PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN ABORDAJE DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE POR MEDIO DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN ESTUDIANTES DE ECONOMÍA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Daniel Giovanni Proleón Patricio

ASESORA

Katia Vigo Ingar

Noviembre, 2018

A mis padres María y Rigoberto

por el amor que siempre me han dado

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Katia Vigo Ingar, por su constante apoyo en la investigación, revisión y sugerencias, por su paciencia, que hicieron posible mejorar las versiones preliminares y la versión final de la presente investigación.

A mi profesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por sus enseñanzas y sabios consejos que hicieron posible que pueda concluir esta etapa académica de mi vida.

A la miembro del jurado, Dra. Maria José Ferreira Da Silva por sus colaboraciones y sugerencias realizadas de los avances de la presente tesis.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por compartir sus conocimientos y experiencias profesionales durante las clases, despertando siempre mi interés en el campo de la docencia.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la coordinación de las Representaciones en los Registros de Representación Semiótica (gráfico, algebraico y natural) que estudiantes de Economía de una universidad particular de Lima, realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al Multiplicador de Lagrange. Para poder llevar a cabo este trabajo, hemos revisado antecedentes de investigación que tienen como objeto matemático al Multiplicador de Lagrange, así como funciones reales de varias variables, ya sea con el empleo de la tecnología o sin ella. Por otro lado, hemos justificado la realización de nuestra investigación por medio de aspectos académicos, curriculares y personales para poder mostrar la pertinencia del presente trabajo. El marco teórico empleado pertenece a la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995), mediante el cual podremos analizar las coordinaciones realizadas por los estudiantes cuando resuelvan una situación problema. El referencial metodológico empleado es Aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID) de Artigue (1995), cuya estructura guiará nuestra tesis. Con respecto a la etapa experimental, se escogieron dos parejas de estudiantes, quienes resolvieron una situación problema de una actividad, en la cual utilizaron el software Geogebra para su realización. Para finalizar, se realizó el análisis de los resultados obtenidos en la situación problema, en el cual se confrontaron los análisis a priori y a posteriori, para observar si los resultados obtenidos fueron los esperados por el investigador. Siendo así, se concluye que el software Geogebra favorece la conversión de representaciones en el registro algebraico para representaciones en el registro gráfico. Por otro lado, el uso de la TRRS permitió identificar las dificultades por las cuales los estudiantes no lograron la coordinación de registros.

Palabras clave: Multiplicador de Lagrange; Teoría de Registros de Representación Semiótica; Situación Problema; TICS.

ABSTRACT

The main objective of the present work is to analyze the coordination of the Representations in the Registries of Semiotic Representation (graphic-algebraic-natural language), that students of Economics, of a public university in Lima, perform when they develop a problem issue related to the Lagrange Multiplier (LM) to carry out this thesis, we have reviewed research backgrounds that has have as a mathematical object of study the LM, whether it is with the use of technology or without it. Also, we have reviewed and analysed the applications that are presented in the experiments carried out in those investigations, as well as the use of the instruments used for data collection, which serves as a guide for the design of the activities present in the problem situation . On the other hand, we have justified the realization of our research taking into account the academic, curricular, personal and professional aspects in order to show the relevance of the execution of our work. The theoretical framework use is that of the Theory of Registries of Semiotic Representation (TRRS) of Duval (1995), provides us with valuable and necessary tools to understand and interpret the transformations made by the subjects of research when a problem situation occurs. Likewise, we have chosen as a methodological reference aspect of the Didactic Engineering (ID) of Artigue (1995) whose structure will guide our tesis. To carry out the experimental stage, we have chosen two couples who will participate in a problematic situation, composed of two activities, in wich they used the Geogebra software for its realization. Finally, an analusis was made of the results obtained from the problematic situation, in wich we compared the a priori analysis and the a posteriori analysis, the characteristic of the ID, to observe whether the results were or were not predicted by the researcher. Thus, it is conclude that the use of the GeoGebra software favours the conversion of representations in the algebraic register for representations in the graphic register. On the other hand, the TRRS allows us to explain how conversions and treatments are developed, also to identify the difficulties for which students do not manage to coordinate.

Key words: Fundamental Theorem of the calculation, TFC, Conversion, Treatment, Coordination, Situation Problem, Graphic Record, Algebraic Record.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

Nuestro interés por analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan los estudiantes de Economía, en el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange, surgió de observar que en la práctica docente, los alumnos movilizan únicamente dos registros de representación, el algebraico y la lengua natural. Esta materia es enseñada en el curso del segundo ciclo Matemáticas II de la Universidad del Pacífico, en Lima – Perú.

Tenemos como objetivo específico identificar qué registros de representación semiótica logran movilizar los estudiantes y determinar qué tratamientos y conversiones logran realizar dichos estudiantes. Para lograr nuestros objetivos, los alumnos contarán con el apoyo del software Geogebra, pretendemos generar una situación problema, por el cual los alumnos logren coordinar los registros de representación semiótica.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma:

En el primer capítulo se aborda la problemática de investigación, en la cual hemos realizado una revisión de los antecedentes de investigaciones en base al Multiplicador de Lagrange, la justificación de nuestra investigación, el marco teórico referente a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y los aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1998), con lo que organizaremos nuestra tesis.

En el segundo capítulo se basa en el Análisis preliminar, en donde hacemos un estudio histórico del Multiplicador de Lagrange, el estudio matemático y en análisis didáctico del Multiplicador de Lagrange.

En el tercer capítulo desarrollamos la experimentación y el análisis, en donde se expone el escenario de experimentación y el análisis a priori y a posteriori de la situación problema planteada en la tesis. Usaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica para validar nuestros resultados.

Finalmente, mostraríamos nuestras consideraciones finales de estudio.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo exponemos los antecedentes, la justificación para desarrollar nuestra tesis, el marco teórico, la pregunta con los objetivos de investigación y la metodología a emplear en nuestra investigación.

1.1 Antecedentes

Realizamos una revisión bibliográfica con respecto a la enseñanza y al aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de varias variables, con la finalidad de ubicar nuestra investigación frente al conocimiento actual que se dispone en Educación Matemática. Sobre el asunto, consideraremos cuatro tesis doctorales, una tesis de maestría y un artículo de referencia.

Ingar (2014) en su investigación, analizó el proceso de visualización durante el aprendizaje de las nociones de valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables en alumnos de ingeniería. La metodología que se emplea en este estudio es la Ingeniería Didáctica.

La autora realizó su estudio con alumnos de la Facultad de Ingeniería de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao, en el curso Cálculo III que abarca el Cálculo diferencial e integral de varias variables. El objetivo de su investigación fue partir de la noción de visualización para el registro figural y adaptarla para el registro gráfico y, entonces, analizar el proceso de visualización durante el proceso de aprendizaje de las nociones de valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales de los alumnos de ingeniería.

La investigación se enmarca en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval, de manera particular en las aprehensiones perceptiva, discursiva, operatoria y secuencial de un gráfico representado en el *CAS Mathematica* y en la articulación entre el registro gráfico y el algebraico. El referencial teórico se fundamenta, también, en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, pues se inició con la propuesta de situaciones que tiene como escenario la posición del profesor investigador al frente de un grupo de estudiantes, en un *milieu* constituido por un laboratorio de computación, preguntas y devoluciones.

Los alumnos que llevaron el curso por primera vez, trabajaron en grupos de dos, formando así cinco grupos. Las situaciones didácticas fueron organizadas en base a un problema real que no era común en los libros didácticos, las cuales fueron presentadas a partir del registro de lengua natural y del registro gráfico. Estas situaciones posibilitaron las conversiones para el registro algebraico y posteriormente para el registro gráfico, y viceversa. Con respecto al registro gráfico, los tratamientos se dieron por las modificaciones ópticas, posicionales y mereológicas en la acción de observar la relación entre las superficies y los planos perpendiculares al eje z. Con respeto al registro algebraico, hubo tratamientos que se dieron en las operaciones con derivadas parciales y en la solución del sistema de ecuaciones de dos variables.

El análisis a posteriori de las situaciones didácticas permitió percibir que los alumnos tuvieron dificultades en realizar la conversión de representaciones del registro en lengua natural para el registro algebraico. Sin embargo, coordinaron los tres registros de representación semiótica: lengua natural, algebraico y gráfico.

Según Ingar (2014), los alumnos no lograron realizar de manera correcta la construcción de la noción de máximos y mínimos locales de una función de dos variables reales y su representación algebraica. Estos errores fueron producto de la falta de claridad en la determinación y representación del dominio y de la imagen de una función de dos variables reales.

En la representación gráfica en el *CAS Mathematica*, los alumnos identificaron las variables visuales propias de esta representación gracias a la aprehensión operatoria y a las modificaciones ópticas, posicionales y mereológicas. Ellos tuvieron dificultades en articular las variables visuales con los valores significantes del registro algebraico, presentado en las definiciones y teoremas de los valores máximos y mínimos de funciones de dos variables reales. Es decir, el estudio del registro gráfico en $\mathbb{R}^3$ promovió la identificación de las distintas aprehensiones de los estudiantes en la interacción con el *CAS Mathematica*.

Lo relevante de esta investigación es el tratamiento de las representaciones de funciones reales de dos variables en el registro gráfico, centrando su estudio en las aprehensiones en el registro gráfico y en el uso de la tecnología, en este caso el *CAS Mathematica* como medio para el aprendizaje de los valores máximos y mínimos en varias variables.

Xhonneux (2011) realiza un estudio sobre el aprendizaje del Teorema de Lagrange en estudiantes universitarios de matemática y economía. El autor utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como base teórica para analizar y modelar la actividad matemática relativa al Teorema de Lagrange. En este sentido, crea un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) que será expresado en términos de Organizaciones Matemáticas. Con respecto a las diferentes formas de enseñanza del Teorema de Lagrange, el autor encuentra aspectos distintivos en los cinco manuales analizados (notas de clase) que corresponden a cinco cursos distintos.

Tres de estos manuales son destinados a estudiantes de economía del primer, segundo y tercer año de bachillerato, mientras los otros dos son destinados a estudiantes de matemáticas del primer año de bachillerato. Por un lado, en los manuales estudiados, se mostraron dos tipos de discursos justificativos de la técnica (tecnología) según los cuales Xhonneux (2011) clasificó como manuales deductivos e inductivos. Respecto a los deductivos, estos muestran una separación de las tareas procedimentales (tareas que expresan una serie de operaciones necesarias para completar la tarea demandada) de las estructurales (tareas como "explicar", "interpretar", "definir", “analizar”, “resumir", etc.). De esta manera, las tareas estructurales son trabajadas antes de desarrollar las procedimentales. Además, existe en estos manuales una banalización de la resolución de problemas (tarea procedimental); es decir, no prioriza de manera exhaustiva esta tarea. En relación a los inductivos, estos trabajan de manera conjunta las tareas procedimentales y estructurales y abarca principalmente la resolución de un problema de optimización bajo restricciones de igualdad.

Por otro lado, el autor mostró dos modos de intervención de la técnica en los manuales estudiados: puntual y genérico. En relación a los manuales de modo puntual (usados por los estudiantes de matemática), se focaliza en ejemplos concretos para presentar una nueva técnica, lo que no permite mostrar la diversidad de problemas existentes. Un ejemplo del modo puntual es el siguiente: “Resolvamos el problema propuesto a modo de introducción eligiendo como función de utilidad $U(x, y) = xy$.” (Xhonneux, 2011, p.174).

En cuanto a los manuales de modo genérico (usados por los estudiantes de economía), la técnica interviene no solo por medio de elementos concretos sino por medio de símbolos genéricos, como por ejemplo ($f(x, y), \nabla g(x, y)$, etc), la independencia de estas técnicas permite su reutilización en los diferentes contextos. Un ejemplo del modo genérico es el siguiente: “La proposición siguiente (que no demostraremos) nos proporciona un test basado en las segundas derivadas para decidir si un punto estacionario del Lagrangiano corresponde a un máximo o a un mínimo” (Xhonneux, 2011, p.174). De esta manera, el modo genérico va siempre acompañado de ejemplos.

A propósito de las funciones de la prueba del Teorema de Lagrange, el autor reconoce en los manuales y en los cursos dos aspectos distintivos de esta prueba: verificativo y explicativo. La prueba cumple un rol verificativo cuando el objetivo es comprobar la veracidad (validar) de una conjetura. Mientras que, cumple un rol explicativo cuando permite entender con mayor claridad el teorema. En este sentido, el autor destaca que en los estudiantes de Matemática prima el aspecto riguroso y verificativo de la prueba; mientras que en los de Economía prima el aspecto simplificativo y explicativo. Además, identifica la preferencia del uso del Teorema de Funciones Implícitas en la prueba del Teorema de Lagrange en los cursos de estudiantes de Economía. Mientras que la mayoría de los estudiantes de matemáticas evitan recurrir a este.

Respecto a las dificultades enfrentadas por los estudiantes, se mostraron a lo largo de la transposición didáctica, que estas están asociadas al hallazgo de soluciones entre los candidatos (posibles valores que optimizan la función objetivo) con la condición de regularidad. Adicionalmente, se encontraron otras dificultades, pero más relacionadas al funcionamiento interno de las matemáticas; es decir, relacionadas a las dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones o en la modelamiento matemático de un problema.

Xhonneux (2011) muestra las diferencias de enseñanza del Teorema de Lagrange cuando esta se dirige a estudiantes de matemáticas y cuando se dirige a estudiantes economistas. En cuanto a las diferencias encontradas (ver Cuadro 1), podemos mencionar los siguientes aspectos distintivos: a) introducción del Teorema de Lagrange en clase, b) aplicación del Teorema de Lagrange, c) interpretación del Multiplicador de Lagrange.

Cuadro 1. Comparación institucional basada en el cuestionario para profesores.

Aspecto	Curso para matemáticos	Curso para economistas
Importancia del Teorema de Lagrange	Un resultado más entre otros	Resultado importante ya que es útil para los siguientes estudios
Tratamiento de las restricciones de desigualdad	No	Si
Introducción de la función de Lagrange	En el caso general	En el caso de problemas de dos variables bajo una restricción de igualdad
Prueba del Teorema de Lagrange	Uso del Teorema de Funciones Implícitas	Ilustración gráfica más el uso del Teorema de Funciones Implícitas
Ilustración del método de sustitución	Si, para motivar la introducción al Teorema de Lagrange	Si, para motivar la introducción al Teorema de Lagrange
Aplicaciones	En el contexto de la matemática	En el contexto de la economía
Multiplicador de Lagrange	Poca interpretación	Importancia de la interpretación.

Fuente: Xhonneux (2011, p.221)

Con respecto al primer punto, en una clase dirigida a economistas, el teorema es presentado a través de un caso particular simple, para luego formalizar el teorema en mención; en cambio, una clase dirigida a matemáticos no requiere de un caso particular para la presentación general del problema. Con respecto al punto b), los profesores en economía presentan una gran cantidad y diversidad de aplicaciones, específicamente, relacionadas a problemas económicos; en cambio, para los estudiantes de matemática, las aplicaciones son más escasas y teóricas. Con respecto al último punto, el Multiplicador de Lagrange representa un concepto muy importante en una clase dirigida a economistas y lo interpreta a lo largo de las diversas aplicaciones relacionadas con problemas económicos; en cambio no se facilita ninguna interpretación de este concepto para futuros matemáticos.

Alves (2011) realizó un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables. Su objetivo consistió en identificar y en describir las categorías del raciocinio intuitivo (intuición afirmativa, intuición conjetural e intuición anticipatoria), propuesta por Fischbein (1987). Para ello utilizó como herramienta las cuatro fases previstas por la metodología de enseñanza denominada Secuencia Fedathi.

En base a una visión de complementariedad entre la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas y las categorías del Fischbein, el autor implementó situaciones-problema para que los alumnos pasen por dichas categorías. Esta implementación se puso en marcha con el fin de superar y evitar algunos problemas relacionados a conceptos del Cálculo en Varias Variables. Estos problemas fueron identificados durante el análisis de los libros didácticos, en que el autor identificó que las curvas de nivel alrededor de un punto crítico adoptaron formas similares a elipses o circunferencias en la mayoría de los libros. Además, los libros analizados evidencian que los puntos de silla aparecen en el origen y provienen de funciones cuyas gráficas son hipérbolas con asíntotas de ecuaciones $y = x$ o $y = -x$.

En relación a la identificación de los puntos extremos, el investigador observó que las características geométricas son poco exploradas por los libros didácticos consultados en la tesis. En este sentido, se prioriza la aplicación del Test del Hessiano de la segunda derivada para la clasificación de los puntos extremos, sin necesariamente poseer un significado o una imagen mental sobre lo que declara el alumno.

En una primera etapa, aproximadamente 80 estudiantes formaron parte del estudio. Estos alumnos estaban matriculados en el curso de Cálculo III de la Licenciatura en Matemática del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología - IFCE – Fortaleza. En la segunda etapa, el autor seleccionó solo ocho estudiantes con el objetivo de realizar un mejor seguimiento durante cada semestre. El estudio fue desarrollado siempre en el aula y las entrevistas semi-estructuradas fueron aplicadas siempre de modo individual en el transcurso de las sesiones didácticas, durante las clases de "tira dúvidas" (despejar las dudas) y en la aplicación de dos evaluaciones.

Según Alves (2011), los alumnos pueden interiorizar de mejor manera los conceptos del Cálculo de Varias Variables gracias a la exploración didáctica de categorías del raciocinio intuitivo. Este análisis está basado en una mediación didáctica que involucra la exploración de los registros de representación semiótica. Además, el empleo de softwares como el Geogebra y el CAS Maple, puede indicar elementos más significativos con respecto a la transición interna del Cálculo en Una Variable para el Cálculo en Varias Variables.

Lo relevante de esta investigación es que a diferencia de Ingar (2014), el autor, para estudiar los valores máximos y mínimos de funciones de varias variables, utiliza las curvas de nivel; que estudia el cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables, mediado por el software *Maple*.

Henriques (2006) realiza una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de integrales múltiples para los cálculos de áreas y volúmenes en las universidades brasileras y en las clases preparatorias tecnológicas francesas. El autor tuvo dos objetivos principales en su trabajo: comprender mejor las dificultades enfrentadas por los estudiantes en los temas abordados y estudiar el rol que tiene el software Maple para superar estas dificultades, favoreciendo las interacciones entre la representación gráfica y la representación analítica de los objetos concernientes.

Con respecto al marco teórico, el autor se apoya en tres teorías principales: Teoría de Registros de Representación Semiótica, Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental de Rabardel. En cuanto a la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas, ésta le permite definir e interpretar la representación gráfica y la representación analítica de un sólido en los problemas de cálculos de volumen por integración múltiple. Además, se apoyó en la Teoría Antropológico de lo Didáctico para tener una comprensión global, ya que la dimensión institucional es esencial en su investigación. Para completar su estudio, consideró la Teoría Instrumental para abordar el ambiente computacional y de manera particular el aprendizaje de las herramientas tecnológicas.

En cuanto a la metodología, el autor consideró aquella que es propia de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. De esta manera, la investigación consistió de cuatro partes principales: un análisis institucional de la enseñanza de las integrales múltiples, un análisis de las prácticas de los alumnos y docentes en integrales múltiples y un estudio del entorno informático del *Maple* y experimentos con y sin el *Maple*.

En relación a los estudiantes, Henriques (2006) constató de manera general que ellos representan gráficamente los sólidos del espacio tridimensional por medio del lápiz y papel. La utilización de la perspectiva, que daría al alumno un confort tridimensional (el alumno prefiere trabajar en dos dimensiones que en tres), en un ambiente bidimensional depende únicamente de sus habilidades al realizar el diseño. Concluye además que el uso pertinente de un ambiente computacional, como el Maple, puede ser de gran ayuda, porque permite un control sobre las variables visuales en la interpretación global de la figura. Al contrario del ambiente lápiz y papel, que no lo permite con tanta facilidad, pues es algo difícil de hacer.

En lo relativo a los profesores, el autor sostiene que ellos muestran predisposición para aplicar las estrategias de interpretación geométrica del sólido y de representación gráfica del sólido. De esta manera, reconocen la existencia de ciertas dificultades referidas a la enseñanza de las Integrales Múltiples, en particular al tratamiento de los ejercicios que consideran a priori difíciles.

Lo relevante de esta investigación es el uso de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en el Cálculo de Varias Variables y además el uso de la tecnología en el curso de Cálculo de nivel superior.

Por otro lado, Trigueros y Martínez-Planell (2010) realizaron una investigación que se basó en la comprensión de cómo los estudiantes trabajan con funciones de dos variables, en particular, en investigar la relación entre la noción que tienen los alumnos sobre subconjuntos del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ y en la comprensión de los gráficos de las funciones de dos variables reales.

Los investigadores usaron como marco teórico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) de Dubinsky y la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval. La teoría APOE se utilizó para modelar el desarrollo del concepto de funciones de dos variables y la teoría de registros de representación semiótica proporcionó las herramientas conceptuales para analizar la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y su papel en la comprensión de las ideas matemáticas consideradas.

Como sujetos de estudio fueron considerados nueve estudiantes que previamente habían llevado un curso de cálculo en varias variables. Los autores concluyeron que la comprensión de los gráficos de funciones de dos variables no es fácil para los estudiantes pues está relacionada con la estructura del esquema que los alumnos tienen de $\mathbb{R}^3$. En este sentido, se percibió que el paso de graficar funciones de una variable a funciones de dos variables no es un paso directo.

En dicho estudio se determinó que la posibilidad de intersectar superficies con planos e inferir el resultado de dicha intersección juega un papel importante para la comprensión de gráficos de funciones de dos variables. Esto fue particularmente difícil para los estudiantes, de los cuales sólo uno pudo construir dicha representación gráfica. De esta forma, Trigueros y Martínez-Planell (2010) indican que se requiere de un esfuerzo más consistente cuando se enseñan cursos de cálculo en varias variables.

Después de hacer una revisión de algunas investigaciones referentes al cálculo de varias variables en Educación Matemática, podemos afirmar que estas van creciendo progresivamente, las cuales abordan temas como integrales múltiples, optimización de dos variables, derivadas parciales, curvas de nivel, optimización con restricciones, etc. En relación al marco teórico empleado, cuatro de las investigaciones usan la Teoría de Registros de Representación Semiótica, dos la Teoría Antropológica de lo Didáctico, una la Teoría de Situaciones Didácticas y una el Enfoque Instrumental. En relación a la metodología empleada, dos investigaciones aplican la Ingeniería Didáctica, dos aplican la propia metodología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y una la metodología de la Secuencia Fedathi. Destacamos además que en estas investigaciones se analizan las dificultades referentes al cálculo en varias variables y/o el uso pertinente de un ambiente computacional que propicie el proceso de la visualización. Observamos finalmente que tres investigaciones mostraron la necesidad del estudio del registro gráfico en $\mathbb{R}^3$ y de las aprehensiones para la visualización del objeto matemático.

De lo expuesto, consideramos que las investigaciones revisadas contribuyen a determinar nuestro foco de investigación. Siendo así, podremos establecer el problema que deseamos analizar, formular las preguntas de investigación y determinar el marco teórico que nos permita responder y analizar los resultados obtenidos.

En base a ello, presentamos nuestra justificación en relación a los antecedentes previamente explicados y a la malla curricular de la carrera de Economía de la universidad en donde aplicaremos la investigación.

1.2 Justificación

En base a nuestras referencias, ellas muestran que existen dificultades en el estudio del cálculo de varias variables, desde la representación de una terna ordenada hasta el estudio de derivadas parciales, integrales dobles, optimización de funciones, etc. Cabe mencionar que Ingar (2014) propone estudiar el Multiplicador de Lagrange a futuro, ya que cuando los estudiantes abordan este tópico, utilizando las representaciones gráficas, presentan problemas en dicho tópico. Por otro lado, en el estudio de Xhonneux (2011) se hace un intenso estudio del Teorema de Lagrange, desde el punto de vista de la Teoría Antropológico de lo Didáctico, lo cual nos llamó la atención, y por lo que decidimos estudiar el Multiplicador de Lagrange.

Según nuestra práctica docente y por la revisión de las sumillas, conjeturamos que la enseñanza del Multiplicador de Lagrange se enfoca en el tratamiento algebraico y no, con frecuencia, en el registro gráfico. Por otro lado, en la lectura de las distintas investigaciones, hemos observado que existen problemas en la conversión del registro algebraico al gráfico, desde Henriques (2006), Ingar (2014) hasta Alves (2011), los cuales afirman que un adecuado uso de un ambiente computacional favorece dicha conversión. Siendo así, estamos interesados en el uso del *Geogebra* debido a que es un software de representación dinámica de uso libre, de fácil manipulación y que se puede instalar con facilidad en diversos sistemas operativos.

Por otro lado, en cuanto a la relevancia profesional, hemos escogido cinco facultades de Economía de distintas universidades del Perú, en donde se imparte nuestro objeto de estudio. La información del Cuadro 2 se obtuvo a través de las mallas curriculares y de los sílabos, que se encuentran disponibles en la web.

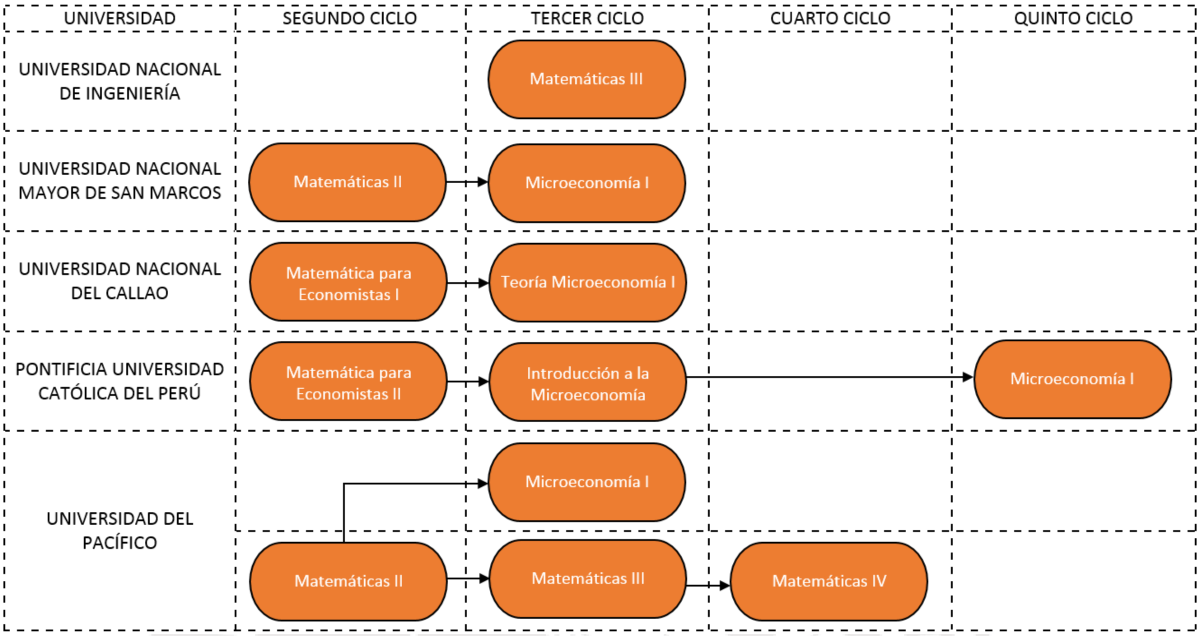
Cuadro 2. Cursos en donde se enseña el Multiplicador de Lagrange.

