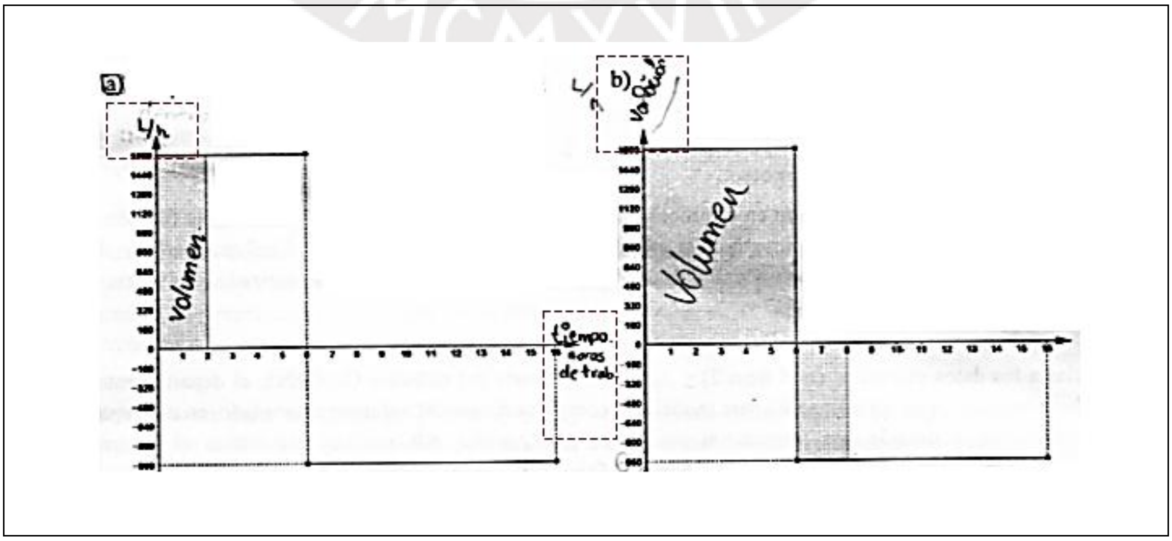


Figura 46. Representaciones de las variables involucradas realizadas por la pareja 1.

Luego de representar las variables presentes en la actividad, la pareja moviliza sus conocimientos de tasas de variación y con ello logran representar la región sombreada con el volumen acumulado en el tanque de pasteurización tal como se muestra en la figura 47, esto evidencia que los estudiantes realizan la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros de gráfico y de lengua natural tal como lo habíamos previsto en nuestro análisis *a priori*.

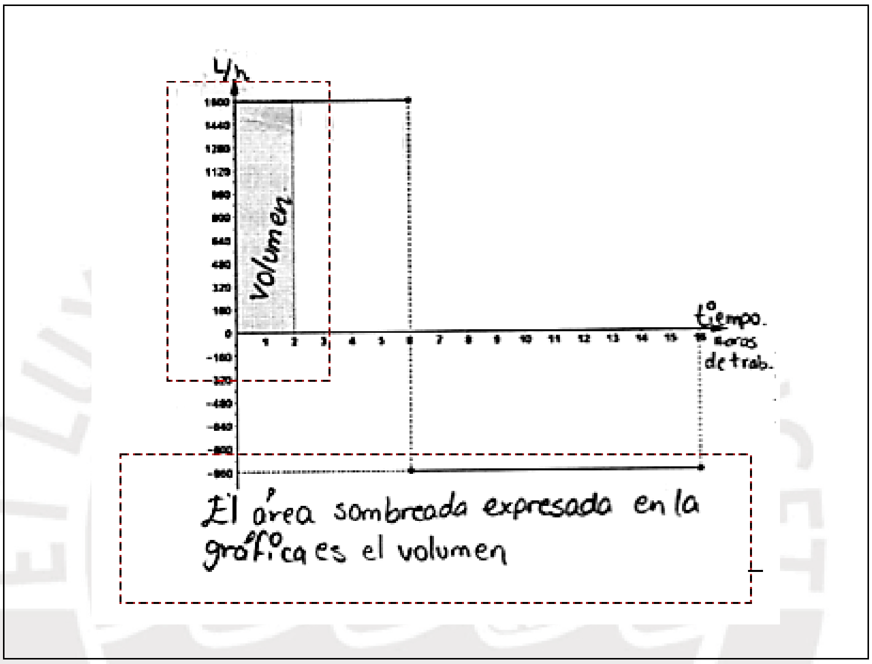


Figura 47. Representaciones del volumen acumulado realizados por la pareja 1.

Con esto podemos afirmar que los estudiantes lograron encontrar que el significado del área de la sombreada, en el contexto planteado, representa el volumen acumulado por el tanque. De este modo afirmamos que los estudiantes alcanzaron la comprensión del significado del área bajo la curva, tal como lo señala Duval (2003) "la comprensión en matemática supone la coordinación de al menos dos registros de representación" (p.14)

Además, debemos considerar que la pareja no logró realizar la coordinación de la representación en los registros gráfico, lengua natural y algebraico debido a que no lograron realizar la formación del registro algebraico lo cual consiste en representar el volumen acumulado en el tanque luego de T horas con $\int_0^T V'(t)dt$ como lo habíamos previsto en nuestro análisis *a priori*.

Los integrantes de la pareja utilizaron la representación gráfica de la función que modela la razón de cambio y a partir de ella movilizaron sus conocimientos de derivadas, con los cuales lograron identificar propiedades de esta función. Esta acción se evidencia en la figura 48, la cual enmarcamos, cuando los estudiantes indican “que a partir de la sexta hora la variación es negativa, esto quiere decir que habrá una pérdida de -1920 litros”, con lo cual podemos plantear que los estudiantes representaron en el registro lengua natural el comportamiento del volumen a partir del signo de su razón de cambio. Con respecto al signo positivo de la razón de cambio no queda muy clara la conclusión que obtuvieron sobre el volumen acumulado durante las seis primeras horas, pues señalan que “la variación fue constante y eficiente” lo cual no establece el comportamiento esperado en nuestro análisis *a priori*.

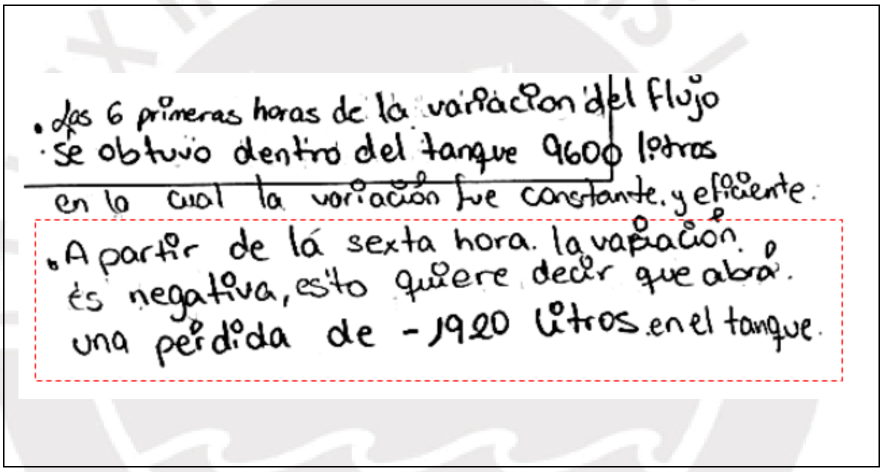


Figura 48. Representaciones en el registro de lengua natural realizadas por la pareja 1.

A continuación, presentamos la solución realizada por la pareja en los ítems planteados:

Ítem a), la pareja realizó la coordinación de la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros lengua natural y numérica. La representación en lengua natural se evidencia cuando señalan que “la variación del flujo fue continua durante las dos primeras horas en la cual podemos observar que el volumen adquirido hasta ese entonces fue de 3200 litros” tal como se muestra en la figura 49. Además, debemos indicar que para hacer esta representación la pareja representó previamente la región sombreada en el registro numérico, luego realizó tratamientos, cálculos realizados, en este registro.

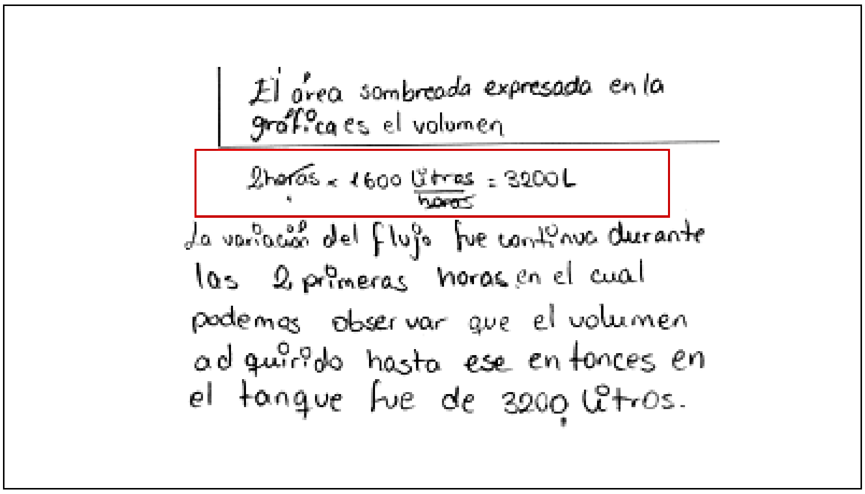


Figura 49. Tratamientos realizados en el registro numérico por la primera 1 al resolver el ítem a).

Así mismo, señalamos que esta pareja no realizó la representación de la medida del volumen en el registro algebraico y por ello que no se realizaron la coordinación de las representaciones de este objeto en los registros algebraico, numérico y lengua natural como lo planteamos en nuestro análisis *a priori*.

Ítem b), la pareja procedió de manera similar al ítem a), representó la región sombreada en el gráfico con el volumen acumulado en el tanque a medida que transcurrían las horas, también realizaron tratamientos, los cuales mostramos en la figura 50, en el registro numérico para obtener la medida del volumen acumulado durante las primeras seis horas y en las siguientes dos horas, por ejemplo $9600 - 1920 = 7680$ L, siendo este último no explicitado en la ficha de trabajo, pero suponemos que se realizó para obtener la respuesta a la pregunta solicitada.

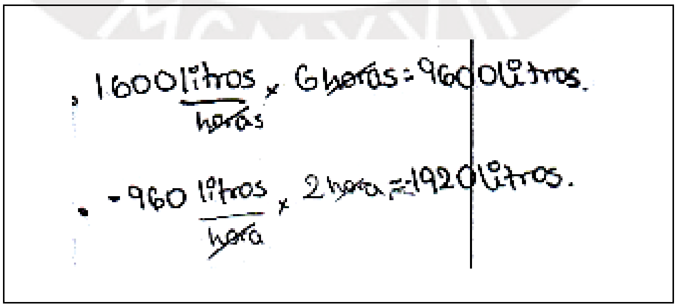


Figura 50. Tratamientos realizados por la primera pareja en el registro numérico al resolver el ítem b).

La figura 50 evidencia los tratamientos explícitos realizados por la primera pareja para dar solución al ítem b) de la actividad 1. Debemos mencionar que esta manera de realizar las operaciones está basada en sus conocimientos previos obtenidos en los cursos Física y Química.

Si bien la pareja no representó la medida del volumen en el registro algebraico como lo habíamos previsto *a priori*, sí representó la región sombreada en el registro numérico donde además realizaron los tratamientos que fueron basados en sus conocimientos previos de integrales definidas, pues su procedimiento de cálculo es muy similar a la siguiente propiedad $\int_0^8 V'(t)dt = \int_0^6 V'(t)dt + \int_6^8 V'(t)dt$. En la figura 51, mostramos la representación de la medida del volumen en el registro lengua natural durante las seis primeras horas y en las posteriores dos horas, siendo esta última no explícita en el enunciado, pero el cálculo realizado por los estudiantes muestra que sí lo es.

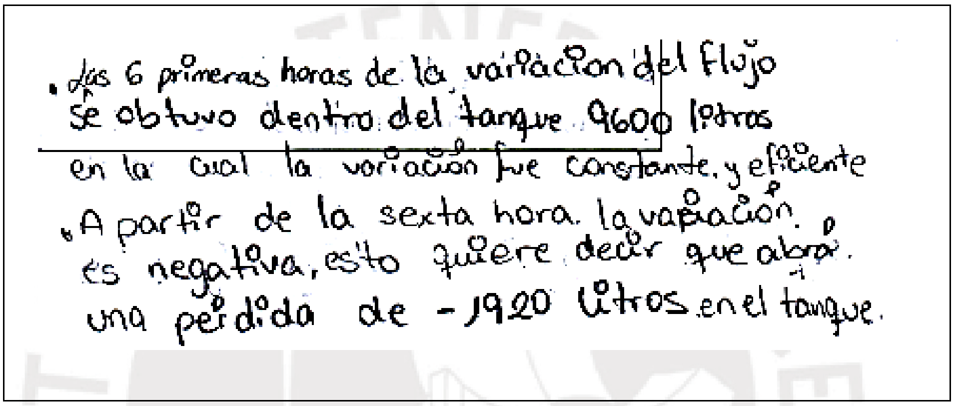

• Las 6 primeras horas de la variación del flujo se obtuvo dentro del tanque 9600 litros en la cual la variación fue constante y eficiente
• A partir de la sexta hora la variación es negativa, esto quiere decir que abra una perdida de -1920 litros en el tanque.

Figura 51. Representación de la medida del volumen acumulado en el registro lengua natural realizado por la primera pareja

Debemos resaltar que la pareja logró encontrar el significado de la región sombreada en el contexto planteado, con lo cual se cumplió el objetivo de la actividad, también debemos mencionar el producto realizado por los estudiantes al resolver los ítems evidencia que lograron realizar la coordinación de la representación de la región sombreada en los registros gráfico, lengua natural y numérico. En seguida analizaremos las acciones por la segunda pareja.

Pareja 2

En esta actividad la pareja realizó la conversión de la representación de la variable independiente, tiempo del registro de lengua natural al registro algebraico como se había previsto en el nuestro análisis *a priori*, esto se evidencia cuando emplean la letra t para representar la cantidad de horas transcurridas; de modo similar cuando representaron la tasa de variación del flujo a medida que transcurren las horas con la representación algebraica de la derivada del volumen $\frac{dV}{dt}$, la cual es una representación equivalente a la prevista de manera *a* *priori* $V'(t)$. Estas representaciones se evidencian en el producto realizado por la pareja, las cual enmarcamos y mostramos en la figura 52.

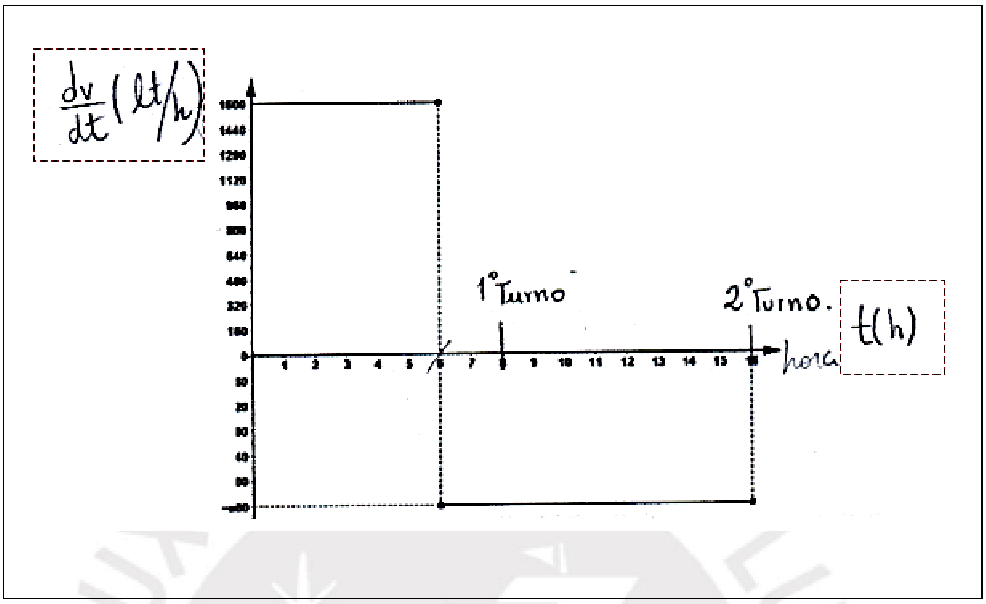


Figura 52. Representaciones de las variables involucradas realizadas por la pareja 2

Además, debemos mencionar que la pareja representa el eje de las abscisas y ordenadas con las variables mencionadas anteriormente, es decir, al eje x con la variable tiempo y al eje y con la razón de cambio del volumen ambas representadas con t y $\frac{dV}{dt}$ respectivamente. También podemos notar que la pareja identifica los turnos en los cuales opera la empresa, lo cual no fue considerado en nuestro análisis *a priori*, debido a que no es relevante en la resolución.

La pareja emplea la representación gráfica de la función que modela la razón de cambio para obtener información del comportamiento del volumen, para lo cual movilizan sus conocimientos previos de derivadas logrando identificar propiedades de esta. Por ejemplo, cuando los integrantes indican que durante "las 6 primeras horas la producción fue constante ($1600lt/h$)" y "las dos horas restantes al 1° turno hubo una perdida cte igual de $960l/h$". Generar que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos es una de las características que tiene una situación problema. Almouloud (2017).

Con estas acciones podemos notar que la pareja logra representar en el registro lengua natural el comportamiento de la razón de cambio y el valor de esta durante las seis primeras horas, así como en las siguientes dos horas tal como lo muestra el producto realizado por los estudiantes en la figura 53.

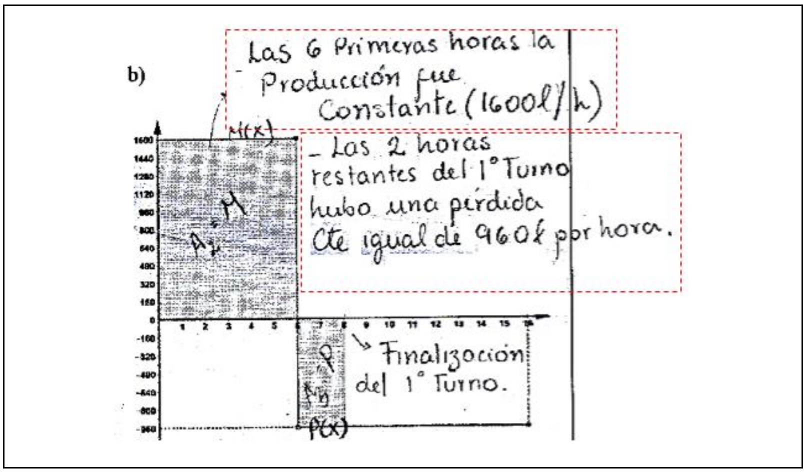


Figura 53. Representación del comportamiento de la razón de cambio en el registro lengua natural realizados por la pareja 2.

Debemos mencionar que la pareja no logró realizar la conversión de esta última representación, la propiedad de la razón de cambio, en el registro de lengua natural hacia una representación algebraica, lo cual habíamos supuesto *a priori*.

Además, la pareja logró plantear que la región sombreada representa el volumen acumulado, el cual es el significado que adquiere la región según el contexto presentado. Para ello realizaron la conversión de la representación del volumen en el registro gráfico hacia el registro algebraico como se muestra en la figura 54, cuando los estudiantes establecen dicha transformación con una flecha, seguidamente realizan otra conversión de esta última representación hacia una en el registro lengua natural.

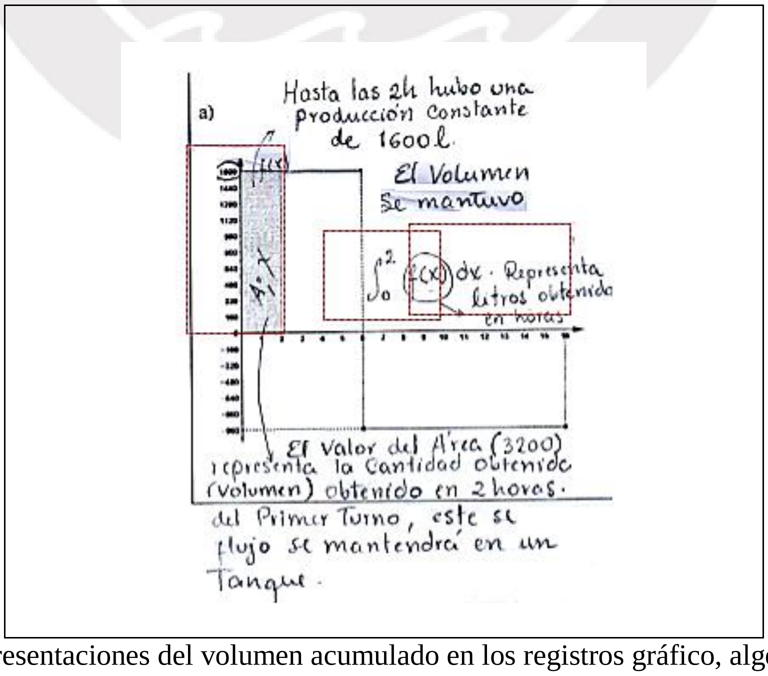


Figura 54. Representaciones del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico y lengua natural realizados por la pareja 2.

En la figura 54, observamos que $\int_0^2 f(x)dx$ representa algebraicamente el volumen acumulado en litros, lo cual se evidencia cuando los estudiantes le hacen corresponder la frase “litros obtenidos en horas”. Si bien lo correcto sería plantear que la representación $\int_0^2 f(x)dx$ equivale a la cantidad de litros acumulados al cabo de dos horas de iniciado el proceso, no desmerece el significado de la representación de la región sombreada. Con esto la pareja realizó la coordinación de la representación del objeto del volumen acumulado en tres registros gráfico, algebraico y lengua natural.

Debemos mencionar que los estudiantes lograron realizar las conversiones que habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori* con la única diferencia de que no lograron realizar dichas transformaciones para un instante cualquiera t sino para un valor tiempo en particular que fue la segunda hora, suponemos que si la pregunta hubiese sido para una hora cualquiera t los estudiantes podrían haber realizado lo esperado.

A continuación, presentaremos la solución realizada por la segunda pareja en los ítems planteados:

Ítem a), la pareja logra realizar la coordinación de la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros algebraico, numérico y de lengua natural, esto se evidencia cuando señalan “el valor del área (3200) que representa la cantidad obtenida (volumen) en dos horas” en esta frase observamos que la pareja representa la medida del área de la región sombreada con el volumen acumulado en el tanque al cabo de dos horas, además, al obtener la medida de dicho volumen, 3200 litros, ha realizado una conversión de la representación en lengua natural al registro numérico, previamente realizó tratamientos en el registro numérico los cuales no se presentan de manera explícita en el ficha de trabajo, pero que el profesor investigador si observó en la experimentación.

La pareja también logró representar la medida de la región sombreada con la integral definida $\int_0^2 V'(t)dt$ lo cual muestra que representaron la medida del volumen en los registros que se había supuesto *a priori*. En seguida mostramos, en la figura 55, las acciones realizadas por la pareja al dar solución a este ítem.

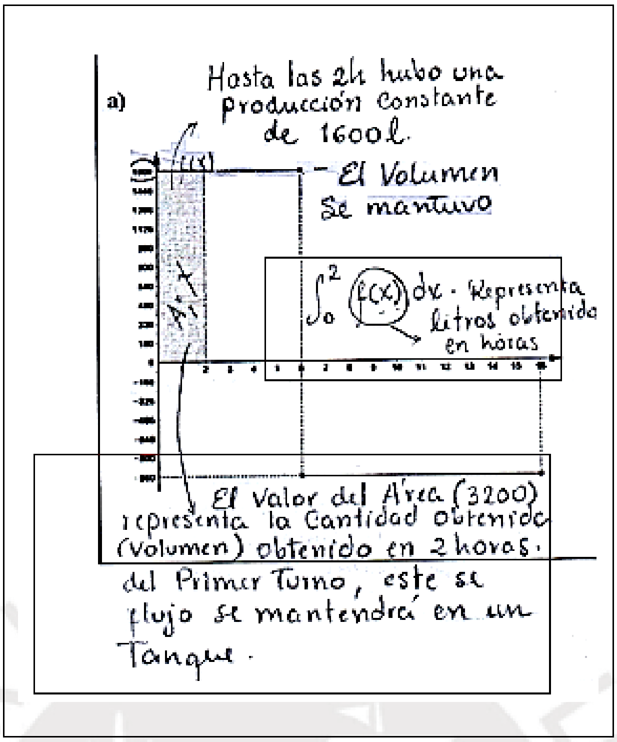


Figura 55. Coordinación de la representación del objeto medida del área realizada por la pareja 2.

La figura 55 muestra el producto realizado por la segunda pareja, en el cual se puede observar la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico, numérico y lengua natural.

Ítem b), la región sombreada en este ítem representa gráficamente el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado, la cual es representada en el registro algebraico como $\int_0^6 M(x)dx + \int_6^8 P(x)dx$, esta representación es consecuencia de haber realizado un tratamiento a la representación $\int_0^8 V'(t)dt$ el cual no se muestra de manera explícita en la ficha de trabajo, pero suponemos que se realizó debido a sus conocimientos de integral definida y a los comentarios que realizaba la pareja, los cuales fueron documentados por los observadores.

