PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

La creación de problemas como medio para comprender la relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR:

RODRIGUEZ BARRENECHEA, JUAN JOSE

ASESOR:

MALASPINA JURADO, ULDARICO VICTOR

San Miguel, 2018

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo analizar cómo la creación de problemas contribuye a que los profesores de secundaria comprendan las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, a través de un taller de creación de problemas matemáticos. Esta investigación se realizó con profesores de matemática en servicio del nivel secundario.

El estudio surgió al hacer la revisión bibliográfica de los textos escolares del nivel secundario del Perú, donde se observó que estos textos no se enfocan en mostrar las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas. Así también las investigaciones de enseñanza de las Matemáticas donde expresan la problemática que las ecuaciones y funciones cuadráticas son enseñadas sin relacionarlas.

Utilizamos como referente teórico al enfoque de Creación de Problemas de Malaspina, enfatizando en los problemas creados por variación y elaboración. Este enfoque sirvió de apoyo para aplicar las estrategias: Episodio, problema Pre y problema Pos (EPP) y Situación, problema Pre, problema Pos (SPP).

Nuestra investigación fue de corte cualitativa y, en cuanto a la metodología, usamos aspectos de un estudio de caso. En la parte experimental, presentamos un taller de creación de problemas dirigido para profesores, donde se desarrolló las estrategias EPP y SPP y dos pruebas exploratorias para medir los conocimientos de los profesores sobre las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas antes y después del taller de creación de problemas de Matemática.

Finalmente, en esta investigación, comprobamos que los profesores de Matemática en servicio, luego del taller de creación de problemas matemáticos, mejoraron en su comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Palabras clave: ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas, creación de problemas, profesores en servicio.

ABSTRACT

The objective of the present research is to analyze how the problem-posing contributes with secondary school teachers to understand the relationships between equations and quadratic functions, through a mathematical problem posing workshop. This research was conducted with in-service mathematics teachers of secondary level.

The study arose when we observed that the high school textbooks do not focus on showing the relations between the equations and quadratic functions, while we did a bibliographical review in Peru secondary school textbooks. We also found that some research in mathematics education highlights the problem of teaching equations and quadratic functions without showing their close relationships.

We use as theoretical references the Malaspina's approach on problem posing, emphasizing the problems created by variation and elaboration. This approach served as support to apply the strategies: Episode, problem Pre and problem Pos (EPP) and Situation, problem Pre, problem Pos (SPP).

Our research was qualitative court and, we used aspects of a case study as the methodology. In the experimental part, we present a problem posing workshop for teachers, where was developed the strategies EPP and SPP and two exploratory tests to measure the knowledge of the teachers about the relations between the equations and quadratic functions before and after the mathematical problem posing workshop.

Finally, in this investigation, we verified that the mathematical problem posing workshop improved in-service mathematics teachers' understanding about the relationships between equations and quadratic functions.

Keywords: Quadratic equations, quadratic functions, problem posing, in-service teachers.

DEDICATORIA

A mis padres, Marcelo y María, por el amor y apoyo incondicional.

A mis hermanos, Manuel y María.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis, Dr. Uldarico Malaspina Jurado por su dedicación, su paciencia, apoyo constante y sugerencias durante la elaboración de esta investigación.

A la Mg. Carolina Rita Reaño Paredes y la Mg. Augusta Osorio Gonzales, por sus valiosas sugerencias, orientaciones, consejos y contribuciones en el desarrollo de esta investigación.

A la Dra. Jesús Flores Salazar, a la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y a todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por las experiencias y conocimientos que me transmitieron durante las clases.

A la Institución Educativa San Antonio Abad – Huaura por brindarme su instalaciones y el apoyo para la realización del Taller de creación de problemas sobre la relación de las ecuación y funciones cuadráticas.

A los profesores participantes del taller de creación de problemas por su colaboración e interés en participar.

A Alexander, Michael y Violeta por su amistad, cariño y compañía.

A mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú por todas las experiencias compartidas durante las clases.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surgió por el interés de analizar cómo contribuir a la comprensión de la relación entre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas mediante la creación de problemas.

La investigación asumió como objetivo general analizar cómo el taller de creación de problemas contribuye en la comprensión, a los profesores de secundaria en servicio, de la relación entre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas, mediante un taller de creación de problemas basados en el enfoque desarrollado por Malaspina (2013).

Para lograr este objetivo, se diseñaron actividades que permitieron identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas y su relación entre ellas. Además, se elaboraron exploraciones del tipo cognitivo que permitieron identificar los cambios en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas.

A continuación, presentamos la estructura de la investigación compuesta de cinco capítulos.

En el primer capítulo, mostramos la revisión de las investigaciones referentes a las ecuaciones y funciones cuadráticas y las investigaciones relacionadas entre estos dos objetos matemáticos. Esta revisión nos lleva a presentar la pregunta de investigación y los objetivos específicos.

En el segundo capítulo, describiremos los dos objetos matemáticos como lo son la ecuación y función cuadrática y desarrollaremos los aspectos matemáticos sobre las relaciones de estos dos objetos matemáticos. El estudio se basó en el libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000) y en el libro de Stewart, Redlin y Watson (2007).

También describiremos el aspecto didáctico, donde se hizo una revisión y análisis de la enseñanza de las ecuaciones y funciones cuadráticas en la educación básica regular, usando como fuente los libros de tercero, cuarto y quinto grado de educación secundaria que el Ministerio de Educación distribuye a nivel nacional.

En el tercer capítulo, mostramos los elementos del marco teórico relacionados a la creación de problemas propuesto por Malaspina (2013 – 2017). Además, describimos la metodología de investigación y las herramientas para los análisis posteriores.

En el cuarto capítulo, presentamos la experimentación del taller de creación de problemas con profesores del nivel secundaria; el análisis de las pruebas exploratorias y fichas desarrolladas en el taller de creación. También comprende la descripción de los sujetos de investigación, secuencia de actividades y los instrumentos utilizados.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación, que responderán al objetivo general yespecíficos de la investigación, así como las sugerencias consideradas que pueden servir para futuras investigaciones relacionadas con temas afines al presente estudio.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, se presentan los antecedentes, la justificación y los objetivos de nuestra investigación. Para ello, realizamos una revisión de investigaciones relacionadas con las ecuaciones y funciones cuadráticas; las relaciones entre estos y el enfoque de creación de problemas con ambos objetos matemáticos. Mostraremos las razones para que nuestra investigación resulte pertinente y, finalmente, presentamos el problema de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 Antecedentes

El interés de la investigación surgió por cómo comprenden los profesores en servicio las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, las dificultades que se tienen al enseñar el tema y las pocas tareas que se muestren las relaciones entre estos dos objetos matemáticos.

A continuación, mostraremos las investigaciones en la enseñanza de las matemáticas relacionadas con los objetos matemáticos ecuaciones y funciones en general y, de forma más precisa, el de ecuación y función cuadrática. También mostraremos investigaciones con el enfoque de creación de problemas sobre ecuaciones y/o funciones cuadráticas.

1.1.1 Investigaciones relacionadas al objeto ecuaciones cuadráticas

En esta sección mostraremos las investigaciones referentes al concepto de ecuación cuadrática en la enseñanza de las matemáticas:

Acuña, Bustos, Cuervos y Pulido (2012) reconocen tres problemáticas relacionados a las ecuaciones cuadráticas: En primer lugar el trabajo algorítmico de la fórmula matemática de la ecuación cuadrática, el cual muchas veces limita el razonamiento del alumno y hace mecanizado el desarrollo para encontrar el conjunto solución; el segundo, el escaso manejo de otros registros de representación del objeto matemático, referente a cuando se enseña el objeto matemático se relaciona poco con el trinomio cuadrático o las funciones cuadráticas; y, por último, el olvido de la evolución histórica de las ecuaciones cuadráticas cuando los profesores enseñan este tema.

Acuña et al (2012) buscan una forma diferente que ayude a solventar las dificultades al enseñar las ecuaciones cuadráticas. Para eso diseñan y efectúan una sesión de clase interactiva, en la cual el alumno, por medio de un juego, comienza a practicar y resolver ecuaciones cuadráticas. Para ello, usan el método de la antigua civilización griega, la cual ayuda a resolver las ecuaciones cuadráticas de una forma distinta a los métodos actuales.

Acuña et al (2012), con esta propuesta, recurren a un método que no sea el algoritmo de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Así afirman que se debe buscar motivar el aprendizaje de los estudiantes para que no pierdan el interés y ellos logren conocer otros métodos que resuelvan una ecuación cuadrática.

El concepto de ecuación cuadrática se ha desarrollado en diferentes culturas y en distinto períodos de la historia, ya que existen trabajos de investigación donde se muestra el origen y cómo fue el desarrollo de este concepto a través de la historia en diferentes civilizaciones como las egipcias, griegas, árabes, chinas, entre otras.

A continuación, mostramos la investigación de Martínez y Arrieche (2012) sobre el desarrollo del concepto ecuación cuadrática en una de estas civilizaciones.

Martínez y Arrieche (2012) muestran un análisis histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado en la civilización china entre los siglos II a.C. y XIII d. C. Así, en un estudio documental, exponen la importancia de las ecuaciones cuadráticas.

Para ello, revisan la evolución a través de la historia, sus dificultades y errores en el desarrollo de los conceptos necesarios para esta ecuación. Los autores identifican los elementos primarios y configuraciones epistémicas asociadas a dos problemas matemáticos desarrollados por la civilización china, donde se usa el concepto de ecuación cuadrática.

En dicho análisis, usan los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS). Luego de realizar el análisis epistemológico, los autores afirman que el profesor puede enseñar cómo la civilización china en su vida cotidiana usaba este concepto o platicar sobre la biografía de personajes chinos y de sus aportes para tratar de motivar y sensibilizar a los alumnos al aprender dicho tema y así realizar una enseñanza menos rígida.

Martínez y Arrieche (2012) afirman que se debe mejorar o estimular la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, pues los alumnos muchas veces resuelven las ecuaciones cuadráticas solo aplicando la fórmula general, lo cual hace un desarrollo de forma algorítmica, mecanizada y aburrida. Por ello, los autores precisan que conocer la epistemología del concepto de ecuación cuadrática permite al profesor desarrollar y discutir problemas similares hechos por las antiguas civilizaciones; también hace que el profesor cree actividades con procedimientos parecidos a los problemas matemáticos desarrollados por estas civilizaciones antiguas y así logre mejorar sus sesiones al enseñar las ecuaciones cuadráticas.

Por otra parte, Silveira y Cardoso (2015) realiza una investigación cualitativa en la didáctica curricular matemática con jóvenes y adultos de la enseñanza regular sobre las ecuaciones cuadráticas, basadas en una investigación documental y bibliográfica, para luego realizar un análisis curricular.

Los autores expresan que el concepto de ecuación cuadrática es visto, por muchos alumnos y profesores, como un tema donde se debe ejercitar el uso de fórmulas y en el cual el profesor entrena a sus estudiantes en resolver diferentes ejercicios, para que se familiaricen con el uso de técnicas para encontrar el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas.

Silveira y Cardoso (2015) explican que la mayoría de los textos escolares se enfocan proponer ejercicios para el uso de fórmulas y reforzar técnicas para encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática. Estos textos no permiten que los alumnos se enfrenten a situaciones problemas o problemas cotidianos; además, este tipo de enseñanza es desmotivadora y provoca que los alumnos le den poca importancia al estudio de las ecuaciones cuadráticas.

Los autores manifiestan que actualmente en la enseñanza de la Matemática se cuenta con diversas metodologías que facilitan y estimulan el aprendizaje de los alumnos. Dentro de estas tenemos la Historia de las Matemáticas, la cual permite fortalecer los contextos de los problemas, como también ayuda a evocar métodos e instrumentos de construcción de estrategias de resolución que ya han sido desarrollados por antiguas civilizaciones.

Estas investigaciones sobre ecuaciones cuadráticas coinciden en que el tema es abordado de manera metódica y hace que los alumnos pierdan el interés en comprender un tema tan importante y que luego no le permitirá comprender conceptos posteriores como las funciones cuadráticas o funciones polinómicas; además, para mejorar la forma de aprender las ecuaciones cuadrática, proponen que el estudiante resuelva problemas motivadores. Para ello, se pueden basar en problemas que han sido desarrollados por antiguas civilizaciones o simplemente trabajar con problemas cotidianos, donde ellos estén familiarizados con temas de su entorno y así logren comprender en forma más fácil el concepto.

1.1.2 Investigaciones relacionadas al objeto funciones cuadráticas

En esta sección, mostraremos investigaciones referentes al concepto de ecuación cuadrática en la enseñanza de las Matemáticas:

Tocto (2016) realiza una investigación cualitativa, donde analiza cómo el transitar en diferentes registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de educación secundaria.

En su trabajo, utiliza como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta de Duval, donde diseña y aplica una secuencia de dos actividades, con el propósito de que los estudiantes, al resolver las actividades, transiten por los diversos registros de la noción de función cuadrática (lengua natural, tabular, algebraico y gráfico).

El autor se enfoca en analizar las conversiones y tratamientos que realizaron siete estudiantes que participaron de sus dos actividades; además de identificar las dificultades de los estudiantes al transitar entre los diferentes registros.

Entre sus principales conclusiones, afirma que la mayoría de los estudiantes lograron transitar por los cuatro registros de representación semiótica, siendo el registro de lengua natural el fundamental para el tránsito entre los otros tres registros, pues este permite que el estudiante entienda el problema y lo asocie a situaciones extra-matemáticas. El autor también asevera que es importante que los estudiantes entiendan los conceptos de función cuadrática en el registro algebraico, pero va a comprender el objeto matemático cuando realice conversiones y tratamientos en otros registros.

Huapaya (2012) presenta una propuesta didáctica que favorezca el aprendizaje del concepto función cuadrática y permita el tránsito entre diferentes registros de representación semiótica, basados en el marco teórico de la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas de Duval.

El autor diseña tres actividades (actividad cero, actividad I y actividad II) usando las herramientas del programa Excel y el graficador FUNCIONSWIN32. Luego de la experimentación, en la cual participaron seis estudiantes de 16 años, afirma que los estudiantes articularon y coordinaron en diferentes registros de representación la función cuadrática, pues transitaron en dos o más representaciones semióticas de la función cuadrática durante las actividades de modelación, apoyados en herramientas tecnológicas.

Ambas investigaciones, sobre funciones cuadráticas, son trabajadas en el marco teórico de representación semiótica, donde muestran la importancia de la enseñanza de este objeto matemático en diferentes registros y el lograr que el alumno transite en estos registros mejora la comprensión del concepto función cuadrática.

1.1.3 Investigaciones sobre la relación de ecuaciones y funciones cuadráticas

En esta sección mostraremos investigaciones referentes a las relaciones que tienen los conceptos de ecuación y función cuadrática en la enseñanza de las Matemáticas; sin embargo, no existen investigaciones que se centren solo en dichas relaciones, pero expondremos dos investigaciones de funciones cuadráticas que manifiestan sobre la importancia de las relaciones de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

Campos (2014) indaga los aspectos conceptuales y metodológicos del objeto matemático función cuadrática que se encuentran presentes en los textos escolares de Matemáticas del noveno grado en Colombia. Para este estudio, se utilizan 19 libros de nivel secundario del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) del portal Colombia Aprende.

El autor manifiesta que, en cuanto a las actividades para la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática, estas se encuentran diseñadas para que el estudiante opere expresiones algebraicas, resuelva ecuaciones cuadráticas y realice técnicas para graficar, donde se pueden clasificar como ejercicios de preparación para el desarrollo de habilidades matemáticas específicas. Es decir, que al quedarse solo con ejercicios de este tipo, no se educa al estudiante para el enfrentamiento de situaciones problema en contextos reales.

Campos (2014) resalta, entre los aspectos conceptuales analizados, que todos los textos presentan vacíos de información para argumentar o articular la relación existente entre la ecuación cuadrática y la función cuadrática. También afirma que este vacío de información, en el estudiante, puede crear dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de función cuadrática en Algebra elemental y en su futuro estudio del Cálculo.

Por otra parte, Mesa y Villa Ochoa (2008) identifican momentos en la historia en donde se construyó el concepto de función cuadrática. Lo hacen por medio de la revisión de documentos históricos-bibliográficos, donde el concepto función cuadrática es asociado a la forma de un trinomio cuadrático o una forma cuadrática.

Mesa y Villa Ochoa (2008) hacen esta revisión histórica con el propósito de realizar una propuesta didáctica que ofrezca elementos que permita la reflexión, por parte del profesor, en el momento de abordar este concepto en el aula.

Los autores dividen en cuatro momentos el desarrollo de las nociones asociadas a las formas cuadráticas: Las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones.

- Primer momento: La forma cuadrática como una ecuación cuadrática. El concepto de ecuación cuadrática es tema importante del Algebra actual que ha sido desarrollado desde diversas culturas antiguas, tales como la babilónica, griega y árabe, en las cuales se resalta una estrecha vinculación con el entorno y con la representación Geométrica tal cómo el área.
- Segundo momento: La forma cuadrática como una cónica. Las cónicas aparecieron en la cultura griega y se desarrollaron con mayor auge en el siglo XVII, donde la forma cuadrática se la vincula geométricamente (parábola) con ecuaciones de segundo grado de variables x e y.
- El tercer momento se destaca el aporte de Galileo, donde establece relaciones entre dos cantidades que varían. Estas primeras nociones de la dependencia de una variable son los principios de las definiciones de las funciones en general.
- El cuarto momento es el inicio del concepto función cuadrática, donde se hace la separación de la vinculación de la representación cuadrática con el área para vincularla con la potencia de un número y su equivalente geométrico la parábola. Para los autores, esta ruptura hace la primera definición del concepto de función cuadrática, donde se establece una relación entre dos variables y donde una va a depender de la otra.

Al realizar este recorrido histórico, Mesa y Villa Ochoa (2008) muestran cómo se relacionan los conceptos de ecuación y función cuadrática, los cuales fueron desarrollados por la necesidad del entorno que había en sus respectivos tiempos.

Desde el punto de vista histórico, las ecuaciones y funciones cuadráticas tuvieron un inicio diferente y ligadas a un proceso de modelización, de lo cual los autores dejan una importante interrogante: Si se debe continuar con separar estos dos conceptos matemáticos al interior del aula de clase o si es posible sustentar la necesidad de establecer relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas a través de la modelización de situaciones.

Estas dos investigaciones resaltan la necesidad de enseñar las relaciones de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas, pues dejar estos vacíos en los conocimientos, al enseñar estos temas, producirán errores en los estudiantes en temas del Algebra que involucren estos temas en cursos de nivel superior. Además, una alternativa de enseñar estas relaciones es usando ejercicios que involucren los temas cotidianos o del entorno del estudiante.

1.1.4 Investigaciones en el enfoque de creación de problemas

El centro de las Matemáticas es resolver problemas, pero aprender de ella no sólo se basa en tomar un problema y resolverlo, también se desarrolla y refuerzan los conocimientos al poder crear y proponer situaciones que sean realmente atractivos.

Para conseguir que un profesor o los mismos estudiantes logren crear un problema, se debe desarrollar la creatividad proactiva. Esto nos lleva a la revisión de la literatura sobre creación de problemas que involucren el uso de los objetos matemáticos funciones y/o ecuaciones cuadráticas.

A continuación, haremos la descripción de las pocas investigaciones encontradas sobre funciones cuadráticas con el enfoque de creación de problemas.

El artículo de Malaspina (2015) presenta el desarrollo de un taller de creación de problemas con profesores de secundaria, donde se desea introducir el concepto de funciones cuadráticas, con base a que en sesiones anteriores se desarrolló problemas de funciones afines.

A los asistentes al taller se les asignó, en forma individual y luego en parejas, la tarea de crear un problema en cuya solución se utilice una función cuadrática. La tarea propuesta se ve en la Figura 1.

Tarea
Crear un problema de contexto extra matemático en cuya solución se emplee la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15,\ x \in R$.

Figura 1. Tarea dada en un taller de creación de problemas matemáticos.
Fuente: Malaspina (2015, p. 1)

Malaspina (2015) manifiesta que proponer problemas de forma novedosa sobre funciones cuadráticas, donde se use funciones afines, resulta atrayente pues obliga a los participantes a realizar conexiones con sus conocimientos aprendidos para poder crear un problema.

Así, los profesores participantes del taller crearon diversos problemas, además se les pidió que vinculen la función cuadrática inicial con las soluciones que habían obtenido de sus problemas creados. Así surgió el problema (véase figura 2) al que el investigador pretendía que llegasen, donde los participantes quedaron fascinados por la relación estrecha que existe entre las funciones afines que se generan de una ecuación cuadrática con los ceros de la función cuadrática dada.

> *Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$, empleando los gráficos de dos funciones afines.*

Figura 2. Problema creado sobre funciones cuadráticas en un taller.
Fuente: Malaspina (2015, p. 3)

Para Malaspina (2015), lograr que los participantes creen problemas contribuye a que establezcan relaciones entre el objeto matemático y contextos reales. Además, lleva a los participantes ante el reto de resolver problemas creados por ellos mismos o por sus compañeros del taller.

La investigación anterior sirvió de base para la desarrollada por Torres (2016), ya que implementa un taller de creación de problemas sobre funciones cuadráticas dirigido para profesores en servicio, donde usa el enfoque teórico de creación de problemas propuesto por Malaspina (2013) y, además, realiza un análisis didáctico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) a los problemas que se crearon en las sesiones del taller.

El autor tuvo como objetivos identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre la función cuadrática y los objetos matemáticos asociados a ella; analizar e identificar las prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas a la resolución y creación de problemas por variación sobre funciones cuadráticas; explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

Torres (2016), para lograr los objetivos planteados, se basa en la metodología cualitativa de estudio de caso, donde usa la estrategia Episodio, Reflexión, Problema pre y pos (ERPP), estrategia del enfoque de creación de problemas de Malaspina (2017) y presenta las configuraciones hechas por los profesores participantes de un taller. Además, al usar configuraciones epistémicas y cognitivas e inclusive criterios de idoneidad, hace un análisis completo del problema del episodio y de algunos problemas creados al pedir la creación de un problema pre y analizar si tiene características de un problema pre en relación al problema del episodio.

De esta forma se concluye que los profesores en servicio logran crear problemas didácticamente buenos en el entorno de las funciones cuadráticas, al considerarse la faceta de reflexión didáctica usando configuraciones, según el EOS, pues permite la reflexión sobre la práctica matemática al crear y resolver problemas.

Estas investigaciones logran mostrar que se pueden mejorar en la comprensión de algunos conceptos matemáticos al crear propios problemas propios y una forma que ayuda a facilitar la comprensión de un concepto matemático, como por ejemplo el de crear un problema matemático con temas de contexto cotidiano.

1.2 Justificación

1.2.1 Con base en los antecedentes

Las investigaciones de referencia de Acuña et al. (2012), Martínez y Arrieche (2012) y Silveira y Cardoso (2015) señalan que el concepto de las ecuaciones cuadráticas tiene un aprendizaje procedimental en el aula, donde al alumno se le entrena para resolver estas ecuaciones repitiendo tareas que solo le permite adiestrarse al uso de un algoritmo matemático y se pierden la creatividad, el interés y las conexiones con el entorno cotidiano.

Acuña et al (2012) afirman que es necesario que se realicen conexiones con sus diferentes representaciones que tiene la ecuación cuadrática. Esta aseveración es de gran importancia pues una forma de asociarla con otra representación sería el mostrar las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

En este mismo sentido, Silveira y Cardoso (2015) manifiestan que en los textos escolares, cuando se presenta el tema de las ecuaciones cuadráticas, se muestran ejemplos y tareas donde se propicia que el alumno repita procedimientos o técnicas, haciendo de su aprendizaje desmotivador y a la vez hace que el concepto de ecuaciones cuadráticas les sea aburrido y sin interés. Por ello, el enfoque de creación de problemas puede ayudar a la comprensión de un conocimiento de una forma diferente, así como se muestra en el enfoque de creación de problemas de Malaspina (2015).

Si bien el panorama no es muy diferente al enseñar el tema de las funciones cuadráticas, según Campos (2014), en la mayoría de libros de texto que analizó, se proponen ejercicios donde sólo se repiten técnicas o procedimientos que hacen que los estudiantes resuelvan problemas de funciones cuadráticas en forma mecanizada. Además, en estos textos, los ejercicios no muestran la vinculación que tiene las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

En tanto, la investigación de Mesa y Villa Ochoa (2008) complementa la importancia de encontrar relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, pues al realizar un análisis histórico-documental logran establecer que estos dos conceptos tuvieron un origen separado, pero a su vez ligado y se plantean la interrogante si es necesario en el aula separar estos dos conceptos, pues ambos objetos matemáticos están relacionados a su forma cuadrática.

1.2.2 Con base en el enfoque creación de problemas matemáticos

Es relevante para el presente trabajo las investigaciones con referencia al enfoque de creación de problemas de Malaspina (2013), Malaspina y Vallejo (2014) y Malaspina (2017), que serán el sustento teórico de nuestra investigación.

Malaspina y Vallejo (2014) expresan que es clara la importancia de resolver y crear problemas como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Además, crear problemas es fundamental para un profesor, el cual conoce la realidad en su aula; sin embargo, se pone poco énfasis en la creación de problemas y generalmente se resuelven los mismos problemas que se encuentran en los libros o Internet.

La realidad es rica y crear problemas de Matemáticas, a partir de situaciones reales, contribuirá a tener una mirada más analítica de la realidad.

A continuación, presentamos algunas de las razones didácticas que validan nuestra investigación en el campo de la creación de problemas de Malaspina (2013).

Entre las razones didácticas en la enseñanza:

- Favorece el desarrollo en los profesores de habilidades para proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los estudiantes y a los contextos en los que viven.
- Favorece el desarrollo en los profesores de habilidades para proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en el diseño

curricular y documentos complementarios de los organismos centrados en la educación.

- Favorece el desarrollo en los profesores de habilidades para consolidar su formación matemática.
- Favorece el desarrollo en los profesores de habilidades para llenar el vacío que hay en la mayoría de textos de Matemáticas, sobre todo en el nivel escolar.

Así también, entre las razones didácticas en el aprendizaje:

- Favorece el desarrollo de los estudiantes de habilidades para resolver problemas, formular preguntas, identificar problemas e investigar.
- Favorece el desarrollo de los estudiantes de habilidades para ampliar la visión de las Matemáticas.
- Favorece el desarrollo de los estudiantes de habilidades para establecer conexiones entre la Matemática y otros campos del conocimiento.
- Favorece el desarrollo de los estudiantes de habilidades para fortalecer su autoestima del estudiante.

1.2.3 Con base en el currículo

En los documentos oficiales actuales, el Currículo Nacional de la Educación Básica Regular (CNEB) (Perú, Ministerio de Educación, 2016), prioriza el desarrollo de competencias que permite a los alumnos responder a las demandas de nuestros tiempos, el cual apunta al desarrollo sostenible.

El desarrollo de los temas de ecuación y función cuadrática en el CNEB, son abarcadas por la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

En el actual currículo nacional, se manifiesta que se enseña los temas de ecuaciones y funciones cuadráticas a partir del tercer año de educación secundaria, correspondiente al ciclo VII en el estándar 7. Dicha descripción define el nivel que se espera puedan alcanzar todos los estudiantes al finalizar sus ciclos de la Educación Básica. En la Tabla 1, se hace la representación de la competencia asociada con su estándar deseado.

Tabla 1. *Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia*

Estándar	Contenidos
7	• Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para solucionar ecuaciones cuadráticas. • Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. • Resuelve problemas referidos funciones cuadráticas.

Fuente: Adaptado del Diseño Curricular Nacional. Perú (2016, pág. 149)

Por otro lado, el Ministerio de Educación (MINEDU), en la actualidad, provee de textos de Matemática con los que un profesor desarrolla una sesión de clase. Nos basaremos en los textos Matemática 3, 4 y 5, donde los conceptos de ecuación y función cuadrática son tratados.

Realizando una revisión de estos documentos del MINEDU, por ejemplo, en cuarto año de educación básica regular, se desarrolla en el capítulo 5 los dos conceptos matemáticos: ecuación y función cuadrática (según, Figura 3).

El profesor tiene esta guía para enseñar el concepto de la ecuación cuadrática y mostrar distintos ejemplos para encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática usando métodos de factorización o por fórmula general. De igual forma, al tratar con el concepto de función cuadrática, la guía le permite definir los conceptos sobre función cuadrática y ejemplificar distintas técnicas para graficar.

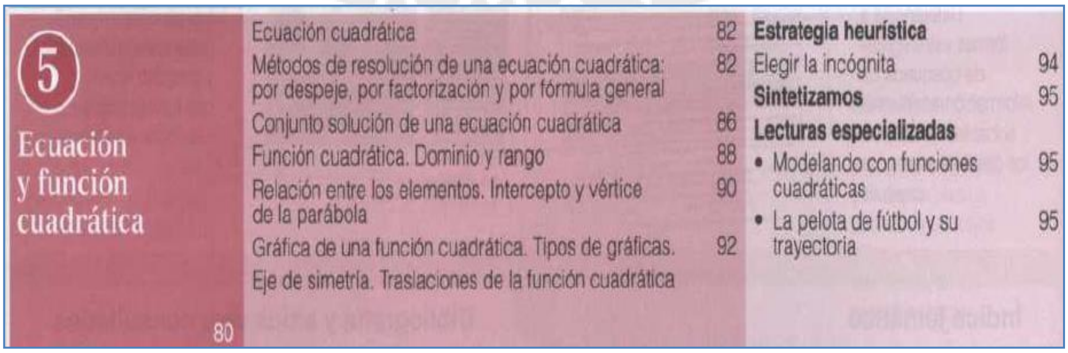

5
Ecuación y función cuadrática
80

Figura 3. Temas del capítulo 5 del cuarto año de secundaria de educación básica regular. Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 6)

En la revisión de estos conceptos en el texto de cuarto de secundaria, se observa que no se hacen referencias por qué se usan las ecuaciones y funciones cuadráticas en conjunto, más aun no orientan la enseñanza del profesor para que los alumnos encuentren relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas; situaciones similares se encuentran en los textos de tercer y quinto año de secundaria que involucren estos temas.

Sí, hay ejemplos en un 5% donde se muestren relaciones entre estos dos objetos matemáticos, pero no le dan importancia y más aún hay errores que pueden confundir en los conceptos al alumno si son enseñados así como están en la guía. (Véase Figura 4)

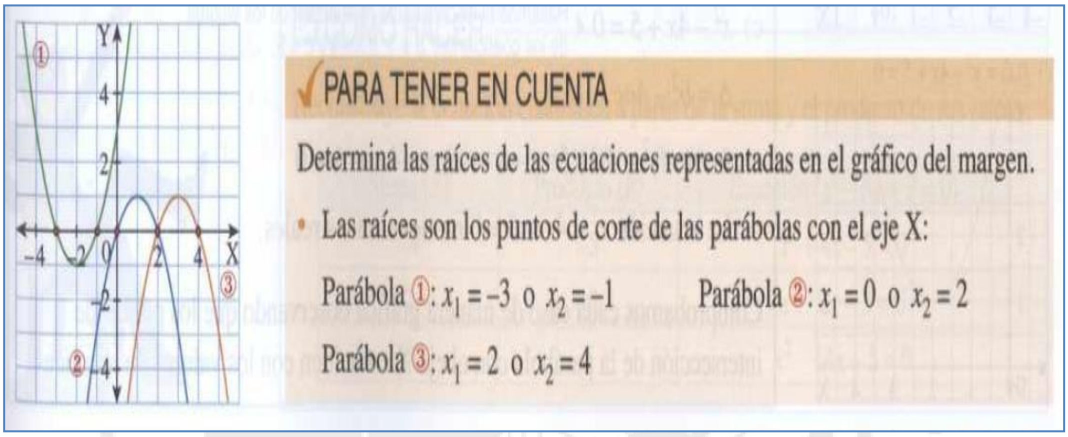


Figura 4. Ejemplo sobre relaciones en el texto escolar del cuarto año de educación secundaria. Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 85)

Se induce a aceptar que las parábolas son gráficos de ecuaciones cuadráticas de una variable (x), cuando lo correcto es que son gráficos de funciones cuadráticas. La relación que se evidencia en ese ejemplo es que las abscisas de los puntos de corte del gráfico de la función cuadrática con el eje X son las soluciones (raíces) de la ecuación cuadrática correspondiente; sin embargo, no es precisamente lo que se muestra en la Figura 4, pues otra vez induce a aceptar que los puntos de corte (pares ordenados) son equivalentes a las raíces (números reales) y al cerrar el capítulo, del texto de cuarto año, solo muestran a los dos objetos por separados, como si los dos conocimientos no tuviesen ninguna relación.

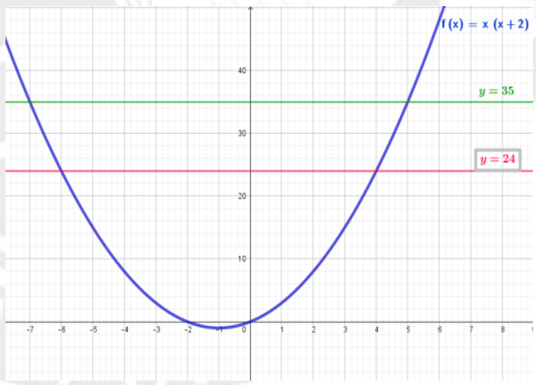
No hemos encontrado, en los documentos revisados, muchos ejemplos donde se vincule las ecuaciones y funciones cuadráticas y menos se logra encontrar ejemplos extra matemáticos que muestren las relaciones entre ambos objetos.

A continuación, mostramos el siguiente problema de contexto extra matemático de creación nuestra, que sería adecuado para evidenciar en clase, ya que muestra otra relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Para un terreno rectangular donde la longitud del largo excede en 2 metros al ancho y el área de terreno de ser mayor que 24 m^2, pero menor que 35 m^2. ¿Cuánto puede medir el ancho?

El problema se puede solucionar por inecuaciones cuadráticas, pero también se puede resolver usando las ecuaciones cuadráticas relacionándolas con las funciones cuadráticas. (Véase la Tabla 2)

Tabla 2. *Solución problema modelo sobre las relaciones de los dos objetos matemáticos.*

Se plantea el modelo.	x: *ancho del terreno en metros* . $x(x+2) = A$ con $20 \leq A \leq 30$	
Uso de 2 ecuaciones cuadráticas.	$x(x+2) = 24$ $x^2 + 2x - 24 = 0$ $(x+6)(x-4) = 0$ $x = -6 \vee x = 4$	$x(x+2) = 35$ $x^2 + 2x - 35 = 0$ $(x+7)(x-5) = 0$ $x = -7 \vee x = 5$
Justificación mediante funciones cuadráticas.	Identificación de la función $f(x) = x(x+2)$.  Identificación de los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática con las rectas $y = 24$ y $y = 35$. Puntos de intersección para abscisas positivas: $(4; 24)$ y $(5; 35)$ Identificación del intervalo de variación y justificación con los valores encontrados al solucionarlo por ecuaciones cuadráticas.	
Respuesta.	El ancho puede medir desde 4 metros hasta 5 metros.	

La solución, por medio de las ecuaciones cuadráticas, se tiene que justificar mediante el gráfico de una función cuadrática, pues este le permite asegurar el intervalo en que varía el valor de x. Este es un ejemplo, entre muchos, que muestran que los dos objetos matemáticos están relacionados y no se deberían presentar por separado.

Por otra parte, la educación está en constante cambio, es así que en el 2007 se publicó el Proyecto Educativo Nacional al 2021 (PEN 2021) y desde ese año se viene realizando proyectos para la mejora de la educación peruana. En dicho documento, el objetivo estratégico 3 específica que docentes bien preparados ejercen profesionalmente la docencia y debe estar preparado para proponer y desarrollar actividades donde el alumno resuelva y cree problemas, donde establezca relaciones entre los objetos matemáticos que enseña.

A lo expuesto en los puntos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, debemos añadir la importancia que tienen los objetos matemáticos en sí mismos. Así, la función cuadrática es importante por ser la función polinómica más sencilla que tiene puntos de valores extremos, porque permite modelar diversas situaciones de la realidad (Física, Ingeniería, Diseño, entre otros.), permite ilustrar funciones con intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como ejemplificare ilustrar funciones no inyectivas, entre otras.

Por otra parte, las ecuaciones cuadráticas son importantes en sí mismas por brindar ejemplos ilustrativos y sencillos del teorema fundamental del Algebra, porque se presentan casos en los que se puede usar la factorización de trinomios y las propiedades del producto de dos números reales para encontrar sus soluciones, modelos de aproximación, entre otras.

La importancia de estos objetos matemáticos se potencia aún más si se interrelacionan, como hemos ilustrado en el punto 1.2.3 y como veremos en los problemas que trabajamos en el taller con profesores para esta investigación.

Todo lo mencionado sobre las ecuaciones y funciones cuadráticas, hace que esta investigación sea pertinente. Una muestra de esto es que se hayan hecho investigaciones sobre estos objetos matemáticos, tales como las de Campos (2014), Mesa y Villa Ochoa (2008) y Torres (2016)

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Para iniciar nuestra investigación nos formulamos una pregunta, basándonos en los antecedentes y en las justificaciones presentadas. La pregunta de investigación es:

> *¿Cómo contribuir a la comprensión de la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas mediante la creación de problemas?*

1.3.1 Objetivo General

Teniendo en cuenta la pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

> *Analizar cómo la creación de problemas contribuye a que los profesores de secundaria en servicio comprendan la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas.*

1.3.2 Objetivos Específicos

Para alcanzar el objetivo general, planteamos los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores de la muestra sobre ecuaciones y funciones cuadráticas y, fundamentalmente, su relación entre ellas.
2. Identificar los cambios en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas luego de aplicar una secuencia de actividades de creación de problemas especialmente diseñada y empleando las estrategias EPP y SPP.

CAPITULO II: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo, mostramos el estudio matemático sobre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas. Además, mostramos el aspecto didáctico, donde se mostrará la forma en cómo se aborda las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas en los libros de textos del Ministerio de Educación a partir del tercer año de secundaria de la Educación Básica Regular (EBR).

2.1 Aspectos matemáticos

2.1.1 Sobre ecuaciones cuadráticas

Para realizar el aspecto matemático sobre ecuaciones cuadráticas nos basamos en Stewart, Redlin y Watson (2007). Los autores afirma que la ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Los autores presentan tres formas de resolver una ecuación cuadrática: por factorización, completación de cuadrados y por fórmula cuadrática.

Tabla 3. *Técnicas para resolver una ecuación cuadrática.*

Factorización	Por aspa simple: $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a(x - r_1)(x - r_2) = 0$ $\rightarrow x = r_1 \vee x = r_2$ Por factor común: $ax^2 + bx + 0 = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$ $\rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$ Por diferencia de cuadrados: ($c < 0$) $ax^2 + 0x + c = 0 \rightarrow (\sqrt{a}x - \sqrt{-c})(\sqrt{a}x + \sqrt{-c}) = 0$ $\rightarrow x = \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{a}} \vee x = -\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{a}}$

Método de completar el cuadrado	$ax^2+bx+c=0 \rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$ $\rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=0$ $\rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$
Fórmula General cuadrática	$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Stewart et al (2007) muestra que la expresión b^2-4ac que aparece bajo el signo de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ y se representa por el signo "Δ". Entonces los autores afirman que las soluciones de una ecuación cuadrática pueden presentar diversas formas, la cual llaman naturaleza de las ecuaciones y está dada en la tabla 4.

