

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**ESCUELA DE POSGRADO**



**ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES DE TERCER AÑO DE  
SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES CON UNA  
VARIABLE**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN  
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

Rolando Ruiz Carbajal

**ASESORA**

Mg. Elizabeth Milagro Advíncula Clemente

Septiembre, 2018

## DEDICATORIA

*A Dios por ser mi guía en el camino de la vida.*

*A mi esposa Lida, por su amor y comprensión  
y por motivarme a culminar el presente trabajo.*

*A mi hija Jimena y mis hijos Roly y Melvin, que  
son la razón de mi superación y de mi vida. Y  
a todas las personas que hicieron posible la  
culminación del presente trabajo.*



## RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable. Como nuestro estudio está centrado en el análisis de errores, planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable?.

Para este estudio, utilizamos la clasificación de errores elaborada por el autor de la tesis, que nos permitió analizar los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales. Esta clasificación de errores fue elaborado tomando como marco teórico el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) propuesto por Socas (1979) y la clasificación de errores propuesta por los siguientes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Saucedo (2007). Podemos concluir que los estudiantes cometen errores muy frecuentes de acuerdo a la tipología de errores planteadas en el siguiente orden: por no lograr comprender y traducir una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra; por el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades; por no comprender los símbolos y términos matemáticos de desigualdad (  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  ) e intervalos (  $[$ ,  $]$ ,  $($ ,  $)$  ) y su relación entre ellos; cometen errores en el procedimiento o de cálculo elemental; por no tener los conocimientos previos; por realizar inferencias inadecuadas en el razonamiento lógico y por no verificar sus resultados.

**Palabras clave:** Error, desigualdades, inecuaciones lineales, tipología de errores.

## ABSTRACT

The current research has as objective to analyze the error that our third-year students commit in 37 "Fe y Alegría" high school. Like Our study is focused on the analysis of error, we propose the following research question: What is the error that our third year students make at "37 Fe y Alegría" high school about the resolution of linear inequations with a variable?. For this study, we use the classification of error that it was made by the tesis author for the analysis of the error high school student in the resolution of linear inequations. This classification of errors was elaborated taking into account as theoretical framework of The Semiotic Logical Approach (ELOS) Proposed by Socas (1979) and the classification of error proposed by the following authors: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky and Inbar (1987), Esteley and Villarreal (1990,1996), Astolfi, (2000), Brousseau (2001), Caputo and Macías (2006), Abrate, Pochulu and Vargas (2006), Gladis Saucedo (2017). We can conclude that students make very frequent mistakes according to the errors presented in the following order: for not being able to understand and traslate a mathematical expression (literal language, algebraic representation and graphic representation) to another; by the theoretical ignorance and domain of formulas and properties; for not understanding the mathematical symbols and terms of inequality and intervals and their relation between them; they make mistakes in the procedure or elementary calculation; for not having the previus knowledge; for making inadequate inferences in logical reasoning and for not verifying their results.

**Keywords:** Error, inequalities and linear inequations; tipology of error.

## AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi agradecimiento a quienes, con su apoyo constante, hicieron posible la culminación de la misma.

A mí estimada asesora de tesis, la Mg. Elizabeth Advíncula Clemente por su constante apoyo, guía y valiosa orientación durante la realización de esta tesis.

A la Dra. Norma Violeta Rubio Goycochea por su apoyo y sugerencias para la validación del instrumento de aplicación de esta tesis.

A mis profesores y profesoras de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, quienes contribuyeron en mi formación académica.

Al profesor Marino Bustamante Gil, director de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37, por brindarme las facilidades para el desarrollo de la tesis.

A los estudiantes del tercer año de educación secundaria de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37, por su colaboración con su participación en el desarrollo de la tesis.

## ÍNDICE

RESUMEN .....	3
ABSTRACT .....	4
AGRADECIMIENTO.....	5
LISTA DE FIGURAS .....	8
LISTA DE TABLAS.....	10
INTRODUCCIÓN.....	12
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA .....	14
1.1. Antecedentes de la investigación.....	14
1.2. Justificación del estudio .....	17
1.3. Pregunta de investigación.....	20
1.4. Objetivos de la investigación .....	20
CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO.....	22
2.1 Aspectos históricos.....	22
2.2 Estudio de las desigualdades e inecuaciones lineales .....	23
2.2.1. Desigualdad.....	24
2.2.2. Intervalo.....	28
2.2.3. Inecuación .....	30
2.3 Enseñanza de las inecuaciones lineales .....	31
CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO... ..	35
3.1. Marco teórico .....	35
3.1.1. Error.....	35
3.1.2. Obstáculo.....	36
3.1.3. Dificultad.....	36
3.1.4. Enfoque lógico semiótico .....	37
3.1.5. Errores en el aprendizaje de las matemáticas .....	39
3.1.6. Clasificación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ....	40

3.2. Metodología .....	51
3.2.1. Procedimientos metodológicos .....	51
3.2.2. Sujetos de investigación .....	52
3.2.3. Instrumentos de investigación.....	54
3.2.4. Diseño y aplicación de los cuestionarios y entrevistas.....	55
3.2.4.1. Diseño del cuestionario n.º 1 .....	55
3.2.4.2. Aplicación del cuestionario n.º 1 .....	56
3.2.4.3. Diseño del cuestionario n.º 2.....	56
3.2.4.4. Aplicación del cuestionario n.º 2 .....	57
3.2.4.5. Diseño y aplicación de las entrevistas.....	58
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS A PRIORI Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	59
4.1. Análisis a priori del cuestionario n.º 1 .....	60
4.2. Análisis a priori del cuestionario n.º 2.....	70
4.3. Análisis de los resultados del cuestionario n.º 1 .....	76
4.4. Análisis de los resultados del cuestionario n.º 2.....	113
CONSIDERACIONES FINALES .....	134
REFERENCIAS.....	140
ANEXOS .....	144

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Programa de funcionamiento de un robot controlado con un sensor ....	19
FIGURA 2: Desigualdad entre las medias: $m_a \geq m_g \geq m_h$ .....	23
FIGURA 3: Inecuaciones lineales en L1.....	32
FIGURA 4: Inecuaciones lineales en L2.....	32
FIGURA 5: Situación de contexto.....	33
FIGURA 6: Intervalos y valor absoluto, libro L2.....	34
FIGURA 7: Intervalos y valor absoluto, libro L3.....	34
FIGURA 8: Modelo de competencia cognitiva .....	38
FIGURA 9: Respuesta a la pregunta 1a del cuestionario n.º 1 .....	79
FIGURA 10: Respuesta a la pregunta 1d del cuestionario n.º 1 .....	80
FIGURA 11: Respuesta a la pregunta 1e del cuestionario n.º 1 .....	80
FIGURA 12: Respuesta a la pregunta 2a del cuestionario n.º 1 .....	82
FIGURA 13: Respuesta a la pregunta 2b del cuestionario n.º 1 .....	82
FIGURA 14: Respuesta a la pregunta 3b del cuestionario n.º 1 .....	86
FIGURA 15: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 3b del cuestionario n.º 1 .....	86
FIGURA 16: Respuesta a la pregunta 4a y b del cuestionario n.º 1 .....	88
FIGURA 17: Respuestas de otro estudiante a la pregunta 4a y b del cuestionario n.º 1.....	88
FIGURA 18: Respuesta a la pregunta 5b del cuestionario n.º 1 .....	90
FIGURA 19: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 5 (b) del cuestionario n.º 1 .....	91
FIGURA 20: Respuesta a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1 .....	92
FIGURA 21: Respuesta de otro estudiante a la pregunta n.º 6 del cuestionario N.º 01 .....	93
FIGURA 22: Respuesta a la pregunta 7a del cuestionario n.º 1 .....	98
FIGURA 23: Respuesta a la pregunta 7b del cuestionario n.º 1 .....	99
FIGURA 24: Respuesta a la pregunta 7c del cuestionario n.º 1 .....	100
FIGURA 25: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 7c del cuestionario n.º 1 .....	100
FIGURA 26: Respuesta a la pregunta 7d del cuestionario n.º 1 .....	101
FIGURA 27: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 7d del cuestionario n.º 1...	102



FUGURA 28: Respuesta a la pregunta 7 e del cuestionario n.º 1 .....	102
FIGURA 29: Respuestas a la pregunta 8 a del cuestionario n.º 1 .....	105
FIGURA 30: Respuestas de otro estudiante a la pregunta 8a del cuestionario n.º 1 .....	106
FIGURA 31: Respuestas a la pregunta 8b del cuestionario n.º 1 .....	107
FIGURA 32: Respuestas a la pregunta 8c del cuestionario n.º 1 .....	108
FIGURA 33: Respuestas de otro estudiante a la pregunta 8c del cuestionario n.º 1.. .....	108
FIGURA 34: Respuestas a la pregunta 8d del cuestionario n.º 1 .....	109
FIGURA 35: Respuestas a la pregunta 8e del cuestionario n.º 1 .....	109
FIGURA 36: Respuestas a la pregunta 8 f del cuestionario n.º 1 .....	110
FIGURA 37: Respuestas a la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2.....	115
FIGURA 38: Respuestas de otros estudiantes a la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2.....	116
FIGURA 39: Respuestas a la pregunta 2 del cuestionario n.º 2.....	118
FIGURA 40: Respuesta 2 de otro estudiante a la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2 .....	119
FIGURA 41 Respuestas de otros estudiantes a la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2.....	119
FIGURA 42: Respuestas 1 a la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2 .....	121
FIGURA 43: Respuestas 2 a la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2.....	122
FIGURA 44: Respuestas 3 a la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2.....	122
FIGURA 45: Respuestas a la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2 .....	124
FIGURA 46: Respuesta de otro estudiante a la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2 .....	124
FIGURA 47: Respuestas a la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2 .....	126
FIGURA 48: Respuesta de otro estudiante a la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2 .....	126
FIGURA 49: Respuestas a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2 .....	128
FIGURA 50: Respuestas de otros estudiantes a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2.....	129
FIGURA 51: Consolidado final del análisis de 521 errores encontradas en los cuestionarios n.º 1 y n.º 2.....	133

## LISTA DE TABLAS

TABLA 1: Organización de competencias y capacidades tercer año de secundaria .....	17
TABLA 2: Resumen de la notación de las desigualdades en sus diferentes formas.	29
TABLA 3: Reglas para resolver desigualdades .....	30
TABLA 4: Libros de tercer año de educación secundaria.....	32
TABLA 5: Caracterización de tipologías de errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas.....	40
TABLA 6: Cuadro comparativo de las principales tipologías de errores en el aprendizaje de las matemáticas .....	46
TABLA 7: Tipologías de errores más comunes que se cometen en la resolución de Inecuaciones lineales con una variable en estudiantes de tercer año de educación secundaria.....	50
TABLA 8: Escala de calificación vigesimal en secundaria.....	52
TABLA 9: Estadística 2017 del área de matemática.....	53
TABLA 10: Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1 .....	61
TABLA 11: Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1.....	62
TABLA 12: Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1 .....	63
TABLA 13: Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 1.....	63
TABLA 14: Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1 .....	64
TABLA 15: Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1 .....	65
TABLA 16: Análisis a priori de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1.....	66
TABLA 17: Análisis a priori de la pregunta n.º 8 del cuestionario n.º 1 .....	68
TABLA 18: Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2.....	71
TABLA 19: Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2.....	72
TABLA 20: Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2.....	73
TABLA 21: Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2.....	73
TABLA 22: Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2.....	74
TABLA 23: Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2 .....	75
TABLA 24: Resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1.....	77
TABLA 25: Resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1 .....	81

TABLA 26: Consolidado de las preguntas n.º 1 y 2 del cuestionario n.º 1, indicando las respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas...	83
TABLA 27: Resultados de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1	85
TABLA 28: Resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 01	87
TABLA 29: Resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1	89
TABLA 30: Resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1	91
TABLA 31: Consolidado de respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas	94
TABLA 32: Resultados de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1	95
TABLA 33: Resultados de la pregunta n.º 8 del cuestionario n.º 1	103
TABLA 34: Consolidado de respuestas correctas, incompletas, no contestadas y respuestas incorrectas de la pregunta n.º 7 y n.º del cuestionario n.º 1	111
TABLA 35: Resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2	114
TABLA 36: Resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2	117
TABLA 37: Resultados de la respuesta n.º 3 del cuestionario n.º 2	120
TABLA 38: Resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2	123
TABLA 39: Resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2	125
TABLA 40: Resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2	127
TABLA 41: Resumen de los resultados del cuestionario n.º 2	130
TABLA 42: Consolidado final de los resultados obtenidos en las respuestas analizadas de los cuestionarios n.º 1 y n.º 2	144

## INTRODUCCIÓN

Según el Diseño Curricular Nacional 2016, el desarrollo de competencias en el área de matemática se dará a través de la resolución de problemas; para lo cual el estudiante debe tener los conocimientos matemáticos necesarios. El aprendizaje de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas se logra con ciertas dificultades, las cuales son evidenciadas a través de errores cuando los estudiantes solucionan problemas. Por lo que es necesario conocer la naturaleza de los errores de nuestros estudiantes para tomar las medidas pertinentes y minimizar esta dificultad.

El presente trabajo de investigación muestra los errores que cometen estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales, los cuales fueron analizados y clasificados según la tipología de errores elaborado por el autor de la tesis. Esta tipología de errores fue elaborado tomando como marco teórico Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) propuesta por Socas (1979) y la clasificación de errores propuesta por los siguientes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Saucedo (2007).

A continuación presentamos nuestro trabajo, que se desarrolla en cuatro capítulos. En el primer capítulo, presentamos algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de inecuaciones lineales y los errores más frecuentes. También formulamos la pregunta de investigación y los objetivos, general y específicos, trazados para la presente investigación.

En el segundo capítulo, tratamos al objeto matemático, presentamos un estudio de las desigualdades e inecuaciones lineales desde los puntos de vista histórico, matemático y didáctico; para lo último revisamos libros de tercer año de secundaria.

En el tercer capítulo presentamos aspectos del Enfoque Lógico Semiótico de Socas (1979) y la clasificación de errores de diferentes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Saucedo (2007). Se hizo un cuadro comparativo entre ellos en el que coinciden en

algunas tipologías de error en el aprendizaje de las matemáticas. En base a ello proponemos para la investigación, seis tipologías de errores cometidos en la resolución de inecuaciones lineales.

En el último capítulo, presentamos el análisis a priori y el análisis de los resultados obtenidos, luego de la aplicación de los cuestionarios n° 1 y 2.

Para concluir, presentamos algunas consideraciones finales de nuestro trabajo de investigación, entre ellas que de acuerdo a la tipología planteada por el autor de la tesis, los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37, cometen errores muy frecuentes en el siguiente orden: por no lograr comprender y traducir una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra; por el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades; por no comprender los símbolos y términos matemáticos de desigualdad ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ) e intervalos ( $[ ]$ ,  $\langle \rangle$ ) y su relación entre ellos; cometen errores en el procedimiento o de cálculo elemental; por no tener los conocimientos previos; por realizar inferencias inadecuadas en el razonamiento lógico y por no verificar sus resultados.

## CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentamos algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de inecuaciones lineales y los errores más frecuentes. También formulamos la pregunta de investigación y los objetivos, general y específicos, trazados para la presente investigación.

### 1.1. Antecedentes de la investigación

En cuanto a la descripción de los errores que cometen los estudiantes respecto al objeto matemático desigualdades e inecuaciones lineales, se tiene diversos trabajos de investigación, pero la mayor parte realizadas en los primeros ciclos de nivel superior o bachillerato. Son pocos los trabajos realizados en el nivel secundario como el que se pretende realizar. A continuación describiremos algunas investigaciones realizadas y las conclusiones a las que arribaron.

Generalmente, los estudiantes se limitan a resolver inecuaciones lineales como si se tratase de ecuaciones lineales, tal como afirma Bazzini (1999) citado en Borello y Lezama (2009), quien indica que hay una confusión entre conceptos de ecuación y desigualdad, entre las cuales se establecen analogías incorrectas; indicando que, para resolver desigualdades, se aplican los mismos modelos de las ecuaciones, obstaculizando así el correcto aprendizaje de lo que son las inecuaciones. Esta confusión de resolver inecuaciones como si se tratasen de ecuaciones es un error frecuente en los estudiantes, cuyas razones radica en la comprensión de los símbolos de desigualdades; es así que Borello y Lezama (2009) afirman que cuando se estudian las inecuaciones y se introducen nuevos símbolos como mayor ( $>$ ), menor ( $<$ ), mayor igual ( $\geq$ ) y menor igual ( $\leq$ ). Los alumnos de los primeros ciclos de nivel superior no tienen los elementos para comprender la diferencia entre ellos y el símbolo de igualdad ( $=$ ), así que se limitan a aprender memorísticamente algunas técnicas de resolución y nunca entienden hasta el fondo lo que están haciendo.

De la misma manera Maroto (2013) manifiesta que estudiantes de nivel secundario presentaron errores al resolver desigualdades o inecuaciones lineales, tales como: confusión de cuál de los símbolos  $<$  o  $>$  significa “mayor que” y “menor que”; no comprensión que en la afirmación  $x > a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  la solución incluye números reales mayores que  $a$ . Muchas veces consideran que las soluciones son únicamente

números enteros, aprenden el procedimiento algorítmico sin comprenderlo y memorizan reglas tales como “se le da vuelta al símbolo ( $-x < a ; x > -a$ )”, sin entender la razón por la que se cambia el símbolo mayor a menor, o viceversa, durante el proceso de resolución de la desigualdad.

Como se puede observar, ambas investigaciones coinciden que los estudiantes aprenden de manera mecánica o memorística sin entender las propiedades que se aplican y la confusión que se da en las interpretaciones a los símbolos  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  y  $\leq$ .

Vrancken, Engler y Muller (2010) manifiestan que los alumnos ingresantes a la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral presentan muchos problemas en la interpretación y resolución de inecuaciones algebraicas, los que provocan la aparición de errores en la aplicación de propiedades de desigualdad (determinar la equivalencia  $x < a$  y  $a > x$ ). También tienen dificultades en la interpretación de la solución, en expresar la solución en notación conjuntista o de intervalos ( $x \leq 3$  implica  $x \in ]-\infty, 3]$ ). Además, tenemos a Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) en su investigación realizada con estudiantes del primer curso de bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud; cuando dichos estudiantes resuelven una inecuación sencilla de primer grado como:  $5-3(2-x) > 4-3(1-x)$ , los estudiantes son clasificados de acuerdo al resultado obtenido:

- Los que resuelven correctamente la inecuación interpretando el resultado obtenido, es decir, llegan a una expresión de la forma  $0 > 2$  o  $-1 > 1$ , e indican que la inecuación no se verifica para ningún valor de la incógnita.
- Los que resuelven la inecuación pero no son capaces de interpretar el resultado obtenido.
- Los que ni siquiera resuelven correctamente la inecuación dada.

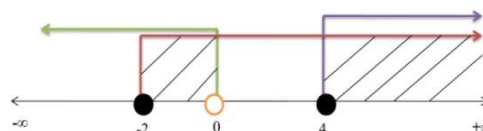
En esta misma investigación, se concluye que los alumnos manifiestan dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones  $x > 1$  y  $1 < x$ .

Como podemos observar en los dos últimos resultados de la investigación, los estudiantes muestran dificultades al momento de resolver una inecuación lineal, de interpretar los resultados y sacar conclusiones. Con respecto a la tipología de errores,

Torrealba (2014), en su investigación realizada con alumnos del primer semestre de la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo de la República de Venezuela; sobre los errores cometidos en la resolución de inecuaciones de primer grado según la Taxonomía de Radatz, concluyen que los estudiantes tienen dificultades en la resolución de inecuaciones lineales, presentan errores conceptuales (conceptos, propiedades o definiciones) y procedimentales (resolución de inecuaciones). Por ejemplo, de un total de ciento cincuenta y seis estudiantes se observó lo siguiente: el 57,69% no logra entender el siguiente enunciado “Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma o resta por el mismo número positivo, entonces...”, el 65,38% no logran representar gráficamente el conjunto solución de a inecuación:  $x+8 > 3x-2$ , el 61,54% no logra resolver la siguiente inecuación  $-2x+8 > 24$  justificando cada paso, el 63,46% no resuelve la siguiente expresión  $\frac{10x}{4} + \frac{5x+2}{12} \leq 3(8x-2)$ . En esa misma línea de investigación, Silva y Pirela (2015) en

su tesis realizada con alumnos de cuarto de secundaria de la Escuela Técnica Robinsoniana Monseñor Gregorio Adam, durante el Período Escolar 2014-2015, sobre las dificultades que presentan en el aprendizaje de inecuaciones según el enfoque teórico de Socas, concluyen que los alumnos tienen dificultades en distinguir los símbolos de unión e intersección, dificultades asociadas a la trasposición de términos; no tienen el dominio pertinente en los procesos para la resolución de inecuaciones. Por ejemplo, de un total de ciento quince estudiantes evaluados, el 54% no da la definición de intersección de intervalos. El 62% no define un intervalo semiabierto, el 66% no expresa el resultado de multiplicar por (-1) a la inecuación  $-8 \leq 2x-3$ . el 50% no logra determinar la solución de  $x-3 > x+2$ . El 62% no logra realizar la representación gráfica de  $x \geq \frac{5}{2}$ , el 71% de los estudiantes no logra expresar a través

de intervalos el área rayada de la siguiente gráfica:



Como se podrá apreciar, estos dos últimos antecedentes evidencian que los estudiantes evaluados tienen dificultades y presentan errores en la resolución de inecuaciones lineales en una variable.



## 1.2. Justificación del estudio

El contenido de inecuaciones lineales con una variable es un tema que se empieza a estudiar desde el sexto grado de nivel primario, aprendiendo a identificar condiciones de desigualdad expresadas con los signos  $>$  y  $<$ . En primer año de secundaria, deben identificar desigualdades de la forma  $x > a$  o  $x < b$ ; y en segundo de secundaria, desigualdades e inecuaciones lineales de la forma  $ax > b$  o  $ax < b$ ,  $\forall a \neq 0$ . En tercero de secundaria, los alumnos deben estudiar de las inecuaciones lineales de las formas:  $ax \pm b < c$ ,  $ax \pm b > c$ ,  $ax \pm b \leq c$  y  $ax \pm b \geq c$ ,  $\forall a \neq 0$ ; y en cuarto de secundaria inecuaciones de las formas:  $ax + b < cx + d$ ,  $ax + b > cx + d$ ,  $ax + b \leq cx + d$  y  $ax + b \geq cx + d$ ;  $\forall a, c \neq 0$ , tal como indica el Currículo Nacional de Educación Secundaria (2016) del Perú, en el área de Matemática ciclo VII (3.º y 4.º de secundaria), bajo la competencia “Resuelve problemas de equivalencia y cambio”. La competencia, capacidad y desempeño se muestra en la siguiente tabla.

Tabla n.º 1. Organización de Competencias y capacidades - 3er año de secundaria

<b>Competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio CICLO VII</b>	
<p>Cuando el estudiante Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, combina capacidades como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	
<p><b>Descripción del nivel de la competencia esperado al fin del ciclo VII</b>  Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.</p>	
<p><b>DESEMPEÑOS TERCER GRADO DE SECUNDARIA</b>  Cuando el estudiante resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del ciclo VII,</p>	<p><b>DESEMPEÑOS CUARTO GRADO DE SECUNDARIA</b>  Cuando el estudiante resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado</p>

<p>realiza desempeños como los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, a inecuaciones (<math>ax \pm b &lt; c</math>, <math>ax \pm b &gt; c</math>, <math>ax \pm b \leq c</math> y <math>ax + b \geq c</math>, <math>\forall a \in \mathbb{Q}</math> y <math>a \neq 0</math>), a ecuaciones cuadráticas (<math>ax^2 = c</math>) y a funciones cuadráticas (<math>f(x) = x^2</math>, <math>f(x) = ax^2 + c</math>, <math>\forall a \neq 0</math>) con coeficientes enteros y proporcionalidad compuesta.</li> </ul>	<p>del ciclo VII, realiza desempeños como los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, y condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a inecuaciones (<math>ax + b &lt; cx + d</math>, <math>ax + b &gt; cx + d</math>, <math>ax + b \leq cx + d</math> y <math>ax + b \geq cx + d</math>, <math>\forall a</math> y <math>c \neq 0</math>), a ecuaciones cuadráticas (<math>ax^2 + bx + c = 0</math>, <math>a \neq 0</math> y <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c \in \mathbb{Q}</math>) y a funciones cuadráticas (<math>f(x) = ax^2 + bx + c</math>, <math>\forall a \neq 0</math> y <math>a \in \mathbb{Q}</math>). También las transforma a repartos proporcionales.</li> </ul>
---	---

Fuente: Currículo Nacional de Educación Secundaria del Perú (2016, p. 258)

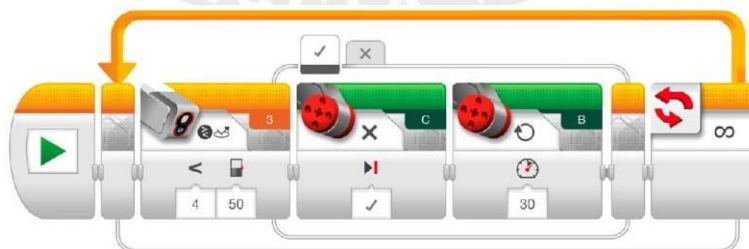
Por lo antes mencionado, podemos indicar que el aprendizaje del objeto matemático inecuaciones lineales es pertinente y relevante; por ello, en la presente investigación, pretendemos identificar los errores que presentan los estudiantes que cursan el tercer año de educación secundaria cuando resuelven inecuaciones lineales en una variable, ya que, por los antecedentes señalados anteriormente, se identifica como una problemática fundamental para el desarrollo de los procesos matemáticos de los estudiantes, siendo a su vez un prerrequisito para aprender nuevos contenidos matemáticos, tanto en la educación secundaria como en el nivel superior. Por ejemplo, sistema de inecuaciones lineales cuyo desempeño de grado a desarrollarse para el tercer año de educación secundaria, según la programación curricular 2016, indica de la siguiente manera:

Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas, y solucionar ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, usando productos notables o propiedades de las igualdades. Reconoce cómo afecta a una gráfica la variación de los coeficientes en una función cuadrática. (MINEDU, 2016, p. 260)

Como podemos observar, las inecuaciones lineales servirán a los estudiantes para aprender nuevos contenidos como sistemas de inecuaciones lineales y, posteriormente, programación lineal. También es importante para calcular dominio y rango de funciones, como indica Borello y Lezama (2011) quienes señalan que la inecuación es importante a la hora de resolver dominio y recorrido de funciones, resaltando que igual es fundamental usar y conocer las desigualdades.

Esta investigación será de suma importancia, ya que permitirá a docentes y estudiantes a tomar en cuenta los errores detectados a la hora de abordar un contenido esencial, como son las inecuaciones lineales, tanto para la matemática en sí misma, como para las innumerables aplicaciones que tiene en diversas ramas de las ciencias exactas, tales como química, física, entre otras.

Otra de las importancias del porqué es necesario estudiar las desigualdades e inecuaciones lineales es porque tiene aplicación en el estudio de robótica educativa. Según el portal de PERUEDUCA, el Ministerio de Educación ha distribuido kits de robótica a un total de 20 732 instituciones educativas desde el 2011 hasta la fecha y un 65% de éstas son rurales, en su mayoría polidocentes multigrado y también unidocentes; indicando que la robótica educativa permite a los estudiantes concebir, diseñar y desarrollar robots educativos fortaleciendo el pensamiento creativo y la resolución de problemas. Hoy en día, algunas I.E. estatales de nivel secundaria de las diferentes regiones del Perú enseñan “robótica educativa” utilizando el Kit de Lego Mindstorms EV3; cuando los estudiantes realizan una programación con el lego Mindstorms education EV3, hacen uso de las desigualdades. Por ejemplo, en la figura n.º 1 se arrastra y conecta a la secuencia el bloque de control de flujo > Esperar, pulsamos el botón de Modo de este bloque y se elige la opción Sensor ultrasónico >comparar> Distancia en centímetros, luego elegimos “Menor que <”. En el valor numérico introducimos por ejemplo 50 cm. En cuanto esto ocurra, dejará de pasar al siguiente bloque en la secuencia de programación. Esto significa que, si el robot detecta un objeto a una distancia menor a 50 cm, este se apagará y si no el motor del robot seguirá encendido.



*Figura n.º 1:* Programa de funcionamiento del motor de un robot controlado con un sensor.  
Fuente: Introducción al plan de lecciones de robótica: Uso de la aplicación de programación EV3.

Por otra parte, según el Diseño Curricular 2016, los estudiantes de tercer año de educación secundaria deben desarrollar el siguiente desempeño de grado:

Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales y de la ecuación cuadrática e inecuación lineal, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones. (MINEDU, 2016, p. 260)

Como indica el desempeño de grado, no es solo resolver inecuaciones sino también expresar el significado de una inecuación lineal.

Por otro lado, organizaciones como The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2009) enfatizan que los estudiantes de los grados 9 a 12 deben aprender a representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, en especial comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones.

### **1.3. Pregunta de investigación**

¿Cuáles son los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable?

### **1.4. Objetivos de la investigación**

#### **Objetivo general**

Analizar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. “Fe y Alegría n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

#### **Objetivos específicos**

1. Elaborar una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable tomando como referencia la comparación de las tipologías revisadas.

2. Identificar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable a través de una prueba diagnóstica.
3. Describir los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, según la tipología propuesta.



## CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo presentamos el estudio de las inecuaciones, visto desde tres aspectos: histórico, donde realizamos una reseña histórica del surgimiento de las inecuaciones; conceptual, donde introducimos la noción de inecuaciones; y finalmente, didáctico, en el que realizamos el estudio de tres libros utilizados en tercero de educación secundaria en la enseñanza de inecuaciones.

### 2.1. Aspectos históricos

El origen de las inecuaciones no se sabe exactamente, pero se cree que se originaron poco después de las ecuaciones (1700 a.C.–1700 d.C.) debido al surgimiento de un problema en el cual la respuesta podía ser más de una absoluta, sino que podía contener un grupo de números.

Algunos matemáticos utilizaron la desigualdad para comparar longitudes. Por ejemplo, Euclides (335 a.C. – 275 a.C.), en su libro 1, habla de desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo. Ortiz (1936), menciona que Aristarco (310 a.C.–230 d.C.) en su obra “Sobre los Tamaños y Distancias del Sol y la Luna” usa las

desigualdades llegando a la siguiente conclusión  $\frac{108}{3} < \frac{R_T}{R_L} < \frac{60}{19}$  y  $\frac{19}{3} < \frac{R_S}{R_T} < \frac{43}{6}$ ,

siendo  $R_S$ ;  $R_T$  y  $R_L$  son los radios del Sol, de la Tierra y de la Luna, respectivamente.

Boyer (1968), citado por Bernardis, Nitti y Scaglia (2017), menciona que Pappus de Alejandría (300 d.C.) en su libro III de su colección describe una interesante construcción de las medias: aritmética, geométrica y armónica desde un punto de vista geométrico en un semicírculo. La figura n.º 2 es una circunferencia de centro en D, de radio  $\frac{a+b}{2}$ , DCE es un triángulo rectángulo recto en C, CF es la altura relativa a la

hipotenusa del triángulo DCE; a partir de allí se observa que  $|AC| = a$ ,  $|CB| = b$ ,

$|DE| = \frac{a+b}{2} = m_a$ ,  $|CE| = \sqrt{ab} = m_g$  y  $|FE| = \frac{2ab}{a+b} = m_h$ . Desde el punto de vista geométrico

claramente tenemos las desigualdades  $m_a > m_g > m_h$  y las igualdades se obtienen cuando los números  $a$  y  $b$  coinciden.

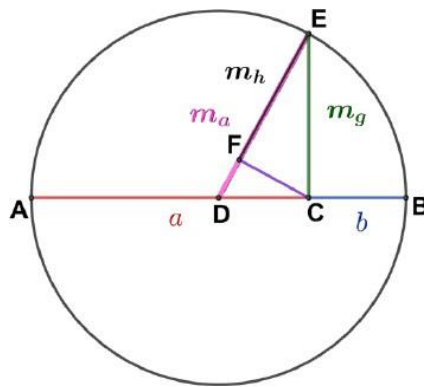


Figura N° 2. Desigualdad entre las medias:  $m_a > m_g > m_h$   
 Fuente: Bernardis, Nitti, y Scaglia (2017, p. 173).