Debemos mencionar que los estudiantes representaron algebraicamente la función razón de cambio durante las primeras seis horas y las diez horas restantes con $M(x)$ y $P(x)$ respectivamente, estas representaciones no fueron contempladas en nuestros análisis *a priori*, sin embargo, no impidieron dar solución a la pregunta planteada.

La pareja realiza la conversión del registro algebraico al registro lengua natural, esto se manifiesta cuando los estudiantes señalan que $\int_0^6 M(x)dx$ representa el volumen acumulado durante las seis primeras horas y $\int_6^8 P(x)dx$ representa el volumen acumulado entre la sexta y octava hora. Posteriormente realizan la conversión de esta última representación al registro numérico, representando el volumen acumulado durante las seis primeras horas por 9600 litros y al volumen acumulado en las siguientes dos horas representado por -1920 litros, y por último para dar solución a este ítem realizan un tratamiento en este registro como se había contemplado en el análisis *a priori*.

A continuación, mostramos en la figura 56 las representaciones realizadas por los estudiantes al dar solución al ítem b).

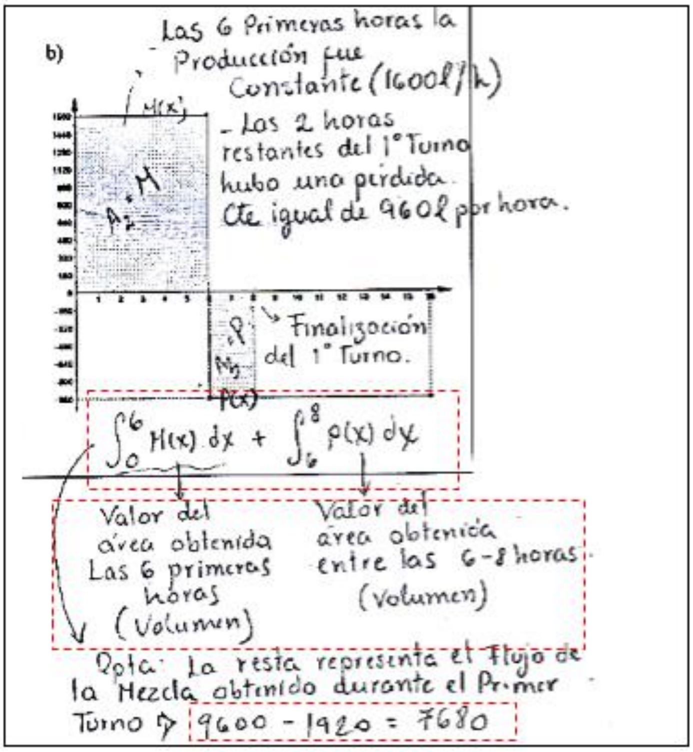


Figura 56. Representación de la medida del volumen acumulado en diferentes registros realizados por la pareja 2 al resolver el ítem b).

La figura 56 muestra la coordinación de la representación del volumen acumulado en los registros gráfico, algebraico, lengua natural y numérico; además del tratamiento realizado en el registro numérico para dar solución al ítem b). Con esto los estudiantes que conforman esta pareja no solo han representado el objeto de estudio en cuatro registros de representación semiótica, sino que además han logrado coordinar dichas representaciones en los registros mencionados con eso según Duval (2013) los estudiantes han logrado la comprensión del significado que adquiere la región sombreada en el contexto planteado, lo cual era el objetivo de la actividad.

Luego de comparar el análisis *a priori* realizado con lo desarrollado por las parejas en nuestro análisis *a posteriori* podemos concluir que los estudiantes lograron establecer que la medida del área bajo la curva representa el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado, con lo cual se cumple el objetivo de la actividad. Además, las parejas han logrado realizar transformaciones externas e internas, conversiones, tratamientos, con lo cual estamos cumpliendo parte de nuestros objetivos específicos. También se pudo verificar que la segunda pareja logró coordinar las representaciones en los registros algebraico, gráfico y lengua natural lo cual muestra que estamos en camino de cumplir nuestro objetivo general.

Socialización de la actividad 1.

Al terminar la primera actividad generalizamos los resultados obtenidos por los parejas, el profesor investigador socializa el significado que adquiere la región sombreada, en el contexto planteado, como el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado, además, que la medida del área de la región representa la medida del volumen acumulado tal como se muestra en la figura 57.

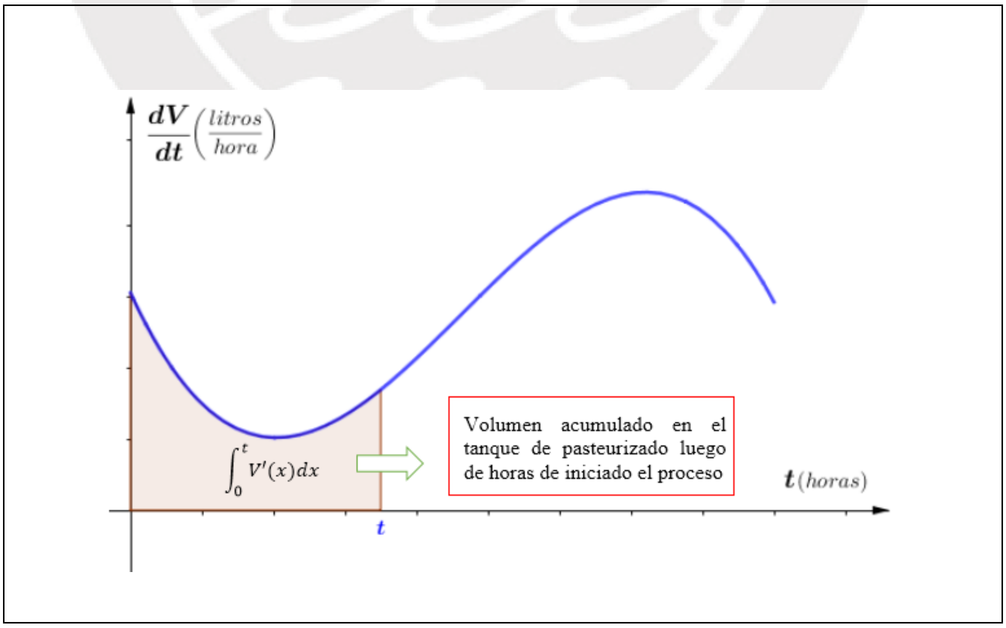
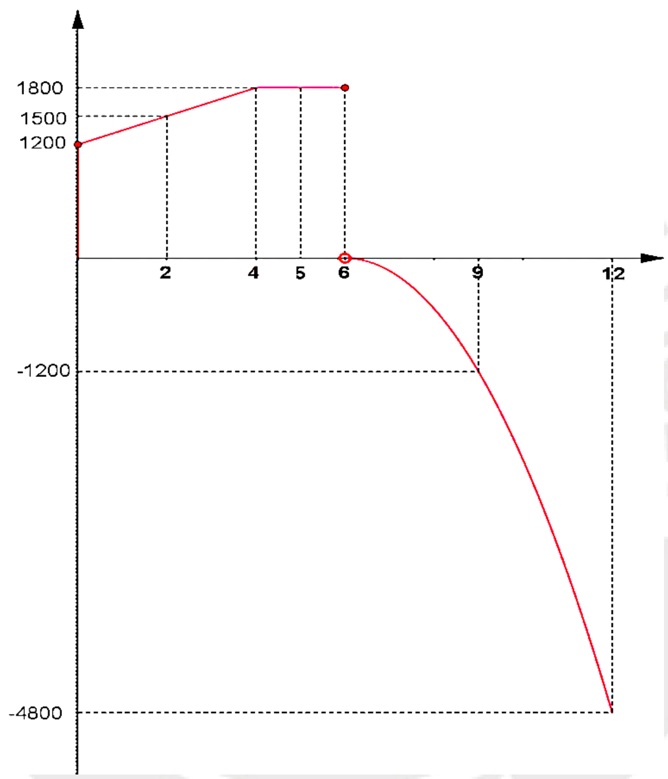


Figura 57. Representación del volumen acumulado en diferentes registros.

En seguida, presentamos la actividad 2 con su análisis a *priori* y a *posteriori*.

Actividad 2: Situación inesperada en la producción

Un determinado día el ingeniero responsable de la producción detectó un retraso en la extracción del zumo de mango, por lo cual debe acelerar el proceso de pasteurizado y con ello no afectar el proceso de envasado. Para lograr este fin el ingeniero proyecta que dicho proceso se debe realizar en 12 horas y además el flujo de la mezcla en litros por hora en el tanque de pasteurizado vacío inicialmente debe seguir el comportamiento representado en el siguiente gráfico. Considere que el tramo curvo se modela con una función cuadrática con vértice en el punto (6, 0).



1. **1.** Debido a que se acelera el proceso, se debe hacer un seguimiento al volumen que se va acumulando en el tanque de pasteurizado a medida que pasan las horas. El ingeniero encargado de proceso recomienda medir el volumen de la mezcla en los siguientes tiempos:
   a) A dos horas de iniciado el proceso.
   b) A cinco horas de iniciado el proceso.
   c) A nueve horas de iniciado el proceso.
   d) A doce horas de iniciado el proceso.

2. **2.** Para tener evidencia de lo ocurrido en el proceso pasteurizado, el ingeniero solicita realizar la gráfica de la función que representa el comportamiento del volumen de la mezcla a medida que pasan las horas. Realice un esbozo de la gráfica que modela el volumen acumulado de la mezcla en el tanque a medida que pasen las horas.

3. Gracias a los datos obtenidos en los ítems 1) y 2), y con la ayuda del software GeoGebra, el departamento de producción realiza una aproximación para el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas; para validar el modelo encontrado y cumplir las normas de calidad establecidas el ingeniero responsable recomienda calcular el flujo (litros/hora) a partir de la representación gráfica del volumen acumulado.

   Para realizar dicha validación el departamento de producción presenta un modelo aproximado del comportamiento del volumen a medida que transcurren las horas en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb, el cual está ubicado en el escritorio de cada máquina. Compruebe si el modelo presentado cumple los requerimientos del ingeniero responsable de la producción.

4. La gerencia realiza un estudio de mercado a nivel nacional, el cual muestra que el jugo es muy dulce y espeso sólo para los habitantes del departamento de Trujillo, por tal motivo la empresa decide disolver el zumo de mango que está destinado a ese departamento. El proceso de disolución del zumo consiste en agregar inicialmente 1300 litros de agua al tanque antes de verter el zumo de mango.

   El ingeniero encargado de esta producción recomienda realizar un seguimiento al volumen del zumo, ya disuelto, en el tanque a medida que transcurren las horas, para ello se debe realizar un gráfico que represente el compartimiento del volumen del zumo de mango, disuelto, en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas. Considere que la disolución de la mezcla ocurre de manera instantánea y que la mezcla que se obtiene es homogénea.

Esta actividad está compuesta de cuatro preguntas de las cuales solo la primera consta de cuatro ítems a, b, c y d. Las preguntas están formuladas de manera secuencial de modo que al resolver una se pueda resolver la siguiente. Consideramos que los estudiantes podrían resolver la actividad debido a que el concepto de razón de cambio, recta tangente al gráfico de una función, pendiente de una recta, función lineal, función cuadrática, integral definida son conceptos previos trabajados en las asignaturas de Matemáticas I y Matemáticas II, además no tendrán inconvenientes con el empleo del *software* debido a que cuentan con conocimientos del mismo.

De manera similar a la primera actividad se representa gráficamente el comportamiento que sigue la razón de cambio del volumen (en litros por hora) a medida que transcurre el tiempo (en horas). Del enunciado se puede identificar la variable independiente, el tiempo t en horas y la variable dependiente, la razón de cambio dV/dt en litros por hora; con ello esperamos que los estudiantes reconozcan que el significado del área bajo la curva viene a ser el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado. En seguida, presentamos una posible solución de la actividad 2.

En la primera pregunta de esta actividad el ingeniero encargado de la producción recomienda medir el volumen de la mezcla en el tanque de pasteurizado en distintos tiempos. Al cabo de dos horas el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado viene dado por $\int_0^2 V'(t)dt = \left(\frac{1200+1500}{2}\right)2 = 2700$ litros. Luego, al cabo cinco horas el volumen acumulado es dado por $\int_0^5 V'(t)dt = \left(\frac{1200+1800}{2}\right)4 + 1800(1) = 7800$ litros. De igual manera para el ítem c), el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado al cabo de nueve horas es $\int_0^9 V'(t)dt = \left(\frac{1200+1800}{2}\right)4 + 1800(2) - \frac{1}{3}(1200)(3) = 8400$ litros y al cabo de doce horas de iniciado el proceso de pasteurizado el volumen acumulado asciende a $\int_0^{12} V'(t)dt = \left(\frac{1200+1800}{2}\right)4 + 1800(2) - \frac{1}{3}(4800)(6) = 0$ litros, con lo cual finaliza el proceso y el tanque queda vacío. Esta pregunta también puede ser realizada con la ayuda del GeoGebra.

Seguidamente presentaremos una solución a la segunda pregunta. Para obtener la representación solicitada de la función volumen, primero procederemos a calcular el volumen acumulado de la mezcla para cada hora, para ello utilizaremos el comando ***integral*** del GeoGebra, previamente definida la función razón de cambio a la cual denominamos *f*. Seguidamente organizaremos una tabla con los valores del volumen en cada hora, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Representación tabular de la función volumen a medida que transcurren las horas.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\int_0^t V'(t)dt$	0	1275	2700	4275	6000	7800	9600	9555,56	9244,44	8400	6755,56	4044,44	0

Los valores presentes en la tabla 1 fueron obtenidos con la sentencia ***integral (f, 0, t)***, donde la variable *t* toma los valores de 0 a 12 horas. Debemos mencionar que se puede construir una tabla con más valores si es que se desea realizar un esbozo más aproximado. A continuación, mostramos en la figura 58 la representación gráfica en la tabla y la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

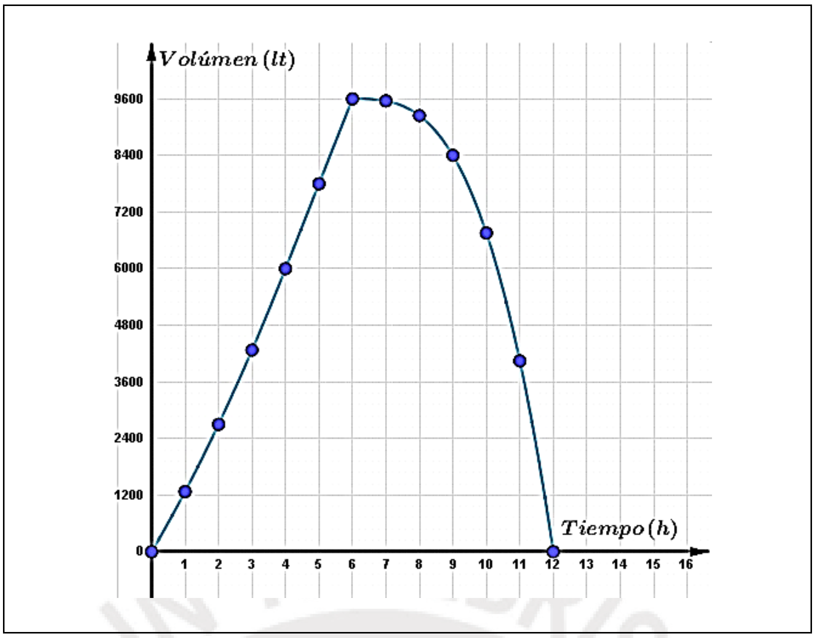


Figura 58. Representación gráfica de los datos organizados en la tabla y de la función que modela el volumen acumulado.

Ahora presentaremos una solución correspondiente a la tercera pregunta. A diferencia de las preguntas anteriores, en esta se debe utilizar el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb; al abrir el archivo se observa una representación gráfica-CAS, la cual mostramos en la figura 59, del modelo aproximado del comportamiento que presenta el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

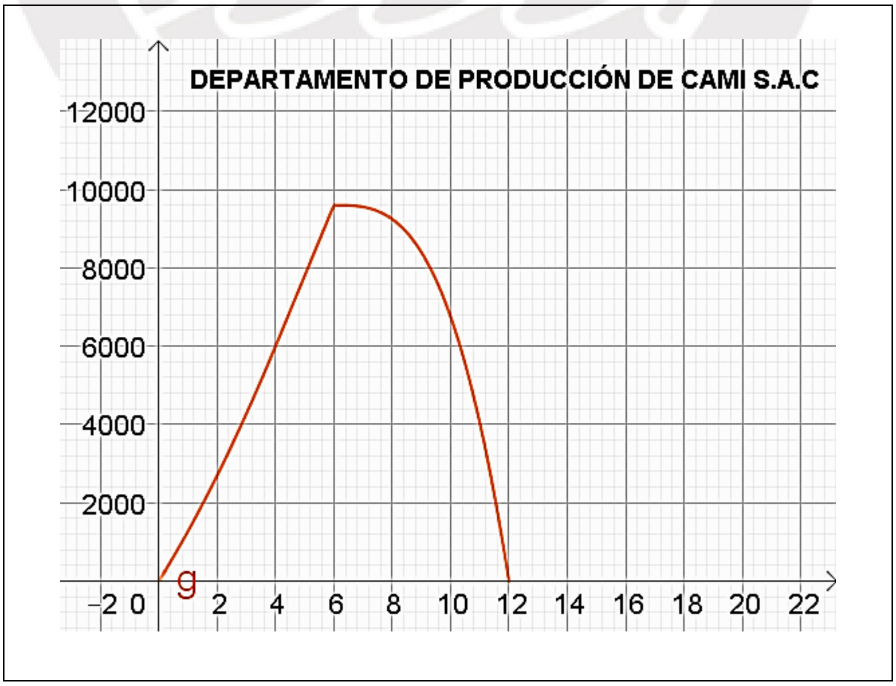


Figura 59. Representación gráfica de la función volumen acumulado en el GeoGebra, realizada por el departamento de producción.

Para dar solución a esta pregunta debemos verificar que la representación gráfica, mostrada en la figura 59, de la función corresponde al comportamiento del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

El criterio que seguiremos para validar el modelo presentado consiste en, obtener la representación gráfica de la derivada a partir de la representación obtenida por el departamento de producción y con esta comparar la representación obtenida con la brindada en el enunciado de la actividad 2. Para ello utilizaremos el comando *Derivada(<Función>)* del GeoGebra, además de la vista algebraica para visualizar la variable empleada, rótulo de la función en el software, que representa la función que define el volumen acumulado y así poder emplearla en el comando *Derivada*. Luego de realizar los pasos descritos obtenemos en la vista gráfica la representación de la función razón de cambio, la cual mostramos en la figura 60.

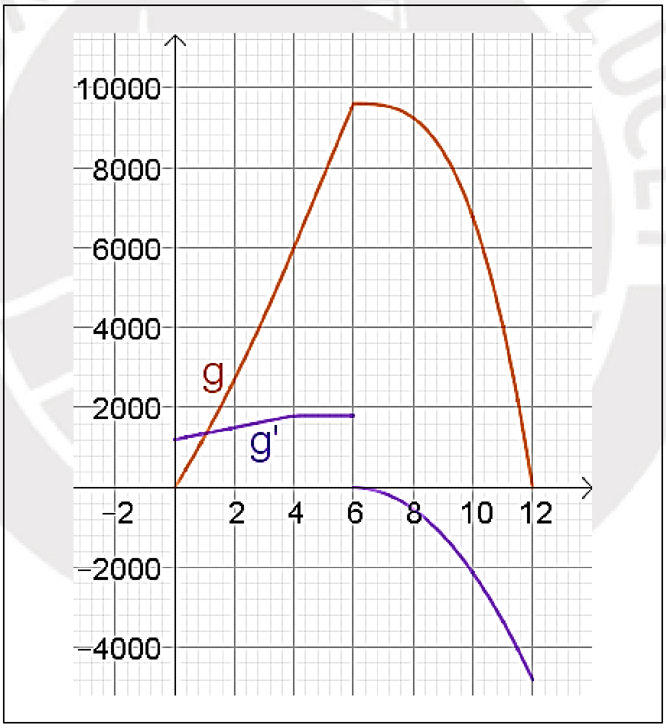


Figura 60. Representación gráfica CAS de la función razón de cambio del volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

En la figura 60, mostramos la función que representa el volumen acumulado así como el rótulo, *g*, que presenta, previa activación de este en la vista algebraica, y la representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS la cual ya puede ser comparada con la presentada en el enunciado de esta actividad.

Para comparar la razón de cambio obtenida con el apoyo del GeoGebra con la brindada en el enunciado de la actividad realizaremos un tratamiento, el cual consiste en hacer un zoom para lo cual emplearemos la opción aproximar del GeoGebra, en el registro gráfico CAS obteniendo la representación mostrada en la figura 61.

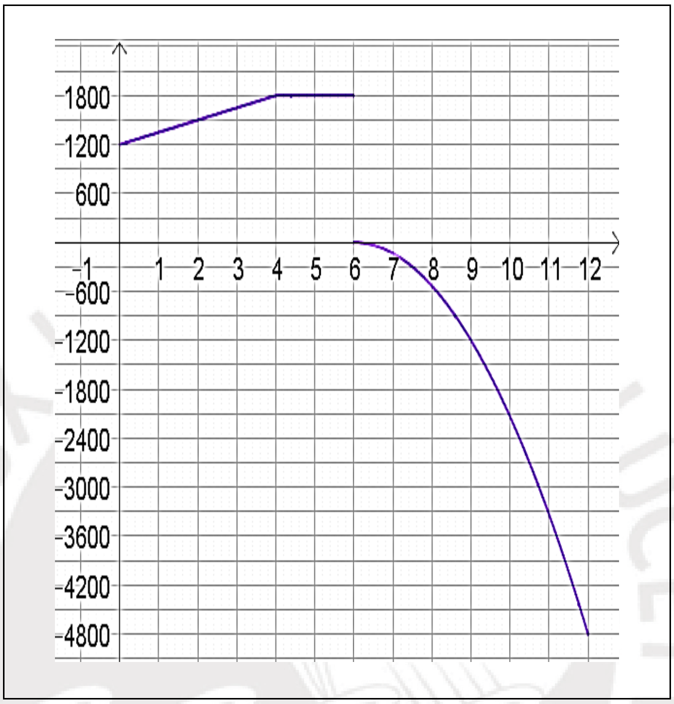


Figura 61. Representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS

Podemos observar que la representación mostrada en la figura 61coincide con la representación gráfica de la razón de cambio del volumen presentada en el enunciado de la actividad, con lo cual comprobamos que el modelo realizado por el departamento de producción efectivamente representa el comportamiento del volumen acumulado en el tanque a medida que transcurren las horas.

Ahora presentaremos una posible solución a la última pregunta que presenta la actividad. En esta pregunta se debe realizar una representación gráfica de la función que modela el volumen de mango ya disuelto. Para realizar la representación gráfica de la función pedida utilizaremos la condición incial que presenta el problema, el tanque contiene inicialmente 1300 litros de agua que servirán para disolver la mezcla, la cual nos permitirá plantear que el volumen de la mezcla ya disuelta sea representado de manera algebraica con $V(t) = 1300 + \int_0^t V'(x)dx$ cuyo gráfico se muestra la figura 62.

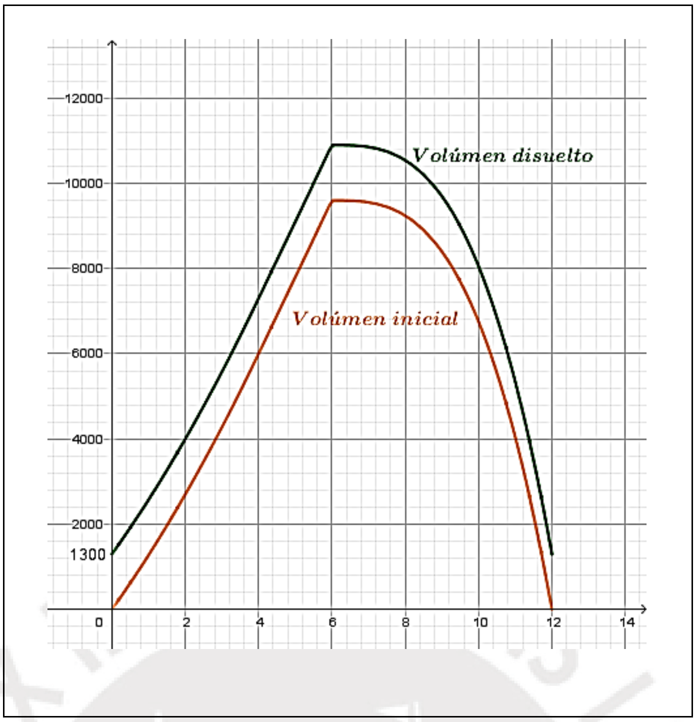


Figura 62. Representación gráfica CAS del volumen acumulado (inicial) y del volumen acumulado disuelto (final) a medida que trascurren las horas.

Para representar gráficamente el volumen disuelto de la mezcla, mostrado en la figura 62, emplearemos la sentencia $g + 1300$ en la ventana de comandos del GeoGebra, donde g representa la función volumen acumulado sin disolver obtenida en la pregunta tres. A continuación, presentaremos el análisis *a priori* de la segunda actividad siguiendo la estructura planteada por la metodología empleada en nuestra investigación.