Tabla 4. *Naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática según el discriminante.*

Si $\Delta > 0$	La ecuación tiene dos soluciones reales distintas
Si $\Delta = 0$	La ecuación tiene exactamente una solución real.
Si $\Delta < 0$	La ecuación no tiene solución real.

2.1.2 Sobre funciones cuadráticas

En cuanto al aspecto matemático sobre funciones cuadráticas nos basamos en Lima, Carvalho y Wagner (2000). Los autores definen la función cuadrática f cuando existen números reales a, b y c con $a \neq 0$, tal que:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=ax^2+bx+c \end{aligned}$$

Esta definición permite que se identifique a las funciones cuadráticas con un trinomio de segundo grado ax^2+bx+c, donde "ax^2" se le denomina término cuadrático, "bx" es el término lineal, y a "c" término independiente, y cuyo gráfico corresponde a una parábola.

A cada trinomio $ax^2 + bx + c$ le corresponde una única función cuadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Eso significa que la correspondencia (trinomio) ↦ (función cuadrática) es biunívoca.

Lima et al (2000) también muestra que si dos funciones cuadráticas toman los mismos valores en tres puntos distintos x_1, x_2 y x_3 entonces esas funciones son iguales, esto es, toman el mismo valor para cualquier número real x.

Los autores afirman que para poder deducir propiedades en la función cuadrática f es necesario vincularla a su forma canónica $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, pues esta expresión permite hallar el máximo y el mínimo valor que puede tomar la función f, encontrar el vértice y graficar la función f, .

Si $a > 0$, dada la forma canónica de la función cuadrática f tenemos dentro del corchete dos sumandos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ que siempre es mayor o igual a cero y $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ que es una constante; para poder encontrar el menor valor de la función f, igualamos a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ a cero, es decir $x = -\frac{b}{2a}$, y se obtiene que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Por lo tanto cuando $a > 0$, el valor mínimo de f se encuentra en $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. De igual forma si $a < 0$, el valor máximo de f se encuentra en $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Asimismo, en Lima et al (2000), afirma que el gráfico de una función cuadrática es una parábola cuya directriz es la recta horizontal $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$ y cuyo foco es el punto $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$. Esta parábola tiene su concavidad hacia arriba si $a > 0$ o para abajo si $a < 0$. Además, el gráfico de la función f tiene como vértice el punto $V\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

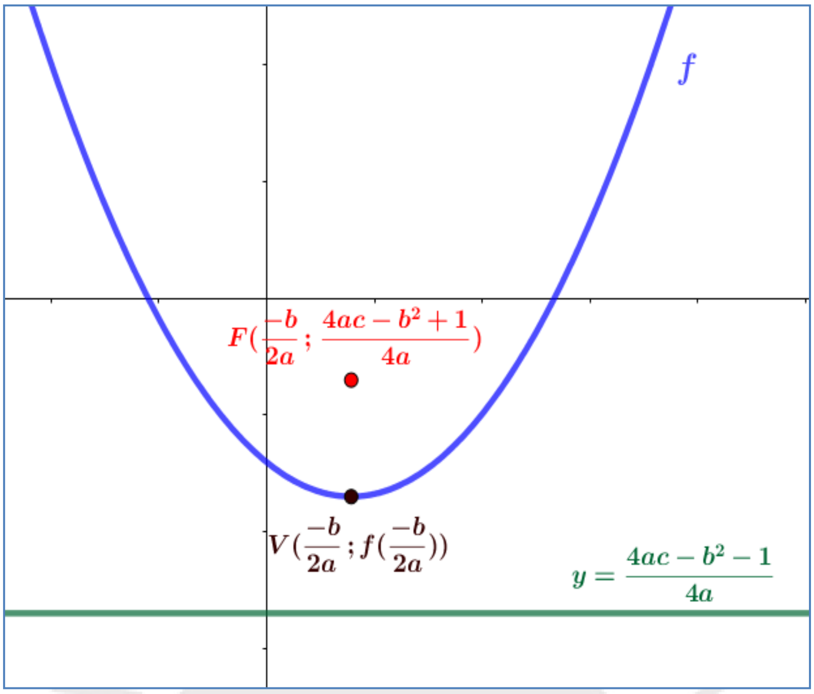


Figura 5. El gráfico de una función cuadrática con sus principales componentes.

2.1.3 Sobre relaciones entre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas

Lima et al (2000), desde su presentación de las funciones cuadráticas, muestra su relación estrecha con las ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, afirma que el estudio de las funciones cuadráticas tiene su origen en la solución de la ecuación de segundo grado. Un ejemplo que muestra es el problema escrito por los babilónicos de hace miles de años; sobre hallar dos números conociendo su suma s y su producto p, los números buscados son las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - sx + p = 0$.

A continuación, definiremos seis relaciones sobre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas:

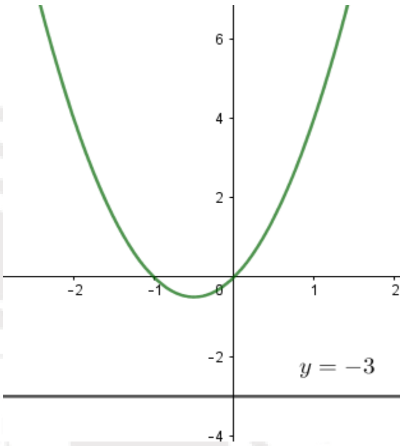
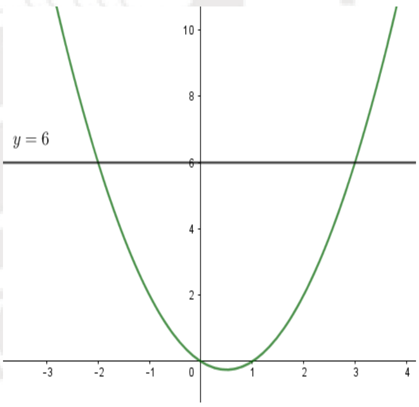
Relación 1. Relaciona algebraicamente la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tabla 5. *Ejemplo de la relación 1.*

Ecuación cuadrática	Función cuadrática
$2x^2 + 2x - 5 = 0$ $x^2 - 3 = 0$ $(x-3)(x+3) = 0$	$f(x) = 2x^2 + 2x - 5$ $g(x) = x^2 - 3$ $h(x) = (x-3)(x+3)$

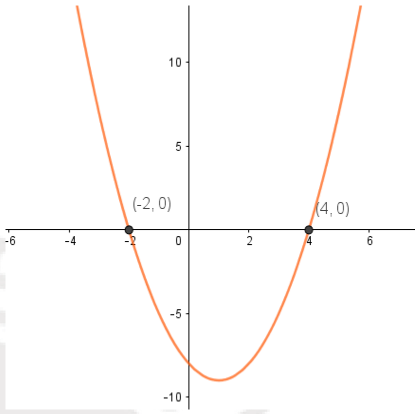
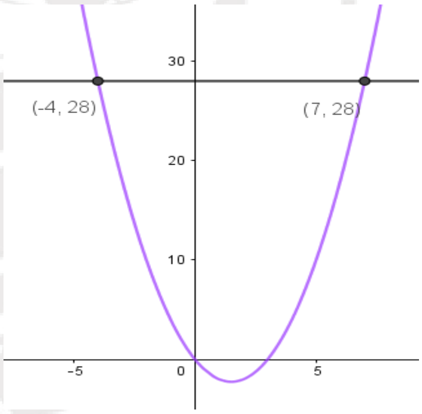
Relación 2. Relaciona la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = k$ con la intersección del gráfico de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y una recta horizontal $y = k$. (Caso particular: $k = 0$, que da las intersecciones con el eje X)

Tabla 6. *Ejemplo de la relación 2.*

Ecuación cuadrática	Función cuadrática
$2x^2 + 2x + 3 = 0$	$f(x) = 2x^2 + 2x \wedge y = -3$ 
$x^2 - x = 6$	$f(x) = x^2 - x \wedge y = 6$ 

Relación 3. Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = k$, con las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la recta horizontal $y = k$. (Caso particular: $k = 0$, que da las intersecciones con el eje X)

Tabla 7. *Ejemplo de la relación 3.*

Ecuación cuadrática	Función cuadrática
$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow C.S = \{-2; 4\}$	$f(x) = x^2 - 2x - 8$ cortes con el eje X: $(-2; 0)$ y $(4; 0)$ 
$x^2 - 3x = 28 \rightarrow C.S = \{-4; 7\}$	$f(x) = x^2 - 3x$ intersecado con la recta horizontal $y = 28$: $(-4; 28)$ y $(7; 28)$ 

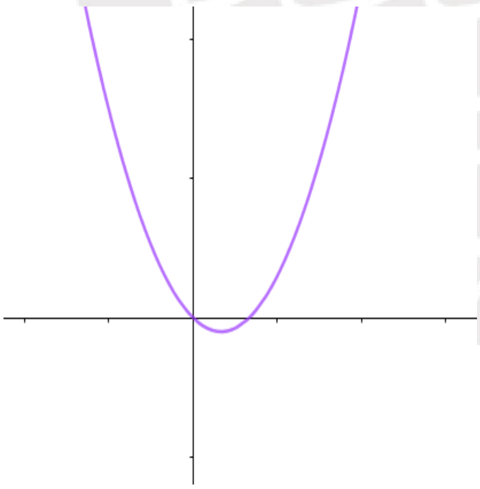
Relación 4. Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática y la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática $f(x) = k$. (Caso particular: *k = 0*, que da las intersecciones con el eje X)

Tabla 8. *Ejemplo de la relación 4.*

Función cuadrática	Ecuación cuadrática
Halla el gráfico de la función $f(x) = x^2 + x$	Para realizar dicho gráfico, se encuentra los valores x de la ecuación $x^2 + x = 0$ y así encontrar las abscisas de los puntos de cortes del gráfico de f con el eje X.

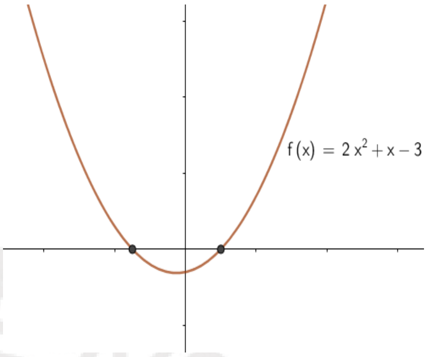
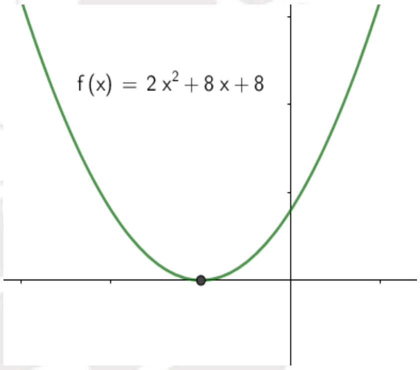
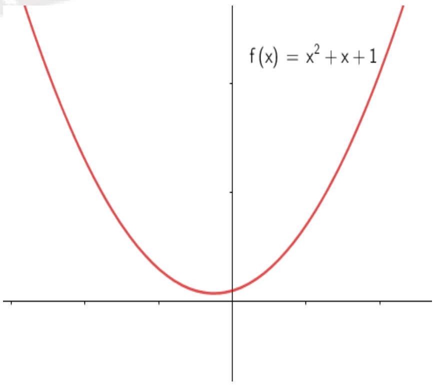
Relación 5. Identifica y relaciona el gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Tabla 9. *Ejemplo de la relación 5.*

Función cuadrática	Ecuación cuadrática
Sea el gráfico de la función cuadrática f Tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$: 	$ax^2 + bx + c = 0$ El parámetro a es positivo, pues la función cuadrática (parábola) es cóncava hacia arriba. Porque la abscisa del punto vértice es positivo y el valor del parámetro a es positivo, entonces el parámetro b es negativo. El parámetro c es 0 pues el punto de intersección con el Eje Y de la parábola se da en el punto (0; 0)

Relación 6. Relaciona el número de cortes del gráfico de una función cuadrática y el eje X, con el valor de la discriminante de una ecuación cuadrática y viceversa.

Tabla 10. *Ejemplo de la relación 6.*

Ecuación cuadrática	Función cuadrática
$2x^2 + x - 3 = 0$, se tiene que: $\Delta > 0$, dos soluciones reales	El gráfico de la función tiene dos cortes con el eje X. 
$2x^2 + 8x + 8 = 0$, se tiene que: $\Delta = 0$, una solución real	El gráfico de la función solo tiene un punto de corte con el eje X 
$x^2 + x + 1 = 0$, se tiene que: $\Delta < 0$, no tiene solución real	El gráfico de la función no se interseca con el eje X. 

2.2 Aspectos didácticos

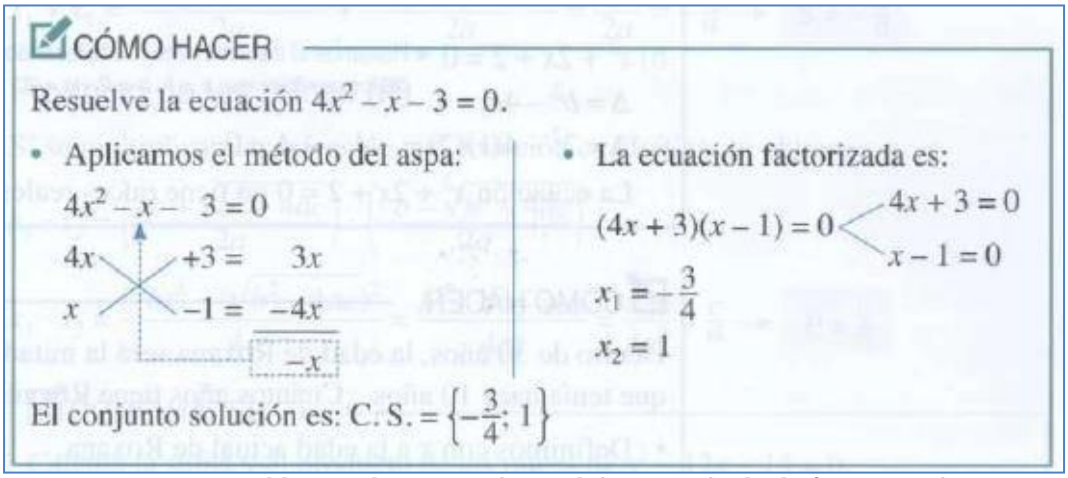
La investigación de Campos (2014), descrita en nuestros antecedentes, muestra la problemática que en los textos escolares de matemática del noveno año de Colombia presentan vacíos de información sobre vincular las ecuaciones cuadráticas y las funciones cuadráticas; además, los textos analizados no contienen tareas que permita el aprendizaje de estos dos conceptos relacionados. Esta problemática también se puede encontrar en nuestros textos escolares peruanos donde se presente los conceptos matemáticos de ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas para aclarar tal afirmación realizamos el siguiente estudio didáctico de los textos escolares.

En el estudio didáctico se presenta información de los textos de tercero, cuarto y quinto año de educación secundaria dados por el Ministerio de Educación de Perú; pues según el Currículo Nacional vigente las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas se llevan en tercer, cuarto y quinto año de educación secundaria de la EBR. A continuación, se analiza cómo los temas de ecuación cuadrática, función cuadrática y las relaciones entre estos dos objetos matemáticos se presentan en cada uno de los tres textos escolares.

En el texto de tercer año de educación secundaria, ambos objetos matemáticos son abordados en el capítulo 6, véase la Figura 6:

Figura 6. Temas del capítulo 6 donde están ambos conceptos matemáticos.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 6)

Primero se presenta los conceptos de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (pág. 88), donde se explica qué es una ecuación cuadrática completa e incompleta; además, con ejemplos resuelven diferentes ecuaciones cuadráticas, donde muestran técnicas para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática por: factorización y fórmula general. (Véase Figura 7)


CÓMO HACER

Resuelve la ecuación $4x^2 - x - 3 = 0$.

- Aplicamos el método del aspa:

$$4x^2 - x - \ \ 3 = 0$$
$$4x \quad +3 = \ \ 3x$$
$$x \quad -1 = -4x$$
$$-x$$

- La ecuación factorizada es:

$$(4x+3)(x-1) = 0 \begin{cases} 4x+3=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$
$$x_1 = -\frac{3}{4}$$
$$x_2 = 1$$

El conjunto solución es: C. S. $= \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$

Figura 7. Problema sobre ecuación cuadrática – método de factorización
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 89)

Luego, en el texto se presenta conceptos sobre el número de raíces de una ecuación cuadrática y propiedades de una ecuación cuadrática completa: suma y producto de raíces. Y refuerza, cada uno de esos conocimientos con más ejercicios para familiarizarse con las diversas técnicas presentadas en ese texto.

Así también, en el mismo capítulo del texto de tercer año de educación secundaria se presenta el objeto matemático función cuadrática (pág. 93) en donde se inicia con la definición algebraica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y luego muestra su representación gráfica (véase Figura 8).

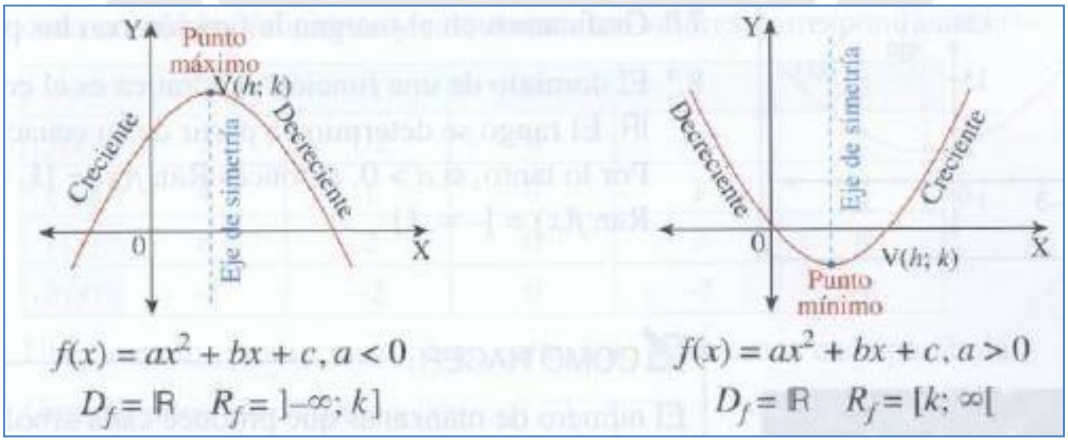


Figura 8. Representación gráfica de la función cuadrática.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 93)

En este texto se presenta un ejemplo, donde se muestra el estudio de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ y al buscar obtener su representación gráfica, se realiza una secuencia de pasos. En el paso 5 se muestra el uso del concepto del discriminante de la ecuación cuadrática y con eso la Relación 6, mostrada en la sección anterior, entre estos dos objetos matemáticos (véase Figura 9), pues al analizar el discriminante demuestra que la función cuadrática no tendrá cortes con el eje X.

5.° Analizamos el discriminante de la ecuación de segundo grado.

$0 = 2x^2 - 4x + 5 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 16 - 40 \rightarrow \Delta = -24$

Como el radicando es negativo, no tiene solución real. Por lo tanto, no corta al eje X.

Figura 9. Uso de las discriminante para justificar el gráfico de una función.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 94)

El texto de tercer año continúa con la identificación de gráficos de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para diferentes valores de los parámetros a, b y c. Estos ejemplos son para reforzar las técnicas para graficar una función cuadrática, para encontrar el vértice de la parábola asociada a la función cuadrática y el uso de tabulación de puntos para esbozar el gráfico de la parábola. (Véase Figura 10)

CÓMO HACER

Grafica la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$.

- Determinamos las coordenadas del vértice $(h; k)$.

  $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(2)} = 1 \qquad k = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 4 = 2$

  Por lo tanto, el vértice de la parábola es $(1; 2)$ y el eje de simetría es la recta $x = 1$.

- Elaboramos una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	20	10	4	2	4

- Finalmente, trazamos la parábola ubicando el vértice y los otros puntos de la tabla de valores. La gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ se obtiene al trasladar la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 4x$ cuatro unidades hacia arriba, como se muestra en la figura del margen.

Figura 10. Ejemplo sobre gráfico de funciones cuadráticas
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 97)

Como resumen del capítulo 6 del texto de tercer año, se muestra el siguiente diagrama donde se muestra a los dos objetos por separado sin vincular ningún tema (Véase Figura 11). Aunque estén en un solo capítulo se muestran los dos conceptos matemáticos por separado, al presentarse las ecuaciones cuadráticas solo refuerzan las diferentes técnicas para encontrar su conjunto solución y al presentar las funciones cuadráticas refuerzan las técnicas para graficar. Sólo en un ejemplo se vio la necesidad de relacionar las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

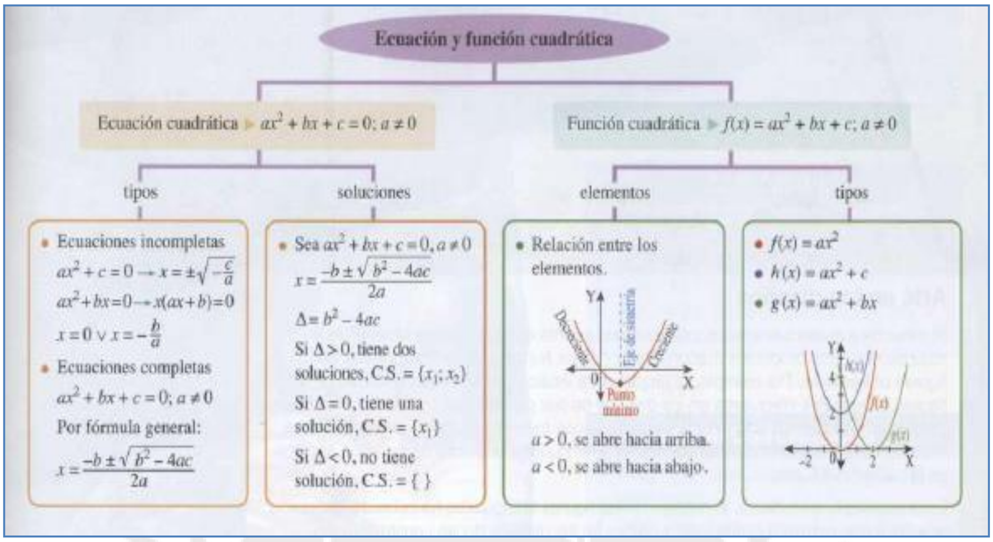


Figura 11. Resumen del capítulo 6 del tercer año de educación secundaria
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 99)

A continuación, analizamos el libro de texto del cuarto año de educación secundaria; ambos objetos matemáticos se presentan en el capítulo 5, que se inicia mostrando la definición de la ecuación cuadrática seguida de diferentes problemas para encontrar el conjunto solución por: despeje, factorización y fórmula general. En uno de los ejemplos se muestra otra relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas (véase Figura 12) en esta tarea se pide con el gráfico de una función cuadrática se logre encontrar el conjunto solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 3 = 0$. Aunque también, se muestra un error pues los puntos de intersección con el eje X son los pares ordenados $(-1; 0)$ y $(3;\ 0)$.

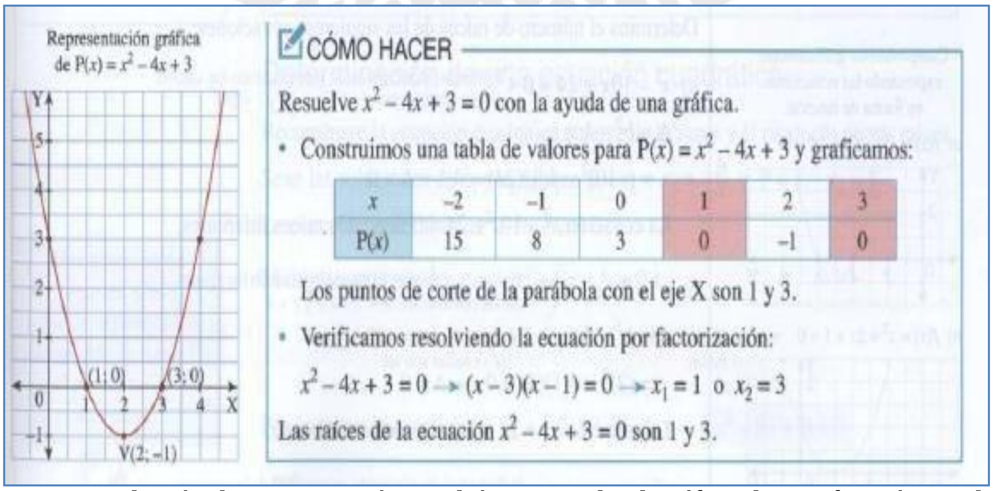
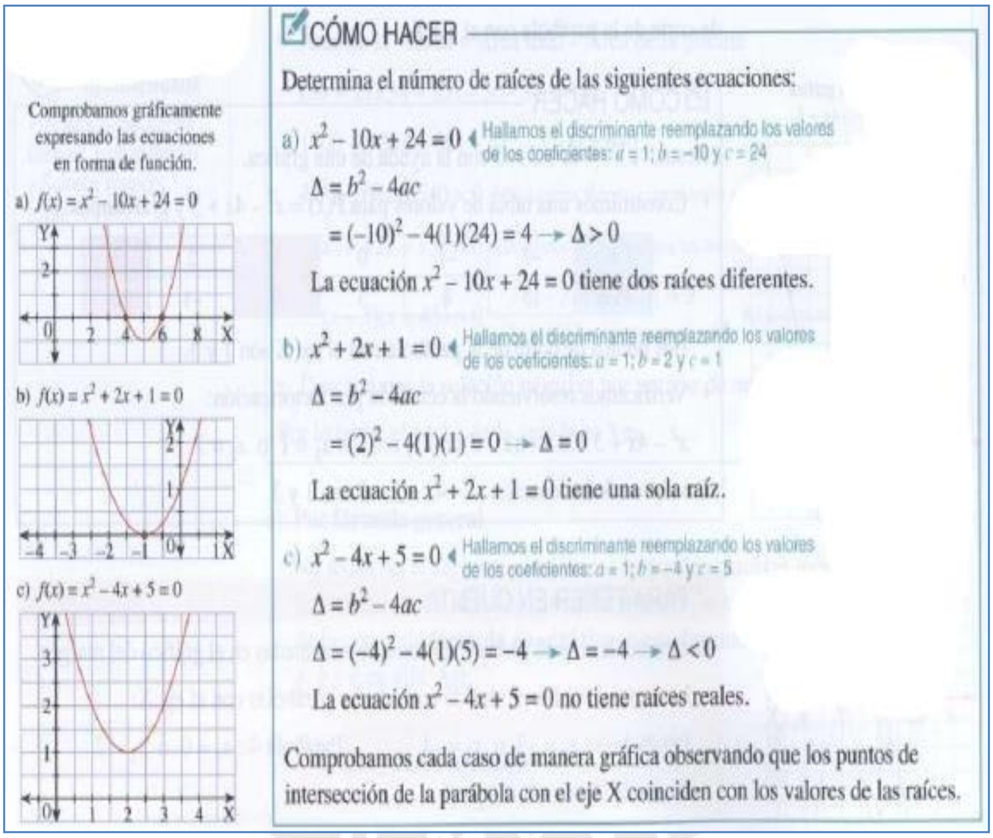


Figura 12. Resolución de una ecuación cuadrática usando el gráfico de una función cuadrática.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 85)

También, se muestra otro ejemplo (Figura 13) donde piden determinar el número de raíces de tres ecuaciones cuadráticas y las vinculan con su función cuadrática; la relación que explican es que los valores de las raíces son los puntos de intersección, siendo una pregunta donde no han calculado las raíces sino la cantidad de raíces que tiene cada ecuación cuadrática y más aún en el ejemplo c) no tiene raíces reales entonces no habría forma de identificar la raíces con los puntos de intersección. Además, cuando identifican una función cuadrática relacionada a una ecuación cuadrática lo hacen por medio de la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, realizando un uso incorrecto de notaciones.



Comprobamos gráficamente expresando las ecuaciones en forma de función.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 24 = 0$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = 0$

CÓMO HACER

Determina el número de raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ Hallamos el discriminante reemplazando los valores de los coeficientes: $a = 1$; $b = -10$ y $c = 24$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-10)^2 - 4(1)(24) = 4 \rightarrow \Delta > 0$

La ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$ tiene dos raíces diferentes.

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ Hallamos el discriminante reemplazando los valores de los coeficientes: $a = 1$; $b = 2$ y $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(1)(1) = 0 \rightarrow \Delta = 0$

La ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una sola raíz.

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$ Hallamos el discriminante reemplazando los valores de los coeficientes: $a = 1$; $b = -4$ y $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = -4 \rightarrow \Delta = -4 \rightarrow \Delta < 0$

La ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene raíces reales.

Comprobamos cada caso de manera gráfica observando que los puntos de intersección de la parábola con el eje X coinciden con los valores de las raíces.

Figura 13. Relación de número de raíces con el número de puntos de intersección.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 86)

Luego, en el texto de cuarto año se presentan las funciones cuadráticas con su definición y dan ejemplos de gráficos; además agregan los conceptos de dominio y rango de la función cuadrática. Así como también, la relación del vértice con los puntos de cortes con el eje X. Además, presentan un ejemplo sobre graficas de funciones cuadráticas, donde se tiene la necesidad del uso de ecuaciones cuadráticas, pues lo ligan al concepto de corte con el eje X. (Véase Figura 14)

CÓMO HACER

Determina los puntos de corte con los ejes de la parábola que representa a cada función.

Función	Corte con el eje Y	Corte con el eje X
$f(x) = x^2 - 2x - 3$	$y = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$ Punto de corte con el eje Y: $(0; -3)$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x-3)(x+1) = 0 \rightarrow x = 3 \vee x = -1$ Puntos de corte: $(3; 0)$ y $(-1; 0)$
$g(x) = -x^2 + 6x$	$y = -0^2 + 6(0) = 0$ Punto de corte con el eje Y: $(0; 0)$	$-x^2 + 6x = 0$ $x(-x+6) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 6$ Puntos de corte: $(0; 0)$ y $(6; 0)$
$h(x) = 4x^2 - 9$	$y = 4(0^2) - 9 = -9$ Punto de corte con el eje Y: $(0; -9)$	$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow (2x+3)(2x-3) = 0$ $x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$ Puntos de corte: $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ y $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

Figura 14. Ejemplo sobre el gráfico de una función hallando el corte con el eje X.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 90)

Luego el texto de cuarto de secundaria, sigue con conceptos de gráfica de una función cuadrática, tales como: eje de simetría, traslación vertical, traslación horizontal y traslación por composición de movimientos. Y de igual forma que en el texto de tercero de secundaria, este texto hace un diagrama resumen de los conocimientos que trabajaron en ese capítulo, donde muestra los conocimientos por separados. (Véase Figura 15)

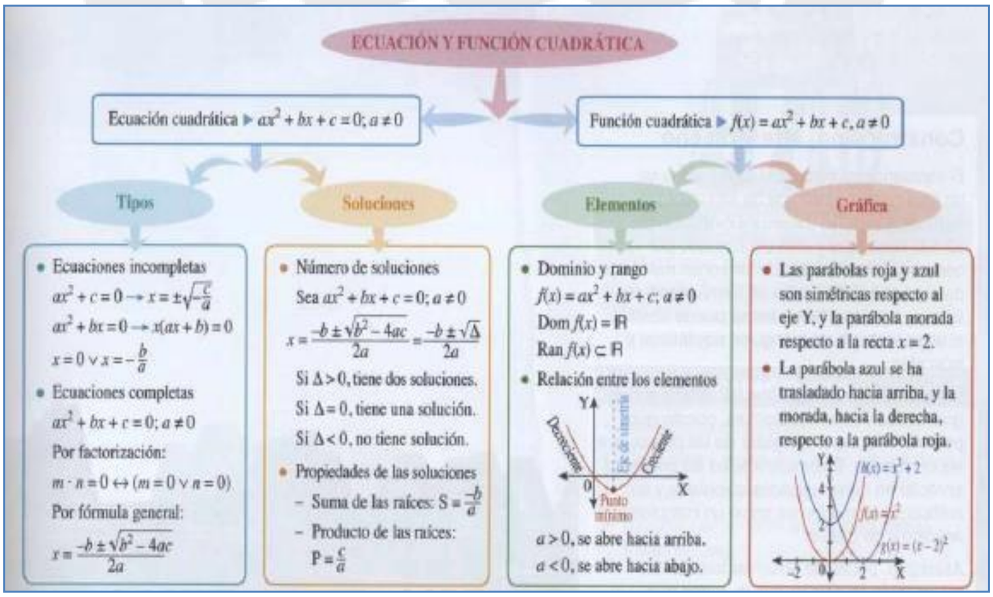
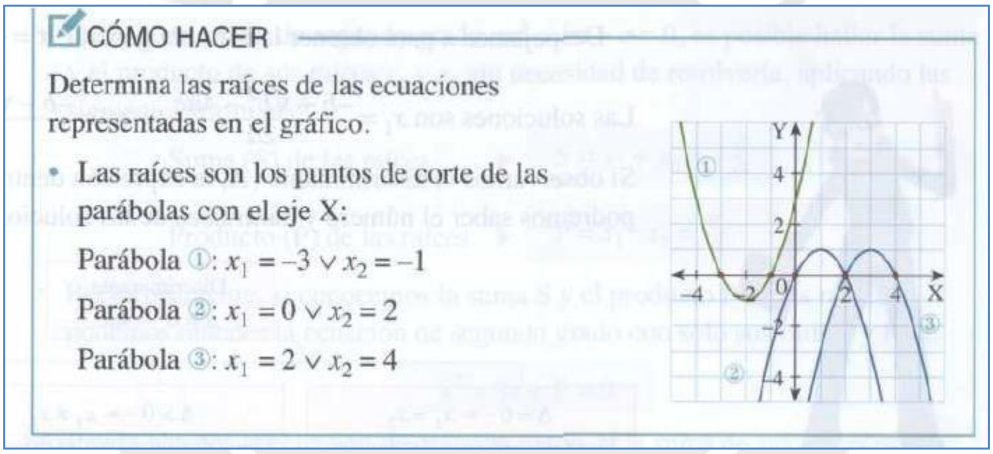


Figura 15. Resumen del capítulo 5 del cuarto año de educación secundaria.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 95)

De igual forma se revisó y analizó el texto de quinto año de educación secundaria, donde los objetos matemáticos ecuación cuadrática y función cuadrática son tratados en el capítulo 5; el capítulo inicia con la definición del concepto de ecuación cuadrática y presenta diversos ejemplos donde se halla el conjunto solución.

Este texto muestra dos ejemplos donde se relaciona las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas; el primer ejemplo donde se muestra la relación de estos dos objetos matemáticos es similar a lo mostrado en la figura 10, extraído del texto de cuarto año de secundaria. Y el segundo ejemplo (Figura 16) muestra cómo encontrar raíces de una ecuación cuadrática cuando dan el gráfico de una función cuadrática, de igual forma en el texto se asume que el punto de corte con el eje X es un número real; aunque también la forma en que plantea el problema no es correcto, pues lo que se ha representado son las funciones cuadráticas relacionadas a tres ecuaciones cuadráticas.


CÓMO HACER

Determina las raíces de las ecuaciones representadas en el gráfico.

- Las raíces son los puntos de corte de las parábolas con el eje X:

  Parábola ①: $x_1 = -3 \vee x_2 = -1$

  Parábola ②: $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

  Parábola ③: $x_1 = 2 \vee x_2 = 4$

Figura 16. Ejemplo del cálculo de raíces de una ecuación dado su gráfica.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 75)

Luego, el texto de quinto año sigue con ejemplos para mostrar la fórmula general, las raíces, o la relaciones de las raíces de una ecuación cuadrática. De ahí continúa, con el concepto matemático de funciones cuadráticas, haciendo ejemplo sobre interpretación gráfica y cómo encontrar el vértice de la parábola relacionada a la función cuadrática. Continuando con ejemplos que refuerzan los conceptos de gráfica de la función, donde hay otro ejemplo similar al presentando en la figura 12 del cuarto año de educación secundaria. Terminando con un diagrama de llaves que resume los temas tratados, y una vez más, no se muestra la importancia de las relaciones entre los dos objetos matemáticos tratados en el mismo capítulo. (Véase Figura 17)

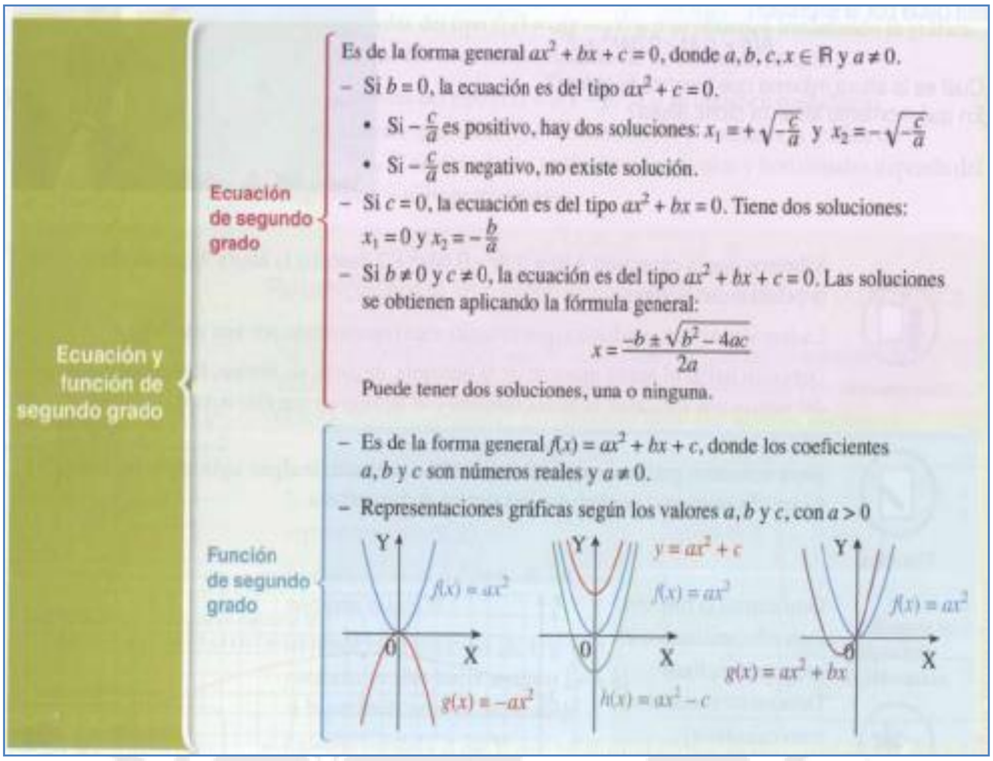


Figura 17. Resumen del capítulo 5 del quinto año de educación secundaria
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, pág. 84)

Del análisis de los tres textos escolares, se puede ver cómo abordan los temas; primero se desarrolla la definición del concepto ecuación cuadrática, pero lo más resaltante son los diferentes ejemplos enfocándose en mostrar diferentes técnicas para encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática y luego, otros ejemplos para relacionar las raíces con los parámetros a, b y c de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Luego, de igual forma, explican los conceptos de la función cuadrática y sobre su representación gráfica; enfocándose en ejemplos que muestren las diversas técnicas para graficar. El énfasis es más operativo; técnicas para resolver ecuaciones cuadráticas y técnicas para graficar funciones cuadráticas pero no se presenta ningún concepto teórico sobre las relaciones entre estos dos objetos matemáticos o algún problema que lleve a hacer evidente estas relaciones, se presentan algunos ejemplos intra matemáticos donde se muestra relación entre ellos como en las Figuras 12, 13 y 16, pero varios de esos problemas tienen errores o no se explican claramente. Al finalizar cada capítulo se hace un resumen, pero nunca se muestra la importancia de dichas relaciones.