Halmaghi (2011) menciona que muchos matemáticos adoptaron los símbolos sugeridos por Oughtred (1574 - 1660) que son:  $\sqsupset$  por mayor que y  $\sqsubset$  por menor que. Según Eves (1969), citado por Halmaghi (2011), los símbolos mayor ( $<$ ) y menor ( $>$ ) fue introducido por el matemático inglés Thomas Harriot (1560 - 1621), inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano  $\bowtie$ . Bernardis et al. (2017) menciona que en 1974 el francés Pierre Bouguer inventó los símbolos menor igual ( $\leq$ ) y mayor igual ( $\geq$ ), mucho antes de la aparición del álgebra simbólica.

## 2.2. Estudio de las desigualdades e inecuaciones lineales

Para definir y conceptualizar las desigualdades e inecuaciones nos basamos en los textos de Lehmann (2004), Lima (1997) y Stewart (2012).

Antes de definir las desigualdades e inecuaciones, partiremos mencionando que los números reales es un cuerpo ordenado. Lima (1997) menciona que los números reales ( $\mathbb{R}$ ) es un cuerpo ordenado. Esto significa que existe un subconjunto  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  llamado conjunto de los números reales positivos, que cumple las siguientes condiciones:

**P1.** La suma y el producto de números reales positivos son positivos. O sea,

$$x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (x+y) \in \mathbb{R}^+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^+$$

**P2.** Dado  $x \in \mathbb{R}$  se verifica una, y sólo una, de las 3 alternativas siguientes: o  $x = 0$ , o

$$x \in \mathbb{R}^+ \quad -x \in \mathbb{R}^+.$$

Si indicamos mediante  $\mathbb{R}^-$  al conjunto de los números  $-x$ , donde  $x \in \mathbb{R}^+$ , la condición P2 nos dice que  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ , y que los conjuntos  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$  y  $\{0\}$  son disjuntos dos a dos. Los números  $y \in \mathbb{R}^-$  se llaman negativos.

Todo número real  $x \neq 0$  tiene cuadrado positivo. En efecto, si  $x \in \mathbb{R}^+$  entonces  $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$  por P1. Si  $x \notin \mathbb{R}^+$  entonces (como  $x \neq 0$ )  $-x \in \mathbb{R}^+$ , luego, también por P1, tenemos  $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$ . En particular, 1 es un número positivo, pues  $1 = 1^2$ .

### 2.2.1. Desigualdad

Para Lehmann (2004) una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones y cuando las dos expresiones son desiguales, tenemos una **desigualdad**, diciéndose que una de las expresiones es mayor o menor que la otra.

Según Lima (1997), se escribe  $x < y$ , y se lee que “ $x$  es menor que  $y$ ”, cuando

$y - x \in \mathbb{R}^+$ , esto es,  $y = x + z$  donde  $z$  es positivo. En este caso, también se escribe  $y > x$ , y se lee que “ $y$  es mayor que  $x$ ”. De lo antes mencionado diremos que  $x < y$  es equivalente a  $y > x$ .

En particular,  $x > 0$  significa que  $x \in \mathbb{R}^+$ , esto es, que  $x$  es positivo, mientras que  $x < 0$  quiere decir que  $x$  es negativo, esto es, que  $-x \in \mathbb{R}^+$ .

Por otra parte Lehmann (2004) sugiere que el estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También tenemos;  $a \geq b$ , que se lee “ $a$  es mayor o igual que  $b$ ”, y  $c \leq d$  que se lee “ $c$  es menor o igual que  $d$ ”. En particular, la desigualdad  $a \geq 0$  es un modo conveniente de afirmar que  $a$  representa a todo número no negativo.

Según Lima (1997), menciona las siguientes propiedades para la relación de orden  $x < y$  en  $\mathbb{R}$ :

**O1. Transitiva:** Si  $x < y$  e  $y < z$  entonces  $x < z$ .

**O2. Tricotomía:** Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , ocurre una, y sólo una, de las siguientes alternativas siguientes, o  $x = y$ , o  $x < y$  o  $x > y$ .



**O3. Monotonía de la adición:** Si  $x < y$  entonces, para todo  $z \in \mathbb{R}$ , se tiene  $x+z < y+z$ . Esta propiedad nos dice que si sumamos o restamos un mismo número a cada lado de la desigualdad  $x < y$ , la desigualdad se mantiene, es decir,  $x \pm z < y \pm z$ .

**O4. Monotonía de la multiplicación:** si  $x < y$  entonces para todo  $z > 0$  se tiene  $x \cdot z < y \cdot z$ . Si, por el contrario,  $z < 0$  entonces  $x < y$  implica  $x \cdot z > y \cdot z$ .

**Demostración: O1.**  $x < y$  e  $y < z$  significan  $(y-x) \in \mathbb{R}^+$  y  $(z-y) \in \mathbb{R}^+$ . De P1 se sigue que  $(y-x) + (z-y) \in \mathbb{R}^+$ , esto es,  $(z-x) \in \mathbb{R}^+$ , o sea,  $x < z$ .

**Demostración: O2.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , ó  $(y-x) \in \mathbb{R}^+$ , ó  $y-x=0$  ó  $(y-x) \in \mathbb{R}^-$  (esto es,  $(x-y) \in \mathbb{R}^+$ ). En el primer caso, se tiene  $x < y$ , en el segundo  $x = y$  y en tercero  $x < y$ . Por P2 estas posibilidades se excluyen mutuamente.

**Demostración: O3.** Si  $x < y$  entonces  $(y-x) \in \mathbb{R}^+$ , de donde  $(y+z) - (x+z) = y-x \in \mathbb{R}^+$ , esto es  $x+z < y+z$ .

**Demostración: O4.** Si  $x < y$  y  $z > 0$  entonces  $(y-x) \in \mathbb{R}^+$  y  $z \in \mathbb{R}^+$ , luego  $(y-x) \cdot z \in \mathbb{R}^+$ , o sea,  $(yz - xz) \in \mathbb{R}^+$ , lo que significa que  $xz < yz$ .

Si  $x < y$  y  $z < 0$  entonces  $(y-x) \in \mathbb{R}^+$  y  $(y-z) \in \mathbb{R}^+$ , de donde  $xz - yz = (y-x)(-z) \in \mathbb{R}^+$ , lo que significa que  $yz < xz$ .

En general,  $x < y$  y  $x' < y'$  implican  $x+x' < y+y'$  pues  $yy' - xx' = yy' - yx' + yx' - xx' = y(y'-x') + (y-x)x' > 0$ . Si  $0 < x < y$  entonces  $y^{-1} < x^{-1}$ . Para

probar esto observe primero que  $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$ . A continuación, multiplicando a ambos miembros de la desigualdad  $x < y$  por  $x^{-1}y^{-1}$  se tiene  $y^{-1} < x^{-1}$ .

Como  $1 \in \mathbb{R}$  es positivo, se sigue que  $1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$ . Entonces podemos considerar  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ . Se tiene  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , pues  $0 \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{R} \Rightarrow -n \in \mathbb{R}$ . Además, si  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,

donde  $n \neq 0$ , entonces  $\frac{m}{n} = mn^{-1} \in \mathbb{R}$ , lo que nos permite concluir que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Así,

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Lehmann (2004) plantea los siguientes teoremas para las desigualdades:

**Teorema 1.** El sentido de una desigualdad no se altera si se suma o resta a ambos miembros la misma cantidad; es decir, si  $a > b$ , entonces  $a \pm c > b \pm c$ .

**Corolario 1.** Cualquier término puede transponerse de un miembro a otro de una desigualdad con tal que se le cambie su signo.

Por el corolario 1 podemos transponer todos los términos de una desigualdad a un solo miembro. Como consecuencia tenemos:

**Corolario 2.** Toda desigualdad puede reducirse a una de las formas  $A > 0$  o  $A < 0$ , en donde  $A$  es una expresión algebraica.

La importancia de este corolario 2 está en que, según el teorema 6, la resolución de una inecuación siempre puede reducirse a la determinación del signo (y no la magnitud) de una expresión.

**Teorema 2.** El sentido de una desigualdad no se altera si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad positiva. Es decir, si  $a > b$  y

$c > 0$ , entonces  $ac > bc$  y  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

**Demostración:**

De  $a > b$ , tenemos

$a - b = p$ , un número positivo.

Multiplicando ambos miembros por  $c$ , tenemos

$ac - bc = pc$ , un número positivo de donde  $ac > bc$ .

Análogamente, puede demostrarse que  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

Con una demostración similar a la del teorema 2, se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3.** El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad negativa. Esto es, si  $a > b$  y

$c < 0$ , entonces  $ac < bc$  y  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

**Teorema 4.** Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, las sumas serán desigualdades del mismo sentido, esto es si  $a > b$  y  $c > d$ , entonces  $a + c > b + d$ .

**Demostración:**

De  $a > b$ ,  $a - b = p$ ,  $c - d = q$ , un número positivo.

Sumando,  $a + c - (b + d) = p + q$ , un número positivo.

Luego,  $a + c > b + d$ .

**Corolario 3.** Si  $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots, a_n > b_n$ , entonces

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

**Teorema 5.** Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera, es decir, si  $a > b$  y  $b > c$ , entonces  $a > c$ .

**Teorema 6.** Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos serán desigualdades en el mismo sentido. Es decir, si  $a, b, c$  y  $d$  son todos positivos y  $a > b$  y  $c > d$ , entonces  $ac > bd$ .

**Demostración:** Si  $c > 0$  y  $a > b$ , del teorema 2 resulta:

(1)  $ac > bc$ .

Análogamente, ya que  $b > 0$  y  $c > d$ ,

(2)  $bc > bd$ .

De (1) y (2) y el teorema 5 tenemos

**Corolario 4.** Si  $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  son cantidades positivas y

$$a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots, a_n > b_n, \text{ entonces } a_1 a_2 a_3 \dots a_n > b_1 b_2 b_3 \dots b_n.$$

**Corolario 5.** Si  $a$  y  $b$  son ambos positivos,  $a > b$ , y  $n$  es un número entero y positivo, entonces  $a^n > b^n$ .

**Corolario 6.** Si  $a$  y  $b$  son ambos positivos,  $a > b$ , y  $n$  es un número entero positivo,

entonces  $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$  (raíces principales).

**Corolario 7.** Si  $a$  y  $b$  son ambos positivos,  $a > b$ , y  $n$  es un número entero y positivo, entonces  $a^{-n} < b^{-n}$ .

### 2.2.2. Intervalo

Los intervalos son subconjuntos de los números reales, que gráficamente son segmentos de recta o semirrecta y sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

Los intervalos se pueden representar por símbolos, desigualdades y gráficamente.

Existen diferentes tipos de intervalos.

Sean  $a$  y  $b$  dos números reales con  $a < b$ , los tipos de intervalos son:

**Intervalo abierto**, denotado por  $\langle a;b \rangle$ , consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $a < x < b$ .

**Intervalo cerrado**, denotado por  $[a;b]$ , consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $a \leq x \leq b$ .

#### Intervalo Semiabierto

- Por la derecha, denotado por  $[a;b)$ , consiste en todos los números reales  $x$ , para los cuales  $a \leq x < b$ . Este intervalo también es llamado intervalo semicerrado por la izquierda.
- Por la izquierda, denotado por  $\langle a;b]$ , consiste en todos los números reales  $x$ , para los cuales  $a < x \leq b$ . Este intervalo también es llamado intervalo semicerrado por la derecha.

**Intervalos al infinito** o intervalos no acotados.

- Intervalos al más infinito ( $+\infty$ ), denotado por  $[a;+\infty)$ , consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $x \geq a$ . También  $\langle a;+\infty \rangle$ , que consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $x > a$ .
- Intervalos al menos infinito ( $-\infty$ ), denotado por  $\langle -\infty;a]$ , consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $x \leq a$ . También tenemos  $\langle -\infty;a \rangle$ , consiste en todos los números reales  $x$ , donde  $x < a$ .

Lima (1997) usa las siguientes notaciones para representar tipos especiales de conjuntos de números reales, llamados intervalos:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  Intervalo cerrado
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  Intervalo abierto
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  Intervalo cerrado por la izquierda
- $\langle a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  Intervalo cerrado por la derecha

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$  Intervalo no acotado  
 $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$  Intervalo no acotado  
 $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$  Intervalo no acotado  
 $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$  Semirrecta cerrada a la derecha con origen en b  
 $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  Recta de los reales

Cuando  $a = b$ , el intervalo  $[a, b]$  se reduce a un único elemento y se llama intervalo *degenerado*.

En base a la definición de intervalos y su representación hecha por Lima (1997), planteamos las siguientes definiciones y sus formas de representar los intervalos.

Tabla n.º 2. Resumen de la notación de las desigualdades en sus diferentes formas.

Nombre	Notación Simbólica	Notación por desigualdades	Representación gráfica
Intervalo abierto	$\langle a; b \rangle$	$a < x < b$	
Intervalo cerrado	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervalo semiabierto por la derecha	$[a; b \rangle$	$a \leq x < b$	
Intervalo semiabierto por la izquierda	$\langle a; b]$	$a < x \leq b$	
Intervalo al más infinito	$[a; +\infty \rangle$	$x \geq a$	
	$\langle a; +\infty \rangle$	$x > a$	
Intervalo al menos infinito	$\langle -\infty; a]$	$x \leq a$	
	$\langle -\infty; a \rangle$	$x < a$	

Fuente: Elaboración propia

### 2.2.3. Inecuación

Para definir las inecuaciones, Lehmann (2004) primero hace las siguientes observaciones: dos desigualdades tienen el mismo sentido si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario, tienen sentidos opuestos. Por ejemplo:

$a > b$  y  $c > d$  tienen el mismo sentido;  $a > b$  y  $c < d$  tienen sentidos opuestos.

A partir de ello, define dos tipos de desigualdades diferenciándolas de acuerdo a su dominio de validez:

**Desigualdad absoluta o incondicional:** es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Ejemplo:

$$5 > -7 \text{ y } x^2 + 1 > 0 .$$

**Desigualdad condicional o inecuación:** es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Ejemplos:  $x - 2 < 3$ , válida solo si  $x < 5$ ;  $x^2 > 4$ , válida solo si  $x > 2$  o si  $x < -2$ .

Stewart (2012) no hace una diferencia entre desigualdades lineales o inecuaciones lineales; para él una desigualdad lineal es aquella donde cada término es constante o un múltiplo de la variable. Además, sugiere las siguientes reglas para resolver desigualdades lineales; para el cual presenta las siguientes reglas para resolver desigualdades descrita en la siguiente tabla:

Tabla n.º 3. Reglas para resolver desigualdades

Regla	Descripción
1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$	<b>Sumar</b> la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente
2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$	<b>Restar</b> la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si: $C > 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow C.A \leq B.C$	<b>Multiplicar</b> cada lado de una desigualdad por la misma cantidad positiva da una desigualdad equivalente.
4. Si: $C < 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow C.A \geq B.C$	<b>Multiplicar</b> cada lado de una desigualdad por la misma cantidad negativa invierte la dirección de la desigualdad.
5. Si: $A > B$ y $B > 0$ , entonces $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	<b>Tomar</b> recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades positivas invierte la dirección de la desigualdad.
6. Si: $A \leq B$ y $C \leq D$ , entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Fuente: Stewart (2012, p. 75)

Tener cuidado con las reglas 3 y 4. La regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número positivo sin invertir la dirección de la desigualdad, pero la regla 4 dice que si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad.

En conclusión, una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores cuando estos son distintos. Y las inecuaciones lineales son desigualdades en las que interviene una o más incógnitas, números y uno de los signos de desigualdad (" $>$ ", " $<$ ", " $\geq$ ", " $\leq$ "), las cuales se verifican para determinados valores de las incógnitas.

### 2.3. Enseñanza de las inecuaciones lineales

Para tener una referencia sobre cómo se desarrolla el tema de inecuaciones en los colegios, hacemos un estudio de algunos libros de textos de las editoriales con más presencia en las aulas del tercer año educación secundaria en el Perú. Estos libros son L1 matemática 3 del Ministerio de Educación del Perú de la editorial Santillana 2016 y su cuaderno de trabajo, L2 matemática 3 del Ministerio de Educación del Perú de la editorial Norma 2012 y L3 matemática 3 de Manuel Coveñas de la editorial Bruño, edición 2002.

Tabla n.º 4: Libros de tercer año de educación secundaria

Libro de texto	Editorial
L1: Matemática 3	Santillana (2016) Ministerio de Educación
L2: Matemática 3	Norma (2012) Ministerio de Educación
L3: Matemática 3	Coveñas(2002) Manuel Coveñas Naquiche

Fuente: Elaboración propia

De los libros mencionados en la tabla anterior, mostraremos cómo, dichos libros, presentan el objeto matemático desigualdades e inecuaciones.

El libro L1 es el que utilizan los estudiantes entre 14 y 15 años de edad de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37, los cuales serán nuestros sujetos de estudio. Este libro presenta la parte teórica definiendo directamente la inecuación tal como se muestra en la figura n.º 3.

Una inecuación es una desigualdad algebraica que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por los signos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  o  $\geq$ . Son inecuaciones expresiones tales como:

$$2x + 1 \leq x + 2 \qquad 2x - 3 \geq y \qquad 5x + 3 > x + 4$$

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen cierta la desigualdad. Estos valores son las raíces de la inecuación. Así, la desigualdad  $x + 3 < 7 - x$  es una inecuación, ya que si damos valores a  $x$ , obtenemos:

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$x + 3$	...	0	1	2	3	4	5	6	...
$7 - x$	...	10	9	8	7	6	5	4	...
		$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$=$	$>$	$>$

- Para los valores de  $x$  menores que 2, se verifica que  $x + 3 < 7 - x$ .
- Para el valor de  $x$  igual a 2:  $x + 3 = 7 - x$
- Para los valores de  $x$  mayores que 2:  $x + 3 > 7 - x$

Figura n.º 3. Inecuaciones lineales en L1

Fuente: Santillana (2016, p. 77).

Como podemos observar, el autor da la explicación que resolver una inecuación es hallar el conjunto solución que haga cierta la desigualdad; pero, en el cuadro que utiliza, se limita a trabajar solo con números enteros. Esto podría inducir a los estudiantes a pensar que el conjunto solución de una inecuación son solo números enteros, cometiendo errores en su resolución.

Posteriormente, indica las propiedades para resolver inecuaciones para luego definir, de manera formal, las inecuaciones lineales con una incógnita tal como se muestra en la figura n.º 4.

### Inecuaciones lineales con una incógnita

Una inecuación lineal, o de primer grado, con una incógnita es una desigualdad algebraica que se puede reducir a una de estas formas:

$$ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0 \text{ o } ax + b \geq 0, \text{ donde } a \neq 0.$$

Por ejemplo, la desigualdad  $2x - 6 < 5x$  es una inecuación de primer grado con una incógnita porque el mayor exponente de  $x$  es 1.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que satisfacen la inecuación dada. Para ello, se aplican las propiedades de las desigualdades.

Figura n.º 4. Inecuaciones lineales en L2

Fuente: Santillana (2016, p. 78).



En este libro, se dan más ejemplos y la aplicación en la solución de dos problemas de contexto, no hay ejercicios propuestos para que el estudiante pueda reforzar sus conocimientos. Para resolver problemas, no se muestra ejemplos de planteamiento de inecuaciones, donde al estudiante se le enseñe cómo traducir los enunciados de su forma verbal a su forma matemática. Con respecto al cuaderno de trabajo del libro L1, presenta generalmente problemas de contexto, donde para poder resolverlo muchas veces se debe realizar sesiones previas para que el estudiante adquiera conocimientos para resolver los problemas planteadas. Por ejemplo, en la figura n.º 5 se muestra un problema de contexto:

### Bajas temperaturas

Durante las últimas semanas, se registraron bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil.

El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la mitad de la suma de la temperatura registrada más  $1^{\circ}\text{C}$  no es menor que  $-3^{\circ}\text{C}$  ni mayor que  $2^{\circ}\text{C}$ . ¿Dentro de qué intervalo se encontrarán las temperaturas registradas?



**Resolvemos paso a paso**

*¿Por qué es necesario conocer las temperaturas registradas? ¿Qué estrategias sugerirías para resolver la situación problemática? ¿Qué conocimientos te ayudarán a resolver esta situación?*

*Figura n.º 5. Situación de contexto*

Fuente: Cuaderno de trabajo del libro L1 Matemática 3 (2016, p. 14)

Lo que podemos observar, en este problema de contexto, es que está muy forzada la situación del reporte que recibe el alcalde, el problema es que difícilmente esto ocurra. También observamos que el enunciado: “la mitad de la suma de la temperatura registrada más  $1^{\circ}\text{C}$  no es menor que  $-3^{\circ}\text{C}$  ni mayor que  $2^{\circ}\text{C}$ ” no logre ser planteado a través de una inecuación por el estudiante, porque antes no se le enseñó planteo de problemas a través de inecuaciones, llevándolo a cometer errores en su solución.

El libro L2 se utilizó hasta el año 2016, no se desarrolla en este el tema de inecuaciones lineales, solo definen los intervalos su representación en sus distintas formas y operaciones con intervalos, pero sí aparecen ejercicios de inecuaciones con valor absoluto como se muestra en la figura n.º 6.

**EJEMPLO 5**  
 Representa simbólica y gráficamente.

a.  $|x - 2| = 8$                       b.  $|x + 8| > 2$                       c.  $|2x + 5| < 13$

Figura n.º 6. Intervalos y valor absoluto, libro L2

Fuente: Norma (2012, p. 24)

En el libro L2, se centra más en las operaciones con intervalos y la interpretación del valor absoluto, no muestra nada sobre inecuaciones lineales; lo que llama la atención es que, en los ejemplos de ecuaciones con valor absoluto, incluye inecuaciones con valor absoluto. En conclusión, el libro L2 no contempla las inecuaciones lineales con una incógnita.

Otro libro que la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37 dispone en su biblioteca y que está al alcance de los estudiantes es el libro L3, En este texto se desarrolla las inecuaciones lineales con una variable enunciando directamente la definición, los casos que se presentan y propiedades para su resolución. En la figura n.º 7, se muestra el inicio de estudio de las inecuaciones lineales con una incógnita en el libro L3.

**Inecuaciones de Primer Grado con una Variable**

Una inecuación de primer grado con una variable es aquella que tiene una sola variable (incógnita) con exponente 1.

Las inecuaciones de primer grado con una variable son de la forma:

$ax + b > c$      $ax + b < c$      $ax + b \geq c$      $ax + b \leq c$

Donde:  $a$ ;  $b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$

Son inecuaciones de primer grado; por ejemplo:

$3x + 6 > 0$      $5x - 10 \geq 0$      $\frac{2}{3}x + 4 < 7$      $\frac{3}{4}x - 5 \leq 2$

Figura n.º 7. Intervalos y valor absoluto, libro L3

Fuente: Coveñas (2002, p.321)

Como podemos observar en la figura n.º 7, el libro L3 inicia el estudio de las inecuaciones definiendo el objeto matemático, no relaciona con situaciones reales de aplicación, no muestra ejemplos de planteamiento de inecuaciones y mucho menos problemas contextualizados.

## CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentamos una revisión de los elementos teóricos que sustentan nuestra investigación, los cuales se fundamenta en la caracterización de errores en el aprendizaje de las matemáticas, realizadas por diferentes autores, entre ellas el Enfoque Lógico Semiótico Socas (1979). Así mismo, presentamos la metodología de investigación que hemos seguido, la cual es cualitativa descriptiva.

### 3.1. Marco teórico

Para nuestro estudio, revisamos aspectos del Enfoque Lógico Semiótico de Socas (1979) y la clasificación de errores de diferentes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Saucedo (2007).

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), es una teoría en construcción que viene desarrollando el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, bajo la coordinación de Socas. Este enfoque, según Socas (2007), se caracteriza por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias: el formal y el cognitivo, para entender y actuar en fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en nuestro caso, errores en la resolución de inecuaciones lineales.

Respecto a los errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas, consideramos el planteamiento de diferentes autores y en base a ello elaboramos un cuadro comparativo, y luego proponemos, seis tipologías de errores cometidos por los estudiantes en la resolución de inecuaciones lineales.

#### 3.1.1. Error

Godino, Batanero y Font (2013, p.73) hablan de “*error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”. Así mismo, Socas (2007) define el error como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de la falta de conocimiento en el alumno. El error va a tener diferentes procedencias debido a los intentos de los alumnos de adaptar un conocimiento a situación nueva, que es

lo que se pretende en esta investigación la de analizar los errores cometidos por estudiantes de tercero de secundaria en la resolución de inecuaciones lineales.

### **3.1.2. Obstáculo**

Herscovic (citado por Socas, 1997) se refiere por primera vez a la noción de obstáculo en la adquisición de esquemas conceptuales del aprendiz y relaciona la teoría de aprendizaje de Piaget para la explicación del mismo. Posteriormente, Bachelard (1938), citado por Socas (1997), introduce el término obstáculo epistemológico; tal es así que en su obra “La formación del espíritu científico”, manifiesta:

Quando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1938, p.15).

Como podemos observar, los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, son llamados obstáculos epistemológicos. También citamos Godino et al. (2013 p. 42) quienes definen un obstáculo como una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro.

### **3.1.3. Dificultad**

Según Godino et al. (2004), el término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Por lo que las dificultades se manifiestan a través de errores, la cual es materia de investigación en la presente investigación relacionado con la resolución de inecuaciones lineales con una incógnita.

### 3.1.4. Enfoque Lógico Semiótico

Socas (2007), señala que “el propósito general del Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de la Laguna es determinar en el marco de una teoría del conocimiento algebraico las dificultades y errores que tienen los alumnos de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria para estudiantes de entre 12 y 16 años en España) para comprender y trabajar con competencia, objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico” (p.24). El marco de la Teoría del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), es un marco en construcción que viene desarrollando el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, caracterizándose por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias: el formal y el cognitivo, para entender y actuar en fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico.

El Enfoque Lógico Semiótico toma como punto de partida el “Microsistema Educativo”, que está formado por tres elementos básicos: profesores, alumnos y disciplina de estudio (que constituyen el denominado triángulo didáctico); y por dos componentes: el sociocultural y la institución escolar. El microsistema está caracterizado por tres relaciones esenciales, materializados en modelos de competencia: formal, cognitivo y de enseñanza. Cabe señalar que en el presente trabajo de investigación sólo se tomarán en cuenta los dos primeros modelos, el formal y el cognitivo. El modelo de competencia de enseñanza está orientado a errores que se pueden presentar a partir de propuestas de enseñanza, por ello este modelo no se toma.

El análisis de los errores se describirá apoyándose en la propuesta del marco teórico sugerido por Socas (1997) en el que se considera tres ejes, que permiten analizar el origen del error. La figura n.º 8 muestra el esquema donde se representa los componentes del modelo de competencia cognitiva en forma resumida. Allí se describen las dificultades y errores, los sistemas de representación y los estadios de desarrollo cognitivo.



Figura n.º8. Modelo de competencia cognitiva  
Fuente: Socas (2007, p. 34)

La interpretación del esquema anterior, según Socas (2007) tenemos:

El vértice de las dificultades y errores describe que el error puede ser estudiado desde tres perspectivas diferentes: afectividad, ausencia de sentido y obstáculo. Estos tres elementos a su vez se organizan en semiosis distintas: la afectividad en emociones, actitudes y creencias; la ausencia de sentido en semiótico, estructural y autónomo; y los obstáculos en epistemológico, didáctico y cognitivo, que permiten hacer análisis más profundo de error.

El estudio de las dificultades y errores se pueden hacer desde tres niveles diferentes que denominamos: producto, proceso y origen.

El estudio de los errores a nivel producto se realiza, en general, considerando la estructura superficial del objeto algebraico en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructura y procesual.

El estudio de los errores a nivel proceso se realiza, en general, considerando tanto a estructura superficial como profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo. Para el estudio de errores en la estructura profunda, es necesario trabajar el objeto con alumnos dos representaciones semióticas del mismo.

El estudio de errores a nivel de origen se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como la profunda del objeto algebraico, en los estadios semiótico, estructural o autónomo, como en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural, y procesual. Su origen puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales (Socas 1997)

Las representaciones semióticas tienen una estrecha relación con el funcionamiento cognitivo del pensamiento. En este enfoque la representación es un elemento

determinante en el análisis semiótico. La Semiosis debe ser entendida como un triple proceso: de generación de signos (productor de signos), de acciones del signo (signo-acción), y de inferencia. El análisis semiótico será el estudio del funcionamiento de esa semiosis. De esta manera, la designación de un objeto matemático mediante un signo es un proceso de inferencia (semiosis) por el cual la representación determina en quien la recibe una interpretación mental que consiste en remitir la representación al objeto que ésta representa. En este sentido el modelo de competencia que describe la noción de representación en el Enfoque Lógico Semiótico viene dado por el contexto (en término general se refiere a ciertos aspectos del Microsistema Educativo); los referentes: signo, objeto y significado; y las tres relaciones esenciales que se dan entre los referentes: signo-significado, signo- objeto y objeto-significado.

Socas (2007) indica que los objetos matemáticos se comunican mediante los sistemas de representación semiótica (SRS). Aceptando que existen diferentes tipos de representación que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, no obstante, se constata la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemática, para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido los SRS más formales frente a los SRS más visuales o también caracterizado como representaciones más intuitivas. Los estadios de desarrollo cognitivo se subdividen a su vez en:

- Estadio semiótico, en este estadio el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y manipulados por el alumno.
- Estadio estructural, en este estadio el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos de patrones para dotarlos de significado.
- Estadio autónomo, es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

### **3.1.5. Errores en el aprendizaje de las matemáticas**

Actualmente una de las principales preocupaciones de muchos investigadores es conocer los errores que suscitan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Rico (1995, p. 85) propone cuatro líneas de investigación actual en torno a los errores:

- Estudios relativos al análisis de errores, causas que lo producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificación de errores detectados
- Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. Se incluyen aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable.
- Estudios dedicados a determinar que conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos. Se trata de estudios relativos a la formación del profesorado y al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos tienen en este proceso de formación.
- Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores. El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto para las producciones de los estudiantes ha permitido una utilización considerable de procedimientos estadísticos; gran parte de los trabajos de orientación psicométrica va dirigido al estudio de errores en el aprendizaje.

### 3.1.6. Clasificación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas

Identificar los diferentes errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas nos podrá permitir orientar la atención al objetivo de nuestra investigación sobre los errores que se cometen en la resolución de las inecuaciones lineales. A continuación en la tabla n.º 5 además de las dificultades y errores descritas por Socas (1997) describiremos brevemente la caracterización de errores realizada por Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1996), Socas (1997), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Saucedo (2007); clasificándolos según sus tipos.