Curso	Carrera	Universidad
Matemática III	Ingeniería Económica	Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)
Matemática II	Economía	Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM)
Matemática para Economistas I	Economía	Universidad Nacional del Callao (UNAC)
Matemática para Economistas II	Economía	Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Matemáticas II	Economía	Universidad del Pacífico (UP)

En el Cuadro 2, mostramos los cursos en donde se enseña el Multiplicador de Lagrange en dichas universidades, los cuales se imparten en su gran mayoría en el segundo semestre, con excepción de la Universidad Nacional de Ingeniería en donde se imparte a partir del tercer semestre.

A continuación, mostramos en el Cuadro 3 los cursos en donde se utiliza el Multiplicador de Lagrange, en las distintas universidades seleccionadas, según consta en los sílabos respectivos.

Cuadro 3. Cursos en donde se utiliza el Método de los Multiplicadores de Lagrange en universidades del Perú



Del Cuadro 3 podemos apreciar que la mayoría de los cursos de Microeconomía poseen como requisito algún curso de Matemática en el cual se enseña el Multiplicador de Lagrange. Para lograr este cuadro fue necesario recurrir a los sílabos de los distintos cursos que ahí se presentan.

Así, podemos afirmar que el Multipicador de Lagrange es un tema imprescindible para comprender tópicos de Microeconomía, como la maximización de la utilidad del consumidor bajo una restricción presupuestaria o la minimización del costo del productor bajo una restricción presupuestaria.

Por lo expuesto y por la importancia del objeto matemático en la formación del economista es que creemos necesario abordar el Multiplicador de Lagrange, dentro del punto de vista de la TRRS. Para ello, explicaremos en seguida nuestro marco teórico, tratando de asegurar la posterior comprensión de nuestra pregunta y objetivos de investigación.

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Duval (1995) afirma que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Esto no es la excepción en Matemática, en donde la única manera de acceder a los objetos es a través de sus distintas representaciones. La palabra “representación” dentro de la Matemática es muchas veces distorsionada, relegando su significado sólo a su contexto verbal, al de “representar” o al de “describir.”

Para el autor un punto estratégico en la comprensión de la Matemática, es el de no confundir a los objetos matemático con sus representaciones. Por ejemplo, si se pregunta a un estudiante de primer ciclo universitario: ¿qué es una parábola?, podemos tener como respuesta un esbozo una curva hecha con lápiz sobre una hoja de papel; o una regla de correspondencia dada por $y = ax^2 + bx + c$, escrita con un lápiz sobre una hoja de papel. Las respuestas tratan de representaciones semióticas diferentes del mismo objeto matemático, mas no es el objeto matemático pedido. En este sentido, el investigador, afirma que toda confusión traerá consigo una pérdida de la comprensión y los conocimientos adquiridos pierden su valor en el contexto del aprendizaje.

Una representación semiótica es una representación de una idea o de un objeto del saber, la cual es construida a partir de la movilización de un sistema de signos. Su significado es determinado, por un lado, por su forma en el sistema semiótico y por otro lado, por la referencia del objeto representado.

En este sentido, el autor afirma lo siguiente:

> […] un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también sentido. Las posibilidades de combinación son las que le dan a un sistema semiótico su potencia inventiva y le permiten efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación. Estas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio. (2004, p.43)

Como ejemplos de representaciones semióticas, tenemos un enunciado en lengua materna, una expresión algebraica, un gráfico de una función, un conjunto de números; los cuales pertenecen a sistemas semióticos diferentes, con diferentes signos.

Según el autor, para que exista la aprehensión de un objeto matemático, es necesario que ocurran dos procesos relacionados con el aprendizaje en matemática: la semiosis (la aprehensión o la producción de una representación semiótica) y la noésis (la aprehensión conceptual del objeto).

Para Duval (1995), un registro de representación semiótica es un sistema semiótico en el cual se distinguen tres actividades cognitivas fundamentales, ligadas a la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión.

La **formación** de una representación semiótica es basada en las reglas de conformidad (tales como las reglas gramaticales cuando se trata de la lengua materna, reglas de representación gráfica, reglas de cálculos numéricos, etc.) y en la selección de ciertas características del contenido envuelto. Por ejemplo, la composición de un texto, escribir una fórmula, graficar una superficie, etc.

En nuestra investigación, por ejemplo, la representación de la función de Lagrange en el registro algebraico es dada por $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, donde f es la función a optimizar y $g = 0$ es la restricción; esto es debido a que en su formación se movilizan características y reglas de conformidad, tales como las variables matemáticas λ , x e y, pares ordenados, ternas ordenadas, signos de adición y de multiplicación y el signo de igualdad. Recordemos que λ es la representación del Multiplicador de Lagrange.

Duval (2011) afirma que las computadoras con sus softwares, generan representaciones semióticas, e hizo las siguientes observaciones: a) Las representaciones que las computadoras generan son las mismas que las que se producen en papel para una aprensión visual, de esta manera las computadoras no constituyen un nuevo registro de representación. b) Ellos constituyen un modo fenomenológico de producción, fundamentado en la aceleración de los tratamientos. c) Las representaciones semióticas no discursivas se vuelven manipulables como objetos reales.

Ingar (2014), afirma que la formación en el registro gráfico de una función de dos variables utilizando el software *Mathematica* se da por medio de comandos del software; en nuestro caso utilizaremos el software *Geogebra*. En este sentido, para explicar la formación de una representación del objeto función real de dos variables usando el *Geogebra*, coincidimos con la autora cuando afirma que el contacto del sujeto con la computadora favorece la formación en dicho registro. El *Geogebra*, a través de unos comandos, muestra la representación gráfica de la función en la “Vista Gráfica 3D”. Por ejemplo, para formar una representación gráfica de una función de dos variables representada algebraicamente por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, se debe introducir en la barra de entrada la representación semiótica propia del Geogebra dada por $f(x, y) = x\text{^}2 + y\text{^}2 + 1$, luego presionamos la tecla “enter” y generamos su representación en el registro gráfico CAS del Geogebra mostrado en la Figura 1.

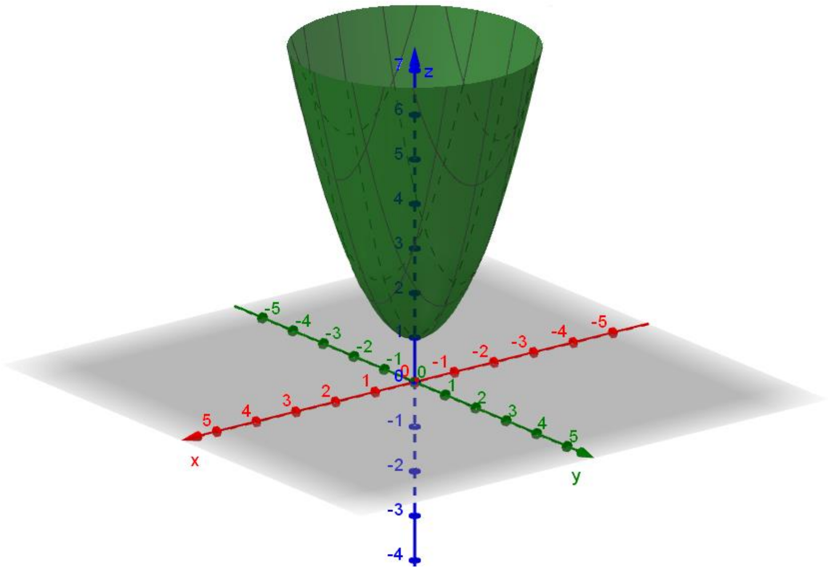


Figura 1. Formación de una representación gráfica en Geogebra

El **tratamiento** de una representación semiótica es la transformación de dicha representación en otra, en el mismo registro donde fue formada. Para Duval (1995, p. 44), "un tratamiento es una transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema".

Por ejemplo, dada la función a optimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x + y = 1$. Si deseamos determinar las derivadas parciales de la función de Lagrange asociada a f y a la restricción, se tendrá un tratamiento de su representación algebraica $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$ hacia las siguientes representaciones algebraicas: $L_x(x,y,\lambda) = 2x + \lambda$, $L_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda$ y $L_\lambda = x + y - 1$.

La conversión de una representación semiótica es la transformación de dicha representación en una representación de otro registro. Según Duval (1995, p. 46), "la conversión es pues una transformación externa relativa al registro de la representación de partida". Por ejemplo, la traducción de un texto en una o más expresiones algebraicas correspondientes es una conversión de la representación en el registro de la lengua materna para una representación en el registro gráfico.

Por ejemplo, mostramos a continuación (ver Figura 2) una conversión de las curvas de nivel de la función real de dos variables definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$ (para $k = 0,1,4,9$), de la representación gráfica hacía una representación en el registro algebraico.

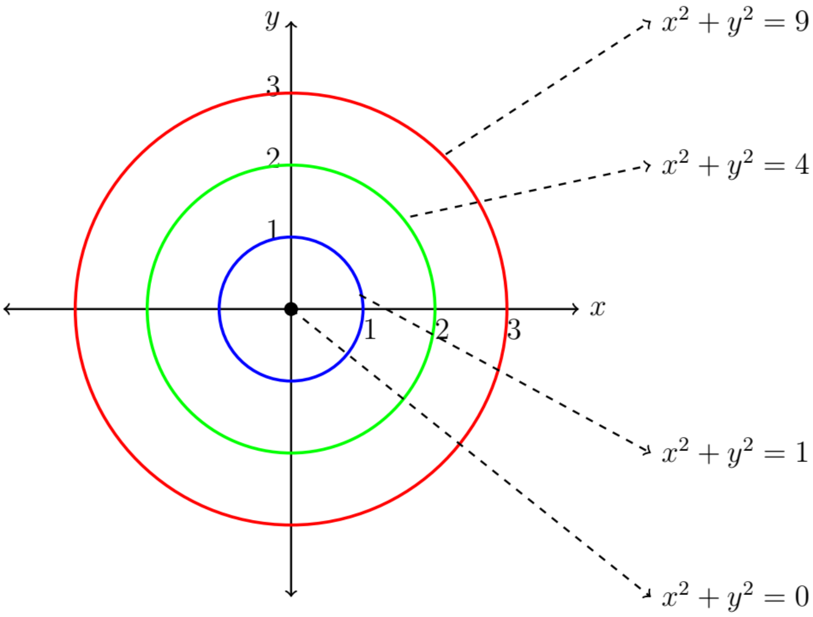


Figura 2. Conversión de una representación en el registro gráfico a una representación en el registro algebraico.

En la Figura 3 mostramos conversiones de representaciones en el registro algebraico ($x^2 + y^2 = 9, y^2 - 4x = 13, y^2 - 4x = 0, y^2 - 4x = -12$) a representaciones en el registro gráfico del Geogebra.

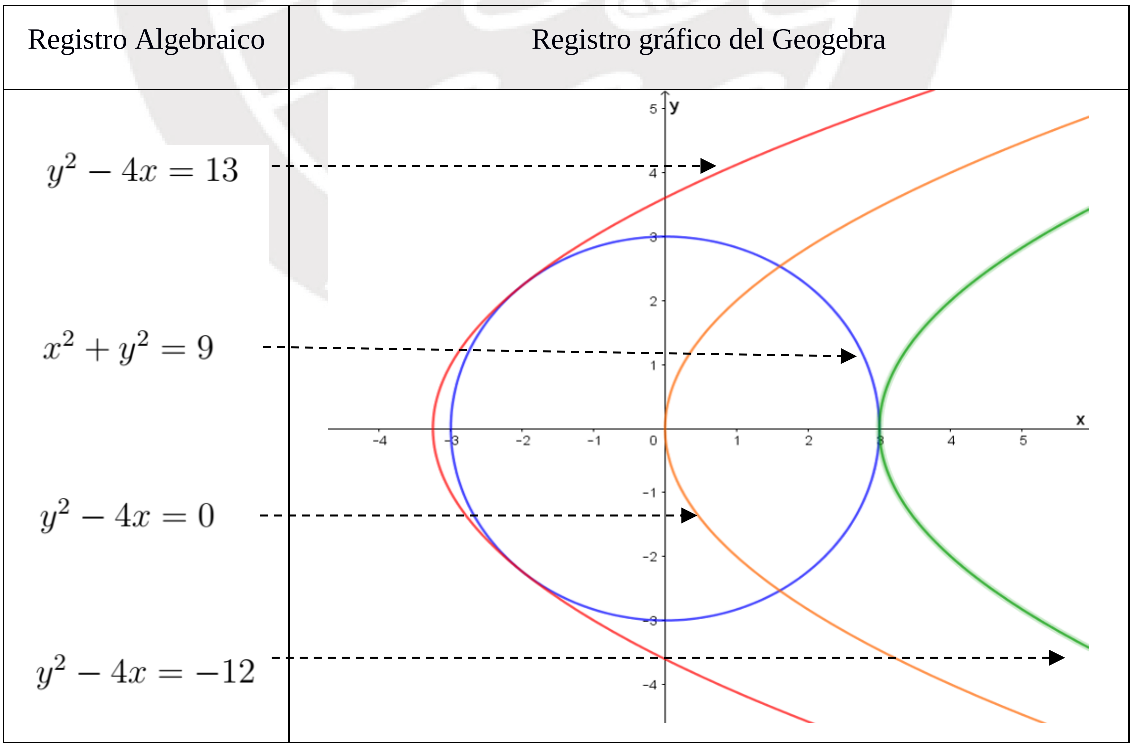


Figura 3. Conversiones de representaciones en el registro algebraico a representaciones en el registro gráfico del Geogebra

Para realizar las conversiones de la Figura 3, se introduce en la barra de entrada del Geogebra las sentencias que aparecen en la Figura 4.

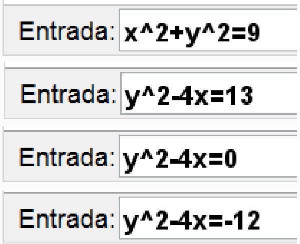


Figura 4. Sintaxis empleada para representar las curvas de la Figura 3 en el registro gráfico del Geogebra.

Respecto a los registros de representación semióticas, Duval (1995) afirma que no es suficiente disponer de varios registros de representación para la comprensión. Es necesario una segunda condición, por la cual, se requiere de la coordinación de representaciones formuladas en distintos registros. En la coordinación, el individuo puede reconocer la representación de un mismo objeto, en por los menos dos registros distintos.

Luego de haber definido el marco teórico del estudio del multiplicador de Lagrange, procederemos a enunciar la pregunta, y los objetivos de la investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

En la carrera de Economía, el multiplicador de Lagrange juega un rol importante pues mediante él es posible comprender tópicos de Microeconomía, como la maximización de la utilidad del consumidor bajo una restricción presupuestaria o la minimización del costo del productor bajo una restricción presupuestaria. Para que esto suceda, es imprescindible que el estudiante logre la coordinación de representaciones formuladas en distintos registros.

Siendo así, formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Estudiantes de Economía coordinan los registros de representación semiótica, en el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange por medio de una situación problema?

Para responder la pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar la coordinación de los registros de representación semiótica que realizan los estudiantes de Economía en el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange, por medio de una situación-problema.

Con el propósito de lograr el objetivo general, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los registros de representación semiótica que movilizan los estudiantes de economía cuando resuelven una situación-problema.
- Determinar los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes de Economía cuando resuelven una situación-problema.

En la siguiente sección se tratarán los lineamientos metodológicos necesarios, a partir del cual podremos responder nuestra pregunta de investigación.

1.5 Metodología de investigación

En esta sección presentamos la metodología de nuestra investigación, la cual responde a una investigación cualitativa. A su vez, mostraremos su pertinencia e importancia para nuestro estudio, detallando los procedimientos metodológicos propios de este tipo de investigación.

1.5.1 Investigación cualitativa

En la metodología cualitativa la investigación produce datos que son descriptivos, como las palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable. Según Bogdan y Biklen (1994), algunas características de este tipo de investigación son las siguientes:

i. En la investigación cualitativa el entorno natural actúa como fuente directa de datos y el investigador como instrumento principal. Es trascendental el entendimiento al cual llegue el investigador después de realizar un análisis de los materiales registrados.
ii. La investigación cualitativa es descriptiva. Los datos recogidos son en forma de palabras o imágenes y no de números. La presentación escrita de los resultados obtenidos contienen citaciones hechas en base a los datos recogidos (transcripciones de entrevistas, notas de campo, fotografías, videos, documentos personales y oficiales) los cuales sirven para fundamentar la presentación.
iii. Los investigadores cualitativos se interesan más por el proceso que de los resultados o productos. Es interés del investigador, el entendimiento de las interacciones y procedimientos en el entorno natural en donde se realiza el estudio.
iv. Los investigadores cualitativos tienden a analizar sus datos de forma inductiva. Los investigadores comienzan el estudio con interrogantes vagamente formulados,

siguiendo un diseño de investigación flexible y desarrollando conceptos, entendimientos y comprensiones, partiendo de pautas de los datos sin evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidas.

v. El significado es de importancia vital en el abordaje cualitativo. Aquellos investigadores que opten por este tipo de abordaje están interesados en la manera en que diferentes personas dan sentido a sus vidas.

En nuestra investigación, con respecto a los ítems i y ii, el investigador interactúa con los alumnos en el aula, haciendo el papel de formador y recoge directamente los datos a través de fichas de observación, archivos, audios, fotos y videos. En referencia a los ítems iii y iv, más que el producto, estamos interesados en comprender cómo se presentan las articulaciones entre los distintos registros que se presentan al desarrollar actividades relativas al método de los multiplicadores de Lagrange, regidos por un marco teórico apropiado. Finalmente, en lo que se refiere al ítem v, el investigador socializará los significados obtenidos por los alumnos al desarrollar las actividades, pues es necesario conocer las manifestaciones de los alumnos. Por lo señalado anteriormente, justificamos que nuestra investigación es cualitativa pues cumple con las cinco características correspondientes a este tipo de investigación.

1.5.2 Aspectos de Ingeniería Didáctica

La metodología de investigación que emplearemos será la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988), la cual es una metodología cualitativa, caracterizándose por poseer un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, la realización, la observación y el análisis de secuencias de enseñanza.

> […] se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, sin embargo, si bien ellas permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no la dejan unir con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Ellas no permiten necesariamente distinguir de forma coherente los objetos de conocimiento. Las investigaciones de macro-ingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales que imponen, se hacen inevitables (p. 286).

Según la autora, a diferencia de otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, ésta metodología se caracteriza por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación relacionadas con ella. De manera general, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase tienen un enfoque comparativo con validación externa, las cuales recurren a la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. En contraste con lo anterior, la Ingeniería Didáctica se sitúa en el registro de los estudios de casos y cuya validación es esencialmente interna, fundamentada en la confrontación entre al análisis a priori y a posteriori.

La investigadora describe la metodología de la Ingeniería Didáctica, por medio de una distinción temporal de su proceso experimental. Dicho proceso comprende cuatro fases: el análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la experimentación y el análisis a posteriori y evaluación.

Análisis preliminar. Se basa en parte, en un marco teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio. Teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, el análisis preliminar se basa también en el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, en el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, en el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y en el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Siendo así, nuestra investigación se basa en el estudio del objeto matemático Multiplicadores de Lagrange.

Para Artigue (1998), el análisis de las restricciones se efectúa distinguiendo tres dimensiones:

- La *dimensión epistemológica* asociada a las características del saber en juego. En nuestra investigación esta dimensión está constituida por una reseña histórica del método de los Multiplicadores de Lagrange y por el aspecto matemático que involucra el enunciado formal del método de los Multiplicadores de Lagrange.
- La *dimensión cognitiva* asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. En nuestra investigación, dicha dimensión se basa en la selección de antecedentes (investigaciones de referencia) que de manera directa o indirecta guarden relación con los Multiplicadores de Lagrange, y con sujetos de estudio de un nivel próximo al de nuestra investigación.
- La *dimensión didáctica* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. En este punto consideramos una revisión bibliográfica de textos usados por los estudiantes, para analizar cómo es transmitido el conocimiento del objeto matemático hacia los mismos.

Concepción y análisis a priori. El investigador decide actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Él percibe que estas variables de comando son apropiadas con respecto al problema estudiado. Con el fin de facilitar el análisis de una ingeniería, la autora clasifica las variables de comando de la siguiente manera:

> Las variables macro-didácticas o globales concernientes a la organización global de la ingeniería y las variables micro-didácticas o locales que son concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase. Tanto unas como otras pueden ser en sí variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. En el nivel micro-didáctico esta segunda distinción es clásica, ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de las variables asociadas con la organización y la gestión del *millieu* […] , las variables didácticas son aquellas cuyo efecto didáctico se ha corroborado (p. 291).

Para la autora, el objetivo del análisis a priori es determinar de qué forma las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, el cual se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos. De esta forma, en el análisis a priori deben considerarse los siguientes puntos:

- Describir las selecciones del nivel local y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Analizar lo qué podría estar en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone durante la experimentación.
- Prever los comportamientos posibles de los estudiantes y tratar de mostrar de que forma el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En nuestra investigación consideraremos las variables micro-didácticas para el diseño de actividades de recopilación de datos, a definir en cada actividad.

Experimentación. Según Artigue (1998), en esta fase se realiza el acercamiento entre los sujetos de investigación y el investigador; además, se llevará a cabo el registro de observación de las actividades elaboradas, las cuales dependen del tipo de instrumento, medio y modo de elaboración. En nuestro estudio, la experimentación comprende la aplicación de los instrumentos de investigación, los cuales constan de fichas impresas con las actividades a ser desarrolladas y preguntas para ser completadas, el uso del software *Geogebra*, un software de captura de pantalla para el análisis posterior y el uso del lápiz y papel, teniendo en cuenta los objetivos y el marco teórico de la investigación.

Análisis a posteriori y validación. Para Artigue (1998), el análisis a posteriori consiste en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, como por ejemplo, producción de los estudiantes, registros de observadores y registro en video. En este análisis de hace necesario una confrontación con el análisis a priori para que sea hecha la validación o no de las hipótesis formuladas en la investigación.

En nuestra investigación, la confrontación corresponde al análisis de los resultados obtenidos en la fase experimental realizada desde el punto de vista de la coordinación de registros y a la problemática de la investigación la que está constituida por los antecedentes, justificación, pregunta y objetivos de investigación.

En el siguiente capítulo realizaremos un estudio del Multiplicador de Lagrange, acorde al análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica.

CAPITULO II: ANÁLISIS PRELIMINAR

Esta parte de la investigación aborda el origen y estudio del Multiplicador de Lagrange y su enseñanza en estudiantes de Economía.

2.1 Un panorama histórico del Multiplicador de Lagrange

Esta sección está basada en el análisis histórico que Xhonneux (2011) realiza del método del multiplicador de Lagrange, que durante los siglos XIX y XX era conocido como multiplicador indeterminado. En este resumen histórico, analizaremos los motivos para la aparición de este método y como se transformó en una herramienta vital de optimización. Además, se mencionarán los aportes de otros autores a la optimización de funciones. Así mismo, estudiamos la incursión de esta técnica en un área importante para esta tesis: la economía.

Según el autor, considera que Joseph Louis Lagrange (1736-1813) es uno de los matemáticos más conocidos de finales del siglo XVIII y sus principales aportes están relacionados principalmente a la teoría de números, las funciones, las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales, la mecánica y el cálculo variacional. Sin embargo, el autor manifiesta que la principal obra de Lagrange es el libro titulado “Mecánica Analítica”, el cual es un resumen de todos los conocimientos adquiridos en mecánica desde Newton con un enfoque algebraico. Así, el matemático presenta los Multiplicadores de Lagrange por primera vez en este libro.

Por otro lado, el autor manifiesta que en la época de Lagrange, no existía una formalización de la definición de función, por ello, el teorema de Lagrange poseía una formulación literaria en sus trabajos originales, que se dio en la primera parte del libro “Mecánica Analítica”. Además, la formulación inicial de los multiplicadores de Lagrange se enmarcó en un problema de estática (estudio de las condiciones de equilibrio de un sistema de partículas) y no en uno de optimización con restricciones.

Así mismo, para el autor, la definición no formal de una función según Lagrange es:

> Llamamos a una función de una o más cantidades a cualquier expresión de cálculo en la que estas cantidades entran de cualquier manera, estén o no mezcladas con otras cantidades que se consideran que tienen valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función puede recibir todos los valores posibles. Por lo tanto, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos que son variables, sin tener en cuenta las constantes que pueden mezclarse con ellas. (Xhonneux, 2011, p.75).

Xhonneux (2011) considera un sistema de partículas con coordenadas "$x, y, z;\ x', y', z'; etc$" que cumpla con las siguientes condiciones "$L = O, M = 0, N = 0, etc.$"; de esta manera la fórmula general de equilibrio para este sistema es la siguiente:

$$\text{“}Pdp + Qdq + Rdr + etc. = 0\text{”}$$

Donde P (respectivamente Q y R) es la fuerza que actúa sobre el punto (x, y, z) con un desplazamiento virtual dp (respectivamente dq y dr), etc. El desplazamiento virtual, en mecánica lagrangiana, es un desplazamiento infinitesimal y atemporal (el movimiento ocurre mientras el tiempo se mantiene fijo).

Al resolver esta ecuación, Lagrange obtiene identidades que el sistema debe cumplir en el equilibrio a través de la eliminación de variables usando las condiciones del sistema. Sin embargo, como el autor lo comenta, para Lagrange este método puede resultar engorroso; ya que puede depender de cálculos demasiado complicados. Por lo tanto, el matemático propone el método de los multiplicadores para la simplificación de la resolución del problema. Según el autor, Lagrange explica este nuevo método de la siguiente manera:

> De ahí resulta que esta regla extremadamente simple para encontrar las condiciones de equilibrio de un sistema cualquiera propuesto. Se toma la suma de momentos de todas las fuerzas que deben estar en equilibrio y se les añade las diferentes funciones diferenciables que deben ser nulas por las condiciones del problema, después de haber multiplicado cada una de estas funciones por un coeficiente indeterminado; se igualará todo a cero, y se tendrá así una ecuación diferencial que se tratará como una ecuación ordinaria de máximos y mínimos, y de donde se sacará tantas ecuaciones particulares finitas como variables tenga; estas ecuaciones, siendo en seguida despejadas, por eliminación de coeficientes indeterminados, darán todas las condiciones necesarias para el equilibrio. La ecuación diferencial del que se trata será entonces de la forma,
>
> $$\mathrm{Pdp + Qdq + Rdr + etc.} + \lambda \mathrm{dL} + \mu \mathrm{dM} + \nu \mathrm{dN} + \mathrm{etc.} = 0$$
>
> En el que λ, μ, ν, etc, son cantidades indeterminadas; a partir de ahora las llamaremos ecuación general de equilibrio.
>
> Esta ecuación dará, relativamente cada coordenada, por ejemplo x, de cada uno de los cuerpos del sistema, una ecuación de la forma siguiente:
>
> $$\mathrm{P}\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{etc.} + \lambda\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dx}} + \mu\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dx}} + \nu\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{etc.} = 0$$
>
> Resulta que el número de estas ecuaciones será igual al número de todas las coordenadas de los cuerpos. Las llamaremos ecuaciones particulares de equilibrio. (Xhonneux, 2011, p.75-76).