CAPITULO III: MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

En este tercer capítulo, se presentan los elementos teóricos que sustentan nuestra investigación, nos basamos en la propuesta de creación de problemas de Malaspina (2014-2017). Además, se detalla nuestra metodología para el análisis que se realiza en el siguiente capítulo.

3.1 Marco teórico

Para lograr cumplir nuestros objetivos de investigación, consideramos cómo marco teórico el enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina (2014-2017). Un importante punto de partida, es precisar los elementos fundamentales que se perciben en los problemas: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático.*

- La información: datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.
- El requerimiento: es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.
- El contexto: puede ser extra matemático o intra matemático, el contexto extra matemático es aquel que está relacionado con alguna situación real o lo cotidiano y el contexto intra matemático es aquel que es estrictamente matemático (por ejemplo, hallar el gráfico de una función real de variable real, demostrar que la suma de números pares es par, etc.).
- El entorno matemático: es el marco matemático en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (por ejemplo: funciones cuadráticas; teoría de números; geometría analítica; etc.)

Pero, ¿Qué se entiende por crear un problema? Según Malaspina (2014-2017) la creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, y estos se pueden dar por *variación* o por *elaboración*.

Variación de un problema dado es un proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado.

Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan al modificar el requerimiento y plantear generalizaciones a partir de un problema dado. Puede conllevar el cambio de contexto, de extra a intra matemático.

La *elaboración de un problema* es un proceso según el cual se construye un nuevo problema, ya sea en forma libre, a partir de una situación (dada o configurada), o por un requerimiento específico, con énfasis matemático o didáctico.

Presentamos dos ejemplos de creación de problemas, mostrados en la conferencia ofrecida por Malaspina (2013) en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, en Montevideo, donde estos problemas han sido creados por elaboración y por variación.

1) De elaboración de un problema:

Situación:

Se tiene un alambre flexible de 20 cm de longitud.

Problema creado:

Determinar el mayor número de cuadrados, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

- Información: Longitud del alambre.
- Requerimiento: El mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que se pueden formar.
- Contexto: Extra matemático.
- Entorno matemático: Geometría, cuadrados, perímetro; división entera.

2) De variación de un problema:

Problema:

Determinar el mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

Problema creado:

Determinar el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

- Información: Longitud del alambre. (No modificada)
- Requerimiento: El mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud. (Modificado)
- Contexto: Extra matemático. (No modificado)

- Entorno matemático: Geometría, triángulos, perímetro, relaciones entre longitudes de los lados de un triángulo; división entera. (Modificado).

El primer problema se crea por elaboración de forma libre a partir de la situación dada y el segundo problema se crea por variación del problema anteriormente creado, modificando el requerimiento y el entorno matemático.

Para estimular en los profesores la capacidad de crear problemas, según Malaspina (2017) se pueden tener dos estrategias a desarrollarse en talleres con profesores que van ligadas a la forma que se creen los problemas: la estrategia Episodio, Problema pre, Problema pos (EPP) y la estrategia Situación, Problema pre, Problema pos (SPP):

La estrategia EPP consiste en:

(1) Presentar a los participantes en un taller un episodio de la clase de un profesor, que contiene un problema y los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o tratar de resolver tal problema.

(2) Pedir que los participantes del taller resuelvan el problema del episodio y creen un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio. A problemas con esa característica se les denomina *Problema pre.*

(3) Reunir a los participantes en grupos de dos o tres para comparar y socializar sobre sus problemas propuestos y finalmente hacer la propuesta del Problema pre del grupo.

(4) Orientar una puesta en común de los problemas pre creados en algunos grupos, estimulando reflexiones, críticas y posibles mejoras.

(5) Regresar al trabajo individual para crear y resolver (o tratar de resolver) un problema inspirado en el problema del episodio, pero más retador que este; es decir, un problema cuya solución requiera mayor demanda cognitiva o mayor creatividad que el problema del episodio. A problemas con esta característica se les denomina *Problema pos*.

(6) y (7) Desarrollar actividades similares a las descritas en las fases (3) y (4), esta vez con los problemas pos creado.

De igual forma, la estrategia SPP desarrolladas en un taller consisten en:

(1) Presentar a los participantes en un taller una situación motivadora para crear problemas.

(2) Pedir que los participantes del taller, en forma individual, creen y resuelvan un problema a partir de la situación dada, que sea apropiado para cierto nivel educativo;

(3) Reunir a los participantes en grupos de dos o tres para que socialicen sobre sus problemas propuestos. Con base en estas socializaciones, deben hacer la propuesta del grupo de un problema creado a partir de la situación dada. Nos referimos a tal problema cómo PG.

(4) Pedir a cada grupo que cree un nuevo problema, relacionado con su PG. (Se le llama NPG). Puede ser – por decisión del grupo – un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Cada grupo debe explicitar si creó un Problema-pre o un Problema-pos respecto a su PG.

(5) Socialización, similar a (3).

Estos constructos del enfoque servirán para implementar los talleres que se realizan bajo este enfoque, para poder cumplir los objetivos planteados en la presente investigación.

3.2 Método y procedimientos

En esta sección describimos el método de investigación cualitativa que seguimos y justificamos su elección; por otro lado, presentamos las etapas que guiaran nuestra investigación para cumplir los objetivos planteados.

3.2.1 Método de estudio de casos en la educación matemática

Para poder alcanzar los objetivos de la presente investigación cualitativa, tomamos en cuenta las pautas dadas por Martínez, M. (2006). Así, se debe recoger toda la información necesaria y suficiente; esta información luego se debe estructurar de forma coherente y lógica. Además, esta investigación sigue cinco criterios establecidos Martínez, M. (2006):

1. El investigador debe ir a buscar la información que necesita, en el lugar en que ésta se da, por ello se planteará un taller de creación de problemas con profesores en servicio.
2. La observación no debe alterar la verdadera realidad del fenómeno que se estudia, la información que se recoge debe ser la más completa, todo lo que los profesores desarrollen se recogerá para un análisis completo.
3. Los procedimientos utilizados deben permitir realizar observaciones repetidas veces, para ello en nuestra investigación se realizaran entrevistas y se recogerán los documentos que los investigados llenen.
4. La información debe ayudar a descubrir las estructuras significativas de los sujetos de estudio; luego del taller, la información que se recoja servirá para poder hacer un

análisis sobre las percepciones y conocimientos que tenían sobre los objetos matemáticos considerados y lograron desarrollar en el taller al crear problemas.

5. El investigador interactúa con el medio observado y, así, afecta la realidad observada disminuyendo su apreciación "objetiva"; sin embargo, el investigador no debe tener miedo de ser parte de la situación que estudia. En este sentido participamos activamente, cómo orientadores en el taller que se desarrolló.

Estos cinco criterios aseguran un alto nivel de validez y provee también la base para una forma de confiabilidad o replicabilidad de la investigación.

En nuestra investigación se aplica la metodología cualitativa, donde se usa el método de estudio de casos, tenemos el propósito de contribuir en la comprensión de relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas por medio de la creación de problemas, esta herramienta metodológica es de gran importancia pues nos ayuda a medir y registrar las conductas de las personas que serán parte de un taller de creación de problemas.

Según Ponte (2006) un estudio de caso, siempre está inmerso en prestar atención a su historia y a su contexto, el cual analiza en profundidad entidades bien definidas cómo una persona o una institución, un curso o cualquier otro ámbito social. También, el autor afirma que el método de estudio de caso se usa para investigar ámbitos de aprendizajes de estudiantes, formación de profesores, entre otros. Para nuestro caso nuestra unidad de análisis será un profesor de secundaria en servicio.

Además, nuestra investigación cumple con los tres propósitos de un estudio de caso, según Ponte (2006) estos son: exploratorio (es una primera investigación donde se usa la estrategia de creación de problemas para que el profesor conozca las relaciones entre las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas), descriptivo (se describen los problemas creados y desarrollados en un taller para mostrar que a través de las estrategias de creación de problemas se contribuye en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas de los participantes) y analítico (la investigación amplia el campo de aplicaciones de la creación de problemas como medio para encontrar relaciones entre dos objetos matemáticos).

Por otro lado, según Martínez, C. P. (2006) un estudio de caso, debe seguir un protocolo para asegurar la objetividad; para eso, en la investigación se debe mostrar los siguientes elementos: semblanza, preguntas, procedimientos y guía de reporte del estudio de caso. También, es de gran importancia establecer suficientes instrumentos cómo entrevistas, grabaciones, secuencia de actividades, etc.; para nuestro caso desarrollamos un taller donde se realizaran anotaciones por parte de observadores, grabaciones y los cuestionarios que se darán en las distintas actividades, estos instrumentos nos ayudaran a la triangulación de los datos para poder realizar un análisis profundo y poder cumplir con los objetivos de la investigación.

Según Martínez, C. P. (2006) para la calidad y objetividad de un estudio existe dos tipos de validez: interna y externa. En nuestro caso, afirmamos que nuestra investigación se caracteriza por tener una validez interna, ya que valoramos los problemas creados desde un punto de vista didáctico y analizamos si los problemas creados ayudaron a identificar las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Por lo explicado anteriormente, se justifica que la presente investigación sea cualitativa y que se use el estudio de caso para poder lograr los objetivos planteados.

3.2.2 Metodología y procedimientos

Cómo ya se hizo mención el método de investigación cualitativa es el estudio de caso con profesores en servicio, se garantizará que ni los nombres de los profesores, ni rasgos que puedan ser usados para identificarlos estén disponibles en la investigación; la investigación constara de cinco fases adaptadas de Latorre, Rincón y Arnal (1996), las cuales son:

Fase 1 – Exploración:

Se identifica la problemática que se desea investigar y la línea de investigación en la que se desea desarrollar el presente trabajo; se plantea la pregunta de investigación y los objetivos; se realiza la búsqueda, revisión y análisis de las lecturas relacionadas con la creación de problemas y de los objetos matemáticos a investigar (epistemología de las ecuaciones y funciones cuadráticas) y se define la perspectiva teórica que sustenta la investigación.

Fase 2 – Planificación:

Se elige el escenario de investigación (taller de creación de problemas) y quienes participan en el taller; se selecciona una estrategia y elabora instrumentos de recojo de información para eso se realiza: pruebas pilotos, cuestionario de exploración inicial; se planifica el desarrollo de un taller de creación de problemas sobre las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas; y se realiza el cuestionario de exploración final.

Fase 3 – Entrada al escenario:

Se organiza y desarrolla un taller de creación de problemas con profesores de matemática en servicio, a los cuales se le tomará una evaluación de entrada para poder determinar las relaciones que encuentran entre los dos objetos de estudios antes del taller, se implementará un taller usando el enfoque de creación y resolución de problemas, donde se pondrá en práctica los métodos de creación de problemas por variación y elaboración. Para concluir, se realizará una prueba de salida para poder medir las relaciones que encuentran entre los dos objetos de estudio luego del taller.

Fase 4 – Recojo y análisis

Se recoge la información de los cuestionarios, las hojas desarrolladas en el taller y con un instrumento especialmente diseñado, se realiza un análisis donde se hará una comparación entre la prueba de exploración inicial y la final, para así encontrar la información necesaria para poder cumplir con los objetivos planteados en la investigación. Además se usará distintas técnicas de recojo de información cómo grabaciones o entrevistas.

Fase 5 – Salida del escenario y elaboración del informe.

Se redacta un informe de los resultados obtenidos en las cuatro fases anteriores.

Todas estas fases nos permitirán que se logre observar, entender, analizar y describir cómo los profesores en servicio logran identificar relaciones entre las ecuaciones y las funciones cuadráticas.

3.3 Estrategias por objetivos específicos

Para alcanzar los objetivos ya mencionados, se plantean estrategias y procedimientos para recoger y el análisis de la información. Se presentan tanto los objetivos específicos cómo sus desagregados, además de las estrategias y tareas para cumplir con nuestros objetivos. En las siguientes tablas especificamos las acciones y pasos que se realizarán para conseguir cada uno de los dos objetivos específicos.

Tabla 11. *Estrategia para el primer objetivo específico*

Objetivo	**Acciones**	**Pasos**
Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores de la muestra, sobre ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas y su relación entre ellas.	Analizar el desarrollo matemático y epistémico de la ecuación y función cuadrática.	Se realiza la lectura de libros, artículos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas.
	Elaborar una evaluación diagnóstica del tipo cognitiva para caracterizar a los sujetos de investigación	Se diseñó la prueba exploratoria o prueba diagnóstica inicial (Ver anexo D)

Tabla 12. *Estrategia para el segundo objetivo específico*

Objetivo	**Acciones**	**Pasos**
Identificar los cambios en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas luego de aplicar una secuencia de actividades de creación de problemas especialmente diseñada y empleando las estrategias EPP y SPP.	Explicar la estrategia episodio, problema pre y problema pos y la estrategia situación, problema pre y problema pos.	Se realiza un exposición para explicar la creación de problemas desde la perspectiva del enfoque de creación de problemas de Malaspina (2015)
	Plantear el episodio y situación relacionado con las ecuaciones y funciones cuadráticas.	Mediante una ficha de trabajo, se presenta el episodio y situación propuesta por Malaspina (2015).
	Crear un problema por variación o por elaboración. Los participantes serán	Se aplicará la estrategia de creación de problemas por variación y elaboración

	agentes activos para esta actividad.	sobre ecuaciones y funciones cuadráticas propuesta por Malaspina (2015).
	Elaborar una evaluación diagnóstica del tipo cognitiva para comparar los conocimientos que tienen luego del taller.	Se diseñó la prueba exploratoria o prueba diagnóstica final y el solucionario de la pruebas inicial y final (Ver Anexo F)

3.4 Herramientas de análisis

A continuación, se presenta las herramientas con las cuales se realizaran los análisis de las pruebas exploratorias inicial y final, estas herramientas pasaron por un juicio de expertos para poder ser validadas.

La siguiente tabla muestra tres criterios de evaluación para el objeto matemático ecuación cuadrática y dos criterios para el objeto matemático función cuadrática. Además, se expresa donde serán analizados cada uno de estos criterios. Por ejemplo, el criterio de identifica la ecuación cuadrática con el problema se encuentra en la pregunta 1a de la exploración inicial, estos criterios no serán analizados en la exploración final porque no es el fin de la investigación si los profesores mejoran en la comprensión de las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas por separado. Estos criterios están especificados en el anexo E

Tabla 13. *Criterios para evaluar los conocimientos por separados.*

	Criterios de evaluación	**Ítems E. Inicial**
Ecuación cuadrática	Identifica la/s ecuación/es cuadrática/s con el problema	1a

	Halla el conjunto solución de la ecuación cuadrática	1a – 2 – 5 – 6a
	Relaciona los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con el problema.	1a
Función cuadrática	Identifica lo que expresa la función cuadrática	1b
	Grafica la función cuadrática	2 – 3 – 5 – 6 – 7

De igual forma se diseñó una rúbrica para analizar las seis relaciones mencionadas en la sección 2.1.3. Por ejemplo la relación 1, sobre relaciona la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se analizará en la exploración inicial en las preguntas 5-6a-7 y en la exploración final en las preguntas 1-2-5. Estos criterios están especificados en el Anexo E y G.

Tabla 14. *Criterios para evaluar los conocimientos relacionados.*

	Criterios de evaluación	**Inicial**	**Final**
Relación 1	Relaciona la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. (algebraicamente)	5 – 6a – 7	1 – 2 - 5
Relación 2	Relaciona la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de una función cuadrática y una recta horizontal. (caso particular, intersección con el eje X)	2 – 3 – 5 – 7	1 – 2 – 3

Relación 3	Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = k$, con la abscisa de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la recta horizontal $y = k$.	2 – 3 – 5 – 7	1 – 2 – 3
Relación 4	Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática $f(x) = k$.	2 – 5 – 6b	1 – 2 – 3
Relación 5	Identifica y relaciona los parámetros de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.	4	4
Relación 6	Relaciona el número cortes del gráfico de una función cuadrática y el eje X, con el discriminante de una ecuación cuadrática.	4 – 6a	4 – 5a

3.5 Rúbrica para analizar los problemas de las pruebas exploratorias.

Para el análisis comparativo de la exploración inicial y la exploración final de las respuestas de los docentes antes y después del taller y medir el avance en la comprensión de las relaciones de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas se usó los criterios para evaluar los conocimientos por separado y relacionados sobre ecuaciones y funciones cuadráticas mencionados en la sección 3.4. Se establecieron tres criterios sobre ecuaciones cuadráticas, dos criterios sobre funciones cuadráticas y seis criterios sobre la relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Para medir los conocimientos sobre ecuación cuadrática se tomó en cuenta los siguientes tres criterios descritos en la Tabla 16 y se les designó un nombre para cada uno de los criterios. Estos criterios sirvieron para el análisis y descripción de la prueba exploratoria inicial y final.

Tabla 15. *Criterios de evaluación sobre ecuaciones y nombre del criterio.*

Criterio evaluado sobre ecuaciones cuadráticas	**Nombre del criterio**
Identifica la/s ecuación/es cuadrática/s con el problema	Primer criterio de ecuación
Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática	Segundo criterio de ecuación
Relaciona los valores del CS de la ecuación cuadrática con el problema	Tercer criterio de ecuación

Para medir los conocimientos sobre función cuadrática se tomó en cuenta dos criterios descritos en la Tabla 17 y se les designó un nombre para cada uno de los criterios, estos criterios sirvieron para el análisis y descripción de la prueba exploratoria inicial.

Tabla 16. *Criterios de evaluación sobre ecuaciones y nombre del criterio*

Criterio evaluado sobre funciones	**Nombre del criterio**
Identifica lo que expresa la función cuadrática	Primer criterio de función
Grafica la función cuadrática	Segundo criterio de función

Para medir los conocimientos relacionados sobre las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas se tomó en cuenta seis criterios descritos en la Tabla 18, estos criterios sirvieron para el análisis y descripción de las respuestas de los profesores en la exploración inicial y final.

Tabla 17. *Criterios de evaluación sobre los conocimientos relacionados y nombre del criterio*

Criterios de evaluación	**Nombre del criterio**
Relaciona la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.	Relación 1

Relaciona la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de una función cuadrática y una recta horizontal. (caso particular, intersección con el eje X)	Relación 2
Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = k$, con la abscisa de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la recta horizontal $y = k$.	Relación 3
Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática $f(x) = k$.	Relación 4
Identifica y relaciona la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.	Relación 5
Relaciona el número cortes del eje X y la función cuadrática con el discriminante de una ecuación cuadrática.	Relación 6

Para poder medir los conocimientos o habilidades de los profesores, definimos una escala cualitativa: deficiente si el desarrollo es incompleto y con errores, parcial si el desarrollo contiene algunos errores o está incompleto y alcanzado si es desarrollo no contiene errores. Esta calificación cualitativa se le asignó una valoración cuantitativa equivalente según la siguiente tabla.

Tabla 18. Puntaje cualitativo por habilidades

Calificación cualitativa de la habilidad	**Puntaje**
Habilidad deficiente o insípida	0
Habilidad media o parcial	1
Habilidad alcanzada o lograda	2

Para asignar los puntajes, como los criterios se analizan en distintas preguntas por ejemplo la relación 1, se analizó en la pregunta 5 – 6a – 7, se consideró una habilidad insípida si en ninguna pregunta logra comprender esta relación, si comprende solo una se calificará como una habilidad parcial y si logra mostrar comprensión en dos o más esta relación se considerará una habilidad alcanzada. Además para dar el calificativo por cada una de las relaciones se tomará de referencia el solucionario descrito en los anexos E y G donde se muestra las respuestas esperadas, ese solucionario será nuestro modelo de referencia para los análisis de cada una de las seis relaciones.

CAPITULO IV: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo mostraremos la parte experimental, donde exponemos el diseño y realización del taller de creación de problemas dirigidos para profesores de Matemática en servicio. Además, reflejaremos el análisis de las cuatro etapas del taller de creación de problemas sobre las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas. Finalmente, presentamos el caso seleccionado para los propósitos de la presente investigación.

4.1 Diseño y realización del taller de creación de problemas.

Como se mencionó en el Capítulo 3, se utilizó el enfoque de creación de problemas de Malaspina et al. (2015) para realizar un taller de creación de problemas sobre las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, dirigido a profesores de Matemática del nivel secundaria. Para tal propuesta, en el taller de creación de problemas se usó la estrategia Episodio, problema Pre, problema Pos (EPP) y la estrategia Situación, problema Pre, problema Pos (SPP).

Para cumplir con nuestro objetivo de investigación, primero el problema del episodio y el problema pre nos permitió identificar los conocimientos iniciales de los profesores en servicio sobre ecuaciones y funciones cuadráticas y las relaciones de estos dos objetos matemáticos, pero nuestro propósito principal se logrará en el desarrollo del taller de creación de problemas, pues su foco principal es que contribuya en la comprensión de la relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas en los profesores que fueron participes del taller.

Para obtener los resultados y lograr nuestro objetivo de investigación, se desarrolló un taller sobre creación de problemas donde se utilizaron las estrategias EPP y SPP. Además, se diseñaron dos pruebas que nos ayudaron a identificar los conocimientos de los profesores sobre ecuaciones y funciones cuadráticas.

Estas pruebas se aplicaron antes y después del taller, para así realizar una comparación de los conocimientos de los profesores participantes y poder analizar si el método aplicado contribuye en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

4.2 Metodología y descripción del diseño.

Para poder cumplir con los objetivos de la investigación, se diseñaron las herramientas que ayudaron a recoger información y midieron los conocimientos de los profesores en servicio sobre las ecuaciones y funciones cuadráticas. Estos instrumentos son: Fichas de recojo de información, de exploración y de trabajo.

Sobre las fichas de recojo de información, se diseñaron para recoger información de los participantes antes y después del taller, donde se obtuvo la información básica sobre su formación, desarrollo profesional, apreciación, enfoque de creación de problemas y sobre el taller donde fueron participes (Véase Anexo C y H).

En cuanto a fichas de exploración se diseñaron dos tipos de fichas. Ambas fueron del tipo cognitivo, las cuales sirvieron para explorar e identificar los conocimientos de los profesores antes y después del taller de creación de problemas.

La prueba de exploración inicial (véase Anexo D), buscaba registrar los conocimientos de los profesores en servicio sobre ecuaciones y funciones cuadráticas y sobre las relaciones entre ambos objetos matemáticos.

Este registro se realizó antes de ser partícipes del taller de creación de problemas y la prueba exploratoria final (véase Anexo E), sirvió para identificar los conocimientos sobre las relaciones de la ecuación y función cuadrática, luego del taller de creación de problemas. Esta prueba permitió la comparación sobre los conocimientos de los profesores antes y después del taller y la exploración final fue similar a la exploración inicial en los conocimientos que se midieron.

Para el diseño y mejoramiento de las pruebas exploratorias, se realizaron pruebas pilotos a dos profesores de Matemática con el fin de refinar las preguntas que se evaluarían y así encontrar dificultades que tuvieran los participantes al resolver dichos problemas.

El taller se distribuyó en cuatro fases: Antes del taller, sesión 1 – estrategia EPP, sesión 2 – estrategia SPP, después del taller.

Para la primera sesión, se diseñó el problema del episodio para que el profesor, al resolverlo, hiciera uso de las ecuaciones y funciones cuadráticas para darle solución y luego creara, por variación, un nuevo problema que siga en el contexto de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

En la segunda sesión, se escogió una situación para que los profesores, por separado, plantearan problemas de ecuaciones y funciones cuadráticas, para que luego ellos tuvieran que relacionar dichos problemas usando la estrategia de creación de problemas por elaboración.

4.2.1 Organización del Taller

El taller se realizó el domingo 8 de octubre del 2017 en el colegio educativo particular San Antonio Abad de la localidad de Huaura, donde la participación se dio por medio de la institución que ofreció el taller como parte de sus actividades de formación de profesores.

El nombre del taller realizado fue: *Creación de problemas de Matemáticas para la enseñanza y aprendizaje sobre ecuaciones y funciones cuadráticas*, el cual tuvo una duración de ocho horas distribuidas en dos sesiones de trabajo (De tres horas cada sesión) y dos etapas donde se realizó la exploración de los conocimientos (De una hora cada exploración).

4.2.2 Diseño de las sesiones del taller de creación de problemas.

El taller sobre creación de problemas utilizó las estrategias EPP y SPP para crear problemas, tomando en cuenta un episodio especialmente diseñado para mostrar relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas y una situación que ayude a darles tareas en específico a los diferentes participantes sobre ecuaciones o funciones cuadráticas.

El taller se implementó con la finalidad de realizar una valoración de los conocimientos de los profesores en servicio, de nivel secundario, antes y después del taller de creación de problemas matemáticos, donde se buscó medir las relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas que tienen dichos participantes.

En la tabla 19 se muestra la planificación de las dos sesiones que tuvo el taller, además de los instrumentos que se usaron antes, durante ydespués del taller de creación de problemas.

Tabla 19. *Planificación de las sesiones del Taller de creación de problemas.*

Sesiones y actividades del taller de creación de problemas		
Fases	**Instrumentos**	**Actividades propuestas** **Diseño del Taller**
Antes	Hoja de recojo de información Inicial.	▪ Detectar los conocimientos sobre creación de problemas.
	Prueba exploratoria Inicial.	▪ Evaluar los conocimientos matemáticos sobre los objetos: ecuación y función cuadrática. ▪ Detectar las relaciones que existen entre las ecuaciones y funciones cuadráticas en los conocimientos matemáticos de los participantes.
Sesión 1		▪ Presentación del Taller. ▪ Introducción sobre creación de problema. ▪ Presentación de la estrategia EPP y SPP
	Ficha 1A Ficha 2A	▪ Episodio – Estrategia EPP. ▪ Resolver el problema del episodio. ▪ Crear un ***problema Pre individual*** con respecto al problema del episodio.
	Ficha 3A	▪ Formar grupos de dos (o tres) integrantes. ▪ Intercambiar experiencias del trabajo individual. ▪ Creación y resolución de un ***problema Pre grupal***.
		▪ Recoger hojas (Engrampadas). ▪ Socialización y discusión de los problemas Pre grupales creados. ➢ Opinar sobre el problema del episodio. • ¿Relacionan ecuaciones cuadráticas con funciones cuadráticas?

		➢ Opinar sobre los comentarios de los alumnos. ➢ Explicar el problema pre-grupal: • ¿Cómo se llegó al problema?. • ¿Por qué creen que este problema ayudará a comprender y resolver el problema del episodio?. • ¿El problema creado relaciona ecuaciones con funciones cuadráticas?.
	Ficha 4A	▪ Creación de problemas POS por variación respecto al problema del episodio.
		▪ Recoger hojas (Engrampadas). ▪ Socialización y discusión de los problemas POS grupales creados. ➢ Explicar el problema pos-grupal. ➢ ¿Por qué considera que la solución del problema pos creado evidencia relación entre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas?.
Sesión 2	Ficha 1E Ficha 2E Ficha 1F Ficha 2F	▪ Situación – Estrategia SPP. ▪ Escribir una ecuación cuadrática dada la situación (1E-2E). ▪ Escribir una función cuadrática dada la situación (1F-2F).
	Ficha 1E-1F Ficha 2E-2F	▪ Formar grupos de dos integrantes: 1E – 1F 2E – 2F ▪ Explicar las actividades individuales realizadas. ▪ Escribir un problema grupal cuya solución relacione ecuaciones y funciones cuadráticas.
		▪ Recoger hojas (Engrampadas). ▪ Socialización y discusión de los problemas grupales creados.

	Ficha 1E-1F – B Ficha 2E-2F – B	▪ Crear un nuevo problema (Puede ser un problema pre o un problema pos).
		▪ Recoger hojas (Engrampadas). ▪ Socialización y discusión de los problemas Pre o problemas Pos grupales creados. ➢ Explicar el problema pre o pos-grupal creado. ➢ ¿Por qué considera que la solución del problema pre o pos creado evidencia relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas?.
Después	Prueba exploratoria escrita Final.	▪ Detectar las relaciones que existe entre las ecuaciones y funciones cuadráticas en los conocimientos matemáticos de los participantes después del taller.
	Hoja de recojo de información Final,	▪ Percepción sobre las estrategias EPP y SPP.

4.2.3 Participantes

Los perfiles de los participantes al taller fueron profesores egresados de la Universidad José Faustino Sánchez Carrión de Huacho y un docente egresado de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, formados en Educación Matemática o en Matemática Aplicada.

En total, fueron 10 los participantes, de los cuales 8 asistieron a las dos sesiones y 2 sólo a la sesión de la tarde, donde la mayoría labora en instituciones educativas privadas y afirman tener entre ocho años a más años de experiencia en la enseñanza de la Matemática a nivel secundaria.

Respecto a la experiencia en creación de problemas, cinco profesores manifestaron tener experiencia en ella, pero solo dos explicaron el tipo de estrategias de creación de problemas

que utilizan. Se puede encontrar un resumen de las características de los participantes en la tabla diseñada en el Anexo I.
Para la investigación, se les designó a cada profesor los códigos de P1 al P10, salvando así la identidad de cada uno de los participantes.

4.2.4 Tipos de registro de información.

El registro de información se realizó mediante dos cuestionarios de recojo de información personal, dos pruebas exploratorias escritas y diversas fichas de trabajo entregadas durante el desarrollo de las fases de las dos sesiones del taller.

En la tabla 20, se muestran los diferentes instrumentos y el momento de su uso. Estos instrumentos sirvieron para el análisis de los datos.

Tabla 20. *Instrumentos de medición en las fases del taller de creación.*

Instrumento	**Nombre de la actividad**	**Momento del registro**
Cuestionario de recojo de información.	Ficha de recojo de información inicial.	Inscripción al Taller.
Prueba exploratoria escrita.	Exploración Inicial.	Previo a la sesión 1 del taller.
Fichas de trabajo.	Ficha 1A Ficha 2A Ficha 3A Ficha 4A	EPP – episodio. EPP – problema Pre individual. EPP – problema Pre grupal. EPP – problema Pos grupal.
Fichas de trabajo.	Ficha 1C Ficha 1F Ficha 2C Ficha 2F Ficha 1C-1F Ficha 2C-2F	SPP – situación (Ecuación 1). SPP – situación (Función 1). SPP – situación (Ecuación 2). SPP – situación (Función 2). SPP – problema creado (Ecuación 1 y función 1). SPP – situación (ecuación 1)

	 Ficha 1C-1F B Ficha 2C-2F B	(ecuación 2 y función 2) SPP – problema pre o pos (Ecuación 1 y función 1). SPP – problema pre o pos (Ecuación 2 y función 2).
Prueba exploratoria escrita.	Exploración Final.	Posterior a la sesión 2 del taller.
Cuestionario de recojo de información.	Ficha de recojo de información final.	Término de la exploración final.

4.2.5 Descripción de la implementación del taller.

El taller sobre creación de problemas se realizó en dos sesiones, de tres horas de duración cada una, donde se trabajó bajo las estrategias de EPP y SPP, respectivamente.

El grupo de profesores participantes realizaron su inscripción llenando la ficha de recojo de información inicial y, un día antes al taller, pasaron por una prueba exploratoria, por lo que podemos decir que su participación fue voluntaria. Por lo tanto, no se puede considerar una muestra representativa, sino intencional.

A continuación, describimos las dos sesiones realizadas:

Sesión 1

En la primera sesión, se presentó el objetivo del taller y se explicó en forma breve la importancia de la creación de problemas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas. Para esta parte de la sesión, se utilizó una presentación de diapositivas para explicar las estrategias de creación de problemas matemáticos que se usarían en las dos sesiones (ver Anexo B).

En la Figura 18, se muestra una de las diapositivas presentada en el taller para explicar la estrategia EPP, donde se les presentó un problema llamado episodio y en la pizarra se realizó la resolución de dicho problema; luego se les explicó que, al realizar modificaciones al problema del episodio, se creó un nuevo problema llamado problema Pre y fue en ese momento donde se hizo mención sobre la vinculación que tienen las funciones lineales con las ecuaciones lineales.

Episodio

La profesora Nancy propuso a sus alumnos de segundo año de secundaria el siguiente problema

Sea $f(x) = 3x + 2$. Define una función g modificando alguno de los parámetros de f de modo que la hipotenusa del triángulo que determina g con los ejes coordenados sea el doble de la hipotenusa del triángulo que determina f con los ejes coordenados.

Algunos de sus estudiantes comentaron:

Carlos: *Hay que duplicar el 3 y el 2*

María: *Primero hay que hallar la longitud de la hipotenusa con f*

Susana: *No me acuerdo el teorema de Pitágoras…*

Figura 18. Episodio presentado en las diapositivas de presentación del taller.

Después de la explicación de las estrategias EPP y SPP, se les resolvió un par de preguntas de la prueba exploratoria inicial. El propósito era cubrir algunos temas que se iban a realizar en el taller y resaltar las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas en los problemas de la exploración inicial.

A continuación, se comenzó la primera fase de la estrategia EPP en la que se les entregó la Ficha 1A a los ocho participantes, donde los profesores, en forma individual, solucionaron el problema del episodio (véase figura 19). También se les dijo que trataran de responder los comentarios de los alumnos que trae el problema del episodio.

NOMBRE: ________________

Ficha 1A

Episodio

El profesor Michael, en una de sus clases sobre ecuaciones cuadráticas, propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

Pedro necesita comprar un terreno rectangular cuya área sea por lo menos de 52 m^2 y no mayor a 115 m^2. Recibe como oferta un terreno rectangular que no ha visitado, pero tiene como información que su largo excede en 1,5 metros a su ancho. ¿Qué longitudes puede tener el ancho del terreno para que se cumpla con las restricciones de área dadas?

Luego de unos minutos, algunos de los alumnos del profesor Michael comentaron:

- Alexander: *El terreno debe tener 8 metros de ancho.*
- Marco: El problema se resuelve *graficando una función*
- María: *El terreno no pude tener 11 metros de ancho.*

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. Resuelva el problema del episodio
2. Examine los comentarios de los alumnos.

Figura 19. Problema del Episodio – Ficha 1A.

En la segunda fase de esta sesión, los profesores crearon y resolvieron un problema Pre respecto al problema del episodio. Los participantes no tuvieron problemas de crear y resolver un problema en forma individual y los mismos fueron registrados en la Ficha 2A (véase Figura 20).

Ficha 2A

3. Cree y resuelva un ***problema pre*** (que facilite la comprensión y solución del problema del episodio)

Figura 20. Ficha para crear y resolver el problema pre –Ficha 2A.

Como tercera fase se les pidió que trabajaran en grupos de dos participantes y se les repartió la Ficha 3A (véase Figura 21) para crear y solucionar un problema Pre en forma grupal. De igual forma, se les pidió que reflexionaran, en forma grupal, sobre los comentarios de los alumnos que trajo el problema del episodio.

Los cuatro grupos adaptaron uno de los problemas Pre individuales que habían hecho en la fase anterior y trabajaron sin ningún inconveniente.

GRUPO: _______

Ficha 3A

ACTIVIDAD GRUPAL

1. Intercambiar ideas y opiniones sobre las tres actividades individuales.
2. Explicitar un punto de vista grupal sobre los comentarios de cada alumno.

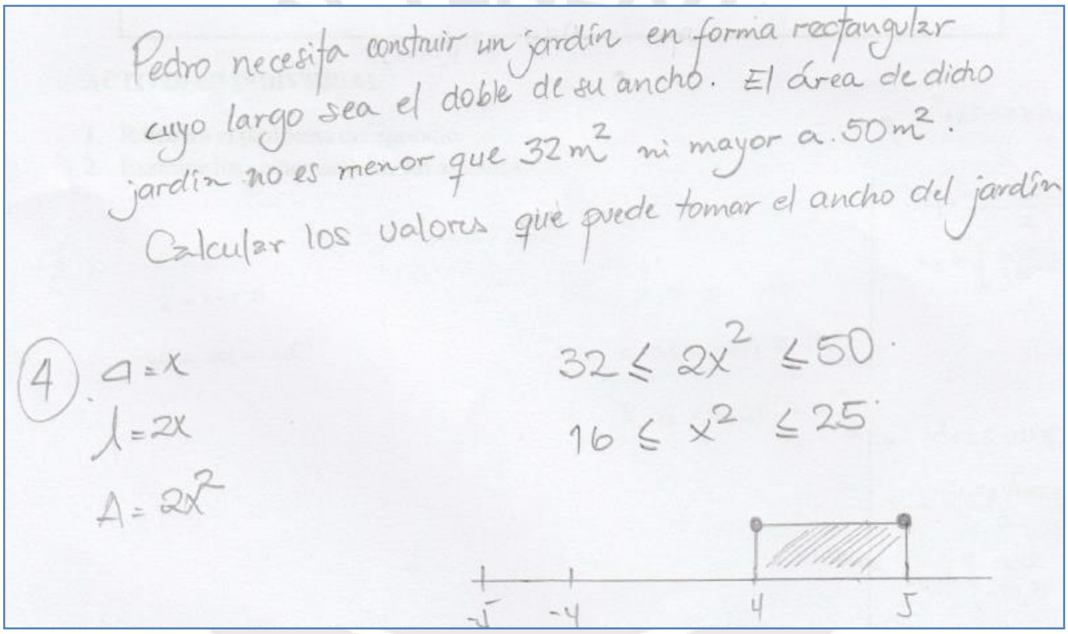
3. Crear un ***problema pre grupal***.

Figura 21. Actividad grupal – problema pre – Ficha 3A.

Luego de un tiempo prudente, se recogieron todas las fichas de trabajo para dar inicio a la fase de socialización, donde se realizó la exposición de algunas respuestas al problema del episodio, sobre los comentarios de los alumnos y sobre los problemas pre grupales que los participantes realizaron en base al problema del episodio.

Para esta fase, salió un participante del grupo 2 y explicó que, al resolver el problema del episodio, no necesitó de las ecuaciones cuadráticas y que tampoco eran necesarias las funciones cuadráticas y generalizó diciendo que todos sus compañeros resolvieron el problema del episodio usando inecuaciones cuadráticas.

Aparte comentó que, cuando trabajó en forma grupal y crearon por variación un nuevo problema, recién pudieron relacionar las funciones cuadráticas con el conjunto solución que daban las inecuaciones cuadráticas. Este grupo, en su intervención, no logró relacionar las ecuaciones y funciones cuadráticas. Además, esto quedó evidenciado en la ficha de trabajo donde mostraron el uso de las inecuaciones al solucionar su problema Pre (véase la Figura 22).