Tabla n.º 5. Caracterización de tipologías de errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas

n.º	Investigaciones	Clasificación de errores
1	<b>RADATZ (1979)</b> Citado por García (2010)	<p><b>1. Errores debidos a la dificultad del lenguaje</b> El estudiante no comprende los símbolos y vocabularios matemáticos, no logra la traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.</p> <p><b>2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial</b> El estudiante no tiene la capacidad suficiente para pensar mediante imágenes espaciales o visuales en la realización de tareas matemáticas</p>



		<p><b>3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos</b>  Errores originados por deficiencias de conocimiento sobre contenidos, conceptos y procedimientos específicos (previos) para la realización de una tarea matemática.</p> <p><b>4. Errores debido asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento</b>  En general, son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas, Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Dentro de estos errores se tiene cinco subtipos:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><b>Errores por perseveración</b>, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.</li> <li><b>Errores de asociación</b>, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.</li> <li><b>Errores de interferencia</b>, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.</li> <li><b>Errores de asimilación</b>, cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción, por ejemplo una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.</li> <li><b>Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas</b>, en las que se puede identificar el efecto de una impresión erróneas obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales</li> </ol> <p><b>5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes</b>  Surgen con frecuencia cuando se aplica reglas o estrategias similares en contenidos diferentes. El razonamiento por analogía no siempre funciona en matemática.</p>
2	<p><b>MOSVSHOVITZ-HADAR, ZASLAVSKY E INBAR (1987)</b>  Citado por Rico(1995)</p>	<p><b>1. Datos mal utilizados.</b>  Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Se pueden producir porque se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.</p> <p><b>2. Interpretación incorrecta del lenguaje</b>  Errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.</p> <p><b>3. Inferencias no válidas lógicamente</b>  Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.</p> <p><b>4. Teoremas o definiciones deformados</b>  Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.</p> <p><b>5. Falta de verificación en la solución</b>  Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.</p> <p><b>6. Errores técnicos</b>  Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.</p>
3	<p><b>ESTELEY Y VILLARREAL (1996)</b></p>	<p><b>1. Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones</b>  Errores que cometen los estudiantes en el procedimiento al resolver una ecuación y al momento de plantear el problema a través de ecuaciones.</p> <p><b>2. No empleo o uso parcial de la información.</b>  Error al no utilizar todos los datos presentados en los problemas.</p> <p><b>3. No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas</b></p>

		<p>incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.</p> <p><b>4. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).</b></p> <p><b>5. No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular.</b></p> <p><b>6. Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.</b></p> <p><b>7. Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.</b></p> <p><b>8. Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.</b></p>
04	SOCAS (1997)	<p><b>1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos</b>  Los objetos básicos de las matemáticas se presentan bajo un aparente dilema con status diferentes: el estatus operacional de caracteres dinámico donde los objetos son vistos como un proceso; el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos constituyen, obviamente, los dos aspectos complementarios del objeto matemático.</p> <p><b>2. Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático</b>  Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de la matemática y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático.  Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de la matemática, el aspecto deductivo formal.</p> <p><b>3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas</b>  Estas dificultades tienen procedencias distintas: la institución escolar, el currículo de matemática y los métodos de enseñanza. Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.</p> <p><b>4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos</b>  Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituyen una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. Diferentes son los enfoques que podemos considerar: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información entre otros muchos.</p> <p><b>5. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.</b>  Se sabe que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gusta la matemática. Muchos estudiantes tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ella. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión, Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemática hacia sus estudiantes, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia la matemática que les son transmitidas.  Tomando en cuenta estas dificultades, clasifica los errores en el nivel secundario de acuerdo con su origen en:  - <b>Errores que tienen su origen en un obstáculo.</b>  - <b>Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido:</b> en esta categoría se encuentran los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, los errores de procedimiento que se derivan del uso inapropiado que hacen los alumnos de las fórmulas o de las reglas de procedimiento y los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.</p>

		<p><b>- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.</b>          Para el caso del álgebra, Socas (1997) establece tres tipos de errores:  <b>A. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.</b> Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que estos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.  <b>B. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.</b>  <b>C. Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico</b>          Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en álgebra y la sustitución formal.</p>
05	ASTOLFI (1999)	<p><b>1. Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas</b>          Errores relacionados con la dificultad que tienen los alumnos para comprender las instrucciones de trabajo que se les dan, ya sea en forma oral o escrita.</p> <p><b>2. Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas</b>          Errores cuando la clase funciona como una “sociedad de costumbre”, es decir, una sociedad con propias reglas pero sin que las mismas se hayan formalizado. El alumno debe “razonar bajo influencia” debido al contrato didáctico establecido, y la labor del alumno consiste en decodificar las expectativas implícitas en el contrato.</p> <p><b>3. Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos:</b>          Errores relacionados con los obstáculos. Las concepciones alternativas resistentes por los estudiantes también llamados “representaciones” se dan en todas las áreas de estudio y si no se las trata tienden a mantenerse durante toda la vida.</p> <p><b>4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.</b>          Existen problemas que los profesores consideran más o menos similares pero que implican operaciones lógicas extremadamente diferentes desde el punto de vista del esfuerzo de abstracción que implican.</p> <p><b>5. Errores debidos a los procesos adoptados</b>          A menudo se consideran erróneas las propuestas cuando no siguen el procedimiento típico que se espera, y esto se debe a que dichos procedimientos multiplican las ocasiones de fallar. Cada vez es más sorprendente los “procesos espontáneos” que utilizan los estudiantes a la hora de resolver un problema.</p> <p><b>6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad</b>          Están relacionados con el hecho de que la capacidad de retener en memoria la información es limitada. La memoria se encuentra en el centro de los aprendizajes y cada día se conoce más de sus implicaciones didácticas. Es imposible hablar de aprendizaje sin hablar de la memoria y de su uso. Actualmente se habla de las dos memorias: la memoria de trabajo y la memoria a largo plazo. La memoria de trabajo tiene una capacidad limitada porque el tiempo de conservación de las operaciones es corto; mientras que la memoria a largo plazo es de gran capacidad. Cuando se habla de la memoria en la escuela, generalmente, se hace referencia a la memoria de largo plazo, que es la utilizada para repasar los exámenes y aprender una lección; pero la memoria de trabajo usada en las actividades del día a día, es igual de importante.</p> <p><b>7. Errores que tienen su origen en otra disciplina</b>          Se derivan del conocimiento de otras disciplinas que se exigen para dar respuesta a una pregunta. Muchos de los errores cometidos por los estudiantes provienen de una transferencia errónea entre disciplinas.</p> <p><b>8. Errores causados por la complejidad del contenido.</b>          Los errores causados por la complejidad propia del contenido se estudian desde el punto de vista epistemológico de la estructura del contenido, ya que los contenidos teóricos y prácticos, tanto como los métodos y procedimientos marcados por la tradición, pueden ser generadores de obstáculos imprevistos.</p>

06	<b>TIPOLOGÍA DE ERRORES DE BROUSSEAU (2001)</b> Citado por Franchi y Hernández (2004)	<ol style="list-style-type: none"> <li><b>1. Error a un nivel práctico</b> Errores cuando el profesor considera que son errores de cálculo.</li> <li><b>2. Error en la tarea</b> Errores cuando el profesor los atribuye al descuido.</li> <li><b>3. Error de técnica</b> Errores cuando el profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido.</li> <li><b>4. Error de tecnología</b> Errores cuando el profesor critica la elección de la técnica.</li> <li><b>5. Error de nivel teórico</b> Errores cuando el profesor incrimina los conocimientos teóricos del alumno que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas</li> </ol>
07	<b>CAPUTO Y MACÍAS (2006)</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><b>1. Secuencias incoherentes o, a primera vista, incomprensibles</b> Errores cuando no se justifican (o se justifican de manera incorrecta) los pasos de la demostración.</li> <li><b>2. Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico</b> Errores cuando se destacan los relacionados con los distintos contextos en los que se usan las letras en álgebra, los significados que las letras tienen en cada uno de esos contextos y los problemas de traducción del lenguaje usual al simbólico y viceversa.</li> <li><b>3. Errores algebraicos elementales</b> Errores debido a la insuficiencia de los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores de enseñanza.</li> <li><b>4. Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura.</b> Errores por desconocimiento o aplicación incorrecta de definiciones y propiedades.</li> <li><b>5. No lograr concluir la demostración, o concluirla “por decreto” o con pasos “intermedios” incompletos.</b></li> </ol>
08	<b>ABRATE, POCHULU Y VARGAS (2006)</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li><b>1. Errores debidos al lenguaje matemático</b> Errores producidos por una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje natural a otro más formal en el lenguaje matemático, o de un lenguaje simbólico o icónico a otro simbólico o icónico distinto.</li> <li><b>2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial:</b> Errores atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales llevando a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.</li> <li><b>3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas</b> Errores generados por aplicar reglas y propiedades justificadas por esquemas similares o por inferir que son válidas en contextos parecidos o relacionados. En estas circunstancias, el alumno es consciente que la situación planteada es diferente de otras abordadas, no obstante, “inventa” nuevas reglas o deriva la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.</li> <li><b>4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previo</b> Errores causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino, más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.</li> <li><b>5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales</b> Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el</li> </ol>

		<p>resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación.</p> <p><b>6. Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos</b>          Errores causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información. De esta forma, identificamos aquellas respuestas que se presentaron de manera aislada o usual, y de las que no fue posible establecer el patrón de error, aun después de llevar a cabo una entrevista con el alumno. Asimismo, incluimos en esta categoría aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.</p> <p><b>7. Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos</b>          Errores causados por la carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información. De esta forma, identificamos las instancias en las que no se dieron respuestas a un ejercicio o situación por desconocimiento de la temática involucrada.</p>
09	Gladis Saucedo (2007)	<p><b>1. Datos mal utilizados</b>          Errores cuando se incluyen aquí los casos en que se añaden datos extraños se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; se hace una lectura incorrecta del enunciado.</p> <p><b>2. Interpretación incorrecta del lenguaje</b>          Errores cuando se incluyen aquí los casos de errores debido a una traducción errónea de conceptos o símbolos matemáticos, dados en lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto (designar un concepto por un símbolo que designa a otro concepto y operar con el mismo en su uso convencional). A veces se produce, también, una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Desconexión entre lo analítico y gráfico.</p> <p><b>3. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones</b>          Errores que se cometen por deformación de un principio, regla o definición determinada: aplicar la propiedad distributiva a una operación o función no lineal, cita o escritura errónea de una definición, teorema o fórmula identificable.</p> <p><b>4. Errores al operar algebraicamente</b>          Errores al sumar, restar, multiplicar, etc. Expresiones algebraicas y al transponer términos.</p> <p><b>5. No verificación de resultados parciales o totales</b>          Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada. Si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado, tal vez el error habría podido evitarse.</p> <p><b>6. Errores lógicos</b>          Errores que se cometen por falacias de razonamiento. Justificaciones inadecuadas. Explicaciones ilógicas.</p> <p><b>7. Errores técnicos</b>          Errores de cálculo, errores al transcribir datos al momento de solucionar un problema.</p>

Fuente: Adaptado de la clasificación de errores de Radatz (1979); Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987); Esteley y Villarreal (1996); Socas (1997); Astolfi (2000); Brousseau (2001); Caputo y Macías (2006); Abrate, Pochulu y Vargas (2006); Saucedo (2007)

En base a la descripción y clasificación de errores en el aprendizaje de las matemáticas, realizadas por diferentes investigaciones, elaboramos un cuadro comparativo con el propósito de identificar los errores más comunes, que a continuación lo presentamos en la tabla n.º 6.

Tabla n.º 6. Cuadro comparativo de las principales tipologías de errores en el aprendizaje de las matemáticas

	PRINCIPALES INVESTIGACIONES REALIZADAS SOBRE ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS								
PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN DE ERRORES	RADATZ (1979)	MOSVSHOVITZ HADAR, ZASLAVSKY E INBAR (1987)	ESTELEY Y VILLARREAL (1990,1996)	SOCAS (1997)	ASTOLFI (1999).	BROUSSEAU (2001)	CAPUTO Y MACÍAS (2006)	ABRATE, POCHULU Y VARGAS (2006)	GLADIS SAUCEDO (2007)
1.ERROR EN LA COMPRENSIÓN Y TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE LITERAL AL LENGUAJE MATEMÁTICO	Errores debidos a la dificultad del lenguaje.	Interpretación incorrecta del lenguaje.	Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada	Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico.	Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas		Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico	Errores debidos al lenguaje matemático	Interpretación incorrecta del lenguaje
2.ERROR EN LA INFERENCIA O EL RAZONAMIENTO LÓGICO	Errores debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Inferencias no válidas lógicamente	Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje	Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático	Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos		Secuencias incoherentes, o a primera vista incomprensibles	Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas	Errores lógicos
3.ERROR EN EL PROCEDIMIENTO O DE CÁLCULO ELEMENTAL		Errores técnicos	Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones	Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan una manera inapropiada de fórmulas o reglas de procedimiento	Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas. Errores debidos a los procesos adoptados	Error a un nivel práctico	No lograr concluir la demostración, o concluirla "por decreto" o con pasos "intermedios" incompletos	Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	Errores al operar algebraicamente Errores técnicos

4.ERROR EN EL DESCONOCIMIENTO TEÓRICO Y DOMINIO DE FÓRMULAS Y PROPIEDADES	Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Teoremas o definiciones deformados	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones). No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular		Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.	Error de nivel teórico	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura	Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos	Empleo incorrecto de propiedades y definiciones
5.ERROR EN EL DEFICIENTE APRENDIZAJE DE CONOCIMIENTOS PREVIOS	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos			Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética			Errores algebraicos elementales	Errores debidos a la recuperación de un esquema previo Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos	
6.ERROR EN LA NO VERIFICACION DE LA SOLUCION.		Falta de verificación en la solución	No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en						No verificación de resultados parciales o totales
7.ERROR EN EL USO PARCIAL O MAL USO DE LA INFORMACION		Datos mal utilizados	No empleo o uso parcial de la información						Datos mal utilizados
8.ERROR EN LA CAPACIDAD PARA PENSAR MEDIANTE IMÁGENES ESPACIALES O VISUALES	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.							Errores debidos a dificultades para obtener información espacial	
9.ERROR RELACIONADO A LA DIFICULTAD DEL OBJETO MATEMATICO				Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos	Errores causados por la complejidad del contenido				

10. ERROR EN EL APRENDIZAJE DE UN SÓLO MÉTODO DE SOLUCIÓN						Error de técnica. Error de tecnología			
11. ERROR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA. LA FORMA COMO SE ENSEÑA				Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas					
12. ERROR DE TRANSCRIPCIÓN DE UN EJERCICIO A LA HOJA DE TRABAJO			Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo						
13. ERROR DE TIPO PSICOLÓGICO				Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas	Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad Errores que tienen su origen en otra disciplina	Error en la tarea			

Fuente: Elaboración propia en base a la tabla n.º 5 de clasificación de tipologías sobre errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas.



En la tabla n.º 6, podemos observar lo siguiente:

- Todos los autores, excepto Brousseau (2001), consideran que el estudiante cometerá errores en el aprendizaje de las matemáticas cuando:
  - No logra la comprensión y traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático (simbólico).
  - No es capaz de realizar una correcta inferencia lógica o un razonamiento lógico.
- Solo Radatz (1979) no considera que el estudiante podría cometer error por un procedimiento de cálculo elemental; mientras que los demás autores sí lo consideran pertinente.
- Todos los autores, excepto Socas (1997), sostienen que los estudiantes cometen errores cuando tienen un desconocimiento de la teoría, de fórmulas y propiedades relacionadas con el objeto matemático.
- Radatz (1979); Socas (1997); Caputo y Macías (2006); Abrate, Pochulu y Vargas (2006) señalan que otra de las causas del porqué un estudiante comete errores en el aprendizaje de las matemáticas es porque tuvo un deficiente aprendizaje de conocimientos previos.
- Mosvshovitz et. al (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996) y Saucedo (2007) señalan que el estudiante podría cometer errores cuando no verifica la solución obtenida, ya que si contrasta la solución podría revertir el error.
- Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996) y Saucedo (2007) sostienen que un estudiante cometerá errores cuando al resolver un problema, o hace uso parcial o mal uso de los datos de la información.

De acuerdo al análisis realizada a la tabla n.º 6, observamos, la categorización de errores más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, en ello observamos las coincidencias y discordancias en los errores, realizadas por los diferentes autores, en base a ello proponemos realizar el análisis de errores cometidos en la resolución de inecuaciones lineales bajo las seis primeras tipologías de errores más comunes, las cuales planteamos en la siguiente tabla, enunciándolos de la siguiente manera.

Tabla n.º 7. Tipologías de errores más comunes que se cometen en la resolución de Inecuaciones lineales con una variable en estudiantes de tercer año de educación secundaria.

<b>Clasificación de errores</b>	<b>Descripción</b>	<b>Tipo de error</b>
1. Error en la comprensión y traducción de una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra.	a) El estudiante no comprende los símbolos y términos matemáticos de desigualdad $<$ , $>$ , $\leq$ , $\geq$ e intervalos $[ \ ]$ y su relación entre ellos. b) El estudiante tiene dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático o del lenguaje matemático a otro distinto.	<b>E1</b>
2. Error en la inferencia o en el razonamiento lógico	El estudiante infiere conclusiones y justificaciones inadecuadas de proposiciones, inventa nuevas reglas o deriva la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.	<b>E2</b>
3. Error en el procedimiento o de cálculo elemental	El estudiante comete errores en las operaciones básicas de cálculo. Por ejemplo, comete errores al realizar operaciones con fracciones, al usar leyes de signos.	<b>E3</b>
4. Error en el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades	El estudiante desconoce o emplea incorrectamente los conceptos, las propiedades y definiciones sobre desigualdades e inecuaciones lineales.	<b>E4</b>
5. Error por no tener los conocimientos previos	El estudiante no posee los conocimientos previos sobre los contenidos y conceptos a tratar. Por ejemplo, para inecuaciones el estudiante debe conocer propiedades de desigualdades y operaciones con intervalos, pero no las recuerda.	<b>E5</b>
6. Error al no verificar la solución.	La falta de comprobación de sus resultados lo llevaría a dar respuestas equivocadas.	<b>E6</b>

Fuente: Elaboración propia

Estas 6 tipologías de errores han sido seleccionadas teniendo en cuenta las coincidencias de los errores más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, categorizadas por los diferentes autores en sus investigaciones. Ahora nosotros las utilizaremos para identificar y analizar los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

## **3.2. Metodología**

En cuanto a la metodología, Hernández, Fernández, y Baptista (2014), sostienen que el enfoque cualitativo utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación y un estudio descriptivo busca especificar propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Por ello, la metodología de investigación que utilizamos en el presente trabajo será de tipo cualitativo descriptivo, ya que nos interesa describir los errores que los estudiantes cometen con frecuencia al momento de resolver inecuaciones lineales con una incógnita.

### **3.2.1. Procedimientos metodológicos**

Para nuestra investigación, planteamos los siguientes procedimientos metodológicos:

- 1.º Realizamos una revisión de investigaciones sobre las diferentes tipologías más comunes de errores existentes en el aprendizaje de las matemáticas, en base a la cual se elaborará un cuadro comparativo.
- 2.º Proponemos una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, tomando como referencia las comparaciones de las tipologías revisadas.
- 3.º Elaboramos una prueba piloto tomando en cuenta la tipología elaborada, la que permitió recoger evidencias acerca de los errores que cometen los estudiantes de tercer grado de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, la cual fue validada por investigadores expertos en didáctica de la matemática y a través de una aplicación piloto con treinta estudiantes.
- 4.º Realizamos un análisis a priori del cuestionario n.º 1 y 2, con la intención de anticipar la presencia de los errores más comunes que se cometen en la resolución de inecuaciones, en base a la tipología de errores propuesta.
- 5.º Seleccionamos una muestra intencional de treinta y cinco estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37.
- 6.º Aplicamos los cuestionarios n.º 1 y 2, previamente validado, para recoger información sobre los errores que cometen dichos estudiantes en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

- 7.º Identificamos los errores cometidos por los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37 para cada uno de los ítems de los cuestionarios a través de sus respuestas.
- 8.º Analizamos las respuestas de los estudiantes para cada uno de los ítems de los cuestionarios n.º 1 y 2, según la tipología de errores propuesta para la resolución de inecuaciones lineales con una variable.
- 9.º Realizamos una entrevista a los estudiantes, con la finalidad de aportar información relevante al objetivo general y también a las posibles conjeturas sobre la naturaleza del error que uno puede hacer a partir de las respuestas del cuestionario.
- 10.º Elaboramos una tipología final de los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

### 3.2.2. Sujetos de investigación

Las actividades propuestas, fueron realizadas en la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37 ubicada en el AAHH. Enrique Montenegro del distrito de San Juan de Lurigancho perteneciente a la jurisdicción de la UGEL 05. La I.E. se encuentra ubicada en una zona donde existe un alto índice de familias disfuncionales y familias que no asumen su función educativa y formativa, haciendo abandono físico y moral con alto índice de violencia familiar, teniendo como consecuencia estudiantes con indiferencia al cuidado de su salud, del medio ambiente, ya que muestran inadecuados hábitos de higiene personal y de su entorno.

Con respecto al rendimiento académico los estudiantes son ubicados de acuerdo a sus promedios de notas como indica el Ministerio de Educación del Perú.

Tabla n.º 8. Escala de calificación vigesimal en secundaria

Calificación	Nivel	Descripción
20-18	Logro destacado	Cuando el estudiante evidencia un nivel superior a lo esperado respecto a la competencia. Esto quiere decir que demuestra aprendizajes que van más allá del nivel esperado.
17-14	Logro esperado	Cuando el estudiante evidencia el nivel esperado respecto a la competencia, demostrando manejo satisfactorio en todas las tareas propuestas y en el tiempo programado.
13-11	En proceso	Cuando el estudiante está próximo o cerca al nivel esperado respecto a la competencia, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
10-00	En inicio	Cuando el estudiante muestra un progreso mínimo en una competencia de acuerdo al nivel esperado. Evidencia con frecuencia dificultades en el desarrollo de las tareas, por lo que necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente.

Fuente: Adaptado del Currículo Nacional (2016, p. 181)

De acuerdo con la tabla anterior, los resultados académicos del año 2017 de los estudiantes de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37 en el área de matemática fueron lo siguiente.

Tabla n.º 9. Estadística 2017 del área de Matemática

ESTADÍSTICAS 2017																														
COORDINADOR(A): ANTONIA DE LA CRUZ FLORES .ÁREA: Matemática																														
	PRIMERO						SEGUNDO						TERCERO						CUARTO						QUINTO					
	H	%	M	%	T	%	H	%	M	%	T	%	H	%	M	%	T	%	H	%	M	%	T	%	H	%	M	%	T	%
18-20	3	5	0	0	3	2	4	5	3	7	7	6	4	8	4	6	8	7	5	9	2	4	7	6	2	4	5	8	7	6
14-17	28	47	38	60	66	54	26	35	15	33	41	34	8	17	25	35	33	28	19	33	25	44	44	38	20	37	22	35	42	36
11-13	24	40	22	35	46	37	32	43	21	47	53	44	19	40	33	46	52	43	19	33	21	37	40	35	27	50	32	51	59	50
0-10	4	7	2	3	6	5	13	17	6	13	19	16	15	31	8	11	23	19	15	26	9	16	24	21	2	4	2	3	4	3
DESAPROBADOS		0		0		0		0		0				0		0		0		0		0		0		0		0		0
TRASLADADOS		0		0		0		0		0				0		0		0		0		0		0		0		0		0
REQUIEREN RECUPERACION		0		0		0		0		0				0		0		0		0		0		0		0		0		0
RETIRADOS	1	2	1	2	2	2							2	4	2	3	4	3		0		0		0	3	6	2	3	5	4
<b>TOTAL</b>	60	100	63	100	123	100	75	100	45	100	120	100	48	100	72	100	120	100	58	100	57	100	115	100	54	100	63	100	117	100

Fuente: Informe técnico pedagógico 2017 del área de Matemática

Como se puede observar la tabla anterior los resultados académicos del 2017 de los estudiantes en el área de matemática son bajos. Los estudiantes de segundo año de secundaria este año 2018 pertenecen al tercer año de secundaria, de ellos se seleccionó la muestra para la presente investigación. De estos estudiantes podemos describir que en el nivel de logro destacado (18-20) de un total de 120 estudiantes solo 7 están en este nivel, 13 estudiantes están en el nivel de inicio (0-10) y 53 estudiantes están en el nivel de proceso (11-13). Concluimos entonces que nuestra muestra son estudiantes que presentan dificultades en el rendimiento académico de las matemáticas, tal como indica la tabla anterior.

Nuestro estudio ha sido realizado con treinta y cinco estudiantes entre varones y mujeres de trece y catorce años de edad, los cuales ha sido seleccionada de manera intencionada de las secciones “B”, “C” y “D” del tercer año de secundaria de la I.E. “Fe y Alegría” n.º 37, mientras que la sección “A” sirvió para la aplicación piloto del cuestionario.

De acuerdo al Diseño Curricular (2016), que rige para todas las instituciones públicas del Estado peruano, los estudiantes debieron haber desarrollado el tema de inequaciones en segundo de secundaria. Cabe mencionar, que los estudiantes de nuestra muestra desarrollaron el contenido intervalos en la segunda unidad del primer bimestre y el tema de desigualdades e inequaciones en la tercera unidad que

corresponde al segundo bimestre, es decir, revisaron el tema de desigualdades e inequidades antes de la aplicación de cuestionarios n.º 1 y 2.

### **3.2.3. Instrumentos de investigación**

En nuestra investigación, utilizaremos como instrumentos de investigación cuestionarios y entrevistas. Hernández et al. (2014) define al cuestionario, como “un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir y que deben ser congruente con el planteamiento del problema e hipótesis”. (p.217). Además, utilizaremos la entrevista, para despejar dudas sobre las respuestas de los estudiantes que no fueron claras o no se pudo determinar el tipo de error cometido. Según Bernal (2010) la entrevista lo define como una técnica que consiste en recoger información mediante un proceso directo de comunicación entre entrevistador(es) y entrevistado(s), en el cual el entrevistado responde a cuestiones, previamente diseñadas en función de las dimensiones que se pretenden estudiar, planteadas por el entrevistador. Al respecto, Hernández et al. (2016) divide a la entrevista en:

- Entrevista estructurada. El entrevistador realiza su labor con base en una guía de preguntas específicas y se sujeta exclusivamente a esta (el documento prescribe qué cuestiones se preguntarán y en qué orden).
- Entrevista semiestructurada. Se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (es decir, no todas las preguntas están predeterminadas).
- Entrevista abiertas. Se fundamentan en una guía general de contenidos y el entrevistador posee toda la flexibilidad para manejarla (él o ella es quien maneja el ritmo, la estructura y el contenido).

Para nuestra investigación, utilizamos la entrevista de tipo semiestructurada, ya que el objetivo es establecer un diálogo, interacción o comunicación entre el alumno y el profesor para obtener información pertinente.

### **3.2.4. Diseño y aplicación de los cuestionarios y entrevistas**

En esta parte de la investigación describiremos el diseño del cuestionario n.º 1 y n.º 2, que fueron elaboradas teniendo en cuenta la tipología de error planteada. Además detallaremos la aplicación de los mismos, a una muestra intencionada, que son estudiantes de tercer año “B”, “C” y “D” de la I.E. “Fé y Alegría” n.º 37 de San Juan de Lurigancho. También analizaremos los resultados de las entrevistas que fueron realizadas a estudiantes con la finalidad de aportar información relevante al objetivo general y también a las posibles conjeturas sobre la naturaleza del error que uno puede hacer a partir de las respuestas del cuestionario.

#### **3.2.4.1. Diseño del cuestionario n.º 1**

La elaboración del cuestionario n.º 1, se realizó tomando en cuenta lo siguiente:

- La clasificación de errores planteadas por el autor de la tesis.
- Los contenidos de tercer grado de educación secundaria según el Diseño Curricular Nacional 2016 del área de Matemática.

La clasificación de errores planteada por el autor detalla los errores asociadas a los contenidos de inecuaciones lineales, como son tipos de intervalos, operaciones con intervalos, propiedades de desigualdades, inecuaciones lineales.

El cuestionario n.º 1, ha sido elaborado teniendo en cuenta la tipología de error planteada, con la intención de recoger información acerca de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven inecuaciones lineales con una variable.

El cuestionario n.º 1, fue validado a través del cruce de información entre el investigador, la asesora y la coordinadora del grupo de investigación, acerca de la factibilidad y de las preguntas del cuestionario. Luego de esta validación se hizo un reajuste en las preguntas de verdadero y falso porque después de aplicarlo de manera piloto en un grupo de 30 estudiantes, no entendían la proposición de la pregunta 1e. Este cuestionario consta de ocho preguntas y tiene una duración de 90 minutos. La primera y segunda son preguntas de verdadero y falso, donde los estudiantes deben contestar justificando sus respuestas, las preguntas son de conocimientos previos, relacionados al error de tipo E5; preguntas de inferencia relacionados al error de tipo E2; preguntas de manejo de propiedades en las desigualdades, clases de intervalos y su relación con sus elementos, relacionados al error de tipo E4. Las preguntas 3, 4

y 5 son para evidenciar el dominio que tienen los estudiantes en la representación de los intervalos en sus diferentes formas, en estas preguntas se pretenden evidenciar, el error de tipo E1; La pregunta 6 fue elaborada con la intención de evidenciar en los estudiantes el dominio de traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático y también la representación de los intervalos en sus diferentes formas, esta pregunta está relacionado al error de tipo E1b. Las preguntas 7 y 8 son de desarrollo; estas preguntas se plantearon con el objetivo de evidenciar el dominio en conocimientos y cálculos básicos de inecuaciones y su interpretación del conjunto solución, estas preguntas está relacionado con los errores de tipo e1a, E3, E4 y E6.

Las preguntas del cuestionario n.º 1, fueron creados por el autor de la tesis. El documento completo del cuestionario n.º 1 se encuentra en el anexo 1.

#### **3.2.4.2. Aplicación del cuestionario n.º 1**

Antes de la aplicación del cuestionario n.º 1 con los estudiantes de nuestra muestra, se aplicó dicho cuestionario a modo de prueba piloto a treinta estudiantes de tercer año de educación secundaria, de la sección “A” de la Institución Educativa “Fe y Alegría” n.º 37, con la finalidad de validar la comprensión de los enunciados de las preguntas propuestas. Como resultado de esta prueba piloto se modificó el enunciado de una pregunta 1e, para evitar dificultades en la comprensión de dicho enunciado.

Posteriormente se aplicó el cuestionario n.º 1 modificado a una muestra de treinta y cinco estudiantes de tercer año de educación secundaria, de las secciones “B”; “C” y “D” de la Institución Educativa “Fe y Alegría” n.º 37, seleccionados de manera intencionada para nuestra investigación. La cantidad de preguntas planteadas en el cuestionario n.º 1, los estudiantes lo consideraron como excesivas, posiblemente porque no están acostumbrados a resolver cuestionarios de este tipo.

La aplicación del cuestionario n.º 1, se realizó el veinticinco de mayo del 2018 y tuvo una duración de noventa minutos, aproximadamente. Los estudiantes solo utilizaron hojas, lápices y lapiceros, no utilizaron calculadora.

#### **3.2.4.3. Diseño del cuestionario n.º 2**

La elaboración del cuestionario n.º 2 se realizó tomando en cuenta lo siguiente:

- La clasificación de errores planteadas por el autor de la tesis.



- Los contenidos de tercer grado de educación secundaria según el Diseño Curricular Nacional 2016 del área de Matemática.

Según el Diseño Curricular Nacional 2016, el desarrollo de competencias en el área de Matemática se dará a través de la resolución de problemas. Bajo ese indicador, se elaboró el cuestionario n.º 2, teniendo en cuenta la tipología de error planteada con la intención de recoger información acerca de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas con inecuaciones lineales.

El cuestionario n.º 2, fue validado a través del cruce de información entre el investigador, la asesora y la coordinadora del grupo de investigación, acerca de la factibilidad y de las preguntas del cuestionario. Luego de esta validación se hizo un reajuste en la pregunta n.º 1, porque después de aplicarlo de manera piloto en un grupo de 30 estudiantes, no entendían el enunciado.

El cuestionario n.º 2 contiene 6 preguntas que son problemas de aplicación en diversos contextos, donde los estudiantes plantearán los problemas a través de inecuaciones lineales, resolverán dichas inecuaciones haciendo uso de propiedades e interpretarán sus resultados. Con la pregunta n.º 1, se pretende recoger información sobre los errores de tipo E1b, E2 y E3. Con las preguntas 3, 4 y 5, se pretende recoger información sobre errores de tipo E1b y E6. Finalmente la pregunta n.º 6, está relacionado con los errores E1b, E3 y E5.

Con respecto a las preguntas del cuestionario n.º 2, fueron adaptados del Cuaderno de trabajo del libro Matemática 3 (2016). El documento completo del cuestionario n.º 2 se encuentra en el anexo 2.

#### **3.2.4.4. Aplicación del cuestionario n.º 2**

Antes de la aplicación del cuestionario n.º 2 con los estudiantes de nuestra muestra, al igual que el primer cuestionario se aplicó a modo de prueba piloto a treinta estudiantes de tercer año de educación secundaria, de la sección "A" de la Institución Educativa "Fe y Alegría" n.º 37, con la finalidad de validar la comprensión de los enunciados de las preguntas propuestas. Como resultado de esta prueba piloto se modificó la pregunta n.º 1, para evitar dificultades en la comprensión de dicho

enunciado. Posteriormente se aplicó el cuestionario n.º 2 modificado a la misma muestra que contestaron el cuestionario n.º 1.

La aplicación del cuestionario n.º 2, se realizó el trece de junio del 2018, el cual tuvo una duración aproximada, de sesenta minutos. Los estudiantes solo utilizaron hojas, lápices y lapiceros, no utilizaron calculadora.