Análisis *a priori* de la actividad 2

Los objetivos de esta actividad es que los estudiantes logren:

- Realizar tratamientos en el registro numérico, gráfico y gráfico CAS con la finalidad de obtener la representación del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.
- Representar el volumen acumulado en el registro algebraico, gráfico y registro gráfico CAS la función que modela el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

De esta manera, la actividad busca alcanzar los objetivos específicos y con ellos el objetivo general de nuestra investigación. A continuación, presentamos en el cuadro 9 las variables micro-didácticas presentes en la actividad:

Cuadro 9. Variables micro-didácticas movilizadas en la actividad 2

Variable didáctica	Valores de la variable
El comportamiento que tiene la función razón de cambio.	• Lineal $f(x) = mx + b$ • Constante $f(x) = c$ • Cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$
El comportamiento de la función de manera explícita en la representación gráfica presentada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb	• Implícito. • Explícito.
Vista algebraica en el GeoGebra	• Expuesta. • Oculta.

Con respecto al desarrollo de la segunda actividad, suponemos que las parejas leerán el enunciado, intercambiarán ideas y con estas acciones se espera que realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado de la mezcla luego de t horas en los registros gráfico, algebraico y lengua natural conforme se muestra en la figura 63.

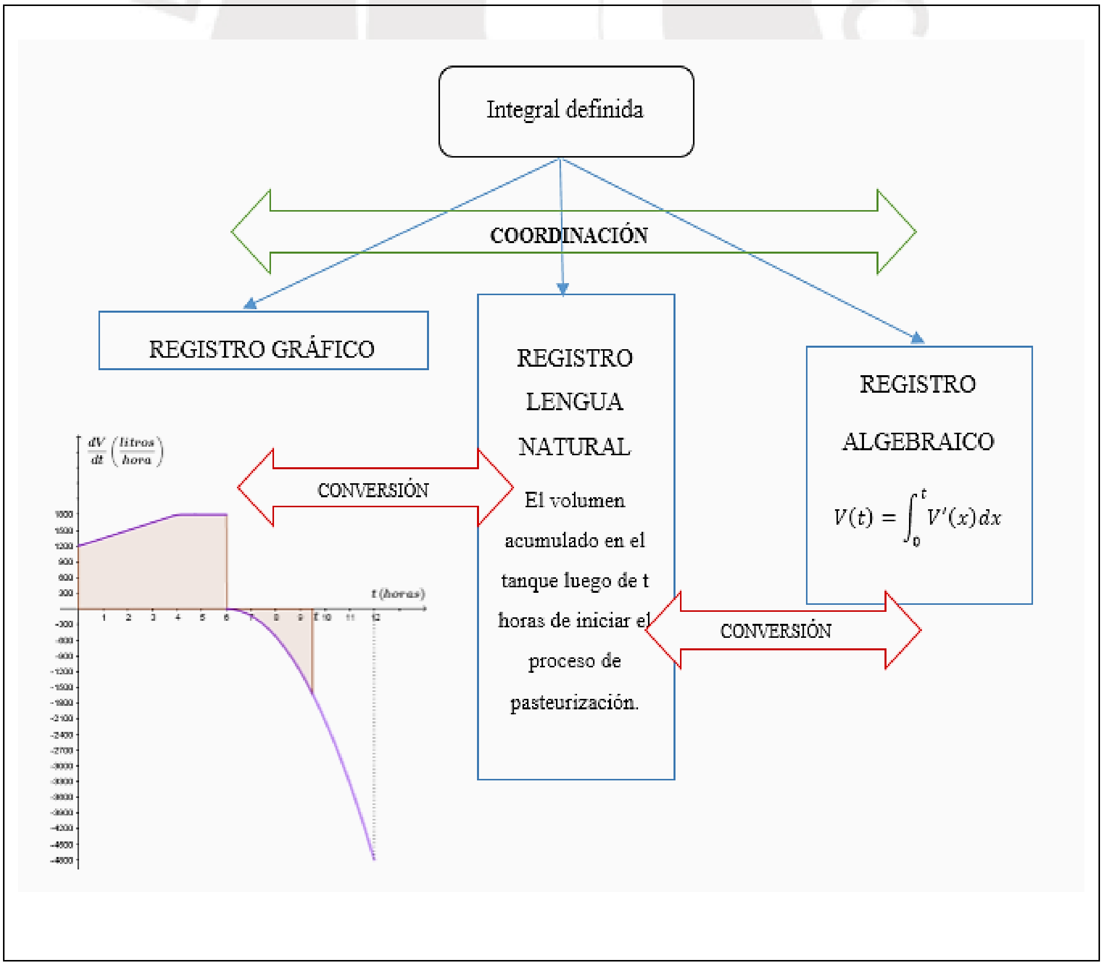


Figura 63. Coordinación de la representación en los registros gráfico, algebraico y lengua natural de la representación de la integral definida.

La figura 63 muestra las representaciones del volumen acumulado, integral definida en el contexto de la situación problema, en los registros esperados. Estas conversiones podrán ser realizadas por las parejas debido a sus conocimientos previos de cálculo integral y a lo realizado en la primera actividad, donde encontró que el área bajo la curva representa el volumen acumulado de la mezcla en el tanque de pasteurizado, además, esta se representa algebraicamente como $V(t) = \int_0^t V'(x)dx$.

Pregunta 1

Para dar solución al **ítem a)** esperamos que las parejas realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado al cabo de dos horas en los registros gráfico, algebraico y lengua natural como lo mencionamos en la figura 63, seguidamente para obtener la medida del volumen acumulado, al cabo de dos horas, realicen la conversión de la representación del registro gráfico al registro figural de la siguiente manera, los estudiantes asociarían la región que representa el volumen acumulado en el registro gráfico con la superficie de un trapecio y con ello la medida del volumen acumulado es igual a la medida del área del trapecio determinado tal como se muestra en la figura 64.

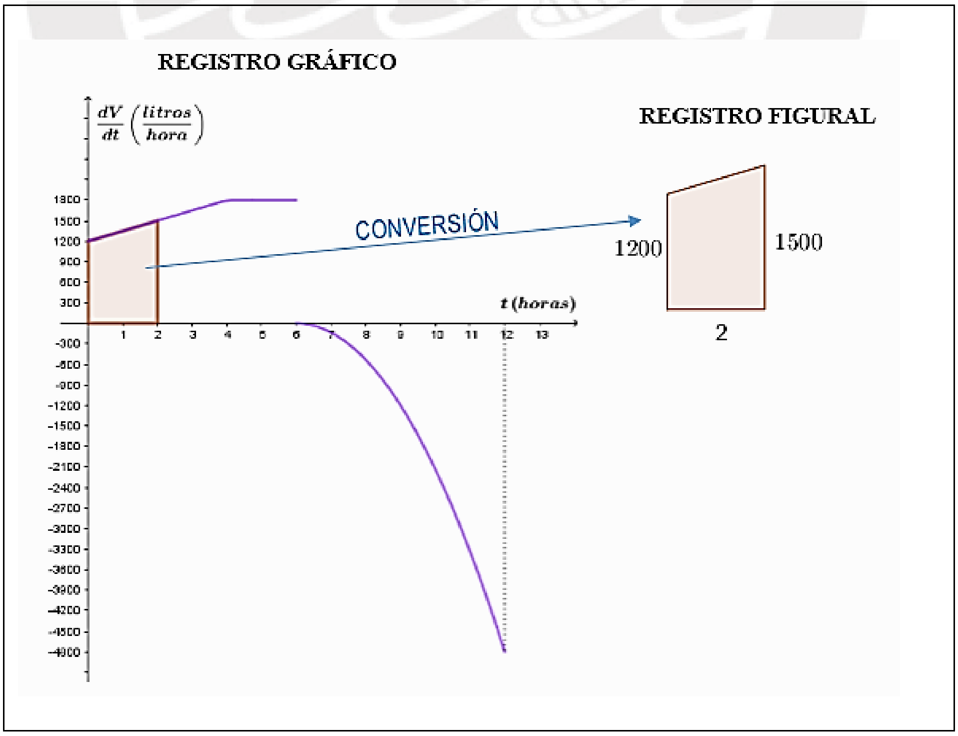


Figura 64. Conversión del volumen acumulado al cabo de dos horas del registro gráfico al registro figural.

Una vez realizada la conversión mostrada en la figura 64 esperamos que los estudiantes realicen otra conversión de esta representación, en el registro figural, al registro numérico obteniendo así la medida del volumen solicitado de la siguiente manera $\int_0^2 V'(t)dt = \left(\frac{1200+1500}{2}\right)2$, por último para obtener el valor volumen acumulado realizarían tratamientos en el registro numérico $\left(\frac{1200+1500}{2}\right)2 = 2700$ litros. Debemos mencionar que algunas parejas para encontrar la medida del trapecio lo reconfiguren en un rectángulo y un triángulo, lo cual corresponde a un tratamiento en el registro figural.

Suponemos que para dar solución al **ítem b)**, los estudiantes realizarían la coordinación del volumen acumulado en los registros mostrados en la Figura 63. Luego para obtener la medida del volumen al cabo de cinco horas esperamos que las parejas realicen la conversión de la representación del registro gráfico al registro figural de modo similar al ítem a), con la única diferencia que ahora asociarían la medida del volumen acumulado con la medida de la superficie de un pentágono no regular, tal como se muestra en la figura 65.

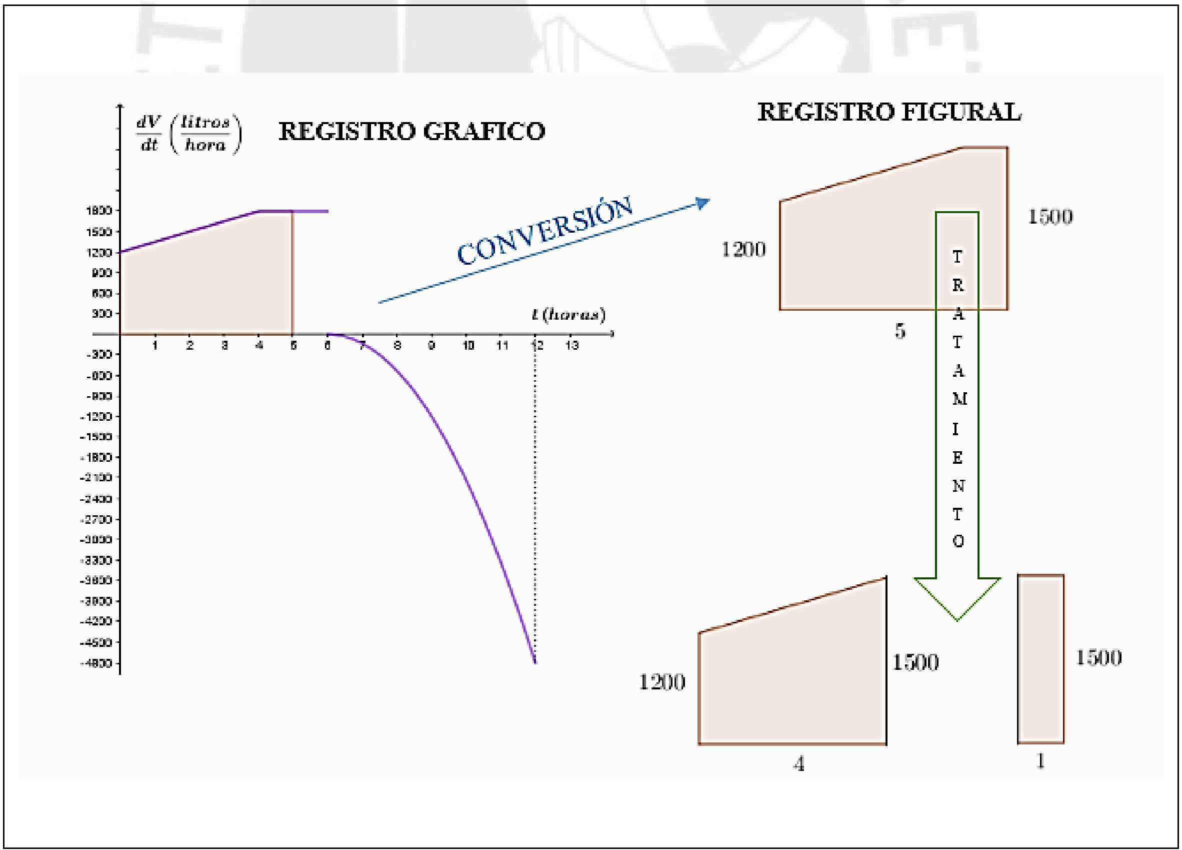


Figura 65. Acciones esperadas que realicen los estudiantes para dar solución al ítem b) de la primera pregunta de la actividad 2.

Para encontrar la medida de la superficie del polígono mencionado, los estudiantes reconfigurarían la región sombreada, el pentágono, tal como se muestra en la figura 65, posteriormente realizarían una conversión del registro algebraico al registro numérico con la cual el volumen acumulado al cabo de cinco horas es $\int_0^5 V'(t)dt = \left(\frac{1200+1800}{2}\right)4 + 1800(1)$, finalmente para obtener el valor pedido realizarán tratamientos en el registro numérico encontrando que el volumen asciende a 7800 litros. Suponemos que los estudiantes podrían llegar a la solución de estos ítems debido a que movilizarían sus conocimientos previos de cálculo integral y de geometría.

Para solucionar el **ítem c)**, esperamos que los estudiantes realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado como se presentó en la figura 63. Luego, para obtener la medida del volumen al cabo de nueve horas, cuya representación gráfica se muestra en la figura 66, consideramos que las parejas realicen la conversión de esta representación gráfica a una representación algebraica $\int_0^9 V'(t)dt$. Además, para calcular el valor de esa integral realizarán el siguiente tratamiento, $\int_0^9 V'(t)dt = \int_0^6 V'(t)dt + \int_6^9 V'(t)dt$, en el registro algebraico. Esperamos que esto se dé gracias a los conocimientos previos que tienen los estudiantes de integrales definidas.

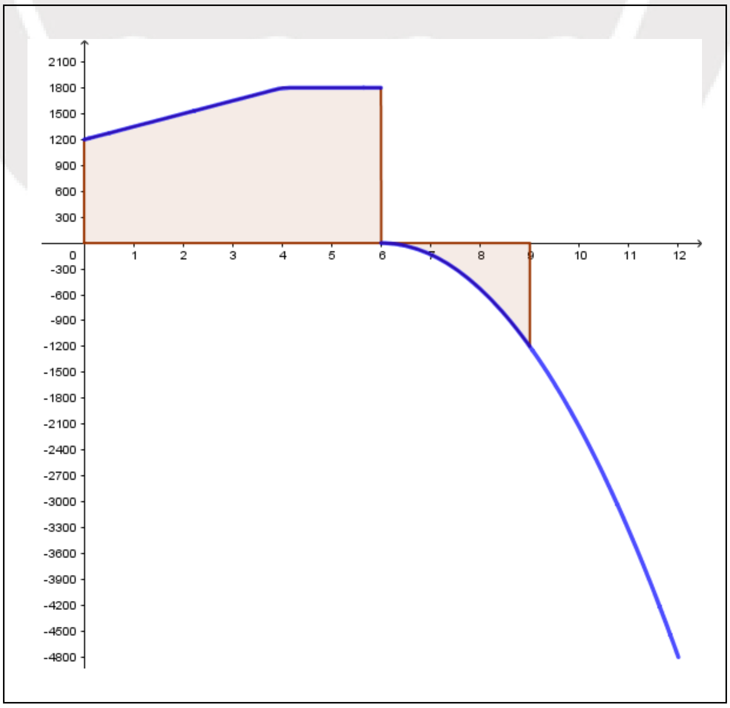


Figura 66. Representación gráfica del volumen acumulado al cabo de nueve horas.

Para encontrar la medida del volumen acumulado durante las primeras seis horas, los estudiantes procederán de modo similar que en los ítems a) y b) es decir, que realizarán la conversión de la representación del registro gráfico al figural, asociando la medida del volumen acumulado con la superficie de un pentágono irregular, luego para hallar la medida de la superficie reconfigurarán el pentágono en un trapecio y un rectángulo, tratamiento en el registro figural, posteriormente realizarán una conversión de esta última representación al registro numérico planteando que el volumen acumulado, en el tanque de pasteurización, al cabo de seis horas de iniciado el proceso es $\left(\frac{1200+1800}{2}\right)4 + 1800(2)$, finalmente para obtener el valor de este volumen realizarán tratamientos en el registro numérico encontrando que este volumen asciende a 9600 litros.

Para obtener el valor de la integral $\int_6^9 V'(t)dt$, la cual corresponde al volumen acumulado durante las siguientes tres horas, consideramos que los estudiantes sientan la necesidad de utilizar el GeoGebra debido a que no tienen los conocimientos previos para calcular dicho volumen. En esta etapa de la actividad se evidencia la aplicación de nuestra variable didáctica *comportamiento que tiene la función razón de cambio*

Posteriormente, para obtener el volumen acumulado, entre la sexta y novena hora, los estudiantes emplearán el comando ***Integral*** del software GeoGebra, esto debido a que cuentan con una computadora a su disposición además de sus conocimientos de este *software*, previamente deberán encontrar la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio del volumen acumulado durante el intervalo de tiempo analizado, sexta y novena hora.

Para que los estudiantes obtengan esta representación algebraica estos deberán realizar la conversión de la representación gráfica mostrada en el enunciado al registro de lengua natural, para luego realizar la conversión de esta última al registro algebraico, previamente realizando tratamientos en este último registro, tal como mostramos en la figura 67.

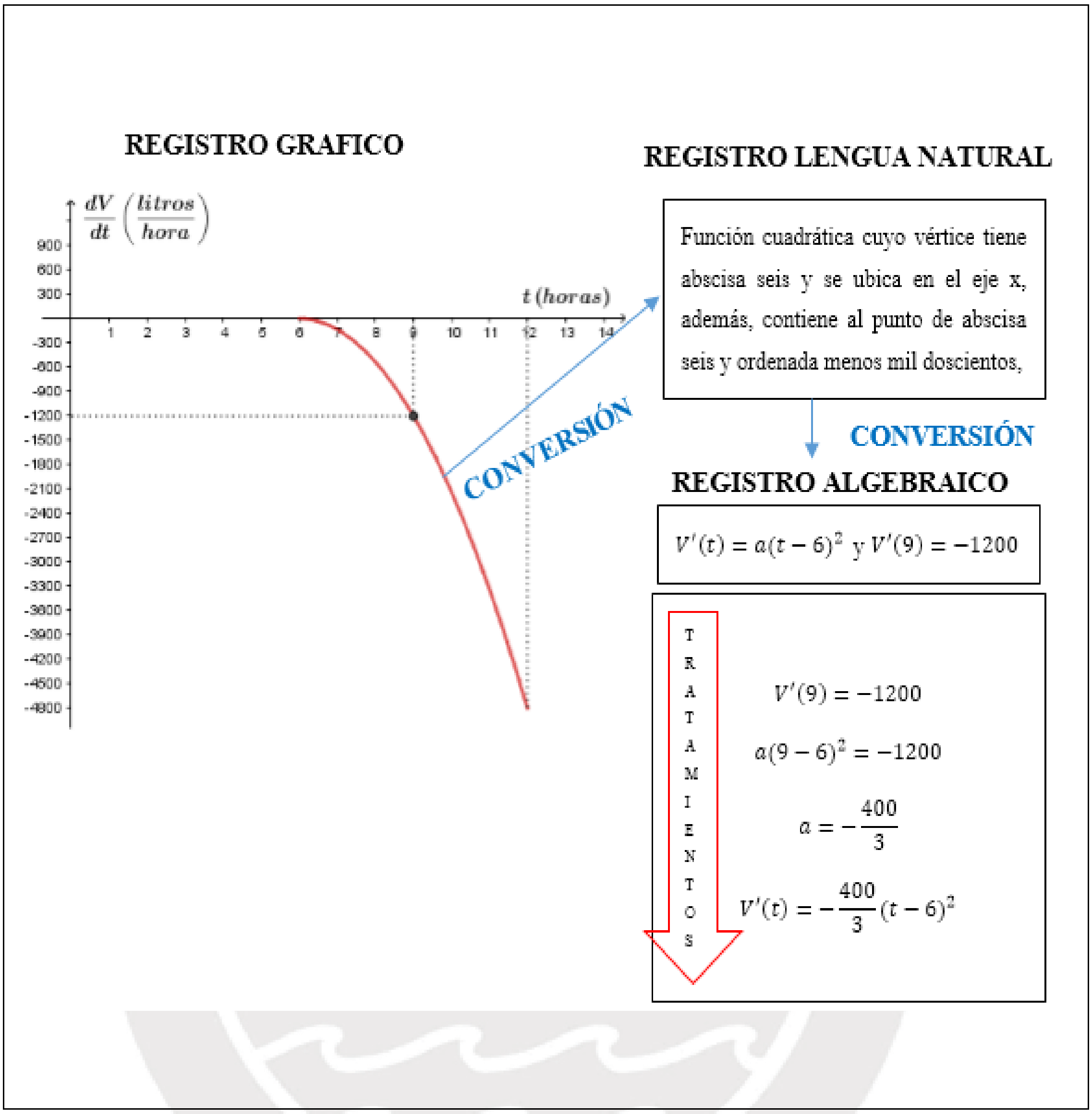


Figura 67. Conversiones y tratamientos que esperamos que realicen los estudiantes para obtener la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio.

Con la representación obtenida en el registro algebraico los estudiantes utilizarían el comando *Integral* del GeoGebra para obtener el volumen acumulado en el tanque en el intervalo de tiempo comprendido desde la sexta hasta la novena hora, para ello realizarían la conversión de la representación de la medida del volumen acumulado en el registro algebraico al registro gráfico CAS tal como se muestra en la figura 68.

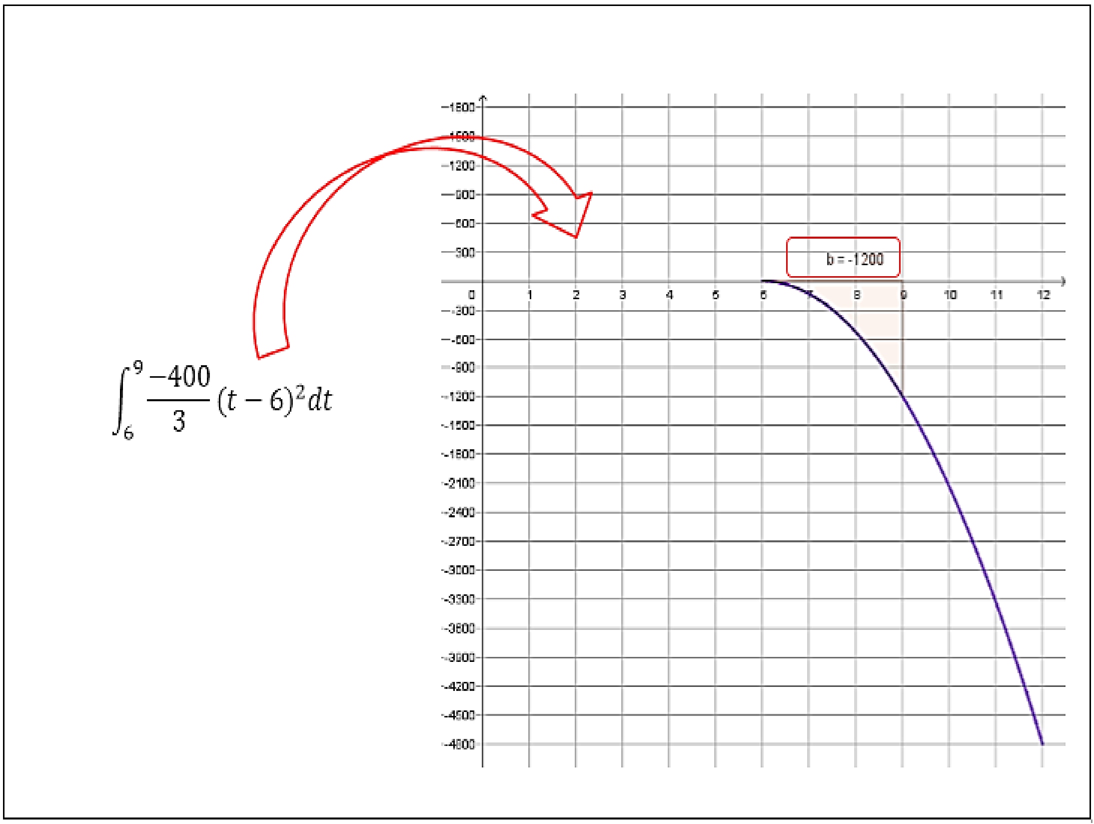


Figura 68. Conversión de la representación algebraica del volumen acumulado hacia una representación en el registro gráfico CAS.

Luego con el apoyo del GeoGebra los estudiantes obtendrán el valor de la integral definida el cual asciende a -1200. Por último, realizarán tratamientos en el registro numérico al igual que en los ítems a) y b) obteniendo que el valor del volumen acumulado de la mezcla en el tanque durante las nueve primeras horas asciende a 8400 litros.