El autor señala que, luego de la presentación del método descrito anteriormente por Lagrange, el matemático lo aplica a la fórmula de equilibrio de cuerpos continuos, de los cuales todos los puntos son extraídos por fuerzas arbitrarias. Además, el matemático intenta hacer una analogía en el campo de la Matemática con el problema de máximos y mínimos de funciones. Sin embargo, por el interés de Lagrange por la matemática y la física, el Teorema de Lagrange nace de su interés físico y no matemático como se creería. Además, Xhonneux (2011) menciona que Lagrange no solo usó su método de multiplicadores en el dominio de la mecánica analítica, sino lo aplicó en otros campos como el del cálculo variacional.

Por otra parte, el autor menciona que Lagrange publica "La teoría de funciones analíticas" en 1811, y en esta obra, aplica el método de multiplicadores a los problemas de optimización con restricciones de igualdad; es decir la búsqueda de máximos y mínimos de funciones de varias variables $f(x, y, z, \ldots)$ restringido a $\phi(x, y, z, \ldots)$=0. Además, el método propuesto por Lagrange puede ser aplicado a funciones definidas sobre curvas, superficies curvilíneas y sus generalizaciones multidimensionales; y no solo a funciones en el plano.

Según el autor, Lagrange justifica lo anterior de la siguiente manera:

> Se puede reducirlas a este principio general. Cuando una función de varias variables debe ser un máximo o un mínimo, y que hay entre estas variables una o varias ecuaciones, será suficiente añadir a la función propuesta las funciones, que deben ser nulas, multiplicar cada una por una cantidad indeterminada, y de buscar enseguida el máximo o mínimo como si las variables fueran independientes. Las ecuaciones que encontraremos combinadas con las ecuaciones dadas, servirán para determinar todas las incógnitas. (Xhonneux 2011, p.77).

Además, el autor menciona aparte de las contribuciones puramente teóricas a la optimización hechas por Lagrange, el aporte de Agustín Louis Cauchy (1789-1857), el cual propone el método del gradiente; que fue publicado en su obra "Métodos generales para la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas" en 1847 y consiste en la resolución iterativa para problemas de minimización de funciones en varias variables sin restricciones.

El autor señala que, con respecto a la aplicación del método de Lagrange, esta no solo se dio en el campo de la matemática y física sino en otras áreas como la economía, donde la aplicación en esta última área surgió gracias a la necesidad de solucionar nuevos problemas de optimización (problemas con restricciones de desigualdad) en el contexto de la segunda guerra mundial. Por consiguiente, debido a la importancia que tiene la aplicación del método de Lagrange en la economía para esta tesis; en los siguientes párrafos analizaremos la incursión histórica de esta técnica en la economía a través de los años.

Según el autor, la incursión de la matemática en la economía ha sido reciente, antes de Antoine Augustin Cournot (1801-1877), cuyos trabajos en economía eran esencialmente literarios (no formales) y no matemáticos; por ello se le conoce como el fundador de la economía matemática. El investigador menciona que este matemático consideraba muy importante y necesario usar las matemáticas en economía, siendo así que en 1938 publica su obra prima "Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de la riqueza”, donde junta las ideas matemáticas ya existentes con las teorías de la economía política. Sin embargo, Xhonneux (2011) expresa que el concepto de utilidad marginal aparece treinta años después con Walras y Jevons.

Por consiguiente, muchos de los problemas en economía se reducen a una optimización sujeta a ciertas restricciones, así por ejemplo:

- Un consumidor que desea maximizar su satisfacción (optimiza su función de utilidad limitada a restricciones presupuestaria).
- Un productor que desea minimizar su costo de producción (optimiza su función de costos considerando la cantidad deseada de producción).

Según el autor, menciona que el método de los multiplicadores es usado con restricciones de igualdad y los dos ejemplos previamente mencionados en diversos casos tienen este tipo de restricciones, por lo que, la técnica de los multiplicadores de Lagrange podrá ser usado en ellos.

Además, el autor señala que, a pesar que por muchos años se consideró a Edgeworth como el primero en usar el método de los multiplicadores de Lagrange en sus publicaciones; lo cierto es que Westergaard, en 1876, fue el pionero al publicar su trabajo titulado "Den moralske formue og det moralske haab" en la revista "Tidsskrift for Mathematik". Por consiguiente, el autor menciona que Westergaard resuelve el problema de optimización denominado “la mayor felicidad para encontrar el mayor número” usando el método de los multiplicadores.

Según el autor, el problema de la mayor felicidad también causó el interés de Edgeworth, el cual lo resolvió en su publicación "New and Old Methods of Ethics" el año 1877, usando el método de Lagrange sin definir los multiplicadores de Lagrange y explicando el método. Por otra parte, el autor señala que Edgeworth resuelve otro problema de optimización en economía en su obra "Mathematical Psychics" (1881). Aquí usa el método de Lagrange para maximizar la utilidad de una persona manteniendo constante la de otra.

Así las matemáticas le proporcionan un aspecto científico y riguroso a la economía que es apreciado en estos días. Sin embargo, no solo la matemática ha hecho contribuciones a la economía; sino la investigación económica ha generado la formación de disciplinas puramente matemáticas. Por ejemplo, se puede mencionar el impacto de la investigación operativa (rama de la administración que usa métodos matemáticos para tomar decisiones) en la programación matemática y en las teorías de los gráficos.

Observamos que en el desarrollo histórico de nuestro objeto matemático sólo se utilizaron registros en lengua natural y registros algebraicos. Por ejemplo, en el siglo XVIII no existía una definición de función de varias variables como la que existe actualmente, la cual se definió como una representación en lengua natural. En cuanto a las primeras apariciones del multiplicador de Lagrange apreciamos que el sistema de equilibrio se representó algebraicamente por "$Pdp + Qdq + Rdr + etc. = 0$", el cual tuvo una evolución a través de las ecuaciones diferenciales como "$P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + etc. = 0$".

Con respecto a algunos términos nuevos que fueron desarrollándose a través de la historia para la aparición del Multiplicador de Lagrange, rescatamos los siguientes: El término de los Multiplicadores de Lagrange se refiere a resolver un problema de optimización de una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sujeto a varias restricciones de igualdad $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots$, $g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, mientras que el Multiplicador de Lagrange se refiere a una sola restricción. La función de Lagrange se refiere a la función definida por $L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda \cdot g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, mediante la cual a través de tratamientos algebraicos ligados a las derivadas parciales se puede resolver el problema de los Multiplicadores de Lagrange.

Por otro lado, el Teorema de Lagrange da las condiciones para resolver el problema de optimización con restricciones. Finalmente, el término del método de los multiplicadores de Lagrange se refiere a la técnica, Xhonneux (2011), empleada usando los multiplicadores de Lagrange para resolver el problema de optimización con restricciones.

A continuación, abordaremos algunos aspectos matemáticos del Multiplicador de Lagrange para los cual tomaremos como referencia el texto de Piskunov (1977), el cual es un texto referenciado en la bibliografía del curso en donde impartimos dicha materia.

2.2 El Multiplicador de Lagrange

El estudio del multiplicador de Lagrange nos permitirá identificar sus representaciones en los registros en lengua natural, algebraico y gráfico, así como los tratamientos y conversiones realizadas en dichos registros.

Piskunov (1977) presenta los multiplicadores de Lagrange en el capítulo denominado "Máximo y mínimo de la función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos condicionados)" y contiene como ejemplo introductorio el siguiente problema:

> De un pedazo de hojalata dado de área $2a$ hace falta hacer una caja cerrada en forma de paralelepípedo que tenga el volumen máximo. Designemos el largo, el ancho y el alto

> de la caja por x, y, z respectivamente. El problema se reduce a la búsqueda del máximo de la función
>
> $$v = xyz,$$
>
> a condición de que $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. (p. 318).

Notemos que Piskunov (1977) realiza una conversión de la representación de la noción de volumen de un paralelepípedo representado en el registro en lengua natural para su representación en el registro algebraica $v = xyz$. También observamos que existe una conversión de la representación de la noción de superficie de un paralelepípedo en el registro en lengua natural para representación en el registro algebraico $2xy + 2xz + 2yz = 2a$.

El autor consideró un tipo particular de problema:

> Estudiaremos, al principio, el problema del extremo condicionado de una función de dos variables, ligadas sólo por una condición. Hallemos los máximos y los mínimos de la función
>
> $$u = f(x, y), \qquad (1)$$
>
> a condición de que x e y estén ligados entre sí por medio de la ecuación
>
> $$\varphi(x, y) = 0. \qquad (2)$$
>
> (p. 318).

Nuevamente, observamos que los registros empleados fueron de lengua natural y algebraico. A continuación, el autor analiza dos técnicas para la resolución de este problema. El primero, se muestra a continuación:

> Al existir la condición (2), sólo una de las dos variables x e y es independiente (por ejemplo x), puesto que y es determinada de la ecuación (2) como función de x. Si resolvemos la ecuación (2) respecto a y, sustituimos en la igualdad (1) y por la expresión hallada, obtenemos la función de una variable x y reducimos el problema al estudio de máximos y mínimos de la función de una sola variable independiente x. (p. 318).

En el párrafo anterior, el autor muestra los pasos para resolver el problema, los cuales consisten en tratamientos de la representación en el registro algebraico de la condición del problema $\varphi(x, y) = 0$ mediante el cual, y se representará en términos de x. Así mismo, existen tratamientos de la representación en el registro algebraico de la función a maximizar o minimizar $u = f(x, y)$ en el cual y es reemplazado por su equivalencia en términos de x, es decir $u(x) = f\big(x, y(x)\big)$. Finalmente el autor aplica tratamientos de la representación en el registro algebraico de la función a maximizar $u(x)$ aplicando métodos de derivación en una variable, para obtener el valor de x que maximiza la función u.

De esta forma, se fomenta el uso de tratamientos en el registro algebraico para resolver el problema. Estos tratamientos corresponden a la técnica τ_{24} de aplicar el método de sustitución para encontrar un problema de optimización sin restricciones, técnica definida por Xhonneux (2011, p.125).

La segunda técnica analizada por Piskunov (1977) se muestra a continuación:

> Podemos también solucionar el problema planteado sin resolver la ecuación (2), respecto a x o y. La derivada de u respecto a x debe reducirse a cero para aquellos valores de x en los que la función u pueda tener máximo o mínimo.
>
> Hallemos $\frac{du}{dx}$ de la ecuación (1), teniendo en cuenta que y es una función de x:
>
> $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$
>
> Por tanto, en los puntos de extremo
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$
>
> De la igualdad (2) hallemos:
>
> $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4)$$
>
> (p.319).

De lo anterior podemos notar que el autor realizó tratamientos de la representación en el registro algebraico de la función a maximizar o minimizar $u = f(x, y)$ para obtener $\frac{du}{dx}$ usando la regla de la cadena.

> La igualdad (4) es válida para todos los x e y que satisfagan a la ecuación (2). Si multiplicamos todos los términos de la igualdad (4) por un coeficiente indeterminado λ, y lo sumamos con los términos correspondientes de la igualdad (3), obtenemos:
>
> $$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$
>
> ó
>
> $$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (5)$$
>
> Esta igualdad se cumple en todos los puntos en que hay un extremo. Elijamos λ de manera tal que para los valores de x e y correspondientes a un extremo de la función u la expresión $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ de la fórmula (5) se reduzca a cero (suponer que $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$),
>
> $$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$
>
> Entonces para estos valores de x e y de la igualdad (5), se deduce que:
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$
>
> Así pues, en los puntos de extremos se satisfacen tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

de tres incógnitas x, y, λ. De estas ecuaciones determinemos x e y, así como λ. La última desempeñó un papel auxiliar y ya no es necesaria. (p.319-320)

Como podemos notar, se usó el registro en lengua natural y el registro algebraico. En esta demostración se privilegió el tratamiento en el registro algebraico.

Por otro lado, para concretar el método de resolución, Piskunov (1977) comenta que los primeros miembros de las ecuaciones (6) son el resultado de derivar parcialmente la función representada en el registro algebraico por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

respecto a las variables x, y, λ. Cabe señalar que en ningún momento el autor menciona que λ es conocido como el multiplicador y que la función anterior es llamada función de Lagrange.

Luego, el autor extiende el resultado obtenido para funciones de n variables con m restricciones haciendo uso del registro en lengua natural y algebraico.

A continuación el autor presenta la solución del ejemplo introductorio, el cual según Xhonneux (2011, p.124), corresponde al tipo de tarea resuelve un problema de optimización bajo restricciones de igualdad no modeladas, como se muestra en la Figura 5. La técnica empleada corresponde, según Xhonneux, a seguir los siguientes pasos: 1) modelar matemáticamente el problema, 2) mostrar la existencia de al menos un extremo, 3) buscar candidatos para ser extremo, y 4) comparar los valores de la función a optimizar con los puntos hallados.

Podemos apreciar en la Figura 5 que el autor realiza tratamientos algebraicos para hallar la solución del problema de maximizar $v=xyz$ con la restricción $xy+xz+yz=a$. A partir de la representación algebraica de la función de Lagrange $F(x,y,\lambda)=xyz+\lambda(xy+xz+yz-a)$, el autor realiza tratamientos al determinar las derivadas parciales con respecto a las variables x,y,λ, obteniendo las siguientes representaciones algebraicas: : $yz+\lambda(y+z)$, $xz+\lambda(x+z)$, $xy+\lambda(x+y)$. A continuación, Piskunov (1977) iguala las derivadas parciales a cero con el objetivo de hallar el punto crítico de la función de Lagrange. De esta forma, el investigador realiza tratamientos en el registro algebraico para obtener finalmente la solución del problema con restricciones.

Ejemplo 1. Volvamos al problema formulado al principio del párrafo presente: hallar el máximo de la función

$$v = xyz,$$

si es:

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0). \tag{10}$$

Formemos una función auxiliar:

$$F(x,\ y,\ \lambda) = xyz + \lambda\,(xy + xz + yz - a).$$

Hallemos sus derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\left.\begin{aligned} yz + \lambda\,(y + z) &= 0,\\ xz + \lambda\,(x + z) &= 0,\\ xy + \lambda\,(x + y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

El problema se reduce a la solución del sistema de cuatro ecuaciones (10) y (11) con cuatro incógnitas (x, y, z, y λ). Para solucionar este sistema, multipliquemos la primera ecuación de (11) por x, la segunda por y, la tercera, por z, y sumemos las expresiones obtenidas. Teniendo en cuenta la igualdad (10), hallemos $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$. Introduciendo en la ecuacion (11) el valor

Figura 5. Tratamientos en el registro algebraico.

Fuente: Piskunov (1977, p.321)

En resumen, podemos afirmar que el autor utiliza sólo los registros en lengua natural y algebraico. Además, el autor realiza tratamientos de las distintas representaciones en el registro algebraico y realizó conversiones de las distintas representaciones en el registro en lengua natural para el registro algebraico. Destacamos que el autor prioriza el uso del registro en lengua natural y el registro algebraico y no usó el registro gráfico.

2.3 Enseñanza del Multiplicador de Lagrange

En esta sección presentaremos los diferentes registros envueltos al Multiplicador de Lagrange, específicamente describiendo los tratamientos y conversiones que utilizados por el autor del libro didáctico.

Siendo así, el libro didáctico a analizar será el utilizado en el curso Matemática 2 de la Universidad del Pacífico, Cálculo diferencial e integral de García y Velásquez (2016). El capítulo 9 de este libro cubre el análisis de los máximos y mínimos de funciones de varias variables. Este capítulo consta de ocho secciones: el estudio de los máximos y mínimos absolutos y relativos, el análisis de las derivadas parciales de segundo orden, el problema de la optimización sin restricciones y, el problema de la optimización con restricciones de igualdad.

Las tres últimas secciones son dedicadas a la resolución de problemas, a la propuesta de problemas y finalmente a una autoevaluación.

La sección 9.4 comienza con la introducción de un problema de optimización sujeto a restricción de igualdad en el contexto de la economía. Después de esta introducción, los autores definen el valor extremo de una función de dos variables sujeto a una restricción, como se muestra en la Figura 6.

Conforme se muestra en la Figura 6, la sección comienza con la definición formal de máximo y mínimo para una función con restricciones, usando para ello el registro algebraico.

Consideremos $f : A \to \mathbb{R}$, donde $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto. Dado $B \subset A$, queremos determinar el máximo o el mínimo de los valores $f(x, y)$, sujetos a la restricción de ser $(x, y) \in B$. Luego, diremos que f posee un **máximo restringido a** B en (x_0, y_0) si $(x_0, y_0) \in B$ y, para todo $(x, y) \in B$,

$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y).$$

Del mismo modo, diremos que f posee un **mínimo restringido a** B en (x_0, y_0), si $(x_0, y_0) \in B$ y, para todo $(x, y) \in B$,

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y).$$

En resumen, la restricción de f al subconjunto $A \cap B$, la función $f|_B : B \to \mathbb{R}$, posee un mínimo o máximo en (x_0, y_0). Con base en la función restringida $f|_B$, se dan definiciones análogas para **máximo y mínimo relativo** de f restringido a B.

Figura 6. Registro en lengua natural y algebraico

Fuente: García y Velásquez (2016,p.355)

A continuación los autores presentan un ejemplo, el cual según Xhonneux (2011, p.124) corresponde al tipo de tarea resolver un problema de optimización bajo restricciones de igualdad en forma matemática, como se muestra en la Figura 7.

Ejemplo 9.38. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción de $(x, y) \in B$, donde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$. Deseamos determinar el mínimo de f restringido a B. Dado $(x, y) \in B$, es decir, $x + y = 1$, tenemos que $y = 1 - x$; entonces, podemos reemplazar en la definición de f, teniendo

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = g(x),$$

donde g es una función de una variable. Aplicando el método de minimización de funciones de una variable, probamos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es el único punto crítico de g en el que posee un mínimo. Luego, $y_0 = \frac{1}{2}$ y $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el punto sobre la gráfica de f en la que se da el mínimo de f restringido a $B = \{(x, y) : x + y = 1\}$. En este caso, $f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$.

Figura 7. Registro en lengua natural y algebraico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.355)

Observamos que en este ejemplo los autores utilizan el registro en lengua natural y el registro algebraico. Podemos apreciar que los autores realizaron tratamientos de la representación en el registro algebraico de la función a minimizar $f(x, y)$ para obtener su representación en una sola variable $g(x)$ y luego aplica técnicas de derivación en una variable, para obtener el punto en donde dicha función es mínima $x_0 = \frac{1}{2}$.

En el registro algebraico realizan tratamientos para hallar el punto crítico y el valor mínimo de la función a optimizar. Estos tratamientos corresponden a la técnica de aplicar el método de sustitución para encontrar un problema de optimización sin restricciones, técnica definida por Xhonneux (2011, p.125).

Luego, en la subsección dedicada a la función de Lagrange, los autores definen el mínimo y el máximo absoluto, así como el mínimo y máximo relativo para una función de n variables representada por f, con una restricción de igualdad, representada algebraicamente por $\phi(\underline{x}) = 0$, conforme se muestra en la Figura 8.

Definición 9.39. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\phi : A \to \mathbb{R}$ funciones de n variables, definidas sobre A, $\underline{a}$ punto interior de A y

$$B = \left\{\underline{x} \in A : \phi(\underline{x}) = 0\right\}.$$

Decimos que f posee en $\underline{a}$ un

1. **mínimo** [respectivamente **máximo**] **(absoluto) sujeto a la restricción** $\phi = 0$, si la restricción de f a B, la función $f|_B$, posee un mínimo [respectivamente máximo] en $\underline{a}$, es decir, si $\phi(\underline{a}) = 0$, y para todo $\underline{x} \in A$ tal que $\phi(\underline{x}) = 0$, se cumple que
$$f(\underline{a}) \leqslant f(\underline{x})$$
[respectivamente, $f(\underline{a}) \geqslant f(\underline{x})$].
2. **mínimo** [respectivamente **máximo**] **local** o **relativo sujeto a la restricción** $\phi = 0$, si la restricción de f a B, la función $f|_B$, posee un mínimo [respectivamente máximo] local en $\underline{a}$, es decir, si $\phi(\underline{a}) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\underline{a}, \delta) \subset A$, y para todo $\underline{x} \in B(\underline{a}, \delta)$ tal que $\phi(\underline{x}) = 0$, se cumple que
$$f(\underline{a}) \leqslant f(\underline{x})$$
[respectivamente, $f(\underline{a}) \geqslant f(\underline{x})$].

Figura 8. Registro en lengua natural y algebraico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.356)

Se define la función de Lagrange por medio de un discurso matemático en el cual los autores utilizan representaciones en el registro natural y algebraico, ver Figura 9.

Definición 9.40. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $\phi : A \to \mathbb{R}$ funciones de n variables. La **función de Lagrange** asociada al problema de maximizar o minimizar f restringida a la condición $\phi = 0$ es la función $L : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(\lambda, \underline{x}) = f(\underline{x}) + \lambda\phi(\underline{x})$$

o

$$L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Figura 9. Registro en lengua natural y algebraico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.357)

La última subsección es dedicada al Hessiano Orlado, cuya aplicación es suficiente para determinar qué puntos críticos de *L* son máximos o mínimos relativos del problema restringido. Como se aprecia en la Figura 10, para definir el Hessiano Orlado para n variables, los autores emplearon registros en lengua natural, algebraico y matricial. Por otro lado, los autores particularizan la definición del Hessiano Orlado para una función de dos variables, siempre empleando los registros en lengua natural, algebraico y matricial.

Definición 9.45. Supongamos $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f, \phi : A \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales continuas de segundo orden definidas en $\underline{a} \in A$. La matriz hessiana de la función de Lagrange $L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\phi(x_1, \ldots, x_n)$ se denomina **matriz hessiana orlada** asociada al problema de optimización, y tiene la forma

$$HL(\lambda, \underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{x_1} & \cdots & \phi_{x_n} \\ \phi_{x_1} & L_{x_1x_1} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{x_n} & L_{x_nx_1} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}.$$

Para el caso $n = 2$, la matriz hessiana orlada toma la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi_x & \phi_y \\ \phi_x & L_{xx} & L_{xy} \\ \phi_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix}.$$

Su hessiano se denomina **hessiano orlado**, y se denota

$$\Delta(\lambda, x, y) = \det \begin{bmatrix} 0 & \phi_x & \phi_y \\ \phi_x & L_{xx} & L_{xy} \\ \phi_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix}.$$

Figura 10. Registro en lengua natural, algebraico y matricial.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.359)

De acuerdo con la Figura 11, podemos decir que los autores abordan el teorema concerniente a la condición suficiente de segundo orden para la existencia de un máximo o mínimo en un punto crítico de la función de Lagrange, por medio de un discurso formal, sin presentar la demostración.

Teorema 9.46. Bajo las condiciones de la definición 9.45, supongamos que $\underline{a} \in A$ no es punto crítico de A. Sean $H_1, \ldots, H_{n+1}$ los menores principales de $HL(\lambda_0, \underline{a})$. Si

1. $H_k < 0$ para todo $k = 3, \ldots, n+1$ (esto corresponde a los $n-1$ últimos menores principales), entonces f posee un mínimo restringido en $\underline{a}$ sujeto a la restricción $\phi = 0$;
2. $(-1)^k H_k < 0$ para todo $k = 3, \ldots, n+1$, entonces f posee un máximo restringido en $\underline{a}$ sujeto a la restricción $\phi = 0$.

Cuando $n = 2$ en el último teorema, las desigualdades por verificar en la condición del teorema se convierten en una sola. Sea (λ_0, x_0, y_0) un punto crítico de la función de Lagrange asociada al problema de optimizar f restringido a $\phi = 0$. Luego (el hessiano orlado es $\Delta(\lambda_0, x_0, y_0) = H_3(\lambda_0, x_0, y_0)$),

1. si $\Delta(\lambda_0, x_0, y_0) > 0$, entonces posee un máximo relativo de f, sujeto a la restricción $\phi = 0$;
2. si $\Delta(\lambda_0, x_0, y_0) < 0$, entonces posee un mínimo relativo de f, sujeto a la restricción $\phi = 0$.

Figura 11. Registro en lengua natural y algebraico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.359)

A continuación los autores presentan un ejemplo, el cual según Xhonneux (2011, p.124), corresponde al tipo de tarea *resuelve un problema de optimización bajo restricciones de igualdad no modeladas*, como se muestra en la Figura 12. La técnica empleada corresponde, según Xhonneux, a seguir los siguientes pasos: 1) modelar matemáticamente el problema, 2) buscar candidatos para ser extremo y 3) utilizar una condición de optimalidad suficiente de primer o segundo orden para seleccionar entre los candidatos identificados los que son efectivamente un extremo de la función f bajo la restricción $\phi(x, y) = 0$.

Ejemplo 9.48. La función de producción de una empresa está dada por

$$P(x, y) = 260x + 150y + 2xy - 2x^2 + y^2,$$

donde x e y son las cantidades de artículos de los productos A y B. Supongamos que los gastos para fabricar dichos productos son S/ 2 y S/ 3 por unidad producida, respectivamente, y que la empresa puede gastar únicamente S/ 450. Se busca determinar la producción máxima.

Según las hipótesis, se tiene que $2x + 3y = 450$, lo que implica que la función de restricción es $\phi(x, y) = 450 - 2x - 3y$. Construyendo la función de Lagrange, tenemos

$$L(\lambda, x, y) = 260x + 150y + 2xy - 2x^2 + y^2 + \lambda(450 - 2x - 3y).$$

Luego, derivando e igualando a cero, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} L_\lambda &= 450 - 2x - 3y = 0, \\ L_x &= 260 + 2y - 4x - 2\lambda = 0, \\ L_y &= 150 + 2x + 2y - 3\lambda = 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos el punto crítico $(160, 45, 120)$. Por otro lado, el hessiano orlado es

$$\Delta(\lambda_0, x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 52 > 0.$$

Por lo tanto, la producción máxima es de $P(45, 120) = 30\,775$ unidades (dentro de la restricción impuesta).

Figura 12. Registro en lengua natural y algebraico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.360)

Observamos que los registros que emplearon en la resolución del ejemplo anterior corresponden a la lengua natural, al algebraico y al de los determinantes. En el ejemplo, los autores realizan tratamientos en el registro algebraico, para determinar el punto crítico de la función de Lagrange.

De la sección de problemas resueltos, nos llamó la atención el problema 10 (ver Figura 13) en el cual se empleó por primera vez el registro gráfico, para resolver un problema de optimización con restricciones de igualdad.