### 3.2.4.5. Diseño y aplicación de las entrevistas

La entrevista se diseñó tomando en cuenta las preguntas y resultados de los cuestionarios n.º 1 y n.º 2. Las preguntas propuestas en la entrevista tenían como finalidad indagar si detrás de un error evidenciado existe otro tipo de error de acuerdo a la tipología de error planteada por el autor de la tesis. Por ejemplo:

- En la pregunta n.º 1a del cuestionario n.º 1:  $-8 > -1$ , hubieron estudiantes que contestaron que es verdadero, justificando que “ $-8$  es más grande que  $-1$ ”; “ $-8$  está más alejado del cero” hasta allí clasificamos como error de tipo E5, por no tener conocimientos previos de comparación de números enteros, pero cuando el estudiante contesta que “ $-8 > -1$  es verdadero porque es sí”, surge la necesidad de saber si los estudiantes conocen o no los signos de desigualdad o confunde el signo mayor que ( $>$ ) con el signo menor que ( $<$ ). Para ello es necesario realizar una entrevista.
- De la misma manera en la pregunta n.º 2b del cuestionario n.º 2:  $2 \notin \langle -5; 2 \rangle$ , hubo respuestas indicando que es falso, evidenciando el error de tipo E5, también de conocimientos previos, Hubo una respuesta en la que el estudiante mencionaba que el símbolo “ $\notin$ ” significaba un intervalo cerrado, por ello era necesario saber si los estudiantes entendían o no el significado del símbolo “ $\notin$ ”.
- En las respuestas del cuestionario n.º 1 y n.º 2 se observó que los estudiantes realizan operaciones básicas de cálculo, cuyas respuestas fueron con error:  $2x - 2x = x$ ,  $5x - 5x = x$ ,  $30 - 8x = 22x$ ,  $40 + x = 40x$ ,  $-5x + 5 = x$ . Tal como se muestra estos errores fueron considerados como error de tipo E3, de procedimiento o cálculo elemental. Al observar que este tipo de error se presentaba con mucha frecuencia hubo la necesidad cuales eran las razones del porqué realizaban sus cálculos de esa manera, si conocían por ejemplo las operaciones con términos semejantes.
- En la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2 por ejemplo se pide hallar el intervalo, allí se observó que los estudiantes resolvían correctamente los problemas hasta llegar

a la desigualdad:  $5 < C < 20$  , pero no lo escribían como intervalo. Ese resultado se interpreta como si el estudiante tenía dificultades, en la traducción de una desigualdad a través de intervalo, clasificándolo como error de tipo E1b, pero también nos interesaba las razones del porqué no lo escribía a través de intervalo. Observando estos resultados hubo la necesidad de diseñar y aplicar una entrevista con la finalidad de aportar información relevante al objetivo general y también a las posibles conjeturas sobre la naturaleza del error que uno puede hacer a partir de las respuestas del cuestionario.

La entrevista consta de siete preguntas, planteadas en función a las respuestas dadas por los estudiantes.

Con la pregunta n.º 1 y n.º 2, buscamos indagar sobre el razonamiento que realiza en la comparación de números enteros, si utilizan el mismo método para comparar dos números positivos o negativos. Con la pregunta n.º 3, buscamos esclarecer, las razones del porqué el estudiante contestó de la siguiente manera “  $-8 > -1$  es verdadero porque es sí”. La pregunta n.º 4, se hizo con la intención de conocer si el estudiante conoce el significado “ $\notin$ ”. Con La pregunta 5 pretendemos identificar las razones del porque cometen errores en las operaciones  $2x - 2x = x$  ,  $5x - 5x = x$  ,  $30 - 8x = 22x$  ,  $40 + x = 40x$  ,  $-5x + 5 = x$  . La pregunta n.º 6, planteamos con la intención de saber, porqué el estudiante no interpreta su desigualdad obtenida a través de intervalo y la pregunta n.º 7 se hizo para saber ssi el estudiante conoce la propiedad de equivalencia.

La entrevista se aplicó a seis estudiantes del tercer año de educación secundaria que desarrollaron el cuestionario n.º 1 y n.º 2, estos estudiantes evidenciaban en sus cuestionarios errores como las que se describieron anteriormente.

A los estudiantes entrevistados se les pidió que contesten con toda sinceridad ya que sus respuestas ayudaría a esclarecer algunas razones del porque los estudiantes cometen errores en la resolución de inecuaciones lineales. También se les indicó que sus nombres se mantendrán en absoluta reserva. La entrevista se llevó a cabo en un tiempo aproximado de 30 minutos, pues el entrevistador preguntaba para obtener más información sobre las respuestas que iban presentando a las preguntas.

Las respuestas de la entrevista fueron adjuntadas en el comentario de los resultados de la aplicación de los cuestionarios, la hoja de entrevista se encuentra en el anexo 3.

## **CAPÍTULO IV: ANÁLISIS A PRIORI Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo, presentamos los análisis a priori de los cuestionarios n.º 1 y n.º 2, teniendo en cuenta la tipología de errores planteada por el autor de la tesis, es decir, describimos las respuestas que esperamos que den los estudiantes, correctas e incorrectas. Además, presentamos los resultados obtenidos luego de la aplicación de los cuestionarios, para lo cual describimos las respuestas dadas por los estudiantes al desarrollar los cuestionarios n.º 1 y n.º 2, clasificando dichas respuestas según la tipología de errores propuesta en este trabajo.

### **4.1. Análisis a priori del cuestionario n.º 1**

En esta parte, presentamos el análisis a priori, es decir, las respuestas posibles que los estudiantes podrían dar a las preguntas del cuestionario n.º 1. Este análisis se hizo tomando como referencia la tipología de errores planteada por el autor de la tesis indicada en la tabla n.º 7. Las respuestas pueden estar influenciadas de acuerdo a los conocimientos previos que los alumnos dominan, producto de la enseñanza recibida en los años anteriores, correspondiente al segundo grado de educación secundaria, según el currículo nacional que rige para todas las instituciones públicas del Estado peruano. El cuestionario fue programado para ser desarrollado a lo más en noventa minutos, como máximo.

### Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar el dominio en el uso de propiedades con desigualdades.

Tabla n.º 10. Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 1		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.	a) $-8 > -1$	<b>F</b> Porque al ubicarlos en la recta numérica $-8$ está a lado izquierdo de $-1$ , por lo tanto, $-8$ debe ser menor que $-1$ .	<b>V</b>	El estudiante tiene dificultades en la comparación de números enteros.	<b>E5</b>
	b) $3 \leq 7$	<b>V</b> Por propiedad: $a \leq b \Leftrightarrow (a = b \vee a < b)$	<b>F</b>	El estudiante desconoce el significado de la siguiente propiedad de desigualdad: $a \leq b \Leftrightarrow (a = b \vee a < b)$	<b>E4</b>
	c) $a < b$ es equivalente a $b > a$	<b>V</b> Por la propiedad de equivalencia	<b>F</b>	El estudiante desconoce la propiedad de equivalencia. $a < b \Leftrightarrow b > a$	<b>E4</b>
	d) Si $-x \leq 3$ entonces $x \leq -3$	<b>F</b> Si multiplicamos por $-1$ a ambos lados de la desigualdad $-x \leq 3$ , por propiedad quedaría $x \geq -3$ .	<b>V</b>	El estudiante infiere conclusiones inadecuadas, como, por ejemplo: "cambiamos de signo a ambos miembros como en las ecuaciones".	<b>E2</b>
	e) Si $-a > -b$ entonces $a > b$	<b>F</b> Si multiplicamos por $-1$ a ambos lados de la desigualdad $-a > -b$ , por propiedad quedaría $a < b$ .	<b>V</b>	El estudiante no usa correctamente la siguiente propiedad: $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a.c > b.c$	<b>E4</b>

Fuente: Elaboración propia

### Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Verificar la comprensión e interpretación de los diferentes tipos de intervalos y su relación con sus elementos.

Tabla n.º 11. Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1

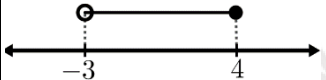
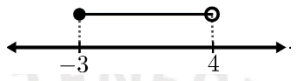
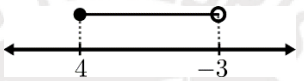
Pregunta n.º 2		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Para cada enunciado, escriba "verdadero" (V) o "falso" (F), según corresponda. Justifique su respuesta.	a) $3 \in [1; 3) \dots ( )$	<b>F</b> Como el intervalo es abierto en 3, significa que 3 no pertenece al intervalo.	<b>V</b>	El estudiante no entiende que cuando el intervalo es abierto en 3, el intervalo no incluye a 3.	<b>E1a</b>
	b) $2 \notin (-5; 2) \dots ( )$	<b>V</b> El intervalo es abierto en 2, por lo tanto, 2 no pertenece al intervalo.	<b>F</b>	El estudiante no entiende el significado del símbolo "no pertenece" ( $\notin$ ).	<b>E1a</b>
	c) $-3 \in (-4; 2] \dots ( )$	<b>V</b> Al ubicar en la recta numérica, podemos observar que $-3$ está comprendido entre $-4$ y $2$ , por lo tanto, $-3$ pertenece al intervalo.	<b>F</b>	El estudiante no entiende que $-3$ está entre $-4$ y $2$ . No logra ordenar números enteros.	<b>E5</b>
	d) $4 \in [-3; +\infty) \dots ( )$	<b>V</b> Porque el intervalo considera desde $-3$ hasta todos los números positivos, por lo tanto 4, pertenece al intervalo.	<b>F</b>	El estudiante no logra entender que 4 pertenece al intervalo; posiblemente, porque cree que el intervalo está formado por números negativos.	<b>E5</b>

Fuente: Elaboración propia

### Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar el dominio en la representación de los intervalos en sus diferentes formas.

Tabla n.º 12. Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1

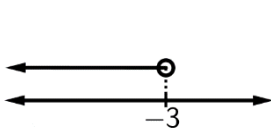
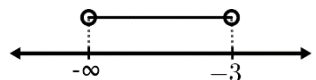
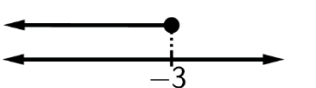
Pregunta n.º 3		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Dado el siguiente intervalo: $\langle -3; 4 \rangle$	a) Represente gráficamente.			El estudiante confunde los intervalos abiertos con los intervalos cerrados.	<b>E5</b>
				El estudiante desconoce la relación de orden, a consecuencia de ello, no ubica correctamente los números en la recta numérica	<b>E5</b>
	b) Represente usando desigualdades.	$-3 < x \leq 4$	$-3 < x < 4$ $4 > x \geq -3$	El estudiante no logra relacionar el intervalo abierto con la desigualdad “<” y el intervalo cerrado con la desigualdad “≤”.	<b>E1a</b>

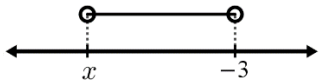
Fuente: Elaboración propia

### Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar el dominio en la representación de los intervalos en sus diferentes formas dada una desigualdad.

Tabla n.º 13. Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 4		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Dada la siguiente desigualdad: $x < -3$	a) Represente gráficamente.			El estudiante piensa que el infinito representa un punto específico.	<b>E1a</b>
				El estudiante no logra relacionar la desigualdad “>” o “<” con los símbolos adecuados para representar un intervalo abierto.	<b>E1a</b>

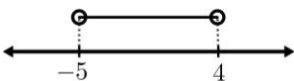
				El valor de “x” no es exactamente un punto. Son valores menores a -3 .	<b>E1a</b>
b) Realice una representación a través de intervalo.	$\langle -\infty; -3 \rangle$	$[-\infty; -3 \rangle$	$\langle -\infty; -3 ]$	El estudiante no logra entender que los intervalos al infinito siempre son abiertos.	<b>E4</b>
		$\langle -3; -\infty \rangle$		El estudiante no reconoce la relación de orden en $\mathbb{R}$ .	

Fuente: Elaboración propia

### Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar el dominio en la representación de los intervalos en sus diferentes formas dada su gráfica.

Tabla n.º 14. Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 5		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Dada la gráfica 	a) Represente a través de un intervalo.	$[-5; 4 \rangle$	$\langle -5; 4 \rangle$	El estudiante no logra relacionar el extremo cerrado en -5 de la gráfica con el intervalo cerrado en -5 ; o el extremo abierto en 4 de la gráfica con el intervalo abierto en 4 . Es decir, si el punto en la gráfica es cerrado, en el intervalo lo representa abierto; y si el punto en la gráfica es abierto; en el intervalo lo representa cerrado.	<b>E1a</b>
			$[-5; 4 ]$		
	b) Represente por desigualdades	$-3 < x \leq 4$	$-5 < x < 4$	El estudiante no logra relacionar el extremo abierto en la gráfica con la desigualdad menor que o mayor que; y el extremo cerrado en la gráfica con la desigualdad mayor igual o menor igual.	<b>E1a</b>
			$-5 \leq x \leq 4$		

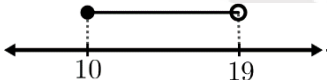
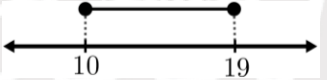
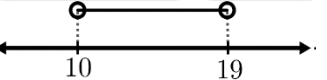
Fuente: Elaboración propia



### Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático y el dominio en la representación de los intervalos en sus diferentes formas.

Tabla n.º 15. Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 6	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
<p>La edad de los adolescentes se podría definir como de 10 años o más y menores de 19 años. Exprese las edades de los adolescentes usando intervalos, desigualdades y gráficamente.</p>	$[10;19)$	$10; 11; 12; 13; \dots; 19$	El estudiante no logra traducir del lenguaje literal al lenguaje simbólico.	<b>E1b</b>
		$10; 11; 12; 13; \dots; 18$	El estudiante infiere que el conjunto solución es solo números enteros.	<b>E2</b>
	<p>Si “<math>x</math>” representa la edad de los adolescentes, entonces, se tiene la siguiente desigualdad:  <math>10 \leq x &lt; 19</math></p>	$x > 10 \text{ y } x < 19$	<p>El estudiante no logra traducir el enunciado “...10 años o más y menores de 19 años” a través de desigualdades como <math>10 \leq x &lt; 19</math>.</p>	<b>E1b</b>
		$x \in \langle 10; 19 \rangle$		
	<p>La edad de los adolescentes, se representa de la siguiente manera.</p> 		<p>El estudiante no logra traducir de un lenguaje literal a otra representación matemática, en este caso, a través de gráfica de intervalo.</p>	<b>E1b</b>
				

Fuente: Elaboración propia.

### Análisis a priori de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1

**Objetivo:** Evidenciar el dominio en conocimientos y cálculos básicos de inecuaciones y su interpretación del conjunto solución.

Tabla n.º 16. Análisis a priori de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 7		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ , justificando los pasos realizados. Interprete la solución obtenida.	a) $8 \leq 2x$	$8 \leq 2x$ Por propiedad $2x \geq 8$ Dividimos por 2 y obtenemos $x \geq 4$ $\therefore C.S. = [4; +\infty)$	$x \leq 4$ $C.S. = \{4; 3; 2; 1; 0\}$	El estudiante no entiende el significado de una desigualdad ni de intervalo.	<b>E1a</b>
				Considera que la solución se limita a números enteros. No considera a los números reales.	<b>E2</b>
		$x \leq 4$ $\therefore C.S. = \langle -\infty; 4]$	Si, el estudiante hubiera verificado sus respuestas en la inecuación, se hubiera dado cuenta que su solución no era correcta	<b>E6</b>	
	b) $-5x < 30$	$-5x < 30$ Dividimos por $-5$ a ambos lados $x > -6$ $\therefore C.S. = \langle -6; +\infty)$	$x < -6$ $C.S. = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$	El estudiante resuelve la inecuación sin aplicar la siguiente propiedad: $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	<b>E4</b>
$C.S. = \langle -\infty; -6 \rangle$			Si el estudiante comprobaba su respuesta, talvez se daba cuenta del error que estaba cometiendo y hubiera corregido su respuesta.	<b>E6</b>	

	c) $26 \geq 30 - 8x$	$26 \geq 30 - 8x$ Restamos 30 $-4 \geq -8x$ Dividimos por $-8$ $\frac{1}{2} \leq x$ Por propiedad $x \geq \frac{1}{2}$ $\therefore C.S. = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$	$8x \geq 4$ $x \geq 2$ C.S. = $[2; +\infty)$	El estudiante tiene dificultades en las operaciones básicas de división de números enteros.	<b>E3</b>
	d) $-12 < 3x + 6 \leq 18$	$-12 < 3x + 6 \leq 18$ . Restamos 6 a los tres miembros y tenemos $-18 < 3x \leq 12$ ; Dividimos por 3 a los tres miembros y tenemos $-6 < x \leq 4$ $\therefore C.S. = (-6; 4]$	$-4 < x + 6 \leq 6$ C.S. = $(-12; 4]$	El estudiante infiere conclusiones inadecuadas, Es correcto que al dividir entre 3 a las tres partes la desigualdad no cambia, pero se olvida de dividir por 3 al número 6.	<b>E2</b>
	e) $3x - 2 < 5 - x$	$3x - 2 < 5 - x$ Sumamos $x$ a ambos miembros $4x - 2 < 5$ Sumamos 2 a ambos lados de la desigualdad $4x < 7$ Dividimos entre 4 $x < \frac{7}{4}$ $\therefore C.S. = \left( -\infty; \frac{7}{4} \right)$	$x < 4$ C.S. = $(-\infty; 4)$	El estudiante tiene dificultades al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas, por ejemplo: $3x - 2 = x$	<b>E3</b>

Fuente: Elaboración propia.

**Análisis a priori de la pregunta n.º 8 del cuestionario n.º 1**

**Objetivo:** Conocer las dificultades que tienen los estudiantes al hallar el conjunto solución de una inecuación.

Tabla n.º 17. Análisis a priori de la pregunta n.º 8 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 8		Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ e indicar el conjunto solución.	a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$	$\frac{6x}{6} < 1$ $x < 1$ $\therefore C.S. = (-\infty; 1)$	$\frac{3x}{11} < 1$	El estudiante tiene dificultad al realizar adición de fracciones.	<b>E3</b>
	b) $-\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$	$\frac{3x-2x+10}{6} > 3$ $x+10 > 18$ $x > 8$ $\therefore C.S. = (8; +\infty)$	$\frac{3x-2x-10}{6} > 3$ $x > 28$ $C.S. = (28; +\infty)$	El estudiante tiene dificultad al operar fracciones con signos de agrupación.	<b>E3</b>
	c) $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \geq 2(x-3)$	$\frac{3x-2x+1}{6} \geq 2x-6$ $x+1 \geq 12x-36$ $37 \geq 11x$ $11x \leq 37$ $x \leq \frac{37}{11}$ $\therefore C.S. = (-\infty; \frac{37}{11}]$	$\frac{3x-2x-1}{6} \geq 2x-6$	El estudiante tiene dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas fraccionarias y signos de agrupación.	<b>E3</b>
			$37 \geq 11x$ $x \geq \frac{37}{11}$ $\therefore C.S. = [\frac{37}{11}; +\infty)$	El estudiante no entiende que las desigualdades $37 \geq 11x$ y $11x \leq 37$ son equivalentes.	
d) $-3 \leq \frac{2x-5}{3} < 5$	$-9 \leq 2x-5 < 15$ $-4 \leq 2x < 20$ $-2 \leq x < 10$ $\therefore C.S. = [-2; 10)$	$x \geq -2 \wedge x < 10$	El estudiante llega al resultado, pero no determina el conjunto solución.	<b>E4</b>	

	e) $2(3 - x) + 2x \leq 5$	$6 - 2x + 2x \leq 5$ $6 \leq 5$ Como la desigualdad es falsa, se concluye que el C.S. = $\emptyset$	$6 \leq 5$	El estudiante llega a la desigualdad $6 \leq 5$ pero no interpreta el significado de su resultado.	
	f) $5(x + 2) > 9 + 5x$	$5x + 10 > 9 + 5x$ $10 > 9$ Como la desigualdad es verdadera, el conjunto solución será todos los números reales.	$0 > -1$ $10 > 9$	El estudiante llega a estos resultados $0 > -1 \vee 10 > 9$ , pero no interpreta sus resultados.	<b>E4</b>

Fuente: Elaboración propia



#### **4.2. Análisis a priori del cuestionario n.º 2**

En esta parte, presentamos el análisis a priori, es decir, las respuestas posibles que los estudiantes podrían dar a las preguntas del cuestionario n.º 2. Este análisis se hizo tomando como referencia la tipología de errores planteada por el autor de la tesis indicada en la tabla n.º 7. Las respuestas pueden estar influenciadas de acuerdo a los conocimientos previos que los alumnos dominan, producto de la enseñanza recibida en los años anteriores, correspondiente al segundo grado de educación secundaria, según el currículo nacional que rige para todas las instituciones públicas del Estado peruano. El cuestionario fue programado para ser desarrollado a lo más en sesenta minutos, como máximo.



### Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Conocer el dominio en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático y la resolución de inecuaciones lineales.

Tabla n.º 18. Análisis a priori de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 1	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Durante las últimas semanas, se registró bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil. El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la temperatura registrada aumentada en 5° C no es mayor que 15° C ni menor que 4° C. ¿Dentro de qué intervalo se encontrará las temperaturas registradas?	<p>Sea “<math>x</math>” la temperatura registrada en Huancavelica. A partir del enunciado tenemos lo siguiente:</p> $4 \leq x + 5 \leq 15$ $-1 \leq x \leq 10$ <p>Por lo tanto, las temperaturas registradas en Huancavelica se encontrarán en el intervalo <math>[-1;10]</math>.</p>	$x + 5 < 15 \wedge x + 5 > 4$	El estudiante no logra traducir del lenguaje literal al lenguaje algebraico. No logra entender las siguientes equivalencias: Decir que “no es menor” es equivalente a decir “es mayor igual” y decir “no es mayor” es equivalente a decir “es menor igual”.	<b>E1b</b>
	<p>Sea “<math>x</math>” la temperatura registrada en Huancavelica. A partir del enunciado tenemos lo siguiente:</p> $x + 5 \leq 15 \wedge x + 5 \geq 4$ $x \leq 10 \wedge x \geq 1$ <p>Las temperaturas están en el intervalo <math>[1;10]</math>.</p>	$x + 5 \leq 15 \wedge x + 5 \geq 4$ $x \leq 10 \wedge x \geq 1$ <p>Las temperaturas registradas son -1; 0; 2;3;4;5;6,7;8;9 y 10°C</p>	El estudiante logra traducir la parte literal al lenguaje algebraico, pero comete errores en operaciones básicas de cálculo.	<b>E3</b>
	<p>Sea “<math>x</math>” la temperatura registrada en Huancavelica. A partir del enunciado tenemos lo siguiente:</p> $x + 5 \leq 15 \wedge x + 5 \geq 4$ $x \leq 10 \wedge x \geq -1$ <p>Por lo tanto, las temperaturas registradas en Huancavelica se encontrarán en el intervalo <math>[-1;10]</math>.</p>	$x + 5 \leq 15 \wedge x + 5 \geq 4$ $x \leq 10 \wedge x \geq -1$ <p>Las temperaturas registradas son -1; 0; 2;3;4;5;6,7;8;9 y 10°C</p>	El estudiante no logra interpretar sus resultados obtenidos. Infiere que su conjunto solución son solo números enteros.	<b>E2</b>

Fuente: Elaboración propia.

## Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Conocer el dominio de la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático, resolución de inecuaciones simultáneas y la interpretación de sus respuestas.

Tabla n.º 19. Análisis a priori de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 2	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
<p>Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse con una temperatura entre 41° F y 68° F. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Celsius, sabiendo que la relación de temperaturas Fahrenheit y Celsius es <math>^{\circ}F = \frac{9}{5}^{\circ}C + 32</math> ?</p>	<p>Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos:</p> $41 < F < 68$ $41 < \frac{9}{5}C + 32 < 68$ $9 < \frac{9}{5}C < 36$ $5 < C < 20$ <p>Por lo tanto, el intervalo de temperaturas en la escala Celsius es <math>(5; 20)</math></p>	$41 \leq F \leq 68$	El estudiante interpreta mal el enunciado "... la botella se conserva con una temperatura entre 41 °F y 68 °F". La igualdad debe ser $41 < F < 68$ .	<b>E1b</b>
		$41 < F < 68$ $41 < \frac{9}{5}C + 32 < 68$ $205 < 9C + 32 < 340$	El estudiante comete el error de operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas: despejó primero el factor 5 antes que 32.	<b>E3</b>
		$9 < \frac{9}{5}C < 36$ $5 < C < 20$ $C.S. = [5; 20]$	El tipo de error también que se puede asignar es E4, porque el estudiante no aplica correctamente las propiedades de desigualdad como por ejemplo, la monotonía de la multiplicación.	<b>E4</b>
		$9 < \frac{9}{5}C < 36$ $5 < C < 20$ $C.S. = [5; 20]$	El estudiante tiene dificultad en traducir una desigualdad a intervalo.	<b>E1a</b>
		$9 < \frac{9}{5}C < 36$ $5 < C < 20$ $C.S. = \{5; 6; 7; \dots; 20\}$	El estudiante infiere que el conjunto solución	<b>E6</b>

Fuente: Elaboración propia.



### Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Conocer el dominio de traducción del problema y la interpretación de sus respuestas.

Tabla n.º 20. Análisis a priori de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 3	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15, le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20, le faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?	Sea "x" el número de sobrinos que tiene Carla. Luego, tenemos lo siguiente: $x(15) < 120 \wedge x(20) > 120$ $x < 8 \wedge x > 6$ $6 < x < 8$ Como "x" representa el número de sobrinos, solo toma un valor entero que está comprendido entre 6 y 8. Por lo tanto, Carla tiene 7 sobrinos.	$x.15 > 120 ; x.20 < 120$	El estudiante no logra interpretar los enunciados "sobra dinero" y "falta dinero". El primero significa que el gasto a realizar es menor del que se dispone y el segundo significa que el gasto a realizar es mayor del dinero que se tiene.	E1b
		$x.15 < 120 \quad x.20 > 120$ $x < 8 \quad x > 6$ $\langle 6;8 \rangle$	El estudiante no entiende que en este tipo de problemas la solución debe ser números enteros y no un intervalo. Debió de verificar su solución.	E6
			El estudiante infiere conclusiones inadecuadas, como "x" representa un número entero, la solución no debe ser un intervalo.	E2

Fuente: Elaboración propia

### Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Conocer el dominio en la traducción del lenguaje literal al lenguaje simbólico y la interpretación de sus respuestas.

Tabla N° 21. Análisis a priori de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 4	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras, ¿cuál será la cantidad máxima de	Sea "c" el número de calculadoras de S/ 50 que compra Rita Del enunciado, tenemos que $15(2c) + 50c \leq 720$ $80c \leq 720$ $c \leq 9$	$15(2c) + 50c < 720$	El estudiante no logra traducir el enunciado del lenguaje literal al lenguaje simbólico. No logra plantear la inecuación a través de inecuaciones.	E1b
		$15(2c) + 50c \leq 720$ $80c \leq 720$ $c \leq 9$	El estudiante logra plantear y resolver el problema, pero no logra interpretar sus resultados. No indica la respuesta, de	E6

calculadoras de S/ 15 que puede comprar?	Como “c” representa el número de calculadora, solo toma valores enteros menores e iguales que 9. Es decir, $c \in \{9;8; 7; 6, 5; 4;3; 2;1\}$ Como el valor máximo de “c” es 9, el número de calculadoras de S/ 15 que compró Rita es 18.	$c = \{9;8; 7; 6, 5; 4;3; 2;1\}$ $c_{m\acute{a}x} = 9$	manera correcta. Para él, la respuesta queda en $c = 9$	
--	---	---	---	--

Fuente: Elaboración propia.

### Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Evidenciar en los estudiantes el dominio de planteo de problemas a través de inecuaciones y la solución de inecuaciones simultáneas.

Tabla N° 22. Análisis a priori de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 5	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedó más de la mitad. Al día siguiente, le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos. Luego logró vender 99 relojes y le quedó menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?	Sea “x” el número de relojes comprados. Luego, tenemos lo siguiente: $x - 120 > \frac{x}{2} \wedge x - 120 + 13 - 99 < 36$ $x > 240 \quad \wedge \quad x < 242$ $240 < x < 242$ Como “x” es el número de relojes comprados, solo toma valores enteros comprendido entre 240 y 242. Es decir $x = 241$ . Por tanto, el comerciante compró 241 relojes.	$x - 120 > \frac{x}{2} \wedge \frac{x}{2} + 13 - 99 < 36$	El estudiante no logra plantear la segunda inecuación del problema. Asume que le quedó la mitad de relojes.	<b>E1b</b>
		$x - 120 > \frac{x}{2} \wedge x - 120 + 13 - 99 < 36$ $x > 240 \quad x < 242$ La cantidad de relojes que compró el comerciante se encuentran en el intervalo $\{40; 242\}$ .	El estudiante no interpreta sus resultados obtenidos. No entiende que en este tipo de problemas la solución debe ser en números enteros y no un intervalo.	<b>E6</b>

Fuente: Elaboración propia.

### Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2

**Objetivo:** Evidenciar en los estudiantes el dominio de planteo de problemas a través de inecuaciones, resolver inecuaciones simultáneas e interpretar sus respuestas.

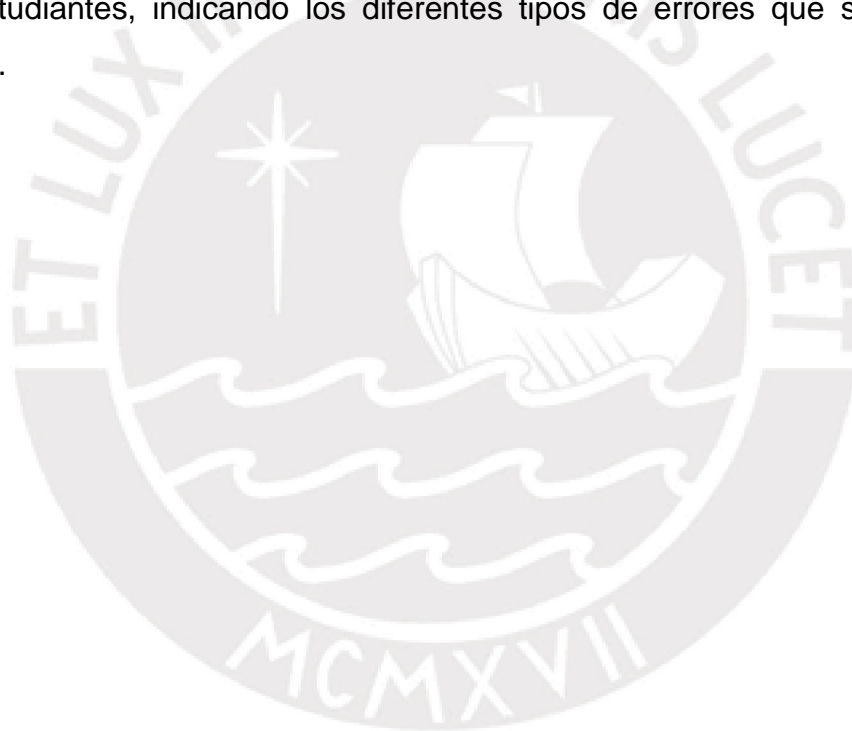
Tabla n.º 23. Análisis a priori de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 6	Respuesta correcta	Posibles respuestas erradas	Descripción del posible error	Tipo de error
Melvin obtuvo, en sus tres primeros exámenes, 13, 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor que o igual que 14, ¿cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?	Sea “ $x$ ” la cuarta nota que obtuvo Melvin en la evaluación. Luego, tenemos lo siguiente: $\frac{13+10+17+x}{4} \geq 14$ $\frac{40+x}{4} \geq 14$ $40+x \geq 56$ $x \geq 16$ Como “ $x$ ” debe tomar solo valores enteros, $x \in \{16;17;18;19; 20\}$ Por tanto, la nota mínima que Melvin debe obtener para aprobar con una nota mayor o igual a 14 es 16.	$\frac{13+10+17+x}{4} > 14$	El estudiante no logra traducir del lenguaje literal al lenguaje matemático o algebraico.	<b>E1b</b>
		$\frac{13+10+17+x}{4} \geq 14$ $40x \geq 56$	El estudiante tiene dificultades en realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas.	<b>E3</b>
		$\frac{13+10+17+x}{4} \geq 14$	El estudiante comete el error en concluir que $13+10+17+x = 40x$ , esto por un deficiente aprendizaje de conocimientos previos, en este caso operaciones con términos semejantes	<b>E5</b>
		$\frac{13+10+17+x}{4} \leq 14$ $x \leq 16$ La nota mínima que Melvin debe obtener para aprobar con una nota mayor o igual a 14 es 16.	Aparte de haber un error de planteamiento en la desigualdad, el estudiante no logra dar su respuesta final en base al resultado obtenido. En este caso, podemos ver un error de inferencia equivocada, pues si él dice que $x \leq 16$ ; el valor mínimo de “ $x$ ” sería cero.	<b>E6</b>

Fuente: Elaboración propia.