Finalmente, para dar solución al ítem d) se espera que los estudiantes realicen las mismas transformaciones, conversiones y tratamientos, para obtener el volumen acumulado durante las primeras doce horas, es decir $\int_0^{12} V'(t)dt = \int_0^6 V'(t)dt + \int_6^{12} V'(t)dt$, obteniendo los siguientes valores $\int_0^6 V'(t)dt = 9600$ y $\int_6^{12} V'(t)dt = -9600$, este último con el uso del comando ***Integral***. Obteniendo así que la medida del volumen acumulado al cabo de doce horas asciende a 0 litros.

<u>Pregunta 2</u>

Para realizar la representación gráfica solicitada en la pregunta, esperamos que los estudiantes con la ayuda del GeoGebra obtengan los valores del volumen en intervalos de una hora, esto es para $t = 0, 1, 2 \ldots 12$. Luego esperamos que los valores sean organizados en una tabla y con ello realizar el esbozo pedido tal como se muestra en la figura 69.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\int_0^t V'(t)dt$	0	1275	2700	4275	6000	7800	9600	9555,56	9244,44	8400	6755,56	4044,44	0

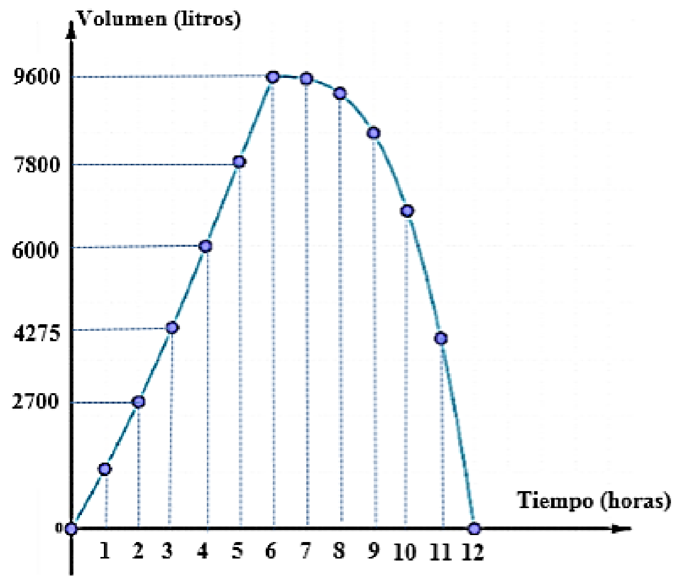


Figura 69. Representación del volumen en el registro gráfico por medio de la tabla.

Para obtener los valores presentados en la tabla mostrada en la figura 69, esperamos que las parejas realicen la coordinación de la representación del volumen acumulado tal como se muestra en la figura 63. Luego para obtener la medida del volumen en las horas mencionadas deberán emplear el comando *integral*, para lo cual necesitan la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio del volumen.

Para obtener la razón de cambio del volumen en el registro algebraico, esperamos que los estudiantes realicen las siguientes transformaciones, a partir de la representación gráfica presente en el enunciado, de la actividad 2, efectuarán una conversión hacia el registro en lengua natural, para luego realizar una conversión de esta última representación al registro algebraico. A continuación, mostraremos tal como se muestra en la figura 70.

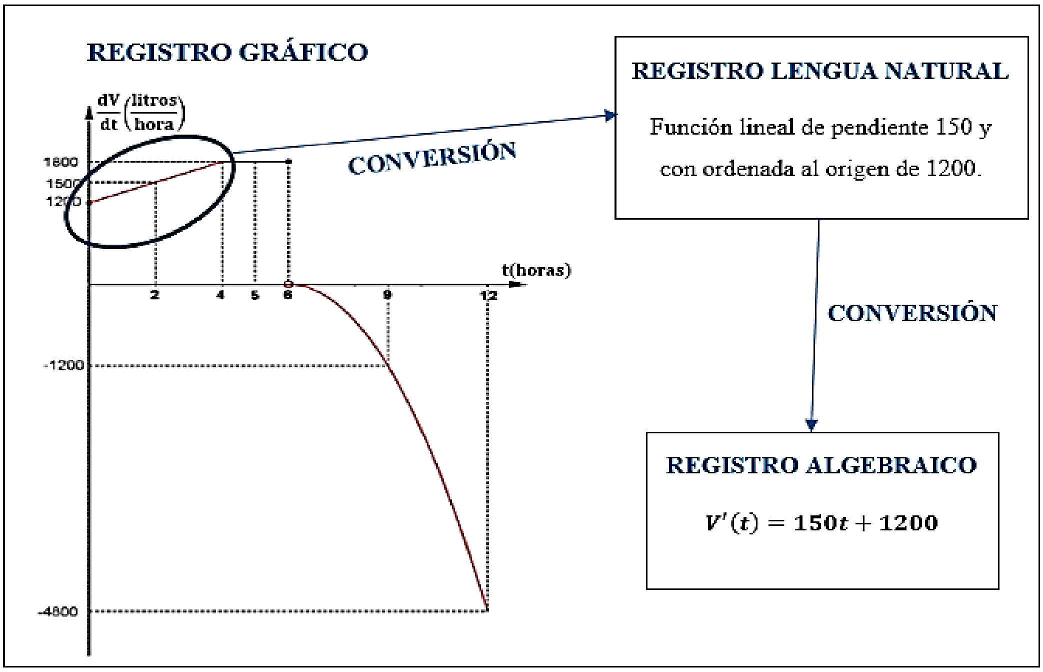


Figura 70. Conversiones realizadas a la representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico hacia una representación en el registro algebraico.

Para obtener las representaciones de las funciones, que modelan la razón de cambio del volumen, en el registro algebraico para horas mayores a cuatro, esperamos que los estudiantes procedan de manera similar a lo mostrado en la figura 70 y figura 67. Luego, la representación de la función que modela la razón de cambio del volumen es:

$$V'(t) = \begin{cases} 150t + 1200\,, & 0 < t < 4 \\ 1800, & 4 \leq t \leq 6 \\ -\dfrac{400}{3}(t-6)^2, & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

Posteriormente, con la representación obtenida los estudiantes emplearán el comando *integral* del GeoGebra y con ello obtener los valores organizados en la tabla presentada en la figura 69.

<u>Pregunta 3</u>

Pensamos *a priori* que, en esta pregunta, los estudiantes al abrir el archivo, presente en la computadora que tienen a su disposición, MODELO_APROXIMADO.ggb reconocerán que la representación, en el registro gráfico CAS, mostrada en la computadora modela el posible comportamiento del volumen acumulado de la mezcla de zumo de mango en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas debido a que se asemeja a la representación realizada en la pregunta 2. En este sentido, consideramos que los estudiantes puedan entender esta pregunta, debido a que la representación gráfica mostrada en el archivo modela correctamente el comportamiento del volumen acumulado, lo cual les permitirá relacionarla con el esbozo realizado en la pregunta anterior.

Una vez establecida la relación entre la representación mostrada en el archivo, registro CAS, con la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado, a medida que transcurren las horas, las parejas sólo deberán encontrar la manera de justificar la validez de la conjetura realizada. Suponemos que luego de intercambiar ideas y de reflexionar sobre ellas, los integrantes de las parejas establecerán los siguientes criterios.

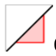
En primer lugar, los estudiantes optarían por encontrar la representación algebraica de la función que modela el volumen $V(t)$, para luego derivarla y así obtener la razón de cambio $V'(t)$, en el registro algebraico, y con esto poder comparar esta representación con la representación algebraica obtenida en la segunda pregunta y así discernir sobre la validez del modelo presentado por el departamento de producción.

Esperamos, que los estudiantes infieran que este procedimiento no se podrá llevar a cabo debido a que no cuentan con la información necesaria para realizar la conversión de la representación gráfica, en el registro CAS, mostrada hacia una representación en el registro algebraico debido a que no se establecen los comportamientos (lineal, cuadrático, etc.) de las funciones que modelan el volumen. Con lo mencionado anteriormente mostramos la acción de la variable didáctica *comportamiento de la función de manera explícita en la representación gráfica presentada en el archivo* MODELO_APROXIMADO.ggb, además, mostramos el valor que adquiere la variable didáctica en este momento, el cual es *implícito*, debido a que no se puede precisar el comportamiento que presenta la función que modela el volumen.

También se muestra la acción de la otra variable didáctica, *Vista algebraica en el GeoGebra,* la cual adquiere el valor de *oculta*. Señalamos la presencia de esta variable didáctica debido a que, si no estuviese oculta, los estudiantes con sus conocimientos del software podrían obtener la representación algebraica correspondiente a la representación gráfica mostrada en el archivo y con ella simplemente realizarían el proceso de derivación, y con la representación obtenida solo bastará compararla con la encontrada en la segunda pregunta de la actividad.

Debido a que los estudiantes no podrán obtener la representación algebraica de la función que modela el volumen acumulado, esperamos que el criterio a seguir por las parejas sea obtener derivada, la razón de cambio, de la representación del volumen acumulado en el registro CAS de manera gráfica, para lo cual movilizarán sus conocimientos previos sobre derivadas, por ejemplo, la derivada de una función en un punto dado coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Con lo mencionado en el segundo criterio, esperamos que los estudiantes obtengan el valor de la razón de cambio en puntos donde se conoce el valor de dicha razón, por ejemplo, en la segunda, cuarta, quinta, sexta, novena y última hora. Para llevar a cabo estas acciones, en el registro gráfico CAS, las parejas usarán el comando *Tangente (<Punto>, <Función>)*, el cual graficaría la representación de la recta tangente sobre la representación gráfica de la función, que modela el volumen, en el registro gráfico CAS a una hora determinada.

Una vez obtenida la representación gráfica de la recta tangente a una determinada hora, en el registro CAS, esperamos que los estudiantes empleen el comando pendiente  de la barra de herramientas para obtener el valor la pendiente a la representación de la recta tangente y con esto encontrar el valor de la razón de cambio en la hora considerada. Las acciones que esperemos que realicen los estudiantes, en el segundo criterio, las mostraremos en la figura 71 cuando el valor de *t* es 2.

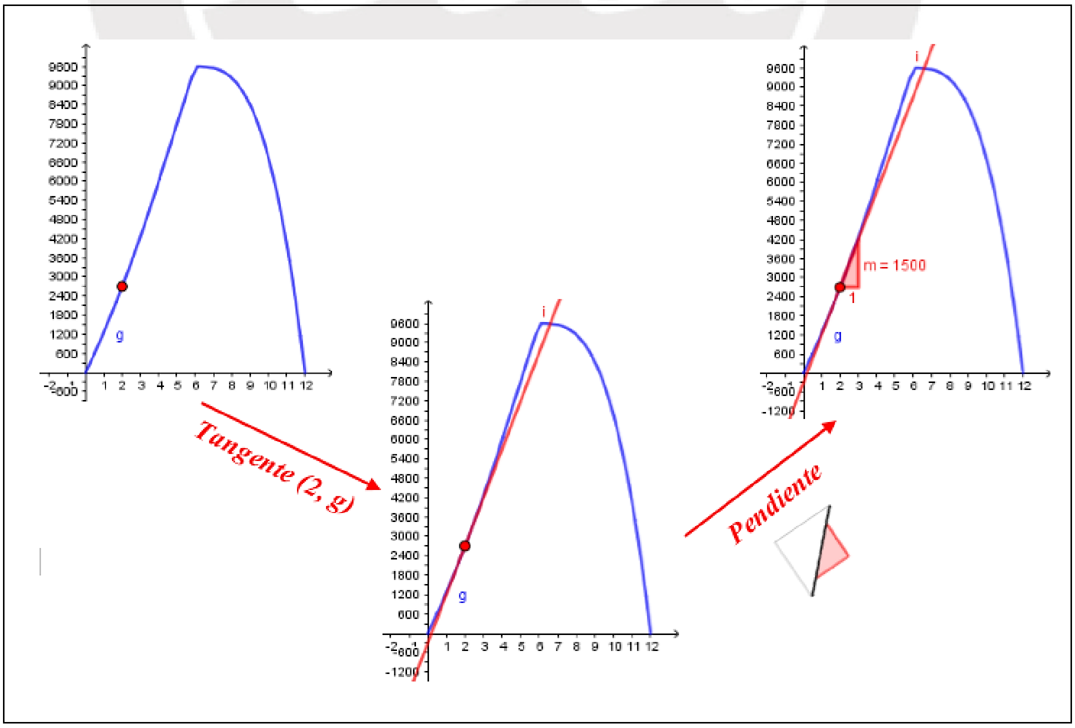


Figura 71. Acciones esperadas a realizar por los estudiantes para obtener la razón de cambio en el registro gráfico CAS.

Podemos observar en la figura 71 el uso del GeoGebra para realizar ciertas acciones en el registro gráfico CAS, en esta podemos notar que el software permite obtener ciertos resultados de manera inmediata por lo que el GeoGebra se convierte en una herramienta que acelera los cálculos, además de permitir la formación de conjeturas en los estudiantes.

Luego de obtener los valores de las razones de cambio en el registro gráfico CAS, los estudiantes compararían estos valores con los presentados inicialmente con los cuales concluirían que la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado presentado por el departamento de producción representa en realidad el comportamiento del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

Al finalizar esta pregunta esperamos que los estudiantes puedan ir formando conjeturas relacionadas a la primera parte del TFC, es decir, que puedan percibir la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t V'(T)dT = V'(t)$$

La cual muestra que los procesos de derivación e integración son inversos, además, de percibir que dicha relación no se establece en la sexta hora, instante en que la función $V'(t)$ no es continua. Con esto último esperamos que los estudiantes logren realizar conjeturas relacionadas con las condiciones que debe cumplir la función integrando para poder utilizar el TFC

<u>**Pregunta 4**</u>

Con respecto a esta pregunta esperamos que las parejas identifiquen la condición inicial planteada en el enunciado, el tanque contiene inicialmente un volumen de 1300 litros de agua que permitirá disolver la mezcla, luego de realizar la lectura correspondiente del mismo, así como discutir las ideas que se presenta el texto.

Luego esperamos que los estudiantes representen en lengua natural el volumen disuelto en el tanque de pasteurizado, señalando ahora que “el volumen disuelto es igual al volumen inicial más el volumen de la mezcla sin disolver”, seguidamente esperamos que realicen una conversión de esta representación a una representación algebraica, es decir, que logren plantear:

$$V_{disuelto}(t) = 1300 + V_{Sin\ disolver}(t)$$

$$V_{disuelto}(t) = 1300 + \int_0^t V'(T)dT$$

Luego de realizar esta representación, esperamos que realicen una conversión de esta última representación al registro gráfico, realizando una traslación la cual corresponde a una modificación posicional según Ingar (2014), tratamiento en el registro gráfico, a la representación obtenida en la pregunta 2. Estas acciones, conversiones y tratamientos, las mostramos en la figura 72.

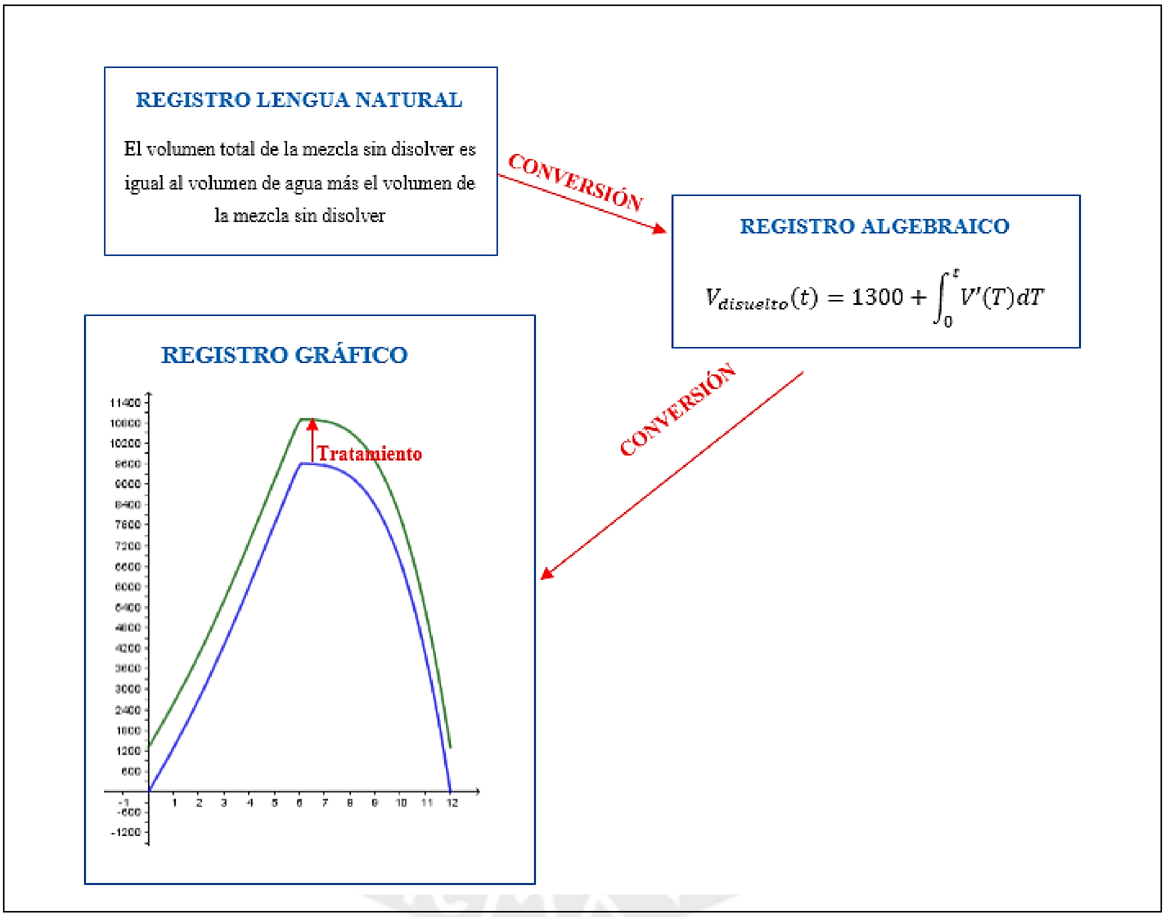


Figura 72. Conversiones y tratamientos que realizarían los estudiantes al resolver la pregunta 4.

Debemos mencionar que las parejas también podrían utilizar la representación gráfica en el registro CAS planteada en la pregunta 3 para resolver la pregunta, puesto que esta modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas. Esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro en legua natural hacia una representación algebraica al igual que lo señalado anteriormente, luego realizarían una conversión hacia una representación en el registro CAS empleando la sentencia $1300 + g$, donde g representa el volumen acumulado sin disolver.

Al finalizar esta pregunta esperamos que los estudiantes puedan ir formando conjeturas relacionadas a la segunda parte del TFC, es decir, que puedan percibir la siguiente relación:

$$\int_0^t V'(T)dT = V(t) - V(0)$$

A partir de la siguiente relación:

$$V_{disuelto}(t) = 1300 + \int_0^t V'(T)dT$$

$$V_{disuelto}(t) = V(0) + \int_0^t V'(T)dT$$

$$\int_0^t V'(T)dT = V_{disuelto}(t) - V(0)$$

Esta última relación muestra la manera de calcular una integral definida a partir de una primitiva o antiderivada, $V'(t)$, lo cual es la esencia del TFC.

A continuación, presentaremos el producto realizado por las parejas al dar solución a la segunda actividad de la situación problema.

Análisis a *posteriori* de la actividad 2

Pareja 1

Esta actividad se realizó en una sala de cómputo, debemos mencionar que los estudiantes contaron con una computadora a su disposición en todo momento. Al iniciar la actividad la pareja leyó el enunciado que se planteó, luego intercambiaron ideas con la finalidad de obtener conclusiones. Entre las cuales identificaron las variables presentes en problema como el tiempo y la razón de cambio del volumen las cuales fueron representadas en el registro algebraico como t y V', además, representaron el área bajo la curva como el volumen acumulado de la mezcla. Las acciones mencionadas se pueden observar en la figura 73.

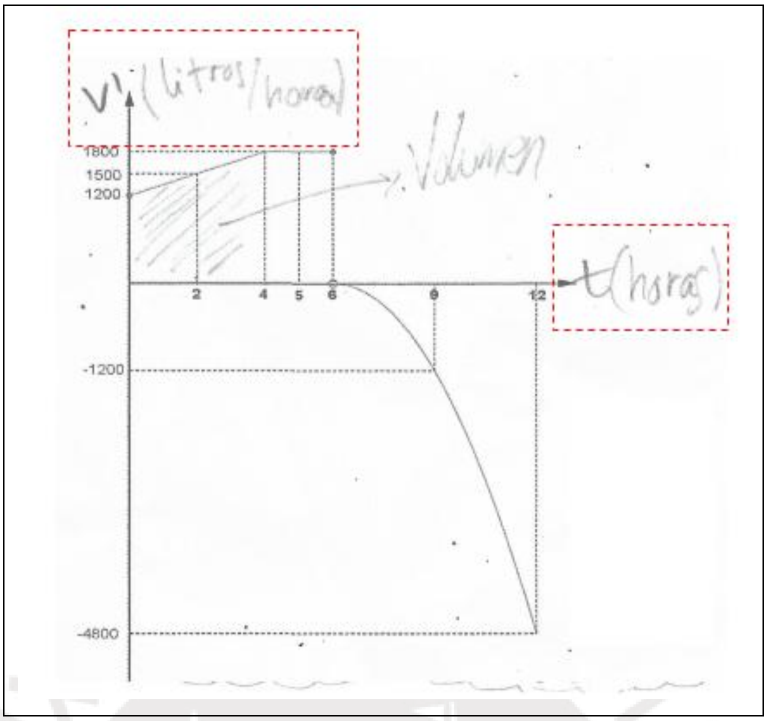


Figura 73. Representaciones en el registro algebraico de las variables, involucradas en el enunciado, realizadas por la pareja 1.

Debemos mencionar que las acciones mostradas en la figura 73 se realizaron sin problemas debido a que estas fueron realizadas en la primera actividad.

Pregunta 1

Para calcular la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en las horas pedidas en los ítems a), b), c) y d) los estudiantes realizaron la conversión de la representación de la función que modela la razón de cambio en el registro gráfico, presentada en el enunciado de la actividad, hacia una representación en el registro algebraico, la cual mostramos en la figura 74, con el propósito de obtener la representación de dicha función en el registro gráfico CAS.

$$p(x) = \begin{cases} 150\,x + 1200 \\ 1800 \\ -(x-6)^2 \cdot \dfrac{400}{3} \end{cases}$$

Figura 74. Representación algebraica de la razón de cambio del volumen realizada por la pareja 1.

En la figura 74, presentamos la representación algebraica mostrada en la vista algebraica del GeoGebra; debemos mencionar que los estudiantes no realizaron dicha representación en la ficha de actividades, a excepción de la representación algebraica de la función cuadrática, cuya representación mostramos en la figura 75**.**

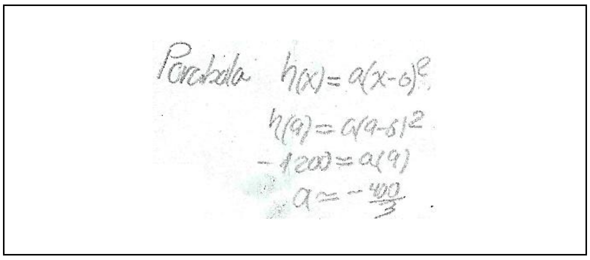


Figura 75. Representación algebraica, realizada por la pareja 1, de la función que modela la razón de cambio del volumen a partir de la sexta hora.

La figura 75 muestra las acciones, tratamientos, realizadas por la pareja para obtener la representación $h(x) = \frac{-400}{3}(x-6)^2$ en el registro algebraico, con respecto a las representaciones algebraicas de las otras funciones, lineal y la constante, presentes en la figura 74, fueron son obtenidas de manera directa por los estudiantes, esto se manifiesta cuando los estudiantes ingresan dichas representaciones en la barra de entrada.

Con el producto realizado por los estudiantes podemos plantear que lograron realizar la coordinación de la representación razón de cambio en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS como lo habíamos supuesto de manera *a priori*. A continuación, mostramos la representación de la razón de cambio, en el registro gráfico CAS, realizado por los estudiantes en la figura 76.

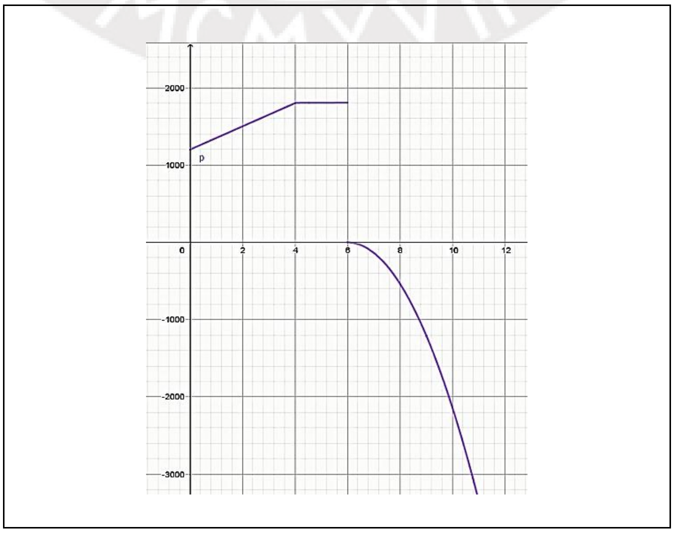


Figura 76. Representación gráfica, en el registro gráfico CAS, realizada por la pareja 1.