Pedro necesita construir un jardín en forma rectangular cuyo largo sea el doble de su ancho. El área de dicho jardín no es menor que 32 m² ni mayor a 50 m². Calcular los valores que puede tomar el ancho del jardín

4. $a = x$
$l = 2x$
$A = 2x^2$

$32 \leq 2x^2 \leq 50$
$16 \leq x^2 \leq 25$

Figura 22. Problema Pre del grupo 2 expuesto en la primera socialización.

A continuación, el grupo 4 participó y uno de sus integrantes expuso su resolución del problema del episodio y mostró la necesidad de realizar el gráfico de las funciones cuadráticas para así relacionarlas con las ecuaciones cuadráticas.

Esta participación fue muy valiosa, pues logró mostrar a los demás participantes las relaciones entre los dos objetos matemáticos que esperábamos que ellos trabajen en la solución del problema del episodio y así lograran crear un problema donde se siga mostrando una relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Al preguntar a los otros grupos si habían resuelto de otra forma el problema del episodio o si crearon un problema pre, donde se mostrara relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas, afirmaron que la solución del problema del episodio fue similar al del primer grupo que expuso y, de igual forma, su problema pre grupal no mostró relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Se prosiguió con la quinta fase de la primera sesión y se les entregó una nueva ficha (véase Figura 23) para continuar el trabajo grupal, en este caso, para la creación de un problema Pos, donde se les aclaró que este problema deberá tener una mayor demanda cognitiva o ser más retador.

GRUPO: _____

Ficha 4A

ACTIVIDAD GRUPAL

1. Crear un ***problema pos*** grupal (un problema inspirado en el del episodio, que sea "más retador" y pueda resolverse relacionando ecuaciones cuadráticas con funciones cuadráticas).
2. Resolver el ***problema pos*** grupal creado de modo que se evidencie la relación entre ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas.

Figura 23. Actividad grupal – problema pos – Ficha 4A.

Luego de otro tiempo prudente se les recogió la ficha 4A y se continuó con la última fase, donde se realizó una nueva socialización. Para esta nueva exposición, se les pidió a los otros grupos que no salieron en la primera socialización que explicaran su problema pos creado.

El primer grupo que expuso mostró en su solución de su problema Pos el uso de la función cuadrática, pero desligó el uso de la ecuación cuadrática, ya que lograron hacer un nuevo problema por variación, pero no lograron mantener en la solución de su problema relacionar las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Los demás grupos también explicaron, en forma breve, su problema pos creado, donde mostraron problemas que vinculan las ecuaciones y funciones cuadráticas, aunque estos no tenían una mayor demanda cognitiva, pues solo se realiza pequeñas variaciones cuantitativas o agregan otros requerimientos que hacen del problema algo similar al problema pre que ellos crearon.

Como todos los grupos no consiguieron crear un problema pos, se explicó un problema diseñado donde resaltara la variación al problema del episodio y donde se muestre una mayor demanda cognitiva. En la Figura 24 se muestra el problema pos que se les explicó para hacer el cierre a la primera sesión.

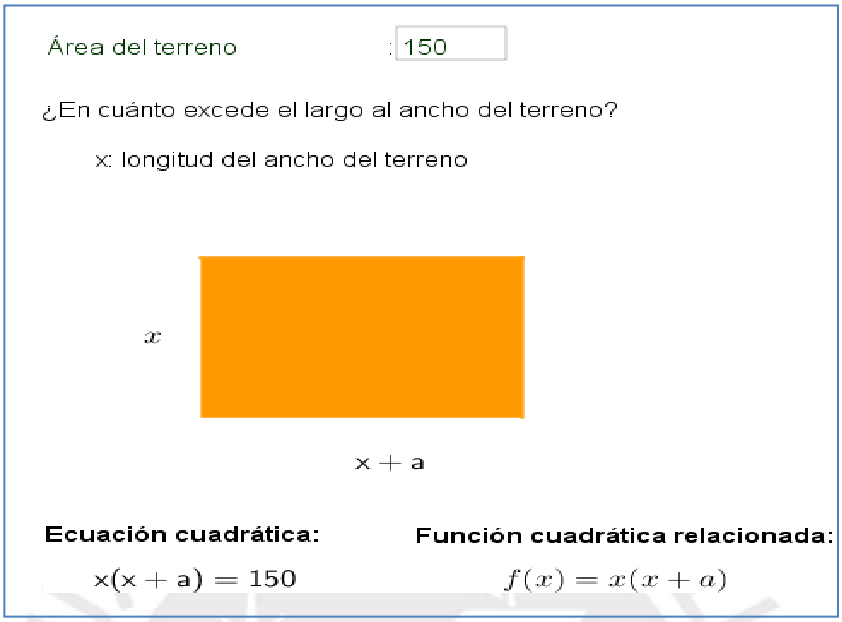


Figura 24. Problema pos preparado para el taller – parte ecuación cuadrática.

Para finalizar, se les explicó por qué el problema se considera un problema pos (véase Figura 25), además de mostrar que se puede hacer variaciones y aún conservar la vinculación de las ecuaciones y funciones cuadráticas. Como apoyo se usó el software Geogebra, ya que es una herramienta que ayuda a la visualización de la solución del problema y permite un ahorro tiempo.

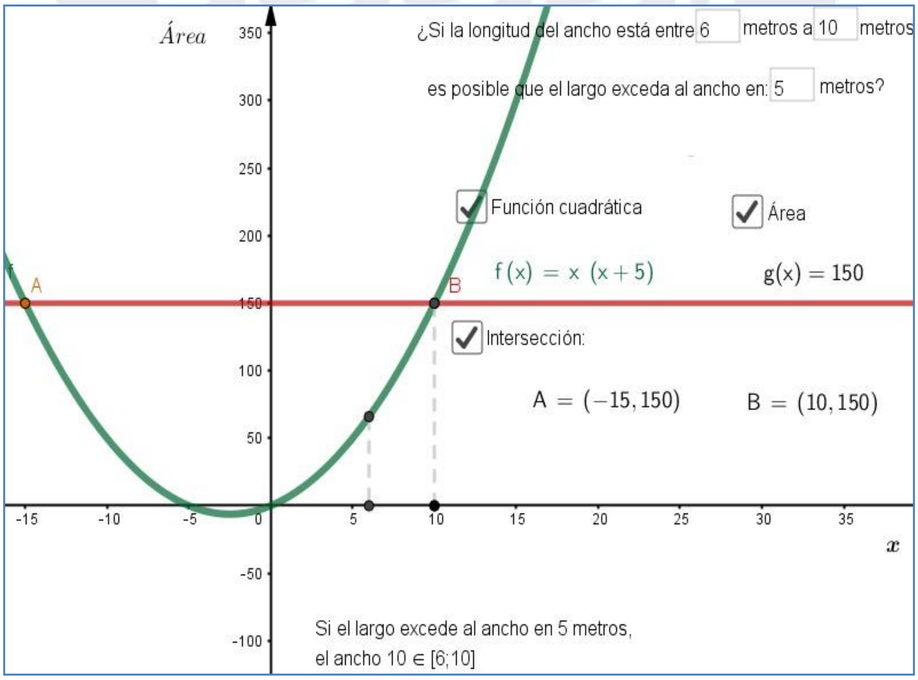


Figura 25. Problema pos preparado - parte función cuadrática.

Sesión 2

Para esta sesión se incorporaron dos participantes más y constó de cinco fases:

La primera fase se inició repartiéndoles fichas de trabajo individual, las cuales contenía tareas en específico sobre una situación, de las cuales a cinco participantes se les pidió plantear una ecuación cuadrática y a los otros cinco plantear una función cuadrática sobre la misma situación.

Se diseñaron cuatro fichas de trabajo: Ficha 1E, Ficha 1F, Ficha 2E, Ficha 2F. Cada una de ellas tiene diferentes tareas (E alude a ecuación y F alude a función).

En la Ficha 1E y Ficha 2E se les pidió escribir una ecuación cuadrática bajo algunas condiciones sobre la situación y luego encontrar sus soluciones (véase Figura 26 y 27).

NOMBRE: ________________ **Ficha 1E**

Situación:

En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

Considerando como variable x el ancho del borde,

a) Escriba una ***ecuación cuadrática*** a partir de la situación dada, asignando longitudes de 42 m y 24 m a las dimensiones del rectángulo que se forma ***incluyendo el borde sin césped***.
b) Explique lo que representa la ecuación y sus soluciones en el contexto de la situación dada.

Figura 26. Tarea sobre ecuación cuadrática 1 - Ficha 1E.

NOMBRE: ________________ **Ficha 2E**

Situación

En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

Considerando como variable x el ancho del borde.

a) Escriba una ***ecuación cuadrática*** a partir de la situación dada, asignando longitudes de 40 m y 20 m a las dimensiones del rectángulo en el que ***se sembrará el césped***.
b) Explique lo que representa la ecuación y sus soluciones en el contexto de la situación dada.

Figura 27. Tarea sobre ecuación cuadrática 2 - Ficha 2E.

De igual forma, en las Ficha 1F y Ficha 2F se les dio la tarea de escribir una función cuadrática y graficarla bajo algunas condiciones en torno a la situación (véase Figura 28 y 29).

NOMBRE: ________________

Ficha 1F

Situación

En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

Considerando como variable x el ancho del borde,

a) Escriba una **función cuadrática *f*** a partir de la situación dada, asignando longitudes de 42 m y 24 m a las dimensiones del rectángulo que se forma ***incluyendo el borde sin césped***. Esboce el gráfico de tal función.
b) Explique lo que representa la función ***f*** en el contexto de la situación dada.

Figura 28. Tarea sobre función cuadrática 1 - Ficha 1F.

NOMBRE: ________________

Ficha 2F

Situación

En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

Considerando como variable x el ancho del borde.

a) Escriba una ***función cuadrática g*** a partir de la situación dada, asignando longitudes de 40 m y 20 m a las dimensiones del rectángulo en el que ***se sembrará el césped***. Esboce el gráfico de tal función.
b) Explique lo que representa la función ***g*** en el contexto de la situación dada.

Figura 29. Tarea sobre función cuadrática 2 - Ficha 2F.

Los profesores trabajaron en forma individual sin ningún inconveniente y luego de un tiempo prudencial comenzó la segunda fase, la cual consistió en formar grupos de dos integrantes en donde cada grupo se formó dependiendo de las fichas trabajadas.

Los participantes con la Ficha 1E se agruparon con los de la Ficha 1F y los de las Ficha 2E con los de la Ficha 2F. Toda esta información se registró en la Ficha 1E-1F y en la Ficha 2E-2F (Véase Figura 30 y 31).

GRUPO: ______

Ficha 1E-1F

ACTIVIDAD GRUPAL

a) Explicarse mutuamente las actividades individuales realizadas.
b) Teniendo como referencia las funciones y ecuaciones cuadráticas dadas en las actividades individuales, crear un problema sobre la situación dada, en cuya solución se ***relacione funciones y ecuaciones cuadráticas***.
c) Escribir la solución del problema grupal creado, en la que se muestre la relación entre función y ecuación cuadrática.

Figura 30. Tarea grupal 1 - Ficha 1E-1F.

GRUPO: ______

Ficha 2E-2F

ACTIVIDAD GRUPAL

a) Explicarse mutuamente las actividades individuales realizadas.
b) Teniendo como referencia las funciones y ecuaciones cuadráticas dadas en las actividades individuales, crear un problema sobre la situación dada, en cuya solución se ***relacione funciones y ecuaciones cuadráticas***.
c) Escribir la solución del problema grupal creado, en la que se muestre la relación entre función y ecuación cuadrática.

Figura 31. Tarea grupal 2 - Ficha 2E-2F.

Esta fase estuvo diseñada para que en cada grupo trabajen sobre la ecuación y función cuadrática que cada uno planteó. El reto fue que ambos crearan un solo problema (Llámese problema inicial) dada la misma situación inicial, teniendo en cuenta lo trabajado por cada integrante de la pareja.

Para esta parte del taller, fue muy importante orientarlos en las discusiones en cada pareja, para que encuentre sentido y relación a la ecuación cuadrática que habían formulado un integrante con la función cuadrática del otro integrante, pues varios de los grupos no pudieron conectar las ecuaciones cuadráticas que habían planteado, ya que realizaron una ecuación que no tenía significado con la función cuadrática del otro profesor o comentaban que las soluciones de la ecuaciones eran negativas y no encontraban un significado a eso que les salió.

También un grupo comentó que el área que ellos colocaban como información tenía que cumplir ciertas condiciones, porque, en el contexto que ellos habían colocado las soluciones, no iban a tener un significado.

Se recogieron todas las fichas de trabajo para dar inicio a la tercera fase, que fue el momento de la socialización de los problemas que crearon.

El primer grupo expuso su problema donde mostró el uso de la ecuación y función cuadrática, pero estas, en su solución, no estaban relacionadas. Este grupo, como no había participado en la primera sesión, le costó crear un problema donde mostrara el pedido de vincular las ecuaciones y funciones cuadráticas; sin embargo, el resto de los grupos adaptaron sus problemas creados bajo la situación dada a los problemas que se realizaron y expusieron al término de la primera sesión, demostrando comprender la vinculación de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

La fase cuatro inició entregándoles la Ficha 1E-1F B o la Ficha 2E-2F B, dependiendo la ficha que trabajaron en la fase anterior. En esta ficha, se realizó un nuevo problema, que podría ser un problema pre o un problema pos, dependiendo de cómo consideraron el problema inicial de la segunda fase. Está tarea no les pareció muy tediosa, así los grupos lograron terminar esta parte del taller sin ningún inconveniente

Para iniciar a la última fase de la segunda sesión, se recogieron sus fichas y se comenzó con la última socialización. En esta parte, los participantes explicaron por qué consideran su problema actual como uno pre o uno pos con respecto a su problema inicial y al exponer la mayoría de los grupos se evidenció el uso relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas en sus problemas creados. Se realizaron las palabras de cierre y se dio por finalizado el taller.

4.3 Análisis de las respuestas de los profesores.

Para realizar este análisis, los conocimientos fueron clasificados como conocimientos separados y relacionados.

Los conocimientos separados son aquellos conocimientos básicos que tiene el participante sobre ecuaciones cuadráticas y sobre funciones cuadráticas y los conocimientos relacionados son los conocimientos donde el profesor muestra las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

4.3.1 Análisis de las respuestas de los participantes en la exploración inicial.

En esta sección, se muestra el análisis de la exploración inicial. Para realizar este proceso se utilizó la rúbrica especialmente diseñada para medir los conocimientos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas descrita en la sección 3.4 y 3.5.

Los profesores P6 y P9 participaron de la segunda sesión del taller, sin rendir la exploración inicial. Al explicar los resultados, no se les consideró en los análisis.

A continuación, mostraremos los resultados del análisis donde se identifican los conocimientos de los participantes antes del taller de creación de problemas.

4.3.1.1 Conocimientos por separados

Sobre ecuación cuadrática:

- Sobre el primer criterio de ecuación, en la pregunta 1.a, se tiene un problema extra matemático sobre determinar el área de una región rectangular:

  El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que el ancho y su área es 84 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones?.

  Se logró identificar que siete de ocho profesores hicieron uso de la ecuación cuadrática $x(x+5) = 84$, pero en la mayoría de sus soluciones no definieron la variable "x".

  La Figura 32 muestra parte de la respuesta del profesor P4, donde planteó correctamente la ecuación cuadrática dado el contexto extra matemático de la pregunta 1.a.

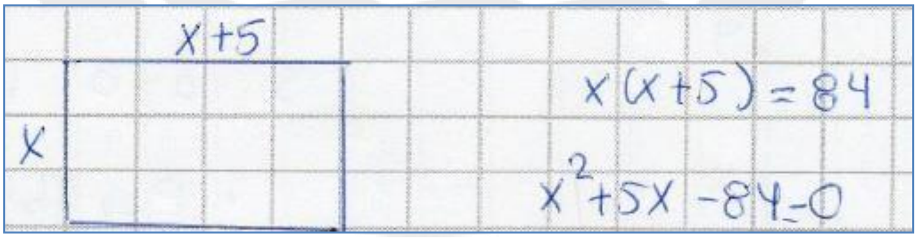


Figura 32. Parte de la solución del profesor P4 donde plantea una ecuación cuadrática.

- Sobre el segundo criterio de ecuación, cuatro de ocho profesores utilizaron correctamente los métodos de factorización o la fórmula general para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática del problema extra matemático 1.a. También se dio el caso que dos profesores no plantearon la ecuación cuadrática y resolvieron el problema dando valores al ancho y al largo, para así determinar las dimensiones del terreno.

A continuación, se muestra parte de la resolución de la pregunta 1.a del profesor P4, donde realizó factorización para encontrar la solución a la ecuación cuadrática; sin embargo, omitió el conjunto solución e hizo el descarte de la solución negativa, pues no cumplía con lo que se requería en dicha pregunta.

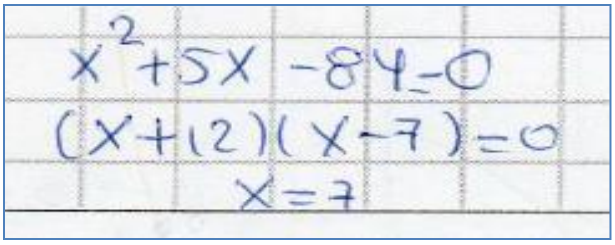


Figura 33. Parte de la solución del profesor P4 donde resuelve una ecuación cuadrática.

- Sobre el tercer criterio de ecuación en la pregunta 1.a, para obtener la respuesta, los profesores debieron discriminar una de las soluciones obtenidas de la ecuación cuadrática. El resultado de ello fue que seis de ocho profesores concluyeron correctamente al dar una respuesta, aunque algunos no hayan obtenido el conjunto solución.

Comentarios:

Sobre las tres habilidades analizadas sobre ecuaciones cuadráticas en la exploración inicial, se puede afirmar que la mayoría de los profesores lograron resolver correctamente tareas que involucraron plantear y resolver una ecuación cuadrática. Además, los profesores relacionaron un elemento del conjunto solución con el valor que soluciona problemas extra matemáticos.

En la Figura 34, se muestra los tres criterios analizados, siendo el segundo criterio donde los profesores demostraron una habilidad parcial al resolver una ecuación cuadrática.

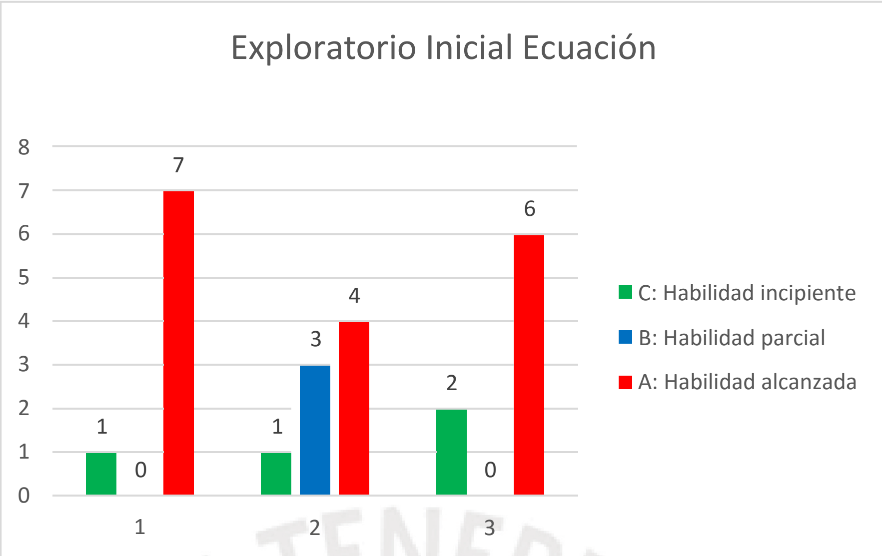


Figura 34. Resumen de las tres habilidades analizadas sobre ecuaciones cuadrática.

Sobre función cuadrática

- Sobre el primer criterio de función, cinco de ocho profesores no asociaron la función cuadrática con el contexto extra matemático y lo desligaron de la ecuación cuadrática que habían desarrollado en la pregunta anterior. Este criterio fue evaluado en la pregunta 1.b:

  Pedrito resolvió la pregunta anterior usando la ecuación $x(x+5) = 84$. *¿Qué* ***expresa*** *la función* $f(x) = x(x+5)$ *en el contexto del problema?*

  Tres profesores no lograron relacionar la función cuadrática del problema 1.b con la ecuación cuadrática del problema 1.a y, al realizar esa desvinculación, afirmaron que $f(x)$ es una expresión que representa la dependencia de dos variables o usaron la definición de función perdiendo el significado de la variable x, que es el ancho del terreno.

  En la Figura 35, se muestra la solución correcta del profesor P4 que logró expresar el significado de la función cuadrática respecto a la información del contexto extra matemático de la pregunta 1a.

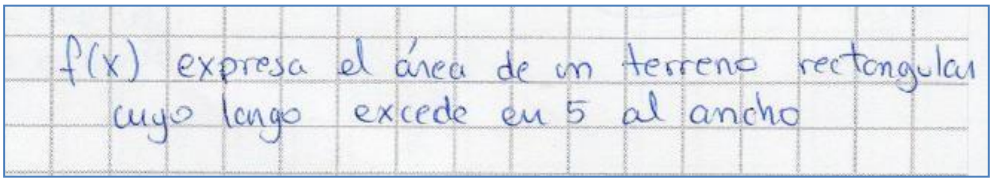

f(x) expresa el área de un terreno rectangular
cuyo largo excede en 5 al ancho

Figura 35. El profesor P4 evidencia relacionar la función cuadrática con el problema.

- Sobre el segundo criterio de función, seis de ocho participantes lograron esbozar parcialmente el gráfico de una función cuadrática, donde encuentran el vértice y dos puntos simétricos. En este caso, la mayoría de profesores no pudieron realizar el gráfico de una función cuadrática, pues en algunas preguntas estos no lograron identificar una función cuadrática relacionada a la ecuación cuadrática que les ofrecía la pregunta.

  Se puede considerar que la habilidad de graficar una función cuadrática es parcial en la mayoría de los profesores.

  En la Figura 36, se muestra la solución parcial del profesor P4 a la pregunta 2:

  ¿Qué ***relación*** *encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$?*

  En esta pregunta, no era necesario el graficar la función f para expresar las relaciones entre esa ecuación cuadrática y la función cuadrática, pero, al realizar el gráfico de la función cuadrática f , permitía que el profesor reconociera los elementos en común con la ecuación cuadrática.

  Para el primer criterio de función, el profesor P4 realizó el gráfico de f, pero no muestra los cálculos de los puntos de cortes con los ejes coordenados, ni explícita dichos puntos en su gráfica. Además realizó un esbozo incompleto, pues tampoco expresó cuál es el vértice de la parábola asociada. Por eso se concluye que tuvo una habilidad parcial para el primer criterio de función.

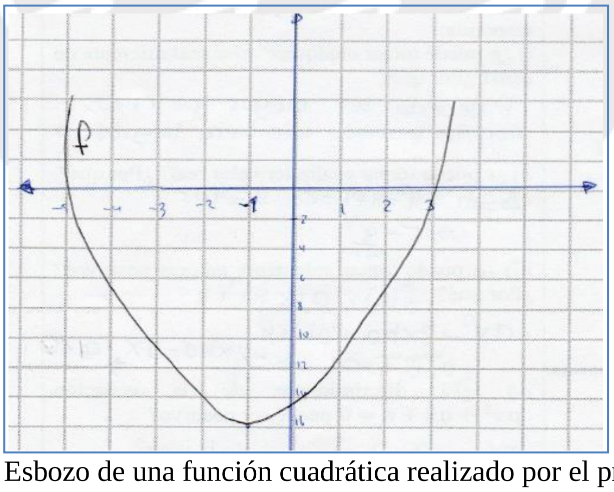


Figura 36. Esbozo de una función cuadrática realizado por el profesor P4.

Comentarios:

La Figura 37 muestra el resumen de las dos habilidades consideradas en el análisis de la exploración inicial sobre funciones cuadráticas. La primera habilidad es sobre relacionar la función cuadrática con el contexto; es decir, el significado que tiene esa función cuadrática y la segunda habilidad analizada fue el graficar correctamente la función cuadrática.

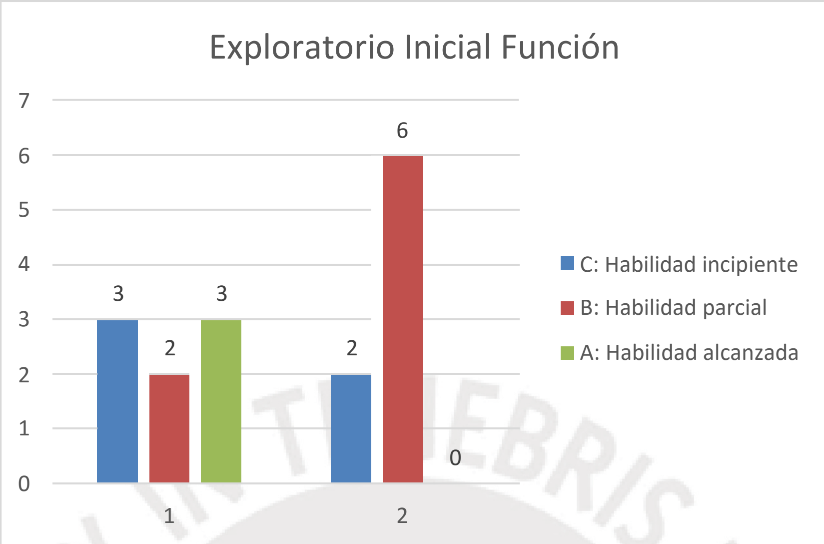


Figura 37. Resumen de las dos habilidades analizadas sobre función cuadrática.

Comentarios sobre los conocimientos por separado:

La tabla 21 muestra el resumen de los conocimientos, por separados, que tuvieron los profesores en la exploración inicial sobre ecuaciones y funciones cuadráticas.

Tabla 21. *Resumen de los conocimientos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas por profesores en la exploración inicial. Conocimientos separados.*

Inicial	Criterio	Profesor									
		P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
Ecuación	**1**	0	2	2	2	2		2	2		2
	2	0	2	1	1	2		2	2		1
	3	0	0	2	2	2		2	2		2
Función	**1**	1	0	0	2	0		2	1		2
	2	0	0	1	1	1		1	1		1
	suma	1	4	6	8	7	0	9	8	0	8

Podemos afirmar que cinco de ocho profesores demostraron conocimientos por separado de las ecuaciones y funciones cuadráticas. En las tareas donde se analizó el uso de las funciones cuadráticas, los profesores no alcanzaron a tener una puntuación alta por el hecho que no se les pedía exactamente graficar una función o se le daba la representación algebraica de la función, ya que encontrar una función cuadrática relacionada a una ecuación cuadrática fue su mayor dificultad.

El profesor P1 evidenció una habilidad incipiente sobre el tipo de tareas que se les presento en la exploración inicial en conocimientos de ecuaciones y funciones cuadráticas.

El profesor P2 logró resolver problemas que involucran ecuaciones cuadráticas, pero no los problemas de funciones cuadráticas. Además, explícita que no enseña funciones cuadráticas (véase anexo H).

4.3.1.2 Conocimientos relacionados

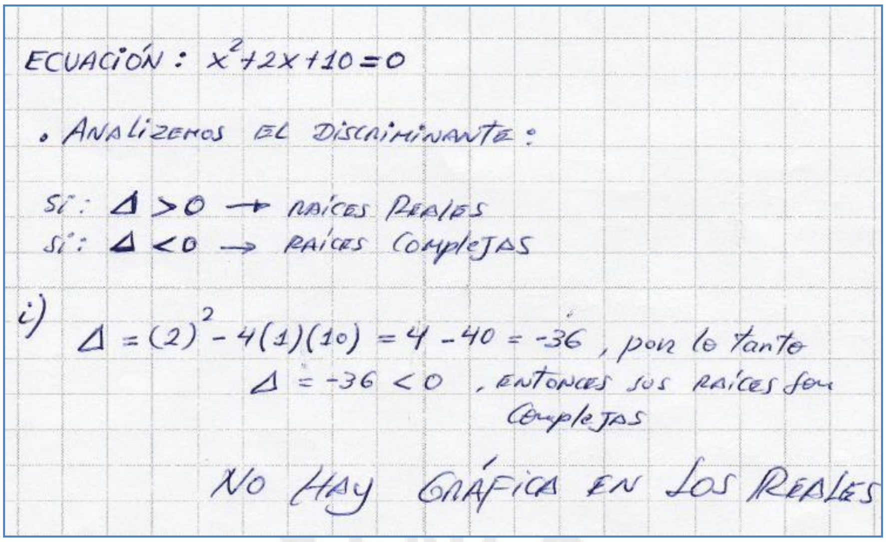
Para el siguiente análisis, se consideraron las seis relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas descritas en la sección 2.1.3. Además, estas relaciones ya fueron especificadas en la parte de herramientas de análisis sección 3.4 y 3.5.

A continuación, detallamos el análisis de cada una de las seis relaciones:

- Sobre la relación 1, se puede afirmar que cinco de ocho participantes manifestaron una habilidad parcial de esta relación, pues en las preguntas donde había que hallar el conjunto solución de una ecuación cuadrática y luego relacionar con una función cuadrática para poder realizar su gráfico, no lograron identificar una función cuadrática. Por ejemplo en la pregunta 6.a:

  Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2+2x+10=0$. ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

  El profesor P7 pudo encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática, pero como esta ecuación no tiene soluciones reales, afirmó que no se puede graficar en los reales, demostrando que no logró relacionar la ecuación cuadrática $x^2+2x+10=0$ con una función cuadrática $f(x)=x^2+2x+10$ (Véase figura 38).



ECUACIÓN : $x^2+2x+10=0$

• ANALIZEMOS EL DISCRIMINANTE :

SÍ : $\Delta > 0 \rightarrow$ RAÍCES REALES

SÍ : $\Delta < 0 \rightarrow$ RAÍCES COMPLEJAS

i) $\Delta = (2)^2 - 4(1)(10) = 4 - 40 = -36$, por lo tanto $\Delta = -36 < 0$, ENTONCES SUS RAÍCES SON COMPLEJAS

NO HAY GRÁFICA EN LOS REALES

Figura 38. Solución del profesor P7 con la relación 1 incipiente.

- Sobre la relación 2, solo el profesor P4 logró mostrar, en algunas de sus soluciones, dicha relación entre la ecuación cuadrática con la función cuadrática intersecada con una recta horizontal.

  En tanto, la mitad de participantes solo lograron identificar en forma parcial un caso particular de esta relación, pues pudieron encontrar relaciones entre la ecuación cuadrática y los puntos de intersección de una función cuadrática con el eje X. Se puede considerar esta relación como parcial en cinco de ocho participantes, aunque solo desarrollen esta relación para un caso particular.

  A continuación, se muestra la pregunta 5, donde se pudo medir la relación 2:

  > *Resuelva la ecuación* $(x-2)^2-1=0$ *y relacione gráficamente el conjunto solución con la intersección de los gráficos de dos funciones.*

  En la figura 39 se muestra la solución del profesor P4, donde desarrolló correctamente la relación de la ecuación cuadrática $(x-2)^2-1=0$ con la intersección de la función cuadrática $f(x)=(x-2)^2$ y la función constante $g(x)=1$. Se considera que el profesor P4 tiene una habilidad alta en la relación 2.

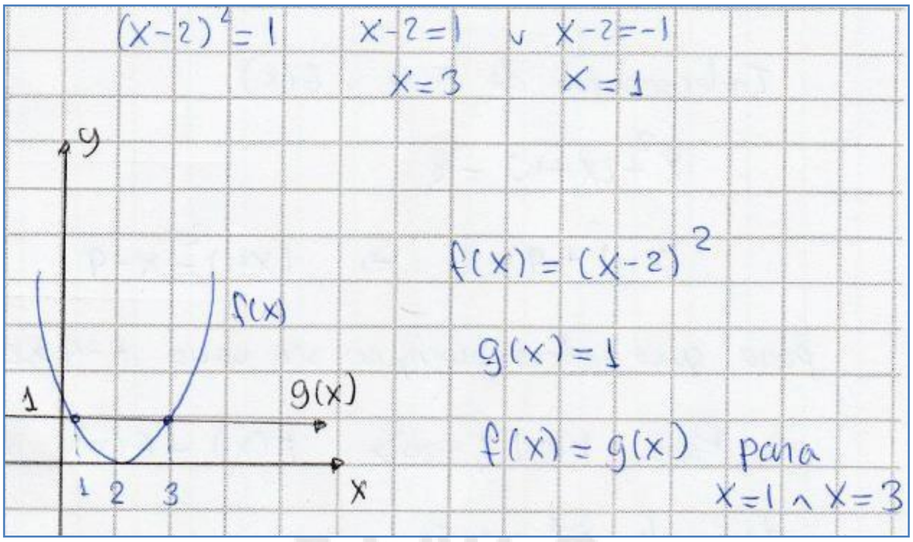


Figura 39. Relación 2 lograda solo por el profesor P4.

- Sobre la relación 3 fue de las habilidades que menos demostraron tener los profesores antes del taller. Solo tres profesores tuvieron una habilidad parcial en esta relación.

  En la pregunta 2, también se pudo medir la relación 3:

  > *¿Qué* ***relación*** *encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$?*

  El profesor P3 tuvo algunas nociones sobre esta relación, pues afirmó que las soluciones de la ecuación cuadrática son los puntos de intersección con el eje X. En este caso, cometió el error de comparar un elemento real con un par ordenado. Se puede afirmar que el profesor tuvo una habilidad parcial sobre la relación 3.

  En la Figura 40 se muestra la solución del profesor P3 de la pregunta 2.

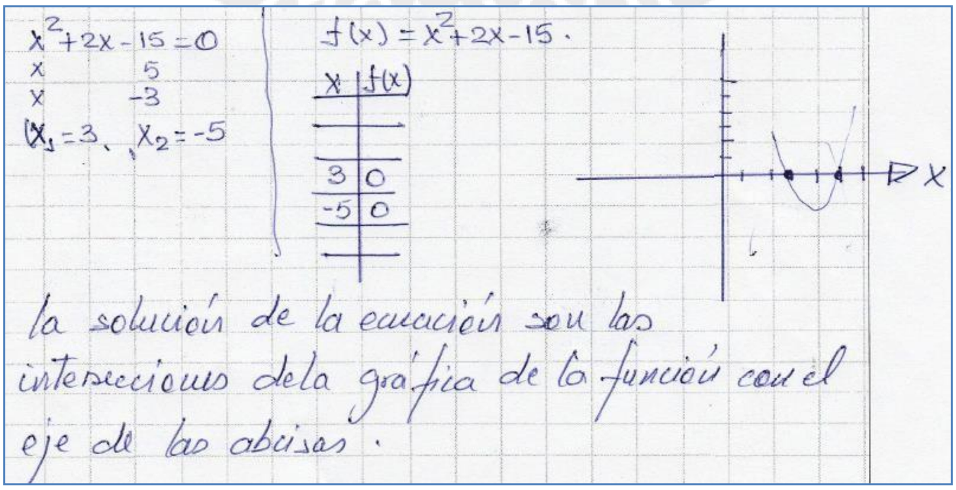


Figura 40. Solución del profesor P3, donde muestra una relación 3 parcial.

- Sobre la relación 4, la mitad de los participantes evidenciaron esta relación alta, pues cuando resolvieron las tareas de graficar una función cuadrática, recurren al uso de las ecuaciones cuadráticas para encontrar los puntos de cortes con el eje X.

  La relación 4 también pudo ser analizada en la pregunta 2:

  > *¿Qué **relación** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$?*

  En esta pregunta no se pidió que realizaran el gráfico de la función f; sin embargo, el realizar el esbozo del gráfico de la función cuadrática permitió encontrar los elementos que se relacionan con la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 15 = 0$ para la relación 3. Por ejemplo, en la Figura 41 se muestra la solución del profesor P7 donde en su resolución mostró la habilidad alta en la relación 4.

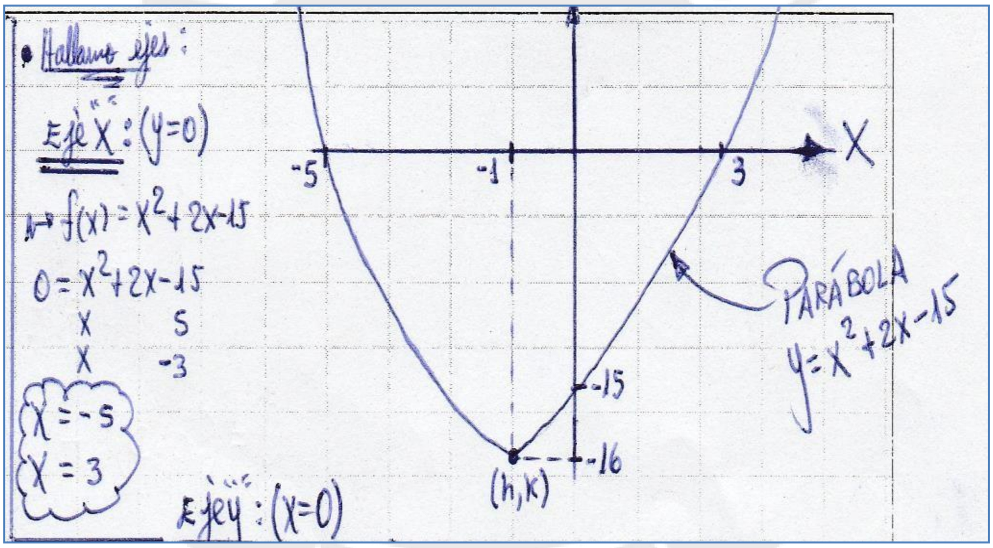
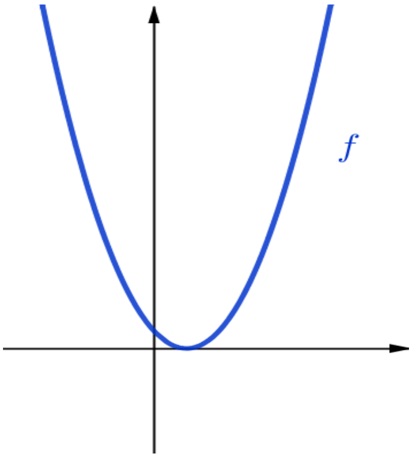


Figura 41. El profesor P7 tiene una relación 4 alta.

- Sobre la relación 5, que consistió en relacionar los parámetros de una función cuadrática con los parámetros de una ecuación cuadrática, cinco de ocho participantes pudieron identificar el parámetro “a” de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, pues lograron identificar que el gráfico de la función cuadrática es cóncava hacia arriba; sin embargo, sobre los otros parámetros, podemos afirmar que su habilidad de relacionar fue incipiente.