### **4.3. Análisis de los resultados del cuestionario n.º 1**

En esta parte presentamos un análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario n.º 1 a treinta y cinco estudiantes. El análisis que se presenta es de carácter cualitativo, pues interesa caracterizar y clasificar los errores frecuentes que cometen los estudiantes al resolver preguntas como las que se proponen en este cuestionario. El análisis de las producciones de los alumnos se realiza a partir de sus respuestas a las preguntas planteadas y esta información se muestra en las siguientes tablas, donde se clasifican las respuestas según la tipología de errores propuesta por el autor de la tesis, indicada en la tabla n.º 7. En cada pregunta se considera los errores más frecuentes que presentan los estudiantes. Además, se hace el análisis de las respuestas más comunes de uno o dos estudiantes, indicando los diferentes tipos de errores que se puedan presentar.



### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1

En esta pregunta, se encontraron hasta tres tipos de errores la E5, E4 y E2, que a continuación se muestra en la tabla n.º 24.

Tabla n.º 24. Resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 1		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.	a) $-8 > -1$	V porque $-8$ es mucho más grande que $-1$ . Por lo tanto, $-8 > -1$ o $-1 < -8$ .	Los estudiantes tienen dificultad en la comparación de números enteros negativos. Este contenido son conocimientos previos para estudiar las desigualdades e inecuaciones.	E5	8	22.86%
		V, porque $-8$ sí es menor que $-1$	Luego de la entrevista se confirmó que el estudiante confunde el signo mayor que " $>$ " con el signo menor que " $<$ ".	E1a	2	5.71%
	b) $3 \leq 7$	V porque 3 es parte de 7.	Los estudiantes contestaron de manera correcta, pero no justificaron sus respuestas con la siguiente propiedad de desigualdad: $a \leq b \Leftrightarrow (a = b \vee a < b)$	E4	3	8.57%
	c) $a < b$ es equivalente a $b > a$	V (sin justificación)	Los estudiantes contestaron correctamente la pregunta pero no justificaron su respuesta. Esto podría ser porque desconocen la propiedad de equivalencia: $a < b \Leftrightarrow b > a$	E4	3	8.57%
	d) Si $-x \leq 3$ entonces $x \leq -3$	F porque los signos no deben cambiar.	En las dos primeras respuestas, los estudiantes contestaron correctamente	E2	21	60%

		F porque un número negativo no puede ser menor que un número positivo.	pero justificando erróneamente, es decir, infieren conclusiones erradas. En la tercera respuesta, el estudiante justifica su respuesta con la propiedad de equivalencia que nada tiene que ver con la pregunta.			
		F porque $-x \leq 3$ debe ser equivalente a $3 \geq -x$ . Por lo tanto, la proposición es falsa.				
	e) Si $-a > -b$ entonces $a > b$	Verdadero porque le podemos quitar el signo negativo y $a$ sigue siendo mayor que $b$	En la primera respuesta, los estudiantes desconocen la propiedad $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$ . En la segunda y tercera respuesta, los estudiantes contestaron correctamente, pero justificaron su respuesta aplicando la propiedad de equivalencia, llevándolos a cometer errores.	E4	26	74.29%
		F Los signos negativos no deben cambiar.				
		Falso porque en la propiedad de equivalencia los signos no cambian.				

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 24, podemos observar lo siguiente:

- En la pregunta 1a hay un total de ocho estudiantes que, representa el 22.86% del total de estudiantes evaluados, quienes cometieron el error de tipo E5 porque los estudiantes tienen deficiencia de conocimientos previos en la comparación de números enteros. Por ejemplo, en la figura n.º 9, tenemos la respuesta de uno de los estudiantes en la cual se puede observar que el estudiante compara los números negativos como si se tratase de números positivos.

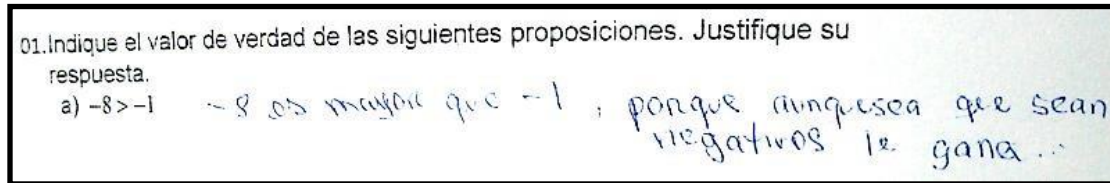


Figura n.º 9: Respuesta a la pregunta 1a del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Cuando se le entrevistó al estudiante con respecto a su respuesta de la figura n.º 1, se le preguntó de qué manera comparaba los números enteros, el estudiante manifestó que: imaginariamente ubica los números que va a comparar en la recta numérica, luego el número que está más alejado del cero es el mayor y el número que está más cerca al cero era el menor. Claro que esto le funcionaba con los enteros positivos. Y cuando comparaba números negativos, aplicaba el mismo método, llevándolo a cometer errores. La respuesta del estudiante confirma pues que no tiene los conocimientos previos de comparar números enteros clasificándolo como error de tipo E5.
- Con respecto al resultado anterior, corroboramos el análisis a priori que se hizo en que los estudiantes tienen dificultad para comparar números enteros. Coincidimos también con Radatz (1979); Abrate et al. (2006), quienes manifiestan que el error en las matemáticas se da por un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos o simplemente por la ausencia de conocimientos previos
- En la pregunta 1d hay un total de veintiún estudiantes, que representa el 60% de los estudiantes encuestados, quienes cometieron el error de tipo E2 porque los estudiantes infirieron conclusiones inadecuadas o quisieron inventar nuevas reglas. En la figura n.º 10, se puede observar que el estudiante infiere una conclusión de multiplicar por menos uno a cada lado de la desigualdad para cambiar por el opuesto de " $x$ ", como si se tratase de una igualdad sin cambiar el sentido del símbolo de la desigualdad.

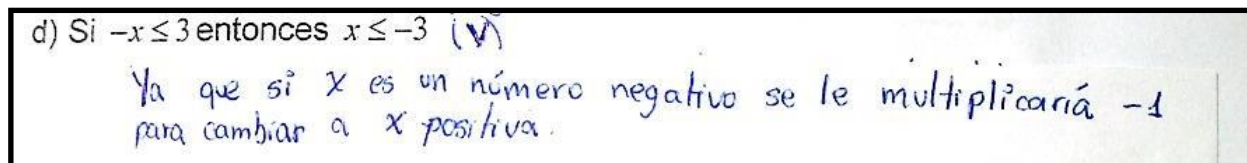


Figura n.º 10: Respuesta a la pregunta 1 d del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta n.º 1e, hay 26 estudiantes, que representa el 74.29% de los estudiantes evaluados, quienes cometieron el error de tipo E4, por desconocer la propiedad  $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a.c > b.c$  para contestar correctamente dicha pregunta. En la figura n.º 11, se muestra la respuesta de un estudiante donde al multiplicar por menos uno a cada lado de la desigualdad, no cambia el símbolo de “mayor que” a “menor que”. Se evidencia que el estudiante desconoce la propiedad  $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a.c > b.c$ .

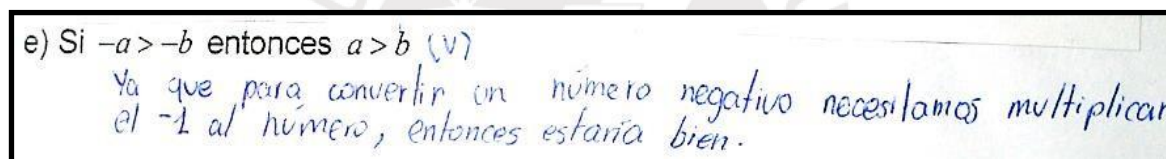


Figura n.º 11: Respuesta a la pregunta 1e del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Con respecto a la figura n.º 10 y figura n.º 11, se hizo la entrevista al estudiante sobre su respuesta. Se le hizo dos preguntas: ¿Dado:  $-5 \leq 4$ , cómo quedaría la desigualdad, si a ambos miembros se le multiplica por  $-1$ ?; ¿Dado:  $-a > -b$ , cómo quedaría la desigualdad, si a ambos miembros se le multiplica por  $-1$ ?; en ambos casos el estudiante respondió: “Si se multiplican por  $-1$  ambos lados de la desigualdad se convertiría, en una desigualdad positiva, la primera en  $+5 \leq -4$  y la segunda en  $a > b$ ”. y al preguntarle porque lo hacía de esa manera el estudiante respondió que ocurre lo mismo que en una igualdad, por ejemplo si tengo  $-x = -4$  entonces  $x = 4$  o si tengo  $-x = 5$  entonces  $x = -5$ ; este resultado confirma el análisis a priori realizada al inicio, al indicar que los estudiantes cambian de signo como en las ecuaciones, cometiendo así el error de tipo E2, por inferir conclusiones



inadecuadas. También confirma lo indicado por Bazzini (1999) citado por Borello y Lezama (2009), quien indica que hay una confusión entre conceptos de ecuación y desigualdad, entre las cuales se establecen analogías incorrectas; indicando que, para resolver desigualdades, se aplican las mismas propiedades de las ecuaciones, obstaculizando así el correcto aprendizaje de lo que son las inecuaciones.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1

Estas preguntas de verdadero o falso, evidenciaron con mayor frecuencia dos tipos de errores la E1a y E5, que a continuación se muestra en la tabla n.º 25

Tabla n.º 25. Resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 2		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Para cada enunciado, escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifique su respuesta.	a) $3 \in [1; 3 )$ ... ( )	V, 3 si pertenece porque está dentro del intervalo.	Los estudiantes no logran entender que cuando el intervalo es abierto en 3, el intervalo no incluye a 3.	E1a	15	42.86%
	b) $2 \notin \{5; 2 \}$ ...( )	F, porque la E esta tachada y ahí indica que el 2 está cerrado. Falso porque 2 está afuera de intervalo	Los estudiantes, en ambas respuestas, evidencian que no interpretan el significado del símbolo de no pertenece ( $\notin$ ).	E1a	18	51.43%
	c) $-3 \in \{4; 2 ]$ ..... ( )	F $-3$ no está dentro del intervalo porque es menor que $-4$ .	Los estudiantes no logran entender que el intervalo contiene a $-3$ ; creen que $-3$ está más a la derecha de $-4$ . No logran ubicar, correctamente, los enteros en la recta numérica. Desconocen la relación de orden.	E5	4	11.42%
	d) $4 \in [-3; +\infty)$ .. ( )	Falso, porque 4 pertenece al más infinito.	Los estudiantes tienen dificultad en la comparación de números enteros. Para justificar su respuesta, a los estudiantes se les hace difícil ubicar los números enteros en la recta numérica.	E5	3	8.58%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 25 podemos observar lo siguiente:

- En la pregunta 2a hay un total de quince estudiantes que representa el 42.86% del total de estudiantes encuestados quienes cometieron el error de tipo E1a porque los estudiantes no comprenden el significado de los símbolos de intervalo cerrado, abierto y semiabierto ( $[ ]$ ;  $\langle \rangle$ ;  $[ ]$ ;  $\rangle$ ). En la figura n.º 12 se observa la respuesta de uno de los estudiantes, donde indica que si el intervalo es abierto en 3, este número está dentro del intervalo; concluyendo que 3 pertenece al intervalo.

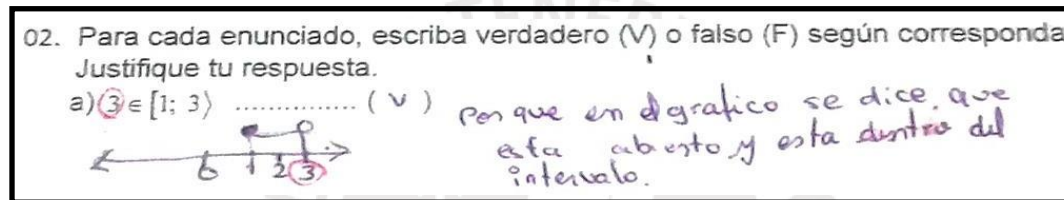


Figura n.º 12: Respuesta a la pregunta 2a del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 2b hay dieciocho estudiantes, que representa el 51.43% del total de estudiantes encuestados. En este ítem, se observó, también, que los alumnos cometieron el error de tipo E1a, porque los estudiantes no comprenden el significado del símbolo de no pertenencia ( $\notin$ ). La figura n.º 13 es una de las respuestas, donde el estudiante interpreta el símbolo de no pertenencia ( $\notin$ ) como un intervalo cerrado en 2, lo cual evidencia el desconocimiento del significado de dicho símbolo.

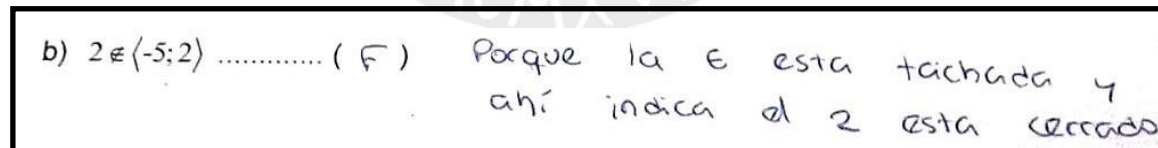


Figura n.º 13: Respuesta a la pregunta 2b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Cuando se le entrevistó al estudiante con respecto a su respuesta de la figura n° 13, se le preguntó: ¿Qué significa para Ud. el símbolo “ $\notin$ ”?, el estudiante manifestó: “la “e” tachada, significa un intervalo cerrado”. La respuesta del estudiante confirma el análisis a priori realizada, en la que indicamos que los estudiantes no entienden el significado del símbolo “ $\notin$ ”, clasificándolo como error de tipo E1a. Corroboramos esta tipología de error enunciado por Caputo y Macías (2006), Saucedo (2007), Abrate et al. (2006) quienes señalan, el error se produce cuando hay una confusión en el uso del lenguaje simbólico o a la mala interpretación del lenguaje matemático.

En la tabla n.º 26, se muestra un consolidado de la cantidad de estudiantes que presentaron respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas de las preguntas 1 y 2 del cuestionario n.º 1 que fue tomada a treinta y cinco alumnos. Esta información nos permitió tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla n.º 26. Consolidado de las preguntas n.º 1 y 2 del cuestionario n.º 1, indicando las respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas.

Preguntas		Respuestas correctas		Correctas pero mal justificadas		No contesta o no justifica		Respuestas incorrectas	
		Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
Pregunta n.º 1	a)	23	65.71	5	14.29	2	5.71	5	14.29
	b)	29	82.86	3	8.57	3	8.57	0	0.00
	c)	30	85.71	2	5.71	2	5.71	1	2.86
	d)	10	28.57	16	45.71	4	11.43	5	14.29
	e)	6	17.14	11	31.43	3	8.57	15	42.86
Pregunta n.º 2	a)	19	54.29	2	5.71	1	2.86	13	37.14
	b)	15	45.71	2	5.71	2	5.71	16	42.86
	c)	25	71.43	1	2.86	6	17.14	3	8.57
	d)	24	68.57	2	5.71	8	22.86	1	2.86

Fuente: Elaboración propia.

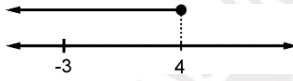
En la tabla n.º 26 se puede observar lo siguiente:

- En la pregunta n.º 1e de verdadero/falso, los estudiantes tuvieron dificultades al momento de contestar y justificar su respuesta. Solo seis estudiantes contestaron correctamente; quince estudiantes contestaron de manera incorrecta y once estudiantes contestaron bien pero justificaron mal sus respuestas; haciendo un total de veintiséis estudiantes que representa el 74.29% de los estudiantes encuestados. En esta pregunta, se evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E4 porque desconocen la propiedad  $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$ , necesaria para poder contestar y justificar, correctamente, dicha pregunta.
- En la pregunta n.º 1d, también podemos observar que cinco estudiantes contestaron incorrectamente y dieciséis estudiantes justificaron mal sus respuestas, haciendo un total de veintiún estudiantes, que representa el 60% de los encuestados. En esta pregunta, se evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E2, porque infieren conclusiones erradas.
- En la pregunta n.º 2b de verdadero/falso, los estudiantes tuvieron dificultades al momento de contestar y justificar su respuesta. Quince estudiantes contestaron correctamente, dieciséis estudiantes contestaron con error y dos justificaron mal sus respuestas; haciendo un total de dieciocho estudiantes, que representa el 51.43% de los estudiantes encuestados. En esta pregunta, se evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E1a porque los estudiantes no interpretan el significado del símbolo no pertenece ( $\notin$ ).
- En la pregunta n.º 2a, se encontró también, con mayor frecuencia, el error de tipo E1a. Allí los estudiantes no logran entender que cuando el intervalo es abierto en 3, el intervalo no incluye a 3. Esto se observó en dos estudiantes que justificaron mal sus respuestas y trece estudiantes que contestaron incorrectamente; haciendo un total de quince estudiantes, que representa el 42.86% de los estudiantes encuestados.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1

En estas preguntas de representación de intervalos, se encontraron dos tipos de errores la E5 y E1b, que a continuación se muestra en la tabla n.º 27

Tabla n.º 27. Resultados de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 1.

Pregunta n.º 3		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Dado el siguiente intervalo: $\langle -3; 4 ]$	a) Represente gráficamente		El estudiante entiende que al decir que el intervalo es abierto en $-3$ , esto se prolonga hasta el menos infinito.	E5	1	2.85%
	b) Represente usando desigualdades.	$-3 < x \geq 4$	En las tres respuestas, se puede observar que los estudiantes no logran traducir una expresión matemática (intervalo) a otra expresión matemática (desigualdad).	E1b	18	51.43%
		$-3 < x < 4$				
		$-3 < 4$				

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla n.º 27 podemos observar lo siguiente:

- En la pregunta 3b hay dieciocho estudiantes que representa el 51.43% del total, en el que se evidencia el error de tipo E1a, al no lograr relacionar el intervalo abierto con la desigualdad " $<$ " y el intervalo cerrado con la desigualdad " $\leq$ ". En la figura n.º 14, se muestra las respuestas de uno de los estudiantes donde se puede observar que la pregunta 3a contestó correctamente pero en la pregunta 3b comete el error de tipo E1b porque no logra traducir la representación de intervalos a través de desigualdades.

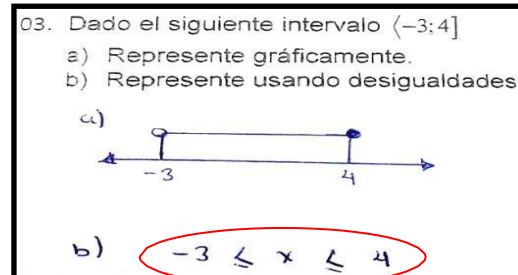


Figura n.º 14: Respuesta a la pregunta 3b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Como se puede observar en la figura anterior, el estudiante tiene dificultad en diferenciar si la desigualdad es menor cuando el intervalo es abierto y menor igual cuando el intervalo es cerrado. En la figura n.º 15, también podemos observar la respuesta de otro estudiante que contestó correctamente la pregunta 3a del cuestionario n.º 1, pero en la pregunta 3b comete también el error de tipo E1b.

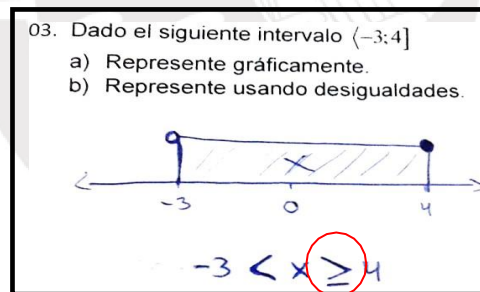



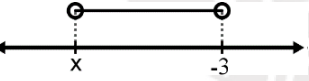
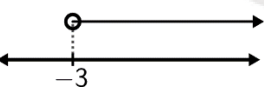
Figura n.º 15: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 3b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Como podemos observar en la figura anterior, el estudiante, a diferencia de la respuesta del primer alumno, sí relaciona el intervalo abierto con la desigualdad menor y el intervalo cerrado con la desigualdad mayor igual o menor igual; no le quedó claro de cómo se representa el intervalo a través de desigualdades, sobre todo en el sentido del signo de desigualdad.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 1

En estas preguntas de representación de intervalos, se encontraron dos tipos de errores la E5 y E1b, que a continuación se muestra en la tabla n.º 28.

Tabla n.º 28. Resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 4		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Dada la siguiente desigualdad: $x < -3$ .	a) Realice una representación a través de intervalo.	$\langle -\infty; -3 \rangle$	Los estudiantes no logran relacionar la desigualdad menor con el intervalo abierto.	<b>E1b</b>	<b>14</b>	40.00%
		$\langle x; -3 \rangle$	Los estudiantes interpretan que “ $x$ ” representa un extremo en el intervalo. En ambos casos, cometen el error de tipo E1b porque no logran traducir una expresión matemática a otra distinta.			
	b) Represente gráficamente.		La gráfica debe ser abierta en $-3$ . Los estudiantes no logran relacionar la desigualdad menor con el extremo abierto de la gráfica.	<b>E1b</b>	<b>14</b>	40.00%
			Los estudiantes consideran a “ $x$ ” como un extremo de la gráfica.			
			Los estudiantes interpretan la desigualdad con valores mayores que $-3$ . Las tres respuestas cometieron el error de tipo E1b porque no logran representar una desigualdad a través de una representación.			

Fuente: Elaboración propia.

- La tabla n.º 28, muestra que en las preguntas 4a y 4b, catorce estudiantes, que representa el 40% del total, cometen el error de tipo E1b, porque no logran traducir una desigualdad a una representación gráfica. Todo esto porque los estudiantes no logran

relacionar la desigualdad “menor que” con el intervalo abierto, esto refuerza el análisis a priori realizada anteriormente. También consideran a la variable “ $x$ ” como un punto en la representación gráfica o confunden la desigualdad mayor que “ $>$ ” con menor que “ $<$ ” y lo representa la gráfica hacia el más infinito. La figura n.º 16 muestra la respuesta a la pregunta 4a y 4b de uno de los estudiantes, donde se observa que no logra traducir a través de intervalos o representarlo gráficamente. Esto evidencia que el estudiante comete error de tipo E1b.

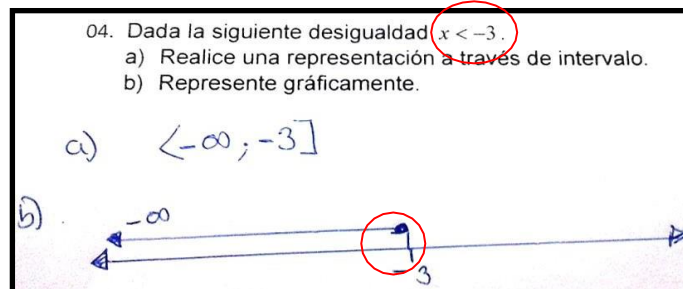


Figura n.º 16: Respuesta a la pregunta 4a y b del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- La figura n.º 17 muestra la respuesta de otro estudiante en el que se evidencia también el error de tipo E1b, al no lograr traducir la desigualdad a través de intervalo y gráficamente, también, el estudiante no solo comete el error de tipo E1b, también comete el error de tipo E1a, porque confunde el significado de la desigualdad menor con la desigualdad mayor.

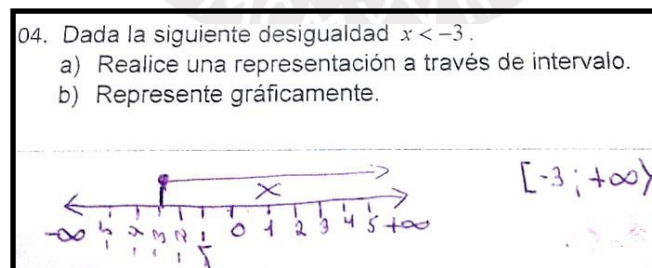


Figura n.º 17: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 4a y b del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

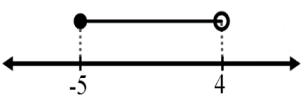


- Es evidente, tanto en la figura n.º 16 y 17, que los estudiantes no relacionan la desigualdad “menor que” con el intervalo abierto. Al realizar la entrevista al estudiante de la figura n.º 17, se hizo la siguiente pregunta: “Dado el intervalo  $\langle -\infty; 2 \rangle$  represente gráficamente”. El estudiante contestó correctamente, pero cuando se le pidió que represente ese mismo intervalo a través de desigualdad no pudo hacerlo, manifestando que esa parte no había comprendido, Luego se le pidió que volviera a contestar la pregunta 4b, su respuesta fue lo mismo que en la figura n.º 17. Estos resultados corroboran lo afirmado por Maroto (2013), Borello y Lezama (2009), Socas (1997) y Saucedo (2007), donde los estudiantes confunde los signos mayor que “>” con menor que “<” o no entienden el lenguaje matemático.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1

En estas preguntas de representación de intervalos, se encontraron un solo tipo de error la E1b, que a continuación se muestra en la tabla n.º 29

Tabla n.º 29. Resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 5		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Dada la gráfica. 	a) Represente a través de intervalo.	$[-5; 4)$	Solo un estudiante dejó en blanco la pregunta y los demás contestaron correctamente.	<b>Ninguno</b>	0	0 %
	b) Represente por desigualdades.	$-5 < x < 4$	En las tres primeras respuestas los estudiantes no logran relacionar el extremo cerrado del intervalo con la desigualdad “menor o igual” y en la cuarta y quinta respuesta los estudiantes no lograron traducir a través de desigualdades.	<b>E1b</b>	16	45,71%
		$-5 > x > 4$				
		$-5 < 4$				
		$-5 \leq 4$				

Fuente: Elaboración propia.

- La tabla n.º 29, muestra que en la pregunta 5a, cuando al estudiante se la da una gráfica lo puede representar a través de intervalo, pero para la pregunta 4b, dieciséis estudiantes que representa el 40% de los estudiantes encuestados, cometen el error de tipo E1b porque no logran relacionar o traducir los extremos de la gráfica a través de desigualdades. En la figura n.º 18 se muestra la respuesta de un estudiante donde podemos observar que la pregunta 5a es contestada correctamente pero en la pregunta 5b comete el error de tipo E1b, porque se evidencia que tienen la dificultad de traducir la representación gráfica de un intervalo a través de desigualdades.

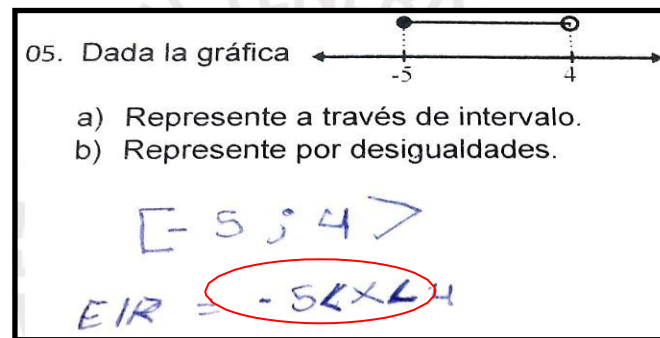


Figura n.º 18: Respuesta a la pregunta 5b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la figura anterior, observamos que el estudiante sí puede representar correctamente un intervalo que está en su forma gráfica pero tiene dificultad en representarlo a través de desigualdades, el estudiante no logra relacionar el extremo cerrado de la gráfica con la desigualdad menor. A continuación en la figura n.º 19, presentamos la respuesta de otro estudiante que comete también el error de tipo E1b, al no lograr representar la gráfica a través de desigualdades, se limita a solo comparar los números que están a los extremos de la gráfica del intervalo, este error se observa en la respuesta de la pregunta 5b del cuestionario n.º 1.

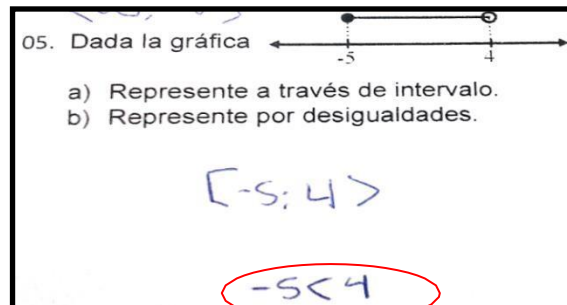


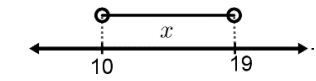
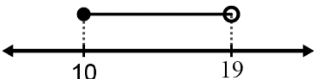
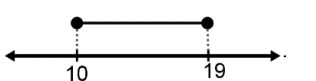
Figura n.º 19: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 5b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1

En esta pregunta de traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático, se encontraron el error de tipo E1b, con mayor frecuencia a continuación se muestra en la tabla n.º 31

Tabla n.º 30. Resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1

Pregunta n.º 6	Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
La edad de los adolescentes se podría definir como de diez años o más y menores de diecinueve años. Represente las edades de los adolescentes usando intervalos, desigualdades y gráficamente.	Intervalos:	En esta pregunta, tenemos tres respuestas diferentes, en las cuales los estudiantes no lograron interpretar, a través de intervalos, el enunciado del problema.	E1b	15	42,86 %
	$\langle 10;9 \rangle$				
	$[10;19]$				
	Desigualdades:	Los estudiantes respondieron de las cuatro formas diferentes, evidenciándose la dificultad en traducir el enunciado a través de desigualdades.	E1b	18	51,43%
	$x > 10$ y $x < 19$				
	$10 > x < 19$				
	$10 < x < 19$				
	$10 \leq 19$				

	Gráficamente:	En las tres respuestas diferentes que dieron los estudiantes, se puede evidenciar que no logran traducir del lenguaje verbal a la representación gráfica.	E1b	15	42,86%
					
					
					

Fuente: Elaboración propia.

- En la tabla n.º 30, mostramos que los estudiantes cometen el error de tipo E1b en la pregunta 6 porque no logran traducir del lenguaje verbal a la representación gráfica, a la representación por intervalos y por desigualdades. La figura n.º 20 muestra una de las respuestas en la cual se observa la dificultad que tiene el estudiante en traducir el enunciado específicamente la parte que dice "...10 años o más y menores de 19 años" a través de la desigualdad  $10 \leq x < 19$  o el intervalo  $[10;19)$ , siendo este el error de tipo E1b. Además, se puede observar que su representación por intervalos, difiere de su representación gráfica y representación por desigualdades, evidenciándose, nuevamente, el error de tipo E1b.

06. La edad de los adolescentes se podría definir como de 10 años o más y menores de 19 años. Represente las edades de los adolescentes usando intervalos, desigualdades y gráficamente.

$10 < x < 19$       es:  $[10; 19]$

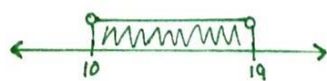


Figura n.º 20: Respuesta a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la entrevista al estudiante con respecto a la figura n.º 20, se le hizo la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los números enteros que son como de 5 o más y menores de 12?, el estudiante contestó correctamente, luego se le pidió que ese conjunto de números lo represente a través de desigualdades, que también lo hizo. Y cuando se le pidió que representase el enunciado del problema de la figura 20, el estudiante corrigió su respuesta que había realizado en el cuestionario, manifestando que se había confundido al momento de dar su respuesta.
- La figura n.º 21 es la respuesta de otro estudiante a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1, allí se evidencia también el error de tipo E1b, no logra traducir el enunciado correctamente, su primera respuesta hace que cometa errores en las siguientes. Además, se observa que su representación por intervalo y su representación por desigualdad no representan lo mismo, evidenciándose que el estudiante tiene dificultad en de traducir una expresión matemática a otra.