Para realizar la representación mostrada en la figura 76 los estudiantes emplearon el comando *Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)* del GeoGebra ingresando la sentencia mostrada en la figura 77.

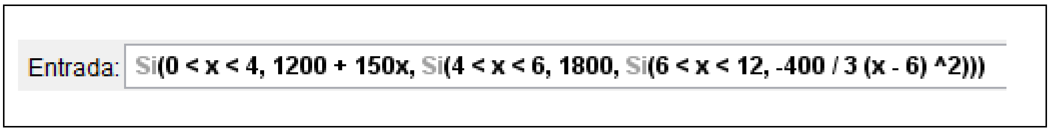


Figura 77. Sintaxis empleada por la pareja 1 para representar la función que modela la razón de cambio en el registro gráfico CAS.

Con lo realizado por los estudiantes concluimos que los estudiantes que conforman la primera pareja tienen conocimientos de los comandos del GeoGebra, como lo habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*.

Luego, para obtener la medida de los volúmenes en las horas solicitadas en la primera pregunta, la pareja empleo el comando *integral* del GeoGebra. Lo cual no consideramos en nuestro análisis *a priori*, puesto que pensamos que utilizarían el software sólo para dar solución a los dos últimos ítems debido a que no podrían resolverlos por no contar con los conocimientos necesarios. A continuación, mostramos en la figura 78 el resultado de la ejecución del comando integral con el que obtuvieron la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en la quinta hora.

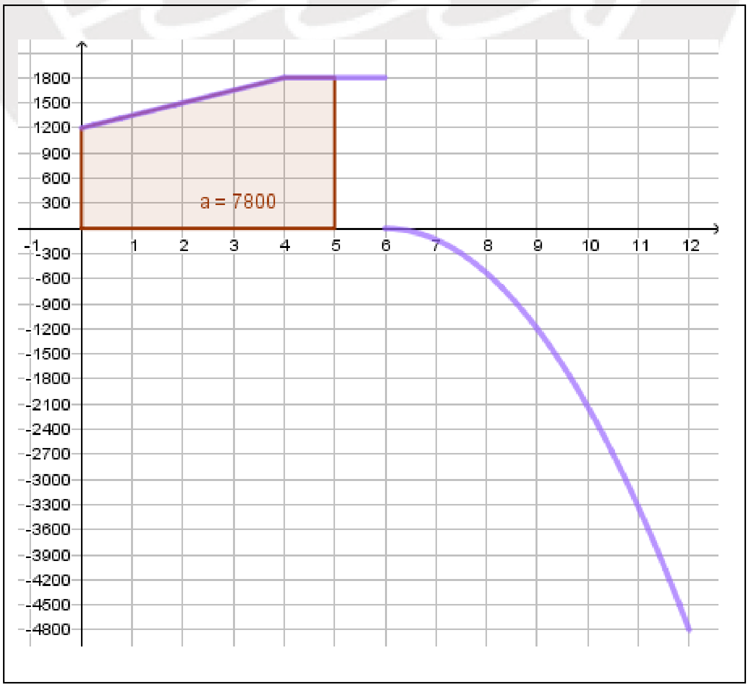


Figura 78. Representación del volumen acumulado realizado por la segunda pareja para dar solución al ítem b).

La figura 78 muestra la representación gráfica del volumen acumulado, en el registro gráfico CAS, luego de cinco horas de iniciado el proceso de pasteurizado. Además, en dicha representación también se puede observar la medida de dicho volumen; para llevar a cabo esta representación los estudiantes emplearon el comando integral del GeoGebra el cual se muestra en la figura 79.

Figura 79. Representación de la sintaxis del comando integral realizado por la primera pareja.

A continuación, mostraremos en la figura 80 las respuestas obtenidas por la pareja en cada uno de los ítems.

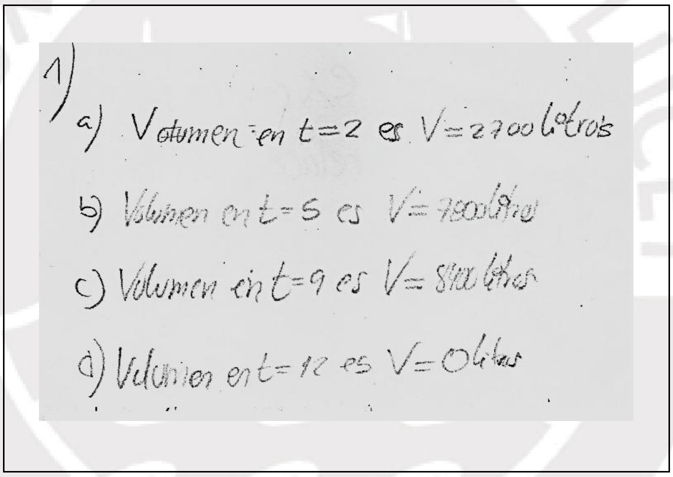


Figura 80. El volumen acumulado, obtenido por la pareja 1, en las horas pedidas en la primera pregunta.

En la figura 80, podemos observar que esta pareja logró resolver la pregunta tal como lo habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*, movilizando sus conocimientos previos de integrales definidas y de algunos comandos del GeoGebra. Lo obtenido por los estudiantes muestra que lograron realizar las conversiones de la representación de la función razón de cambio del registro gráfico hacia una en el registro de lengua natural, para luego realizar una conversión de esta última representación a una en el registro gráfico CAS.

También, se puede observar que esta pareja logró representar el volumen acumulado en los registros lengua natural, gráfico CAS sin pasar por el registro numérico y figural, como lo habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*.

Esto evidencia que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación, del volumen acumulado en los registros gráfico, lengua natural, gráfico CAS. De manera similar, con el objeto matemático función razón de cambio. Con esto podemos afirmar que los estudiantes alcanzaron la comprensión de los objetos matemáticos función razón de cambio e integral definida debido a que realizaron la coordinación de una representación en al menos dos registros como lo afirma Duval (2003). A continuación, presentaremos las acciones realizadas por los estudiantes para resolver la segunda pregunta.

Pregunta 2

Para realizar el esbozo de la representación gráfica del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, la dupla calculó la medida del volumen acumulado en distintas horas; ellos utilizaron el mismo procedimiento que en la primera pregunta con la única diferencia que calcularon la medida del volumen para una mayor cantidad de horas para ello emplearon un deslizador que fue denominado como a, representa al límite superior de la integral, este controla el valor de las horas, empezando en cero y terminando en 12 con incrementos de 0.02 horas. A continuación, presentamos en la figura 81 el producto realizado por los estudiantes.

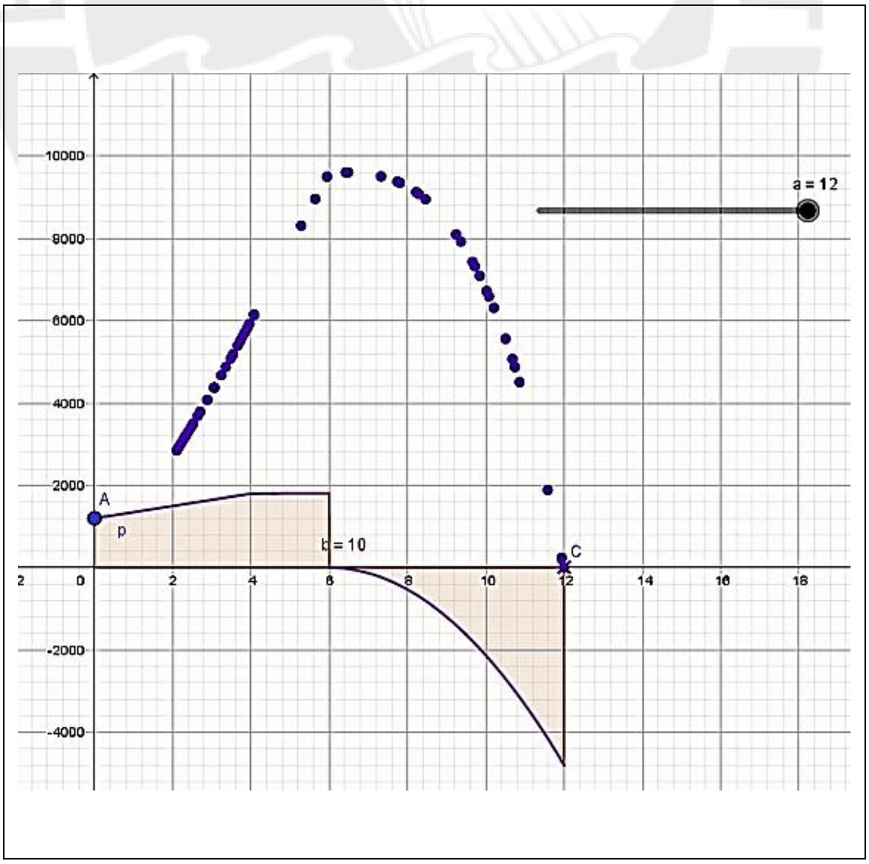


Figura 81. Representación gráfica, en el registro gráfico CAS, realizada por la pareja 1.

Debemos comentar que para representar gráficamente los puntos, en el registro gráfico CAS, mostrados en la figura 81 los estudiantes realizaron la conversión de la representación algebraica (a, b) hacia la representación gráfica mencionada, donde b representa el valor de la *integral (p, 0, a)* siendo p la representación algebraica de la función que modela la razón de cambio. Luego para que se representen todos los puntos al manipular el deslizador los estudiantes activaron la herramienta *rastro* del GeoGebra obteniendo la representación gráfica deseada.

Posteriormente a lo realizado con el GeoGebra los estudiantes realizaron el esbozo de la función que modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas en el registro gráfico, a lápiz y papel, como se muestra en la figura 82.

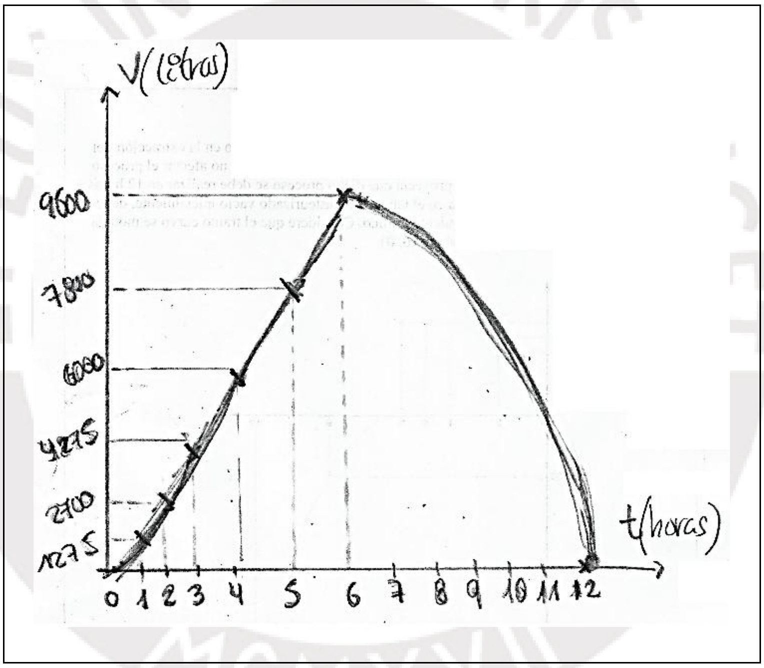


Figura 82. Representación gráfica, realizada por la primera pareja, de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

La figura 82 muestra el esbozo realizado por los estudiantes, con lo cual se resuelve de manera satisfactoria la segunda pregunta de la actividad tal como lo habíamos supuesto en nuestro *análisis a priori*, sin embargo, en el análisis mencionado consideramos el uso de una tabla donde se organizaban las medidas del volumen en diferentes horas, algo que no realizaron los estudiantes, que no resulto ser impedimento para realizar el esbozo debido a que los valores mencionados estaban a su alcance, gracias al GeoGebra.

También debemos mencionar que en el análisis *a priori* realizado no se consideró el uso de las herramientas, deslizador y el rastro, del software lo cual fue de gran ayuda para realizar un esbozo aproximado de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas. Luego, al manipular el deslizador se están realizando tratamientos, en el registro grafico CAS tal como lo afirma Ingar (2014), esta se da cuando los estudiantes realizan la traslación de la representación gráfica de la recta vertical que representa el límite derecho de la región sombreada, que viene a ser el volumen acumulado en el tanque de pasteurizado.

<u>Pregunta 3</u>

Para verificar que el modelo presentado por el departamento de producción modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes intercambiaron y discutieron ideas con la intención de encontrar un camino que los guíe a la solución de la pregunta, obteniendo así un criterio que les permita justificar que la representación gráfica mostrada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb modela el comportamiento del volumen a medida que transcurren las horas.

El criterio planteado por la pareja consiste en obtener la derivada de la función presentada en el archivo, para ello deben obtener la representación algebraica de esta para luego derivarla y compararla con la representación algebraica obtenida en la pregunta 1, logrando así cumplir los requerimientos señalados. Este criterio se muestra cuando la pareja realiza el siguiente comentario "derivamos la función que está en el archivo y la comparamos con la que dan al inicio".

Los estudiantes buscaron un criterio que les permitiese justificar que la representación gráfica, en el registro gráfico CAS, mostrada en el archivo modela la razón de cambio del volumen acumulado en el tanque de pasteurizado debido a que esta tiene mucha similitud a la representación gráfica realizada en la segunda pregunta.

Para llevar a cabo la acción planteada, criterio, la estudiante Camila comenta "para obtener la ecuación de la función que modela el volumen habilitemos la vista algebraica del GeoGebra" con la cual los estudiantes encuentran la representación algebraica de dicha función la cual mostramos en la figura 83.

Vista Algebraica

Función

$$g(x) = \begin{cases} 1200\,x + 75\,x^2 & : 0 < x < 4 \\ 1800\,x - 1200 & : (4 < x < 6) \wedge (\neg(0 < x < 4)) \\ 9600 - \dfrac{400}{9}\,(x - 6)^3 & : (6 < x < 12) \wedge ((\neg(0 < x < 4)) \wedge (\neg(4 < x < 6))) \end{cases}$$

Figura 83. Representación algebraica, obtenida por la primera pareja, de la función presentada por el departamento de producción con el uso del GeoGebra.

En la figura 83, mostramos la representación algebraica de la función que modela la función presentada por el departamento de producción, ahora los estudiantes emplean el comando *Derivada* cuya sintaxis es *Derivada (función)*, obteniendo la representación algebraica de la derivada de la función presentada por el departamento de producción, la cual mostramos en la figura 84**.**

$$g'(x) = \begin{cases} 1200 + 150\,x & : 0 < x < 4 \\ 1800 & : (4 < x < 6) \wedge (\neg(0 < x < 4)) \\ -\dfrac{400}{3}\,(x - 6)^2 & : (6 < x < 12) \wedge ((\neg(0 < x < 4)) \wedge (\neg(4 < x < 6))) \end{cases}$$

Figura 84. Representación algebraica, obtenida por la primera pareja, de la derivada de la función presentada por el departamento de producción con el uso del GeoGebra.

Cuando los estudiantes obtuvieron la representación mostrada en la figura 84, procedieron a comparar esta representación con la representación que obtuvieron en la primera pregunta la cual mostramos en la figura 74, logrando concluir que la representación gráfica mostrada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb, cumple los requerimientos solicitados por el ingeniero. Esta conclusión la realizaron luego de comparar las representaciones mencionadas en el registro algebraico, también compararon dichas representaciones en el registro gráfico, presentado en el enunciado, y en el registro grafico CAS, la cual se obtuvo con el GeoGebra.

A continuación, presentamos en la figura 85 la representación gráfica de la derivada de la función presentada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb en el registro gráfico CAS.

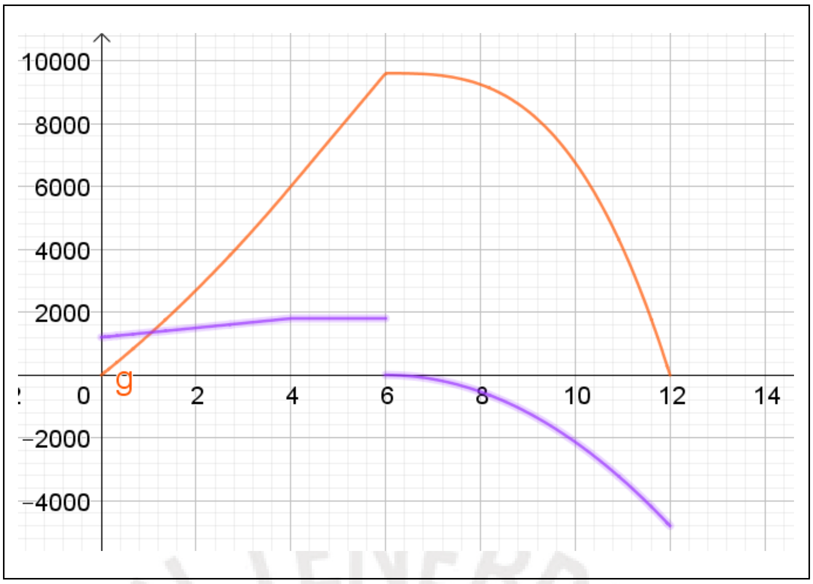


Figura 85. Representación gráfica, obtenida por la primera pareja, de la derivada de la función presentada por el departamento de producción en el registro gráfico CAS.

La pregunta 3 llegó a ser resuelta por los estudiantes obteniendo la representación algebraica y gráfica, en el registro CAS, de la derivada de la función presentada en el archivo, las cuales fueron comparadas con la representación algebraica de la función razón de cambio obtenida en la primera pregunta y con la representación gráfica, mostrada en el enunciado. El modo seguido por los estudiantes corresponde al segundo criterio que habíamos supuesto, en nuestro análisis *a priori*. Debemos mencionar que la pareja no pensó en el primer criterio considerado por nosotros.

El procedimiento seguido por los estudiantes para justificar esto fue el primer criterio considerado en nuestro análisis *a priori*. Al no poder identificar el tipo de funciones que se presentaban en el archivo, MODELO_APROXIMADO.ggb, la pareja optó por activar la vista algebraica con la finalidad de obtener la representación algebraica de la función presentada por el departamento de producción y con ella obtener la derivada de la misma la cual les permitió dar la solución al ejercicio. Este procedimiento se pudo realizar debido a los conocimientos que poseen del GeoGebra.

Debemos mencionar que los estudiantes realizaron conjeturas las cuales se formaron al resolver la pregunta 3, entre ellas resalta lo comentado por la estudiante Camila "la integral de la derivada es el volumen", el cual es la esencia del TFC. El comentario realizado por la estudiante muestra una característica de experimentar con una situación problema, la intención de enseñar no está implícita, pero fue diseñada con el objetivo de poner en juego el objeto matemático de estudio que se desea explorar, Almoloud (2017).

Pregunta 4

Luego de leer detenidamente la pregunta, los estudiantes establecieron lo siguiente, “para encontrar el volumen disuelto hay que sumarle a la mezcla inicial los 1300 litros de agua porque el tanque al inicio no está vació”, lo cual muestra que para obtener el volumen disuelto de la mezcla se debe considerar los 1300 litros de agua que había inicialmente.

Luego, para dar solución a esta pregunta los estudiantes realizaron la conversión de la representación obtenida en el registro lengua natural a una representación algebraica la cual mostramos en la figura 86.

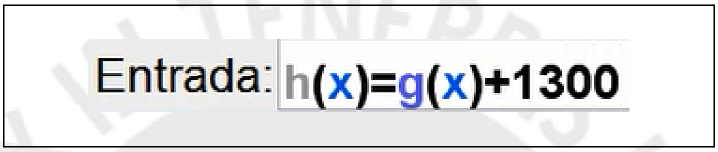


Figura 86. Representación algebraica, realizada por la primera pareja, del volumen disuelto.

Con la representación obtenida en la figura 86 se realizó una conversión de esta última a una representación gráfica en el registro gráfico CAS, la cual mostramos en la figura 87.

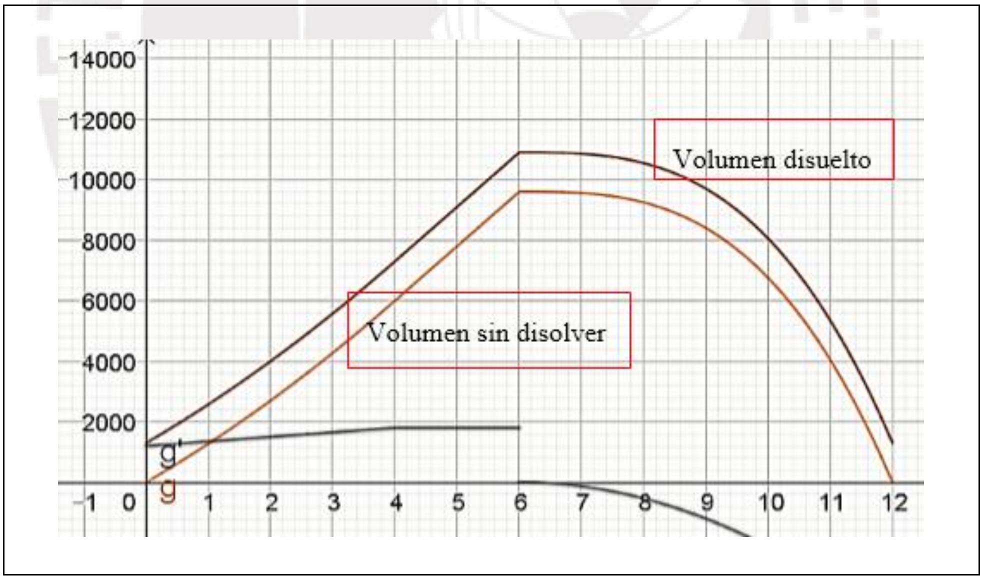


Figura 87. Representación gráfica, realizada por la primera pareja, del volumen disuelto en el registro gráfico CAS.

En la figura 87, se muestra un tratamiento realizado en el registro gráfico CAS, este corresponde a una traslación, la cual viene a ser una modificación posicional como lo afirma Ingar (2014). Las acciones realizadas por los estudiantes dan solución a esta pregunta, además estos procedimientos fueron los considerados en nuestro análisis *a priori*.

Pareja 2

Esta actividad se realizó en una sala de cómputo, cada pareja contaba con una computadora a su disposición. Al inicio de esta actividad las parejas leyeron el enunciado que se planteó, intercambiaron ideas, identificaron las variables presentes en problema como el tiempo y la razón de cambio del volumen las cuales fueron representadas en el registro algebraico como t y $V'(t)$, donde esta última también fue representada por $\frac{dV}{dt}$ tal como se muestra en la figura 88.

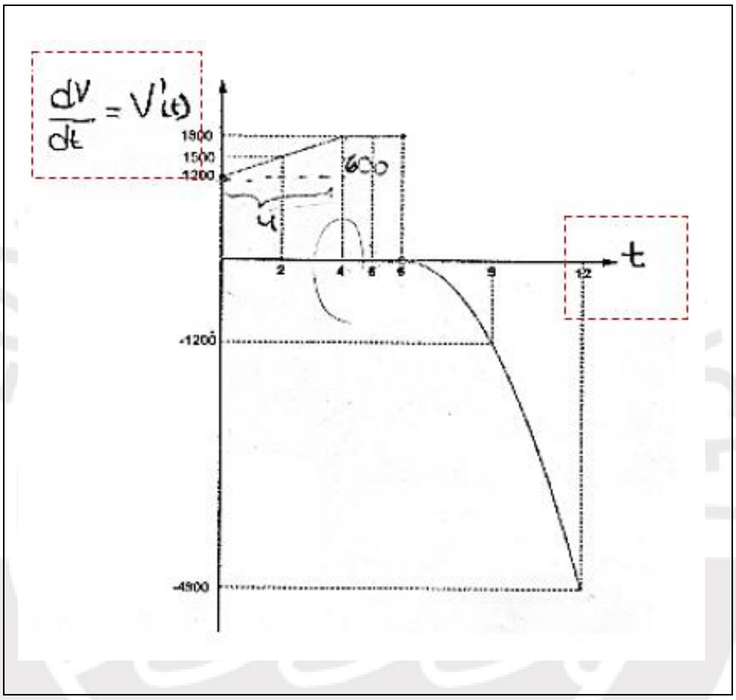


Figura 88. Representaciones en el registro algebraico de las variables, involucradas en el enunciado, realizadas por la pareja 2.

Con las acciones mostradas la figura 88 los estudiantes plantearon a partir de la representación gráfica, que el área bajo la curva corresponde al volumen acumulado en el tanque de pasteurizado, lo cual se da cuando la pareja afirma “este problema es similar al anterior, solo cambia la forma de la gráfica”.

<u>Pregunta 1</u>

Para obtener la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en los distintos tiempos los estudiantes realizaron la conversión de la representación de la razón de cambio del registro gráfico, mostrado en el enunciado, hacia una representación algebraica, la cual mostramos en la figura 89, con la intención de representar la función razón de cambio en el registro gráfico CAS. Lo cual se dio cuando realizaron la conversión de la representación algebraica, de la razón de cambio, hacia el registro gráfico CAS.