  Esta relación fue medida en la pregunta 4 ítems i, ii y iii:

  > *El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es como se muestra en la figura.*



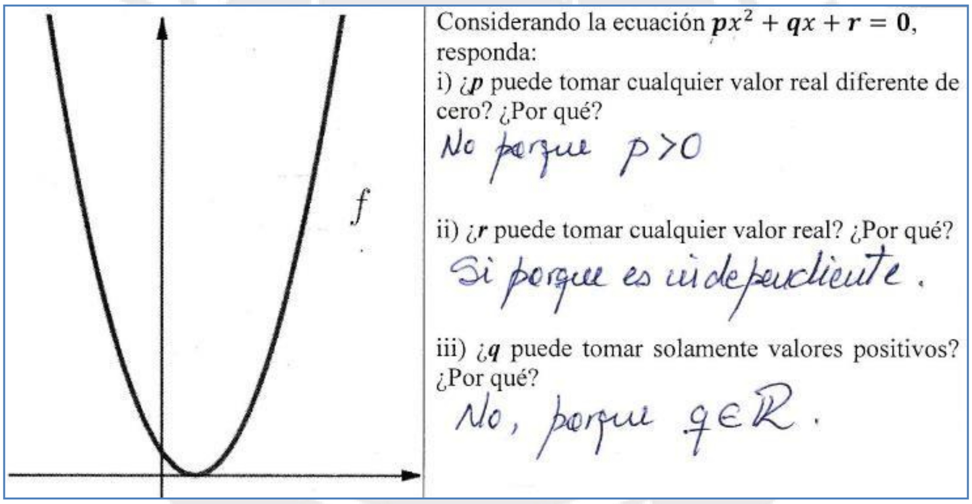
Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

Por ejemplo, en la solución del profesor P3, solo se logró observar que responde correctamente sobre el parámetro p y el resto no logró identificar sus posibles valores. Se puede afirmar que el profesor P3 tuvo una habilidad parcial sobre la relación 5 (véase Figura 42).



Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

No porque $p>0$

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

Si porque es independiente.

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

No, porque $q \in \mathbb{R}$.

Figura 42. Respuesta del Profesor P3 con una relación 5 parcial.

- Sobre la relación 6, afirmamos que cinco de ocho profesores tuvieron esta habilidad incipiente. Esta fue otra de las habilidades que menos demostraron tener los profesores en la exploración inicial.

  El error común fue que vincularon el valor positivo del discriminante para que una ecuación cuadrática tenga soluciones reales, donde desvinculan el gráfico de la función cuadrática y su concavidad.

  En la Figura 43 se observa la respuesta a la pregunta 4.iv del profesor P3, donde explica que el discriminante debe ser positivo porque el valor del discriminante siempre es positivo.

Esta respuesta se asocia al concepto de que toda ecuación cuadrática tiene soluciones reales si el valor del discriminante es un número real positivo. Se puede afirmar que el profesor presentó una habilidad incipiente en la relación 6, pues desvinculó el gráfico de la función cuadrática que se le ofrecía en la pregunta.

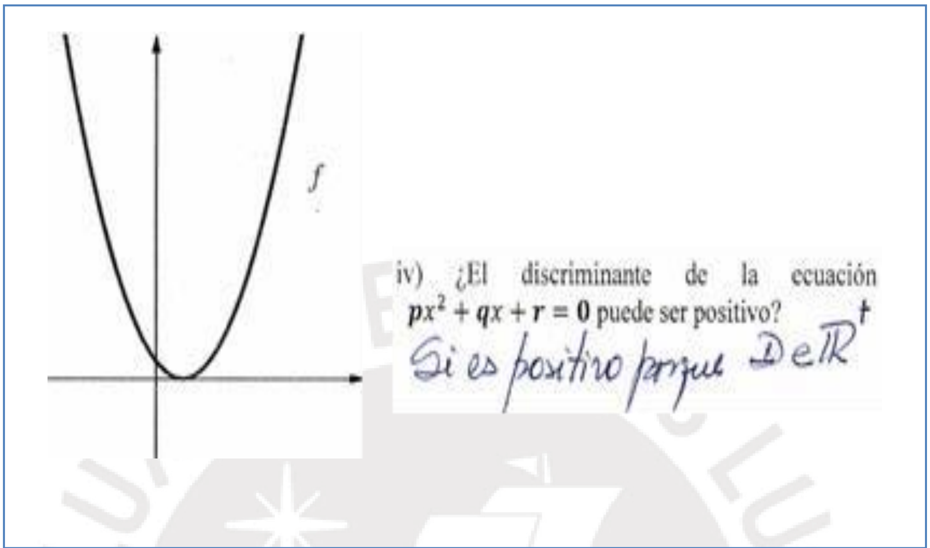


Figura 43. Respuesta del profesor P3 con una relación 6 incipiente

Comentarios sobre los conocimientos relacionados:

En la siguiente Tabla se muestra el resumen de los ocho participantes que rindieron la exploración inicial y el puntaje que se le consideró por cada una de las seis relaciones.

Tabla 22. *Resumen de los conocimientos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas por profesores en la exploración inicial. Conocimientos relacionados.*

Relación	**Profesor**									
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
1	0	0	0	1	1		1	1		1
2	0	1	1	1	0		1	1		1
3	0	0	1	1	0		1	0		0
4	0	1	1	2	0		2	2		2
5	0	1	1	1	0		0	1		1
6	0	0	0	2	0		0	0		1
Total (12)	**0**	**3**	**4**	**8**	**1**	**0**	**5**	**6**	**0**	**6**

Se advierte que la mayoría de participantes relacionó muy débilmente los objetos matemáticos ecuación y función cuadrática. Así, la relación que más percibieron fue la 4 y, dentro de ella, cuatro profesores en el nivel 2 (Habilidad alcanzada), las relaciones 3 y 6 las percibieron muy débilmente y solo un profesor alcanzó el nivel 2.

A continuación, se muestra en la Figura 44 el resumen de las seis habilidades, según el análisis, que pasaron las respuestas de los ocho participantes.

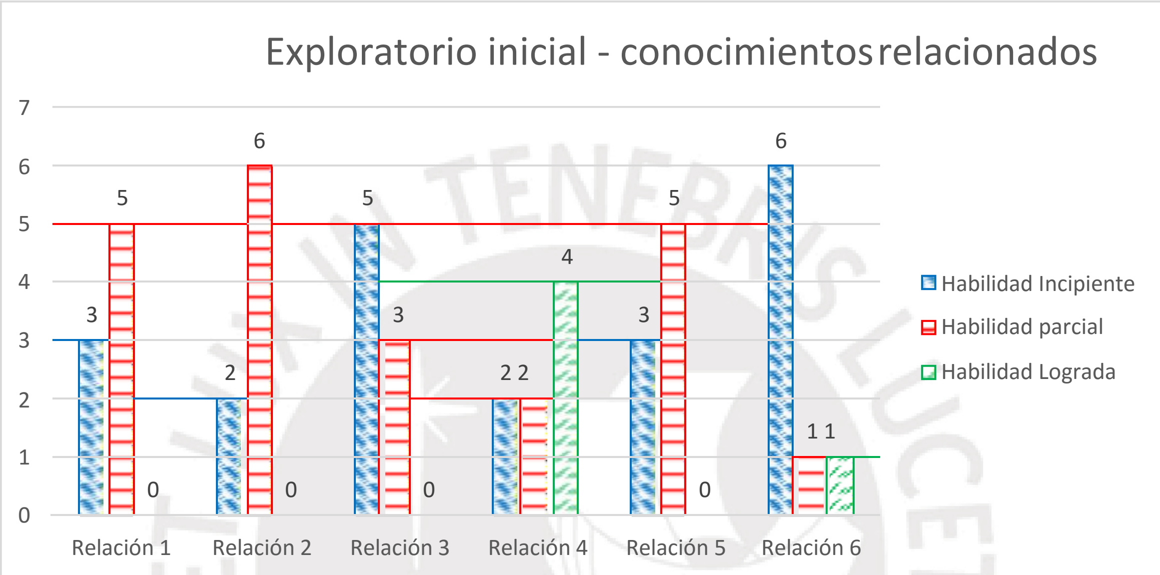


Figura 44. Resumen del análisis de los conocimientos relacionados de la exploración inicial.

4.3.2 Análisis de las respuestas de los participantes en las sesiones del taller.

A continuación mostraremos el análisis realizado a las fichas recogidas en las dos sesiones del taller.

Para la primera sesión, se recogieron cuatro fichas: Ficha 1A, Ficha 2A, Ficha 3A y Ficha 4A y en la segunda sesión se recogieron ocho fichas: Ficha 1E, Ficha 2E, Ficha 1F, Ficha 2F, Ficha 1E-1F, Ficha 2E-2F, Ficha 1E-1F B y Ficha 2E-2F B. Todas estas fichas dan evidencia para realizar el análisis de los conocimientos al inicio del taller y los conocimientos que van comprendiendo en el desarrollo del taller.

Primera sesión

En esta sección analizamos las respuestas que dieron al problema del episodio y sobre los diferentes problemas creados por variación y sus soluciones: Problema pre individual, pre grupal y pos grupal. Este análisis se realizó a las cuatro fichas de trabajo recogidas:

- Sobre la Ficha 1A, los participantes resolvieron el problema del episodio y explicaron sobre los tres comentarios de los alumnos:

  El profesor Michael, en una de sus clases sobre ecuaciones cuadráticas, propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

  Pedro necesita comprar un terreno rectangular cuya área sea por lo menos de 52 m^2 y no mayor a 115 m^2. Recibe como oferta un terreno rectangular que no ha visitado, pero tiene como información que su largo excede en 1,5 metros a su ancho. ¿Qué longitudes puede tener el ancho del terreno para que se cumpla con las restricciones de área dadas?

  Luego de unos minutos, algunos de los alumnos del profesor Michael comentaron:

  Alexander: El terreno debe tener 8 metros de ancho.

  Marco: El problema se resuelve graficando una función.

  María: El terreno no pude tener 11 metros de ancho.

Cinco de los participantes se vieron en la necesidad de usar inecuaciones cuadráticas para poder dar solución a dicho problema, mientras que el profesor P2 lo resolvió con procedimientos aritméticos y otros dos profesores usaron las ecuaciones cuadráticas, aunque no mostraron que haya la necesidad del uso de las funciones cuadráticas para justificar el uso de las ecuaciones cuadráticas y se evidencia cuando estos profesores explicaron los comentarios de los alumnos.

En la Figura 45, se muestra la solución del profesor P3 que no reflejó ninguna relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas al resolver el problema del episodio e hizo uso de las inecuaciones cuadráticas.

El planteamiento para resolverlo por inecuaciones cuadráticas es correcto, aunque no expresó la respuesta de los valores del ancho del terreno y tampoco explicó los comentarios del problema del episodio. Esto resalta aún más que no logró encontrar alguna relación con los objetos matemáticos ecuación y función cuadrática.

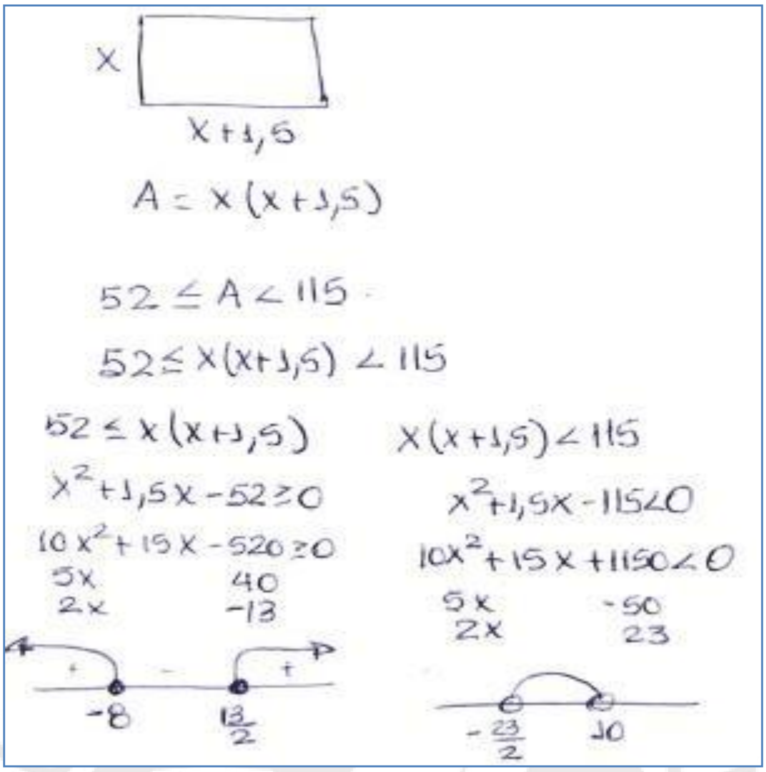


Figura 45. Solución del profesor P3 al problema del episodio.

- Sobre la Ficha 2A, se evidenció el problema pre individual que los participantes crearon, que tuvieron como base el problema del episodio y la solución que desarrollaron a ese problema en la Ficha 1A.
  Como la mayoría de los participantes desarrollaron el problema del episodio sin la necesidad de vincular las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas, al crear el problema pre y mostrar su solución, lo resolvieron usando inecuaciones cuadráticas.
  Por otro lado, un participante, al variar su problema, mostró en su solución el uso de una función cuadrática sin relacionarla con las ecuaciones cuadráticas y otro participante cambió el contexto matemático al de función cúbica, creando un problema por variación con una mayor demanda cognitiva, el cual no se puede considerar como un problema pre.

Hasta esta fase fueron pocos participantes que evidenciaron en sus respuestas las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, ya que la mayoría de los participantes, al crear sus problemas pre, lograron hacerles modificaciones al problema del episodio, pero siguieron sin la necesidad de usar las ecuaciones y funciones cuadráticas en conjunto.

En la Figura 46 se muestra el problema pre del profesor P10, donde realizó variaciones a la información del problema del episodio y su entorno matemático estuvo situado en las inecuaciones. Cabe resaltar que también desarrolló el problema del episodio con inecuaciones cuadráticas.

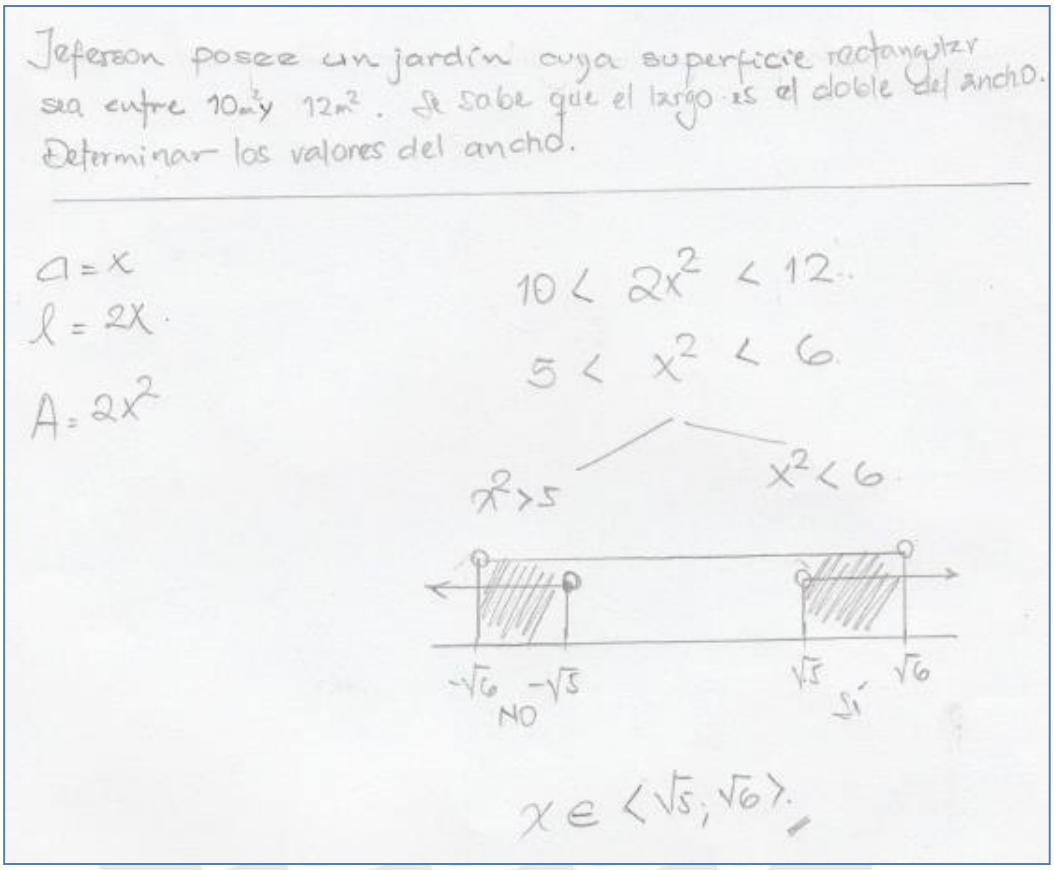


Figura 46. Creación y resolución del problema pre del profesor P10.

- Sobre la Ficha 3A, se formaron cuatro grupos de trabajo para crear un problema pre grupal y reflexionar sobre los comentarios de los alumnos. La mayoría de los grupos escogió uno de los problemas creados de las Fichas 2A de uno de sus integrantes. Es por eso que sólo uno de los grupos mostró en la Ficha 3A relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, pues el profesor P4 si había resuelto su problema pre mostrando la relación entre ambos objetos matemáticos.

  Fue dicho grupo que, en el momento de la socialización, logró evidenciar tales relaciones. Esto provocó que los demás grupos, que habían resuelto sus problemas usando inecuaciones cuadráticas, reflexionaran sobre usar las ecuaciones y funciones cuadráticas en un solo problema, que la resolución de sus problemas creados al variar algún elemento fuera información, requerimiento y contexto que aun los situara en el entorno matemático de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

- Sobre la ficha 4A, se evidenció la creación de un problema pos. Antes de realizarlo, se efectuó una exposición sobre la resolución del problema del episodio y sobre los problemas creados (problemas pre).

  El reto para esta etapa era la creación de un problema por variación, pero que a la vez tuviera una mayor demanda cognitiva. Tres de los cuatro grupos lograron plantear un nuevo problema mostrando las relaciones entre la ecuación y función cuadrática; sin embargo, todos los grupos crearon problemas similares al problema pre expuesto en la socialización.

  A continuación, en la Figura 47, mostramos el problema pos del grupo 2, conformado por los profesores P1 y P10:

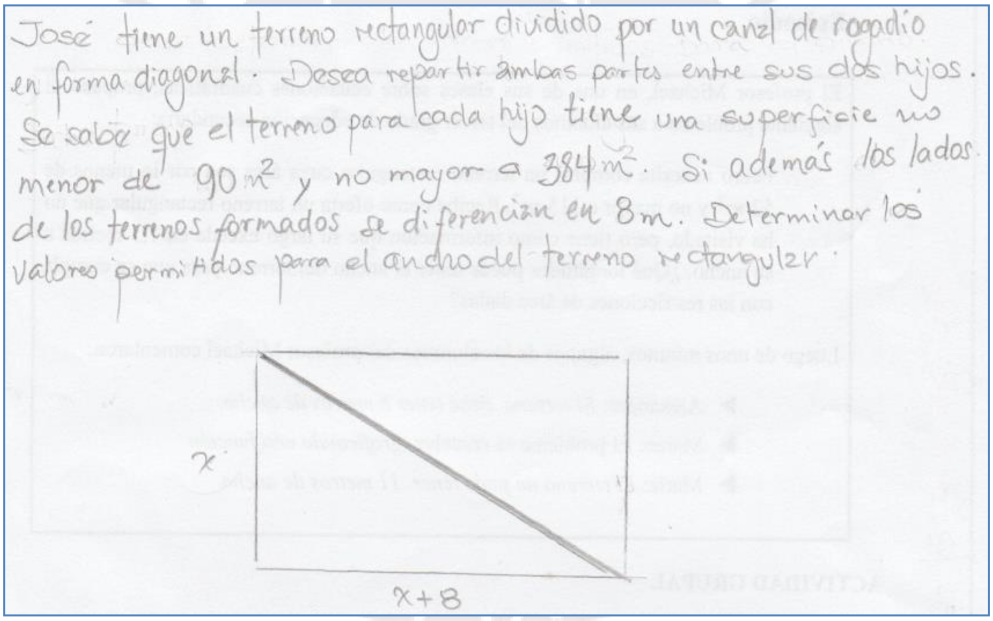


Figura 47. Creación del problema pos del grupo 2.

El problema, con respecto al problema del episodio, mostró modificaciones en el contexto, información, mantuvo el requerimiento y el entorno matemático. En la resolución del problema, se pudo observar que se encuentran presente las relaciones 1, 2 y 3.

Sobre la relación 1, en la resolución, se muestra las ecuaciones cuadráticas $\frac{x(x+8)}{2} = 90$ y $\frac{x(x+8)}{2} = 384$, así como la función cuadrática $A(x) = \frac{x(x+8)}{2}$; en la relación 2, en el gráfico de la función cuadrática A intersectándose con dos rectas horizontales $y = 90$ y $y = 384$

y, por último, la relación 3 también se evidenció, pues las abscisas de los puntos de intersección de la función cuadráticas con las rectas horizontales fueron expresados en el gráfico como x_1 y x_2, los cuales determinaron el intervalo de variación que soluciona el problema pos del grupo 2.

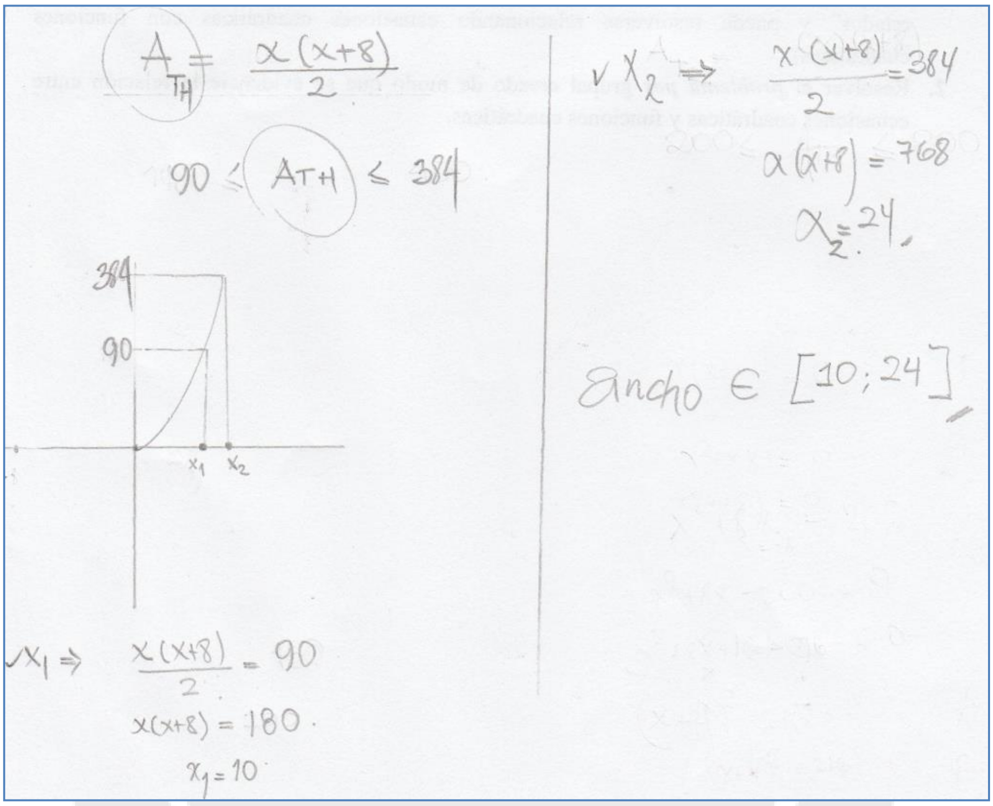


Figura 48. Resolución del problema pos del grupo 2.

Segunda sesión

Para la segunda sesión se trabajó con ocho fichas, pero mostraremos el análisis de solo de cuatro de ellas, pues las otras cuatro son tareas similares.

En la primera fase se entregaron las Fichas 1E y 1F a dos participantes. Estas tareas eran diferentes para que un profesor escribiera una ecuación cuadrática y el otro escribiera una función cuadrática, ambos bajo una misma situación. De igual forma, se entregaron las Fichas 2E y 2F, pero estas no fueron analizadas.

- Sobre la Ficha 1E, todos los participantes lograron escribir una ecuación cuadrática dada la situación:

En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.

Se dieron algunas condiciones para que plantearan la ecuación cuadrática dada la situación. También se les pidió que asignaran longitudes de 42 y 24 metros a las dimensiones del rectángulo que se forma incluyendo el borde sin césped.

El profesor P3 planteó la ecuación cuadrática $(42 - 2x)(24 - 2x) = 144$, donde asignó al área de césped natural un área de 144 m^2 y encuentra el ancho de 9 m para esa área respectiva, descartó una de las soluciones porque no podría cumplir con el contexto y la dificultad encontrada fue que el valor del área del césped fue muy pequeña para adecuar los datos con un contexto real (Véase Figura 49).

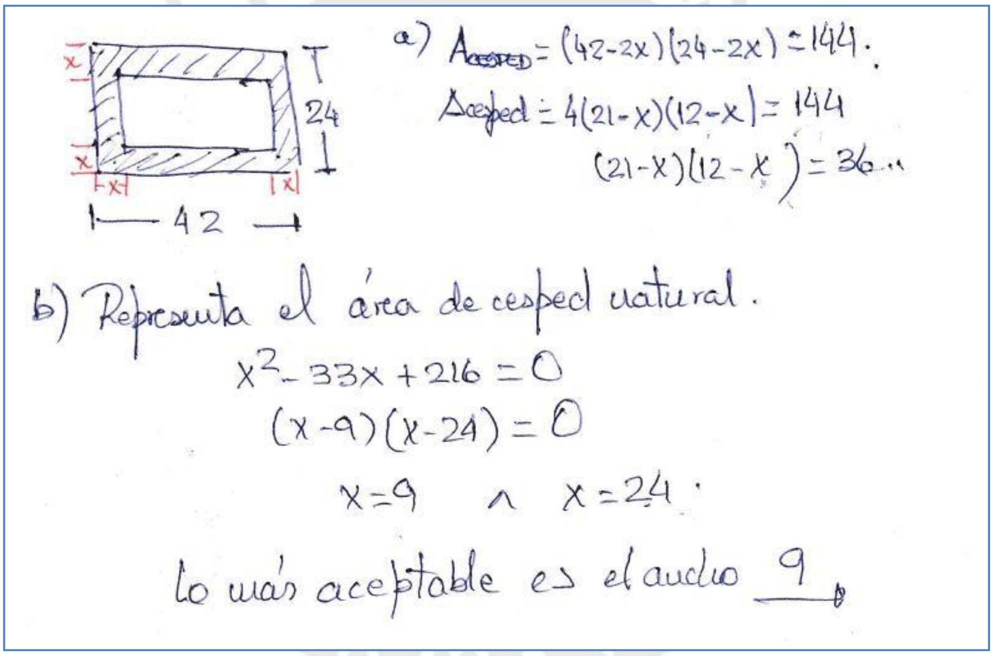


Figura 49. Ecuación cuadrática, tarea individual Ficha 1E.

- Sobre la Ficha 1F, todos los participantes lograron plantear una función cuadrática dada la situación, aunque algunos profesores no realizaron el gráfico de dicha función.
  A continuación, mostramos la Ficha 1F que desarrolló el profesor P2 que planteó correctamente la función cuadrática, aunque no logró esbozar el gráfico y no explicó lo que representó su función planteada (Véase Figura 50).

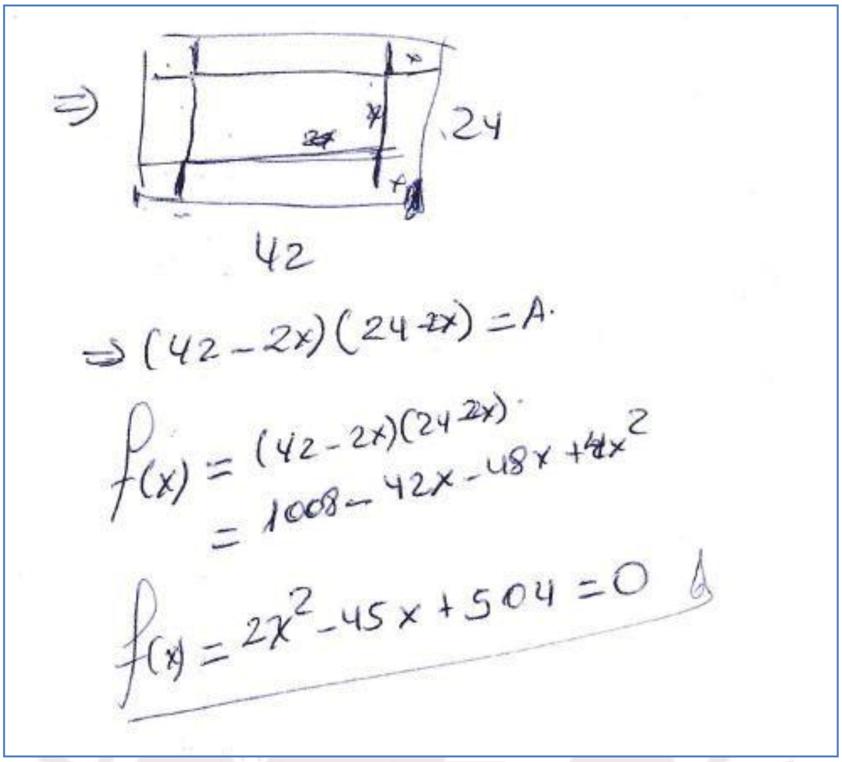


Figura 50. Función cuadrática, tarea individual Ficha 1F.

- Sobre la Ficha 1E-1F, se muestra el trabajo en equipo que realizaron cada grupo al relacionar la ecuación y función cuadrática que trabajó por separado cada integrante.

  Esta etapa causó algunas interrogantes a los equipos, pues la ecuación cuadrática que plantearon les daba valores que no tenían significado con lo que representaba la función cuadrática y algunos grupo tuvieron que reajustar las ecuaciones que plantearon para poder relacionarla con la función cuadrática.

  En la figura 51, mostramos el problema que crearon los profesores P2 y P3 (grupo 1), los cuales tuvieron tareas por separado de escribir una ecuación cuadrática y una función cuadrática bajo una misma situación.

  En la resolución del problema creado por el grupo 1, muestra el planteamiento de la función cuadrática $f(x) = 4(21 - x)(12 - x)$ y la ecuación cuadrática $x^2 - 33x + 252 = 36$, que es un equivalente a la ecuación cuadrática $4(21 - x)(12 - x) = 144$. Además, en la resolución, mostraron relacionar estos dos objetos matemáticos, esbozaron el gráfico de la función cuadrática f y la recta horizontal $y = 144$, donde las abscisas de los puntos de intersección son los elementos del conjunto solución de la ecuación cuadrática que plantearon.

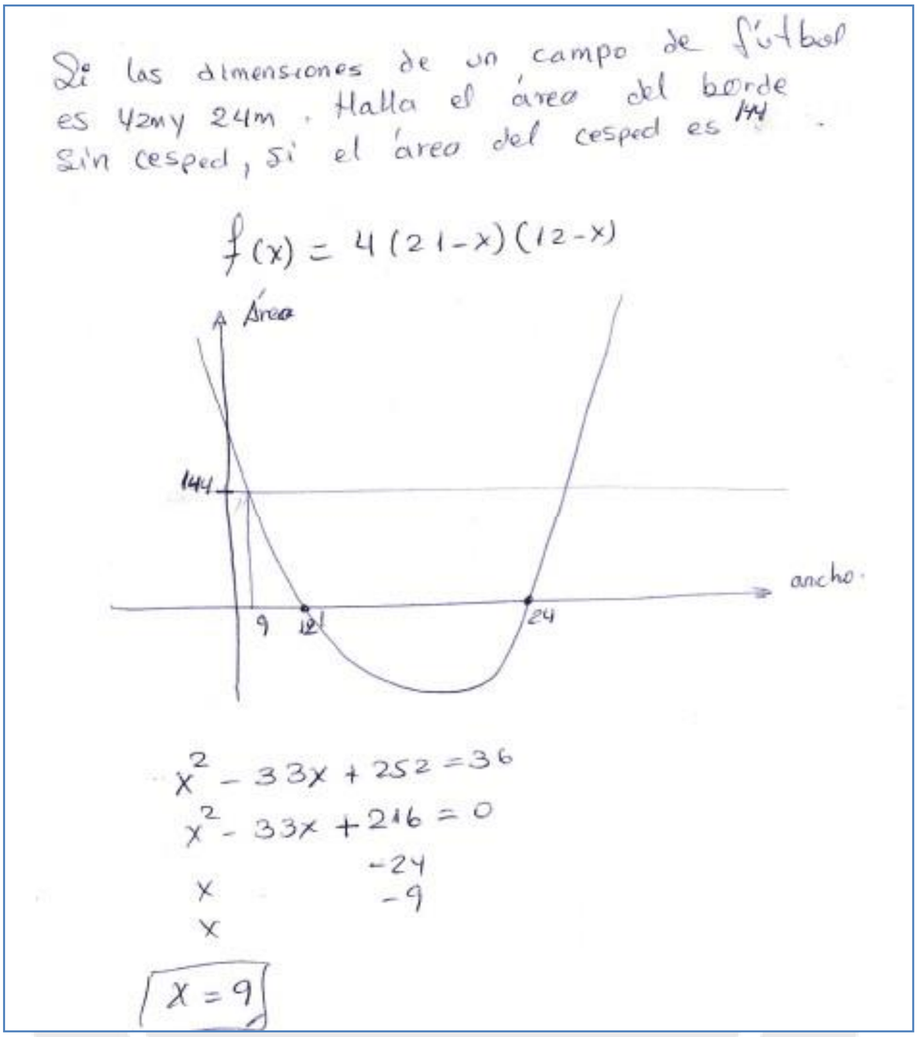
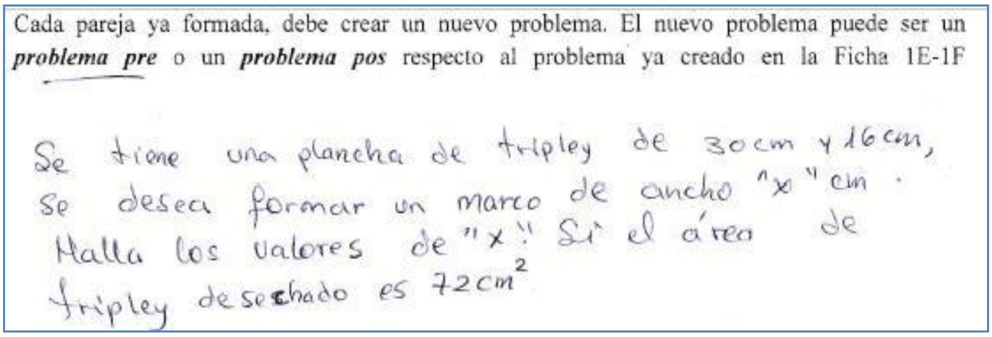


Figura 51. Problema inicial, tarea individual Ficha 1E-1F.

- Sobre la Ficha 1E-1F B, los grupos crearon un problema nuevo a partir del problema creado en la ficha anterior. Ellos pudieron escoger si el problema creado era un problema pre o un problema pos y que dependió de cómo consideran al problema creado en la ficha anterior.

  Todos los grupos crearon un problema nuevo donde conservaron la vinculación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

  El grupo 1 escogió crear un problema pre con respecto a su problema inicial mostrado en la Ficha 1E-1F, donde realizaron cambios en el contexto y en la información.


Cada pareja ya formada, debe crear un nuevo problema. El nuevo problema puede ser un ***problema pre*** o un ***problema pos*** respecto al problema ya creado en la Ficha 1E-1F

Se tiene una plancha de tripley de 30cm y 16cm, se desea formar un marco de ancho "x" cm. Halla los valores de "x" si el área de tripley desechado es $72cm^2$

Figura 52. Problema pre respecto al problema inicial - Ficha 1E-1F B.

En la resolución de su problema pre, evidenciaron la relación 2 donde resuelven el problema usando la intersección del gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = 72$. A su vez, identificaron a las abscisas de los puntos de intersección como las soluciones de la ecuación cuadrática.

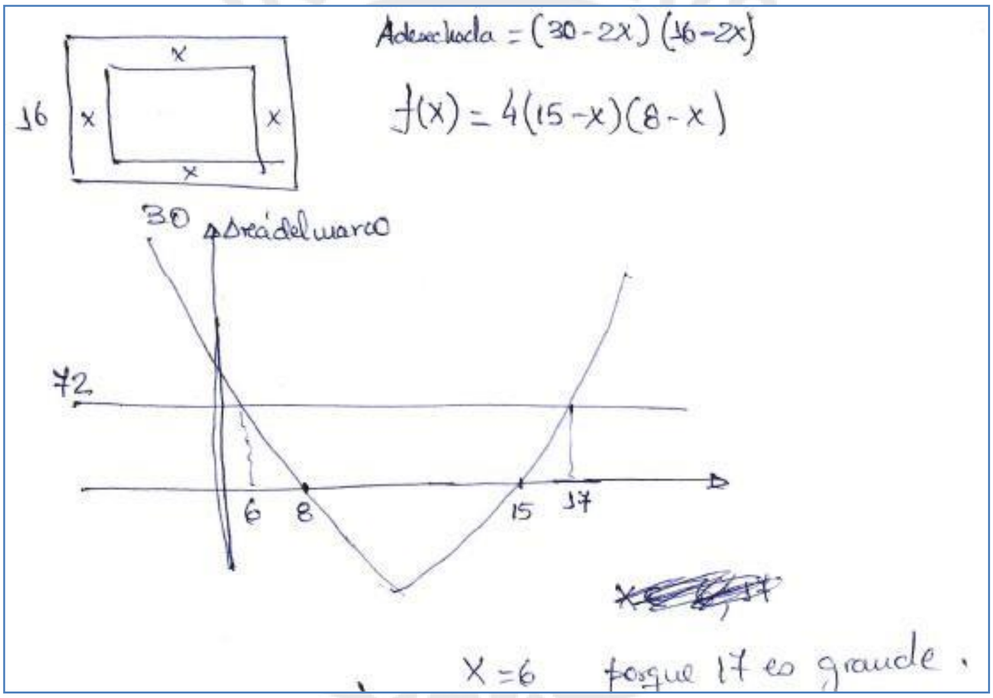


Figura 53. Resolución del problema pre - Ficha 1E-1F B.

4.3.3 Análisis de las respuestas de los participantes en la exploración final.

En esta sección mostramos el análisis de la exploración final donde se usó la rúbrica, especialmente diseñada para medir los conocimientos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas descrita en la sección 3.4, 3.5 y Anexo G.

Los profesores P6 y P9, como solo participaron de la segunda sesión del taller y no rindieron la exploración inicial, al explicar los resultados no se les consideraron en los análisis.

A continuación, mostramos los resultados de la exploración final para identificar los conocimientos de los participantes después del taller de creación de problemas.