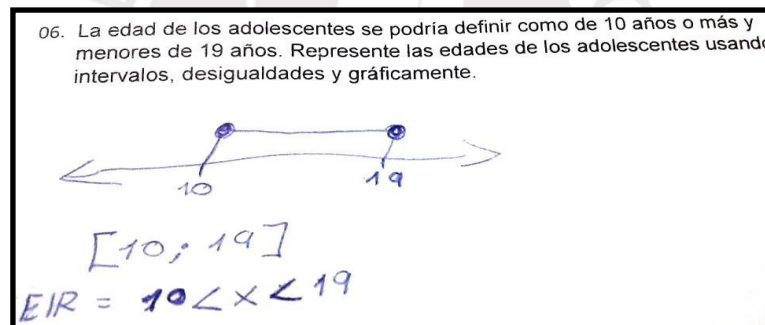


Figura n.º 21: Respuesta de otro estudiante a la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

Los resultados de las figuras n.º 20 y 21, confirman el análisis a priori hecha en la tabla n.º 15, en el que se menciona que los estudiantes cometen errores al no lograr traducir un enunciado a través de intervalos o desigualdades.

A continuación, presentamos la tabla n.º 31, donde mostramos un consolidado de la cantidad de estudiantes cuyas con repuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas de las preguntas 3, 4, 5 y 6 del cuestionario n.º1, que fue tomado a treinta y cinco alumnos. Esta información nos permitirá tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla N° 31. Consolidado de respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas al cuestionario n.º 1

Preguntas		Respuestas correctas		No contestadas		Respuestas incorrectas	
		Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
Pregunta 3	a)	33	94.29	1	2.86	1	2.86
	b)	15	42.86	2	5.71	18	51.43
Pregunta 4	a)	19	54.29	2	5.71	14	40.00
	b)	20	57.14	1	2.86	14	40.00
Pregunta 5	a)	34	97.14	1	2.86	0	0.00
	b)	19	54.29	1	2.86	16	45.71
Pregunta 6	a)	17	48.57	3	8.57	15	42.86
	b)	14	40.00	3	8.57	18	51,43
	c)	17	48.57	3	8.57	15	42.86

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla n.º 31 se puede observar los siguientes:

- En la pregunta n.º 3, los estudiantes tuvieron mayor dificultad en responder el ítem “b”, dieciocho estudiantes, que representa el 51.43%, contestaron de manera incorrecta. En esta pregunta, se evidencia el error de tipo E1b porque los estudiantes no logran traducir una expresión matemática (intervalo) a otra expresión matemática (desigualdad).

- De la misma manera, en la pregunta n.º 6b, 18 estudiantes, que representa el 51.43% de los estudiantes encuestados, contestaron de manera incorrecta. Allí los estudiantes no lograron representar el enunciado a través de desigualdades, evidenciándose, el error de tipo E1b. Con este resultado coincidimos con las tipologías planteadas por todos los autores del marco, excepto con Brouseau (2001). Dichos autores caracterizan este error como: error en la comprensión y traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático, para nosotros este error es tipo E1b, porque no logran expresar el enunciado a través de una representación gráfica, a través de intervalos y por desigualdades.
- En las preguntas 3; 4; 5 y 6 los errores que cometieron los estudiantes con mayor frecuencia fue al momento de representar los intervalos a través de desigualdades, evidenciándose, el error de tipo E1b.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1

En esta pregunta de resolución de inecuaciones, se encontraron los errores de tipo E1a, E6, E4 y E3. A continuación se muestra en la tabla n.º 32

Tabla n.º 32. Resultados de la pregunta n.º 7 del cuestionario n.º 1.

Pregunta n.º 7		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ , justificando los pasos realizados. Interprete la solución obtenida.	a) $8 \leq 2x$	$4 \leq x$ $C.S. = \{4, 5, 6, \dots\}$	Los estudiantes no logran traducir la desigualdad e infieren que el conjunto solución es solo números enteros.	E2	4	11.43
		$4 \leq x$ $C.S. = \langle -\infty; 4 ]$	Los estudiantes no logran expresar la desigualdad a través de intervalo.	E1a	10	28.57
		$4 \leq x$ $C.S. = \langle -\infty; 4 ]$	Los estudiantes no verificaron su respuesta, al no hacerlo no se dieron cuenta que su respuesta es incorrecta.	E6	8	22.86

		$8 \leq 2x$ $4 \leq x$ $x \leq 4$	El estudiante, al obtener $4 \leq x$ , hace el intercambio de lados a $x \leq 4$ , pero se olvida de cambiar el sentido de la desigualdad. No aplica correctamente la propiedad de equivalencia.	<b>E4</b>	6	17.14
		$8 \leq 2x$ $4 \leq x$ $x \geq -4$	Los estudiantes, al obtener $4 \leq x$ , hacen el intercambio de los lados de la desigualdad, cambia también el sentido de la desigualdad y comete el error al cambiarle el signo al número 4, lo cual es incorrecto.			
	b) $-5x < 30$	$-5x < 30$ $x > -6$	Los estudiantes llegan al resultado correcto pero no lograron determinar el conjunto solución.	<b>E1a</b>	4	11.43
		$-5x < 30$ $x < -6$	Los estudiantes despejaron "x" como si se tratase de una ecuación cometiendo el error de no cambiar la dirección de la desigualdad.	<b>E4</b>	11	25.71
		$-5x < 30$ $x < -6$ <i>C.S.</i> = $(-\infty; -6)$	Los estudiantes al dar su conjunto solución, no verificaron su respuesta, de haberlo hecho, tal vez hubieran evitado el error en la solución.	<b>E6</b>	7	20.00
		$-5x < 30$ $-5x + 5 < 30 + 5$ $x < 35$	Los estudiantes cometieron el error por no aplicar correctamente las propiedades de desigualdad. En vez de dividir ambos lados de la desigualdad por $-5$ , los estudiantes lo sumaron.	<b>E4</b>	6	17.14
		$-5x < 30$ $-5x + 5 < 30 + 5$ $x < 35$	En esa misma respuesta, se puede observar que los estudiantes cometieron el error en las operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas al obtener $-5x + 5 = x$ .	<b>E3</b>	2	5.71
			Los estudiantes realizan la siguiente operación $-5x + 5 = x$ , porque tienen un deficiente aprendizaje en conocimientos previos de operaciones con términos semejantes.	<b>E5</b>	6	17.14



	c) $26 \geq 30 - 8x$	$-4 \geq -8x$ $0, 5 \leq x$ $x \geq 0.5$	Los estudiantes llegan al resultado correcto, pero no lograron dar el conjunto solución $[0.5; +\infty)$ . No interpretan sus resultados obtenidos.	<b>E1a</b>	<b>5</b>	14.29
		$30 - 8x \leq 26$ $8x \leq 56$ $x \leq 7$	Los estudiantes, en la primera parte, aplican bien la propiedad; luego, al momento de despejar lo hace como si fuese ecuaciones, pensando que 30 es negativo y lo pasan al otro lado a sumar. Evidenciándose, así, que los estudiantes tienen problemas en operaciones básicas de cálculo.	<b>E3</b>	<b>15</b>	42.86
		$26 \geq 30 - 8x$ $26 \leq 22x$ $\frac{26}{22} \leq x$	El estudiante comete el error de cálculo básico por el deficiente aprendizaje de conocimientos previos en la operación de términos semejantes.	<b>E5</b>	<b>6</b>	17,14
	d) $-12 < 3x + 6 \leq 18$	$-6 < 3x \leq 12$ $-6 < x \leq 4$	Los estudiantes contestaron correctamente, pero no lograron dar el conjunto solución $\langle -6; 4 \rangle$ . No interpretan la desigualdad obtenida.	<b>E1a</b>	<b>3</b>	8.57
		$-12 < 3x \leq 18 - 6$ $-12 < 3x \leq 12$ $-4 < x \leq 4$	Como se puede observar, los estudiantes cometen el error porque no tiene conocimiento de propiedades de desigualdades simultáneas al trabajar solamente dos lados. En estos casos, el centro y el lado derecho o el centro y el lado izquierdo.	<b>E4</b>	<b>13</b>	37.14
		$-12 + 12 < 3x + 6 + 12 \leq 18$ $3x + 18 \leq 18$ $x \leq 0$				
	e) $3x - 2 < 5 - x$	$4x < 7$ $x < \frac{7}{4}$	Los estudiantes contestaron correctamente, pero no lograron dar el conjunto solución $\langle -\infty; \frac{7}{4} \rangle$ .	<b>E1a</b>	<b>13</b>	37.14

		$3x - 2 - x < 5 - x - x$ $2x - 2 < 5 - 0$ $x < \frac{7}{2}$	Los estudiantes trabajaron como si fueran ecuaciones, al despejar "x" cometieron el error de restar a ambos miembros el valor de "x". En esa misma respuesta, también se puede observar que comete el error en una operación básica de cálculo al concluir que $-x - x = 0$ .	<b>E3</b>	<b>5</b>	14.29
--	--	---	---	-----------	----------	-------

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 32 podemos observar lo siguiente:

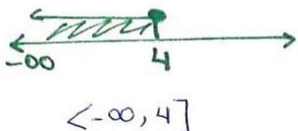
- En la pregunta 7 a se encontró hasta cuatro tipos de errores: La E2 con 4 estudiantes, que representa el 11,43%, la E1a con diez estudiantes, que representa el 28.57%, la E4 con seis estudiantes que representa el 17.14%, la E6 con ocho estudiantes que representa el 22.86 % del total de estudiantes encuestados. En la figura n.º 22, se muestra la respuesta de uno de los estudiantes donde se observa que al dividir ambos miembros de la desigualdad por 2, hace el intercambio de los miembros sin cambiar la dirección de la desigualdad, no aplica correctamente la propiedad de equivalencia, cometiéndose así el error de tipo E4. En la misma figura n.º 22 observamos que el estudiante al no comprobar su respuesta, no se da cuenta del error cometido, de haberlo hecho, hubiera corregido talvez su respuesta, este error es de tipo E6.

07. Resuelva las siguientes inecuaciones en  $\mathbb{R}$ , justificando los pasos realizados. Interprete la solución obtenida.

a)  $\frac{8}{2} \leq \frac{2x}{2}$

$4 \leq x$

$x \leq 4$



$<-\infty, 4]$

Figura n.º 22: Respuesta a la pregunta 7a del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Con respecto a la figura n.º 22, cuando se entrevistó al estudiante sobre su respuesta, se le hizo la siguiente pregunta: Si  $2 < 5$ , podríamos escribir entonces  $5 > 2$ : si o no ¿Por qué?, el estudiante respondió que sí, porque el signo de desigualdad cambia con los números, tendrá el mismo valor o significado, y cuando se le preguntó por la propiedad de equivalencia, el estudiante contestó que no conocía esa propiedad, es decir el estudiante resuelve de manera mecánica sin saber que propiedad está aplicando. De esa manera confirmamos lo dicho por Vrancken et al. (2010), que los errores aparecen cuando se aplican de manera inadecuada propiedades de desigualdad, en este caso la propiedad de equivalencia ( $x < a \Leftrightarrow a > x$ ). También con esto corroboramos las tipologías de errores planteadas por Esteley y Villareal (1990), Caputo y Macías (2006) y Saucedo (2007), quienes señalan que los estudiantes cometen errores por el empleo o uso incorrecto de propiedades y fórmulas.
- En la pregunta 7b se encontró hasta cinco tipologías de errores: la E1a con cuatro estudiantes, que representa el 11.43%; la E4 con once estudiantes, que representa el 25.71%, dentro de estos once respuestas habían siete estudiantes que evidenciaron el error de tipo E6; el error de tipo E4 con seis estudiantes que representa el 17.14%; El error de tipo E3 con dos estudiantes que representa el 7.71% y finalmente el error de tipo E5 que representa el 17.14% de los encuestados. En la figura n.º 23 mostramos las respuestas de dos estudiantes donde se observa que, en vez de dividir ambos miembros de la desigualdad por  $-5$ , los estudiantes suma  $+5$ ; evidenciándose que no aplica, correctamente, las propiedades de desigualdad esto corresponde al error de tipo E4, en estos mismos resultados, se observa el error de operaciones de cálculo básico con expresiones algebraicas, error de tipo E3, porque el alumno intentó despejar la variable “ $x$ ” sumando o restando 5 y concluye que  $-5x+5=x$  o  $-5x-5=x$ .

Handwritten work for two students:

Left student: b)  $-5x < 30$   
 $+5$   $+5$   
 $-5x < 35$   
 $x < 35$

Right student: b)  $-5x < 30$   
 $-5$   $-5$   
 $-5x < 25$   
 $x < 25$

Figura n.º 23: Respuesta a la pregunta 7 b del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 7c, se encontró dos tipos de errores: la E1a con cinco estudiantes que representa el 14.29%, y la E3 con quince estudiantes, que representa el 42.86% de los estudiantes encuestados. En la figura n.º 24, se muestra la respuesta de uno de los estudiantes donde se evidencia el error de tipo E3. Se observa que al momento de despejar “ x ”, asume que 30 es negativo, pasando al otro miembro a sumar.

c)  $26 \geq 30 - 8x$   
 $26 + 30 \geq 8x$   
 $\frac{56}{8} \geq x$   
 $7 \geq x$   
 $x \leq 7$

Number line:  $-\infty$  to  $+\infty$  with a point at 7 and an arrow pointing left.

$\{x/x \in \mathbb{R}; x \leq 7\}$

Figura n.º 24: Respuesta a la pregunta 7c del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la figura anterior, el estudiante resolvió la inecuación como si se tratase una ecuación. Su error ha sido asumir que el término 30 es negativo, fue un error de cálculo básico en operaciones con expresiones algebraicas. En la figura n.º 25, mostramos, también, la respuesta de otro estudiante a la pregunta 7c, donde se observa el error de cálculo básico con expresiones algebraicas ( $30 - 22x = 8x$ ).

c)  $26 \geq 30 - 8x$   
 $26 \geq 22x$   
 $\frac{26}{22} \geq x$   
 $4 \geq x$

Figura n.º 25: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 7 c del cuestionario n.º 01  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la entrevista al estudiante sobre su respuesta que da en la figura n.º 25, se hizo las siguientes preguntas: ¿cómo reduces las expresiones:  $3x + 4x$ ;  $5x + 8 + 4x + 2$  y  $30 - 8x$ ? Sus respuestas fueron  $7x$ ;  $19x$  y  $22x$  respectivamente. La primera respondió correctamente, pero la segunda y tercera incorrecta, y cuando se le preguntó ¿por qué realizaba la operación de esa manera?. El estudiante respondió que simplemente se suma o resta y que él entendió así. Luego se le preguntó: ¿Qué son términos semejantes?, respondió que no sabían lo que significaba. La respuesta del estudiante nos indica que la razón del porqué comete este tipo de error es porque no tiene los conocimientos previos de operaciones con términos semejantes, clasificándolo entonces como error de tipo E5, coincidiendo con el análisis a priori y con la clasificación de errores realizadas por: Radatz (1979), Socas (1997), Esteley y Caputo y Macías (2006) y Abrate et al. (2006), quienes indican que los estudiantes cometen errores por el deficiente aprendizaje en conocimientos previos.
- En la pregunta 7d, se encontró tres estudiantes que cometieron el error de tipo E1a, que representa el 8.57% del total de estudiantes encuestados, y trece estudiantes con errores de tipo E4, que representa el 37.14%. En la figura n.º 26, presentamos la respuesta de uno de los estudiantes, donde se observa que aplica bien la propiedad al sumar 12 a todos los miembros de la desigualdad, pero al obtener cero en el lado izquierdo continúa trabajando solo con la parte del centro y el lado derecho de la desigualdad, llevándolo a cometer el error de tipo E4 por emplear incorrectamente las propiedades de desigualdad.

$$d) -12 < 3x + 6 \leq 18$$

$$3x + 6 \leq 30$$

$$3x \leq 30 - 6$$

$$3x \leq 24$$

$$x \leq 8$$

$$(-\infty; 4]$$

Figura n.º 26: Respuesta a la pregunta 7d del cuestionario n.º 01  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Presentamos, también, la figura n.º 27, donde se muestra la respuesta de otro estudiante a la pregunta 7b. Allí se puede observar que el estudiante aplica la propiedad solo a la parte central y lado derecho de la inecuación simultánea; luego aplica la propiedad sumando 12 solo al lado izquierdo y derecho de la inecuación; quedándose, al final, con la parte central y lado derecho de la inecuación simultánea.

d)  $-12 < 3x + 6 \leq 18$   
 $3x \leq 12$   
 $3x = 24$   
 $x = \frac{24}{3}$   
 $x \leq 8$

$(-\infty, 8]$

Figura n.º 27: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 7d del cuestionario n.º 01  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 7e, se detectó trece estudiantes con errores de tipo E1a, que representa el 37.14% de los estudiantes, y cinco estudiantes con errores de tipo E3, que representa el 14.29%. En la figura n.º 22, mostramos la respuesta de uno de los estudiantes, donde se observa la correcta solución de la inecuación; pero, al momento de dar el conjunto solución a través de intervalos, comete el error de tipo E1a porque no interpretó, correctamente, la desigualdad obtenida. Confunde la desigualdad “menor que” con “mayor que”.

e)  $3x - 2 < 5 - x$   
 $3x + x < 5 + 2$   
 $4x < 7$   
 $x < \frac{7}{4}$

$CS = \left( \frac{7}{4} ; +\infty \right)$

Figura n.º 28: Respuesta a la pregunta 7e del cuestionario n.º 1  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Al preguntarle sobre su respuesta al estudiante de la figura n° 28 este respondió, que su respuesta si estaba correcta que “x” toma valores mayores que  $\frac{7}{4}$  y que en ambos extremos de los intervalos son abiertos. Al respecto podríamos inferir que el estudiante confunde el símbolos de menor que “<”, con el símbolo mayor que “>”, la cual coincidimos con Maroto (2013); quien señala que los estudiantes de nivel secundario presentan confusiones de los símbolos “<” o “>”.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 8 del cuestionario n.º 1

En esta pregunta de resolución de inecuaciones, se encontraron el error de tipo E1a, E3 y E4, con mayor frecuencia a continuación se muestra en la tabla n° 33.

Tabla n.º 33. Resultados de la pregunta 8 del cuestionario n.º 1.

Pregunta n.º 8		Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ .	a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$	$\frac{3x + 2x + x}{6} < 1$ $x < 1$	Los estudiantes lograron despejar, correctamente, la variable “x”, pero no determinaron el conjunto solución $\{x < 1\}$ .	E1a	7	20
		$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 2$ $x + x + x < 36$ $x < 12$	Los estudiantes tuvieron dificultad en realizar operaciones básicas de suma de expresiones fraccionarias.	E3	2	5.71
	b) $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$	$\frac{3x - 2x - 10}{6} > 3$ $x - 10 > 18$ $x > 28$	Los estudiantes tienen dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas y signos de agrupación. Realizan la diferencia de fracciones sin cambiar de signo al factor 10, arrastrando ese error hasta el final.	E3	11	31.43

c) $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} > 2(x-3)$	$\frac{3x-2x-1}{6} \geq 2x-3$ $x-1 \geq 12x-18$	Los estudiantes tienen dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas y signos de agrupación. Realizan la diferencia de fracciones sin cambiar de signo al factor 1.	E3	2	20
	$2x-12x-6 \geq 2x-6$ $10x-6 \geq 2x-6$ $8x \geq 0$ $x \geq 0$	Los estudiantes cometieron el error de multiplicar los numeradores de cada factor por sus denominadores respectivos.		5	
d) $-3 \leq \frac{2x-5}{3} < 5$	$-2 \leq x < 10$	Los estudiantes despejan la variable "x" correctamente, pero no indican el conjunto solución, evidenciándose, así, que no logran traducir la desigualdad simultánea a través de intervalos.	E1a	4	11.42
	$-9 \leq 2x-5 < 5$ $14 \leq 2x < 5$ $14 \leq x < 4$	Los estudiantes resuelven la inecuación simultánea trabajando solo con dos miembros de la desigualdad, el lado izquierdo con el centro, el lado derecho con el centro o entre el lado izquierdo y derecho; Evidenciándose que no tienen conocimiento de propiedades de desigualdades.	E4	5	14.29
	$-9 \leq 2x-5 < 15$ $-9 \leq 2x < 20$ $-9 < x < 10$				
e) $2(3-x) + 2x \leq 5$	$6 < 5$	Los estudiantes llegan a la desigualdad $6 < 5$ , pero no interpretan dicho resultado y no logran dar con el conjunto solución.	E3	2	5.71
	$6-2x+2x \leq 5$ $4x \leq 11$ $x \leq \frac{11}{4}$	Se puede observar que los estudiantes, al querer despejar la variable "x" como en las ecuaciones, cometen errores en el cálculo de operaciones básicas de expresiones algebraicas.	E4	14	40.00
	$10 > 9$	Los estudiantes llegan a la desigualdad $10 > 9$ , pero no interpretan dicho resultado ni indican el conjunto solución.	E4	2	5.71



	f) $5(x + 2) > 9 + 5x$	$5x + 10 > 9 + 5x$ $5x - 5x > 9 - 10$ $x < -1$	Los estudiantes resuelven la inecuación como una ecuación, pasando términos de un miembro a otro; luego cometen el error en una operación de cálculo básico con expresiones algebraicas como $5x - 5x = x$ .	<b>E3</b>	<b>6</b>	<b>17.14</b>
--	------------------------	--	--	-----------	----------	--------------

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 33 podemos observar lo siguiente:

- En la pregunta 8a se encontró dos tipologías de errores E1a y E3, siendo el de mayor frecuencia el error de tipo E1a, donde los estudiantes logran despejar la variable “ x ” pero no indican el conjunto solución de la inecuación. En la figura n.º 29, se muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde resuelve correctamente la inecuación pero no logra concretar el conjunto solución de la inecuación.

08. Resuelva las siguientes inecuaciones en  $\mathbb{R}$

a)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$

MCM

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ -3 & 3 \\ 6 & 6 \end{array} \cdot 6$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{1x}{6} < 1$$

$$\frac{6x}{6} < 1$$

$$6x < 1 \cdot 6$$

$$x < \frac{6}{6}$$

$$x < 1$$

Figura n.º 29: Respuestas a la pregunta 8a del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Cuando se le entrevistó al estudiante, sobre, el por qué no había indicado el conjunto solución, manifiesta que no había leído bien la pregunta, que decía resolver en  $\mathbb{R}$  y cuando se le preguntó que entendía por resolver una inecuación, respondió que es lo que

él había hecho en la figura n° 29. Luego se le pidió indicar el conjunto solución de su respuesta, el cual contestó correctamente. De acuerdo a la entrevista lo único que no estaba claro para el estudiante fue la palabra “resolver”. Este tipo de error de comprensión de la pregunta no estuvo contemplado en la categorización de tipología de errores para esta investigación.

- Presentamos también la figura n.º 30, en la que mostramos la respuesta de otro estudiante a la pregunta 8a. Allí podemos evidenciar el error de tipo E3 porque tienen dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas fraccionarias. El estudiante intenta resolver la inecuación como si se tratase de una ecuación, pero aun así no tiene ese conocimiento previo de resolver ecuaciones o realizar un cálculo básico de operación con fracciones algebraicas.

08. Resuelva las siguientes inecuaciones en  $\mathbb{R}$

a  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 2$

$x + x + \frac{x}{6} < 6$

$\frac{3x}{3} < \frac{36}{3}$

$x < 12$

Figura n.º 30: Respuestas de otro estudiante a la pregunta 8a del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En las preguntas 8b se encontró once estudiantes, que representa el 31.43% del total de alumnos encuestados, quienes cometieron el error tipo E3. Aquí podemos evidenciar que los estudiantes tienen dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas y signos de agrupación. La figura n.º 31 muestra dos respuestas de los estudiantes, donde se evidencia que los estudiantes tienen la dificultad en las operaciones básicas que involucran signos de agrupación.

$b) \frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$ <p>HCMV</p> $\frac{3x - 2x - 10}{6} > 3 \cdot 6$ $1x - 5 > 18$ $x > 18 + 5$ $x > 23$	$b) \frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$ $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$ $3(x) - 2(x-5) > 3 \cdot 2 \cdot 3$ $3x - 2x - 10 > 18$ $x - 10 > 18 + 10$ $x > 28$
---	--

Figura n.º 31: Respuestas a la pregunta 8b del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- Con respecto a la respuesta de la figura n.º 31, se hizo la entrevista al estudiante, primero se le hizo las siguientes pregunta: ¿A qué es igual  $2(x - 3)$ ?; ¿A qué es igual  $-4(x - 5)$ ?, sus respuestas fueron  $2x - 6$  y  $-4x - 20$  respectivamente, la primera contestó correctamente pero la segunda lo hizo con error en el signo. Este resultado refuerza la tipología de error tipo E3, que es, error en el procedimiento o cálculo elemental, coincidiendo también con los autores analizados en el marco teórico excepto con Radatz (1979), quien no considera este tipo de error.
- En las preguntas 8c, se encontró también el error de tipo E3, En un 20%, aquí se puede evidenciar que los estudiantes tienen dificultad al realizar operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas y signos de agrupación. En la figura N° 32 mostramos la respuesta de uno de los estudiantes, donde podemos observar que tiene dificultad en realizar operaciones básicas de cálculo que involucran signos de agrupación.

$$c) \frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \geq 2(x-3)$$

$$6x - 4x - 2 \geq 2x - 6$$

$$2x - 2x \geq -6 + 2$$

$$x \geq -4$$

A number line graph shows a solid dot at -4 and a shaded region extending to the right, representing the solution set  $x \geq -4$ . The solution set is written as  $CS = [-4; \infty[$ .

Figura n.º 32: Respuestas a la pregunta 8c del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la figura n.º 33, también presentamos la respuesta de otro estudiante a la pregunta 8c. Allí se observa tres errores: el primero es que multiplica el denominador con el numerador al sumar fracciones, concluyendo que  $2x - 12x = 10x$  y el signo menos no hace afectar cuando suma fracciones. Con ello también se evidencia el error de tipo E3, porque el estudiante tiene dificultad en operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas fraccionarias y signos de agrupación.

$$c) \frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \geq 2(x-3)$$

$$2x - 12x - 6 \geq 2x - 6$$

$$10x - 6 \geq 2x - 6$$

$$8x \geq 0$$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

The student's work shows several errors: multiplying the denominator by the numerator in the first step, incorrectly handling the minus sign, and reaching a final solution of  $x \geq 0$ .

Figura n.º 33: Respuestas de otro estudiante a la pregunta 8c del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 8d, se encontró cuatro estudiantes, que representa el 11.42% de los estudiantes encuestados, quienes cometen el error de tipo E1a, y cinco estudiantes que representa el 14.29%, quienes cometen el error de tipo E4. En la figura n.º 34, mostramos la respuesta de dos estudiantes. Allí podemos observar que en una inecuación simultánea solo trabaja con dos miembros, al

momento de despejar el denominador 3 y al momento de despejar -5 y al momento de despejar 2, evidenciándose, así, el error de tipo E4.

Figura n.º 34: Respuestas a la pregunta 8d del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 8e, se encontró dos estudiantes que cometieron el error de tipo E3 y catorce estudiantes que representa el 40% del total de encuestados, quienes cometieron el error de tipo E4. En la figura n.º 35, se muestra dos respuestas de la pregunta 8e. Allí se observa que los estudiantes cometen errores de operaciones básicas de adición de expresiones algebraicas. Consideran, por ejemplo: el signo de 6 es negativo y lo pasa a sumar al otro miembro, luego en el primer miembro se quedan con  $-2x + 2x = x$ . A partir de estos errores, sus respuestas son incorrectas, evidenciándose, así, el error de tipo E3.

Figura n.º 35: Respuestas a la pregunta 8e del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta 8f, se encontró dos estudiantes que cometieron el error de tipo E4 y seis estudiantes que representa el 17.14% de los estudiantes encuestados cometieron el error de tipo E3. En la figura n.º 36 se muestra dos respuestas de los estudiantes en el que se evidencia el error de tipo E3 por concluir en una operación básica que  $5x - 5x = x$ . En la segunda respuesta, el estudiante logró reducir, correctamente, la inecuación llegando a la desigualdad  $10 > 9$ , pero no logra interpretar dicha respuesta para indicar el conjunto solución; se evidencia, así, el error de tipo E4.

$\begin{aligned} f) \quad & 5(x+2) > 9 + 5x \\ & 5x + 10 > 9 + 5x \\ & 5x - 5x > 10 - 9 \\ & x > 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} f) \quad & 5(x+2) > 9 + 5x \\ & 5x + 10 > 9 + 5x \\ & 10 > 9 \end{aligned}$
---	--

Figura n.º 36: Respuestas a la pregunta 8f del cuestionario n.º 1  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

1. En las figuras de la n.º 32 al n.º 36, se puede observar claramente que los estudiantes tuvieron un error de cálculo elemental con expresiones algebraicas, ante esta situación se hizo la encuesta a dos de los estudiantes haciéndoles las siguientes preguntas que contestaron de la siguiente manera:

Reducir:  $2x + 2x = 4x$ ;  $2x - 2x = x$ ;  $-2x + 2x = x$ ;  $3x + 4x = 7x$ ;  $5x + 8 + 4x + 2 = 19x + 10$ ;  $30 - 8x = 22x$

El primer estudiante entrevistado contestó las 3 primeras preguntas y otro estudiante las otras tres preguntas, ambos contestaron bien la primera pregunta pero en los dos últimos lo hicieron con error. Y cuando se les preguntó por qué realizaban la operación de esa manera, contestaron, porque está bien la operación que realizaban o porque lo entendían de esa manera. De acuerdo a los resultados, al igual que la entrevista anterior los estudiantes cometen errores en operaciones básicas de cálculo elemental.

Corroboramos el análisis a priori, la tipología de error tipo E3 planteada y coincidimos con la caracterización de errores realizadas por los autores del marco teórico.

A continuación realizamos el consolidado de las pregunta n.º 7 y 8 del cuestionario n.º 1 presentados en la tabla n.º 34

Tabla n.º 34. Consolidado de respuestas correctas, incompletas, no contestadas y respuestas incorrectas de las preguntas n.º 7 y 8 del cuestionario n.º 1

Pregunta		Respuestas correctas		Respuestas incompletas		No contestada		Respuestas incorrectas	
		Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
n.º 7	a)	6	28.57	12	34.29	0	0.00	16	37.14
	b)	4	11.43	5	14.29	2	5.71	24	68.57
	c)	4	11.43	3	8.57	4	11.43	24	68.57
	d)	4	11.43	3	8.57	12	34.29	14	40.00
	e)	5	14.29	8	22.86	11	31.43	11	31.43
n.º 8	a)	4	11.43	7	20.00	18	51.43	6	17.14
	b)	1	2.86	0	0.00	19	54.29	15	42.86
	c)	1	2.86	0	0.00	24	68.57	10	28.57
	d)	1	2.86	4	11.43	25	71.43	5	14.29
	e)	1	2.86	1	2.86	15	42.86	18	51.43
	f)	1	2.86	3	8.57	22	62.86	9	25.71

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla n° 34 se puede observar lo siguiente:

- En la pregunta n.° 7, hay poca cantidad de estudiantes que logró contestar correctamente. Por ejemplo, en 7a solo seis estudiantes contestaron correctamente, ninguno dejó en blanco, dieciséis con respuestas incorrectas y doce con respuestas incompletas haciendo un total de treinta y cinco estudiantes. El análisis de los errores para la pregunta n.° 7a se hizo en las preguntas contestadas incorrectamente y en las preguntas con respuestas incompletas distribuidas de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E2	E1a	E6	E4	Total
16	12	28	4	10	8	6	28

- En la pregunta n.° 8, se observó que muchos estudiantes dejaron en blanco sus respuestas, por ejemplo en la pregunta n.° 8d, veinticinco estudiantes las dejaron en blanco, solo uno las contestó correctamente, cinco las contestaron incorrectamente y cuatro las contestaron de forma incompleta, haciendo un total de treinta y cinco estudiantes. El análisis de error de la pregunta n.° 8d se hizo en las preguntas cuyos errores fueron incorrectos o incompletos distribuidos de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E1a	E4	Total
4	5	9	4	5	9

- En la pregunta n.° 8e, quince estudiantes dejaron en blanco sus respuestas, solo una las contestó correctamente, dieciocho las contestaron incorrectamente y uno contestó de forma incompleta; haciendo un total de treinta y cinco encuestados. El análisis de error de la pregunta n.° 8e se hizo en las preguntas cuyos errores fueron incorrectos o incompletos distribuidos de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E3	E4	Respuestas no previstas	Total
18	1	19	2	14	3	19



#### **4.4. Análisis de los resultados del cuestionario n.º 2**

En esta parte presentamos los análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario n.º 2 a treinta y cinco estudiantes. El análisis que se presenta es de carácter cualitativo, pues interesa caracterizar y clasificar errores frecuentes que cometen los estudiantes al resolver preguntas que requieran planteo a través de inecuaciones y su respectiva solución, como las que se proponen en este cuestionario. El análisis de las producciones de los estudiantes se realiza a partir de sus respuestas a las preguntas planteadas y esta información se muestra en las siguientes tablas, donde se clasifican las respuestas de treinta y cinco alumnos, según la clasificación de errores propuesta. En cada pregunta, se considera los errores más frecuentes que presentan los estudiantes, además, se hace el análisis de las respuestas más frecuentes y comunes de uno o dos estudiantes, indicando los diferentes tipos de errores que se puedan presentar.