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} 150x + 1200, & 0 < x \quad 4 \\ 0x + 1800, & 4 \leq x \leq 6 \\ -\frac{400}{3} \cdot (6-x)^2, & 6 < x \leq 12 \end{cases}$$

Figura 89. Representación algebraica de la razón de cambio del volumen a medida que transcurren las horas realizada por la pareja 2.

Para obtener la representación mostrada en la figura 89, los estudiantes identificaron que la función que modela la razón de cambio corresponde a una función con dominio partido, cuyas componentes son funciones lineales y una cuadrática. Esto se puede evidenciar cuando Joel afirma: “la función presentada es la composición de tres funciones, dos lineales y parábola”. Si bien la función razón de cambio no es una composición de funciones, la intención de Joel fue transmitir que esta era la unión de tres funciones dos lineales y una cuadrática.

Debemos mencionar que los estudiantes no presentaron ninguna dificultad al realizar la conversión de la representación de la función razón de cambio del registro gráfico, presentado en el enunciado, al algebraico, previamente transitando por el registro en lengua natural, lo cual se evidencia cuando el estudiante Joel señala los tipos de funciones, lineal y cuadrática además de algunos elementos como la pendiente, el punto de paso para las lineales, el vértice de la función cuadrática y el punto de paso de esta función.

Con esto podemos plantear que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación razón de cambio en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS como lo habíamos supuesto de manera a *priori*. A continuación, mostramos la representación de la razón de cambio, en el registro gráfico CAS, realizado por los estudiantes en la figura 90.

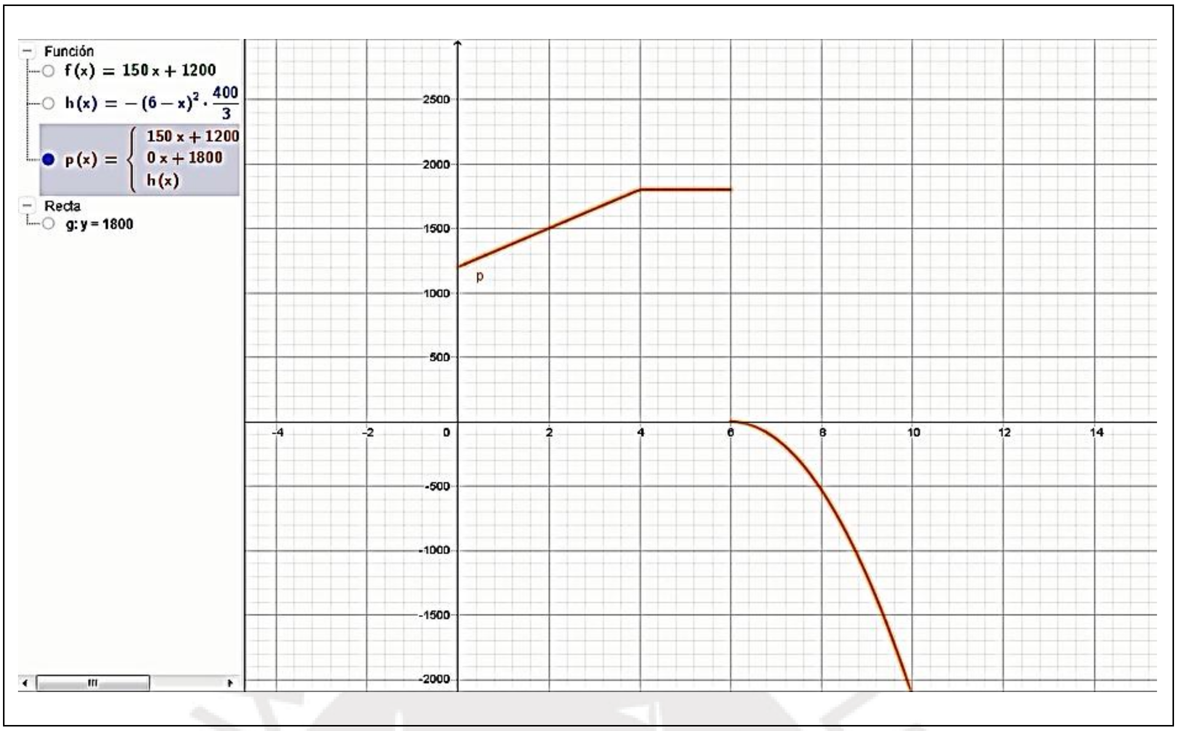


Figura 90. Representación de la razón de cambio del volumen en el registro gráfico CAS.

Para realizar la representación mostrada en la figura 90, los estudiantes emplearon el comando *Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>)* del GeoGebra empleando la sintaxis que mostramos en la figura 91.

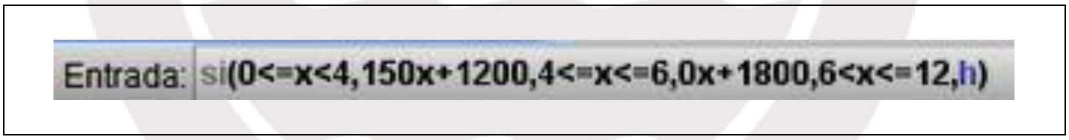


Figura 91. Sintaxis empleada por la pareja 2 para representar la función que modela la razón de cambio en el registro gráfico CAS.

La función *h* definida por los estudiantes modela la razón de cambio durante la sexta y doceava hora, esta sigue un comportamiento cuadrático como se muestra en la **figura 92** y la función *p* representa la función que modela la razón de cambio en todo su dominio.

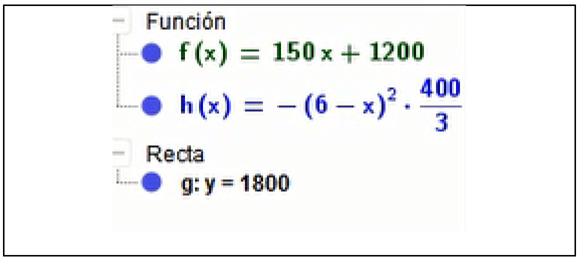


Figura 92. Representación algebraica de la función h, mediada con el GeoGebra, realizada por la pareja 2

Podemos observar que los estudiantes que conforman la pareja 2 tienen conocimientos de los comandos del GeoGebra tal como lo habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*.

Para obtener la medida de los volúmenes en las horas solicitadas, en cada ítem de la pregunta, los estudiantes utilizaron el comando *integral* del GeoGebra. Lo cual no habíamos previsto en nuestro análisis *a priori*, puesto que solo consideramos que emplearían el software para resolver los ítems c) y d) debido a que no contaban con los conocimientos necesarios para realizar dicho procedimiento. En seguida, mostramos en la figura 93, el resultado de la ejecución del comando integral con el que obtuvieron la medida del volumen acumulado, en el tanque de pasteurizado, en la segunda hora.

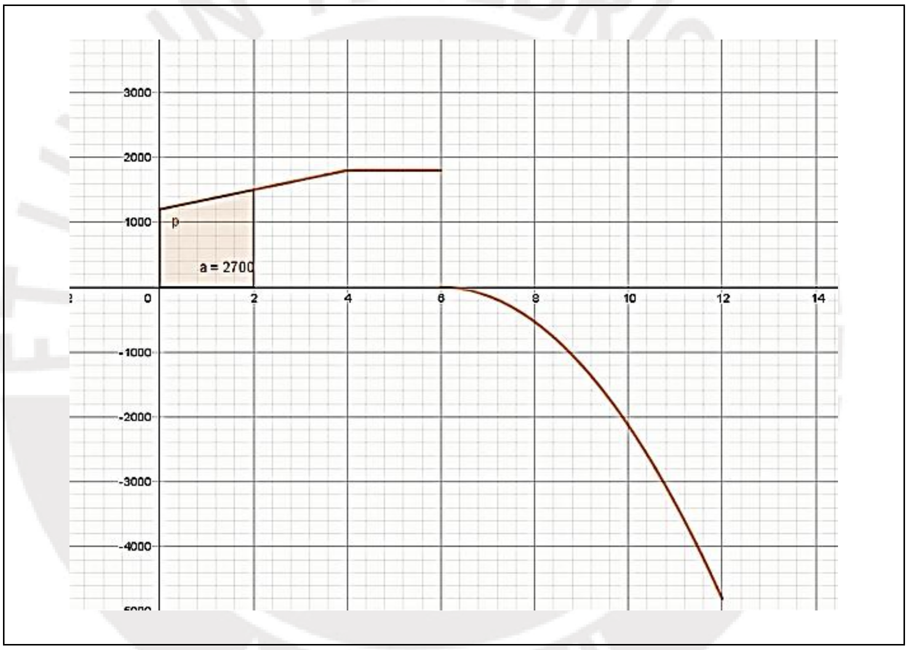


Figura 93. Representación del volumen acumulado realizado por la segunda pareja para dar solución al ítem a).

La figura 93 muestra la representación gráfica del volumen acumulado, en el registro gráfico CAS, luego de dos horas de iniciado el proceso de pasteurizado. Además, en dicha representación también se observa la medida de dicho volumen; para llevar a cabo esta representación los estudiantes emplearon el comando integral del GeoGebra como se muestra en la figura 94.

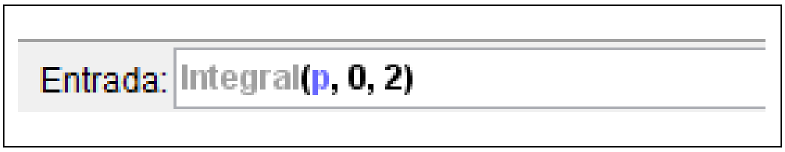


Figura 94. Representación de la sintaxis del comando integral realizado por la segunda pareja.

A continuación, presentamos en la figura 95 las respuestas obtenidas por los estudiantes al resolver la primera pregunta.

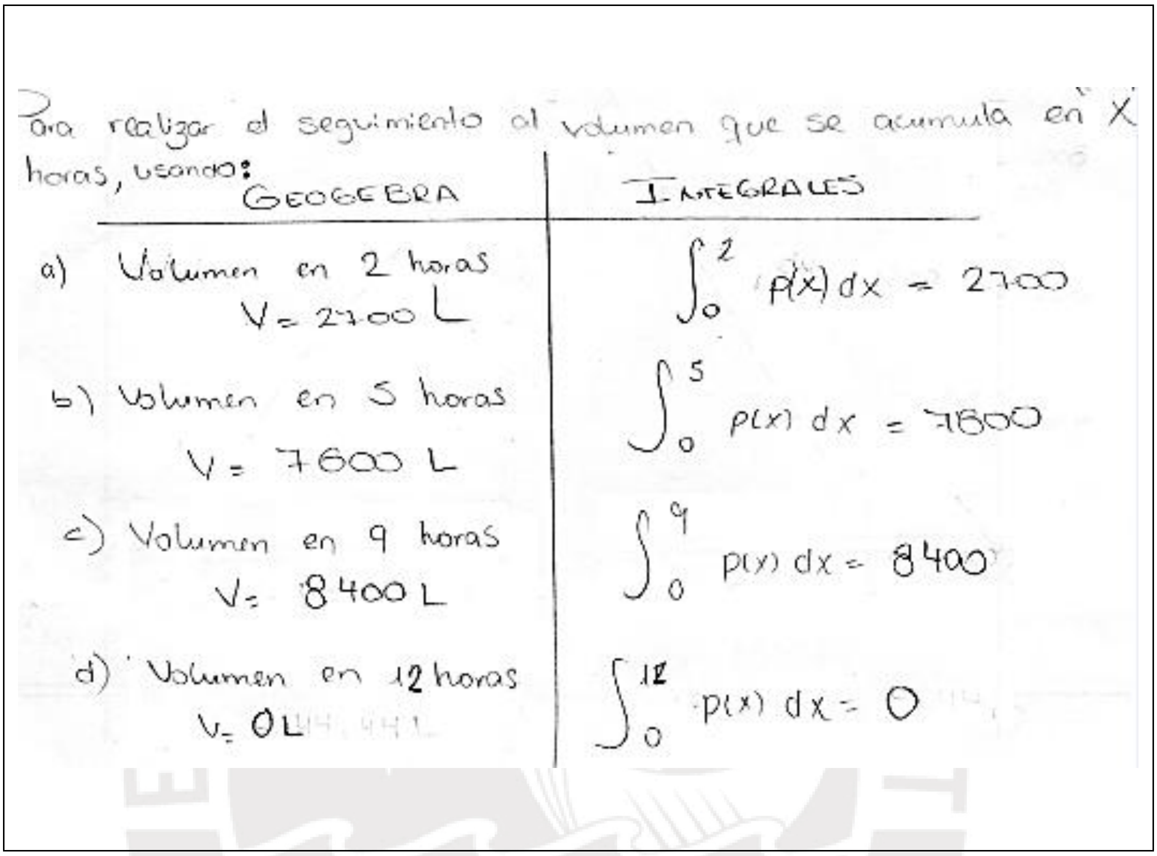


Figura 95. Medidas obtenidas por la pareja 2 del volumen acumulado en las horas indicadas en la pregunta 1.

En la figura 95, podemos observar que esta pareja llego a resolver la pregunta tal como lo habíamos supuesto en nuestro análisis a priori, movilizando sus conocimientos previos de integrales definidas, así como su experiencia en el uso del GeoGebra. El producto realizado por los estudiantes evidencia que lograron realizar las conversiones de la representación de la función razón de cambio del registro gráfico al registro de lengua natural, seguidamente lograron pasar de este último hacia el registro algebraico, para luego realizar una última conversión de esta representación hacia una en el registro gráfico CAS.

Además, la pareja logró representar el volumen en acumulado en los registros lengua natural; algebraico, como se evidencia en la figura 95, y gráfico CAS sin pasar por el registro numérico y figural, lo cual no habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*.

Esto es señal que los estudiantes realizaron la coordinación de la representación, del volumen acumulado, en los registros mencionados, pues no se encontró evidencia de que los estudiantes confundan a este objeto matemático, integral definida, con su representación. De modo similar con el objeto matemático función razón de cambio. Con esto podemos afirmar que los estudiantes alcanzaron la comprensión de los objetos matemáticos función razón de cambio e integral definida. A continuación, presentaremos las acciones realizadas por los estudiantes al resolver la segunda pregunta.

Pregunta 2

Para realizar la representación gráfica del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes calcularon la medida del volumen acumulado en distintas horas, para llevar a cabo este fin asignaron un deslizador al límite superior de la integral, el cual representa el valor de la hora transcurrida, empezando en cero y terminando en 12, siendo lo último el dominio de la función razón de cambio, con incrementos de una unidad.

Este procedimiento lo habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*, sin embargo, no consideramos el uso del deslizador lo que evidencia el conocimiento que tiene la pareja en GeoGebra. Debemos mencionar que cuando lo estudiantes manipulan el deslizador están realizando tratamientos en el registro grafico CAS, estos son denominados por Ingar (2014) modificaciones posicionales. Poniendo en el contexto de la actividad esta modificación viene a ser la traslación de la recta, que representa el límite derecho de la región sombreada.

Además, a medida que se manipula el deslizador se están realizando conversiones de la representación del volumen acumulado en el registro grafico CAS, hacia el registro gráfico, pasando por medio del registro CAS, el cual no está implícito, pero si se está movilizando.

A continuación, en la figura 96, mostraremos los tratamientos realizados por los estudiantes al obtener la medida del volumen en diferentes horas. La posición inicial de la representación gráfica del límite derecho de la región sombreada que representa el volumen acumulado a la sexta hora ($k = 6$) y la posición final de la representación gráfica del límite derecho de la región sombreada que representa el volumen acumulado a la octava hora ($k = 8$).

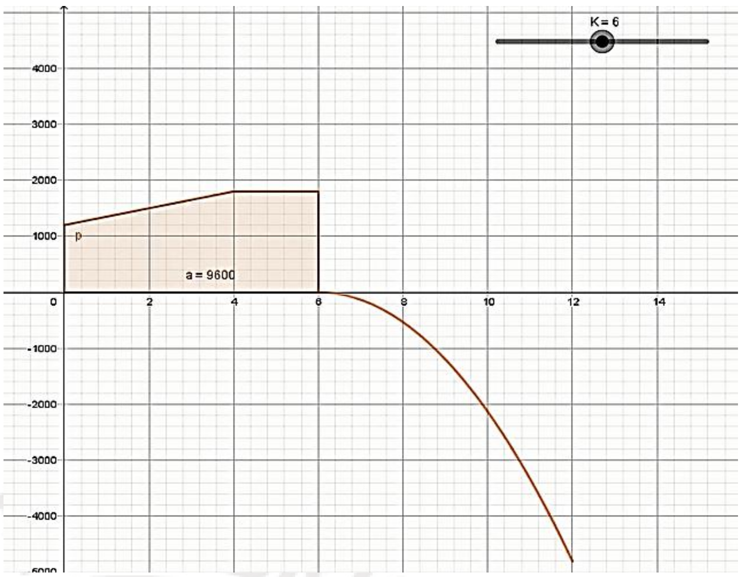
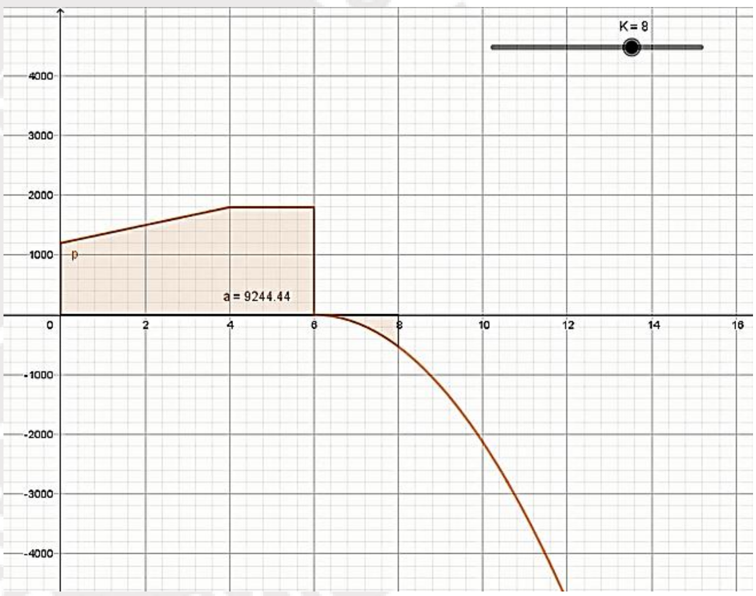
Representación del volumen acumulado, al cabo de seis horas de iniciado el proceso de pasteurización, en el registro CAS **El valor del deslizador es k = 6**	
Representación del volumen acumulado, al cabo de ocho horas de iniciado el proceso de pasteurización, en el registro CAS **El valor del deslizador es k = 8**	

Figura 96. Tratamientos realizados, en el registro CAS, por la segunda pareja al dar solución a la pregunta 2.

Luego, para realizar el esbozo de la función que modela el volumen acumulado, los estudiantes no organizan los valores del volumen en una tabla como se había supuesto en nuestro análisis *a priori*. Al contrario, ellos emplean la herramienta *rastro* del GeoGebra, para lo cual definen el punto $A = (k, a)$ cuya representación en el registro gráfico CAS se muestra, en la figura 97, cuando el valor de k es dos, donde k representa el valor del tiempo, representado en el GeoGebra con el deslizador k y la letra a representa la medida del volumen acumulado cuyo valor se obtiene al ejecutar el comando *Integral* $(p(x), 0, k)$.

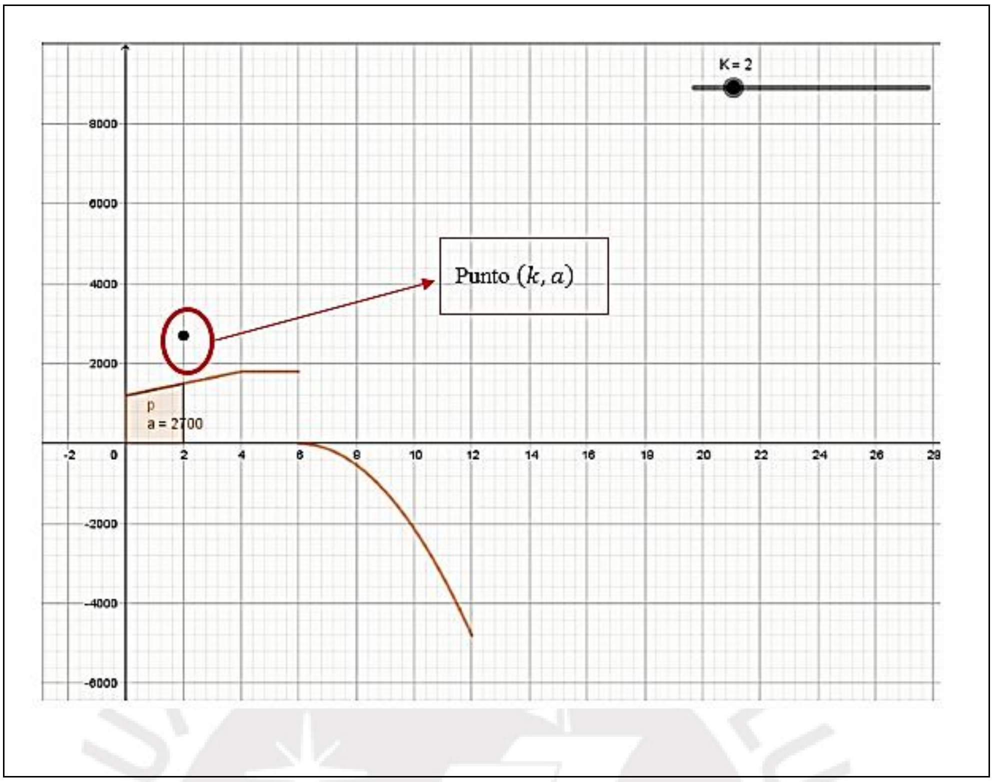


Figura 97. Representación de un punto perteneciente a la representación gráfica del volumen acumulado en el registro gráfico CAS.

A continuación, mostraremos en la figura 98 la representación gráfica de los puntos, en el registro gráfico CAS, obtenidos al manipular el deslizador con la ayuda de la herramienta rastro.

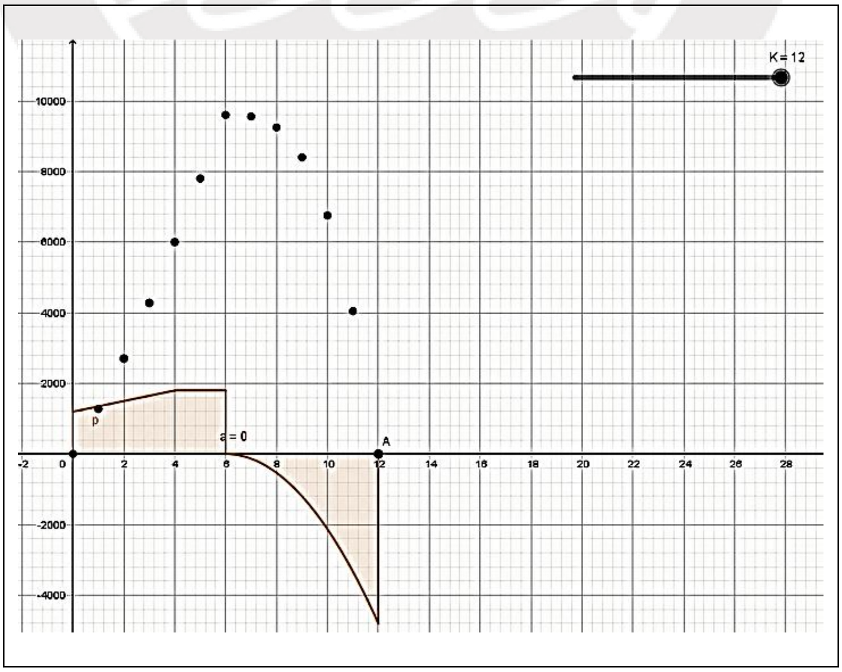


Figura 98. Representación gráfica de los puntos, realizada por la pareja 2, mediante el uso del deslizador y el rastro.

Luego, para obtener el esbozo de la representación gráfica de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes representaron los puntos en el registro gráfico, a lápiz y papel, para luego unirlos tal como se muestra en la figura 99.

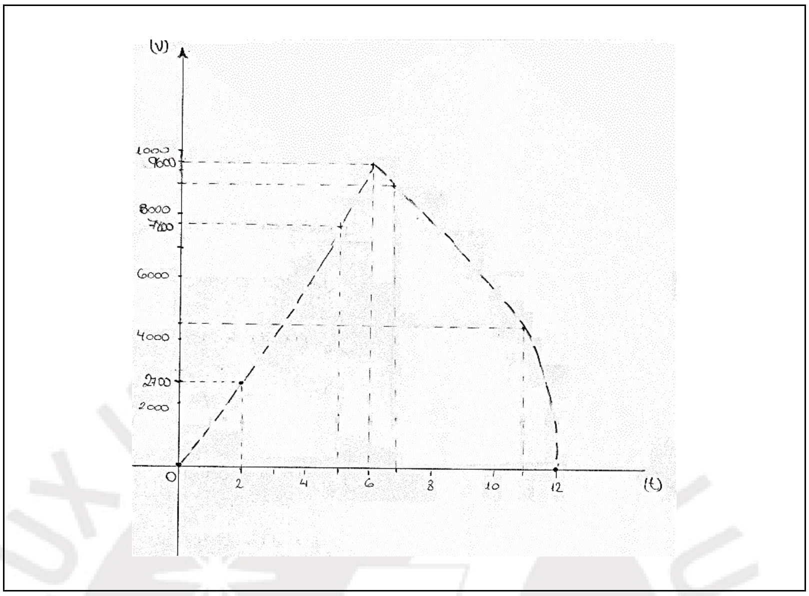


Figura 99. Representación gráfica, realizada a lápiz y papel por la segunda pareja, de la función que modela el volumen acumulado a medida que transcurren las horas.