4.3.3.1 Conocimientos por separados

Las preguntas fueron diseñadas para encontrar relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas; por lo tanto, la demanda cognitiva es mayor, lo cual hace que no se logre medir con exactitud los conocimientos por separado de ecuación cuadrática y de función cuadrática. Aparte, basados en nuestros objetivos de investigación, nos enfocaremos en analizar la comprensión de las relaciones de los dos objetos matemáticos.

4.3.3.2 Conocimientos relacionados

Para el siguiente análisis, se consideran las mismas seis relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas de la exploración inicial. A continuación, mostramos las seis relaciones analizadas en la exploración final:

- Sobre la relación 1, todos profesores por lo menos reconocieron parcialmente la función cuadrática vinculada a la ecuación cuadrática. Al lograr esta relación, los participantes lograron hacer una representación gráfica de la función cuadrática relacionada a una ecuación cuadrática. Además, se puede afirmar que tres de ocho profesores alcanzaron una habilidad alta sobre la relación 1, pues en cada problema donde se tuvo que hacer dicha vinculación, logran realizar la relación 1.

  Podemos medir esta relación en la Pregunta 5.a:

  > *Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2x + 8 = 0$.* ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

  En la Figura 54, se muestra la solución del profesor P10 aunque resolvió incorrectamente la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 8 = 0$, logró relacionar dicha ecuación con la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x + 8$, la cual le permitió realizar el esbozo de la función cuadrática. Podemos afirmar que el profesor tiene una habilidad alcanzada sobre la relación 1.

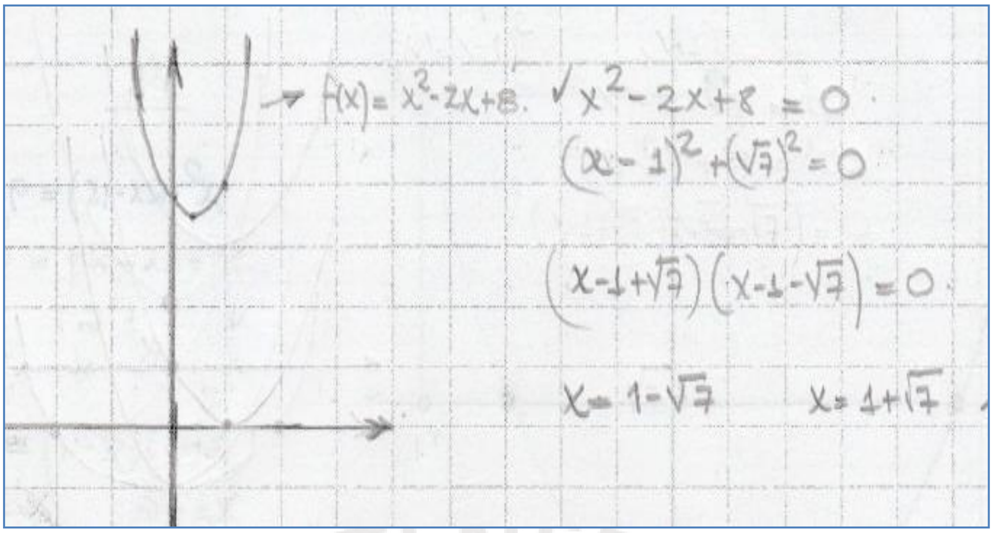


Figura 54. Solución del profesor P10 mostrando la relación 1.

También podemos analizar la relación 1 en la pregunta 2:

> *El perímetro de un terreno rectangular es 40 metros. Con esta información, cree un problema y resuélvalo mostrando la relación entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática g. Especifique lo que representa su variable y su función g*

El profesor P10 también explicitó la relación entre la ecuación cuadrática $(20 - x)x = 75$ con la función cuadrática $f(x) = (20 - x)x$. Esto demostró una habilidad lograda en la relación 1 (Véase Figura 55).

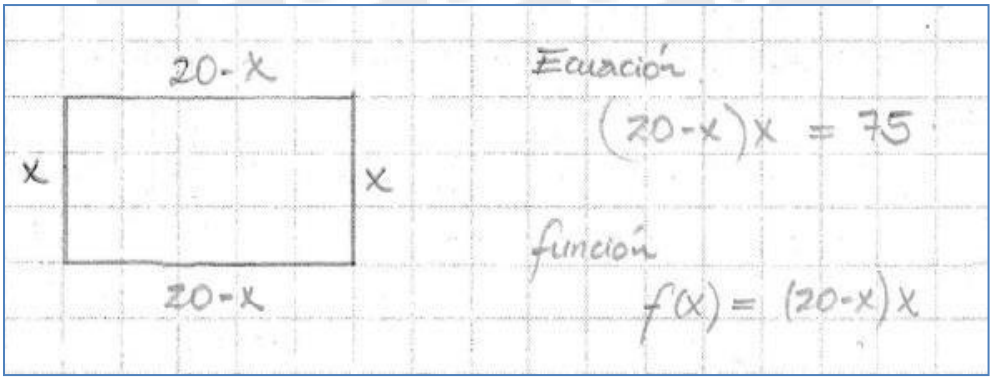


Figura 55. Solución del profesor P10 con la relación 1 alcanzada.

- Sobre la relación 2, la mitad de los profesores analizados tuvieron por lo menos una habilidad parcial, pues lograron vincular la ecuación cuadrática con la intersección de una función cuadrática y una recta horizontal. Además, tres profesores de ocho tienen una habilidad alcanzada en esta relación.

Uno de los análisis de la relación 2 se da en la pregunta 3:

*¿Qué **relación** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$?*

A continuación, en la Figura 56 se muestra la solución del profesor P1 en donde mostró indicios de comprender la relación 2, esbozó el gráfico de la función cuadrática f y colocó puntos desde la coordenada (-6; 9) hasta (4; 9). Estos puntos dan referencia al trazo de una recta horizontal $y = 9$; por lo tanto, basados en esta pregunta y otras donde se puede también evaluar esta relación, podemos afirmar que el profesor tiene una habilidad parcial en la relación 2.

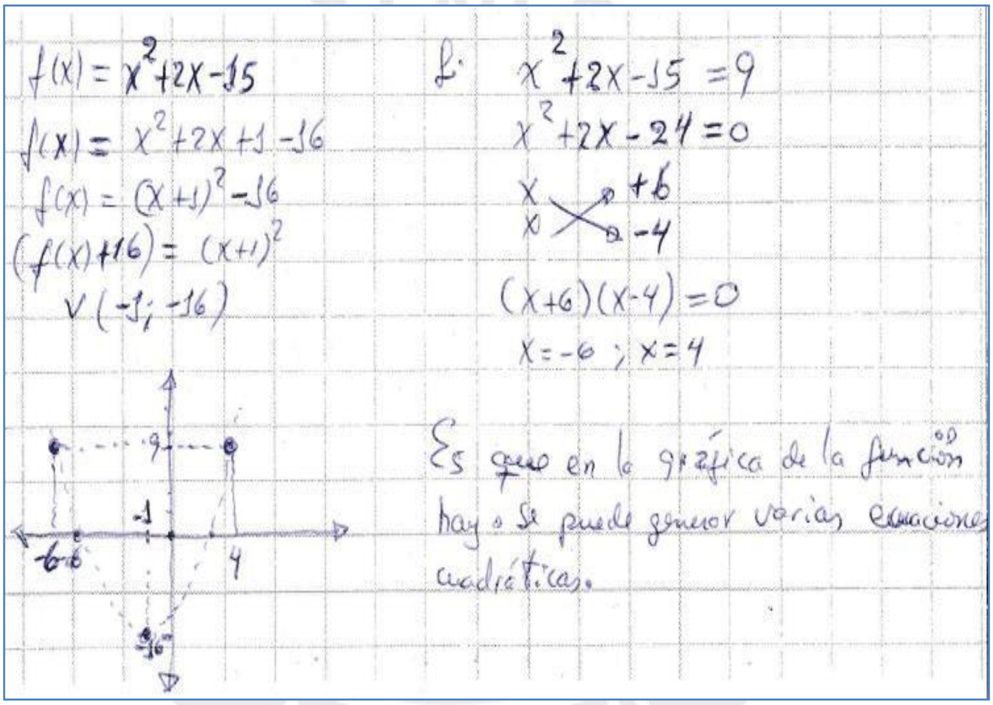


Figura 56. Solución del profesor P10 con la relación 2 alcanzada.

- Sobre la relación 3, la mitad de los profesores analizados demostraron esta habilidad en forma parcial y tres de ocho tienen esta habilidad alta.

  Por ejemplo, esta relación se analiza en la pregunta 3:

  *¿Qué **relación** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$?*

  A continuación, en la Figura 57 se muestra la solución del profesor P10 donde explicitó que los elementos del conjunto solución son las abscisas de las coordenadas de los puntos de intersección entre la función cuadrática y la recta horizontal $y = 9$. Se puede afirmar que el profesor tiene una habilidad alta en esta relación.

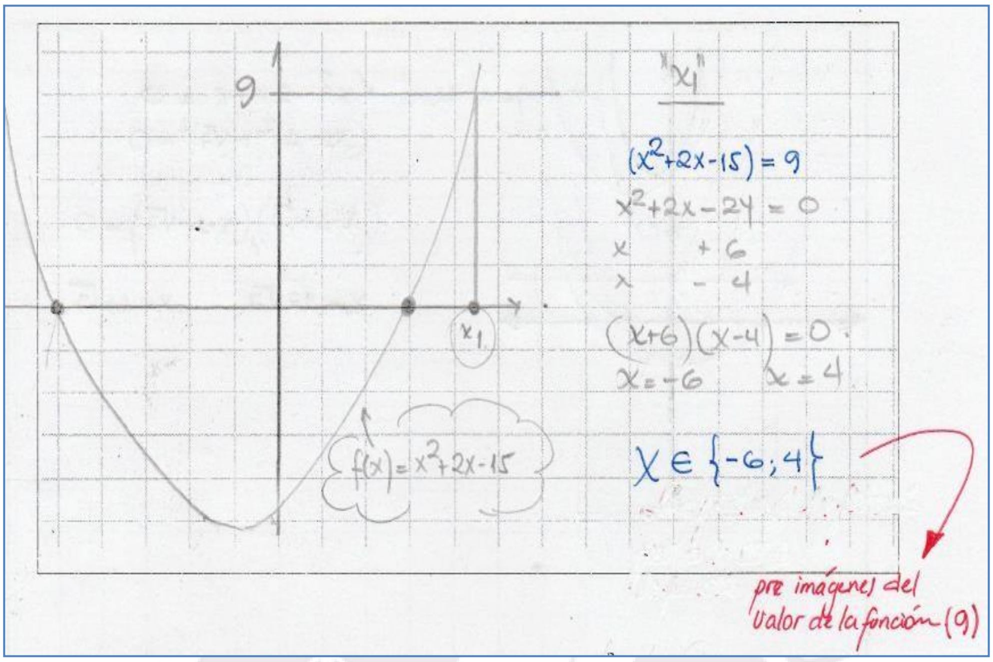


Figura 57. Profesor P10 muestra relación 3 alta.

- Sobre la relación 4, por lo menos seis de ocho participantes evidenciaron esta relación en forma parcial, pues para realizar el gráfico de la función cuadrática hicieron uso de las ecuaciones cuadráticas para encontrar los cortes con el eje X.

  Esta relación, puede ser analizada en la pregunta 3:

  ¿Qué relación encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$?

  En la Figura 58 se muestra la solución del profesor P5, donde para realizar el gráfico de la función cuadrática, primero encontró los cortes con el eje X usando las ecuaciones cuadráticas. Con esto afirmamos que el profesor P5 tiene una habilidad alta en la relación 4.

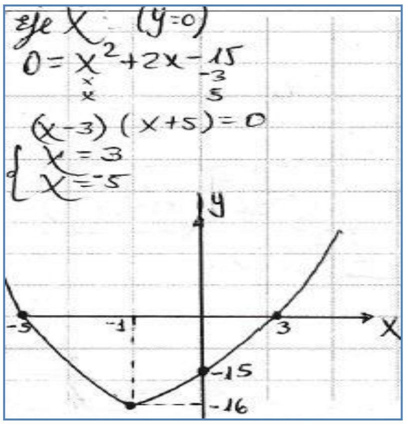
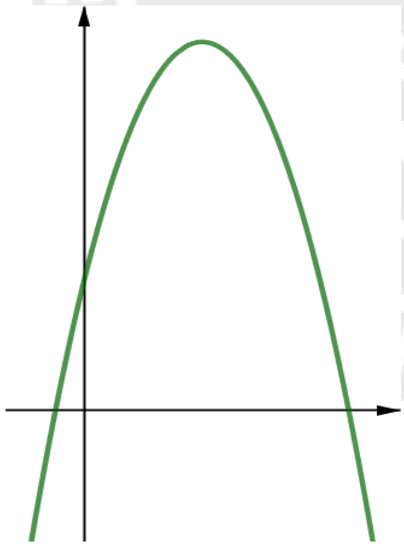


Figura 58. Relación 4 del profesor P5 alcanzada.

- Sobre la relación 5, esta fue alcanzada por cinco de ocho participantes, ya que lograron relacionar correctamente el parámetro “a” y “c” de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$; sin embargo a la mayoría de profesores les fue difícil justificar el signo del parámetro “b”.

  Esta relación es analizada en la pregunta 4:

  El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es como se muestra en la figura.



Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

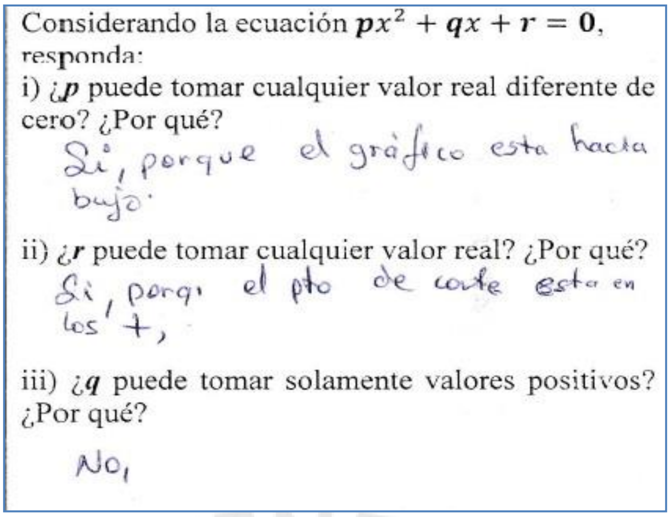
*i) ¿**p** puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?*

*ii) ¿**r** puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?*

*iii) ¿**q** puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?*

iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ puede ser positivo?

A continuación, mostramos las respuestas del profesor P2 el cual logró relacionar el parámetro p y r de la ecuación cuadrática dado el gráfico de la función cuadrática, pero no logró justificar el signo del parámetro q. Podemos afirmar que tiene una habilidad alcanzada en la relación 5 el profesor P2 (véase figura 59).


Considerando la ecuación $px^2 + qx + r = 0$, responda:

i) ¿p puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

Sí, porque el gráfico esta hacia bajo.

ii) ¿r puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

Si, porq. el pto de corte esta en los +,

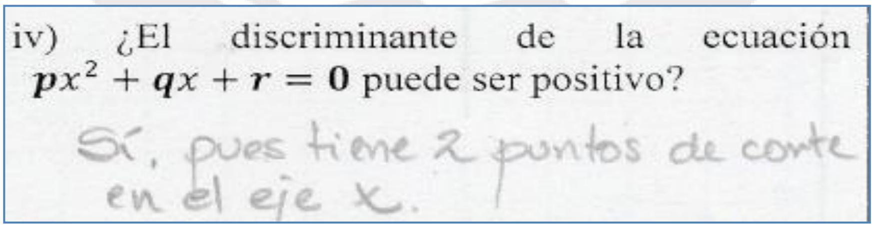
iii) ¿q puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

No,

Figura 59. Solución del profesor P2 con la relación 5 alcanzada.

- Sobre la relación 6, de ocho profesores, cinco no lograron relacionar el número de cortes de una función cuadrática y el eje X con el discriminante de la ecuación cuadrática. Esta habilidad fue incipiente en los participantes; sin embargo, tres profesores sí lograron relacionar el número de ceros de una función cuadrática con el discriminante de una ecuación cuadrática.

  En la figura 60 se muestra la solución de la pregunta 4 iv del profesor P10, donde afirmó que sí era posible que el valor de la discriminante sea de signo positivo, pues lo asoció a los dos puntos de corte del eje X y la función cuadrática. El profesor P10 demostró que comprende la relación 6, por lo que se considera que tiene una habilidad alta en la relación 6.


iv) ¿El discriminante de la ecuación $px^2 + qx + r = 0$ puede ser positivo?

Sí, pues tiene 2 puntos de corte en el eje x.

Figura 60. Relación 6 alcanzada del profesor P10.

Comentarios sobre los conocimientos relacionados:

También se puede hacer mención que, los problemas creados para resolver la pregunta 1 y 2 de la exploración final, fueron adaptados de los problemas creados en las sesiones del Taller y que la mayoría de los problemas creados en estas preguntas evidencian relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

La siguiente tabla muestra el resumen de los conocimientos de los participantes que rindieron la exploración final y el puntaje que se les asignó por cada una de las seis relaciones, según la rúbrica descrita en la sección 3.4, 3.5 y el Anexo G.

Tabla 23. *Resumen de los conocimientos sobre ecuaciones y funciones cuadráticas por profesores en la exploración final. Conocimientos relacionados.*

Relación	**Profesor**									
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2
2	1	1	1	2	1	1	0	2	1	2
3	0	1	1	1	1	1	0	2	1	2
4	1	1	0	2	1	2	0	2	1	2
5	1	2	1	2	2	2	0	2	1	2
6	0	0	0	2	0	1	0	1	1	2
Total (12)	**4**	**6**	**4**	**11**	**6**	**8**	**1**	**11**	**6**	**12**

En la Figura 61 se muestra el resumen de los análisis a las respuestas de la exploración luego del taller. Se puede afirmar que cinco de ocho profesores mostraron una habilidad parcial o habilidad alcanzada en las seis relaciones consideradas como conocimientos relacionados de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

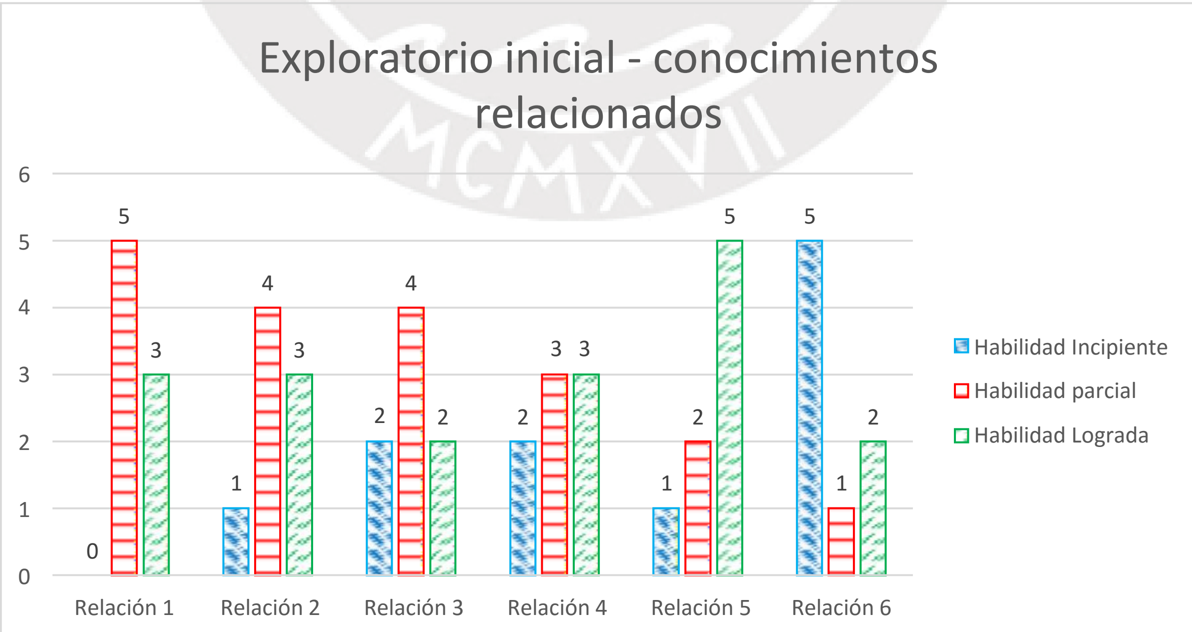


Figura 61. Resumen de las relaciones de todos los participantes en la exploración final.

4.4 Planteamiento del caso

En la sección 4.3 se realizó la descripción de taller de creación y el análisis de las fichas recogidas en las diferentes fases del taller. Para lograr nuestros objetivos, se planteó el caso de estudio formado por un profesor (P8, profesor que participó de las cuatro fases del taller), donde se identificarán sus conocimientos sobre los objetos matemáticos ecuación y función cuadrática, además sobre las relaciones entre estos dos objetos matemáticos.

También, en esta sección, se realizó el análisis de sus cambios en la comprensión de las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas, siendo este profesor al que se le identificó en la sección 4.3.6 y 4.3.8 cambios en las seis relaciones analizadas.

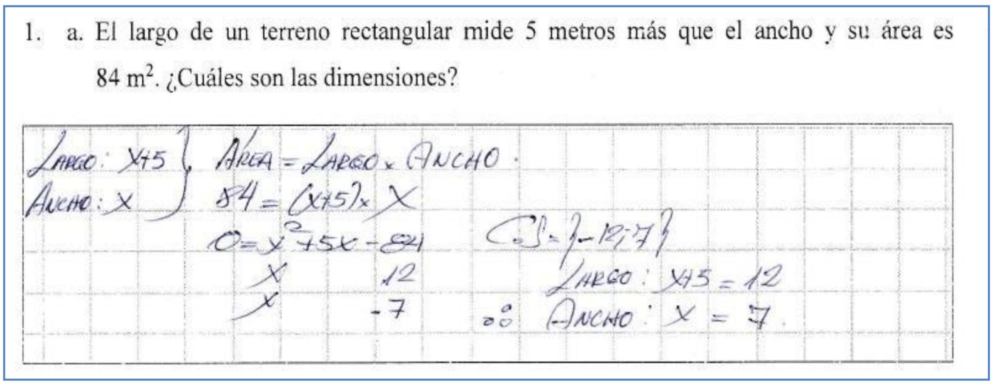
4.4.1 Análisis de los resultados para el profesor P8

Etapa 1: Prueba exploratoria inicial

Sobre sus conocimientos por separado sobre ecuaciones y funciones cuadráticas en la prueba exploratoria inicial, al profesor P8 se le identifica que tiene los conocimientos de estos dos objetos matemáticos; por lo tanto, se le considera que tiene una habilidad alcanzada.

Esta primera identificación de sus conocimientos es de importancia, pues el profesor P8 había declarado que en los últimos tres años no había enseñado el tema de funciones cuadrática; sin embargo, se le identificó en sus respuesta que tiene conocimientos de ecuaciones cuadráticas y de funciones cuadráticas.

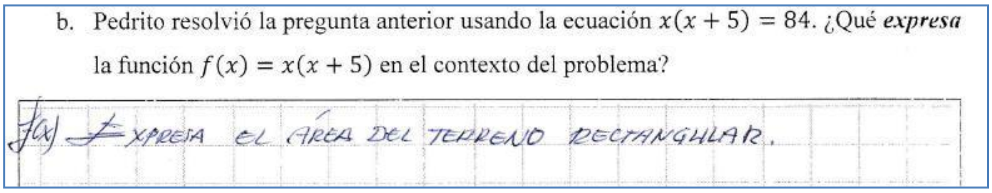
En la figura 62, se muestra la resolución del problema 1.a, donde el profesor P8 interpretó correctamente el contexto extra matemático y planteó la ecuación cuadrática, usó métodos de factorización para encontrar el conjunto solución e interpretó una de las soluciones para expresar su respuesta.


1. a. El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que el ancho y su área es 84 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones?

Largo: $x+5$
Ancho: x
Área = Largo x Ancho.
$84 = (x+5) \times x$
$0 = x^2 + 5x - 84$
$x \quad 12$
$x \quad -7$
C.S. = {-12; 7}
Largo: $x+5 = 12$
∴ Ancho: $x = 7$.

Figura 62. Conocimientos de ecuaciones cuadráticas del profesor P8.

De igual forma, se puede mostrar que el profesor tiene conocimientos sobre funciones cuadráticas, ya que en la pregunta 1.b logró interpretar correctamente el significado de la función respecto a la pregunta 1.a (Véase figura 65).



b. Pedrito resolvió la pregunta anterior usando la ecuación $x(x+5) = 84$. ¿Qué ***expresa*** la función $f(x) = x(x+5)$ en el contexto del problema?

f(x) ~~E~~ EXPRESA EL ÁREA DEL TERRENO RECTANGULAR.

Figura 63. Conocimientos de función cuadrática del profesor P8.

Asimismo, se hizo la identificación de los conocimientos relacionados que tiene el profesor P8. Este análisis se realizó con la rúbrica de la sección 3.4, 3.5 y el anexo E, donde se buscaba identificar las seis relaciones declaradas en la parte teórica sobre la relación entre estos dos objetos matemáticos. Algunas de las relaciones se pueden analizar en la pregunta 5:

> *Resuelva la ecuación* $(x-2)^2 - 1 = 0$ *y relacione gráficamente el conjunto solución con la intersección de los gráficos de dos funciones.*

El profesor P8 logró una habilidad parcial para la relación 1, pues relacionó la ecuación cuadrática $(x-2)^2 - 1 = 0$ con la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$, donde se esperaba que el profesor lograra relacionar, con dos funciones, por ejemplo la función cuadrática $f(x) = (x-2)^2$ y la función $g(x) = 1$. También, se esperaba que en esta pregunta mostrara nociones sobre la relación 2 y 3, por lo que se considera una relación 2 y 3 deficiente en esta pregunta.

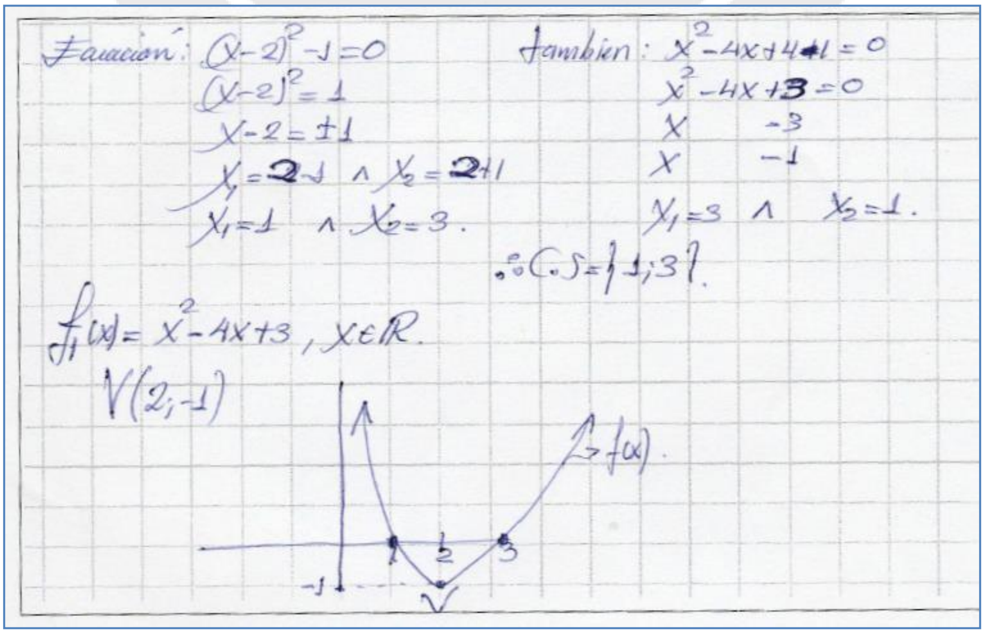
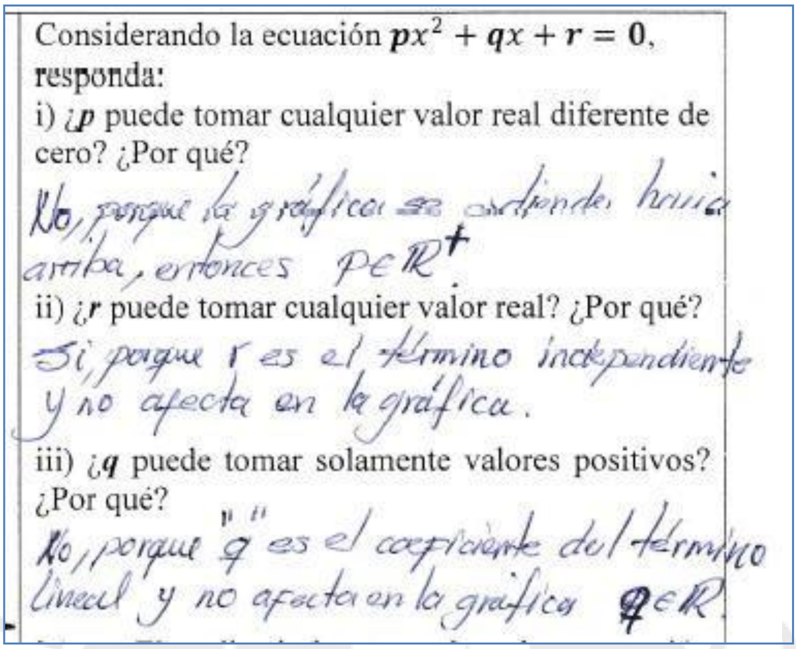


Figura 64. Problema 5 desarrollado por el profesor P8.

Sobre la relación 5, se observó que el profesor tiene una habilidad parcial, pues solo reconoció el parámetro p y sobre los otros parámetros afirmó que no afecta con la gráfica de la función (Véase Figura 65).


Considerando la ecuación $\boldsymbol{px^2 + qx + r = 0}$, responda:

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

No, porque la gráfica se extiende hacia arriba, entonces $p \in \mathbb{R}^+$.

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

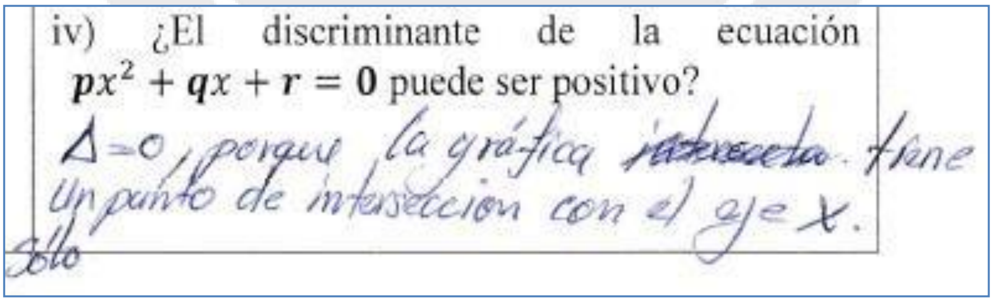
Si, porque r es el término independiente y no afecta en la gráfica.

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

No, porque "q" es el coeficiente del término lineal y no afecta en la gráfica $q \in \mathbb{R}$

Figura 65. Relación 5 parcial del profesor P8.

Sobre la relación 6, se afirma que el profesor tiene una habilidad incipiente, pues si la gráfica de la función cuadrática solo corta un punto, eso, para la ecuación cuadrática, significa que la discriminante es cero. El profesor P8 afirmó de forma incorrecta en su resolución (Véase figura 66).


iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{px^2 + qx + r = 0}$ puede ser positivo?

$\Delta = 0$, porque la gráfica ~~intersecta~~ tiene solo un punto de intersección con el eje X.

Figura 66. Relación 6 del profesor P8 – incipiente

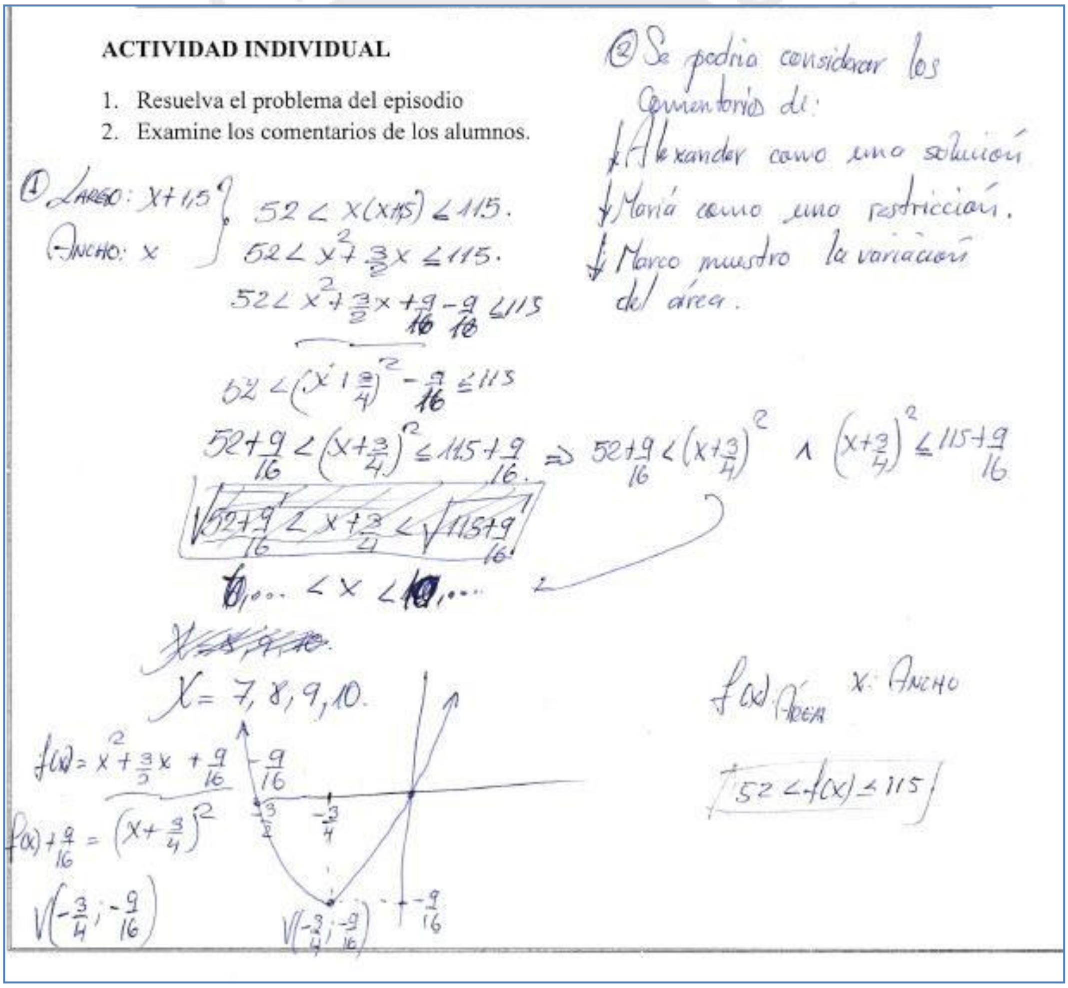
El profesor P8 evidencia en la prueba exploratoria inicial conocimientos sobre ecuaciones cuadráticas, sobre funciones cuadráticas en una habilidad alcanzada. Sobre las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas tiene una habilidad parcial en las relaciones 1, 2 y 5; y tiene una habilidad incipiente en las relaciones 3 y 6.

Etapa 2: Estrategia EPP

A continuación, analizamos el recorrido del profesor P8 en las fases de la estrategia EPP: la resolución problema del episodio, la creación y resolución del problema pre individual, pre grupal y pos grupal.

Sobre la resolución del problema del episodio, el profesor P8 planteó las inecuaciones cuadráticas que resuelven el problema. Además, realizó el gráfico de la función cuadrática relacionada a las inecuaciones cuadráticas.

El uso de las inecuaciones le da un intervalo aproximado de posibles valores del ancho del terreno y no logra calcular con exactitud el intervalo de variación del ancho del terreno, pero eso le bastó para poder responder a los comentarios que trae el problema del episodio (Véase Figura 67).


ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. Resuelva el problema del episodio
2. Examine los comentarios de los alumnos.

① Largo: $x+1,5$; Ancho: x

$52 < x(x+1,5) \leq 115$

$52 < x^2 + \frac{3}{2}x \leq 115$

$52 < x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} \leq 115$

$52 < \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \leq 115$

$52 + \frac{9}{16} < \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \leq 115 + \frac{9}{16} \Rightarrow 52 + \frac{9}{16} < \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \wedge \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \leq 115 + \frac{9}{16}$

$\sqrt{52+\frac{9}{16}} < x + \frac{3}{4} < \sqrt{115+\frac{9}{16}}$

$6,\ldots < x < 10,\ldots$

$x = 7, 8, 9, 10.$

② Se podría considerar los comentarios de:

Alexander como una solución

María como una restricción.

Marco muestra la variación del área.

$f(x)$: Área ; x: Ancho

$52 < f(x) \leq 115$

$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}$

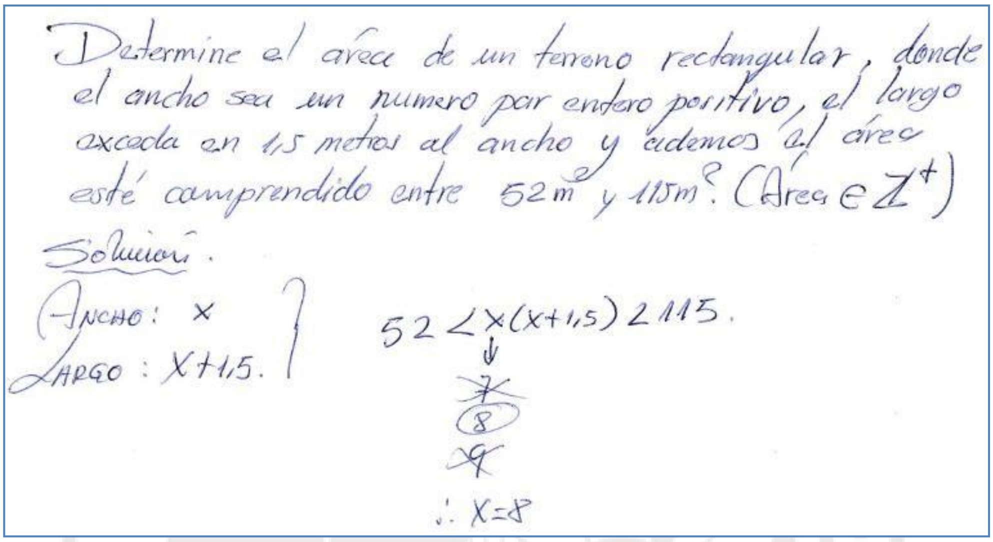
$f(x) + \frac{9}{16} = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$

$V\left(-\frac{3}{4}; -\frac{9}{16}\right)$

Figura 67. Problema del episodio resuelto por el profesor P8.

En la Figura 68 se muestra el problema pre del profesor P8. Este problema creado por variación es un nuevo problema, pues se le agregó en la información que el área sea un valor entero positivo.