## Análisis de los resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2

En esta pregunta de planteo de problemas, a través de inecuaciones, se presentaron los errores de tipo E3, E2 y E1b, la cual se muestra en la tabla n.º 35

Tabla n.º 35. Resultados de la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 1	Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Durante las últimas semanas, se registró bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil. El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la temperatura registrada aumentada en 5° C no es mayor que 15° C ni menor que 4° C. ¿Dentro de qué intervalo se encontrarán las temperaturas registradas?	$x + 5 \leq 15 \wedge x + 5 \geq 4$ $x \leq 10 \wedge x \geq 9$ $C.S. = [9;10]$	Los estudiantes plantean bien el problema a través de inecuaciones, pero, al momento de resolver la inecuación, cometen el error en operaciones básicas de cálculo, como, por ejemplo, al momento de despejar 5, este lo suma con 4.	<b>E3</b>	<b>2</b>	5.71%
	$x + 5 < 15 \wedge x + 5 > 4$ $x < 10 \wedge x > 1$ $C.S. = \langle 1;10 \rangle$	Los estudiantes no logran traducir el enunciado a través de intervalos, es decir, no logran traducir del lenguaje literal al lenguaje matemático (gráfico, simbólico y algebraico). Sobre todo en el símbolo de desigualdad.	<b>E1b</b>	<b>20</b>	57.14%
	$x + 5 < 15 \wedge x + 5 > 4$ $x < 10 \wedge x > 9$ $C.S. = \langle 9;10 \rangle$				
	$x + 5 < 15 \wedge x + 5 > 4$ $x < 10 \wedge x > -1$ $C.S. = \{0;1;2;...;9\}$	De los veinte estudiantes que no lograron traducir el enunciado, en ocho estudiantes se observó que no lograron dar el conjunto solución a través de intervalos, ellos infieren que el conjunto solución es solo números enteros.	<b>E2</b>	<b>8</b>	22.86%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 35, podemos observar lo siguiente:

- En la pregunta n.º 1, se observa dos estudiantes que cometen el error de tipo E3, que representa el 5.71% de los encuestados. Dichos estudiantes plantean bien el problema a través de inecuaciones, pero la dificultad que tienen es que cometen errores en operaciones básicas de cálculo al momento de despejar el valor de “ $x$ ”, evidenciándose el error de tipo E3. La figura n.º 37 muestra la respuesta de uno de los estudiantes, en ello se observa que plantea bien el problema a través de inecuaciones, pero al momento de resolverlo, comete un error de operación básica al despejar la variable “ $x$ ”, en la segunda desigualdad; cometiéndose, así, el error de tipo E3. En la misma figura n.º 37, podemos observar que el estudiante resuelve las inecuaciones como si se tratasen ecuaciones, tal como afirma Bazzini (1999), citado en Borello y Lezama (2009).

Durante las últimas semanas, se registraron bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil. El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la temperatura registrada aumentada en  $5^{\circ}\text{C}$  no es mayor que  $15^{\circ}\text{C}$  ni menor que  $4^{\circ}\text{C}$ . ¿Dentro de qué intervalo se encontrarán las temperaturas registradas?

$$\begin{aligned}x + 5^{\circ} &\leq 15^{\circ} & x + 5 &> 4^{\circ} \\x &\leq 15 - 5 & x &\geq 4 + 5 \\x &\leq 10^{\circ} & x &\geq 9\end{aligned}$$

$(S [9^{\circ}, 10^{\circ}])$   
Se encontrara entre  $9^{\circ}$  y  $10^{\circ}$ .

Figura n.º 37: Respuestas a la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- Observamos también, a ocho estudiantes que representa el error de tipo E2, al inferir que el conjunto solución es solo números enteros, corroborando así el análisis a priori. También podemos observar que veinte estudiantes, que representa el 57.14% de los encuestados, cometen el error de tipo E1b porque no traducen, correctamente, el enunciado a través de inecuaciones. La figura n.º 38 muestra la respuesta de dos estudiantes, donde se observa la dificultad que tienen para traducir del lenguaje literal al

lenguaje algebraico. No logran entender las siguientes equivalencias: el enunciado “no es menor” es equivalente a decir “es mayor igual” y “no es mayor” es equivalente a “es menor igual”; evidenciándose, así, el error de tipo E1b. En esta misma pregunta, también se puede observar un error de cálculo básico al momento de despejar “x” en la segunda desigualdad.

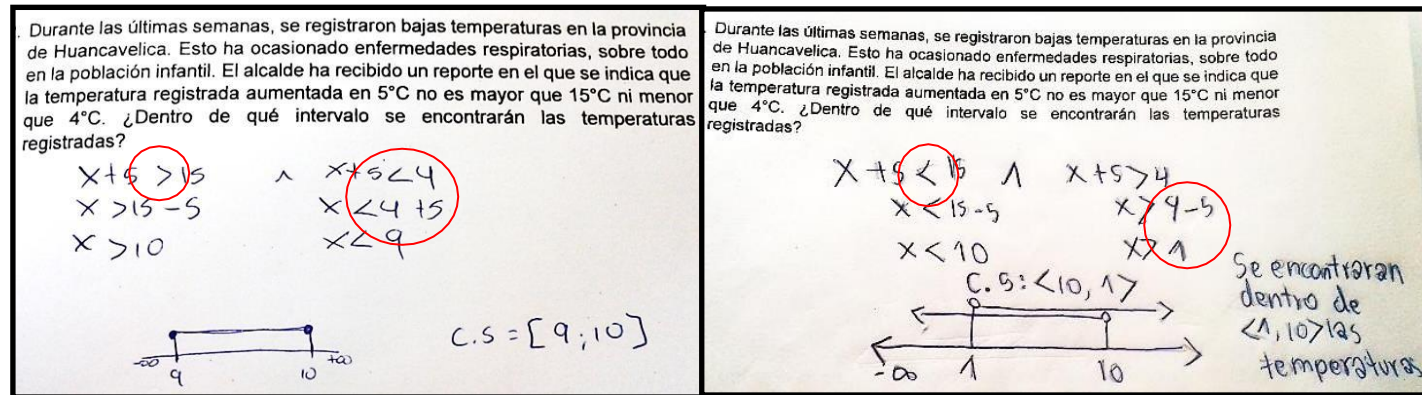


Figura n.º 38: Respuestas de otros estudiantes a la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- Este resultado reafirma el análisis a priori realizada para la pregunta n.º 1 del cuestionario n.º 2, en la tabla n.º 18, en el que se indica que los estudiantes no logran traducir el lenguaje literal al lenguaje matemático, clasificándolo como error de tipo E1b coincidiendo también con la caracterización de errores en el aprendizaje de las matemáticas hechas por los diferentes autores considerados en el marco teórico tales como: Radatz (1979); Esteley y Villareal (1990), Socas (1997), Caputo y Macías (2006), Astolfi (1999); Abrate et al. (2006) y Saucedo (2007).

## Análisis de los resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2

En esta pregunta de planteo de problemas, a través de inecuaciones simultáneas, se presentaron los errores de tipo E1b, E3 y E1a la cual se muestra en la tabla n.º 36

Tabla n.º 36. Resultados de la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 2	Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse con una temperatura entre 41° F y 68° F. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Celsius, sabiendo que la relación de temperaturas Fahrenheit y Celsius es $F = \frac{9}{5}C + 32$ .	$41 < F > 68$	Los estudiantes no logran plantear el problema a través de desigualdades. Tienen dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático.	<b>E1b</b>	<b>6</b>	17.15%
	$41 < \frac{9}{5}C + 32 < 68$ $205 < 9C + 32 < 340$	Los estudiantes plantean bien la desigualdad pero cometen el error de cálculo básico al momento de despejar la variable $C$ , no aplica correctamente las propiedades de monotonía de la multiplicación en una desigualdad.	<b>E4</b>	<b>4</b>	11.43%
	$9 < \frac{9}{5}C < 36$ $5 < C < 20$ $C.S. = [5; 20]$	Los estudiantes hallan la desigualdad correctamente, pero no logran indicar el conjunto solución a través de intervalos, es decir tienen dificultad en representar una desigualdad a través de intervalo.	<b>E1a</b>	<b>5</b>	14.29%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 36 podemos observar que los siguientes:

- El error de tipo E1b fue cometido por seis estudiantes, que representa el 17.15% de los encuestados. Aquí los estudiantes no logran traducir el enunciado a su forma algebraica o a través de inecuaciones. En la figura n.º 39 tenemos la respuesta de dos estudiantes, donde se evidencia la dificultad que se tiene al plantear el problema a través de desigualdades.

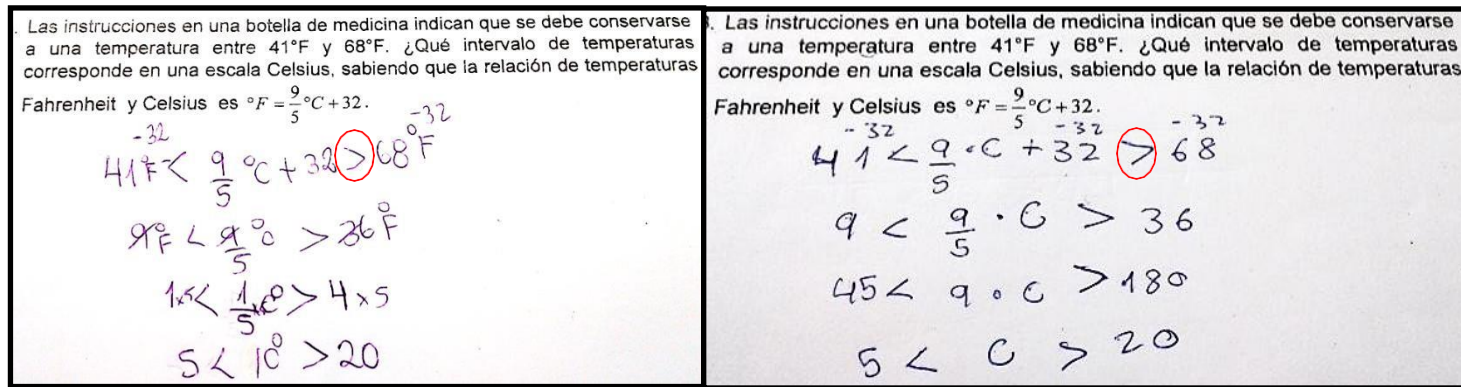


Figura n.º 39: Respuestas a la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- En la figura anterior, podemos observar que los estudiantes al momento de plantear la inecuación simultánea, cometen el error en el signo de desigualdad. No entiende el enunciado "...se debe conservar a una temperatura entre 41 °F y 68 °F...", con ello afirmamos lo descrito en el análisis a priori de la tabla n.º 21, donde el estudiante traduce mal el enunciado.
- El error de tipo E4 fue cometido por 4 estudiantes, que representa el 11.43% de los encuestados. Los estudiantes, una vez planteada la ecuación, cometen errores en operaciones básicas de cálculo y la aplicación correcta de propiedades de desigualdad. En la figura n.º 40 se muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde se evidencia el error de tipo E4 porque el estudiante tiene dificultades en la aplicación de propiedades, en este caso la propiedad de la monotonía de la multiplicación, al momento de despejar la variable  $C$ , el resultado concuerda con el análisis a priori de la tabla n.º 18. Este tipo de error también es categorizado por los diferentes investigadores considerados en el marco teórico como: Brouseau (2001), Esteley y Villareal (1990), Socas (1997), Caputo y Macías (2006), Astolfi (1999); Abrate et al. (2006) y Saucedo (2007). Quienes señalan que los estudiantes cometen errores por desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades.

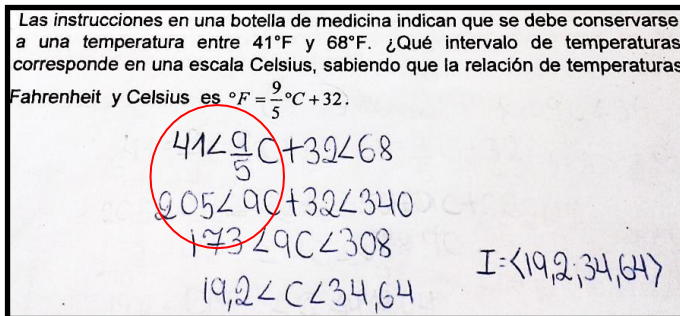


Figura N° 40: Respuesta 2 de otro estudiante a la pregunta n.º 2 del cuestionario N° 02  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

El error de tipo E1a fue cometido por cinco estudiantes, que representa el 14.29% de los encuestados. Los estudiantes no logran indicar la respuesta final a través de intervalos. La figura n.º 47 se muestra la respuesta de dos estudiantes, en ello se evidencia que el estudiante plantea, correctamente, el problema a través de una inecuación simultánea. Resuelve dicha inecuación pero no concreta su respuesta indicando la respuesta final a través de intervalos. Esto reafirma lo señalado por Vrancken et al. (2010), los estudiantes tienen dificultades en la interpretación de la solución, en expresar la solución en notación conjuntista o de intervalos.

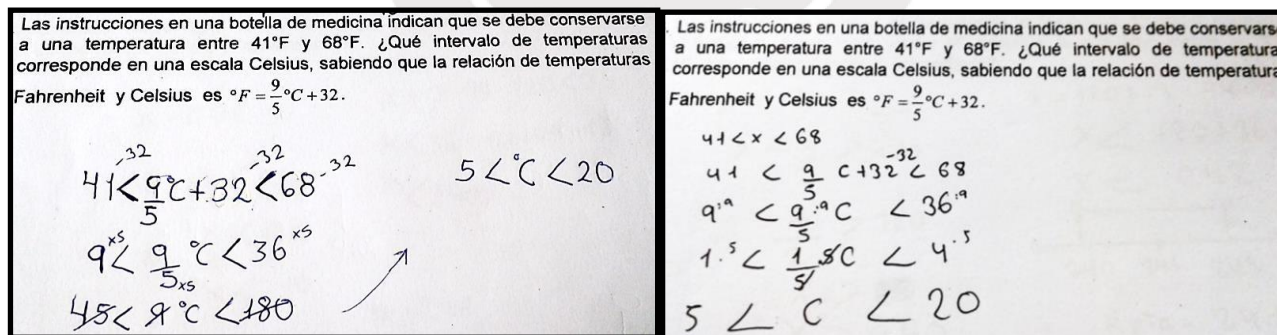


Figura n.º 41: Respuestas de otros estudiantes a la pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2  
 Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

Algunos estudiantes no escribían su resultado a través de intervalos, porque pensaban que la solución era solo la desigualdad. No comprendieron la pregunta correctamente. Al respecto, podríamos decir que, los estudiantes cuando leen un problema matemático, entienden pero de manera parcial. Este tipo de error no fue considerado en nuestra investigación.

### Análisis de los resultados de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2

A continuación presentamos la tabla n.º 37, en la cual se hace un análisis de los errores cometidos por los estudiantes encuestados. En la solución de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2, los errores más frecuentes fueron de tipo E1b y E6.

Tabla n.º 37. Resultados de la pregunta n.º 3 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 3	Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15, le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20, le faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?	$x.15 > 120 \wedge x.15 < 120$ $x > 8 \wedge x < 6$ $6 < x > 8$ Carla tiene 7 sobrinos.	Los estudiantes no logran representar el enunciado a través de inecuaciones. Tienen dificultades en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático, sobretodo en el sentido de la desigualdad; luego va forzando su respuesta.	<b>E1b</b>	<b>9</b>	25.71%
	$120 \div 15 = 8$ , $120 \div 20 = 6$ Carla tiene 8 o 6 sobrinos.	El estudiante se limita a hacer divisiones directas con los datos. No relaciona la traducción del enunciado a inecuaciones			
	$x.15 < 120 \wedge x.20 > 120$ $x < 8$ y $x > 6$ $[6;8]$	Los estudiantes plantean y resuelven bien el problema, pero al momento de indicar su respuesta, no se dan cuenta que la respuesta debe ser un número entero y no un intervalo.	<b>E6</b>	<b>4</b>	11.43%

Fuente: Elaboración propia.



De la tabla N° 37 podemos observar los siguientes:

- El error de tipo E1b fue cometido por nueve estudiantes, que representa el 25.71% de los encuestados. Los estudiantes no traducen el enunciado a su forma algebraica o a través de inecuaciones. En la figura n.º 42, se muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde se evidencia la dificultad que tiene en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático. El estudiante se limita solo a hacer divisiones enteras, concluyendo en una respuesta errónea. Al respecto también podemos decir al igual que en la pregunta anterior, el estudiante comprende la pregunta de manera parcial o no comprende lo que lee en absoluto.

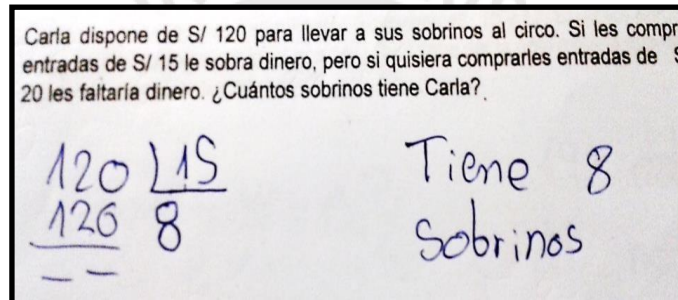


Figura n.º 42: Respuesta 1 a la pregunta 3 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- En la figura n.º 43, presentamos la respuesta de otro estudiante, quien también no logra traducir el enunciado del problema, no logra entender la representación de los siguientes enunciados "...si compra entradas de S/ 15, le sobra dinero" ( $15.x < 120$ ) y "...si compra entradas de 20, le falta dinero" ( $20.x > 120$ ). Luego el estudiante va forzando su respuesta. Este tipo de error E1b, es categorizado por los diferentes investigadores considerados en el marco teórico excepto por Brouseau (2001), quienes señalan que los estudiantes cometen errores cuando no logran traducir del lenguaje literal al lenguaje matemático.

Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15 le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20 les faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?

$$15 \cdot x > 120$$

$$x > 8$$

$$20 \cdot x < 120$$

$$x < 6$$

\* CARLA TIENE  
7 SOBRINOS.

$$6 < x < 8$$

$$6, 7, 8$$

Figura n.º 43: Respuesta 2 a la pregunta 3 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- El error de tipo E6 fue cometido por cuatro estudiantes, que representa el 11.43% de los encuestados. Los estudiantes traducen correctamente el problema y resuelven la inecuación, pero al no verificar su respuesta comete el error de tipo E6. La figura n.º 44 muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde se observa el planteamiento correcto a través de inecuaciones lineales y su solución, pero, al momento de indicar la respuesta final, el estudiante lo indica a través de un intervalo cerrado, lo cual es incorrecto. Si el estudiante hubiera remplazado los valores de su conjunto solución en las inecuaciones planteadas, podría haberse dado cuenta, que la respuesta es un número entero igual a 7. Este resultado coincide con el análisis a priori que se hizo en la tabla n.º 20, donde los estudiantes no verifican su solución. Este tipo de error es categorizado por Mosvshovits et al. (1987), Esteley y Villareal (1990) y Saucedo (2007).

Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15 le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20 les faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?

$$15 \cdot x < 120$$

$$x < \frac{120}{15}$$

$$x < 8$$

$$20 \cdot x > 120$$

$$x > \frac{120}{20}$$

$$x > 6$$

$$6 < x < 8$$

Figura n.º 44: Respuesta 3 a la pregunta 3 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

## Análisis de los resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2

En esta pregunta de planteo de problemas, se presentaron los errores de tipo E1b y E6, la cual se muestra en la tabla n.º 38

Tabla n.º 38. Resultados de la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 4	Respuestas de los estudiantes	Descripción del error encontrado	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que las de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras, ¿cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?	$15.2x + 50.x < 720$ $x < 9$	Los estudiantes identifican los datos, pero no logran representar correctamente el enunciado a través de inecuaciones. No traducen el lenguaje literal al lenguaje matemático.	<b>E1b</b>	14	40%
	$15.2x + 50x \leq 720$ $x \leq 9$ $x : 9; 8; 7; \dots$ Rpta: 9	Los estudiantes plantean y resuelven correctamente el problema a través de una inecuación, pero cometen errores al momento de interpretar sus resultados e indicar la respuesta final.	<b>E6</b>	5	14.29%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 38 podemos observar lo siguiente:

- El error de tipo E1b, fue cometido por catorce estudiantes, que representa el 40% de los encuestados. Los estudiantes no traducen el enunciado a su forma algebraica o a través de inecuaciones. En la figura n.º 45 se muestra dos respuestas de los estudiantes, donde se observa que identifican bien los datos, pero comete el error al momento de plantear la inecuación. Este tipo de error E1b, es caracterizado por los diferentes investigadores considerados en nuestro marco teórico excepto por Brouseau (2001), quienes señalan que los estudiantes cometen errores cuando no logran traducir del lenguaje literal al lenguaje matemático.

Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras. ¿Cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?

Calculadoras	Precios	Dinero
2x	¥ 35	720
x	¥ 50	720

La cantidad máxima de calculadoras que puede comprar es 24.

$$2x \cdot \frac{15}{15} \geq \frac{720}{15}$$

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{48}{2}$$

$$x \geq 24$$

Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras. ¿Cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?

Costo	#Calculadoras	total
15	2x	30x +
50	x	50x

$$80x < 720$$

$$x < 9$$

Podra comprar 2x = 6 calculadoras

x = 3

Figura n.º 45: Respuestas a la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- El error de tipo E6 fue cometido por cinco estudiantes, que representa el 14.29% de los encuestados. Los estudiantes plantearon bien el problema a través de una inecuación, resolvieron la inecuación, pero, al momento de dar su respuesta, cometieron el error de tipo E6. En la figura n.º 46 se muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde se observa que el estudiante plantea y resuelve bien el problema, pero, a la hora de dar la respuesta, comete el error de tipo E6. Si el estudiante hubiese comprobado su respuesta, podría haber evitado la respuesta incorrecta, ya que el número de calculadoras de S/ 15 es el doble que las de S/ 50. Este resultado concuerda con la caracterización de errores planteada por Mosvshovitz et al. (1987), Esteley y Villarreal (1990) y Saucedo (2007), quienes señalan que los estudiantes cometen errores porque no verifican la solución obtenida.

Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras. ¿Cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?

15	2x	30x
50	x	50x

$$\frac{80x}{80} \leq \frac{720}{80}$$

$$x \leq 9$$

$$x = 9, 8, 7$$

Podra como maximo comprar 9 calculadoras de 15

Figura n.º 46: Respuestas de otro estudiante a la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

## Análisis de los resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2

En esta pregunta de planteo de problemas, a través de inecuaciones simultáneas se presentaron los errores de tipo E1b y E6, la cual se muestra en la tabla n.º 39

Tabla n.º 39. Resultados de la pregunta n.º 5 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 5	Respuestas de los estudiantes	Clasificación de errores	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente, le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos, luego logró vender 99 relojes y le quedaron menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?	$x - 120 > \frac{x}{2} \wedge x + 13 - 99 < 36$ $2x - 120 > x \wedge x < 36 - 13 + 99$ $x > 120 \wedge x < 122$ El comerciante compra 121 relojes	Los estudiantes logran traducir la primera parte del problema, pero la segunda parte lo realiza cometiendo errores, no logran traducir el enunciado a través de inecuaciones.	<b>E1b</b>	11	31.42%
	$x - 120 > \frac{x}{2} \wedge x - 120 + 13 - 99 < 36$ $x > 240 \wedge x < 242$ $240 + 242 = 582 \text{ relojes.}$	Los estudiantes traducen y resuelven el problema utilizando inecuaciones, pero no logra interpretar sus resultados correctamente. Si verificaba su respuesta en la segunda inecuación planteada, quizás se daba cuenta que su respuesta no era la correcta, intentando talvez corregirla.	<b>E6</b>	5	14.29%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 39 podemos observar lo siguiente:

- El error de tipo E1b fue cometido por once estudiantes, que representa el 31.42% de los encuestados. Los estudiantes logran traducir solo la primera parte del problema, de forma correcta, a través de inecuaciones. En la figura n.º 47, se muestra la respuesta de uno de los estudiante, donde se observa que el planteamiento de la primera inecuación logra traducir correctamente a través de una inecuación y el planteo de la segunda inecuación lo hace con error al no considerar que ya se habían vendido 120 relojes;

evidenciándose el error de tipo E1b. En esta misma respuesta se observa el error de tipo E4, porque el estudiante no aplica correctamente la propiedad de desigualdad, se olvidó multiplicar a 120 por 2.

Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos, luego logró vender 99 relojes y le quedaron menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?

$$X - 120 > \frac{X}{2}$$

$$2X - 120 > X$$

$$X > 120$$

$$120 < X < 122$$

$$X + 13 - 99 < 36$$

$$X < 36 - 13 + 99$$

$$X < 122$$

El comerciante compró 121 relojes.

Figura n° 47: Respuestas a la pregunta 5 del cuestionario n.° 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.° 2

- El error de tipo E6 fue cometido por cinco estudiantes, que representa el 14.29% de los encuestados. Los estudiantes plantearon y resolvieron bien el problema a través de una inecuación, pero, al momento de dar su respuesta no lograron dar con la solución. La figura n.° 48 muestra como el estudiante no sabe qué hacer con las desigualdades obtenidas, limitándose solo a sumar los números obtenidos, si el estudiante verificaba su respuesta, se hubiera dado cuenta que no era la correcta, intentado corregirla talvez.

Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos, luego logró vender 99 relojes y le quedaron menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?

$$X - 120 > \frac{X}{2}$$

$$X - \frac{X}{2} > 120$$

$$X > 120 \cdot 2$$

$$X > 240$$

$$\frac{120 - 13}{107}$$

$$X - 107 - 99 < 36$$

$$X < 36 + 107 + 99$$

$$X < 242$$

$$\frac{240 + 242}{582}$$

Figura n.° 48: Respuesta de otro estudiante a la pregunta 5 del cuestionario n.° 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.° 2

## Análisis de los resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2

En esta pregunta de planteo de problemas, se presentaron los errores de tipo E1b y E3, la cual se muestra en la tabla n.º 40

Tabla n.º 40. Resultados de la pregunta n.º 6 del cuestionario n.º 2

Pregunta n.º 6	Respuestas de los estudiantes	Clasificación de errores	Tipo de error	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes (%)
Melvin obtuvo, en sus tres primeros exámenes, 13 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor igual que 14, ¿cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?	$\frac{13 + 10 + 17}{4} \leq 14$	Los estudiantes logran identificar los datos, pero no logran traducir el enunciado del lenguaje literal al lenguaje matemático.	<b>E1b</b>	10	28.57%
	$\frac{13 + 10 + 17}{4} \leq 14$		<b>E1b</b>	7	20%
	$\frac{13 + 10 + 17 + x}{4} \leq 14$ $x \leq 16$ $\Rightarrow x = 16; 17; 18; 19 \text{ y } 20$	De los diez estudiantes anteriores, al seguir analizando sus respuestas se encontró que al llegar a una desigualdad, lo interpretan de manera equivocada, los estudiantes no logran traducir una desigualdad.	<b>E1b</b>	5	14.29%
	$\frac{13 + 10 + 17 + x}{4} \geq 14$ $40x \geq 56$	Una vez planteada correctamente la inecuación, los estudiantes tienen dificultad en operaciones básicas de cálculo con expresiones algebraicas.	<b>E3</b>	5	14.29%
		De los 5 estudiantes, 3 de ellos no tienen conocimientos previos de operaciones con términos semejantes, clasificándolo como error de tipo E5.	<b>E5</b>	3	8.57%

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla n.º 40 podemos observar lo siguiente:

- Un total de diecisiete estudiantes, que representa el 48.57% de los encuestados, no lograron plantear correctamente el enunciado del problema, evidenciándose el error de tipo E1b. En la figura n.º 49, se muestra la respuesta de dos estudiantes, donde se observa que identifica bien los datos, pero la desigualdad “mayor igual” lo representa por la desigualdad “menor igual”.

07. Melvin obtuvo en sus tres primeros exámenes 13; 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor igual que 14. ¿Cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?

07. Melvin obtuvo en sus tres primeros exámenes 13; 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor igual que 14. ¿Cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?

$$\frac{13+10+17+x}{4} \leq 14$$

$$40x \leq 14.4$$

$$x \leq 56 - 40$$

$$x \leq 16$$

La nota mínima que tiene que tener es 16

$$\frac{13+10+17+x}{4} \leq 14$$

$$40+x \leq 56$$

$$x \leq 56-40$$

$$x \leq 16$$

La nota mínima es de 16.

Figura n.º 49: Respuestas a la pregunta 6 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

- En la figura anterior, podemos observar, también, a cinco estudiantes que, una vez que hallan su resultado, no logran interpretar lo obtenido  $x \leq 16$ , Para ellos, esta desigualdad significa que “x” toma los siguientes valores  $x : 16, 17, 18, 19$  y  $20$ . Luego consideran como nota mínima  $x = 16$ . Con esto, evidenciamos, nuevamente, el error de tipo E1b porque los estudiantes no logran traducir o no entienden el significado de la desigualdad  $x \leq 16$ .
- De acuerdo a los resultados obtenidos, se hizo la entrevista al estudiante que dio la respuesta a la pregunta de la figura n.º 49. Se le preguntó primero, sobre los nombres de los símbolos de desigualdad. Sus respuestas fueron los siguientes: “<”: Mayor; “≤”: mayor igual; “≥”: menor igual. Estas respuestas equivocadas es una de las razones del porqué que el estudiante comete errores al momento de plantear el problema, el enunciado dice mayor igual y el estudiante reemplaza con el símbolo menor igual.



Reafirmamos lo señalado por Borello y Lezama (2009), y Maroto (2013) quienes indican que los estudiantes confunden el significado de las desigualdades “<”, “>”, “≤” y “≥”. Este error lo clasificamos como error de tipo E1a, porque no entiende el significado de los símbolos matemáticos.

- El error de tipo E3 fue cometido por cinco estudiantes, que representa el 8.57% de los encuestados. Los estudiantes traducen el enunciado a través de inecuaciones de manera correcta, pero, al momento de realizar las operaciones básicas, cometieron el error de tipo E3. En la figura n.º 50, se muestra la respuesta de dos estudiantes, donde se observa que cometieron errores al concluir que  $40 + x = 40x$  o  $13 + 10 + 17 = 30$ , evidenciándose así el error de tipo E3, por tener dificultad en realizar operaciones básicas de cálculo. Al preguntarles sobre porque habían realizado dicha operación de esa manera, tres estudiantes manifestaron que no sabían operar los términos semejantes, clasificándolo entonces dentro del error de tipo E5, por tener un deficiente aprendizaje de conocimientos previos.