10. Consideremos las funciones $g, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ y $f(x, y) = xy$.

    a) Esboce las curvas de nivel de f y el gráfico de $g(x, y) = 0$.
    b) Esboce $g(x, y) = 0$ y las curvas de nivel de f que intersecan a la curva $g(x, y) = 0$ exactamente en un punto, es decir, las curvas de nivel que tienen puntos de tangencia. ¿Puede determinar cuáles serán máximos y cuáles mínimos?
    c) Usando la función de Lagrange, encuentre exactamente los puntos señalados.

Figura 13. Ejercicio resuelto de optimización con restricciones.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.369)

Para la resolución de la parte a), notemos que las curvas de nivel de f están representadas algebraicamente por $xy = k$, la cual, para algunos valores positivos y negativos de k, son representados gráficamente por las hipérbolas como se muestra en la Figura 14. De esta forma, se evidencia que los autores del libro realizaron conversiones de las representaciones en el registro algebraico para su representación en el registro gráfico. Notamos que los autores no muestran los pasos a seguir para realizar dicha conversión.

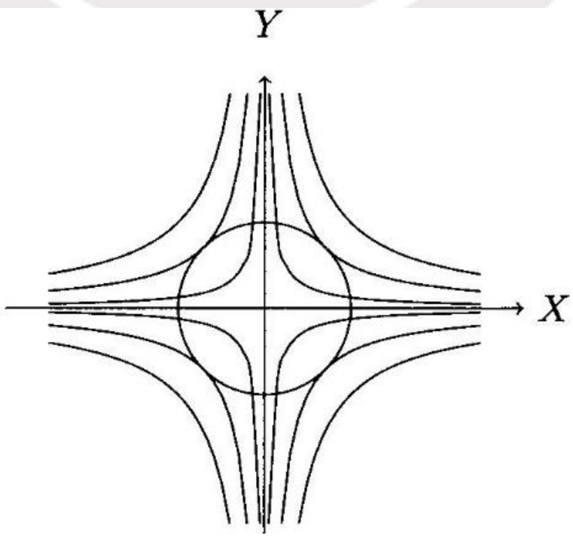


Figura 14. Representaciones dela función a optimizar y de las restricciones en el registro gráfico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.370)

Para la resolución de la parte b), por indicación del enunciado, debemos quedarnos sólo con las curvas de nivel que son tangentes a la restricción, pues ellas son las que las intersectan en un único punto, ver Figura 15. Luego de un análisis de comparación se establecen los puntos óptimos del problema.

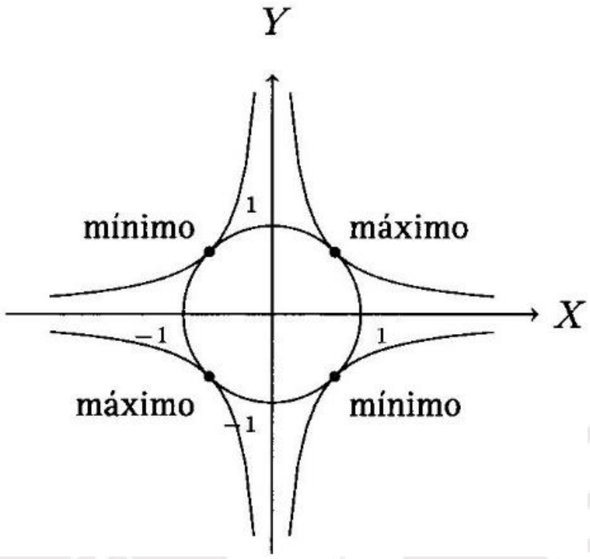
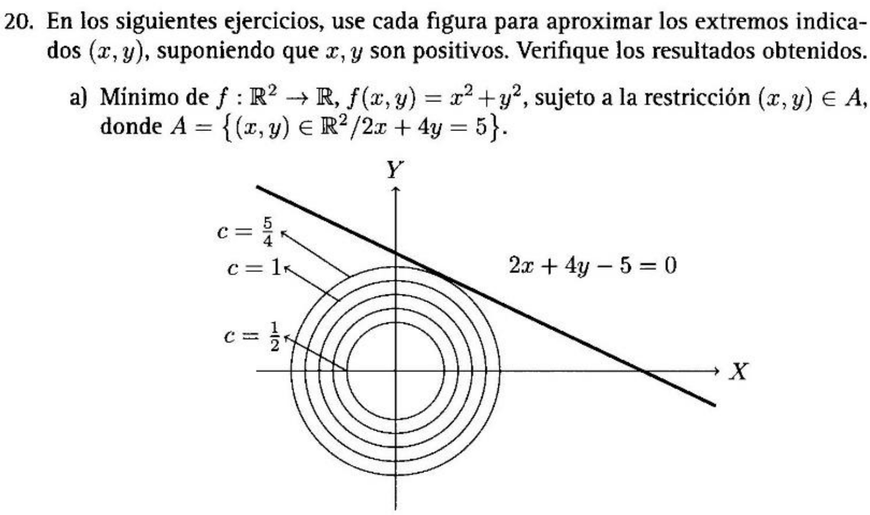


Figura 15. Representación de los valores extremos de un problema de optimización con restricciones en el registro gráfico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.370)

Para la resolución de la parte c) se hallaron los puntos óptimos aplicando la técnica del multiplicador de Lagrange y la aplicación directa del Hessiano Orlado.

En la última sección de problemas propuestos, ver Figura 16 y Figura 17, se muestran las representaciones gráficas de la restricción y de algunas curvas de nivel de la función a optimizar.



20. En los siguientes ejercicios, use cada figura para aproximar los extremos indicados (x, y), suponiendo que x, y son positivos. Verifique los resultados obtenidos.

a) Mínimo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción $(x, y) \in A$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 4y = 5\}$.

Figura 16. Ejercicio propuesto en registro algebraico y gráfico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.376)

En ambos casos, la solución al problema de optimización se encuentra en la intersección (un único punto) de una curva de nivel de la función a optimizar y la recta tangente. Para la resolución del ejercicio de la Figura 16, una vez identificada la curva de nivel que intersecta en un único punto a la restricción, se debe resolver el sistema de ecuaciones dado por $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ y $2x + 4y - 5 = 0$; el cual, luego de algunas transformaciones en el registro algebraico dan como resultado el punto óptimo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. De manera similar se procede en la resolución del ejercicio propuesto en la Figura 17.

b) **Máximo de** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$, **sujeto a la restricción** $(x,y) \in A$, **donde** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 10\right\}$.

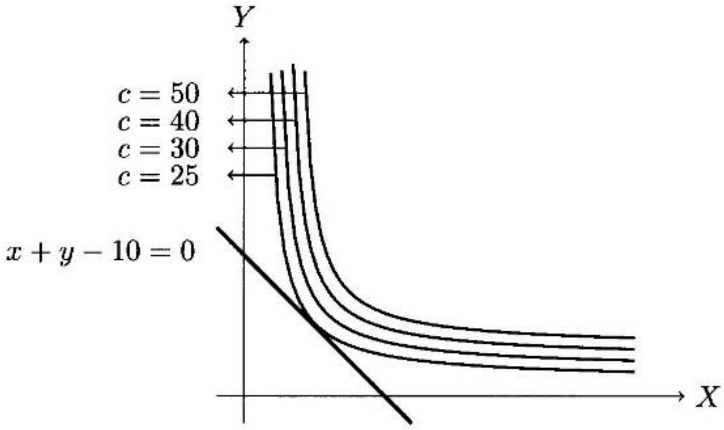


Figura 17. Ejercicio propuesto en registro algebraico y gráfico.

Fuente: García y Velásquez (2016, p.376)

Observamos que en los dos ejercicios anteriores, la técnica corresponde a resolver gráficamente el problema de optimización bajo restricciones de igualdad, definida por Xhonneux (2011, p.125). De esta forma, los autores promueven la conversión de la representación en el registro algebraico para su representación en el registro gráfico y viceversa; además promueven los tratamientos en el registro algebraico.

CAPITULO III: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo describiremos las características de los sujetos de investigación, explicaremos el desarrollo del experimento y analizaremos las actividades según el marco teórico empleado.

3.1 Escenario de la experimentación

La parte experimental de la investigación apunta a estudiantes matriculados por primera vez en el curso Matemáticas II, materia que es dictada en la carrera de Economía de una universidad privada de Lima - Perú, en el semestre 2017-2. La sección consistió de treinta y cinco estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre los 17 y 19 años.

Dichos estudiantes, tienen como saberes previos, los siguientes temas llevados en el curso Matemáticas I: conceptos básicos (argumentos y cuantificadores, conjuntos y relaciones, números reales e intervalos), geometría analítica (coordenadas cartesianas, rectas, transformación de coordenadas, circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas), álgebra lineal (sistemas lineales, matrices, eliminación gaussiana, determinantes, inversa y rango), funciones (biyectividad, composición e inversa, funciones reales, gráficos, simetrías, exponencial y logaritmos, y funciones trigonométricas).

En el curso Matemáticas II, los estudiantes, antes de aprender el multiplicador de Lagrange, realizarán los siguientes contenidos: límite de funciones, derivada de funciones de una variable, funciones de varias variables y optimización sin restricciones.

Cabe mencionar que en un curso introductorio a la Economía, los alumnos saben que para optimizar una función de dos variables con una restricción de igualdad, el punto óptimo ocurre en el punto de intersección de la representación gráfica de la restricción y de aquella curva de nivel de la función a optimizar en donde se intersecten en un único punto. Los estudiantes, cuando recibieron esta información, aún no habían llevado cursos de cálculo diferencial en una o en dos variables.

A partir del total de estudiantes de la sección a cargo del docente, se seleccionaron cuatro estudiantes que trabajarán en dos grupos de dos, los cuales fueron seleccionados por su desempeño académico en el curso, asistencia y puntualidad y por la predisposición a las actividades realizadas en clase.

Los estudiantes poseen conocimientos previos del software Geogebra, ya que se desarrollaron actividades con dicho software de manera transversal al desarrollo de las clases. Conforme se iba dictando una clase, el docente mostraba las características y la potencialidad del software y eventualmente culminaba con alguna tarea para la casa. Cabe señalar que el curso no cuenta con un laboratorio de cómputo para desarrollar las actividades del curso.

Para la realización de la experimentación se dispuso de cuatro laptops en donde se instaló el Geogebra y un software libre (aTube Catcher 4) para la captura del audio y del video de toda intervención de los estudiantes con las laptops. Dicha experimentación se realizó en un único encuentro, en el cual se formaron dos duplas de estudiantes. Cada dupla recibió una ficha en donde se encuentran la situación problema a realizar.

Debido a que deseamos comprender los procesos de cómo los estudiantes de economía investigan el multiplicador de Lagrange al desarrollar una situación problema, en la próxima sección detallaremos las características de lo que es una situación problema.

3.2 Descripción de la situación problema

Según Artigue (1995, p. 38), las actividades que conforman una situación problema deben estar diseñadas con la finalidad de permitir la génesis artificial del conocimiento, en nuestro caso la génesis del multiplicador de Lagrange, para ello el profesor manipula las variables que permitirán esta génesis.

En relación a las variables de comando Artigue (1995, p. 42) distingue las variables macro-didácticas o globales y las variables micro-didácticas o locales

- **Variables macro-didácticas,** "concernientes a la organización global de la ingeniería"
- **Variables micro-didácticas,** "concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase".

En nuestro trabajo queremos conseguir que el estudiante aprenda un conocimiento matemático a partir de una situación problema diseñada por el profesor-investigador, para lo cual vamos controlar y modificar ciertas condiciones (variables didácticas) las cuales tienen la finalidad de adquirir dicho conocimiento.

De esta forma Brousseau (2007) afirma lo siguiente: "las variantes de una situación relativa a un mismo saber matemático pueden presentar grandes diferencias de complejidad y en consecuencia conducir a estrategias óptimas diferentes y también maneras diferentes de conocer un mismo saber" (p.41).

Almouloud (2017) define a una situación problema de la siguiente manera:

> Una situación problema es constituida por un conjunto de preguntas abiertas y/o cerradas formuladas en un contexto más o menos matematizado, envolviendo un campo de problemas colocados en uno o varios dominios de saber de conocimientos. Su función principal es la utilización implícita, y después explícita, de nuevos objetos matemáticos, por medio de preguntas a los alumnos en el momento de la resolución del problema. (Almouloud 2017, p.9).

En este sentido, debe existir el compromiso de los alumnos por la resolución del problema. Además de la comprensión de los datos del problema, tales situaciones deben contemplar un campo conceptual nuevo para el alumno; de tal forma que el alumno perciba que para su resolución inmediata, los conocimientos antiguos no son suficientes. Siendo así, el nuevo conocimiento ofrece las herramientas necesarias para obtener la resolución final.

3.3 Análisis de la investigación

En esta sección desarrollaremos el análisis a priori y a posteriori de la situación problema que será propuesta a continuación, de acuerdo con nuestra metodología de investigación.

Situación Problema

En la ciudad de Piura, un comerciante desea emprender el negocio de chupetes, aprovechando que la ciudad es muy calurosa y que la temperatura ha aumentado considerablemente. Para esto, dispone de una determinada cantidad de máquinas productoras de chupetes, las cuales producen cada una 800 chupetes por hora. Con respecto a los costos totales de fabricación, el comerciante constata que dependen del número de máquinas productoras de chupetes y del número de horas que funciona cada máquina. Siendo así, los costos totales en soles, equivalen a veinticinco veces el número de máquinas multiplicadas por sí mismas, más dieciséis veces el número de horas que funciona cada máquina multiplicadas por sí mismas. Por un estudio del mercado, el comerciante planea producir 64 000 chupetes por día. Definimos el *vector marginalidad* de una curva de nivel, como el vector de dos componentes, que son la marginalidad con respecto al número de máquinas y la marginalidad con respecto al número de horas, respectivamente.

a) ¿Cómo es la relación entre las curvas isocostos y la curva de producción en el momento en que el costo total es mínimo? justifique su respuesta.
b) Considerando las intersecciones de la curva de producción con algunos isocostos, ¿qué sucede con sus respectivos vectores de marginalidad, para los isocostos y la producción, en las intersecciones de dichas curvas? justifique su respuesta.

c) Respecto a las curvas isocostos y de producción, en el momento en que el costo total es mínimo, ¿qué puedes afirmar de sus respectivos vectores marginalidad? justifique su respuesta.

Análisis *a priori*

El objetivo de esta situación problema es que el estudiante perciba que en el punto en donde el costo es mínimo, dada una restricción de igualdad, los vectores gradientes al isocosto y a la restricción son paralelos. Para tal fin hemos definido el vector marginalidad en la situación problema; esto es debido a que en Economía no existe un término que haga el papel de vector normal a una curva.

Cuadro 4. Variables didácticas.

Variables didácticas	**Valores**
- El tipo de función a optimizar	- Tipo cuadrática
- El tipo de restricción de igualdad	- Tipo Cobb-Douglas
- Naturaleza de los exponentes de la función de Cobb-Douglas	- Racionales - Enteras
- Naturaleza de la solución	- Soluciones enteras

A continuación presentamos una de las resoluciones de la situación problema. Definimos las variables x e y que representan al número de máquinas productoras de chupetes y al número de horas que funciona cada máquina, respectivamente. Del enunciado observamos que la función producción de chupetes se puede expresar por $Q(x, y) = 800xy$. Además, dado que se requiere producir 64000 chupetes, se obtiene la siguiente igualdad $800xy = 64000$, lo que equivale a $xy = 80$. Por otro lado, la función de costos totales se puede expresar como $C(x, y) = 25x^2 + 16y^2$.

La situación problema requiere determinar el punto en donde el costo total es mínimo, cumpliendo la restricción de igualdad $xy = 80$. Aplicaremos el método del multiplicador de Lagrange para resolver el problema.

Definimos la función de Lagrange como $L(\lambda, x, y) = 25x^2 + 16y^2 + \lambda(xy - 80)$. Para hallar su punto crítico, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_x(\lambda, x, y) = 50x + \lambda y = 0, \\ L_y(\lambda, x, y) = 32y + \lambda x = 0, \\ L_\lambda(\lambda, x, y) = xy - 80 \quad = 0. \end{cases}$$

A partir de las ecuaciones, obtenemos que $x = 8$, $y = 10$ y $\lambda = -40$.

Por otro lado, hallaremos el Hessiano Orlado, para determinar la naturaleza del punto $(8,10)$.

$$\Delta(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 50 & \lambda \\ x & \lambda & 32 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta(-40,8,10) = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 8 \\ 10 & 50 & -40 \\ 8 & -40 & 32 \end{vmatrix} = -12800.$$

Por el teorema relacionado al Hessiano Orlado, dado que $\Delta(-40,8,10) < 0$ se tiene que el costo es mínimo cuando $x = 8$, $y = 10$.

Para dar respuesta al ítem a), representaremos el isocosto y la curva de producción en el registro gráfico, cuando $x = 8$, $y = 10$ tal como se observa en la Figura 18.

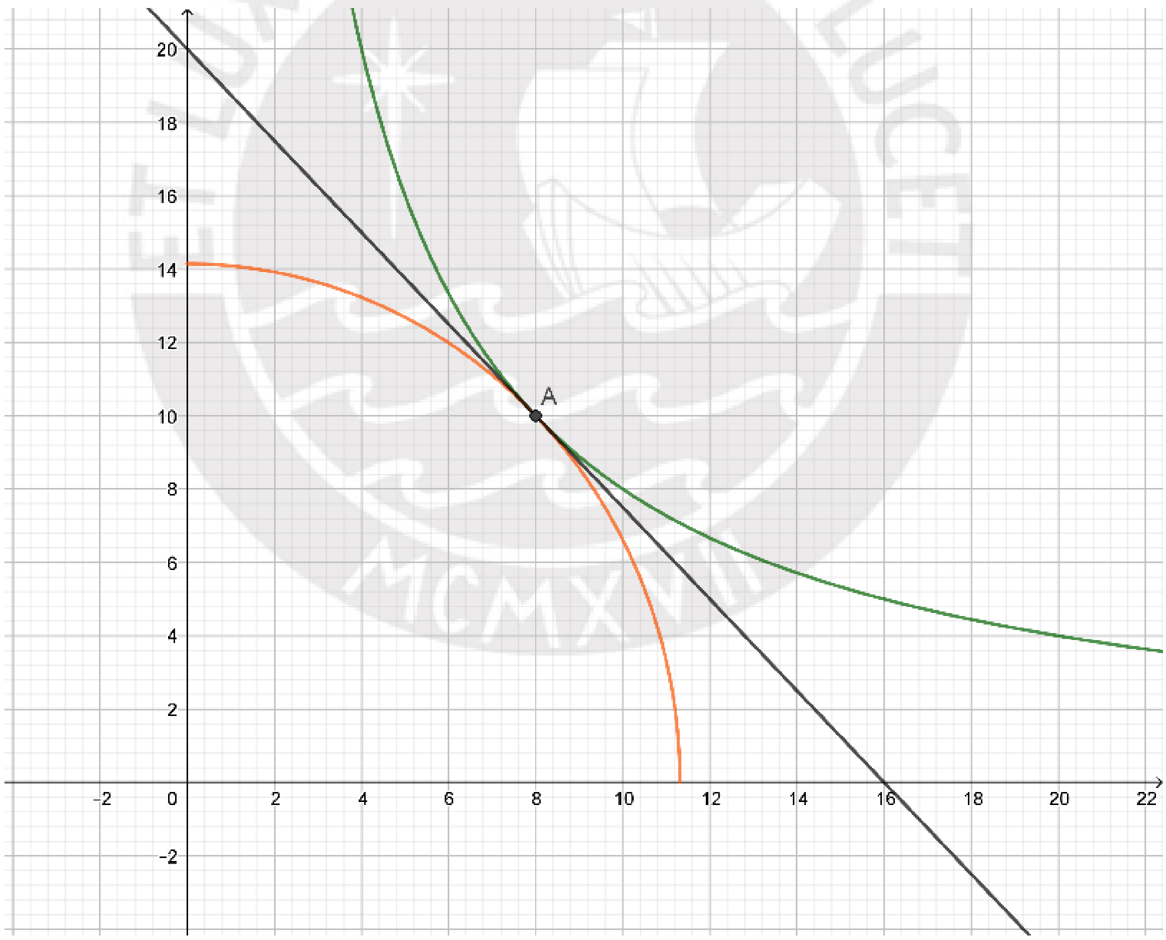


Figura 18. Representación del isocosto y de la producción en el punto óptimo en el registro gráfico del Geogebra.

Observamos que las representaciones del isocosto y de la producción en el registro gráfico son tangentes en el punto óptimo.

Para dar respuesta al ítem b), representaremos algunos isocostos, la restricción y sus respectivos vectores de Marginalidad en el registro gráfico (ver Figura 19), de los cuales no encontramos relación alguna, salvo en el punto óptimo en donde la representación de dichos vectores en el registro gráfico son vectores paralelos.

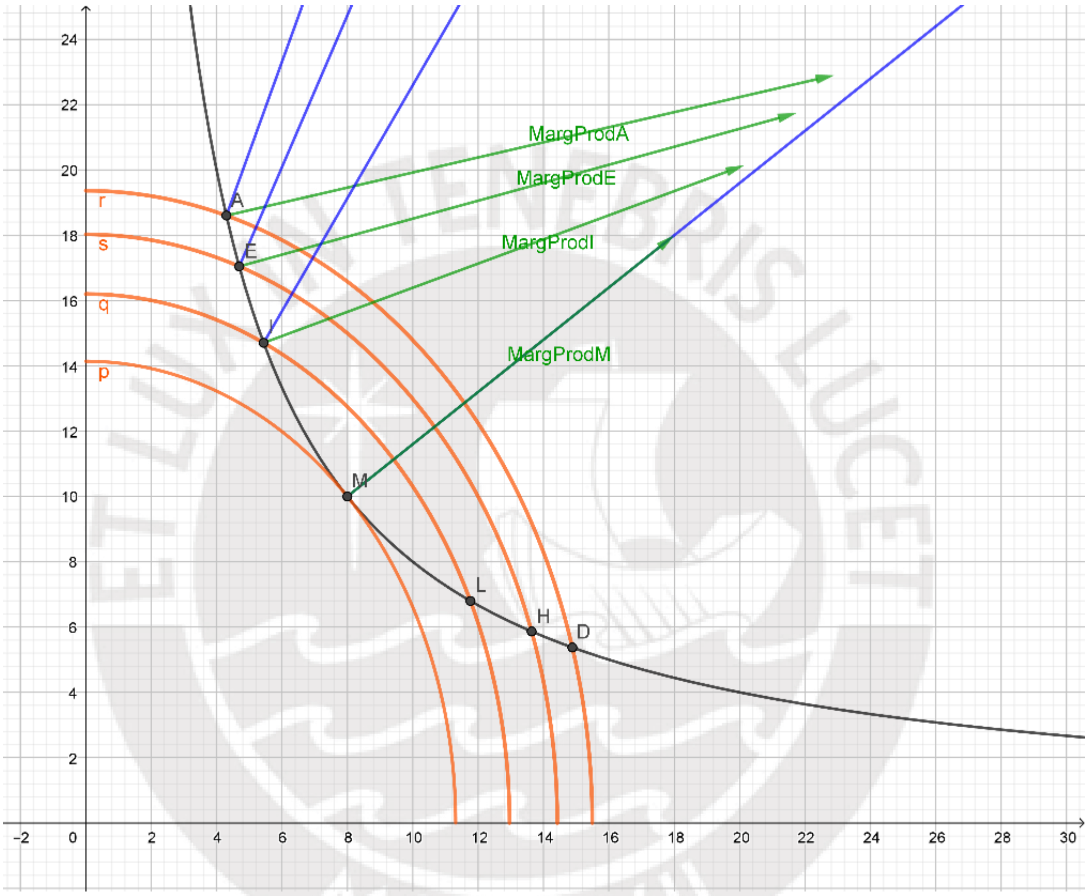
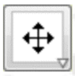
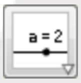


Figura 19. Representación de los vectores Marginalidad en el registro gráfico del Geogebra.

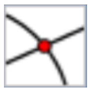
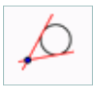
Con respecto al análisis a priori, en esta parte esperamos que todos los grupos, después de leer el problema, realicen la conversión de la representación de la función Costo del registro en lengua natural al registro algebraico. Para esto, los grupos, podrían representar por medio de la variable x al número de máquinas productoras de chupetes y por medio de la variable y al número de horas que funciona cada máquina. Es decir, esperamos que los estudiantes representen los costos totales en el registro algebraico por $C(x, y) = (5x)^2 + (4y)^2$. Además, en dicho registro, esperamos que los grupos realicen el siguiente tratamiento en el registro algebraico $C(x, y) = 25x^2 + 16y^2$.

De manera similar, suponemos que los estudiantes podrían realizar la conversión de la representación en lengua natural para el registro algebraico de la función producción diaria de chupetes $g(x, y) = 800xy$. Dado que el productor requiere producir 64 000 chupetes por día, se espera que los estudiantes representen algebraicamente la restricción por $800xy = 64000$, y por medio de tratamientos los estudiantes obtendrían la siguiente representación algebraica $xy = 80$.

Para responder el ítem a), esperamos que los alumnos ingresen en la barra de entrada del *Geogebra* la expresión **x*y=80**, para generar la representación gráfica de la restricción en *Geogebra*. En seguida, dado que no se observa la restricción en la vista gráfica, suponemos que procederán a efectuar un re-escalamiento de los ejes para poder visualizarla. Siendo así, harán clic sobre el botón  y luego arrastrarán cada uno de los ejes hasta que se visualice la restricción.

Para representar las curvas de nivel en el registro gráfico, suponemos que primero harán clic sobre la herramienta 

y luego otro clic en la vista gráfica del *Geogebra*, para escoger el lugar en donde aparecerá el deslizador. Luego ingresarán en la barra de entrada la representación de las curvas de nivel a de la función Costos totales en el registro algebraico, dada por la expresión **25x^2+16y^2=a**, para luego realizar una conversión de la representación de estas curvas de nivel del registro algebraico al registro gráfico mediante el *Geogebra*. Con ayuda del deslizador, suponemos que los grupos escogerán como valor mínimo al 0, valor máximo al 10 000 e incremento al 0.5.

Por medio de tratamientos en el registro gráfico, esperamos que busquen aquella curva de nivel que intersecte a la restricción en un único punto. Para tal fin, podrían hallar las representaciones de los puntos de intersección en el registro gráfico, haciendo clic en la herramienta  y en ambas representaciones del registro gráfico. A continuación suponemos que modificarán los valores del deslizador con el objetivo de que se intersecten en un único par ordenado (punto M). Finalmente, con apoyo del *Geogebra* representarían gráficamente la recta tangente a ambas curvas, por medio de la opción , y percibirían que en el punto M, el isocosto y la restricción son tangentes (ver Figura 20).