Esta variación al problema del episodio hizo que el profesor encontrara valores enteros para el ancho del terreno y con eso el problema pre se puede resolver haciendo uso de cálculos aritméticos para encontrar los valores que cumplan con el requerimiento de su problema.


Determine el área de un terreno rectangular, donde el ancho sea un numero par entero positivo, el largo exceda en 1,5 metros al ancho y además el área esté comprendido entre $52m^2$ y $115m^2$. (Área $\in \mathbb{Z}^+$)

Solución.

Ancho: x

Largo: $x+1,5$

$$52 < x(x+1,5) < 115.$$

$\cancel{7}$

8

$\cancel{9}$

$\therefore x=8$

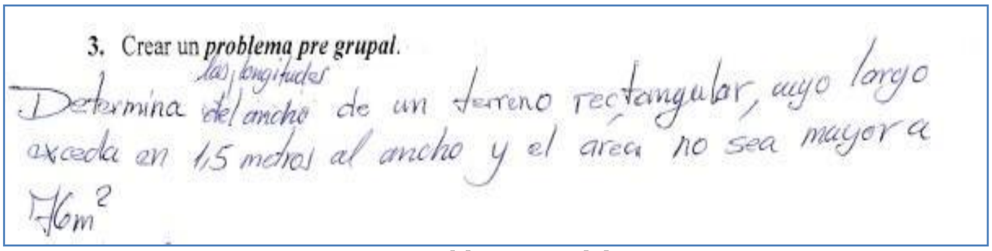
Figura 68. Problema pre del profesor P8.

Hasta estas dos primeras fases de la estrategia EPP, el profesor P8 no logró mostrar en las soluciones de sus problemas cómo se relacionan las ecuaciones y funciones cuadráticas. Esto se debe a que, para él, estos problemas se pueden resolver con el uso de inecuaciones cuadráticas o haciendo cambios al requerimiento con reemplazo de valores posibles.

En la siguiente fase, el profesor P8 trabajó en equipo con el profesor P4 para la creación de un problema pre grupal. Esto le permitió que adaptara y comprendiera las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas en su nuevo problema creado.

En la Figura 69 se muestra el problema pre creado por el grupo 4, el cual muestra en la resolución el uso de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

El profesor P8 hizo la exposición de este problema en la fase de socialización, donde mostró a los demás grupo el uso de las ecuaciones cuadráticas cuando todos ellos opinaron que el problema del episodio y los problemas pre solo se resolvían planteando inecuaciones cuadráticas. Además, el profesor explicó que el complementar con el gráfico de una función cuadrática justificaba los valores del conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas y resaltó la vinculación que tienen estos dos objetos matemáticos.



3. Crear un ***problema pre grupal***.

Determina las longitudes del ancho de un terreno rectangular, cuyo largo exceda en 1,5 metros al ancho y el área no sea mayor a 76m²

Figura 69. Problema Pre del grupo 4.

También podemos afirmar que la resolución de su problema pre grupal muestra las relaciones 1, 2 y 3.

Sobre la relación 1, el grupo 4 muestra la ecuación cuadrática $x(x + 1{,}5) = 76$ y la función cuadrática $f(x) = x(x + 1{,}5)$; sobre la relación 2, muestra el gráfico de la función cuadrática f y la recta horizontal $y = 76$, las abscisas de estos puntos de intersección son los valores que se obtuvieron al resolver la ecuación cuadrática anterior; y sobre la relación 3, las abscisas de los puntos de intersección de la relación 2 ayudan a determinar el intervalo de variación del ancho del terreno (Véase Figura 70).

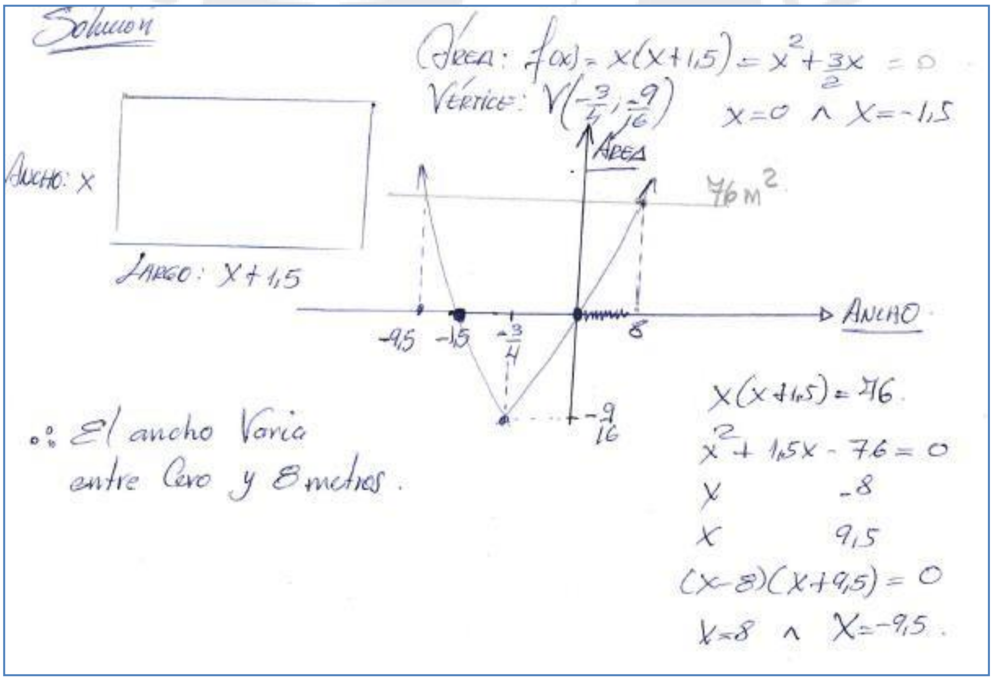
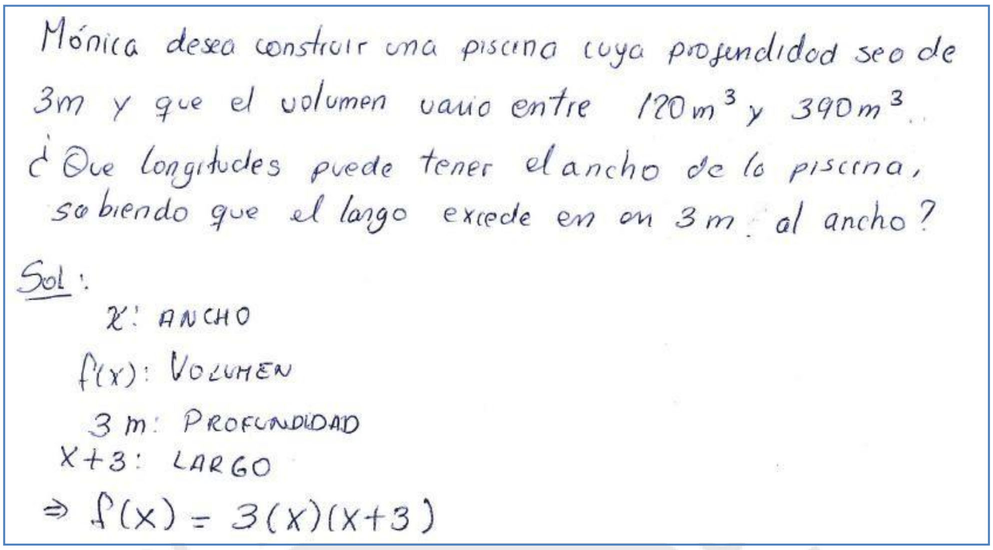


Figura 70. Resolución del problema Pre del grupo 4.

Sobre la Ficha 4A, en esta fase de la primera sesión del taller, la tarea fue la creación y resolución de un problema pos, un problema con mayor demanda cognitiva.

En la Figura 71 se muestra el problema pos creado del grupo 4. Este nuevo problema creado tiene modificaciones en la información, el contexto matemático cambia de encontrar el área de una región al cálculo del volumen de una superficie y el entorno matemático se mantiene en las relaciones de las ecuaciones y funciones cuadráticas.


Mónica desea construir una piscina cuya profundidad sea de 3m y que el volumen varie entre $120 m^3$ y $390 m^3$.
¿Que longitudes puede tener el ancho de la piscina, sabiendo que el largo excede en 3m al ancho?

Sol:

x: ANCHO

f(x): VOLUMEN

3 m: PROFUNDIDAD

X+3: LARGO

$\Rightarrow f(x) = 3(x)(x+3)$

Figura 71. Problema Pos creado del grupo 4.

Del análisis de estas fases desarrolladas por el profesor P8, se afirma que el profesor al inicio del taller no lograba relacionar las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas; sin embargo, el trabajo en equipo le permitió mostrar, en sus nuevos problemas creados, la vinculación entre estos dos objetos matemáticos. Podemos afirmar que él logra comprender estas relaciones porque hizo la exposición de sus problemas creados mostrando la relación de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Etapa 3: Estrategia SPP

A continuación, analizamos el recorrido del profesor P8 en las fases de la estrategia SPP. Esta estrategia permitió asignar tareas a los participantes sobre ecuaciones y funciones cuadráticas, luego, en otra etapa, los participantes debieron relacionar ambos objetos matemáticos y crear un nuevo problema. Por último, crean un nuevo problema dependiendo de cómo consideran su problema grupal y bajo esa consideración pueden crear un problema pre o un problema pos.

El profesor P8 se le designó la tarea de escribir una ecuación cuadrática bajo las condiciones de la Ficha 2E, dada la situación:

> *En un terreno se construirá un campo deportivo rectangular con césped natural. Se sabe que el campo deportivo tendrá alrededor un borde sin césped, de ancho uniforme.*

Con las condiciones:

> *Considerando como variable x el ancho del borde. Escriba una ecuación cuadrática, a partir de la situación dada, asignando longitudes de 40 m y 20 m a las dimensiones del rectángulo en el que se sembrará el césped.*

El profesor P8 planteó la ecuación cuadrática asignando como valor conocido: El área del terreno incluyendo la región sin césped de 2400 m^2 (Véase figura 72).

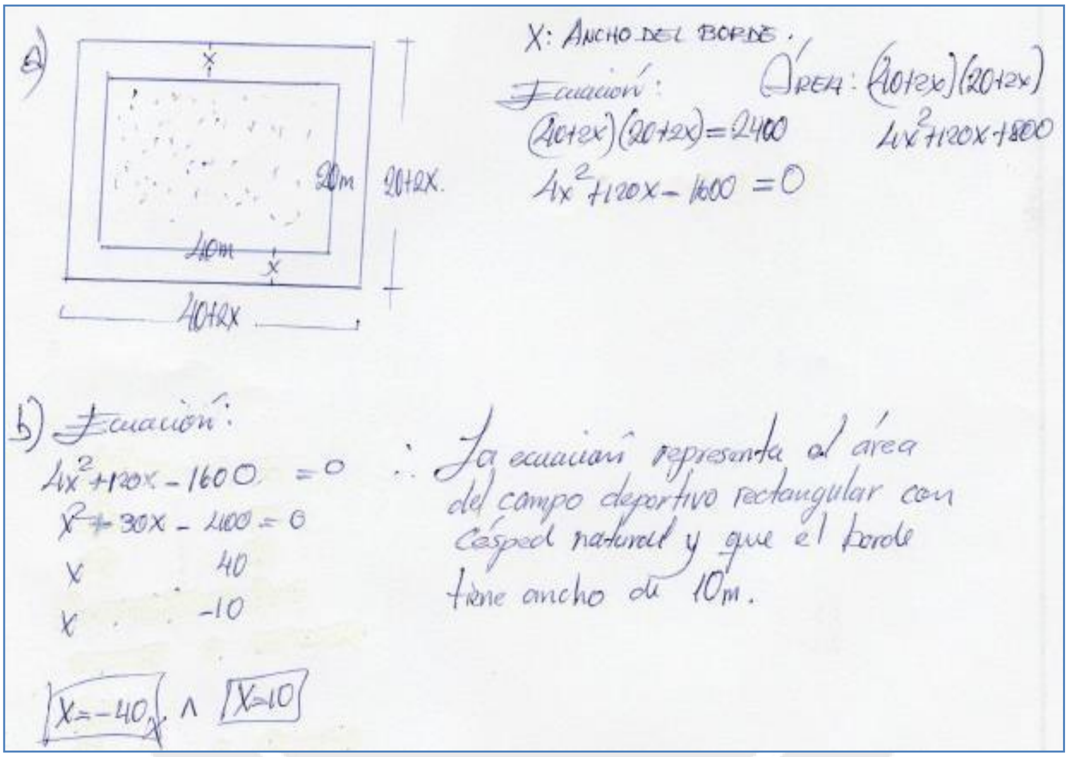


Figura 72. Ecuación creada, tarea individual Ficha 2E.

Al profesor P4 se le entregó la Ficha 2F y creó la función cuadrática bajo las condiciones que se le presenta:

> *Escriba una función cuadrática g a partir de la situación dada, asignando longitudes de 40 m y 20 m a las dimensiones del rectángulo en el que se sembrará el césped. Esboce el gráfico de tal función.*

El profesor P4 escribió una función cuadrática, dada la situación, y realizó el esbozo del grafico de la función cuadrática (Véase Figura 73).

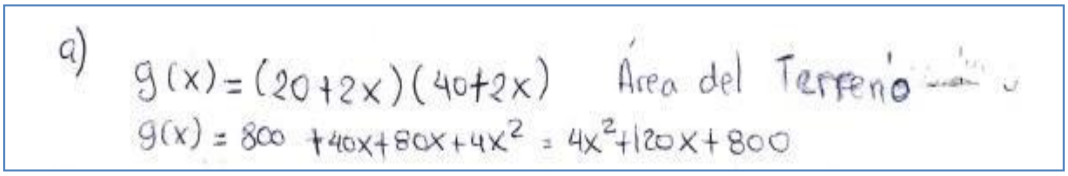


Figura 73. Función creada – parte a, tarea individual Ficha 2F.

En una segunda fase, se agruparon en parejas para trabajar en la Ficha 1E-1F, donde el profesor P8 y P4 trabajaron en equipo. El propósito fue que, con las diferentes tareas desarrolladas en la primera fase, crearan un problema que relacione las ecuaciones y funciones cuadráticas.

En esta fase reformularon la ecuación cuadrática que habían creado, pues no les permitía relacionarlas con la función cuadrática que su compañero había esbozado. El profesor P8 inicialmente creó la ecuación cuadrática: $(40 + 2x)(20 + 2x) = 0$ y cuando le quisieron dar un significado a las soluciones de la ecuación cuadrática con los puntos de la función cuadrática $f(x) = (40 + 2x)(20 + 2x)$, la cual representaba la función área incluyendo el área sin césped, se observó que su ecuación cuadrática significaba que el área era igual a cero o que los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática eran ambos negativos.

Para el problema creado, los profesores escogieron colocar una variación del área del campo deportivo entre 1500 m^2 hasta 2400 m^2 (Véase figura 74).

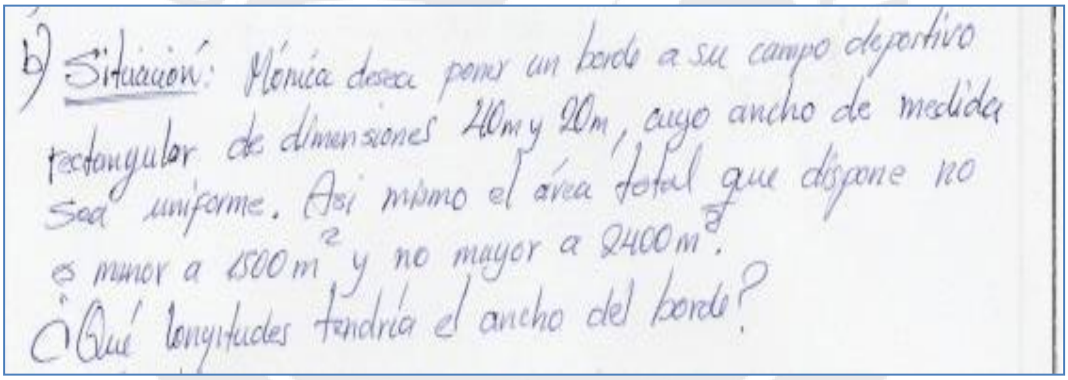

b) Situación: Mónica desea poner un borde a su campo deportivo
rectangular de dimensiones 40m y 20m, cuyo ancho de medida
sea uniforme. Así mismo el área total que dispone no
es menor a 1500 m² y no mayor a 2400 m².
¿Qué longitudes tendría el ancho del borde?

Figura 74. Problema creado del grupo 4 en la Ficha 2E-2F.

La resolución del problema creado del grupo 4 muestra el uso de las ecuaciones y funciones cuadráticas (Véase figura 75).

El problema creado por el grupo 4 muestra la relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas y se muestra la relación 3 de relacionar dos ecuaciones cuadráticas con la intersección de la función cuadrática con dos rectas horizontales. Además, al identificar los puntos de intersección justificó el intervalo de variación de x, así logró vincular la variable a la situación.

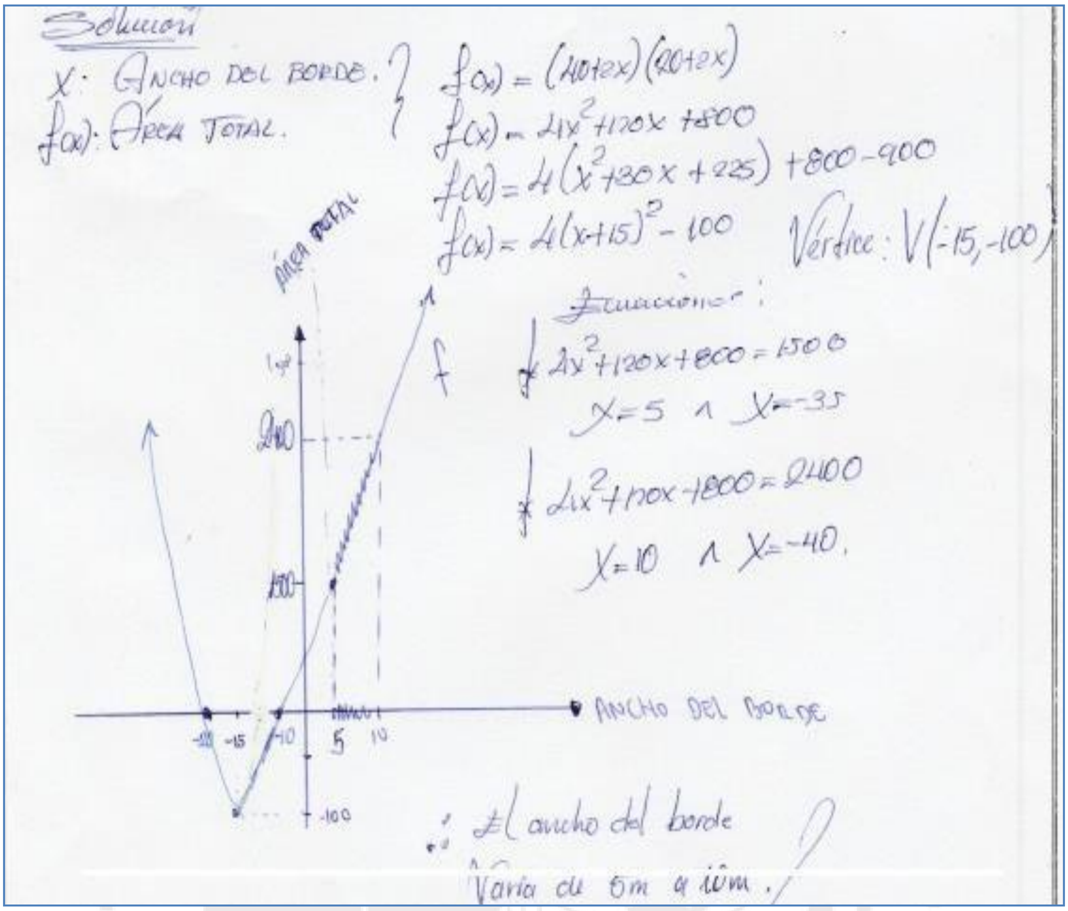
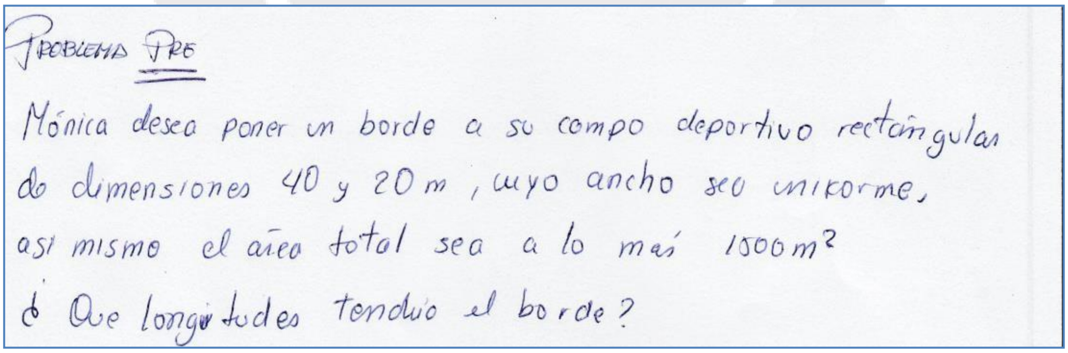


Figura 75. Resolución del problema creado del grupo 4 en la Ficha 2E-2F.

La figura 76 muestra el problema Pre creado por el grupo 4, donde consideraron que su problema inicial era muy difícil, por lo que decidieron crear un problema Pre a ese problema inicial.



Problema Pre

Mónica desea poner un borde a su campo deportivo rectangular de dimensiones 40 y 20 m, cuyo ancho sea uniforme, así mismo el área total sea a lo más 1500 m^2

¿Qué longitudes tendría el borde?

Figura 76. Problema Pre del grupo 4 con respecto a su problema inicial.

La resolución del problema pre también muestra las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas (Véase figura 77).

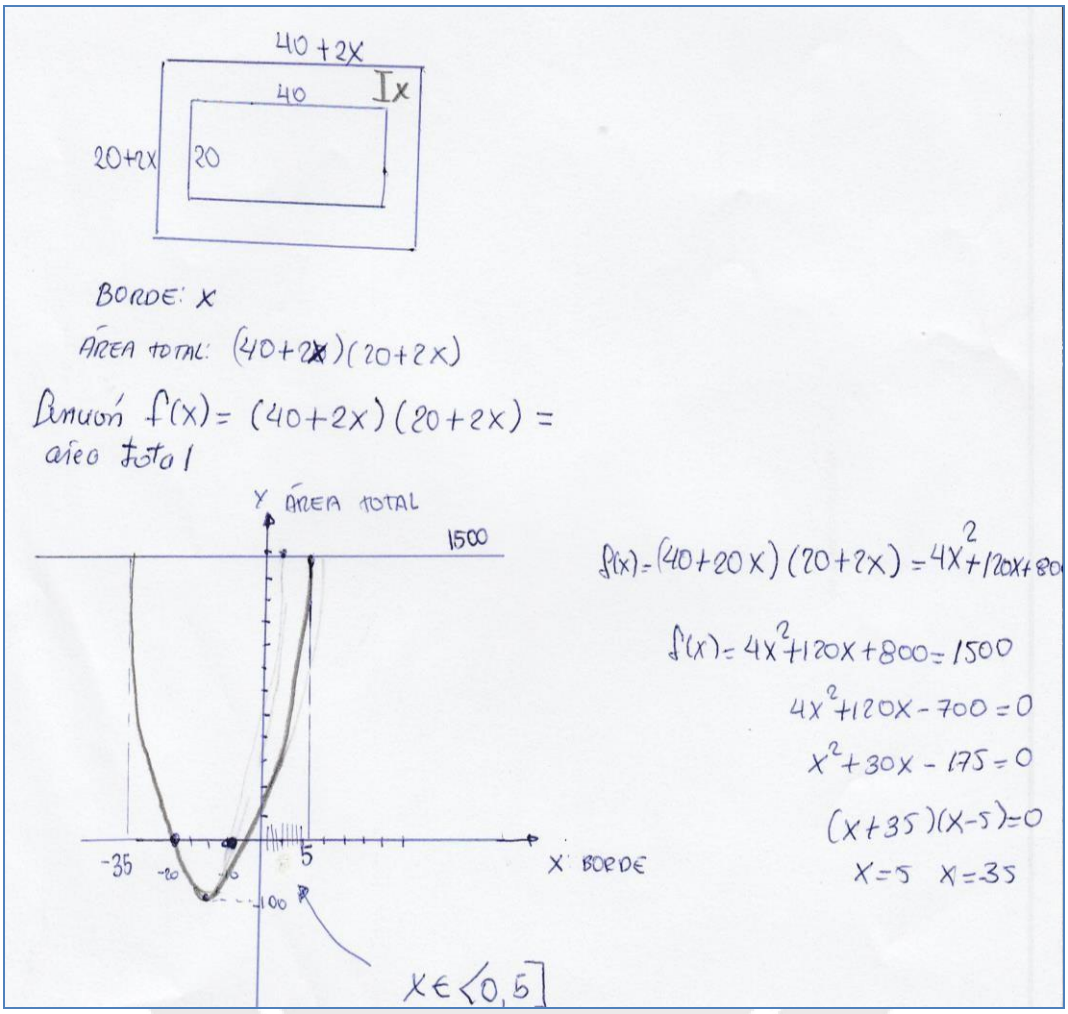


Figura 77. Resolución del problema Pre del grupo 4 con respecto a su problema inicial.

Del análisis de estas fases desarrolladas por el profesor P8, se afirma que el profesor al tener una tarea sobre plantear una función cuadrática bajo cierta situación lo desarrolló sin inconvenientes. Podemos afirmar que él logra comprender estas relaciones porque creó un problema mostrando la relación de las ecuaciones y funciones cuadráticas donde usó la función cuadrática que planteó y la relacionó con la ecuación cuadrática de su compañero. Además, creó un nuevo problema realizando variaciones en el contexto, información y requerimiento, pero manteniendo el uso de las ecuaciones cuadráticas relacionadas con las funciones cuadráticas.

Etapa 4: Prueba exploratoria final

En esta sección analizamos la exploración final resuelta del profesor P8. En ella, solo identificaremos las relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas, esto a través de la rúbrica descrita en la sección 3.4, 3.5 y Anexo G.

Analizamos el problema 2 del profesor P8, donde la situación es:

El perímetro de un terreno rectangular es 40 metros.

El profesor P8, elaboró un nuevo problema dada la situación (Véase figura 78).

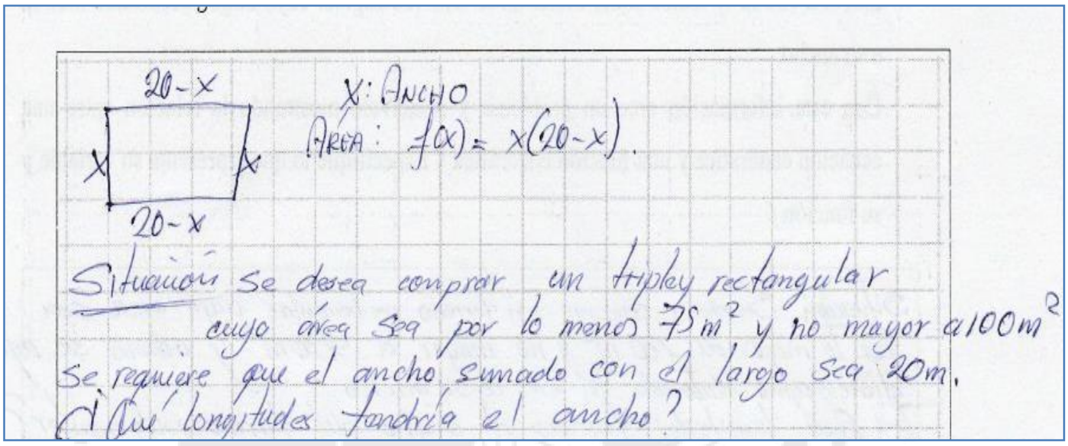


Figura 78. Problema creado por elaboración profesor P8.

En la resolución se puede observar el uso de las relaciones 1, 2, 3 y 4. Sobre la relación 1, el profesor P8 muestra que relacionó la función cuadrática $f(x) = 20x - x^2$ y las ecuaciones cuadráticas $20x - x^2 = 75$ y $20x - x^2 = 100$; sobre la relación 2, muestra en su solución el uso de las rectas horizontales $y = 75$ y $y = 100$, junto con la función cuadrática logra encontrar los puntos de intersección que son las ecuaciones cuadráticas planteadas; en la relación 3, se observa que el profesor logró distinguir en el gráfico el intervalo de variación del ancho del terreno, con ello logró justificar el uso de las ecuaciones cuadráticas; y sobre la relación 4, hizo uso de la ecuación cuadrática $20x - x^2 = 0$, la cual le ayudó a realizar el gráfico de la función cuadrática f (Véase figura 79).

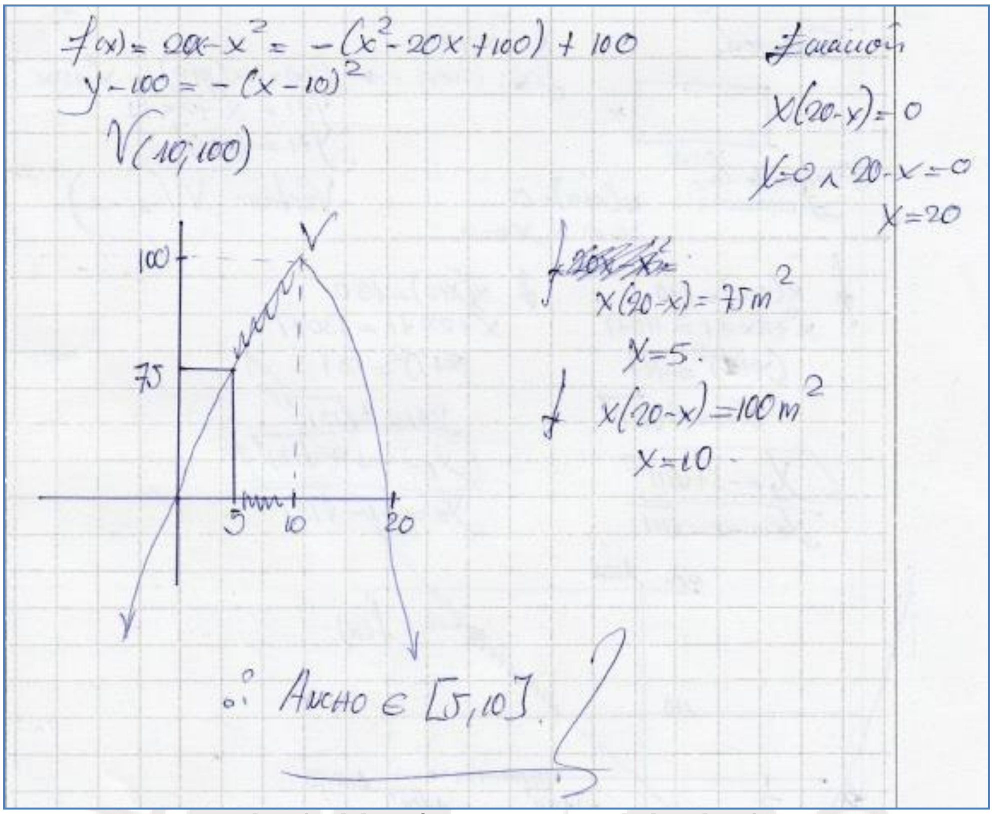
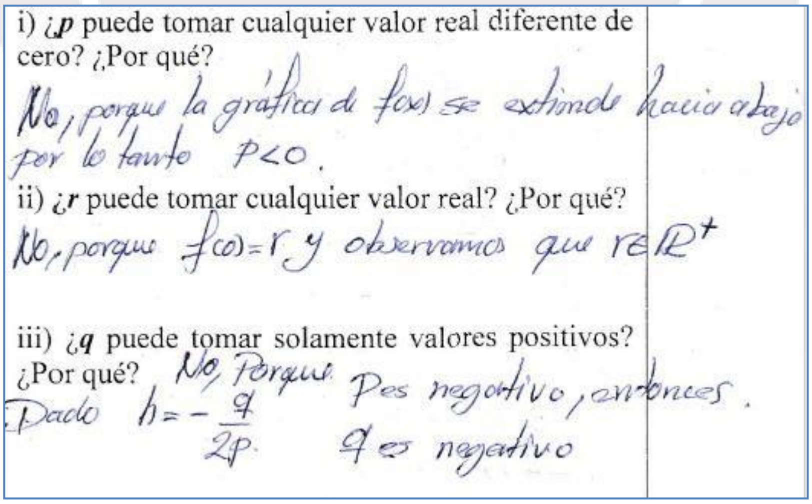


Figura 79. Solución del profesor P8 mostrando la relación 1, 2, 3 y 4.

En la Figura 80 se refleja la resolución de la pregunta 4 del profesor P8, donde muestra una habilidad alcanzada reconociendo los tres parámetros dado el gráfico de una función cuadrática.


i) ¿***p*** puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

No, porque la gráfica de f(x) se extiende hacia abajo por lo tanto $p<0$.

ii) ¿***r*** puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

No, porque $f(0)=r$ y observamos que $r \in \mathbb{R}^+$

iii) ¿***q*** puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué? No, Porque P es negativo, entonces. Dado $h=-\frac{q}{2p}$ q es negativo

Figura 80. Relación 5 del profesor P8 alcanzada.

En la figura 81, se muestra la resolución del problema 5.a:

> *Determine el conjunto solución de la ecuación* $x^2 - 2x + 8 = 0$. *Haga una ilustración gráfica, vinculándola con una función.*

En esta resolución, se puede mostrar que el profesor comprendió las relaciones 1 y 6. Sobre la relación 1, logró relacionar la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 8 = 0$ con la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x + 8$ y sobre la relación 6, logró explicar que la gráfica no tiene puntos de intersección con el eje X pues tiene una discriminante negativa.

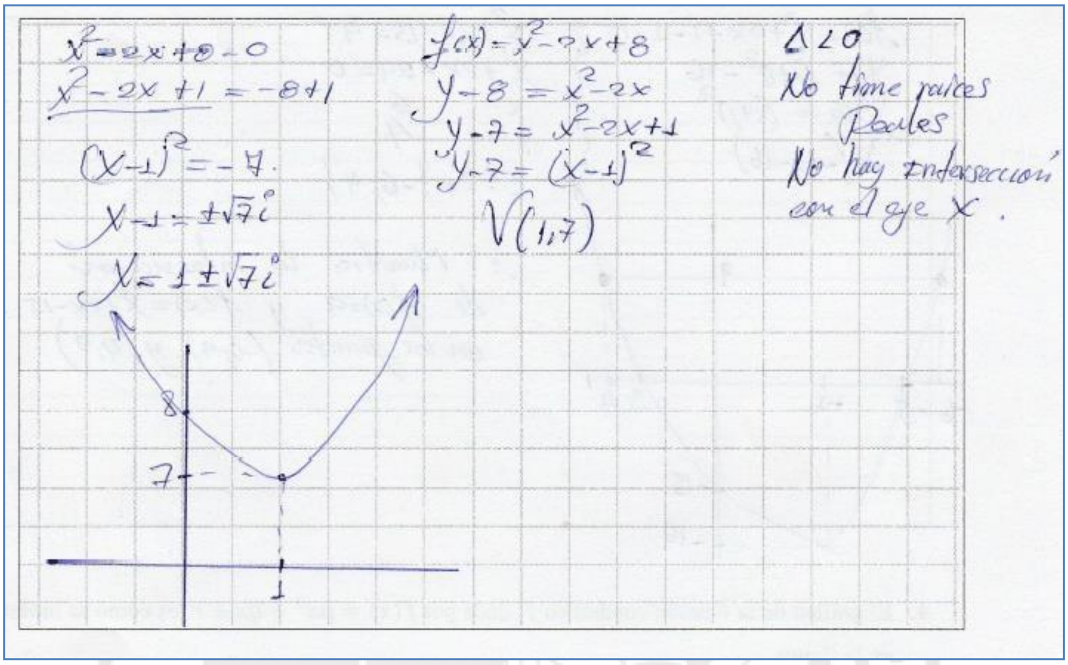


Figura 81. Relación 1 y 6 del profesor P8 alcanzada.

El profesor P8 evidencia en su desarrollo de la prueba exploratoria final comprensión en la seis relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas, obteniendo una habilidad alcanzada en cinco de las seis relaciones.

Comentarios finales del análisis del profesor P8:

El profesor P8, antes del taller, tenía tres de las seis relaciones parciales, además de dos relaciones incipientes. Basados en la prueba exploratoria inicial, se puede afirmar que el profesor comprendía poco de las relaciones sobre ecuación y función cuadrática antes del taller de creación de problemas matemáticos.

El taller le ayudó a comprender las relaciones. Esta afirmación se basa en el análisis de la resolución del problema del episodio, el problema pre individual, pre grupal y pos grupal, donde se demostró que, al transcurrir las fases de la primera sesión, el profesor logró mejorar su comprensión en varias relaciones sobre ecuación y función cuadrática. La segunda sesión igual contribuyó a que el profesor logre mejorar su comprensión pues crea en equipo un problema donde adaptó una tarea sobre ecuaciones cuadráticas y otra sobre funciones cuadráticas.

Luego del taller de creación de problemas, podemos afirmar que el profesor logra comprender en la mayoría las relaciones que analizamos en su resolución de la prueba exploratoria final.

Tabla 24. *Comparación de las seis relaciones del profesor P8 – Pruebas exploratorias*

Profesor P8	**Relación 1**	**Relación 2**	**Relación 3**	**Relación 4**	**Relación 5**	**Relación 6**
Exploración inicial	1	1	0	2	1	0
Exploración final	2	2	2	2	2	1

Se puede observar, basado en la tabla 24, que el profesor mejoró en la mayoría de relaciones analizadas, siendo el taller de creación un medio para la comprensión de dichas relaciones.

CAPITULO V

5. 1 Conclusiones

En esta investigación se hizo un recojo de información bibliográfica y aspectos didácticos de los conceptos de ecuación y función cuadrática.

En nuestros antecedentes se resaltaron las pocas relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, tanto en los libros de textos como en el desarrollo de clases de nivel secundario.

El interés de esta investigación ha estado enfocado para saber cuáles son los conocimientos que tienen los profesores en servicio, de nivel secundario, sobre las ecuaciones y funciones cuadráticas, qué relaciones entre estos dos objetos matemáticos evidencian reconocer y plantear cómo contribuir a la comprensión de estas relaciones cuando no logran reconocer ambos conceptos.

Como el interés fue de énfasis didáctico, nos basamos en el enfoque de creación de problemas (Malaspina, 2017), con el propósito que, mediante un taller de creación de problemas, los participantes lograran avances en su comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas. Esto, bajo tareas especialmente diseñadas usando las estrategias EPP y SPP.

Como estas tareas se trabajan, mediados por el enfoque de creación de problemas, se elaboraron instrumentos para poder analizar los diferentes cambios que un profesor en servicio tiene cuando participa en un taller de creación de problemas matemáticos.