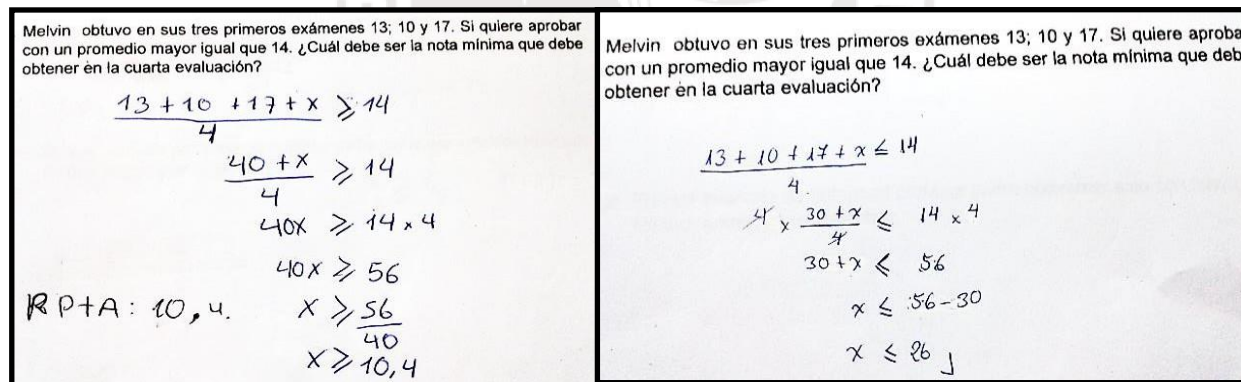


Figura n.º 50: Respuestas de otros estudiantes a la pregunta 6 del cuestionario n.º 2  
Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

Tabla n.º 41. Resumen de los resultados del cuestionario n.º 2

Pregunta	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		No contestada	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
1	8	22.86	22	62.86	5	14.29
2	9	25.71	15	42.86	11	31.43
3	22	62.86	13	37.14	0	0.00
4	7	20.00	19	54.29	9	25.71
5	8	22.86	16	45.71	11	31.43
6	10	28.57	22	57.14	3	14.29

Fuente: Elaboración propia.

En La tabla n.º 41 presentamos el consolidado de los resultados del cuestionario n.º 2 agrupados en cantidad de preguntas correctas, incorrectas y no contestadas.

- En las preguntas de la n.º 1 a la n.º 6, se observa que pocos estudiantes contestaron correctamente las preguntas. Por ejemplo en la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2, Solo el 20% de los estudiantes encuestados contestó correctamente y el 54.29% cometió errores de tipo E1b (40%) y E6 (14.29%).
- En la pregunta n.º 1, se encontró que el 62.86% cometió errores en la solución de problemas con inecuaciones lineales, de los cuales 5.71% son errores de tipo E3 y 57.14% son errores de tipo E1b.
- En la pregunta n.º 6, se encontró que el 62.86% de los estudiantes encuestados cometió errores en la solución de problemas con inecuaciones lineales, de los cuales 48,57% cometió el errores de tipo E1b y 14.29% cometieron errores de tipo de tipo E3.
- Como se puede observar, el error más frecuente cometido por los estudiantes en la solución de inecuaciones lineales es E1b, seguido por los errores de tipo E5, E6 y E2.

A continuación presentamos la tabla n.º 44, en la que indicamos el consolidado final de la cantidad total de errores encontrados luego de la aplicación de los cuestionarios n.º 1 y 2, dicha clasificación se hizo en función a la tipología de errores más comunes planteadas por el autor de la tesis.

Tabla n.º 42. Consolidado final de los resultados obtenidos en las respuestas analizadas de los cuestionarios n.º 1 y n.º 2

Cuestionario	n.º de pregunta	Ítem	Tipo de error						Total de respuestas analizadas	
			E1A	E1B	E2	E3	E4	E5		E6
CUESTIONARIO n.º 1 (398 respuestas)	1	a	2					8		10
		b				3				3
		c					3			3
		d			21					21
		e					26			26
	2	a	15							15
		b	18							18
		c						4		4
		d						3		3
	3	a						1		1
		b		18						18
	4	a		14						14
		b		14						14
	5	a								0
		b		16						16
	6	a		15						15
		b		18						18
		c		15						15
	7	a	10		4		6		8	28
		b	4			2	17	6	7	36
		c	5			15		6		26
		d	3				13			16
		e	13			5				18
	8	a	7			2				9
		b				11				11
		c				7				7
		d	4				5			9
		e				2	14			16
f					6	2			8	
CUESTIONARIO n.º 2 (123 respuestas)	1			20	8	2			30	
	2		5	6			4		15	
	3			9				4	13	
	4			14				5	19	
	5			11				5	16	
	6			22		3		5	25	
Total de Respuestas Analizadas			86	192	33	57	93	31	29	521
Porcentaje de respuestas analizadas			16.51	36.85	6.33	10.94	17.85	5.95	5.57	100.00

Fuente: Elaboración propia en base a los resultados obtenidos en los cuestionarios n.º 1 y 2

De la tabla n.º 42 podemos observar lo siguiente:

- De la aplicación de los dos cuestionarios aplicados a treinta y cinco estudiantes se analizaron 521 respuestas, 398 del cuestionario n.º 1 y 123 respuestas del cuestionario n.º 2.
- La moda de la clasificación de errores planteada por el autor, de acuerdo a los resultados obtenidos, es el error de tipo E1b, con una frecuencia de 192 errores que representa el 36.85%. Eso indica que los estudiantes de la muestra analizada, cometen errores con mayor frecuencia en la resolución de inecuaciones lineales, porque tienen dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático (por ejemplo, plantear un problema o enunciado a través de inecuaciones) o traducir del lenguaje matemático a otro distinto (por ejemplo, representar un intervalo a través de inecuaciones, gráficamente o viceversa).
- El error de tipo E1b fue evidente en los cuestionarios 1 y 2. En el cuestionario n.º 1, la mayor cantidad de errores de tipo E1b se concentró en las preguntas 3b, 4a, 4b, 5b, 6a, 6b y 6c, de acuerdo a esto, los estudiantes tienen dificultad de traducir un intervalo a través de desigualdades; una desigualdad a través de intervalo o gráficamente; y un enunciado de la forma literal a través de inecuaciones, desigualdades e intervalos. Donde no se reportó errores fue cuando los estudiantes tradujeron un intervalo a través de una gráfica, o viceversa. En el cuestionario n.º 2, los estudiantes cometieron error, sobre todo, al momento de traducir o plantear el enunciado de un problema a través de inecuaciones lineales; eso se evidencia en todas las preguntas del cuestionario n.º 2.
- Podríamos inferir que las causas a este tipo de error son la poca práctica en la traducción, comprensión y planteo de problemas a través de inecuaciones; además de ello, los estudiantes no comprenden los símbolos y términos matemáticos. Esto corresponde al error de tipo E1a, donde se tuvo un total de 86 respuestas de este tipo, lo cual representa el 16.51%, siendo este el segundo error con mayor frecuencia que se presentó.
- El error de tipo E4, fue el segundo tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 93 respuestas, que representa el 17.85 %. Este tipo de error se observó solo en las preguntas 1b, 1c, 1e, 7 y 8 del cuestionario n.º 1 y pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2. Estas preguntas que evidenciaron el error de tipo E4 en el cuestionario n.º 1, fueron de verdadero/falso, donde tenían que aplicar propiedades

para contestar correctamente; y resolución de inecuaciones, donde se observó que los estudiantes desconocen conceptos y propiedades de inecuaciones o las emplean incorrectamente a la hora de resolver una inecuación.

- El error de tipo E3, fue el cuarto tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 57 respuestas, que representa el 10.94%. Este tipo de error se dio con mayor frecuencia en las preguntas 7 y 8 del cuestionario n.º 1 de resolución de inecuaciones y en las preguntas 1 y 6 del cuestionario n.º 2, que fueron problemas de inecuaciones lineales. Allí se observó errores de cálculo elemental en suma de fracciones con expresiones algebraicas y con signos de agrupación.
- El error de tipo E2, fue el quinto error con mayor frecuencia, con un total 33 respuestas, que representa el 6.33%. Los errores de tipo E2 se encontraron en las preguntas 1d (verdadero/falso), 7a del cuestionario n.º 1 y pregunta 1 del cuestionario n.º 2. El error de tipo E2, se evidenció en pocas cantidades, posiblemente porque no hubo muchas preguntas donde el alumno tenga que inferir y si las hubo el estudiante no llegó a ese nivel de inferencia,
- El error de tipo E5 y E6, fueron los errores que se presentaron con menor frecuencia 5.95% y 5.57% respectivamente. El error de tipo E6, se presentaron en pocas cantidades esto posiblemente porque las preguntas no incluían de manera explícita la verificación de sus resultados, además el estudiante muy pocas veces se atreve a comprobar su respuesta.
- A continuación mostramos el gráfico que fue elaborada con la información de la tabla n.º 42, donde nos permite observar las cantidades y porcentajes respectivas por cada tipología de error planteada en nuestra investigación.

*Figura n.º 51.* Consolidado final del análisis de 521 errores encontradas en los cuestionarios n.º 1 y n.º 2



Fuente: Elaboración propia

## CONSIDERACIONES FINALES

El aprendizaje de desigualdades e inecuaciones lineales, resulta difícil para los estudiantes de tercer año de educación secundaria por ser un tema abstracto, ya que tienen que usar de manera adecuada definiciones y propiedades. Según investigaciones realizadas con respecto a inecuaciones lineales, los estudiantes confunden los conceptos de ecuación y desigualdad (Bazzini, 1999), por lo que resuelven inecuaciones como si fueran ecuaciones. Confunden el significado de  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$  y  $\leq$  (Borello, Lezama, 2009; Maroto, 2013); no entienden las propiedades de desigualdad; no entienden que las desigualdades  $x < a$  y  $a > x$  son equivalentes (Vrancken, Engler y Muller, 2010; Garrote, Hidalgo, Blanco, 2004); no logran resolver inecuaciones justificando los pasos como, por ejemplo,  $-2x + 8 > 24$  y no expresan las soluciones gráficamente o por intervalos (Torrealba, 2014; Silva y Pirela, 2015). Estos errores también fueron evidenciados en nuestra investigación.

Como nuestro estudio está centrado en el análisis de errores, nos proponemos como objetivo general analizar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable. Para cumplir con este objetivo general, nos planteamos tres objetivos específicos.

Nuestro primer objetivo específico fue elaborar una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, tomando como referencia la comparación de las tipologías revisadas. Para lograr dicho objetivo, elaboramos una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales, tomando como referencia la comparación de las tipologías realizadas por el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) propuesta por Socas (1979) y la clasificación de errores en el aprendizaje de las matemáticas, propuesta por los siguientes autores: Radatz (1979); Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987); Esteley y Villarreal (1990,1996); Astolfi (2000); Brousseau (2001); Caputo y Macías (2006); Abrate, Pochulu y Vargas (2006); Saucedo (2007). De esta manera, logramos alcanzar el primer objetivo al elaborar una tipología de errores más comunes, entre cuales se encuentran el error en la

comprensión y traducción de una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra; el error en la inferencia o en el razonamiento lógico; error en el procedimiento o de cálculo elemental; el error en el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades; el error por no tener los conocimientos previos; y el error al no verificar la solución.

Nuestro segundo objetivo específico fue identificar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable a través de una prueba diagnóstica. Para cumplir dicho objetivo, primero elaboramos dos cuestionarios con preguntas construidas tomando en cuenta la tipología propuesta, las cuales fueron previamente validados por investigadores expertos en didáctica de la matemática y a través de una aplicación piloto para cada uno de los cuestionarios, con treinta estudiantes, pertenecientes al tercer año "A" de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37. En segundo lugar, elaboramos el análisis a priori de los dos cuestionarios, describiendo los errores esperados según la tipología de errores propuesta en este trabajo. Luego aplicamos los dos cuestionarios a una muestra intencionada de treinta y cinco estudiantes de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37, de las secciones "B"; "C" y "D", que cursan el 3er año de educación secundaria en dicha institución educativa, para recoger información sobre los errores que cometen dichos estudiantes en la resolución de inecuaciones lineales. Se organizó y analizó la información recogida para cada ítem, según la propuesta de la tipología de errores para la resolución de inecuaciones lineales. Así, logramos cumplir con nuestro segundo objetivo específico. Finalmente, organizamos la información recogida describiendo las respuestas dadas por los estudiantes para cada ítem, identificando los errores cometidos por los estudiantes según la tipología de errores propuesta para la resolución de inecuaciones lineales.

Nuestro tercer objetivo específico fue describir los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, según la tipología propuesta. Para lograr este objetivo elaboramos un consolidado final de los resultados obtenidos luego de la aplicación de los dos cuestionarios, el cual mostrados en la tabla n.º 42.

Allí podemos observar que se analizaron un total de 521 respuestas: 398 del cuestionario n.º 1 y 123 del cuestionario n.º 2. De acuerdo a esta tabla, tenemos:

- La moda de la clasificación de errores planteada por el autor, de acuerdo a los resultados obtenidos, es el error de tipo E1b, con una frecuencia de 192 errores que representa el 36.85%. Eso indica que los estudiantes de la muestra analizada, cometen errores con mayor frecuencia en la resolución de inecuaciones lineales, porque tienen dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático (por ejemplo, plantear un problema o enunciado a través de inecuaciones) o traducir del lenguaje matemático a otro distinto (por ejemplo, representar un intervalo a través de inecuaciones, gráficamente o viceversa).
- El error de tipo E1b fue evidente en los cuestionarios 1 y 2. En el cuestionario n.º 1, la mayor cantidad de errores de tipo E1b se concentró en las preguntas 3b, 4a, 4b, 5b, 6a, 6b y 6c, de acuerdo a esto, los estudiantes tienen dificultad de traducir un intervalo a través de desigualdades; una desigualdad a través de intervalo o gráficamente; y un enunciado de la forma literal a través de inecuaciones, desigualdades e intervalos. Donde no se reportó errores fue cuando los estudiantes tradujeron un intervalo a través de una gráfica, o viceversa. En el cuestionario n.º 2, los estudiantes cometieron error, sobre todo, al momento de traducir o plantear el enunciado de un problema a través de inecuaciones lineales; eso se evidencia en todas las preguntas del cuestionario n.º 2.
- Podríamos inferir que las causas a este tipo de error son la poca práctica en la traducción, comprensión y planteo de problemas a través de inecuaciones; además de ello, los estudiantes no comprenden los símbolos y términos matemáticos. Esto corresponde al error de tipo E1a, donde se tuvo un total de 86 respuestas de este tipo, lo cual representa el 16.51%, siendo este el segundo error con mayor frecuencia que se presentó.
- El error de tipo E4, fue el segundo tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 93 respuestas, que representa el 17.85 %. Este tipo de error se observó solo en las preguntas 1b, 1c, 1e, 7 y 8 del cuestionario n.º 1 y pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2. Estas preguntas que evidenciaron el error de tipo E4 en el cuestionario n.º 1, fueron de verdadero/falso, donde tenían que aplicar propiedades para contestar correctamente; y resolución de inecuaciones, donde se observó que



los estudiantes desconocen conceptos y propiedades de inecuaciones o las emplean incorrectamente a la hora de resolver una inecuación.

- El error de tipo E3, fue el cuarto tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 57 respuestas, que representa el 10.94%. Este tipo de error se dio con mayor frecuencia en las preguntas 7 y 8 del cuestionario n° 1 de resolución de inecuaciones y en las preguntas 1 y 6 del cuestionario n.° 2, que fueron problemas de inecuaciones lineales. Allí se observó errores de cálculo elemental en suma de fracciones con expresiones algebraicas y con signos de agrupación.
- El error de tipo E2, fue el quinto error con mayor frecuencia, con un total 33 respuestas, que representa el 6.33%. Los errores de tipo E2 se encontraron en las preguntas 1d (verdadero/falso), 7a del cuestionario n.° 1 y pregunta 1 del cuestionario n.° 2. El error de tipo E2, se evidenció en pocas cantidades, posiblemente porque no hubo muchas preguntas donde el alumno tenga que inferir y si las hubo el estudiante no llegó a ese nivel de inferencia,
- El error de tipo E5 y E6, fueron los errores que se presentaron con menor frecuencia 5.95% y 5.57% respectivamente. El error de tipo E6, se presentaron en pocas cantidades, esto posiblemente porque las preguntas no incluían de manera explícita la verificación de sus resultados, además el estudiante muy pocas veces se atreve a comprobar su respuesta.

Al lograr cumplir nuestros tres objetivos específicos, podemos decir que logramos cumplir nuestro objetivo general, analizar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.° 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, lo cual. Así mismo podemos decir que logramos contestar nuestra pregunta de investigación: ¿Cuáles son los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.° 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable?.

En conclusión, de acuerdo a los resultados obtenidos, los errores más frecuentes que cometen los estudiantes del tercer año de educación secundaria que corresponden a la muestra, de mayor a menor frecuencia se presentaron de la siguiente manera: de un total de 521 respuestas analizadas, el 36.85% de estas respuestas presentan

errores tipo E1b, es decir, errores en la comprensión y traducción de una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra; el 17.85% presenta errores tipo E4, es decir, errores por el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades; el 16.51% presenta errores tipo E1a, es decir porque no comprende los símbolos y términos matemáticos de desigualdad ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ) e intervalos ( $[ ]$ ,  $\langle \rangle$ ) y su relación entre ellos; el 10.94%, presenta errores tipo E3, es decir errores en procedimientos o cálculo elemental; el 6.33% presenta errores de tipo E2, es decir errores por realizar inferencias inadecuadas; el 5.95%, presenta el errores tipo E5, es decir por tener un deficiente aprendizaje de conocimientos previos; finalmente el 4.57%, presenta errores tipo E6, es decir, por no verificar su resultado o solución obtenida.

## LIMITACIONES

En la experimentación, hemos podido observar que los estudiantes no estuvieron motivados para trabajar con el tema de desigualdades por ser abstracto, sobre todo, en el aprendizaje de las propiedades de desigualdades. Tampoco mostraron mucho interés al momento de contestar los cuestionarios, ya que no están acostumbrados a responder evaluaciones con una gran cantidad de problemas y ejercicios, y que tengan una duración de noventa minutos.

El tipo de trabajo que se realiza en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en instituciones educativas estatales no permite aprender, de manera rigurosa, los objetos matemáticos; específicamente, propiedades de desigualdades y su aplicación a las inecuaciones y problemas de contexto. Cabe mencionar que se está dejando de tomar evaluaciones mensuales o bimestrales. Solo se evalúa durante y después de cada sesión de clase. Eso hace que el estudiante aprenda solo para el momento y, después de un tiempo, se olvida y no responde a una evaluación mensual o bimestral.

Con nuestro estudio, dejamos abiertas las posibilidades para futuros trabajos que puedan considerar lo siguiente:

1. Identificar los errores comunes en los conocimientos previos para el aprendizaje de las inecuaciones lineales de los alumnos de tercer año de educación secundaria.

2. Elaborar actividades didácticas para el aprendizaje de inecuaciones lineales y su aplicación a problemas de contexto dirigidas a estudiantes de tercer año de educación secundaria a través de sesiones de aprendizaje, teniendo como referencia las tipologías de errores más comunes encontradas en la presente investigación.



## REFERENCIAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas J. (2006). *Errores Y Dificultades En Matemática* primera edición Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006 Dirección Nacional del Derecho de Autor: Expediente N° 487607. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>.
- Astolfi, J. P. (1999) .*El “error”, un medio para enseñar*. Colección: investigación y enseñanza, n° 15. Sevilla, Editora Díada.
- Bachelard, G. (2000). *La formación del Espíritu Científico*. Editorial Argos, buenos aires. Vigésimotercera edición en español, traducido por Babini, J.
- Bernal, C. (2010) *Metodología de la investigación*. Tercera edición. México, Mc Graw Hill.
- Bernardis, S., Nitti, L. y Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática*, vol. 29, núm. 3, diciembre de 2017. Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2017/11/29/indagacion-de-la-historia-de-las-desigualdades-matematicas/>
- Borello, M. y Lezama J. (2014). Un planteamiento de Resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas Didácticas del Profesor. *Un Enfoque Socioepistemológico*. Clame 2014. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/33251667.pdf>
- Caputo, S. y Macías, A (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura “Álgebra I” al elaborar demostraciones*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE. Recuperado de <http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf>.
- Esteley, C., Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en matemática. *Revista de Educación Matemática*. Volumen 11. N° 1. (16–35). Universidad Nacional de Córdoba.
- Franchi, L., Hernández, A.(2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, vol. 8, núm. 24, enero-marzo, 2004, pp. 63-71. Universidad

de los Andes. Mérida, Venezuela. Recuperado de:

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35602411>

García, J. (2010), Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura. Trabajo de fin de máster. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de

[https://fgm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose\\_Garcia.pdf](https://fgm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf)

Garrote, M., Hidalgo, M., y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inequaciones. *En Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 46, 37-44. Recuperado de

<http://www1.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Garrote,%20Hidalgo,%20Blanco%20Inecuaciones%20Suma.pdf>.

Godino, J., Batanero, B. y Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas Para Maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada 18071 Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

Godino, J., Batanero, B. y Font, V. (2003). *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada 18071 Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

Gonzales, P. (2003). *La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática*. Recuperado de [www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/teoremapiitagores.pdf](http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/teoremapiitagores.pdf).

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial Ultra. Sexta Edición.

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities. Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy In the Faculty of Education*. Simon Fraser University, Canadá.

Recuperado de

[http://summit.sfu.ca/system/files/iritems1/11577/etd6465\\_EHalmaghi.pdf](http://summit.sfu.ca/system/files/iritems1/11577/etd6465_EHalmaghi.pdf).

Lego Mindstorms Education EV3 (2015). *Introducción al plan de lecciones de robótica: Uso de la aplicación de programación EV3*. LEGO Group. ©2015 The LEGO

Group. 041329. Recuperado de <https://le-www-live-s.legocdn.com/.../ev3...robotics/introduction-to-robotics-tablet-es>.

Lehmann, Ch. (2004). *Algebra*. Editorial Limusa S.A. México.

Lima, E. (1997). *Análisis Real*, Volumen 1. Instituto de Matemática y Ciencias afines, UNI, 1997. 240pp. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA).

Maroto, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, Julio-Diciembre, 1-16.

Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado <http://www.minedu.gob.pe/>.

Ministerio de Educación. *Matemática 3°*. Editorial Santillana. Primera edición marzo del 2016.

Monje, F. (2017). *Tratamiento De La Inecuación En El Contexto Escolar De Chile y Rusia*. Universidad Católica De La Santísima Concepción, Facultad De Educación – Facultad De Ingeniería. Magíster En Didáctica De La Matemática.

Ortiz, A. (1936). *Historia de la matemática. Volumen 1*. Sección Matemáticas Pontificia Universidad Católica del Perú. Primera Edición. Lima Perú.

Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J. Kilpatrick y L. Rico (Eds.), *Educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Rojas, I. (2011). Elementos para el diseño de técnicas de investigación: una propuesta de definiciones y procedimientos en la investigación científica. *Tiempo de Educar*, vol. 12, núm. 24, julio-diciembre, 2011, pp. 277-297 Universidad Autónoma del Estado de México Toluca, México.

Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. Informe para posgrado maestría. Argentina: *itinerarios educativos* 2(2), 22-43. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Itinerarios/article/viewFile/3898/5923>.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI, Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 19-52.

- Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). *Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia y SEIEM.
- Silva, L. y Pirela, L. (2015). *Dificultades Que Presenta El Estudiantado De Cuarto Año De Educación Media General En El Aprendizaje De Inecuaciones Según El Enfoque Teórico De Socas*. Caso: Estudiantes de la Escuela Técnica Robinsoniana Monseñor Gregorio Adam, durante el Período Escolar 2014-2015. *Universidad de Carabobo Facultad de Ciencias de La Educación Escuela de Educación, Departamento de Matemática y Física Cátedra: Diseño de Investigación*.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. México Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Corporativo Santa Fe.
- Torrealba, J. (2014). Taxonomía de Radatz: Errores cometidos en La resolución de inecuaciones de primer grado por estudiantes del primer semestre de la face-Uc. Universidad de Carabobo Área de Estudios de Postgrado Facultad de Ciencias de la Educación Maestría en Educación Matemática.
- Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2010). Inecuaciones Algebraicas. Una experiencia Didáctica Articulando diversos sistemas de Representación. *Yupana N 05*. Universidad Nacional del Litoral Argentina. Recuperado de <https://doi.org/10.14409/yu.v1i5.261>.

Anexo n.º 1

CUESTIONARIO n.º 1

3.º DE SECUNDARIA

Tiempo: 90 min.

APELLIDOS Y NOMBRES: ..... FECHA: .....

01. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

- a)  $-8 > -1$
- b)  $3 \leq 7$
- c)  $a < b$  es equivalente a  $b > a$
- d) Si  $-x \leq 3$  entonces  $x \leq -3$
- e) Si  $-a > -b$  entonces  $a > b$

02. Para cada enunciado, escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifique tu respuesta.

- a)  $3 \in [1; 3)$  ..... ( )
- b)  $2 \notin \langle -5; 2 \rangle$  ..... ( )
- c)  $-3 \in \langle -4; 2 ]$  ..... ( )
- d)  $4 \in [-3; +\infty)$  ..... ( )

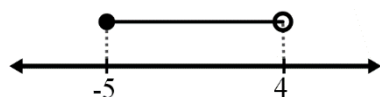
03. Dado el siguiente intervalo  $\langle -3; 4 ]$

- a) Represente gráficamente.
- b) Represente usando desigualdades.

04. Dada la siguiente desigualdad  $x < -3$ .

- a) Realice una representación a través de intervalo.
- b) Represente gráficamente.

05. Dada la gráfica



- a) Represente a través de intervalo.
- b) Represente por desigualdades.

06. La edad de los adolescentes se podría definir como de 10 años o más y menores de 19 años. Represente las edades de los adolescentes usando intervalos, desigualdades y gráficamente.



07. Resuelva las siguientes inecuaciones en  $\mathbb{R}$ , justificando los pasos realizados. Interprete la solución obtenida.

a)  $8 \leq 2x$

b)  $-5x < 30$

c)  $26 \geq 30 - 8x$

d)  $-12 < 3x + 6 \leq 18$

e)  $3x - 2 < 5 - x$

08. Resuelva las siguientes inecuaciones en  $\mathbb{R}$  e indique el conjunto solución

a)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$

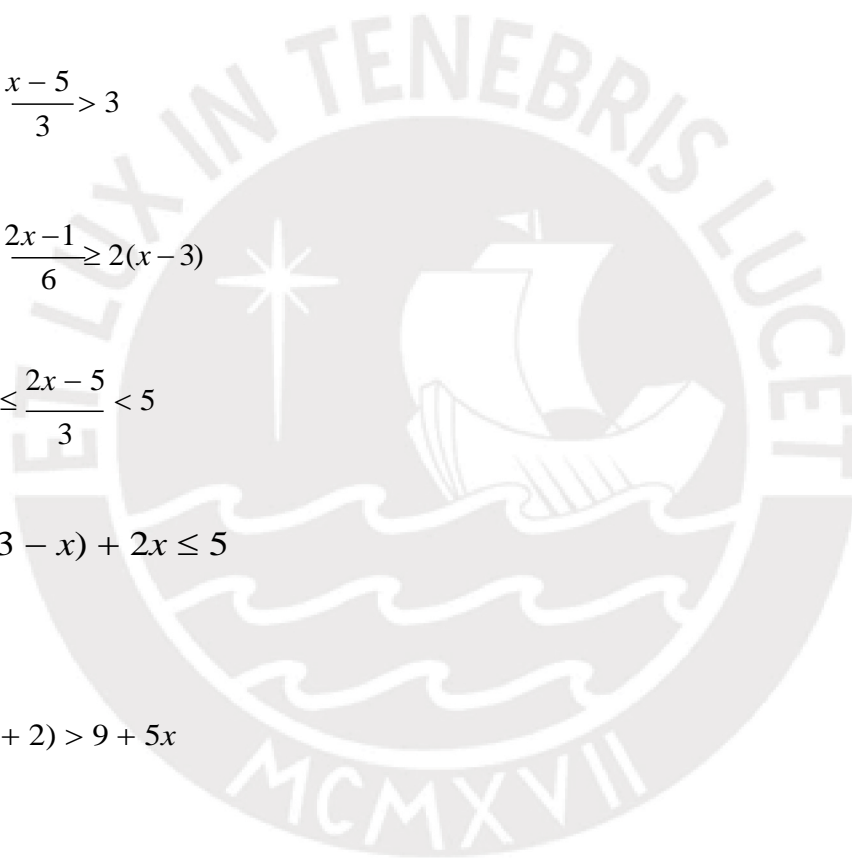
b)  $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$

c)  $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \geq 2(x-3)$

d)  $-3 \leq \frac{2x-5}{3} < 5$

e)  $2(3-x) + 2x \leq 5$

f)  $5(x+2) > 9 + 5x$



**Anexo n.º 2**

**CUESTIONARIO n.º 2**

**3.º DE SECUNDARIA**

**Tiempo: 60 min**

APELLIDOS Y NOMBRES: ..... FECHA: .....

01. Durante las últimas semanas, se registró bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil. El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la temperatura registrada aumentada en  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  no es mayor que  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$  ni menor que  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Dentro de qué intervalo se encontrarán las temperaturas registradas?

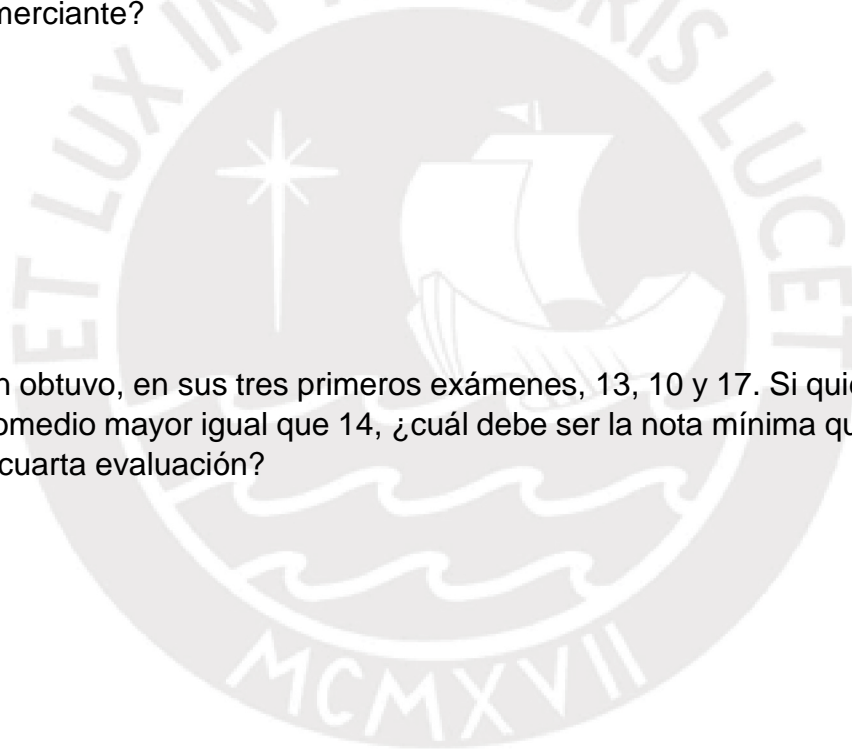
02. Las instrucciones en una botella de medicina indican que se debe conservarse a una temperatura entre  $41\text{ }^{\circ}\text{F}$  y  $68\text{ }^{\circ}\text{F}$ . ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Celsius, sabiendo que la relación de temperaturas Fahrenheit y Celsius es  $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32$ ?

03. Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15, le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20, le faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?

04. Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que las de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras, ¿cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?

05. Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedó más de la mitad. Al día siguiente, le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos. Luego logró vender 99 relojes y le quedó menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?

06. Melvin obtuvo, en sus tres primeros exámenes, 13, 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor igual que 14, ¿cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?



**Anexo n.º 3**  
**GUÍA DE ENTREVISTA**

Fecha: ..... Hora: .....

Lugar (ciudad y sitio específico): .....

Entrevistador: .....

Entrevistado: .....

**Introducción:**

A continuación le presentamos las siguientes preguntas relacionados con los cuestionarios n.º 1 y n.º 2. Responda con sinceridad a cada una de ellas, sus respuestas solo servirán para fines de la investigación y su identificación se mantendrá en absoluta reserva.

**Características de la entrevista:** Confidencial.

1. ¿Cómo comparas dos números enteros?
2. ¿Aplicas el mismo método cuando comparas dos números positivos o dos números negativos?
3. ¿Cómo identificas los símbolos de la desigualdad “<”, “>”, “≤” y “≥”?
4. ¿Qué entiendes por el símbolo  $\neq$ ?
5. ¿Qué son términos semejantes y como se reducen?
6. ¿Cómo interpretas cuando te piden resolver una inecuación?
7. ¿Sí tienes una desigualdad  $-5 \leq 4$ , que pasa con la desigualdad si le cambiamos de signo a 5 y 4?