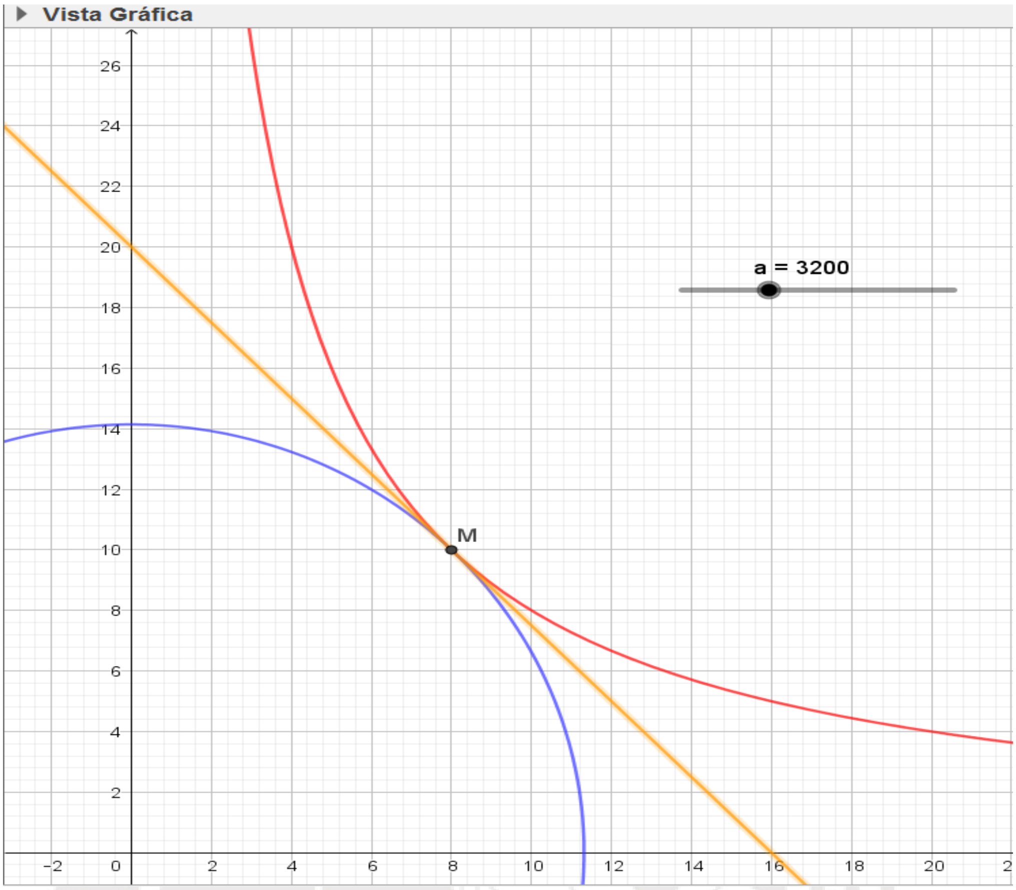
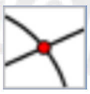


Figura 20. Representación del isocosto y de la restricción en el registro gráfico.

Con respecto al ítem b), suponemos que cada grupo usará el mismo archivo de Geogebra elaborado en la parte a), que eliminarán el deslizador y que graficarán cuatro curvas de nivel mediante expresiones como: **25x^2+16y^2=3200, 25x^2+16y^2=4200, 25x^2+16y^2=5200 y 25x^2+16y^2=6000**. Los valores de las curvas de nivel serán ingresados de manera que en la gráfica aparezcan debidamente distanciados. Una vez representados graficamente en *Geogebra*, podrían usar la opción  para hallar la intersección de las cuatro curvas de nivel con la restricción, como se observa en la Figura 21. Los puntos hallados son A,D, E, H, I, L, M.

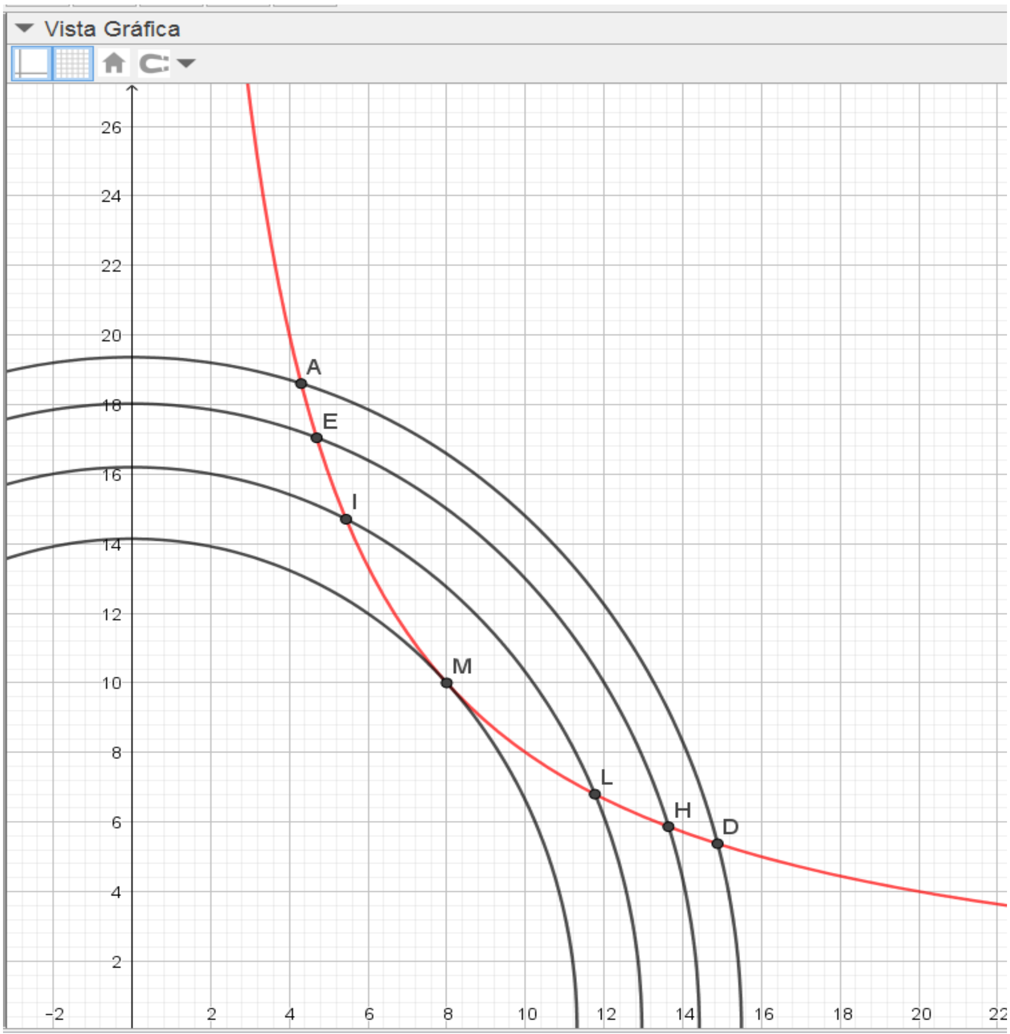


Figura 21. Representación de las intersecciones de algunos isocostos con la restricción en el registro gráfico.

En esta parte, esperamos que todos los grupos realicen la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico. Para esto, representarían algebraicamente el vector marginalidad, definiéndolo de la siguiente forma:

$$Margf(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right),$$

donde f representa a una función real de dos variables y P un punto en el plano cartesiano.

Para representar gráficamente los vectores marginalidad en el *Geogebra*, definirían las funciones que representan a los isocostos y a la producción, ingresando **f(x, y) = 25x^2 + 16y^2** y **g(x, y) = x*y – 80**. Ingresarían también, a través de la barra de entrada las expresiones **f_x=Derivada(f, x), f_y=Derivada(f, y), g_x=Derivada(g, x)** y **g_y=Derivada(g, y)**, que representan a las derivadas parciales de f y de g con respecto a las variables x e y.

Suponemos que los vectores marginalidad para los isocostos serán representados gráficamente, ingresando las siguientes expresiones: **Vector(A, A + (f_x(A), f_y(A))), Vector(E, E + (f_x(E), f_y(E))), Vector(I, I + (f_x(I), f_y(I))) , Vector(M, M + (f_x(M), f_y(M)))**. De manera similar, los vectores marginalidad para la producción serán graficados ingresando las siguientes expresiones: **Vector(A, A + (g_x(A), g_y(A))), Vector(E, E + (g_x(E), g_y(E))), Vector(I, I + (g_x(I), g_y(I))) , Vector(M, M + (g_x(M), g_y(M)))**.

Finalmente, como observamos en la Figura 22, dichos vectores marginalidad no presentan ninguna propiedad conocida.

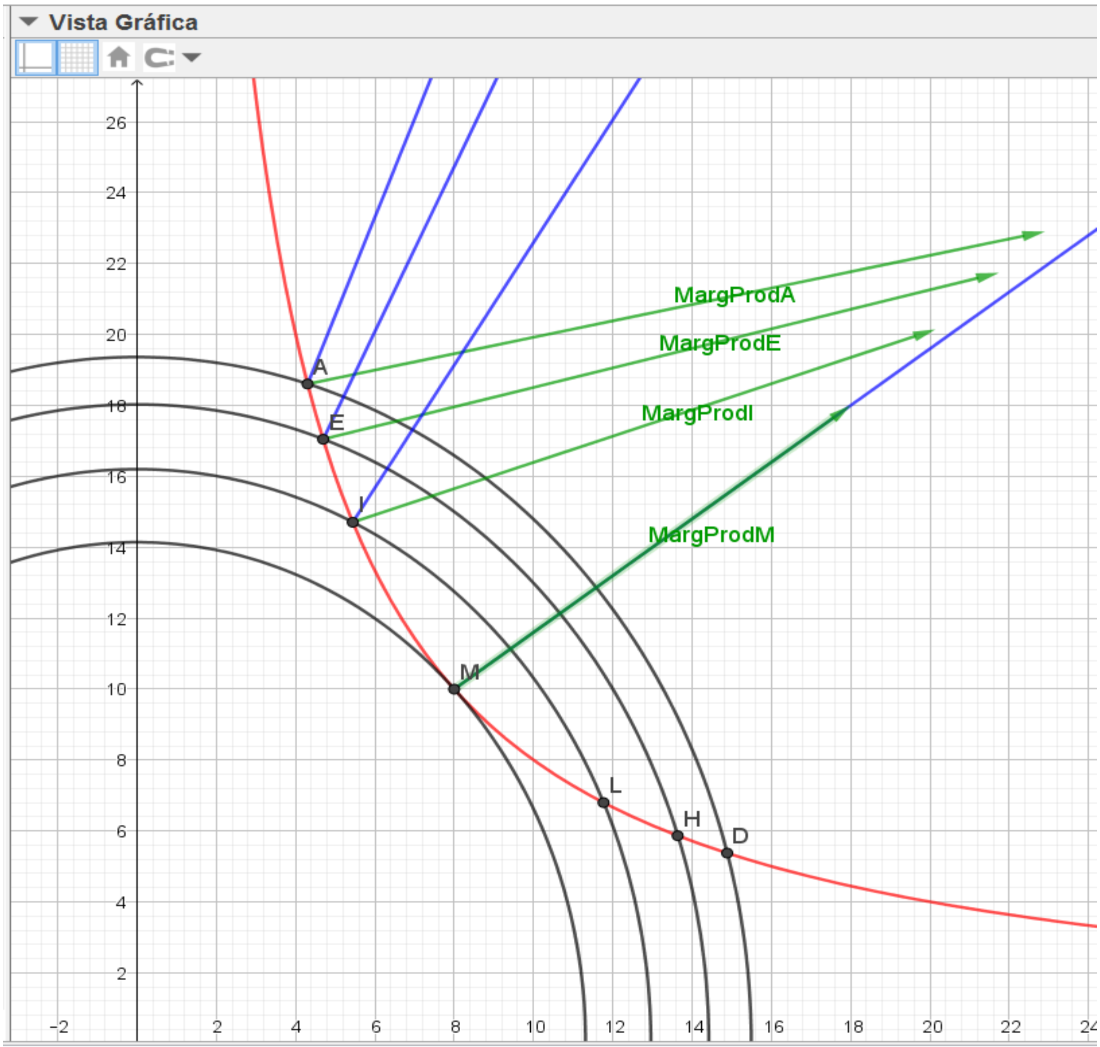


Figura 22. Representación de vectores de Marginalidad en el registro gráfico del Geogebra.

Luego, para responder al ítem c), supondremos que en el punto M, donde se minimiza el costo dada la restricción, los vectores marginalidad para la producción y para el isocosto son paralelos.

Análisis *a posteriori*

Después de la lectura del texto, observamos que el grupo 1 resalta parte del texto y así identifican y representan el número de máquinas productoras de chupetes con las variables x y el número de horas de funcionamiento de cada máquina con la variable y. Además, el grupo representó en el registro algebraico las variables no negativas, ver Figura 23. Esto significa que el grupo relaciona las variables del problema con el contexto del problema, hecho que no lo habíamos supuesto en el análisis *a priori*.

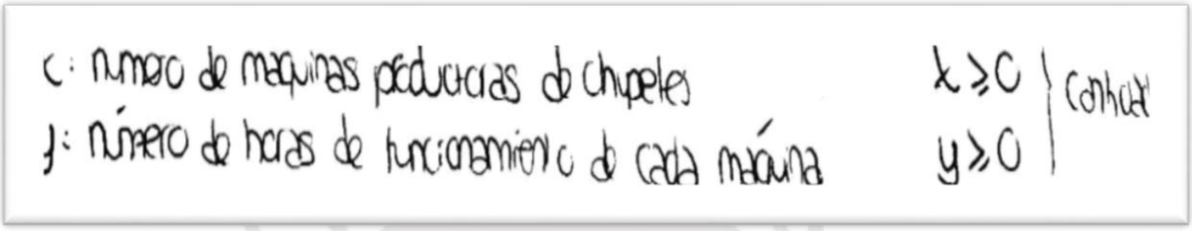


Figura 23. Representación en lengua natural y en el registro algebraico

Luego, ellos consiguieron hacer la conversión de la representación de la función costo del registro en lengua natural al registro algebraico y, de igual manera, consiguieron hacer la conversión de la representación de la función producción de la lengua natural al algebraico, tal como se muestra en la Figura 24.

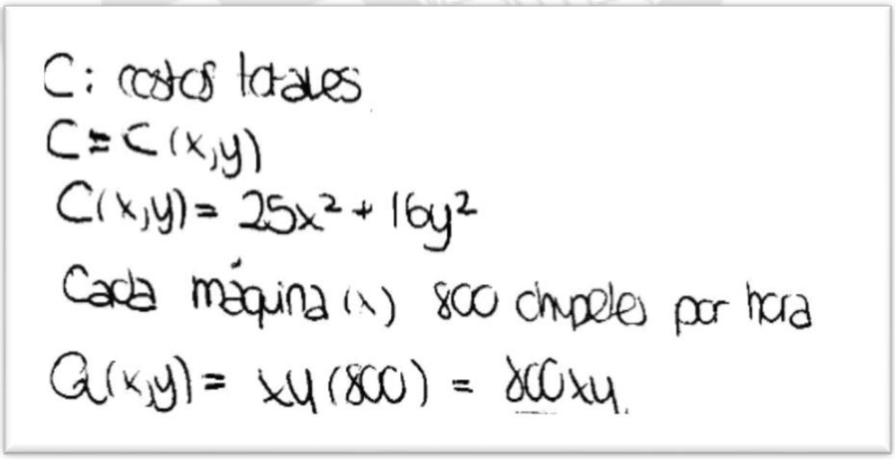
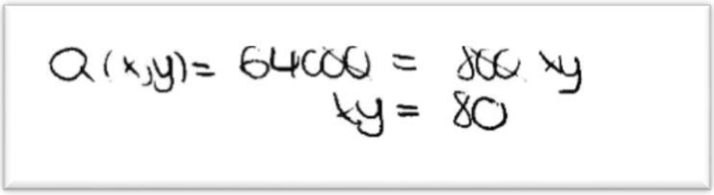


Figura 24. Representación de la función producción en el registro algebraico

Además, el grupo 1 construye la ecuación correspondiente a la restricción del problema, conforme se muestra en la Figura 25, tal como lo habíamos supuesto en el análisis a priori, lo que significa que el grupo realizó la conversión de la representación de la restricción del registro en lengua natural al registro algebraico.



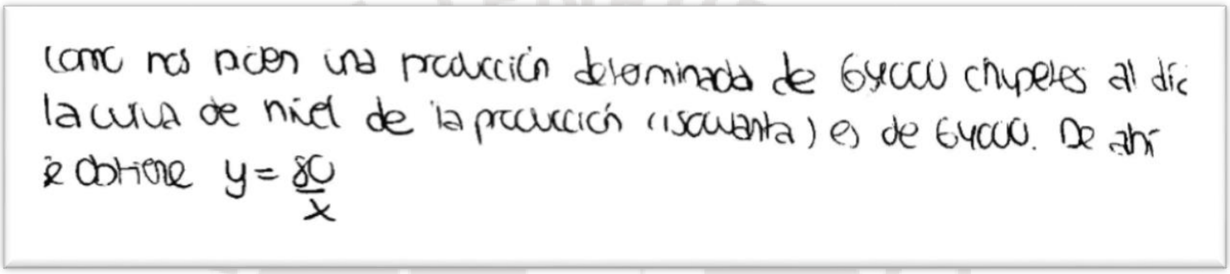
$Q(x,y) = 64000 = 800\,xy$

$xy = 80$

Figura 25. Representación algebraica de la restricción del problema.

Así mismo, notamos que el grupo 1 realizó tratamientos en el registro algebraico para luego realizar la conversión de dicha representación en el registro gráfico del software Geogebra.

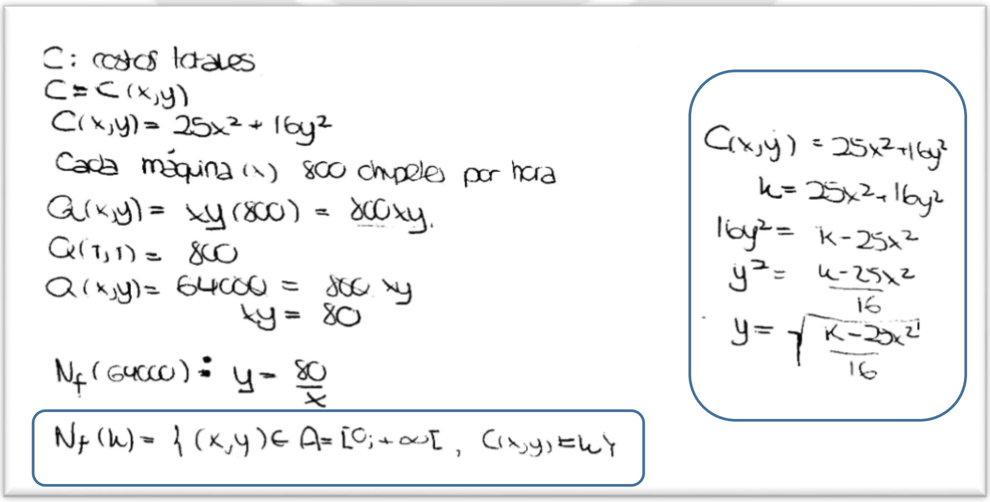
Por otro lado, la restricción de igualdad fue justificada a través del registro en lengua natural como se observa en la Figura 26.



Como nos piden una producción determinada de 64000 chupetes al día la curva de nivel de la producción (isocuanta) es de 64000. De ahí se obtiene $y = \frac{80}{x}$

Figura 26. Representación en lengua natural.

Observamos que el grupo 1 define las curvas de nivel de la función Costo, para esto utiliza el registro algebraico. Sin embargo, podemos notar que el dominio de la función Costo que ellos representaron no es el correcto, porque debería ser $A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ y no $A = [0, +\infty[$, tal como observamos en la Figura 27. Esto significa, como afirma Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010), que los alumnos presentan dificultades al pasar de una a dos dimensiones.



C: costos totales

$C = C(x,y)$

$C(x,y) = 25x^2 + 16y^2$

Cada máquina (x) 800 chupetes por hora

$Q(x,y) = xy(800) = 800xy$

$Q(1,1) = 800$

$Q(x,y) = 64000 = 800\,xy$

$xy = 80$

$N_f(64000): y = \frac{80}{x}$

$N_f(k) = \{(x,y) \in A = [0; +\infty[\,,\; C(x,y) = k\}$

$C(x,y) = 25x^2 + 16y^2$

$k = 25x^2 + 16y^2$

$16y^2 = k - 25x^2$

$y^2 = \frac{k - 25x^2}{16}$

$y = \sqrt{\frac{k - 25x^2}{16}}$

Figura 27. Representación en el registro algebraico de la isocuanta y tratamiento de la representación del costo en el registro algebraico

Así mismo, observamos que el grupo 1, a partir de la representación algebraica de la función Costo, realiza tratamientos con el fin de representar la variable dependiente representada por y en términos de la variable independiente representada por x y la constante k, con el fin de obtener una representación simplificada de la curva de nivel de la función costo, conforme se observa en la Figura 27.

Además, observamos que el grupo 1 realizó una conversión de la representación de la isocuanta del registro algebraico $y = 80/x$ a su representación en el registro gráfico, obtenido por medio del Geogebra. De manera similar, hicieron conversiones de la representación de los isocostos representados en el registro algebraico por $y = \sqrt{\frac{k-25x^2}{16}}$ a representaciones en el registro gráfico obtenido por medio del Geogebra (ver Figura 28).

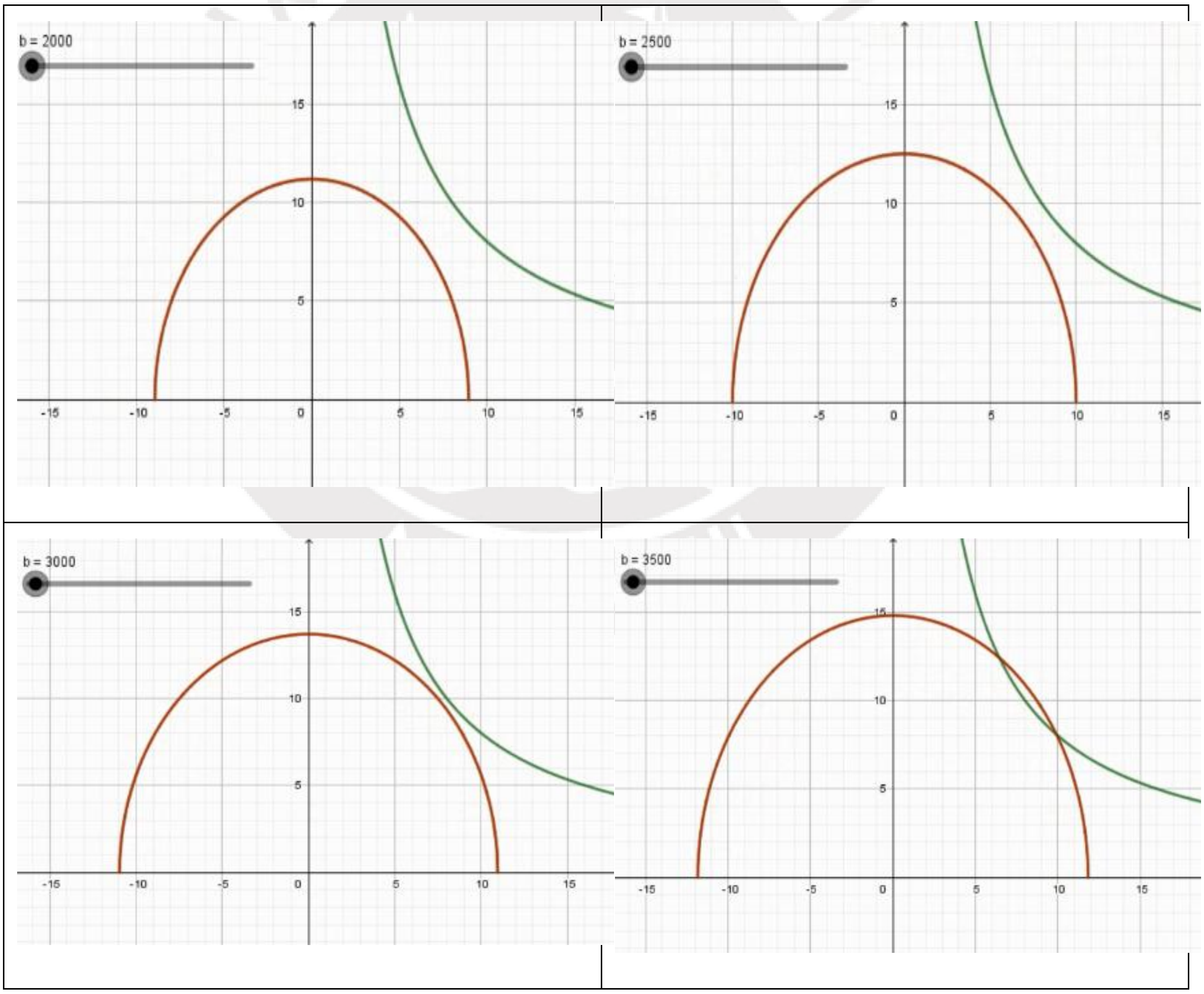


Figura 28. Conversiones de la representación del Costo en el registro algebraico a representaciones en el registro gráfico del Geogebra

Para la representación gráfica de las curvas de nivel, el grupo aplicó la herramienta deslizador dada por el Geogebra. Cabe señalar que el uso del deslizador, si bien facilita las representaciones gráficas de las curvas de nivel, las presenta una por una, de acuerdo al valor del deslizador y no como una familia de curvas de nivel como se acostumbra en los libros didácticos y como los profesores en su práctica docente acostumbran representarlas en las aulas de clase.

Conviene subrayar que el grupo 1, por sus conocimientos previos (Introducción a la Economía), infieren que la representación gráfica en Geogebra del punto óptimo se encuentra en el único punto de intersección de las curvas de nivel con la restricción. Es por este motivo que, con ayuda del deslizador, conjeturan que la representación gráfica en Geogebra de la intersección de las curvas es el punto (8,10) (ver Figura 29). El grupo realizó tratamientos en el registro gráfico para poder acercarse al punto de intersección y poder inferir dicho punto.