El esbozo presentado en la figura 99 fue construido por los estudiantes a partir de la representación gráfica, en el registro gráfico CAS, de los puntos obtenidos con la herramienta rastro con incremento mucho menor en el deslizador que el empleado anteriormente, conforme se muestra en la figura 100**.**

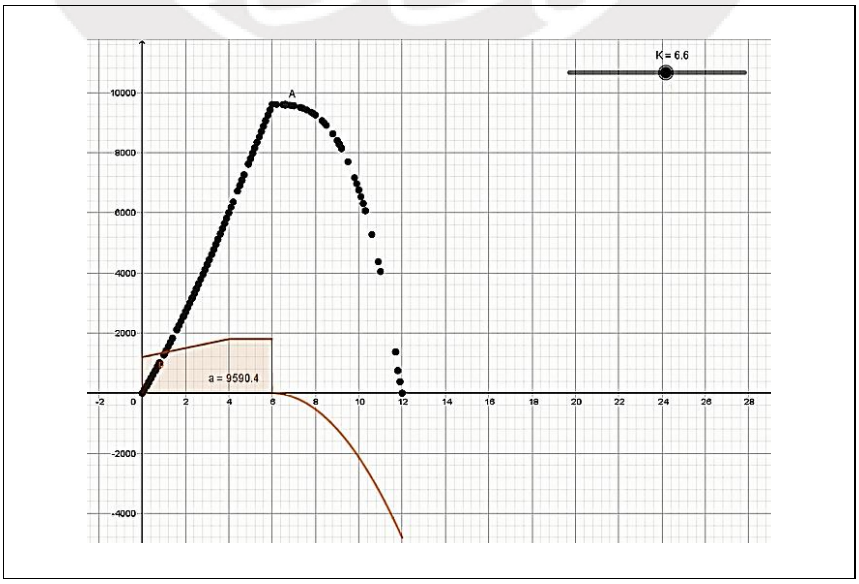


Figura 100. Representación gráfica de los puntos, realizada por la segunda pareja, en el registro gráfico CAS considerando un menor incremento en el deslizador

Debemos mencionar que los estudiantes dieron solución a la pregunta 2, tal como lo habíamos previsto *a priori*, sin embargo, debemos resaltar el dominio que tienen del GeoGebra, lo cual les permitió obtener el valor del volumen acumulado para distintas horas, además, de no transitar por algunos registros, como el figural y el numérico, que no se había considerado en el análisis *a priori*. Además, el uso del rastro les permitió representar gráficamente la función volumen en los registros gráfico y gráfico CAS con mucha aproximación.

Pregunta 3

Para comprobar que el modelo presentado por el departamento de producción modela el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas, los estudiantes intercambiaron y discutieron sus ideas, obteniendo un criterio para verificar que el modelo presentado en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb corresponde al volumen acumulado. El criterio que siguieron consistió en derivar la representación gráfica de la función, presentada en el archivo mencionado, que modela el volumen en el registro CAS, y el resultado de este proceso debe coincidir con la mostrada inicialmente en el enunciado. En palabras de los estudiantes “derivemos a la función y lo que sale debe ser la gráfica que está en la hoja”. Para llevar a cabo esta acción el estudiante Joel digita en la entrada de comandos la sentencia g' obteniendo así la derivada de la representación gráfica de la función volumen, presentada en el archivo, en el registro gráfico CAS. A continuación, presentamos en la figura 101, los procedimientos mencionados.

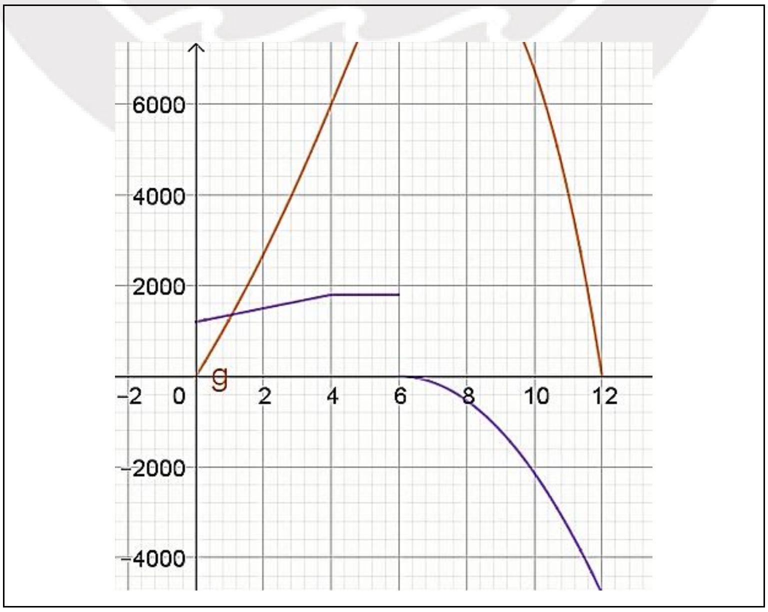


Figura 101. Representación gráfica de la derivada, realizada por la pareja 2, de la función que modela el volumen acumulado según el departamento de producción.

Con la representación obtenida, los estudiantes realizaron algunas modificaciones ópticas, tratamientos en el registro grafico CAS, las cuales consistieron en realizar acercamientos (zoom) estos se llevaron a cabo con el uso de la herramienta aproximar del GeoGebra. Estas acciones corresponden a tratamientos realizados en el registro gráfico tal como lo señala Ingar (2014). La finalidad de estos acercamientos fue obtener algunos valores de la función que modela la razón de cambio debido a que estos no eran visibles y con ello poder compararlos con la representación gráfica presente en el enunciado de la actividad.

Con la intención de justificar sus respuestas, como lo solicita la pregunta, los estudiantes señalaron el valor de la función derivada en las horas $t = 2, 5, 9\ y\ 12$ tal como lo podemos observar la figura 102.

$$\frac{dv}{dt} = V'(2) = 1500 \rightarrow g'(2) = 1500,\ 1500 \text{ es litro}/$$

$$\frac{dv}{dt} = V'(5) = 1600 \rightarrow g'(5) = 1600,\ 1600\ lt/h$$

$$\frac{dv}{dt} = V'(9) = -1200 \rightarrow g'(9) = -1200,\ -1200\ lt/h$$

$$\frac{dv}{dt} = V'(12) = -4600 \rightarrow g'(12) = -4600,\ -4600\ lt/$$

Figura 102. Valores de la razón de cambio obtenidos por la segunda pareja con la finalidad de justificar sus conjeturas.

Los valores mostrados en la figura 102 se obtuvieron gracias a los tratamientos realizados en el registro gráfico CAS, los cuales fueron mencionados anteriormente, además, estos valores son alcanzados por la representación gráfica mostrada en el enunciado, justificando así que el modelo presentado por el departamento de producción, en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb, modela el comportamiento del volumen acumulado, en el tanque de pasteurización, a medida que transcurren las horas.

La pregunta 3 fue resuelta por esta pareja pues lograron obtener la derivada de la representación del volumen acumulado presentada en el archivo, la cual fue comparada con la representación mostrada en el enunciado de la actividad llegando así a la solución de la esta pregunta. Esta manera de solución corresponde al segundo criterio que habíamos supuesto, en nuestro análisis *a priori*. También, debemos mencionar que la pareja no llevo a cabo el primer criterio considerado en el análisis *a priori* considerado.

El procedimiento seguido por los estudiantes para justificar no fue el esperado por nosotros, debido a que habíamos considerado que la pareja al no poder identificar el tipo de funciones que se presentaban en el archivo, MODELO_APROXIMADO.ggb, optasen por obtener la razón de cambio de la función de manera gráfica, esto es, utilizando la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función presentada. Suponemos que los estudiantes hubiesen seguido el procedimiento supuesto si ocultábamos la etiqueta de la función volumen, lo cual les hubiese imposibilitado realizar la sentencia g'.

Debemos mencionar que la pareja logró establecer una conclusión importante, la cual mostramos en la figura 103, a partir de los procedimientos realizados. Esto muestra que los estudiantes con la información brindada en la situación problema resolvieron las cuestiones presentes en él usando sus conocimientos previos, además, estamos siendo participes de que la situación diseñada logró poner en juego el objeto matemático de estudio, en este caso la primera parte del TFC, que fue lo que se deseaba explorar, siendo esto último según Almoloud (2017) el objetivo de diseñar una situación problema.

$$V'(t) = \frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t V_i \, dt$$

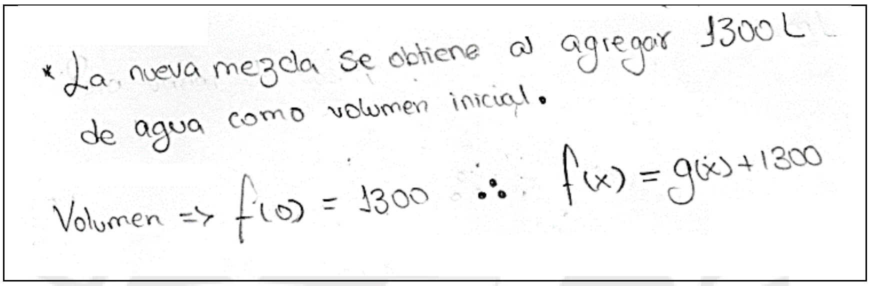
Figura 103. Conclusión obtenida por la pareja 2 al desarrollar la tercera pregunta.

La conclusión mostrada en la figura 103, muestra la esencia de la primera parte del TFC, si bien esta no fue solicitada de manera explícita por la pregunta resulta muy importante que los estudiantes la hayan hecho explícita. La acción mencionada, es consecuencia de la sugerencia que realizo que el profesor investigador antes de iniciar el desarrollo de la actividad la cual fue, registrar en la ficha cualquier resultado que crean importante.

Pregunta 4

Luego de leer detenidamente la pregunta, los estudiantes establecieron lo siguiente, "para hallar el volumen total de la mezcla hay que sumarle los 1300 litros de agua", lo cual muestra que para obtener el volumen acumulado total, ya disuelto, de la mezcla se debe considerar los 1300 litros de agua que había inicialmente.

Con la representación realizada del volumen acumulado en el registro de lengua natural, los estudiantes realizaron la conversión de esta representación a la siguiente representación, en el registro algebraico, $f(x) = g(x) + 1300$, donde $f(x)$ representa el volumen disuelto y $f(0) = 1300$ la condición inicial y $g(x)$ representa el volumen sin disolver. Las representaciones realizadas por la pareja las mostramos en la figura 104**.**


* La nueva mezcla se obtiene al agregar 1300 L de agua como volumen inicial.

Volumen => $f(0) = 1300$ ∴ $f(x) = g(x) + 1300$

Figura 104. Representaciones realizadas por la segunda pareja del volumen total, ya disuelto, en los registros lengua natural y algebraico.

Posteriormente, la representación algebraica del volumen acumulado, ya disuelto, mostrada en la figura 104 es transformada a una representación en el registro gráfico CAS mediante una conversión, esta última representación la mostramos en la figura 105.

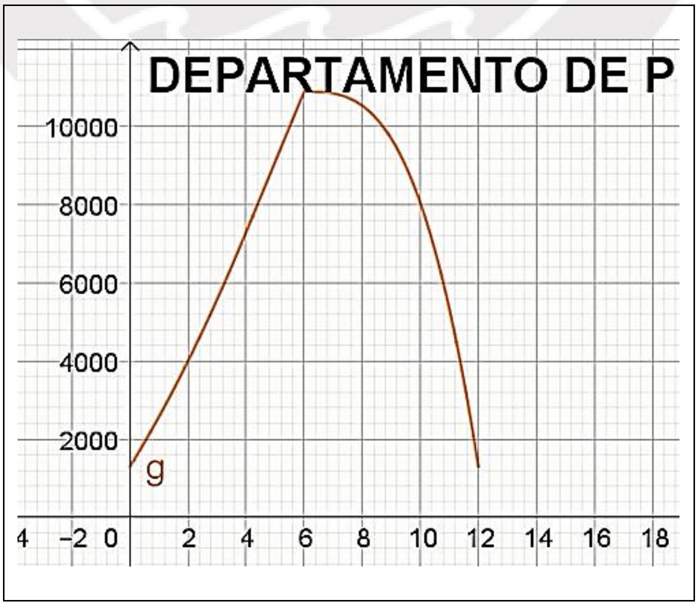


Figura 105. Representación gráfica, en el registro gráfico CAS, del volumen total disuelto realizado por la pareja 2.

Para realizar la representación mostrada en la figura 105 los estudiantes efectuaron un tratamiento, en el registro gráfico CAS, a la representación gráfica presentada en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb, esta transformación consiste en realizar una traslación vertical de 1300 litros a la representación inicial.

Con respecto a las acciones realizadas por los estudiantes en esta pregunta, efectuaron los procedimientos que habíamos supuesto en nuestro análisis *a priori*. Además, establecieron la conjetura que esperábamos que formulen la cual se muestra en la figura 106.

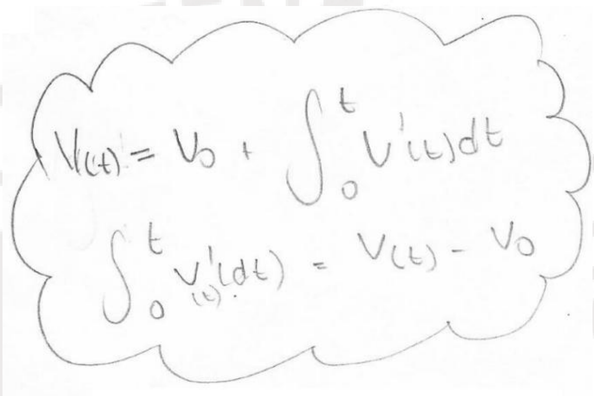


Figura 106. Conjetura formulada por la segunda pareja al resolver la cuarta pregunta.

La conjetura mostrada en la figura 106 corresponde a la segunda parte del TFC, la cual permite calcular integrales definidas de una función a partir de evaluar una primitiva de esta en los límites de integración superior e inferior.

Socialización de la actividad 2.

Al terminar la segunda actividad generalizamos los resultados obtenidos por los parejas, el profesor investigador socializa el significado del proceso realizado en la tercera pregunta según el contexto planteado en la actividad. La acción realizada por el profesor se puede observar cuando él formula el Teorema fundamental del Cálculo-Parte 1 planteando la siguiente expresión.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t V'(x)dx = V'(t)$$

Seguidamente, el profesor plantea que dicha igualdad es válida en puntos donde la función razón de cambio $V'(t)$ es continua.

De manera similar el profesor investigador socializa el significado del proceso realizado en la cuarta pregunta según el contexto planteado en la actividad. La acción realizada por el profesor se puede observar cuando él formula el Teorema fundamental del Cálculo-Parte 2 planteando la siguiente expresión.

$$V_{disuelto}(t) = V(0) + \int_0^t V'(T)dT$$

Posteriormente, realiza el siguiente tratamiento obtiene la parte 2 del TFC.

$$\int_0^t V'(T)dT = V_{disuelto}(t) - V(0)$$

Finalmente, muestra el teorema ya terminado como lo presenta Stewart (2006, p388), el cual se puede observar en la figura 41.

CONSIDERACIONES FINALES

La enseñanza y/o aprendizaje de Cálculo a nivel universitario, en particular del tema Teorema Fundamental del Cálculo, posee pocas investigaciones referidas a dicho objeto matemático, las dificultades que presentan los estudiantes en este tema, la existencia de herramientas tecnológicas como el GeoGebra, motivaron la realización de este estudio.

Comenzamos nuestro trabajo realizando un estudio de las investigaciones que tengan como objeto de estudio el TFC, además, investigaciones relacionadas a la problemática que hay en la enseñanza del TFC, encontramos nuestros antecedentes Grande (2013), Robles *et al* (2014), Campos (2007), Picone (2007), Anacleto(2007) y Scucuglia (2006), en los cuales encontramos conceptos como, la idea de acumulación una noción importante para contextualizar situaciones relacionadas a la integral, así como la razón de cambio de esa acumulación que es relacionada a la derivada, también los conceptos de función, como el dominio, la continuidad; permiten una interpretación gráfica del TFC.

Nuestro marco teórico, basado en la teoría de Registros de Representación Semiótica fundamentada de Duval (1995), nos permitió analizar la coordinación de las representaciones en los Registros de Representación Semiótica: gráfico - algebraico - lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería de Alimentos realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. Según los resultados obtenidos a partir de la experimentación de la situación problema pudimos verificar el logro de los objetivos planteados, lo cual nos permitió responder a nuestra pregunta de investigación: *¿Los estudiantes de ingeniería de alimentos coordinan los Registros de Representación Semiótica cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC?*

Con respecto a esto podemos afirmar, los estudiantes sí realizaron la coordinación en los registros mencionados. Por ejemplo, en la primera actividad lograron coordinar la representación del área bajo la sombreada en los registros gráficos y lengua natural; también en esta actividad la primera pareja logró coordinar la representación de la medida del área de la región sombreada en los registros gráfico, lengua natural a diferencia de la segunda pareja que logró coordinar la misma representación en los registros gráficos, de lengua natural y algebraico. En la segunda actividad, ambas parejas lograron coordinar la representación de la función razón de cambio en los registros gráfico, lengua natural, algebraico y gráfico CAS.

La situación problema que diseñamos logró poner en juego objetos matemáticos involucrados en el TFC, las derivadas e integrales definidas, formulando conjeturas relacionadas a la tesis del TFC. Estas conjeturas fueron obtenidas por la segunda pareja al desarrollar las preguntas 3 y 4 de la segunda actividad. Con esto, la situación problema planteada logró poner en juego las tesis del TFC, que era lo que queríamos explorar, cumpliéndose así la finalidad que tiene la situación problema señalada por Almoloud (2017).

La noción de acumulación fue un elemento clave para la comprensión de la función representada por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pues los estudiantes lograron realizar operaciones con ella. Además, esta noción permitió darle un significado a la integral definida, lo cual fue fundamental para diseñar la situación problema. Esta esta noción está basado en la idea de acumular cantidades, la cual fue observada cuando realizamos el análisis epistemológico de nuestro objeto de estudio, por ejemplo, en los trabajos de Arquímedes, cálculo de cuadraturas, y Cavalieri, método de los indivisibles.

Con respecto al análisis preliminar de nuestro estudio, según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), teníamos la certeza que emplear recursos tecnológicos, en nuestro caso particular el GeoGebra, permite a los estudiantes realizar transformaciones en las representaciones de diversos objetos matemáticos, en particular las funciones y la integral definida; ya que según Duval (1995) los objetos matemáticos no son accesibles ni manipulables por nuestros sentidos. Por ello, la elección del GeoGebra trajo como consecuencia que se generen un conjunto de situaciones y decisiones, las cuales tuvieron como propósito alcanzar los objetivos específicos de la investigación, y con ellos lograr el objetivo general de nuestra investigación.

Con respecto a los aspectos didácticos del estudio del nuestro objeto de estudio, el TFC, mediante la revisión de dos textos de consulta del curso Matemáticas II, hemos comprobado que la metodología utilizada para la enseñanza de dicho tema se realiza mediante la conversión en un solo sentido del registro algebraico al registro gráfico, y no en el sentido inverso ya que, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), no se indica que la conversión entre dichos registros debe ser realizado en ambos sentidos. Siendo el libro que emplea mayor cantidad de conversiones el Stewart (2012), en cambio el libro de Lima (2007) solo emplea discursos matemáticos, algo característico en los libros de matemática pura.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2017). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. REVEMAT. 11. 109-141. 10.5007/1981-1322.2016v11n2p109.

Almouloud S. (2007). Fundamentos da Educação Matemática. Universidade Federal do Panamá.

Anacleto, G. (2007). Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9 (3), 281–308.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Trad. María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho. Portugal: Porto Editora.

Brousseau G. (2016). *Introduction-à-lingénierie-didactique3.pdf*.

Brousseau G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Bueno Aires: Libros de zorzal.

Camarena, P. (2010). Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería.

Campos, R. (2007). A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Duval, R. (2016). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Grupo de

Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2013). Registros de representacoes semióticas e funcionamiento cognitivo da compreensao em matematica. In: Machado, S. A(Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representacao semiótica. Campinas: Editora Papiros, 2003. p. 11-33.

Duval, R. (1995). Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Colombia, 2004.

Grande, A. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. (Tesis doctoral en Educación Matemática), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Gordillo, Wilson; Pino - Fan, Luis R.; (2016). Una Propuesta de Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada. Boletim de *Educação Matemática*, Agosto-Sin mes, 535-558.

Hibbeler, R. C. (2010). Ingeniería mecánica – Estática. Decimosegunda edición. PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010. ISBN: 978-607-442-561-1

Ingar, K. (2014). A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Lima, E. L. (2007). Análisis Real. V. 1.

Picone, D. (2007) Os registros de representação semiótica movilizados por profesores no ensino do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación matemática*, 26(2), 69-109. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a3.pdf

Scucuglia, R. (2006). A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de Varias variables. Trascendentes Tempranas*. México, D.F. 7ma ed. Cengage Learning.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación. Barcelona. PAIDÓS.

ANEXOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA PESQUERA Y DE ALIMENTOS

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA PESQUERA

I. DATOS GENERALES

1.1	Asignatura	: Matemática II
1.2	Código	: IP-301
1.3	Condición	: Obligatorio
1.4	Pre - requisito	: Matemáticas I
1.5	N° de horas de clase	: 06 (Teoría: 2 horas / Práctica: 4 horas)
1.6	N° de créditos	: 04
1.7	Ciclo	: 03
1.8	Semestre Académico	: 2017 A
1.9	Duración	: 17 semanas
1.10	Profesor(a)	: Lic. Pascual Fermín Onofre Mayta

II. SUMILLA

Asignatura del área de Matemáticas de naturaleza teórico-práctico. El propósito es analizar e interpretar las relaciones entre las variables de problemas relacionados con áreas y volúmenes que impliquen variaciones en procesos infinitos y los resuelva aplicando el teorema fundamental del cálculo. Así como dar solución acertada a problemas que se le presenten según su actividad y su curiosidad científica. Comprende las siguientes unidades temáticas:

- Unidad I: Integral definida
- Unidad II: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales
- Unidad III: Ecuaciones diferenciales ordinarias
- Unidad IV: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

III. COMPETENCIAS DE LA ASIGNATURA

COMPETENCIAS GENÉRICAS

Contribuye al análisis e interpretación de modelos matemáticos a partir de situaciones reales y utiliza la integración como herramienta fundamental para dar solución acertada a problemas que se le presenten según su actividad y su curiosidad científica.