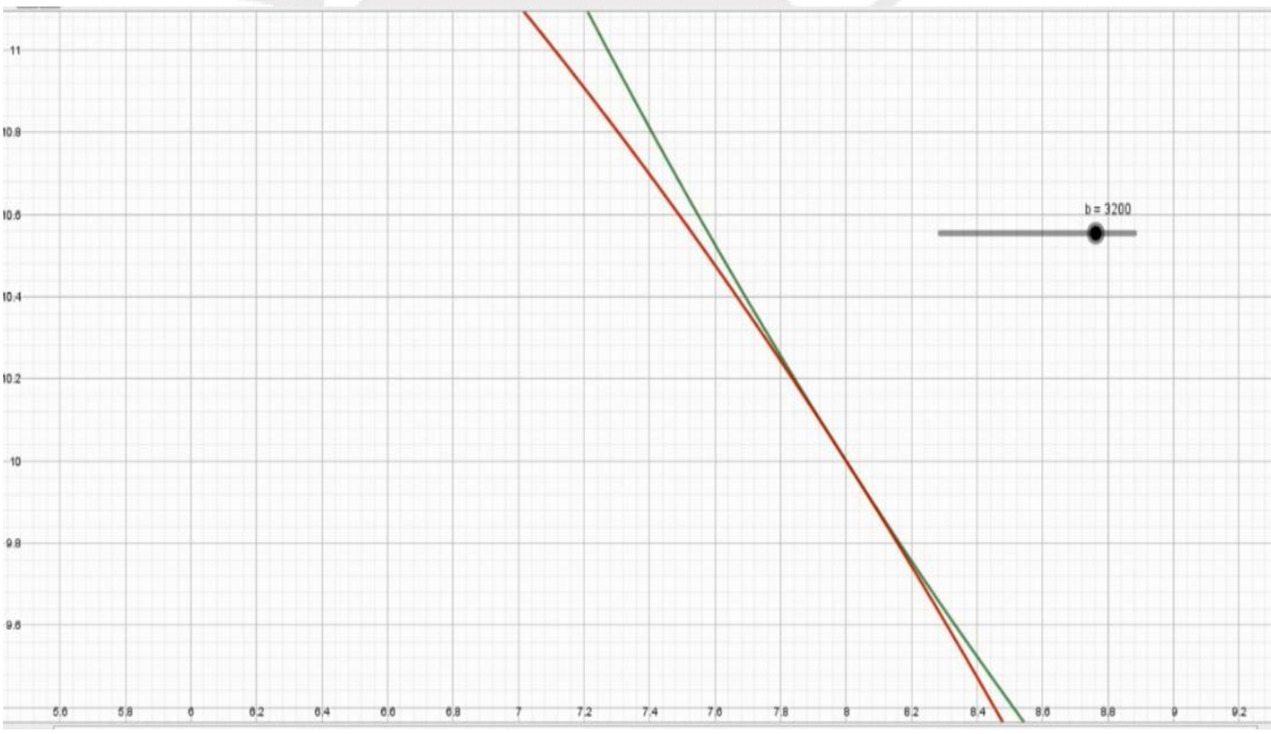
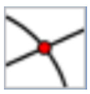


Figura 29**.** Tratamientos en el registro gráfico del Geogebra.

Luego, con ayuda de la opción intersección  del Geogebra, verificaron que el punto de intersección entre la isocuanta y el isocosto es el (8,10) (ver Figura 30).

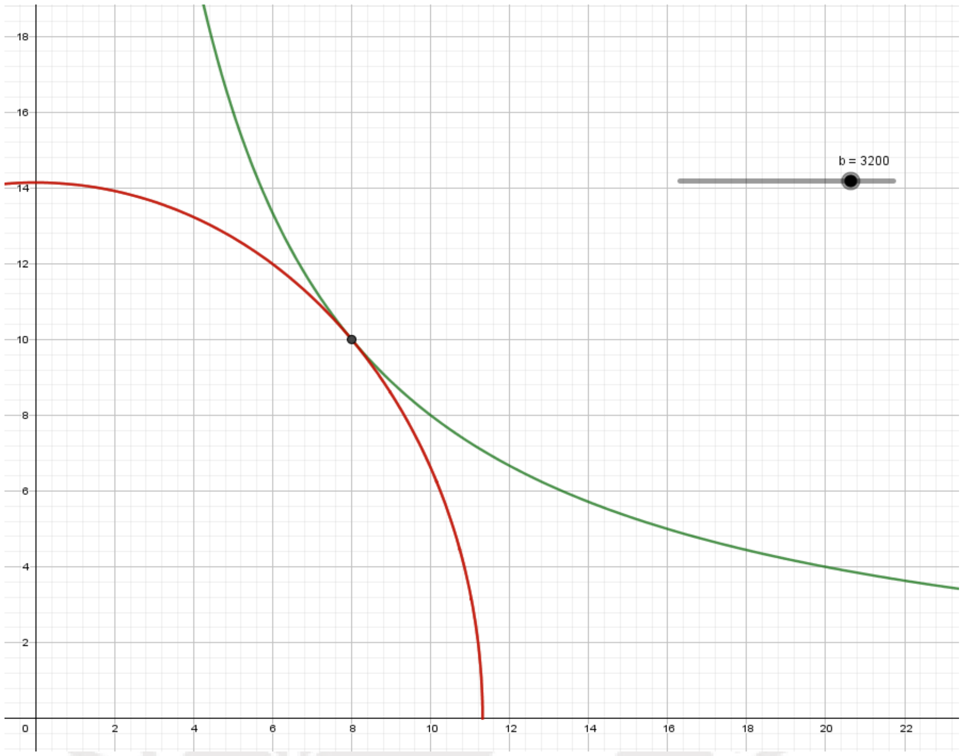


Figura 30. Representación gráfica del Geogebra de la intersección de la isocuanta y el isocosto.

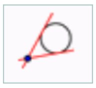
Finalmente, los alumnos deducen que ambas curvas son tangentes gracias a la opción  del Geogebra, como observamos en la Figura 31.

Figura 31. Representación en el registro gráfico del Geogebra de la recta tangente a la isocuanta y al isocosto.

De este modo, el grupo 1 concluye que el costo total es mínimo cuando el número de máquinas es 8 y el número de horas es 10. Además, como se muestra en la Figura 32, el grupo utiliza el registro en lengua natural para dar respuesta a la interrogante planteada en la parte a).

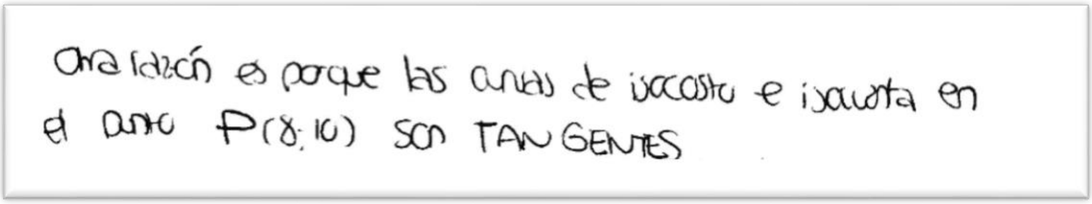


Figura 32. Representación en registro natural.

Con respecto al ítem b), el grupo 1 consiguió representar el vector marginalidad por medio del registro algebraico. En la Figura 33 se observan dichas representaciones algebraicas, tanto para los isocostos como para la producción.

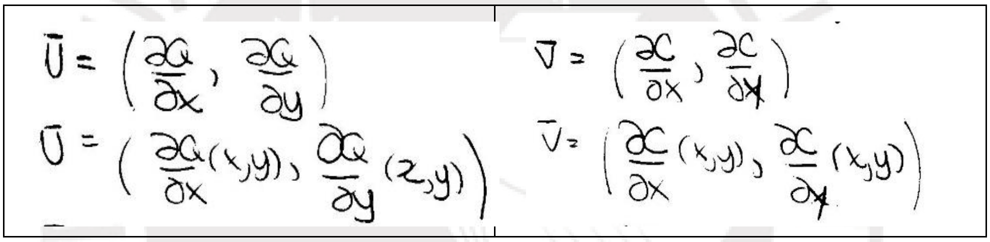


Figura 33. Representación de los vectores marginalidad en el registro algebraico.

Además, el grupo 1 realiza tratamientos de las representaciones de la función en el registro algebraico para hallar los vectores marginalidad del isocosto y de la producción en el punto de intersección $(8{,}10)$, como se observa en la Figura 34.

Función Producción	Función Costo
$Q(x,y) = 800xy$ $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 800y$ $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 800x$ $\bar{U} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \frac{\partial Q}{\partial y}(z,y)\right)$ reemplazando los valores hallados P(8,10) $\bar{U} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(8,10), \frac{\partial Q}{\partial y}(8,10)\right) = (8000, 6400)$	$C(x,y) = 25x^2 + 16y^2$ $\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = 50x$ $\frac{\partial C}{\partial y}(x,y) = 32y$ $\bar{V} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(x,y), \frac{\partial C}{\partial y}(x,y)\right)$ $\bar{V} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(8,10), \frac{\partial C}{\partial y}(8,10)\right) = (400, 320)$

Figura 34. Tratamientos de la representación de la función producción y la función costo en el registro algebraico.

Luego, el grupo 1 determina que los puntos de intersección entre los isocostos y la isocuanta deben ser pares ordenados de entradas en los naturales. Esta información es extraída de la grabación hecha en la experimentación, en la cual el grupo expresa que las variables involucradas, número de horas y número de máquinas productoras de chupetes, deben ser enteras. Dichos puntos son los siguientes: $(4,20)$ y $(5,16)$. Luego de determinar los vectores de marginalidad para los isocostos y la isocuanta, el grupo 1 realiza la conversión de la representación de los vectores marginalidad del registro algebraico para su representación en el registro gráfico con ayuda del Geogebra, como observamos en la Figura 35.

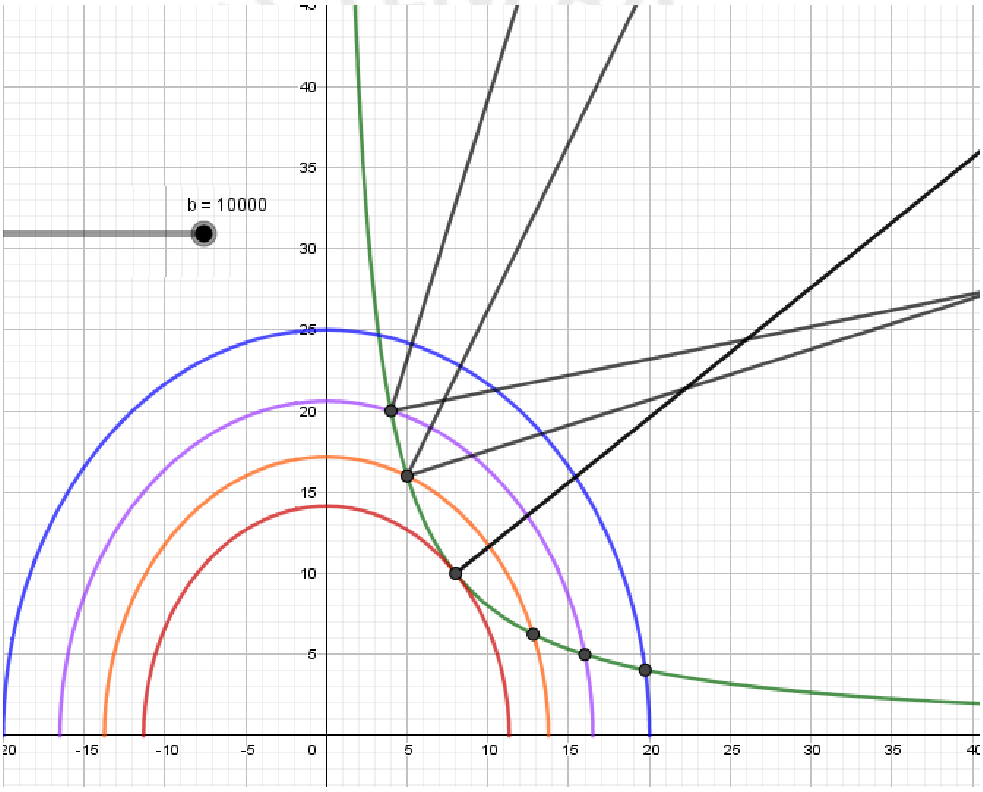
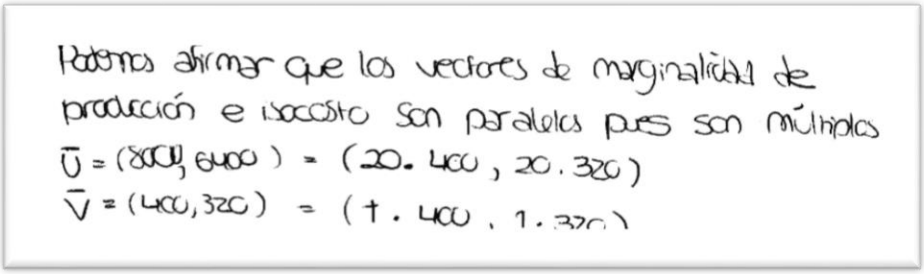


Figura 35. Conversión de la representación de los vectores marginalidad del registro algebraico a su representación en el registro gráfico del Geogebra.

El grupo 1 utiliza el registro en lengua natural para responder a la pregunta b) y lo justifica usando el registro algebraico, en este último registro se realizan tratamientos de sus representaciones (ver Figura 37).

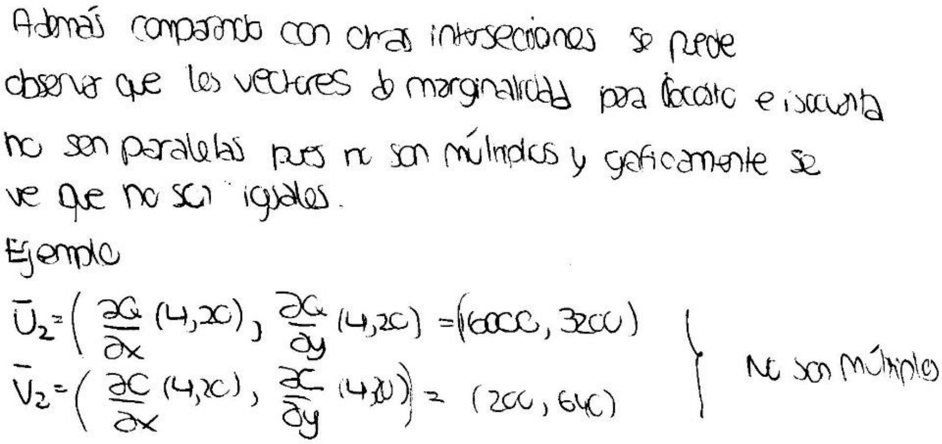

Podemos afirmar que los vectores de marginalidad de producción e isocosto son paralelos pues son múltiplos

$\bar{U} = (8000, 6400) = (20 \cdot 400, 20 \cdot 320)$

$\bar{V} = (400, 320) = (1 \cdot 400, 1 \cdot 320)$

Figura 36. Tratamiento en el registro algebraico del vector marginalidad.

Además, complementa la respuesta por medio del registro en lengua natural y lo justifica usando el registro algebraico.


Además comparando con otras intersecciones se puede observar que los vectores de marginalidad para isocosto e isocuanta no son paralelas pues no son múltiplos y gráficamente se ve que no son iguales.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} \bar{U}_2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(4,20), \frac{\partial Q}{\partial y}(4,20)\right) = (6000, 3200) \\ \bar{V}_2 = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(4,20), \frac{\partial C}{\partial y}(4,20)\right) = (200, 640) \end{array}\right\} \text{No son múltiplos}$$

Figura 37. Tratamiento en el registro algebraico de los vectores marginalidad.

Los alumnos afirman que los vectores marginalidad son paralelos en el punto óptimo y no son paralelos en otras intersecciones, como se aprecia en la Figura 38, con lo que se da respuesta al ítem c.

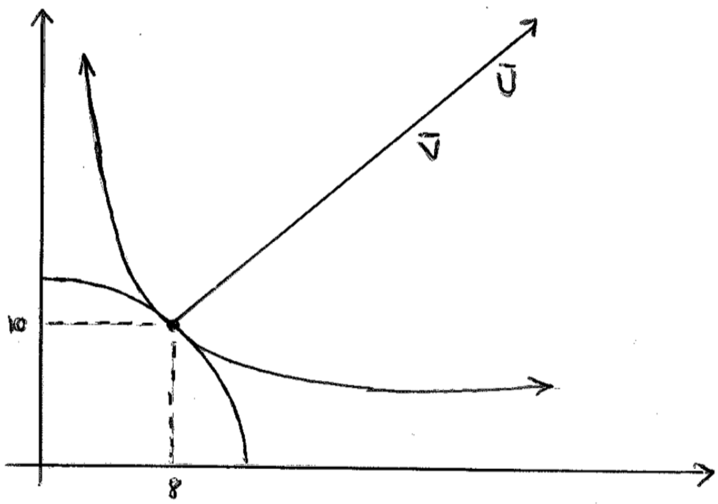


Figura 38. Ilustración de los vectores marginalidad.

Así, afirmamos que el objetivo de esta situación problema fue alcanzado, ya que el grupo 1 reconoció que, en un problema de optimización con una restricción de igualdad, en el punto óptimo los vectores gradientes son múltiplos entre sí.

Con respecto al grupo 2, como se observa en la Figura 39, ellos representan el número de máquinas productoras de chupetes con las variables x y el número de horas de funcionamiento de cada máquina con la variable y.

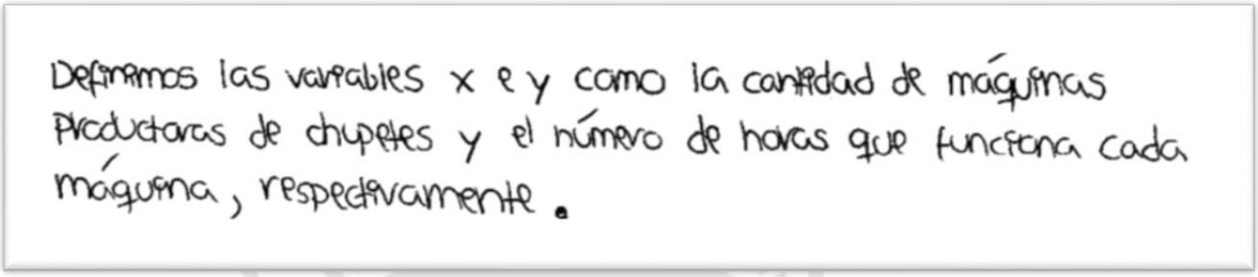

Definimos las variables x e y como la cantidad de máquinas productoras de chupetes y el número de horas que funciona cada máquina, respectivamente.

Figura 39. Representación en lengua natural de las variables a usar.

El grupo 2 determina que las variables deben ser no negativas, a través de representaciones en lengua natural (ver Figura 40).

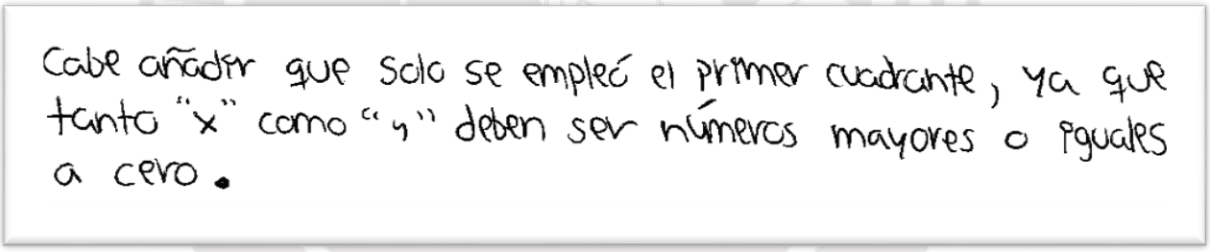

Cabe añadir que solo se empleó el primer cuadrante, ya que tanto "x" como "y" deben ser números mayores o iguales a cero.

Figura 40. Representación en lengua natural del grupo 2.

Además, ellos realizan la conversión de la función Costo representada en lengua natural para su representación en el registro algebraico (ver Figura 41).

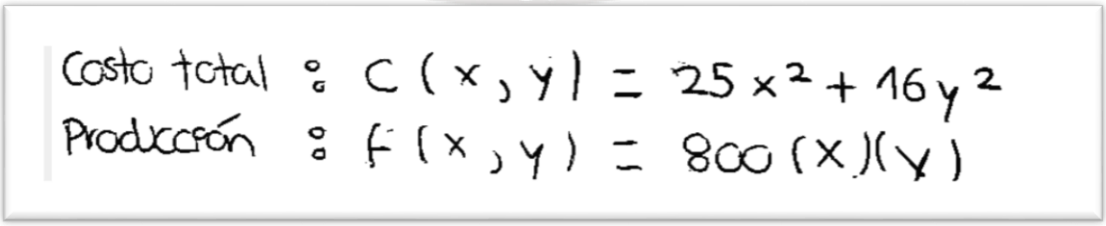

Costo total : $C(x, y) = 25x^2 + 16y^2$
Producción : $f(x, y) = 800(x)(y)$

Figura 41. Representación de las funciones costo y producción en el registro algebraico.

Por otro lado, realizó tratamientos en el registro algebraico de la isocuanta representada por $800xy = 64000$ para $xy = 80$ (ver Figura 42).

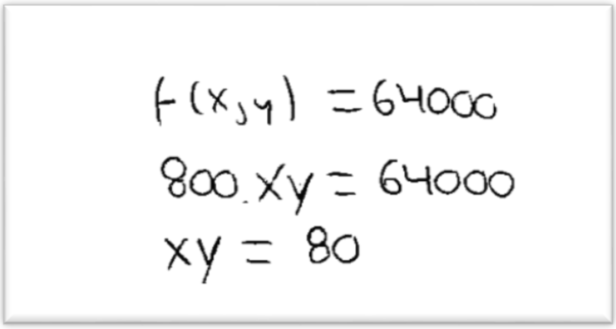

$f(x,y) = 64000$
$800.xy = 64000$
$xy = 80$

Figura 42. Tratamiento en el registro algebraico del grupo 2.

Luego realiza la conversión de la isocuanta, de su representación en el registro algebraico $xy = 80$ a su representación en el registro gráfico con apoyo del Geogebra, ingresando en la barra de entrada x*y=80 (ver Figura 43).

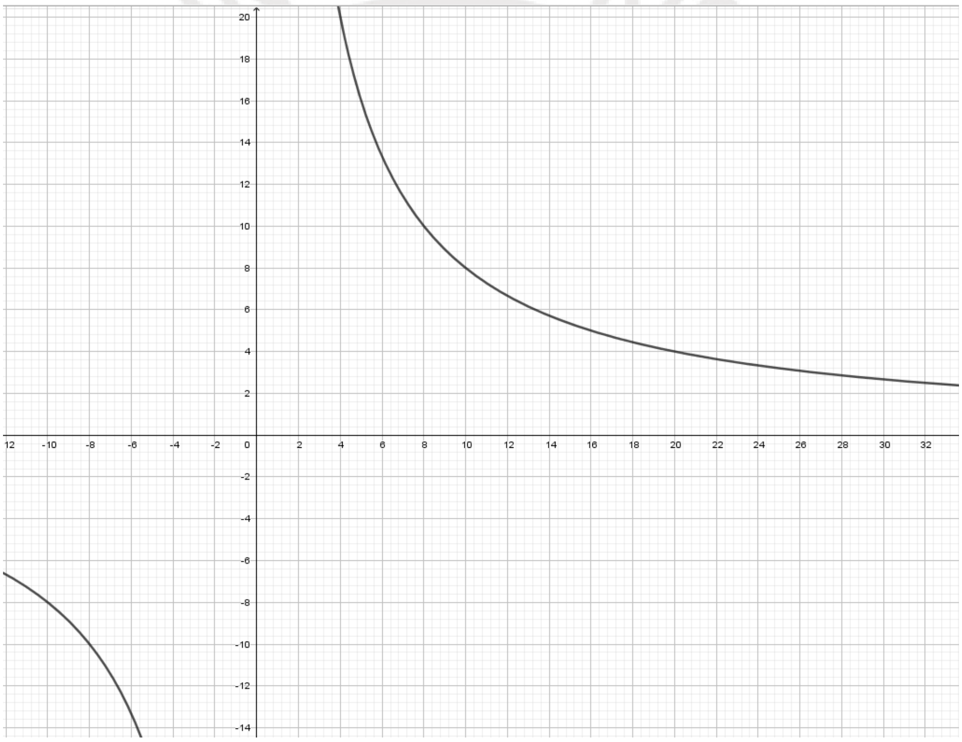


Figura 43. Representación de la isocuanta en el registro gráfico del Geogebra.

El grupo 2 reconoce, mediante el registro en lengua natural la definición de dicha curva de nivel (ver Figura 44).

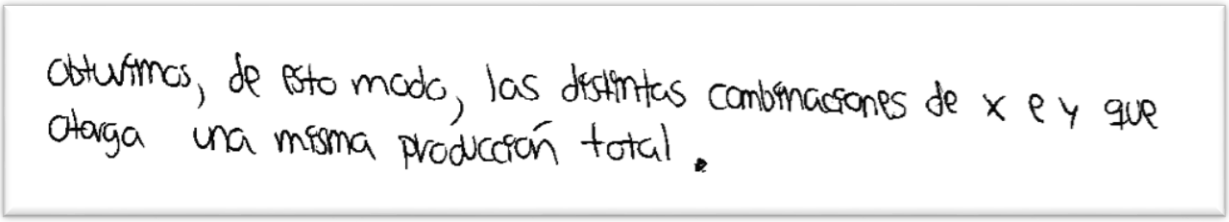

Obtuvimos, de esto modo, las distintas combinaciones de x e y que otorga una misma producción total.

Figura 44. Representación de la isocuanta en el registro de lengua natural.

El grupo define la isocuanta y los isocostos por medio de representaciones en el registro algebraico (ver Figura 45).

$$N_f(64000) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 800xy = 64000\}$$
$$N_c(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 25x^2 + 16y^2 = a\}$$

Figura 45. Representaciones gráficas de algunas curvas de nivel.

Después, el grupo 2 con apoyo de un deslizador del Geogebra, logra graficar distintas curvas de nivel del isocosto. Para esto, realiza conversiones de la representación del isocosto del registro algebraico para representaciones en el registro gráfico CAS del Geogebra. En la Figura 46, para cada valor de "a" se representa gráficamente el isocosto, cuya representación algebraica es $25x^2 + 16y^2 = a$.

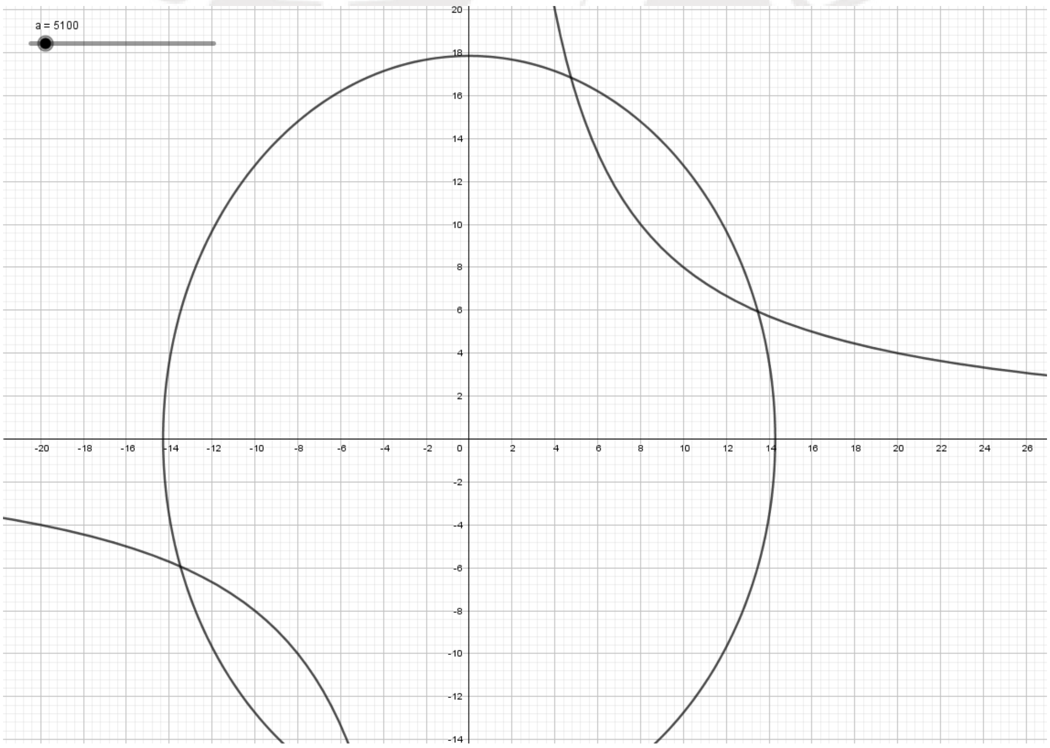


Figura 46. Representación del isocosto en el registro gráfico del Geogebra.

Para la obtención de la representación gráfica del isocosto, los estudiantes del grupo 2 ingresaron la sentencia mostrada en la El valor mínimo del deslizador fue 0 y el máximo 64000.

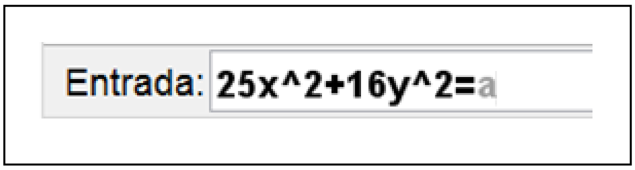


Figura 47. Sintaxis empleada por el grupo 2 para representa al isocosto en el registro gráfico del Geogebra

El grupo determina que el par ordenado (8,10) es solución del problema pues se percatan de que es la única intersección entre el isocosto hallado y la isocuanta. Llegaron a esta conclusión pues ellos tienen ese conocimiento de un primer curso de Economía llevado anteriormente.

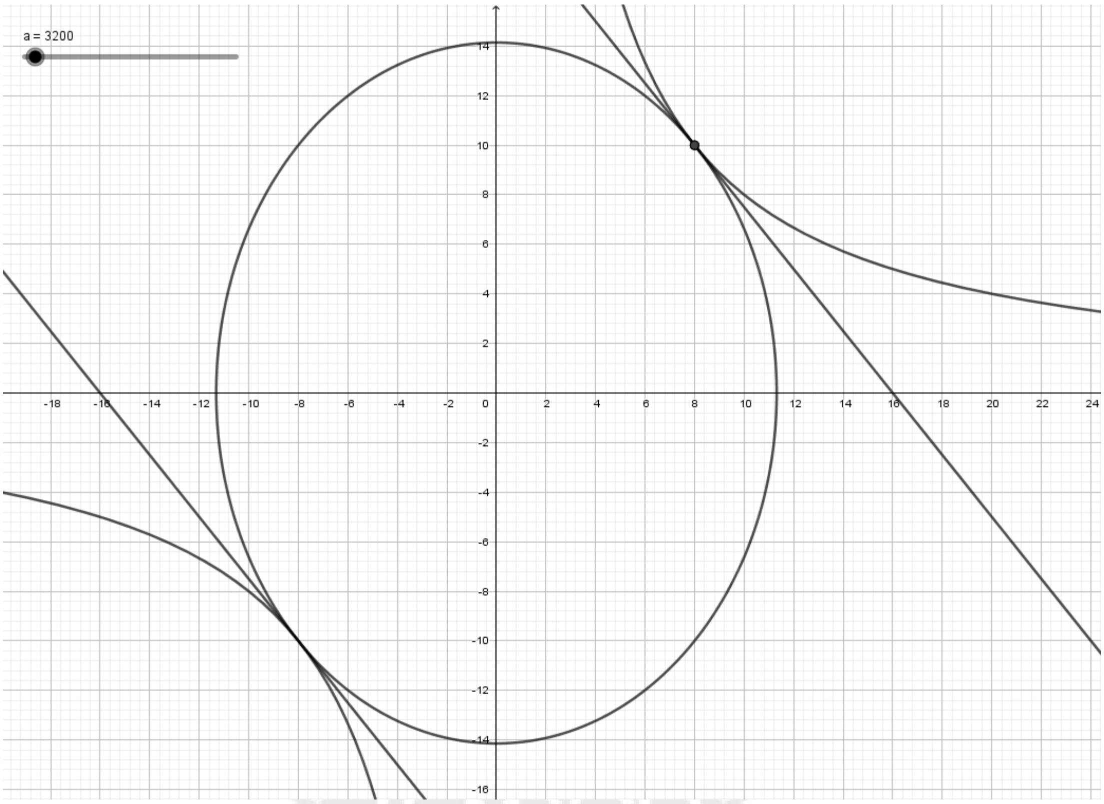


Figura 48. Producción de representaciones en el registro gráfico del Geogebra, del grupo 2.

Finalmente, para responder al ítem a) el grupo determina, por medio de la representación gráfica de la recta tangente, que en el punto óptimo la isocuanta y el isocosto son curvas tangentes (ver Figura 49).

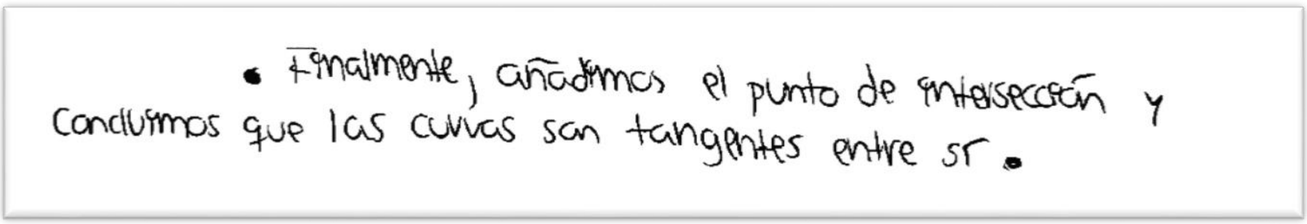

• Finalmente, añadimos el punto de intersección y
concluimos que las curvas son tangentes entre sí.

Figura 49. Producción de una representación en lengua natural del grupo 2.

El grupo 2, para justificar su respuesta al ítem b), utiliza representaciones en el lenguaje natural y representaciones algebraicas, como vemos a continuación (ver Figura 50).

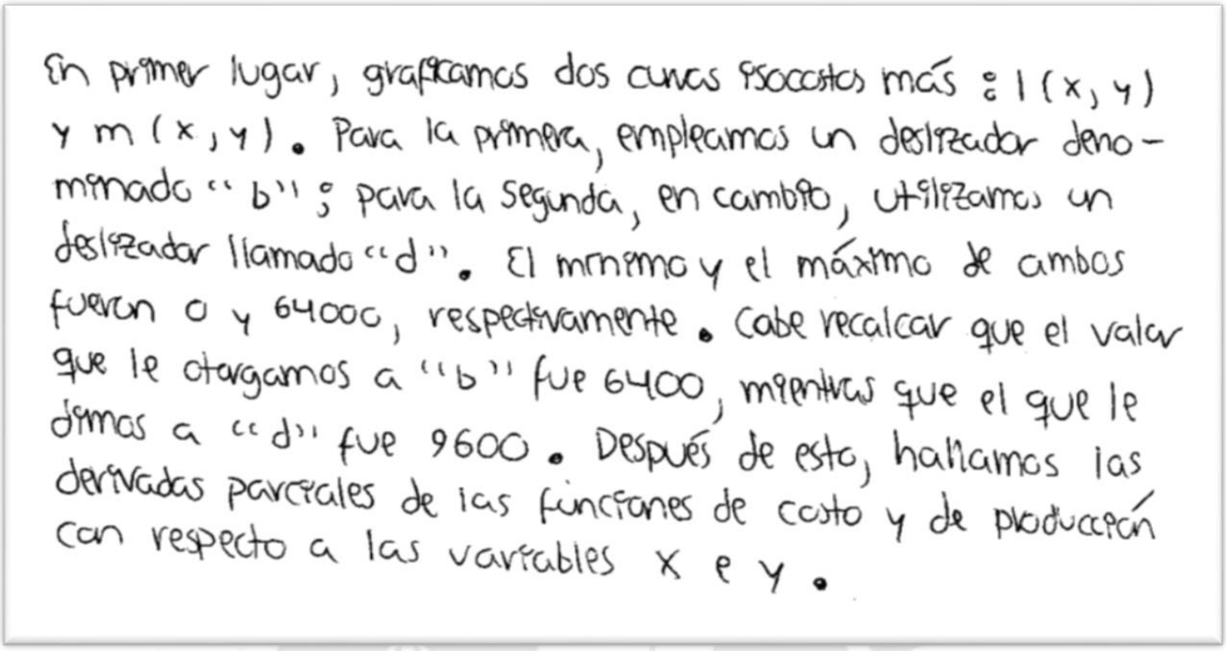

En primer lugar, graficamos dos curvas isocostos más: l (x, y) y m (x, y). Para la primera, empleamos un deslizador denominado "b"; para la segunda, en cambio, utilizamos un deslizador llamado "d". El mínimo y el máximo de ambos fueron 0 y 64000, respectivamente. Cabe recalcar que el valor que le otorgamos a "b" fue 6400, mientras que el que le dimos a "d" fue 9600. Después de esto, hallamos las derivadas parciales de las funciones de costo y de producción con respecto a las variables x e y.

Figura 50. Producción de representaciones en el registro de lengua natural del grupo 2.

Los alumnos del grupo 2 utilizan el registro algebraico para representar al vector marginalidad de los isocostos y de las isocuantas, a través de sus derivadas parciales (ver Figura 51).

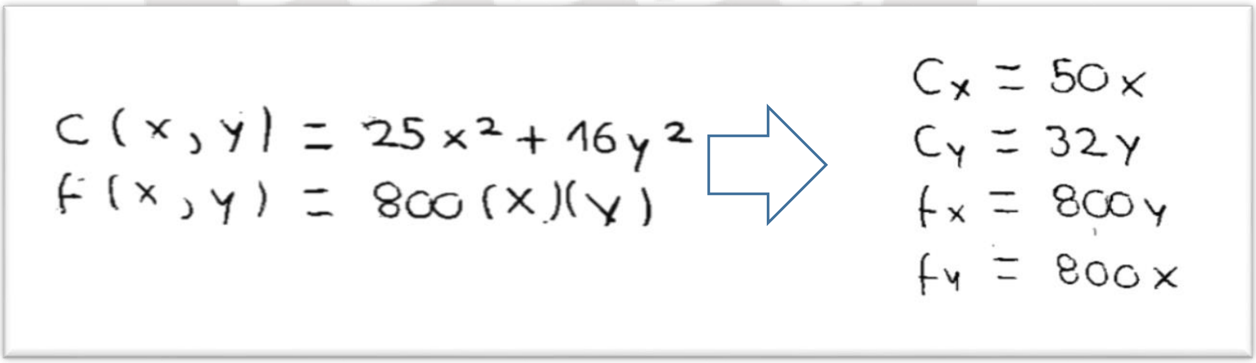


Figura 51. Tratamiento en el registro algebraico de la función producción y de la función costo.

Por otro lado, los integrantes del grupo 2 utilizan el registro en lengua natural para explicar el comando a usar en el Geogebra para representar gráficamente a los vectores marginalidad.

La formula que empleamos para los vectores de las funciones de costo fue "vector((x_0, y_0) , $(x_0, y_0) + (C_x(x_0, y_0), C_y(x_0, y_0))$", mientras que la que utilizamos para los vectores de las funciones de costo fue "vector((x_0, y_0) , $(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$"

Figura 52. Registro en lengua natural de los vectores marginalidad.

Se observa que el grupo 2 ingresó en la barra de entrada del Geogebra el comando **vector** para obtener las representaciones gráficas del vector marginalidad, como se aprecia en la Figura 53.

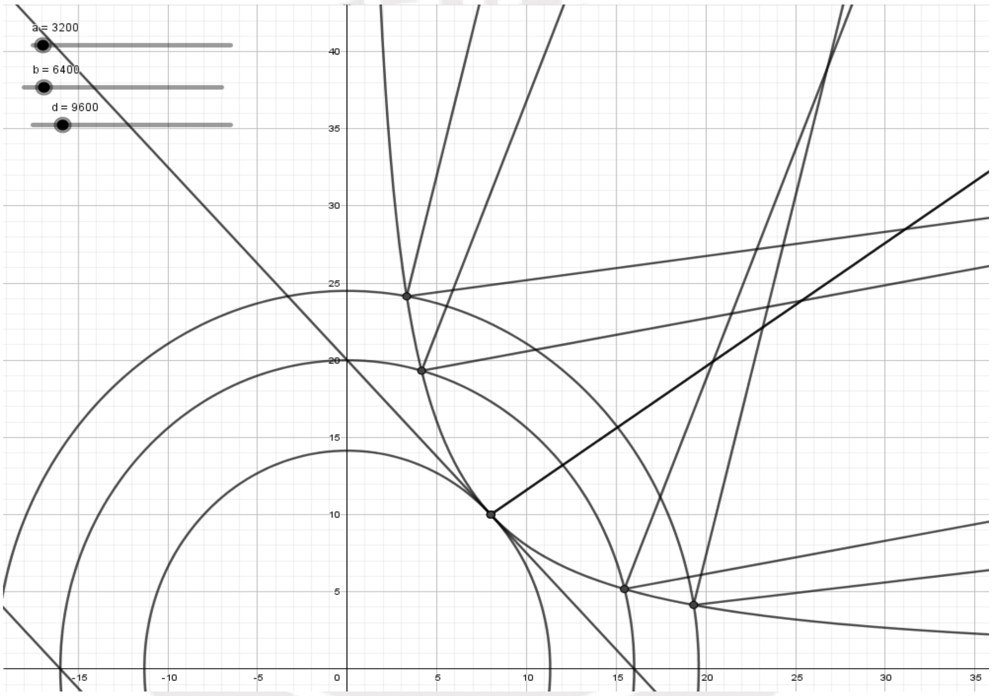


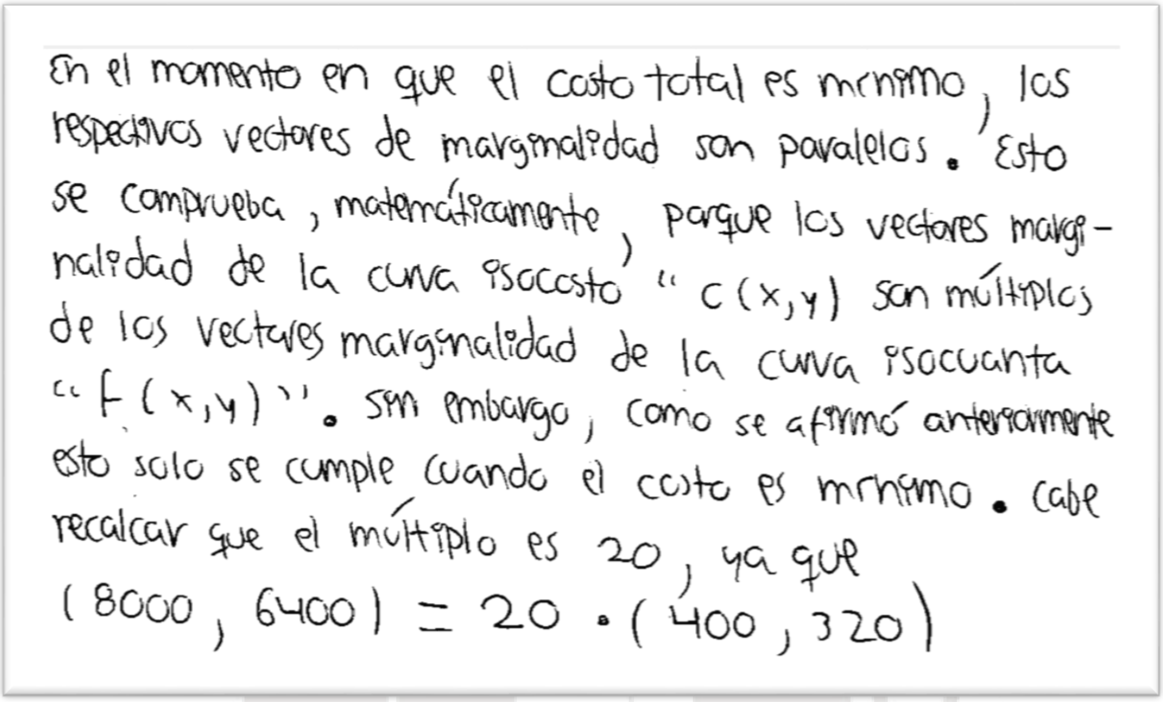
Figura 53. Representaciones gráficas del vector marginalidad.

Finalmente, el grupo 2 concluye a través del registro natural que los vectores marginalidad son paralelos en punto óptimo (ver Figura 54).

En conclusión, los vectores de marginalidad serán paralelos siempre y cuando el costo sea mínimo. Entonces, si el costo total no es mínimo, los vectores de marginalidad no son paralelos. En otras palabras, estos son diferentes.

Figura 54. Producción en el registro natural del grupo 2.

Para responder al ítem c), el grupo 2 hace uso nuevamente del registro en lengua natural y de la definición de paralelismo de vectores para justificar su respuesta.



En el momento en que el costo total es mínimo, los respectivos vectores de marginalidad son paralelos. Esto se comprueba, matemáticamente, porque los vectores margi-
nalidad de la curva isocosto "$C(x,y)$ son múltiplos de los vectores marginalidad de la curva isocuanta "$f(x,y)$". Sin embargo, como se afirmó anteriormente esto solo se cumple cuando el costo es mínimo. Cabe recalcar que el múltiplo es 20, ya que
$(8000, 6400) = 20 \cdot (400, 320)$

Figura 55. Representaciones semiótica producidas por el grupo 2.

Socialización de la situación Problema

En esta situación problema, generalizamos los resultados con ayuda de la producción de los estudiantes. El profesor investigador socializa la propiedad del máximo de una función, dada una restricción de igualdad.

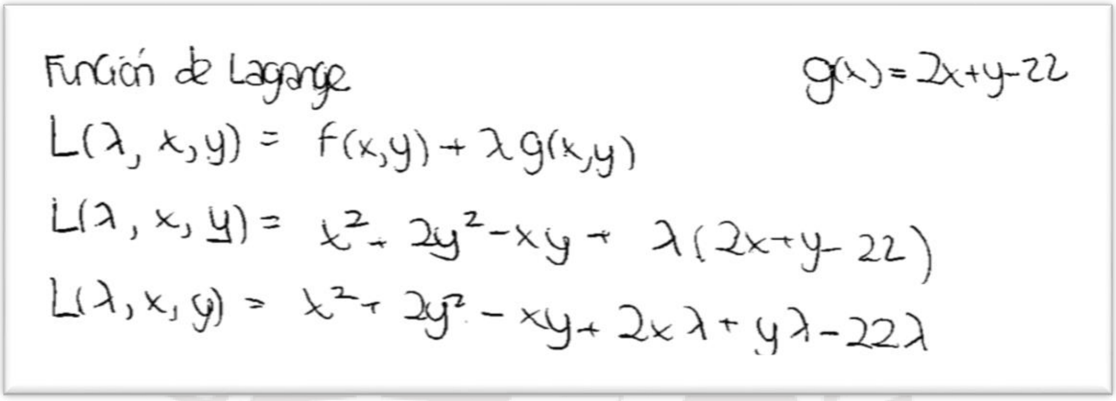
Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones derivables continuas. Si el valor máximo (o mínimo) de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = c$ ocurre en un punto P en el que $\nabla g(P) \neq 0$, entonces $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$ para cierta constante λ.

Lo anterior equivale a determinar el punto crítico de la función de Lagrange L, asociada a un problema de optimización sujeto a una restricción de igualdad. Es decir, dada la función de Lagrange $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$, el punto crítico se determina resolviendo el sistema dado por $\frac{\partial L}{\partial x}(\lambda, x, y) = 0, \frac{\partial L}{\partial y}(\lambda, x, y) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x, y) = 0.$

En nuestra investigación se planteó el siguiente problema:

Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Determine el mínimo valor de f sujeto a la restricción $2x + y = 22$.

Con respecto al grupo 1, los alumnos emplearon el registro algebraico para representar a la Función de Lagrange (ver Figura 56).



Función de Lagrange $\quad g(x) = 2x + y - 22$

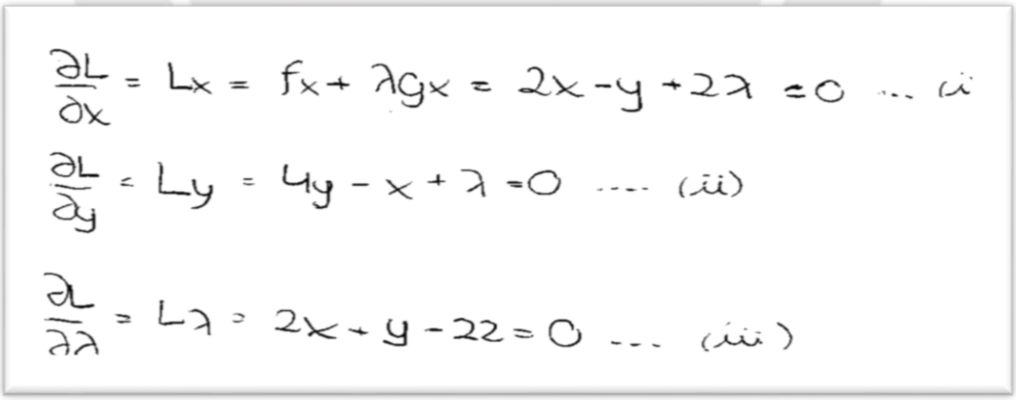
$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$L(\lambda, x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(2x + y - 22)$

$L(\lambda, x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 2x\lambda + y\lambda - 22\lambda$

Figura 56. Representación de la Función de Lagrange en el registro algebraico.

Los integrantes del grupo 1, hicieron uso de representaciones en el registro algebraico del cálculo de las derivadas parciales de la función de Lagrange, para plantear el sistema de ecuaciones que le permitirá hallar el punto crítico.



$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = f_x + \lambda g_x = 2x - y + 2\lambda = 0 \quad \ldots (i)$

$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = 4y - x + \lambda = 0 \quad \ldots (ii)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = 2x + y - 22 = 0 \quad \ldots (iii)$

Figura 57. Producción en el registro algebraico del cálculo de derivadas parciales

Por medio de tratamientos de representaciones en el registro algebraico, los alumnos del grupo 1 consiguieron hallar el punto crítico, es decir, el punto óptimo dada la restricción de igualdad. Ver Figura 58.

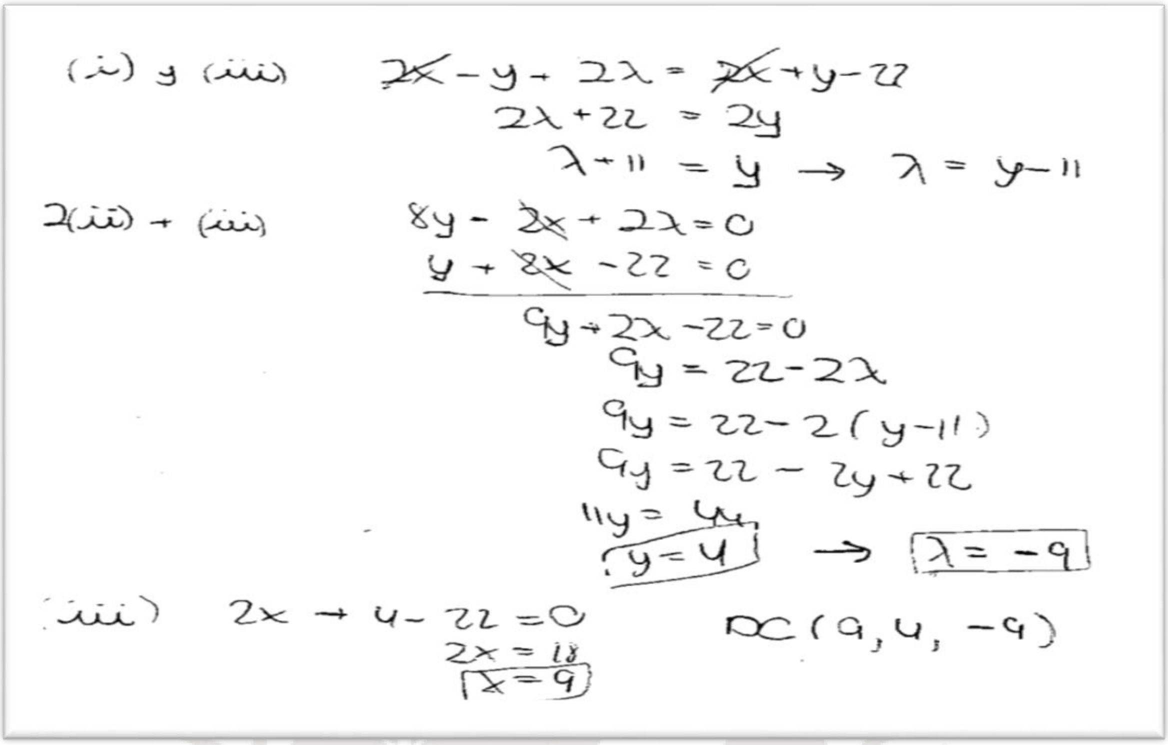


Figura 58. Tratamientos de representaciones en el registro algebraico.

Así, el grupo 1 aplica correctamente la propiedad anterior para determinar el punto óptimo. De manera similar el grupo 2 aplicó la propiedad para determinar el punto óptimo.

CONSIDERACIONES FINALES

El objeto matemático Multiplicador de Lagrange hace parte fundamental de los conceptos matemáticos que todo economista debe conocer, esto es por las aplicaciones que tiene en este campo, tales como la maximización de la utilidad dada una restricción presupuestaria o la minimización del costo del productor bajo una restricción presupuestaria.

Esta materia es impartida en la universidad en la que se realizó la investigación, en el curso Matemática II, que pertenece al segundo semestre académico de la carrera de Economía. En cuanto a la enseñanza de la matemática en dicho curso, se observa que existen dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos, relacionados con el Cálculo diferencial de dos variables, debido a la falta de situaciones que estén relacionadas a la actividad profesional del futuro economista.