COMPETENCIA DE LA ASIGNATURA

Relaciona y utiliza los conceptos matemáticos básicos del cálculo integral, las ecuaciones diferenciales ordinarias, las matrices y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones problema de la ingeniería, de manera adecuada.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CAPACIDADES Y ACTITUDES

COMPETENCIAS	CAPACIDADES	ACTITUDES
Aplica la integral definida en la solución de situaciones problemas de la ingeniería.	**C1.** Aplica la integral definida en el cálculo de áreas de regiones planas, longitud de arco y volúmenes de sólido de revolución. **C2.** Investiga información sobre la integral definida como herramienta fundamental para resolver problemas de ingeniería.	**A.1.** Demuestra responsabilidad y creatividad cuando trabaja individualmente o en equipo. **A.2.** Es tolerante frente a los distintos comportamientos de los demás, distintos al suyo. **A.3.** Muestra interés, autonomía y una actitud crítica frente a los diversos problemas que resuelve.
Utiliza las matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales en la solución de situaciones problemas de la ingeniería	**C3.** Resuelve problemas relacionados con operaciones de matrices y sistema de ecuaciones lineales mediante métodos matriciales. **C4.** Investiga la teoría de matrices para representar de una manera adecuada la información de datos y utiliza los métodos matriciales directos para resolver problemas que involucren sistemas lineales.	
Utiliza las ecuaciones diferenciales ordinarias en la solución de situaciones problemas de la ingeniería	**C5.** Aplica los métodos de solución de ecuaciones diferenciales en problemas de la ingeniería y ciencias básicas. **C6.** Investiga información sobre las ecuaciones diferenciales para resolver problemas de ingeniería	
Analiza e interpreta aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en la solución de situaciones problemas de la ingeniería	**C7.** Analiza e interpreta los modelos matemáticos que se plantean mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. **C8.** Investiga información sobre modelos matemáticos utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver problemas de ingeniería	

IV. PROGRAMACIÓN POR UNIDADES DE APRENDIZAJE

<table>
<tr><td colspan="6">Unidad N° 1 : INTEGRAL DEFINIDA</td></tr>
<tr><td colspan="6">Duración: 5 semanas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fecha de inicio: 27/03/2017</td><td colspan="3">Fecha de término: 29/04/2017</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Capacidades de la unidad</td><td>C E-A</td><td colspan="3">Aplica la integral definida en el cálculo de áreas de regiones planas, longitud de arco y volúmenes de sólido de revolución.</td></tr>
<tr><td>C IF</td><td colspan="3">Investiga información sobre la integral definida como herramienta fundamental para resolver problemas de ingeniería.</td></tr>
<tr><td colspan="6">PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>SEMANA</td><td colspan="2">CONTENIDO CONCEPTUAL</td><td colspan="2">CONTENIDO PROCEDIMENTAL</td><td>CONTENIDO ACTITUDINAL</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">▪ Sumatorias. Propiedades.
▪ La integral definida: definición y propiedades.
▪ Teorema fundamental del cálculo.
▪ Teorema del valor medio.</td><td colspan="2">▪ Usa la notación sigma para escribir y calcular una suma.
▪ Determina el valor de una integral definida utilizando límites.
▪ Explica los teoremas importantes de las integrales definidas.</td><td>▪ Muestra seguridad y perseverancia al resolver ejercicios de integrales.
▪ Aprecia y valora la importancia de los teoremas fundamentales del cálculo en la integral definida</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Aplicación de la integral definida:
▪ Área de una región plana entre dos curvas.
▪ Volumen de un sólido de revolución.
▪ Longitud de arco.
▪ Área de una superficie de revolución.</td><td colspan="2">▪ Encuentra el área de una región entre dos curvas usando la integral definida.
▪ Calcula la longitud de arco una curva regular.
▪ Conoce las expresiones para calcular volúmenes de sólidos de revolución.
▪ Encuentra el área de una superficie de revolución.</td><td>▪ Reconoce y valora la utilidad de los conocimientos impartidos en la solución de problemas de aplicación
▪ Demuestra confianza en sus capacidad para resolver problemas de aplicación.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Aplicación de la integral definida:
▪ Momentos y centro de masa
▪ Trabajo.
▪ Presión y fuerza hidrostática.</td><td colspan="2">▪ Entiende la definición de masa.
▪ Localiza el centro de masa de una lámina plana.
▪ Encuentra la presión y la fuerza de un fluido.</td><td>▪ Valora la precisión, la exactitud, y el orden en la en la obtención de los resultados y el aspecto formativo de la matemática</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">▪ Integrales impropias: Definición, clasificación y propiedades.
▪ Aplicaciones
.</td><td colspan="2">▪ Evalúa una integral impropia con límites de integración infinito.
▪ Evalúa una integral impropia que tiene una discontinuidad infinita
.</td><td>▪ Demuestra flexibilidad y seguridad al resolver problemas de integrales impropias</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Integración numérica:
▪ Regla del trapecio.
▪ Regla de Simpson.</td><td colspan="2">▪ Utiliza la regla del trapecio para aproximar una integral definida.
▪ Utiliza la regla de Simpson para aproximar una integral definida.</td><td>▪ Valora la precisión, la exactitud, y el orden en la resolución en la obtención de los resultados y el aspecto formativo de la matemática</td></tr>
<tr><td colspan="6">Unidad N° 2 : MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Duración: 2 semanas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fecha de inicio: 01/05/2017</td><td colspan="2">Fecha de término: 14/05/2017</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capacidades de la unidad</td><td>C E-A</td><td colspan="2">Resuelve problemas relacionados con operaciones de matrices y sistema de ecuaciones lineales mediante métodos matriciales.</td></tr>
<tr><td>C IF</td><td colspan="2">Investiga la teoría de matrices para representar de una manera adecuada la información de datos y utiliza los métodos matriciales directos para resolver problemas que involucren sistemas lineales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>SEMANA</td><td>CONTENIDO CONCEPTUAL</td><td>CONTENIDO PROCEDIMENTAL</td><td>CONTENIDO ACTITUDINAL</td></tr>
<tr><td>6</td><td>▪ Matriz: Definición y ejemplos.
▪ Operaciones con matrices.
▪ Matrices especiales.
▪ Matriz escalonada.
▪ Operaciones elementales por filas.
▪ Definición y propiedades de determinante.
▪ Matriz inversa.</td><td>▪ Organiza datos numéricos en matrices.
▪ Reconoce y aplica las operaciones matriciales.
▪ Utiliza operaciones elementales por filas para obtener la forma escalonada de una matriz y la inversa de una matriz.
▪ Calcula la determinante de una matriz usando propiedades.</td><td>▪ Reconoce la importancia de las matrices en el ordenamiento de la información.
▪ Acepta las operaciones matriciales para la resolución de problemas reales.
▪ Valora la importancia para determinar la existencia de la matriz inversa.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>▪ Sistema de ecuaciones lineales.
▪ Eliminación Gaussiana.
▪ El Método de Gauss-Jordan.
▪ Regla de Cramer.
▪ Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.</td><td>▪ Modela e identifica un sistema de ecuaciones lineales.
▪ Resuelve problemas lineales aplicados usando los métodos directos.</td><td>▪ Acepta la importancia de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.
▪ Reconoce los métodos directos para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.
▪ Acepta la importancia de los determinantes para problemas lineales con una menor cantidad de variables.</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="3">EXAMEN PARCIAL</td></tr>
</table>

Unidad N° 3 : ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS			
Duración: 5 semanas			
Fecha de inicio: 22/05/2017		**Fecha de término:** 24/06/2017	
Capacidades de la unidad	C E-A	Aplica los métodos de solución de ecuaciones diferenciales en problemas de la ingeniería y ciencias básicas.	
	C IF	**C6.** Investiga información sobre las ecuaciones diferenciales para resolver problemas de ingeniería	

PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS			
SEMANA	**CONTENIDO CONCEPTUAL**	**CONTENIDO PROCEDIMENTAL**	**CONTENIDO ACTITUDINAL**
9	▪ Ecuaciones diferenciales: conceptos generales. ▪ Ecuaciones diferenciales de variable separable.	▪ Reconoce, comprende y aplica las ecuaciones diferenciales ordinarias. ▪ Identifica las ecuaciones diferenciales de variable separable para luego resolverlo.	▪ Valora el uso para reconocer una ecuación diferencial. ▪ Confía en sus demostraciones y en la solución de problemas.
10	▪ Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas. ▪ Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas. ▪ Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas. ▪ Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas.	▪ Aplica y comprende el uso de las soluciones de ecuaciones homogéneas. ▪ Aplica y comprende el uso de ecuaciones diferenciales exactas y con factores integrantes	▪ Muestra confianza al trabajar con estas ecuaciones diferenciales.
11	▪ Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. ▪ Ecuación de Bernoulli y de Ricatti. ▪ Ecuación de Lagrange y de Clairaut.	▪ Comprende el uso de las ecuaciones diferenciales lineales. ▪ Resuelve las ecuaciones de Bernoulli, de Ricatti, Lagrange y Clairaut.	▪ Muestra confianza al trabajar con este tipo de ecuaciones.
12	▪ Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. ▪ Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes.	▪ Reconoce las ecuaciones diferenciales de orden superior ▪ Resuelve las ecuaciones diferenciales de orden superior.	▪ Muestra interés al trabajar estas ecuaciones diferenciales.
13	▪ El método de los coeficientes indeterminados. ▪ El método de variación de parámetros. .	▪ Aplica los métodos de solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constante.	▪ Participa y comparte ideas con sus compañeros en la resolución de ejercicios.

Unidad N° 4 : APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS			
Duración: 2 semanas			
Fecha de inicio: 26/06/2017		Fecha de término: 08/07/2017	
Capacidades de la unidad	C E-A	Analiza e interpreta los modelos matemáticos que se plantean mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.	
	C IF	Investiga información sobre modelos matemáticos utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver problemas de ingeniería	
PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS			
SEMANA	**CONTENIDO CONCEPTUAL**	**CONTENIDO PROCEDIMENTAL**	**CONTENIDO ACTITUDINAL**
14	▪ Problemas de crecimiento y decaimiento. ▪ Problemas de mezclas. ▪ Ecuación Logística. ▪ Reacciones químicas.	▪ Resuelve las ecuaciones diferenciales de primer orden mediante los métodos estudiados e interpreta sus soluciones.	▪ Muestra interés por las matemáticas y sus aplicaciones en la vida profesional.
15	▪ Problemas de resortes. ▪ Problemas de flotación.	▪ Resuelve las ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante los métodos estudiados e interpreta sus soluciones.	▪ Muestra interés por las matemáticas y sus aplicaciones en las ciencias e ingeniería.
16	EXAMEN FINAL		
17	EXAMEN SUSTITUTORIO		

V. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

- El curso de Matemática II se desarrolla a través de metodologías activas, donde el rol del docente es un facilitador del aprendizaje.
- La clase se desarrollarán en forma activa y participativa, planteando situaciones reales.
- Se fomenta la habilidad de aprender a aprender, se alienta el trabajo en equipo y se promueve la interacción entre profesor y estudiante.
- Se implementarán prácticas dirigidas que se trabajarán en equipo y que permitirán fijar los conocimientos adquiridos.

VI. MATERIALES EDUCATIVOS Y OTROS RECURSOS DIDÁCTICOS:

Pizarra, tiza, plumones, videos y software educativo.

VII. EVALUACIÓN

La Evaluación, valora y mide los logros del aprendizaje en función de los objetivos propuestos en el curso. Para ello, se tiene en cuenta una evaluación esencialmente formativa, que permita formar juicio o calificación y que nos lleve a tomar decisiones de mejora. Se considerará la evaluación valorativa: actitudes positivas, reflexiones y otros, que bonificarán puntos en lo referente al trabajo académico.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN:

- **Un (01) examen parcial (EP) y un (01) examen final (EF)** los que se rendirán en forma obligatoria y de acuerdo al cronograma de evaluaciones que elaborará la Escuela Profesional.
- Un **examen sustitutorio (ES)** que comprende todo el curso y reemplazará la nota más baja de EP o EF.
- **Evaluaciones continuas (EC).** Consiste en la presentación de trabajos individuales, grupales y exposiciones.
- Se realizarán **2 prácticas calificadas**, las cuales no se eliminará ninguna.

CÁLCULO DEL PROMEDIO FINAL:

El Promedio Final (PF) se obtendrá de acuerdo a la siguiente ponderación:

[illegible]

donde:

PF: Promedio Final
EP: Examen Parcial
EF: Examen final
PP: Promedio de las Prácticas Calificadas
PP = (P1 + P2)/2.
EC = (E1 + E2 + E3 +E4)/4

REQUISITOS DE APROBACIÓN:

- Rendir los exámenes y prácticas calificadas programadas.
- Presentar todos sus trabajos obligatorios.
- El estudiante que haya acumulado, en forma consecutiva, más del 30 % de inasistencias, estará desaprobado en el curso.
- Alcanzar una nota final igual a 10.5, en concordancia con las normas de la Universidad.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. LAY D. "Álgebra Lineal y sus aplicaciones". Editorial Pearson, México, 2012.

2. SAENZ J. "Cálculo Integral con funciones trascendentes tempranas para ciencias e ingeniería". Editorial Hipotenusa, Venezuela, 2009.

3 ZILL D. y CULLEN M. "Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera". Editorial Thomson Editores, S. A de C. V. 2009.

4. KREYSZYG E. "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería". Editorial Mc. Graw Hill, 1997.

5. LARSON R., HOSTETLER R. y EDWARDS B. "Cálculo". Editorial Mc. Graw Hill Interamericana. México, 2006.

BIBLIOGARFIA COMPLEMENTARIA

6. STEWART J. "Cálculo de una variable trascendentes tempranas" . Editorial Thomson, México, 2001.

7. NAGLE R., SAFF E. y SNIDER A. "Ecuaciones diferenciales elementales". Editorial Mc. Graw Hill México, 2005.

8. BRONSON R. Y COSTA G. "Ecuaciones Diferenciales". Editorial Mc. Graw Hill, México, 2008.

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ASIGNATURA	:	***CÁLCULO INTEGRAL***
CODIGO	:	**CC2051**
CREDITOS	:	**3-2-4**
PRE-REQUISITOS	:	**Cálculo Diferencial**
NIVEL	:	**Ciclo III**

JUSTIFICACIÓN
Esta asignatura, tiene la finalidad de proporcionar métodos y técnicas del cálculo integral de funciones en una variable, desarrollando principalmente la integral definida y sus aplicaciones en el campo de las ciencias e ingeniería, creando así en el estudiante una mayor capacidad de análisis en los problemas prácticos y contribuyendo de esta manera a su formación integral.

OBJETIVOS
Al término de la asignatura, el alumno será capaz de:

- Resolver las integrales indefinidas, aplicando diferentes métodos.
- Interpretar la integral definida y sus aplicaciones.
- Enunciar los teoremas fundamentales del cálculo integral.
- Analizar las integrales impropias.
- Aplicar las integrales definidas en el cálculo de: áreas de regiones planas, volumen de sólidos, longitud de curvas, áreas de superficies de revolución y otras aplicaciones físicas.
- Resolver modelos matemáticos mediante las ecuaciones diferenciales.

CONTENIDO ANALÍTICO

I. Integral indefinida
- 1.1 Antiderivada, integral indefinida. Propiedades..
- 1.2 Integral inmediata y cambio de variable.
- 1.3 Métodos de integración:
  - 1.3.1 Integración por partes.
  - 1.3.2 Integración trigonométrica.
  - 1.3.3 Integración por sustitución trigonométrica.
  - 1.3.4 Integración por descomposición del integrado en fracciones parciales.
  - 1.3.5 Integrales de funciones racionales del seno y coseno.

II. Integral definida
- 2.1 La integral como límite de sumas. Integral de Riemann, definición.
- 2.2 Interpretación geométrica de la integral definida.
- 2.3 Propiedades de la integral definida.
- 2.4 Teoremas fundamentales del cálculo integral.
- 2.5 Integrales impropias: Casos, criterios de convergencia.
- 2.6 Funciones Gamma y Beta

III. Aplicaciones de la integral definida
- 3.1 Área de regiones planas en coordenadas cartesianas y polares.
- 3.2 Volumen de un sólido de revolución. Métodos: disco, anillo y de las láminas cilíndricas.
- 3.3 Longitud de arco de una curva en coordenadas cartesianas, polares y paramétricas.
- 3.4 Área de una superficie de revolución, en coordenadas cartesianas.
- 3.5 Aplicaciones físicas: trabajo, centro de masa.

IV. **Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden**

4.1 Definición, orden y grado. Solución de una ecuación diferencial.

4.2 Tipos de ecuaciones diferenciales y su solución.

4.2.1 De variables separables (y reducibles a separables)

4.2.2 Aplicaciones de variables separables: Trayectorias ortogonales, Ley de enfriamiento, crecimiento y decrecimiento exponencial.

4.2.3 Homogéneas de primer orden (y reducibles a homogéneas)

4.2.4 Lineales de primer orden y ecuación de Bernoulli.

4.2.5 Exactas y factor integrante

4.3 Aplicaciones: biología, economía, física e ingeniería.

METODOLOGÍA

El proceso de desarrollo de las actividades académicas será de carácter teórico-práctico, basándose en exposiciones teóricas y seminarios.

MATERIALES

- Hojas de ejercicios.
- Guías de estudios.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

- **PRÁCTICA CALIFICADAS**: 6 prácticas como mínimo, cuyo promedio ser equivalente al 40% de la nota final.
- **EXAMEN DE MEDIO CURSO**: equivalente al 30% de la nota final.
- **EXAMEN FINAL: EQUIVALENTE** al 30% de la nota final.

La inasistencia a una evaluación deberá ser justificada dentro de la semana siguiente y solicitar su evaluación en el Departamento Académico de Matemática. El examen de rezagado es por única vez. La asistencia a clases teóricas y prácticas es obligatoria y se encuentra estipulado en el Art. 69° del RGUNALM.

BIBLIOGRAFÍA

1. BERMAN. Problemas de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú, 1983.
2. BRADLEY, G. Cálculo de una variable. Vol. I. Editorial Prentice-Hall. España, 1998.
3. DEMIDOVICH. Problemas de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú, 1977.
4. GRANVILLE, W. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa. México, 1991.
5. HENRY EDWARDS – DAVID PENNEY . Cálculus. Prentice Hall 2002
6. PITA RUIZ, C. Cálculo de una variable. Editorial Prentice-Hall. México, 1998.
7. PURCEL y WARBERG. Cálculo con geometría analítica. Editorial Prentice-Hall. México, 1987.
8. RAINVILLE: Ecuaciones Diferenciales Elementales. Editorial Trillas.
9. ROSS. Ecuaciones Diferenciales. Editorial Prentice-Hall.
10. TAYLOR-WADE: Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa, México.
11. THOMAS, G. Y FINNEY R. Cálculo, una variable. Editorial Limusa. México, 1998.

Estructura curricular de la carrera de Ingeniería Alimentaria brindada por la USIL

ESTRUCTURA CURRICULAR

CICLO 01	Lenguaje I	Matemática para Ingenieros	Desarrollo Humano	Introducción a la Ingeniería Agroindustrial y Alimentaria	English I
CICLO 02	Lenguaje II	Cálculo de una Variable	Biología	Química General	English II
CICLO 03	Administración para los Negocios	Cálculo de Varias Variables	Física I	Química Orgánica	English III
CICLO 04	Economía General	Estadística para Ingeniería I	Bioquímica	Fisicoquímica	English IV
CICLO 05	Marketing	Estadística para Ingeniería II	Fundamentos de Ingeniería	Microbiología General	English V
CICLO 06	Contabilidad General	Química Agroindustrial	Operaciones Unitarias Físicas	Microbiología Agroalimentaria	English VI
CICLO 07	Contabilidad de Costos	Finanzas Empresariales	Análisis Químico Instrumental	Operaciones Unitarias Fisicoquímicas	Ética
CICLO 08	Gestión de Calidad	Ingeniería de Métodos I	Tecnología Agroalimentaria I	Tecnología Pecuaria	Tecnología de Cereales, Café, Cacao y Derivados
CICLO 09	Formulación y Evaluación de Proyectos	Tecnología de Oleaginosas y Grasas	Tecnología Agroalimentaria II	Planeamiento y Control de Operaciones	Mención
CICLO 10	Proyecto Integrador	Electivo	Electivo	Mención	Mención

Inglés · Formación Básica · Gestión · Especialidad · Electivos · Mención

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES[1]

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por ______________________________ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad ______________________________. La meta de este estudio es ____

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará _____ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, ____ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

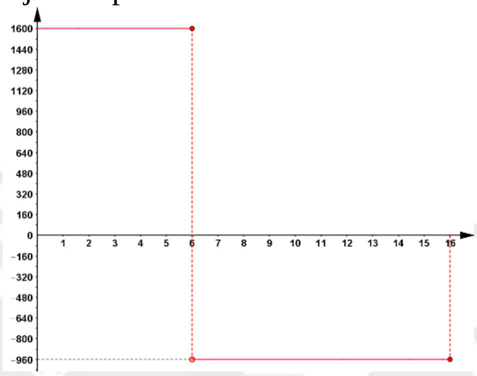
Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con ________________________________ al correo _______________________ o al teléfono ____________.

Nombre completo del (de la) participante	Firma	Fecha
Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha

[1] Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

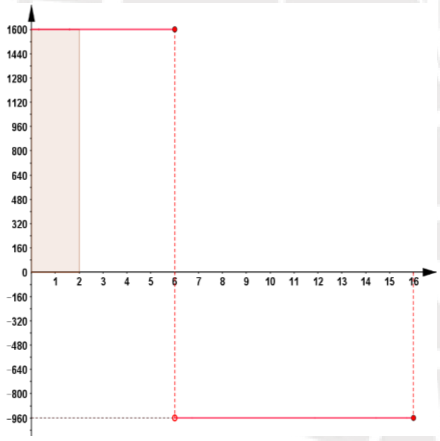
Actividad 1: Producción del jugo de mango

El gráfico muestra el comportamiento que presenta el flujo de la mezcla del zumo de mango en un tanque de pasteurizado inicialmente vacío, cuya unidad de medida está representada en litros/hora, en un día de trabajo compuesto de dos turnos de horas cada uno.

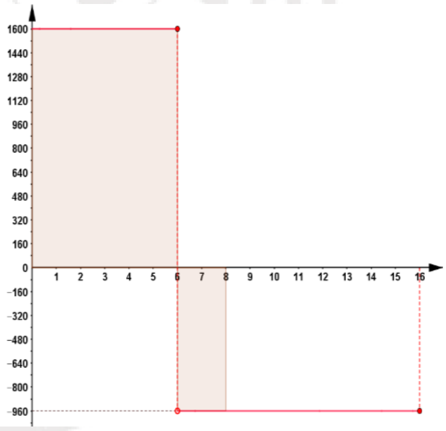


Tomando en cuenta las variables involucradas en el proceso de producción del jugo de mango, ¿qué significado tiene para usted la región sombreada en cada caso?

a)

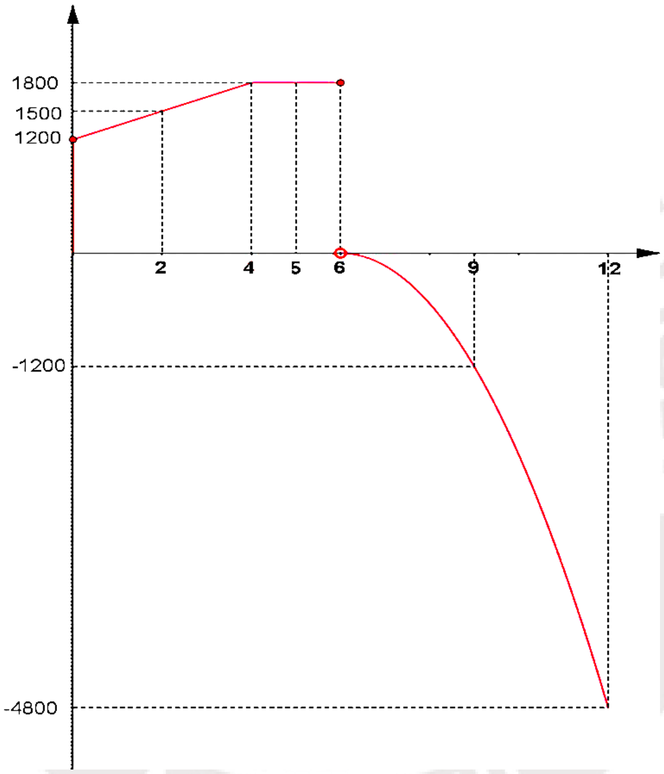


b)



Actividad 2: Situación inesperada en la producción

Un determinado día el ingeniero responsable de la producción detectó un retraso en la extracción del zumo de mango, por lo cual debe acelerar el proceso de pasteurizado y con ello no afectar el proceso de envasado. Para lograr este fin el ingeniero proyecta que dicho proceso se debe realizar en 12 horas y además el flujo de la mezcla en litros por hora en el tanque de pasteurizado vacío inicialmente debe seguir el comportamiento representado en el siguiente gráfico. Considere que el tramo curvo se modela con una función cuadrática con vértice en el punto (6, 0).



1. **Debido** a que se acelera el proceso, se debe hacer un seguimiento al volumen que se va acumulando en el tanque de pasteurizado a medida que pasan las horas. El ingeniero encargado de proceso recomienda medir el volumen de la mezcla en los siguientes tiempos:
   a) A dos horas de iniciado el proceso.
   b) A cinco horas de iniciado el proceso.
   c) A nueve horas de iniciado el proceso.
   d) A doce horas de iniciado el proceso.

2. Para tener evidencia de lo ocurrido en el proceso pasteurizado, el ingeniero solicita realizar la gráfica de la función que representa el comportamiento del volumen de la mezcla a medida que pasan las horas. Realice un esbozo de la gráfica que modela el volumen acumulado de la mezcla en el tanque a medida que pasen las horas.

3. Gracias a los datos obtenidos en los ítems 1) y 2), y con la ayuda del software GeoGebra, el departamento de producción realiza una aproximación para el comportamiento del volumen acumulado a medida que transcurren las horas; para validar el modelo encontrado y cumplir las normas de calidad establecidas el ingeniero responsable recomienda calcular el flujo (litros/hora) a partir de la representación gráfica del volumen acumulado.

   Para realizar dicha validación el departamento de producción presenta un modelo aproximado del comportamiento del volumen a medida que transcurren las horas en el archivo MODELO_APROXIMADO.ggb, el cual está ubicado en el escritorio de cada máquina. Compruebe si el modelo presentado cumple los requerimientos del ingeniero responsable de la producción.

4. La gerencia realiza un estudio de mercado a nivel nacional, el cual muestra que el jugo es muy dulce y espeso sólo para los habitantes del departamento de Trujillo, por tal motivo la empresa decide disolver el zumo de mango que está destinado a ese departamento. El proceso de disolución del zumo consiste en agregar inicialmente 1300 litros de agua al tanque antes de verter el zumo de mango.

   El ingeniero encargado de esta producción recomienda realizar un seguimiento al volumen del zumo, ya disuelto, en el tanque a medida que transcurren las horas, para ello se debe realizar un gráfico que represente el compartimiento del volumen del zumo de mango, disuelto, en el tanque de pasteurizado a medida que transcurren las horas. Considere que la disolución de la mezcla ocurre de manera instantánea y que la mezcla que se obtiene es homogénea.