A partir de la investigación bibliográfica nos percatamos que en el campo de la Enseñanza de la Matemática, existen pocas investigaciones sobre el Multiplicador de Lagrange; específicamente sólo una tesis doctoral cuyo marco teórico es la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En dicha investigación se realizó un estudio comparativo entre la enseñanza de nuestro objeto matemático, en estudiantes universitarios de matemática y de economía. De manera similar, existen pocas investigaciones que involucren el estudio de funciones de varias variables y el uso de las TICs.

Según nuestra experiencia como profesores del curso, los alumnos presentan dificultades en cuanto al aprendizaje de los temas relacionados con funciones de varias variables. Con respecto al Multiplicador de Lagrange, la mayoría de los alumnos resuelven los ejercicios de manera algebraica sin transitar por el registro gráfico y sin entender cuál es el funcionamiento del Teorema de Lagrange (teorema por el cual se formaliza el uso del Multiplicador de Lagrange). Creemos que esto es debido a que existen pocos ejercicios en la bibliografía del curso que fomenten dicha conversión y a la escasa producción de situaciones que relacionen nuestro objeto matemático con la Economía. Estas circunstancias fueron las que nos motivaron a la realización de nuestra investigación.

Utilizamos como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988) para poder entender el camino a seguir en nuestra investigación y orientar nuestras investigaciones de las clases y poder estudiar nuestros resultados después de obtener los datos de la experimentación. Gracias al análisis preliminar de nuestra investigación, se pudo reconocer que el uso de recursos tecnológicos como el Geogebra, puede permitir a los estudiantes realizar transformaciones en las representaciones de los diversos objetos matemáticos involucrados con el multiplicador de Lagrange.

Por otro lado, el Geogebra no posee un comando específico para determinar curvas de nivel para una función de dos variables. Esta dificultad fue superada por los alumnos, pues generaron una familia de curvas de nivel usando para ello un deslizador. De esta forma, los alumnos superaron una dificultad propia del software.

Con respecto al marco teórico consideramos importante utilizar aspectos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1995) para comprender el concepto del Multiplicador de Lagrange. Según el autor, sólo es posible el aprendizaje del objeto matemático si es que existe coordinación entre los registros de representación semiótica.

Notamos que los estudiantes privilegian el registro en lengua natural para sustentar sus procedimientos. Creemos que esto se debe a que los estudiantes poseen una buena formación en lo que respecta a las ciencias sociales. En otro contexto, si hubieran sido alumnos de alguna facultad de ingeniería, creemos que el registro que hubiera predominado sería el algebraico.

Para llevar a cabo nuestra investigación se hizo uso de una situación problema, el cual consiste en formular preguntas en un contexto más o menos matematizado. El objeto matemático debe ser desconocido por el alumno, y además, a través de la resolución de la situación problema, el alumno se percata que con los conocimientos que él posee, la resolución del problema no es inmediata.

Los dos objetivos específicos de investigación se lograron concretar por medio de la situación problema:

Identificar los registros de representación semiótica que movilizan los estudiantes de economía cuando resuelven una situación-problema. Los estudiantes, a través de la situación problema planteada, pudieron transitar entre los registros en lengua natural, el registro algebraico y el registro gráfico. Se pudo apreciar que este último registro pudo ser representado gracias al uso del Geogebra.

Determinar los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes de Economía cuando resuelven una situación-problema. En base a una situación problema, creemos que los alumnos se apropiaron de la noción de Multiplicador de Lagrange a partir de sus conocimientos previos. Organizamos la situación problema, el cual fue presentado en el registro de lengua natural. Para la resolución de la misma, los estudiantes realizaron tratamientos de representaciones en el registro algebraico y tratamientos de representaciones en el registro gráfico. Además, realizaron conversiones de representaciones en el registro algebraico para representaciones en el registro gráfico y viceversa. De esta forma y conforme a la TRRS, se realizó la coordinación de dichos registros de representación semiótica.

Al lograr los objetivos específicos de investigación, afirmamos que se logró concretar el objetivo general de investigación:

Analizar la coordinación de los registros de representación semiótica que realizan los estudiantes de Economía en el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange, por medio de una situación-problema.

Al lograr el objetivo general de investigación pudimos responder la pregunta de investigación:

¿Estudiantes de Economía coordinan los registros de representación semiótica, en el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange por medio de una situación problema?

Sugerimos el estudio del proceso de la visualización ya que sería muy provechoso estudiar los Multiplicadores de Lagrange mediante las aprehensiones.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2017). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. REVEMAT: R. Eletr. Educ. Mat., UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, SC, Brasil, eISSN 1981-1322.

Alves, V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis (Tesis doctoral en Educación). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble. La pensée Suvage Éditions, vol. 9/3, p. 281-308.

Balacheff, N. (1987). Processus de prevuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, vol. 18: p. 147-176.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros de zorzal.

Duval, R. (1995). Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Colombia. 2004.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2011). Ver e ensinar a Matemática de outra forma. Primera Edición. São Paulo. PROEM.

García, Y., & Velásquez, O. (2016). Cálculo diferencial e integral. Lima, Universidad del Pacífico. 1.a edición, pp. 337-378.

Henriques, A. (2006). L’enseignement et l’apprentissage des integrales multiples : Analyse didactique int´egrant l’usage du logiciel Maple (Tesis doctoral en Didáctica de las Matemáticas). Université Joseph Fourier, Grenoble, Alpes, Francia.

Ingar, K. (2014). A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

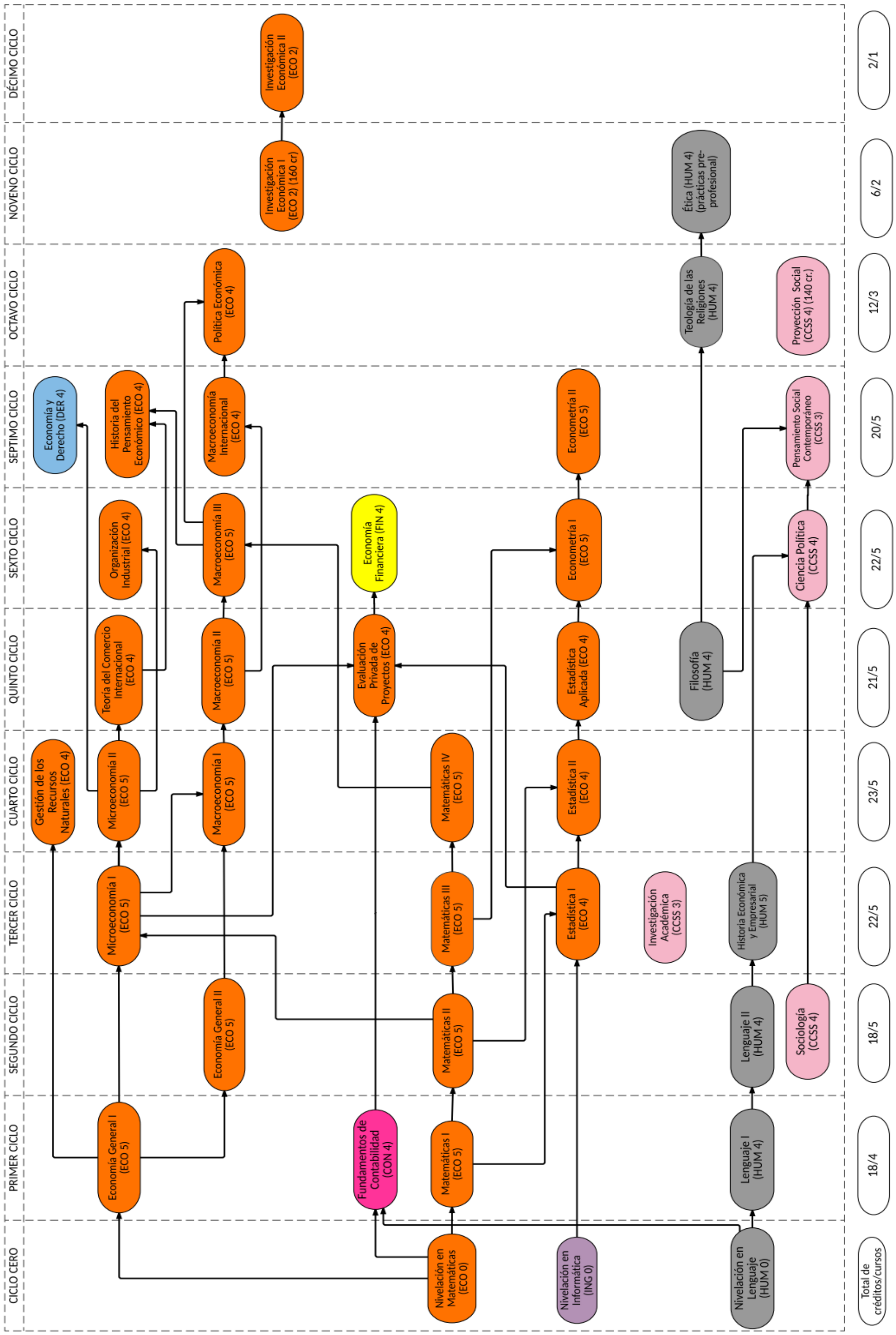
Peñaloza, T. (2016). Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el Geogebra. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Piskunov, N. (1977). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Editorial Mir. Moscú.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. Educational Studies Mathematical, 73, p. 3-19.

Xhonneux, S. (2011). Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie. 182. Université de Namur, Bélgica.

ANEXOS



FACULTAD DE ECONOMÍA Y FINANZAS
FLUJOGRAMA DE LA CARRERA DE ECONOMÍA -
PLAN DE ESTUDIO VIGENTE A PARTIR DEL SEMESTRE 2017-I
CICLO CERO
PRIMER CICLO
SEGUNDO CICLO
TERCER CICLO
CUARTO CICLO
QUINTO CICLO
SEXTO CICLO
SEPTIMO CICLO
OCTAVO CICLO
NOVENO CICLO
DÉCIMO CICLO
Nivelación en Matemáticas (ECO 0)
Nivelación en Informática (ING 0)
Nivelación en Lenguaje (HUM 0)
Economía General I (ECO 5)
Fundamentos de Contabilidad (CON 4)
Matemáticas I (ECO 5)
Lenguaje I (HUM 4)
Economía General II (ECO 5)
Matemáticas II (ECO 5)
Lenguaje II (HUM 4)
Sociología (CCSS 4)
Microeconomía I (ECO 5)
Matemáticas III (ECO 5)
Estadística I (ECO 4)
Investigación Académica (CCSS 3)
Historia Económica y Empresarial (HUM 5)
Gestión de los Recursos Naturales (ECO 4)
Microeconomía II (ECO 5)
Macroeconomía I (ECO 5)
Matemáticas IV (ECO 5)
Estadística II (ECO 4)
Teoría del Comercio Internacional (ECO 4)
Macroeconomía II (ECO 5)
Evaluación Privada de Proyectos (ECO 4)
Estadística Aplicada (ECO 4)
Filosofía (HUM 4)
Organización Industrial (ECO 4)
Macroeconomía III (ECO 5)
Economía Financiera (FIN 4)
Econometría I (ECO 5)
Ciencia Política (CCSS 4)
Economía y Derecho (DER 4)
Historia del Pensamiento Económico (ECO 4)
Macroeconomía Internacional (ECO 4)
Econometría II (ECO 5)
Pensamiento Social Contemporáneo (CCSS 3)
Política Económica (ECO 4)
Teología de las Religiones (HUM 4)
Proyección Social (CCSS 4) (140 cr.)
Investigación Económica I (ECO 2) (160 cr)
Ética (HUM 4) (prácticas pre-profesional)
Investigación Económica II (ECO 2)
Total de créditos/cursos
18/4
18/5
22/5
23/5
21/5
22/5
20/5
12/3
6/2
2/1

SÍLABO

Nombre del Curso: Matemáticas II.
Código: 31650
Departamento Académico: Economía.
Semestre Académico: 2017-I.
Docentes:

Profesor	e-mail @up.edu.pe	Sec.	Jefe de Práctica
Dra. Yboon García Ramos	garcia_yv	A	Bach. Angelo Diaz
Dr. Orestes Bueno Tangoa	o.buenotangoa	B	Bach. Alvaro Naupay
Mg. Daniel Proleón Patricio	proleon_dg	C, D	Bach. Lucy Molina
Mg. Erick Dávila Quesquén	davila_en	E, F	Mg. Erick Dávila
Mg. Alonso Pérez Sotelo	perez_ea	G	Mg. Alonso Perez
		H	Bach. Angelo Diaz
Dr. José Flores Salinas	floress_a	I	Bach. Alvaro Naupay

1. Información general

Es un curso de segundo ciclo y tiene 5 créditos. Es prerrequisito para cursarlo haber aprobado Matemáticas I. Este curso contribuye al desarrollo de la competencia de pensamiento crítico y al siguiente resultado asociado a dicha competencia: “1.4: Resuelve problemas utilizando herramientas matemáticas básicas.” Sus contenidos son los siguientes: límites de funciones y continuidad, derivadas, funciones de varias variables e integrales.

2. Logro final de aprendizaje del curso

Al terminar el curso de Matemáticas II, el estudiante resolverá problemas mediante el uso pertinente de herramientas del cálculo diferencial e integral. Para ello deberá conceptualizar, resolver y comunicar adecuadamente.

3. Unidades de aprendizaje

Unidad de aprendizaje 1: Límites de funciones

Logro de aprendizaje de unidad:

Al concluir la primera unidad, el estudiante dará solución a problemas de límite de funciones y continuidad. El hacerlo implicará graficar las asíntotas de una función. Además, distinguirá la continuidad de una función en un punto de manera gráfica y analítica, y para ello, usará correctamente los teoremas principales de continuidad.

Contenidos

1.1 Límite de una función. Algebra de límites.
1.2 Límites laterales
1.3 Límites infinitos, límites al infinito, límites de formas indeterminadas.
1.4 Algunos límites importantes.
1.5 Asíntotas horizontales, oblicuas y verticales de una función.
1.6 Continuidad de funciones.
1.7 Propiedades de las funciones continuas.
1.8 El teorema del valor intermedio.

Semanas: 1, 2 y 3.

Unidad de aprendizaje 2: Derivadas de funciones de una variable

Logro de aprendizaje de unidad:

Al concluir la segunda unidad, el estudiante dará solución a problemas usando el cálculo diferencial. Esto implicará calcular adecuadamente derivadas de cualquier orden y graficar funciones identificando adecuadamente sus características y elementos.

Contenidos

2.1 Definición de derivada.
2.2 Interpretación geométrica de la derivada. Recta secante y recta tangente.
2.3 Reglas de derivación.
2.4 Construcción de una tabla de derivadas.
2.5 Derivadas de funciones compuestas: regla de la cadena.
2.6 Derivación logarítmica. Derivadas de orden superior.
2.7 Formas indeterminadas (Reglas de L'Hôpital).
2.8 Derivación implícita.
2.9 Razón de cambio media, instantánea, relativa y porcentual.
2.10 Diferencial y valor aproximado de una función.
2.11 Aplicaciones a la economía: costo marginal, ingreso marginal, elasticidad.

2.12 Crecimiento y decrecimiento de función.
2.13 Mínimos y máximos de funciones. Puntos críticos.
2.14 Concavidad de funciones. Puntos de inflexión de funciones.
2.15 Trazado de curvas planas.

Semanas: 3, 4, 5, 6 y 7.

Unidad de aprendizaje 3: Funciones de varias variables

Logro de Aprendizaje de unidad:

Al concluir la tercera unidad, el estudiante dará solución a problemas que involucran funciones de varias variables. Para ello, graficará ciertos aspectos o características de funciones de varias variables. Calculará derivadas parciales de cualquier orden y hará uso correcto de las técnicas para determinar mínimos y máximos de funciones de varias variables.

Contenidos

3.1 Definición.
3.2 Representación geométrica de funciones de dos variables.
3.3 Derivadas parciales.
3.4 Propiedades algebraicas de las derivadas y regla de la cadena.
3.5 Funciones homogéneas.
3.6 Diferencial total.
3.7 Aplicaciones de las derivadas parciales a la teoría económica.
3.8 Mínimos y máximos de funciones de varias variables.
3.9 Optimización sin restricciones: Criterios de la primera y segunda derivada.
3.10 Optimización con restricciones. Multiplicadores de Lagrange.
3.12 Aplicaciones de los multiplicadores de Lagrange.

Semanas: 9, 10, 11 y 12.

Unidad de aprendizaje 4: Integrales

Logro de aprendizaje de unidad:

Al concluir la cuarta unidad, el estudiante resolverá problemas que involucran en su solución el cálculo integral. El hacerlo implicará manejar adecuadamente diversos métodos de integración. Además el estudiante dará solución a problemas de cálculo de áreas mediante el uso de la integral definida, para ello, deberá manipular correctamente la definición de tal integral, y la calculará mediante el uso de teoremas y propiedades pertinentes.

Contenidos

3

4.1 Integral indefinida.

4.2 Tabla de integrales.

4.3 Métodos de integración, sustitución o cambio de variable, por partes, fracciones parciales.

4.4 Aplicaciones de la integral indefinida.

4.5 Integrales definidas. Idea geométrica y teoremas fundamentales del cálculo.

4.6 Propiedades de las integrales definidas.

4.7 Calculo de áreas entre dos curvas.

4.8 Aplicaciones: Excedente del productor y excedente del consumidor.

4.9 Integrales impropias.

Semanas 13, 14 y 15.

4. Estrategias didácticas

- Lección de contenidos teóricos y ejemplos básicos presentada por el profesor la cual conlleva a la discusión y participación activa por parte del alumno.
- Supervisión del trabajo autónomo de cada alumno y orientación hacia el análisis independiente de problemas concretos para su modelación y resolución.
- Desarrollo de ejercicios durante prácticas dirigidas a cargo del jefe de prácticas.

5. Evaluación general

<table>
<tr><th>Instrumento</th><th>Ponderación</th><th>Criterios</th></tr>
<tr><td>Controles</td><td rowspan="2">40 %</td><td>- Obtención de la respuesta correcta.</td></tr>
<tr><td>Prácticas Calificadas (PC)</td><td rowspan="3">- Orden y presentación del trabajo.
Claridad en los conceptos y relación entre ellos.
- Capacidad de deducción y manejo de pruebas formales.
- Aplicación de herramientas a problemas vistos anteriormente y a problemas nuevos.</td></tr>
<tr><td>Examen Parcial (EP)</td><td>30 %</td></tr>
<tr><td>Examen Final (EF)</td><td>30 %</td></tr>
</table>

- Se rendirán cuatro controles de 15 minutos, los cuales se rinden al principio de las clases especificadas en el cronograma. Cada control es de 5 puntos y no se elimina ninguna nota. Los temas a evaluar corresponden a las 3 últimas clases previas a dicho control. En el control sólo se evalúa la obtención de la respuesta correcta mas no la justificación.

- Se tomarán cuatro prácticas calificadas de 20 puntos cada una y se eliminará la menor nota. Estas evaluaciones tienen una duración de 100 minutos.
- El parcial y el final son exámenes de 20 puntos que duran 120 minutos.

$$\text{Nota final del curso= } 0{,}4NT + 0{,}3EP + 0{,}3EF.$$

Si NC designa la suma de los 4 controles entonces NT es el promedio simple de las tres mejores PCs y la NC.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Yboon García y Oswaldo Velásquez (2016). *Cálculo diferencial e integral*. Universidad del Pacífico.
2. Jagdish Arya y Robin Lardner (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (4ta ed.). Prentice-Hall Hispanoamerica.
3. Ernest F. Haussler y Paul S. Richard (2011). *Matemáticas para administración y economía* (12va ed.). Prentice Hall.
4. Laurence D. Hoffmann (1989). *Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. McGraw-Hill.
5. N. Piskunov (2004). *Cálculo diferencial e integral*. Limusa.
6. Antonia Quiroga (2007). *Introducción al cálculo I* (1era. ed.). DELTA publicaciones.
7. Antonia Quiroga (2007). *Introducción al cálculo II* (1era. ed.). DELTA publicaciones.
8. Michael Sullivan (1997). *Precálculo*. Prentice Hall.
9. Knut Sydsaeter y Peter J. Hammond (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall.
10. Armando Venero (1993). *Análisis Matemático I*. GEMAR.
11. Armando Venero (1997). *Análisis Matemático II*. GEMAR.
12. Javier Zúñiga (2013). *Precálculo*. Universidad del Pacífico.

7. Calendario y Cronograma

MARZO

L	M	M	J	V
27 C1	28	29 C2	30	31 PD1

ABRIL

L	M	M	J	V
3 C3	4	5 C4 Co1	6	7 PC1
10 C5	11	12 C6	13 LIBRE	14 LIBRE
17 C7	18	19 C8 Co2	20	21 PD2
24 C9	25	26 C10	27	28 PC2

MAYO

L	M	M	J	V
1 LIBRE	2	3 C11	4	5 PD3
8 C12	9	10 C13	11	12 PD4
15	16	17 EP	18	19
22 C14	23	24 C15	25	26 PD5
29 C16	30	31 C17 Co3		

JUNIO

L	M	M	J	V
			1	2 PD6
5 C18	6	7 C19	8	9 PC3
12 C20	13	14 C21 Co4	15	16 PD7
19 C22	20	21 C23	22	23 PC4
26 C24	27	28 C25	29 LIBRE	30 LIBRE PD

JULIO

L	M	M	J	V
3 C26	4	5 C27	6	7 PD9 PR
10	11	12 EF	13	14
17 ER	18	19	20	21 EE

- C = Clase, PD = Práctica dirigida.
- Co = Control, PC = Práctica calificada, PR = Práctica de rezagados.
- EP = Examen parcial, EF = Examen final, ER = Examen de rezagados.
- EE = Entrega de exámenes finales.

Semana	Clases	CONTENIDOS	ACTIVIDADES
1	1 y 2	Límite de una función. Álgebra de límites. Límites laterales. Límites infinitos. Cálculo de límites.	Viernes: Práctica dirigida 1 (Clases 1-4)
2	3 y 4	Límites al infinito. Asíntotas. Continuidad de funciones. Discontinuidad.	Miércoles: Control 1 (Clases 1-3) Viernes: Práctica Calificada 1 (Clases 1-4)
3	5 y 6	Propiedades de las funciones continuas. El teorema del valor intermedio. Derivadas de funciones de una variable. Definición de derivada. Recta tangente.	
4	7 y 8	Álgebra de derivadas. Reglas de derivación. Derivadas de funciones compuestas: regla de la cadena. Derivación logarítmica. Derivadas de orden superior.	Miércoles: Control 2 (Clases 5 - 7) Viernes: Práctica dirigida 2 (Clases 5-8)
5	9 y 10	Formas indeterminadas (Reglas de L'Hôpital). Derivación implícita. Razón de cambio media e instantánea. Razón de cambio relativa y porcentual.	Viernes: Práctica calificada 2 (Clases 5 - 10)
6	11	Diferencial y valor aproximado de una función. Aplicaciones a la economía: costo marginal, ingreso marginal, elasticidad.	Viernes: Práctica dirigida 3 (Clases 9-11)
7	12 y 13	El teorema del valor medio. Crecimiento y decrecimiento de función. Mínimos y máximos de funciones. Puntos críticos.	Viernes: Práctica dirigida 4 (Clases 12-13)
8			Examen parcial (Clases 1 - 13)
9	14 y 15	Concavidad de funciones. Puntos de inflexión de funciones. Trazado de curvas planas. Funciones de varias variables. Representación geométrica de funciones de dos variables. Curvas de nivel.	Viernes: Práctica dirigida 5 (Clase 14 - 15)
10	16 y 17	Derivadas parciales. Propiedades algebraicas de las derivadas y regla de la cadena. Funciones homogéneas. Teoremas de Euler.	Miércoles: Control 3 (Clases 14-16) Viernes: Práctica dirigida 6 (Clases 16-17)
11	18 y 19	Diferencial total. Aplicaciones de las derivadas parciales a la teoría económica. Mínimos y máximos de funciones de varias variables. Puntos críticos.	Viernes: Práctica calificada 3 (Clases 14-18)
12	20 y 21	Optimización sin restricciones: Hessiano y criterio de la segunda derivada. Optimización con restricciones. Método de los multiplicadores de Lagrange. Aplicaciones de los multiplicadores de Lagrange.	Miércoles: Control 4 (Clases 19-20) Viernes: Práctica dirigida 7 (Clases 18-23)
13	22 y 23	Integral Indefinida. Métodos de integración: sustitución o cambio de variable. Integración por partes, descomposición en fracciones racionales.	Viernes: Práctica calificada 4 (Clases 20-23)
14	24 y 25	Integrales definidas. Idea geométrica y los teoremas fundamentales del cálculo. Propiedades de las integrales definidas.	Práctica Dirigida (recuperable) (Clases 24-25)
15	26 y 27	Cálculo de áreas entre dos curvas. Aplicaciones: Excedente del productor y excedente del consumidor. Integrales impropias.	Viernes: Práctica dirigida 9 (Clases 26-27) Viernes: Práctica de Rezagados (Clases 1-27)
16			Examen final (Clases 14-27)
17			Lunes: Examen de Rezagados (Clases 1-27) Viernes: Entrega de exámenes finales

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES[1]

El propósito de este protocolo es brindar a los y a las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por ____________________________ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad ______________________________. La meta de este estudio es ____
____

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará ____ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán confidenciales, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, ____ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta (de ser el caso que se haya proporcionado información escrita sobre la investigación). He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, puedan ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con ______________________________ al correo (o al teléfono) ________________________.

____
Nombre completo del (de la) participante   Firma   Fecha

____
Nombre del Investigador responsable   Firma   Fecha

[1] Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

Problema

1. En la ciudad de Piura, un comerciante desea emprender el negocio de chupetes, aprovechando que la ciudad es muy calurosa y que la temperatura ha aumentado considerablemente. Para esto, dispone de una determinada cantidad de máquinas productoras de chupetes, las cuales producen cada una 800 chupetes por hora. Con respecto a los costos totales de fabricación, el comerciante constata que dependen del número de máquinas productoras de chupetes y del número de horas que funciona cada máquina. Siendo así, los costos totales en soles, equivalen a veinticinco veces el número de máquinas multiplicadas por sí mismas, más dieciséis veces el número de horas que funciona cada máquina multiplicadas por sí mismas. Por un estudio del mercado, el comerciante planea producir 64 000 chupetes por día. Definimos el *vector marginalidad* de una curva de nivel, como el vector de dos componentes, que son la marginalidad con respecto al número de máquinas y la marginalidad con respecto al número de horas, respectivamente.

   a) ¿Cómo es la relación entre las curvas isocostos y la curva de producción en el momento en que el costo total es mínimo? justifique su respuesta.

b) Considerando las intersecciones de la curva de producción con algunos isocostos, ¿qué sucede con sus respectivos vectores de marginalidad, para los isocostos y la producción, en las intersecciones de dichas curvas? justifique su respuesta.

c) Respecto a las curvas isocostos y de producción, en el momento en que el costo total es mínimo, ¿qué puedes afirmar de sus respectivos vectores marginalidad? justifique su respuesta.

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definido por $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Determine el mínimo valor de f sujeto a la restricción $2x + y = 22$.