5.2 Respecto al primer objetivo específico

> *Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores de la muestra sobre ecuaciones y funciones cuadráticas y, fundamentalmente, su relación entre ellas.*

1. La mayoría de los participantes del taller manejaron los dos objetos, tanto la “ecuación cuadrática” como la “función cuadrática”, de manera parcial, ya que resolvieron bien las cuestiones sobre estos objetos matemáticos cuando se les presentaron por separado. Pero de manera deficiente cuando se le presentaron tareas donde deban relacionar estos dos objetos matemáticos. Esta afirmación se basa en el análisis de las respuestas de los participantes que rindieron la exploración inicial. Dicho análisis fue hecho mediante una rúbrica, especialmente diseñada y descrita en la sección 3.4 y 3.5, para evaluar

cualitativamente las habilidades de los profesores en servicio que participaron en el taller y rindieron la prueba exploratoria inicial (Previo al taller). Estos resultados se evidenciaron en la sección 4.3.1 en las tablas 21, 22 y sus respectivos comentarios donde se hace la descripción del análisis de la exploración inicial.

2. La falta de comprensión de la relación entre los dos objetos matemáticos se percibe también en el desarrollo de la primera y segunda fase del taller. El problema del episodio fue especialmente diseñado para que al solucionarse el participante relacione las ecuaciones y funciones cuadráticas; sin embargo, fueron pocos los profesores que lograron mostrar, en las soluciones del problema del episodio o al crear su problema pre, signos de relacionar las ecuaciones y funciones cuadráticas. Esta afirmación se evidenció en la sección 4.3.2, donde se realizó el análisis de la Ficha 1A y la Ficha 2A. Además, la mayoría de participantes mostraron en sus soluciones que el problema del episodio involucra el uso de las inecuaciones cuadráticas, sin la necesidad de las ecuaciones cuadráticas y menos el realizar un esbozo de una función cuadrática, lo cual se aclaró en la socialización, donde solo uno de los grupos mostró que las ecuaciones y funciones cuadráticas se relacionan al resolver el problema del episodio.

5.3 Respecto al segundo objetivo específico

Identificar los cambios en la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas luego de aplicar una secuencia de actividades de creación de problemas especialmente diseñada y empleando las estrategias EPP y SPP.

1. Podemos afirmar que, al pasar las diferentes fases de la estrategia EPP, la mayoría de los profesores lograron mejorar su percepción y comprensión de las relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas.

   Esta afirmación es respaldada por la descripción hecha en la sección 4.3.2, pues los participantes, al iniciar el taller, no evidenciaron relacionar las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas, pero al transcurrir las diferentes fases del taller bajo la estrategia EPP, la mayoría de participantes sí lograron comprender y adaptar, algunos en forma parcial y otros eficientemente, la relación entre ambos objetos matemáticos.

   La primera socialización fue de gran importancia, pues la mayoría de profesores habían afirmado que el problema del episodio se resolvía sin usar las ecuaciones cuadráticas y mucho menos relacionándolas con las funciones cuadráticas, pero fue en estas intervenciones donde un grupo logró evidenciar cómo las ecuaciones y funciones cuadráticas sí resuelven claramente el problema del episodio. Fue este momento del taller que provocó en la mayoría de los participantes un cambio para enfocar los problemas posteriores.

2. La mejor percepción de la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas se evidenció durante la segunda sesión, considerando la estrategia SPP, especialmente diseñada para que parejas de profesores tuvieran que relacionar las ecuaciones y funciones cuadráticas al crear un problema fusionando dos tareas con diferentes objetos matemáticos, a partir de las tareas que cada integrante de la pareja tuvo que hacer. Consideraron la misma situación, para tratarla en un caso con ecuación cuadrática y en otro con función cuadrática.

   Podemos afirmar que la mayoría de los profesores lograron mejorar su comprensión sobre las relaciones sobre ecuaciones y funciones cuadráticas, pasando por las fases de la estrategia SPP. Además, algunos participantes adoptaron problemas parecidos a los problemas de la primera sesión que mostraban relaciones entre ambos objetos matemáticos. Así, basados en la descripción del análisis de la sección 4.3.2 sobre la estrategia SPP, se pudo respaldar la afirmación de que hubo una mejora significativa de la mayoría de participantes, en la comprensión de las relaciones entre ecuaciones cuadráticas con funciones cuadráticas durante esta segunda sesión.

3. La mayoría de los profesores participantes, luego del taller, demostraron por lo menos una habilidad parcial en su comprensión sobre la relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

   Esto reflejó una mejora importante con respecto a los conocimientos que tenían antes del taller. Esta afirmación se basa en el análisis de las respuestas de los participantes que rindieron la prueba exploratoria inicial y final (Antes y después de taller). Además, esta afirmación es respaldada por la descripción de los análisis de la prueba exploratoria inicial y final realizados en las secciones 4.3.1 y 4.3.3 y por el caso del profesor P8, que evidenció su mejora en la comprensión luego del taller de creación de problemas.

5.4 Respecto al objetivo general

Analizar cómo la creación de problemas contribuye a que los profesores de secundaria en servicio comprendan la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas.

Podemos concluir, basándonos en lo manifestado en relación a los dos objetivos específicos, que:

1. Con el análisis y la descripción desarrollados en el capítulo IV y lo manifestado respecto a los objetivos específicos, podemos afirmar que nuestro objetivo principal se logra cumplir, pues los profesores en servicio que participaron en el taller de creación de problemas mejoraron su comprensión sobre las relaciones entre las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas.

   Esta afirmación se basa en la comparación de las dos pruebas exploratorias (Inicial y final) y en el análisis de las fichas que desarrollaron los participantes en las dos sesiones del taller, esto es evidenciado en el análisis del caso profesor P8 el cual tiene un avance significativo en la compresión de la relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas. Cabe recalcar que los instrumentos de medición pasaron por juicio de expertos y estas herramientas, especialmente diseñadas, sirvieron para hacer los análisis de las soluciones de los problemas en las diferentes fichas que implicaron todo la fase de entrada al escenario.
2. Los problemas creados pre y pos grupal, en la primera sesión, motivaron reflexiones sobre la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas. Cuando se desarrolló el trabajo en equipos, y más aún en la socialización, se esperaba conseguir que los profesores llegaran en conjunto a aclarar estas relaciones, a partir del problema del episodio, y así fue.

   Si esto no se evidenciaba en la primera socialización, se hubiese intervenido explicando el problema del episodio para que los profesores pudieran crear problemas logrando esta vinculación. Podemos afirmar que la primera sesión del taller se desarrolló satisfactoriamente y aportó al cumplimiento del objetivo principal de esta investigación.
3. Los problemas y las tareas propuestos, en el marco de las estrategias EPP y SPP, permitieron cumplir el objetivo general. De manera particular, la estrategia SPP desarrollada en la sesión 2 con las tareas individuales y luego en parejas diseñada de manera especial, contribuyó positivamente a cumplir con nuestro objetivo principal. Trabajar con tareas diferentes, a partir de una situación dada y luego fusionar ambas tareas en un solo problema que permita relacionar las ecuaciones y funciones cuadráticas, fue un reto para el investigador y para los participantes de esta sesión.

5.5 Sugerencias para futuras investigaciones:

A continuación se muestran algunas sugerencias para futuras investigaciones:

1. En la investigación, se muestra la importancia de la relación entre las ecuaciones cuadráticas y cuadráticas. Consideramos importante explicitar este vínculo al enseñar estos temas, mostrando ejemplos en los que el alumno de nivel secundaria comprenda esta relación. Para eso, puede basarse en problemas que muestren las diferentes relaciones que hemos trabajado en las pruebas exploratorias o en el taller de creación de problemas.
2. En los libros de textos escolares de nivel secundaria, al enseñar las ecuaciones cuadráticas, se enfocan en darles tareas repetitivas para aprender un método específico para hallar el conjunto solución y desligan este concepto con las funciones cuadráticas o viceversa y se olvidan la importancia de las ecuaciones cuadráticas, ya que solo ven métodos para hallar puntos de corte con el eje X.

   Este trabajo evidencia la importancia de los dos objetos matemáticos relacionados, con tareas que involucran resolver una ecuación cuadrática y vincularla con una función cuadrática. Es importante que en los libros, de nivel secundario, se propongan tareas donde relacionen estos dos objetos matemáticos.
3. La estrategia SPP es muy enriquecedora para comprender mejor las relaciones entre conceptos matemáticos. En este trabajo se evidencia que esta estrategia permite que los profesores trabajen en forma individual con distintas tareas, para luego, en la parte grupal, asumir el reto de crear un problema en conjunto con las tareas individuales que ellos desarrollaron. Así, esta estrategia permite vincular dos objetos matemáticos y comprender las relaciones que existen entre ellos.
4. La socialización, en cualquiera de las dos estrategias de creación de problemas (EPP o SPP), es de gran importancia. En una primera socialización, los participantes explicaron y mostraron los conocimientos con los que inician la tarea (En muchos casos, nueva) de crear un problema basados en el problema del episodio o de la situación. Este primer momento fue propicio para la reflexión en sus problemas que crearon, pues ayudó a encaminar a los participantes a los objetivos del taller.

   Si en la primera socialización aún no se consiguió que los participantes comprendieran lo que se esperaba en el taller, se necesitaría de una intervención por parte del guía del taller. Para eso, por ejemplo, se puede mostrar una solución idónea del problema del episodio.

5. Se evidenció, en esta investigación, que se pueden conocer o comprender diferentes conceptos matemáticos, pero en tareas donde se pide que muestren relaciones entre dos o más conceptos matemáticos resulta una tarea de mayor demanda cognitiva; por lo tanto, un taller de creación de problemas matemáticos, bajo el enfoque de resolución y creación de problemas propuesto por Malaspina, es un medio que permite comprender relaciones entre dos o más conceptos matemáticos.

6. En la primera sesión del taller de creación de problemas, el problema del episodio también se pudo resolver usando las inecuaciones cuadráticas y se pudo evidenciar vinculación entre las inecuaciones cuadráticas y las funciones cuadráticas.

   Como no era parte de la investigación este conocimiento matemático, no se tomó en cuenta este tipo de relaciones, pero para futuras investigaciones se puede identificar qué conocimientos relacionados entre inecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas muestran los profesores en servicio al resolver tareas especialmente diseñadas, con situaciones problemáticas adecuadas.

   Así, bajo el enfoque de creación de problemas, queda como pregunta de investigación: *¿Cómo contribuir a la comprensión de la relación entre inecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas mediante la creación de problemas?*

REFERENCIAS

Acuña, J., Bustos, G., Cuervos, M., & Pulido, K. (2012). Uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a través del método griego: experimento de enseñanza. 49-55. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2528/

Campos, R, (2014). Aspectos conceptuales y metodológicos del desarrollo del concepto función cuadrática en libros de texto escolar del grado 9°. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. 108. Recuperado de: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/4588

Huapaya Gómez, E. (2012). Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. 148. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1571

Lima E., Pinto P., Wagner E. y Morgado A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*. Lima, Perú: IMCA.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacómone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U. (2015). La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas. *Revista Iberoamericana de educacion matematica*, 6. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Problema.pdf.

Malaspina, U., & Vallejo, E. (2014). Creación de Problemas en la Docencia e investigación. En Reflexiones y Propuestas en Educación Matematica. Lima, Perú: Editorial Moshera S.R.L.

Martínez, A., & Arrieche, M. (2012). Configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado, en la antigua civilización china. *Comite Latinoamericano de*

Matemática Educativa A.C., 85-94. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4133/

Martínez, C. P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. En *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=64602005

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología*, *9*(1), 123-146. Recuperado de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/psico/article/view/4033/3213

Mesa, Y., & Villa Ochoa, J. (2008). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática. 10. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/297899312

Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Matemática 3.* Lima - Grupo editorial Santillana S.A.

Perú, Ministerio de Educación (2016b). *Matemática 4.* Lima - Grupo editorial Santillana S.A.

Perú, Ministerio de Educación (2016c). *Matemática 5.* Lima - Grupo editorial Santillana S.A.

Perú, Ministerio de Educación (2017). Currículo Nacional de Educación Básica. Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2007). *Proyecto Educativo Nacional al 2021.* Lima, Perú.

Ponte, J. (2006) Estudos de Caso em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática, 19(25).

Silveira, R., & Cardoso, É. (2015). Ensino da matemática e a relacao didactico curriculat: uma relexao do ensino da equacao do primero e segundo grau. *Conohecimento em Destaque*, 1-21.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2007). *Precálculo: matemáticas para el cálculo*. México, D. F: Cengage Learning, 2007.

Tocto Núñez, E. (2016). Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. 119. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6755

Torres, C. (2016). Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. 307. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7226

ANEXOS A:

SÍLABO DEL TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS

I. DATOS GENERALES

Curso – taller	:	Creación de problemas de matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones y funciones en la educación secundaria.
Duración	:	8 horas
Carácter	:	Teórico – practico
Docente especialista	:	Dr. Uldarico Malaspina Jurado Profesor Principal del Departamento de Ciencias - Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Docente de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Autor y coautor de publicaciones sobre educación matemática. Expositor en eventos nacionales e internacionales sobre educación matemática.
Fecha	:	08-10-2017
Horario	:	Domingo de 9 a 13 horas – 14 a 18 horas
Modalidad	:	Presencial

II. FUNDAMENTACIÓN

Los docentes debemos estimular lo más posible la creatividad de nuestros alumnos en el aprendizaje de las matemáticas y si bien es cierto que esta se manifiesta reactivamente cuando ellos resuelven los problemas que les proponemos, se deja de lado la creatividad proactiva si no los estimulamos a que ellos creen sus propios problemas de matemáticas. La actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes (Malaspina, 2011)

El curso-taller, se enfoca en las ecuaciones y funciones cuadráticas. Estos temas matemáticos son desarrollados siguiendo la estrategia basada en la creación de problemas-pre y problemas-pos.

III. OBJETIVOS

Promover la creación de problemas cómo una ventana de oportunidades para mejorar el aprendizaje y enseñanza de la matemática.

Promover la creación de problemas para estimular y desarrollar la creatividad.

IV. CONTENIDOS

1. Introducción a la creación de problemas.
2. Creación de problemas sobre ecuaciones y funciones cuadráticas por variación – estrategia EPP (Episodio, problema Pre y problema Pos).
3. Creación de problemas sobre ecuaciones y funciones cuadráticas por elaboración – estrategia SPP (Situación, problema Pre y problema Pos).

V. METODOLOGÍA

La metodología que se aplicará en el curso-taller está basada en el enfoque de resolución y creación de problemas, se fomenta la participación activa. Los participantes desarrollan problemas creados por variación y por elaboración.

ANEXOS B:

Diapositivas de la presentación del taller

Creación de problemas en la enseñanza de las matemáticas

Uldarico Malaspina Jurado

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Sobre la importancia de crear problemas.

En diversos trabajos de investigadores en educación matemática encontramos expresiones que destacan **la importancia de la creación de problemas** en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- En 1989 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM):

  "Los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas" (p. 138).

Sobre la importancia de crear problemas.

- Bonotto (2013):

  "El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática…"

  "Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental". (p. 53)

- Ellerton (2013):

  "Durante demasiado tiempo, la resolución exitosa de problemas ha sido exaltada como la meta; ha llegado el momento en que a la creación de problemas se le dé un lugar prominente pero natural en los planes de estudio y las aulas de matemáticas" (pp. 100-101)

Sobre la importancia de crear problemas.

- Malaspina y Vallejo (2014).

  Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y **es un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas**, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a aprender resolviendo problemas, sino a "ir más allá": a **aprender creando sus propios problemas**. (p. 8)

¿QUÉ ENTENDEMOS POR CREAR PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS?

La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema.

¿Cómo crear problemas?

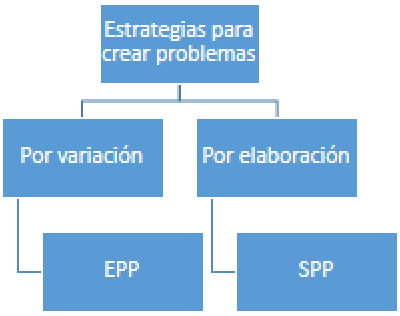
Modificando un problema dado

CP por *Variación*

Planteándo(se) preguntas a partir de una situación dada.

CP por *Elaboración*

¿Cómo estimular en los docentes la capacidad de crear problemas?



Estrategia EPP

- **Episodio**.- Es parte de una clase de un profesor, que incluye un problema y los comentarios hechos por sus estudiantes al resolver o tratar de resolver el problema.
- **Problema Pre**.- Problema que facilita la comprensión y solución del problema del episodio.
- **Problema Pos**.- Problema más retador inspirado en el problema del episodio.

FASE DE TRABAJO INDIVIDUAL

FASE DE TRABAJO GRUPAL

Ejemplo

Episodio

La profesora Nancy propuso a sus alumnos de segundo año de secundaria el siguiente problema

Sea $f(x) = 3x + 2$. Define una función g modificando alguno de los parámetros de f de modo que la hipotenusa del triángulo que determina g con los ejes coordenados sea el doble de la hipotenusa del triángulo que determina f con los ejes coordenados.

Algunos de sus estudiantes comentaron:

Carlos: Hay que duplicar el 3 y el 2
María: Primero hay que hallar la longitud de la hipotenusa con f
Susana: No me acuerdo el teorema de Pitágoras…

Problema pre:

Considera las siguientes funciones:

$$p(x) = 2x + 1, \quad q(x) = 2x + 3, \quad r(x) = 3x + 1$$

a) Esboza en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de las funciones dadas.

b) ¿Es verdad que las hipotenusas de los triángulos que determinan los gráficos de q y r son mayores que la hipotenusa del triángulo que termina el gráfico de p? ¿Por qué?

Problema pos:

Sea $f(x) = 3x + 2$. Modifica alguno de los parámetros de f para que su gráfico determine con los ejes coordenados un triángulo en el primer cuadrante cuya área sea 10 u^2

Estrategia SPP

- **Situación**: La que se presenta. Puede ser real o configurada.
- **Problema Pre**: Facilita la comprensión y solución del problema creado inicialmente a partir de la situación dada.(Enfatiza el uso didáctico de la situación dada.)
- **Problema Pos**: Problema más retador que el problema creado inicialmente a partir de la situación dada.

FASE DE TRABAJO INDIVIDUAL

FASE DE TRABAJO GRUPAL

Ejemplo

Situación

El precio del kilo de manzanas "Delicia" en la bodega de mi barrio es S/1,50 más que en el mercado mayorista.

Problema

Si el precio del kilo de manzanas "Delicia" en la bodega de mi barrio es S/ 4,00 y en el mercado mayorista es S/ 2,50 , pero debo gastar S/ 6,00 en pasajes de ida y vuelta ¿A partir de cuántos kilos de manzana "Delicia" me conviene comprar en el mercado mayorista?

ANEXOS C:

TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS

08-10-2017

Ficha de recojo de información

Apellidos y Nombres: ____

Profesión:__________________________________ Sexo: M F

Hizo sus estudios profesionales en: Universidad________Inst. Pedagógico___________

Nombre de la Institución: ____

Año en que concluyó sus estudios profesionales: ___________

Año de servicio cómo docente: ____

	Ecuaciones cuadráticas	Funciones cuadráticas
¿Ha enseñado el tema en estos últimos 3 años?		
¿En qué grado escolar ha enseñado este tema?		

¿Ha estado involucrado en la experiencia de creación de problemas? _____________

En caso tenga experiencia creando problemas. ¿Utiliza alguna estrategia de creación de problemas?

¿Cree que la creación de problemas potencia el aprendizaje de la matemática? ¿Por qué?

ANEXOS D:

EXPLORACIÓN INICIAL

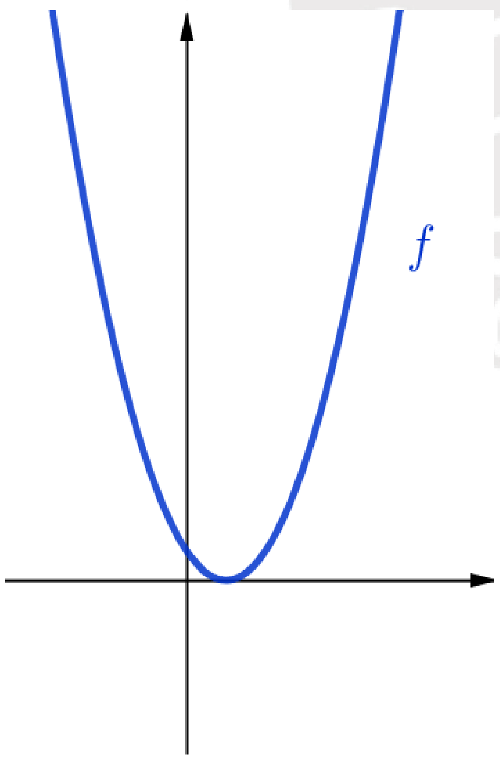
1. a. El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que el ancho y su área es 84 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones?

b. Pedrito resolvió la pregunta anterior usando la ecuación $x(x+5) = 84$. ¿Qué ***expresa*** la función $f(x) = x(x+5)$ en el contexto del problema?

2. ¿Qué ***relación*** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$?

3. Sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$
   i. ¿Qué ***significa gráficamente*** que p es un número real positivo tal que $f(p) = 0$?
   ii. ¿Qué ***significa gráficamente*** que p es un número real positivo tal que $f(p) = q$, con $q > 0$?

4. El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es cómo se muestra en la figura.

	Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda: i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué? ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué? iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué? iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ puede ser positivo?

5. ***Resuelva*** la ecuación $(x-2)^2 - 1 = 0$ y ***relacione gráficamente*** el conjunto solución con la intersección de los gráficos de dos funciones.

6. a. Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$. ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

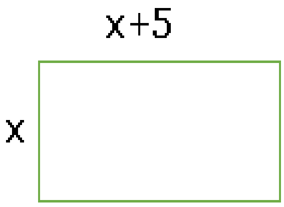
b. Si $F(x) = x^2 + 2x + 10$ y $G(x) = k$, ¿para qué ***valores de k*** la intersección de los gráficos de F y de G es no vacía?

7. Examine ***gráficamente*** por qué las siguientes ecuaciones **NO** pueden tener ***dos raíces positivas***. Relacione su respuesta con los posibles valores de los parámetros en cada caso.
   i. $x^2 + ax = 0$,
   ii. $x^2 + bx - 4 = 0$.

ANEXO E:

SOLUCIONARIO Y ANALISIS DE LA PRUEBA EXPLORATORIA INICIAL

1. a. El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que el ancho y su área es 84 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones?



x: longitud del ancho del terreno en metros

Identifica la ecuación

Hallar el conjunto solución de la

$x(x+5)=84 \rightarrow x^2+5x-84=0 \rightarrow x=-12 \vee x=7$

Relaciona los valores del CS de la ecuación cuadrática con el problema

Las dimensiones del terreno son 7 metros de ancho y 12 metros de largo.

NOTA: Puede definir la variable x como la longitud del largo del terreno.

b. Pedrito resolvió la pregunta anterior usando la ecuación $x(x+5)=84$. ¿Qué ***expresa*** la función $f(x)=x(x+5)$ en el contexto del problema?

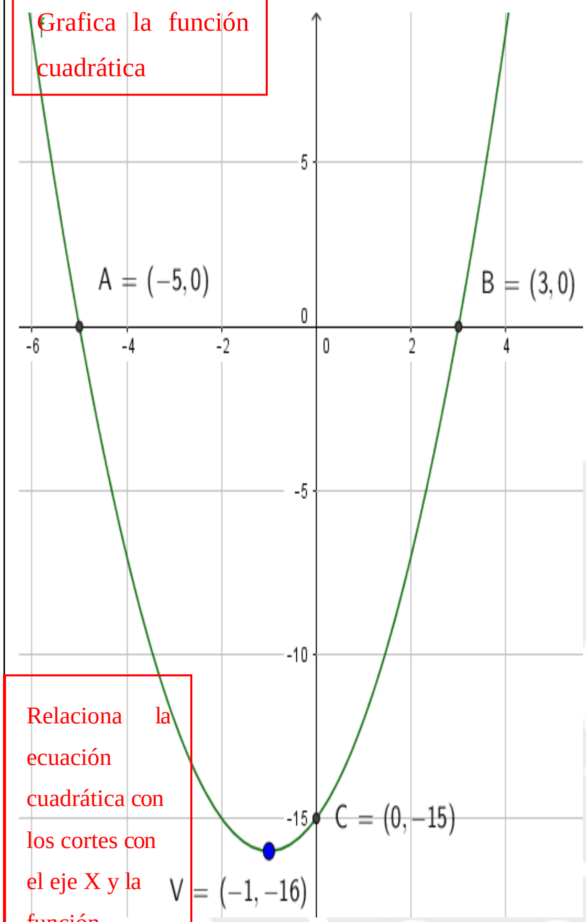
Identifica lo que expresa la función cuadrática

$f(x)$ representa el área de cualquier terreno rectangular en función de la longitud de su ancho, sabiendo que el largo excede en 5 metros al ancho.

En esta pregunta se muestra la relación de las ecuaciones y funciones cuadráticas dada dos tareas por separado, en un primer momento se les pide resolver un problema de contexto extra matemático donde debe identificar la ecuación cuadrática, hallar el conjunto solución y relacionar los valores del conjunto solución con el requerimiento del problema. En una segunda parte se les da la tarea de una función cuadrática vinculada a la ecuación cuadrática de la tarea anterior para que interprete y dé el significado de esa función dado el contexto de la primera tarea anterior.

2. ¿Qué ***relación*** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$?

Grafica la función cuadrática



Relaciona la ecuación cuadrática con los cortes con el eje X y la función cuadrática.

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática

Al resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ se tiene $C.S. = \{-5; 3\}$

Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática

y el gráfico de f corta al eje X en $(-5; 0)$ y $(3; 0)$.

Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de con el eje X

Entonces se puede afirmar que los puntos de corte del gráfico de f con el eje X tienen como abcisas los elementos del conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.

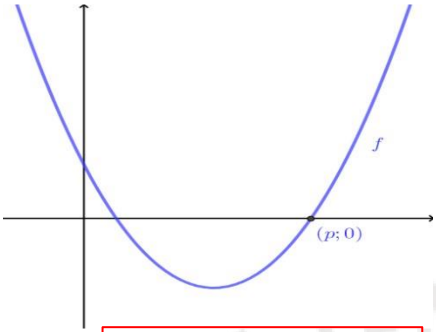
En esta pregunta se les da una tarea, en donde se pide encontrar una relación entre el gráfico de una función cuadrática y la ecuación cuadrática, para ello se debe encontrar el conjunto solución de la ecuación cuadrática y también realizar el gráfico de la función cuadrática; para realizar el esbozo correcto del gráfico se debe identificar el vértice y dos puntos simétricos, una forma de hallar estos puntos simétricos es identificando los puntos de cortes de la función cuadrática con el eje X (también conocidos como ceros de la función), es así que se logra identificar una relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, ya que encontrar los ceros de una función cuadrática implica resolver la ecuación cuadrática $f(x) = 0$, además los elementos del conjunto solución son las abscisas de los puntos de corte de la función cuadrática y el eje X.

3. Sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

iii. ¿Qué ***significa gráficamente*** que p es un número real positivo tal que $f(p) = 0$?

iv. ¿Qué ***significa gráficamente*** que p es un número real positivo tal que $f(p) = q$, con $q > 0$?

Grafica la función cuadrática

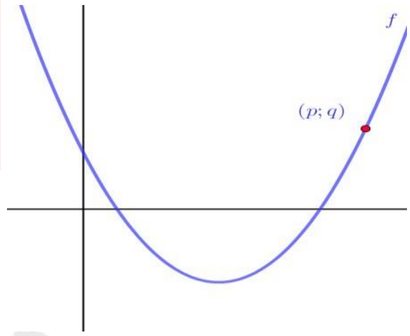


Relaciona la ecuación cuadrática con los ceros de la función cuadrática.

i. $f(p) = 0 \rightarrow (p;\ 0) \in f$, gráficamente significa que es un punto de paso de la función cuadrática que además está en el semieje X positivo. Es decir, p es un cero de la función.

Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de con el eje X

Grafica la función cuadrática



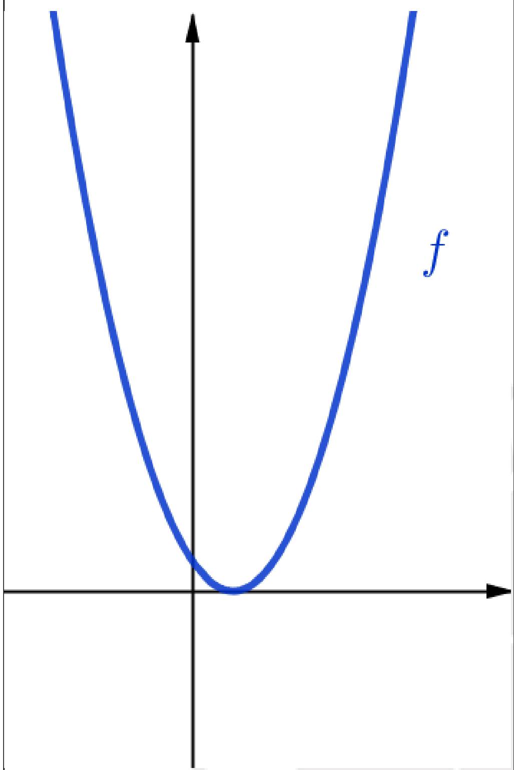
Relaciona la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de una función cuadrática y una recta horizontal

ii. $f(p) = q \rightarrow (p;\ q) \in f$, gráficamente significa que $(p;\ q)$ es un punto del gráfico de la función f, ubicado en el primer cuadrante. Es decir, p es la abscisa de un punto de intersección entre la recta $y = q$ y la parábola que representa f.

Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la abscisa de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática y la recta horizontal.

En esta pregunta se les da dos tareas, en el primer ítem se pide encontrar el significado del punto p del gráfico de la función cuadrática dada la ecuación $f(p) = 0$, se identifica que el significado del valor de p en el gráfico es un cero de la función cuadrática. Para el segundo ítem se espera que identifique $(p; q)$ es un punto perteneciente al gráfico de la función cuadrática donde p se obtendría de la intercepción de la función cuadrática y una recta horizontal $y = q$; y es así que se puede identificar a p como la abscisa del punto de paso o punto de intercepción dada la ecuación $f(p) = q$.

4. El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es como se muestra en la figura.



Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

> Relaciona los parámetros de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

No, la función f representada por la parábola es cóncava hacia arriba, por lo tanto p es positivo.

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

No, del gráfico la ordenada del punto de corte con el eje Y es positivo. Por lo tanto r es positivo.

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

No, del gráfico la abscisa del vértice de la parábola es positiva, entonces $h = \frac{-q}{2p} > 0$. Por lo tanto de i), q solo toma valores negativos.

> Relaciona el número ceros de una función cuadrática con la discriminante de una ecuación cuadrática.

iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ puede ser positivo?

No, el discriminante de la ecuación es 0, pues la función f tiene solo un punto de corte con el eje X.

Para esta pregunta, en los tres primeros ítems se espera vincular el gráfico de una función cuadrática, donde del gráfico de función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se identifica los posibles valores de los parámetros "$a, b\ y\ c$" y así relacionarlo con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. El valor del "a" está relacionado a la concavidad de la parábola, el valor de "b" se espera que lo analice con la forma vértice de la función cuadrática y para el valor de "c" lo encuentre con el punto de corte de la función y el eje Y

Para el último ítem, se espera que vinculen el número de ceros de la función cuadrática con el posible valor de la discriminante de la ecuación cuadrática, para este caso como solo existe un cero dada el gráfico de la función cuadrática se espera que se identifique que la discriminante tiene el valor de cero.

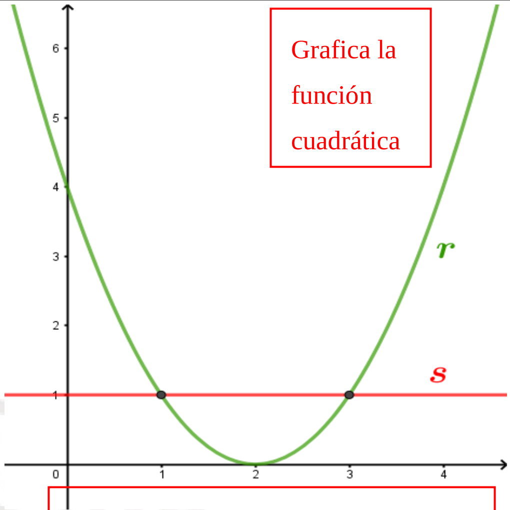
5. ***Resuelva*** la ecuación $(x-2)^2-1=0$ y ***relacione gráficamente*** el conjunto solución con la intersección de los gráficos de dos funciones.

De la ecuación $(x-2)^2-1=0$

$\rightarrow (x-2)^2=1 \rightarrow x-2=\pm 1$

$\rightarrow x=1 \vee x=3 \rightarrow C.S.=\{1;3\}$

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática



Grafica la función cuadrática

Relaciona la ecuación cuadrática con la función

Podemos definir las siguientes funciones r y s, dadas por: $r(x)=(x-2)^2$ y $s(x)=1$

Relaciona la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de una función cuadrática y una recta horizontal

Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y=k$ usando una ecuación cuadrática

La intersección de las funciones son: $(1;1)$ y $(3;1)$

Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la abscisa de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática y la recta horizontal.

Las abscisas de los puntos de intersección de las funciones r y s coinciden con los elementos del C.S. de la ecuación $(x-2)^2-1=0$.

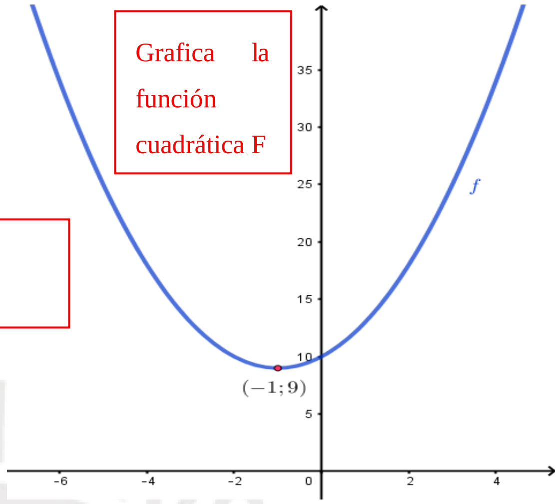
Para esta pregunta se solicita encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática y luego se espera que se vincule la ecuación cuadrática con la intersección de una función cuadrática y una función constante. Es importante que logre identificar una función cuadrática p dada la ecuación cuadrática $f(x)=0$ y una función constante q, tal que verifique $p(x)-q(x)=f(x)$

6. a. Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$. ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática

El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$ es vacío, pues $\Delta = -36 < 0$.

Grafica la función cuadrática F



Relaciona la ecuación cuadrática con la función cuadrática F (algebraicamente)

Dada la función $F(x) = x^2 + 2x + 10$ vinculada a la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$, se observa que el gráfico que representa la función F no se interseca con el eje X.

Relaciona el número ceros de una función cuadrática con la discriminante de una ecuación cuadrática.

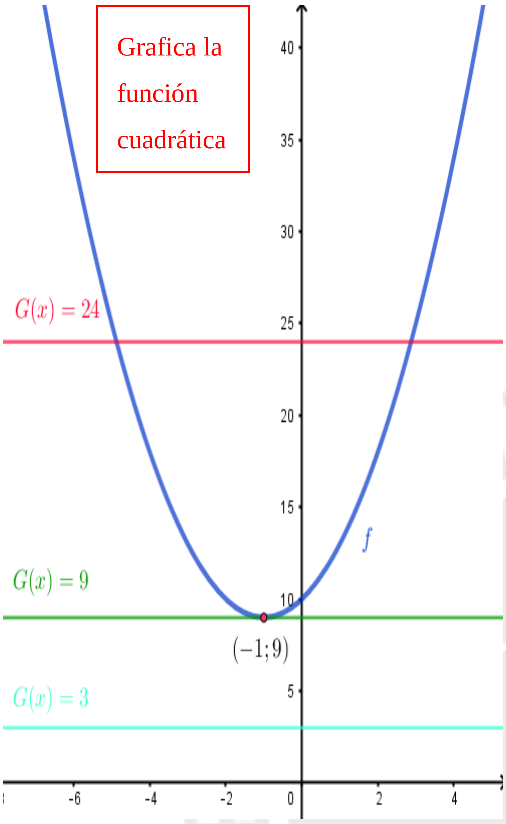
NOTA:

- También puede justificar que la ecuación no tiene solución, pues al completar cuadrados llega a la contradicción $(x + 1)^2 = -9$ o al usar la fórmula general obtiene soluciones complejas.

Para esta pregunta se solicita encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática, el cual es vacío y luego se espera que relacionen la ecuación cuadrática con una función cuadrática para realizar su gráfico. Además, se puede notar que el gráfico de la función cuadrática no tiene ningún cero.

También puede identificar una función cuadrática p dada la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ y una función constante q, tal que verifique $p(x) - q(x) = f(x)$ y logre visualizar que los gráficos de p y q no tienen puntos de intersección.

b. Si $F(x) = x^2 + 2x + 10$ y $G(x) = k$, ¿para qué ***valores de k*** la intersección de los gráficos de F y de G es no vacía?



Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática

Si $F \cap G \neq \emptyset$

$\rightarrow x^2 + 2x + 10 = k \rightarrow x^2 + 2x + 10 - k = 0$

$\rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow 4 - 4(1)(10 - k) \geq 0 \rightarrow k \geq 9$

Del gráfico de $F(x) = (x + 1)^2 + 9$ con vértice $V(-1; 9)$, la interseccion es no vacía:

Si $k > 9$ las funciones F y G se intersecan en dos puntos: $(x_1; k)$ y $(x_2; k)$.

Si $k = 9$ las funciones F y G se intersecan en un punto: $(-1; 9)$.

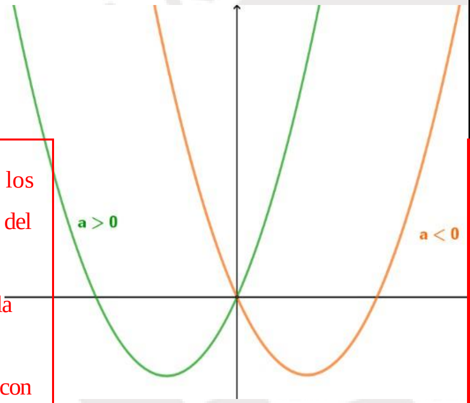
Como una segunda tarea, es identificar los valores de k verifican que la intersección es no vacía, eso en la forma algebraica es equivalente a encontrar el conjunto solución, de una ecuación $f(x) = k$, que no sea vacío; pero basta justificar con el gráfico de la función cuadrática a partir de su vértice.

7. Examine ***gráficamente*** por qué las siguientes ecuaciones **NO** pueden tener ***dos raíces positivas***. Relacione su respuesta con los posibles valores de los parámetros en cada caso.
   i. $x^2 + ax = 0$,
   ii. $x^2 + bx - 4 = 0$.

Relaciona la ecuación cuadrática con la función cuadrática f (algebraicamente)

i. Gráficamente, se puede observar que la función $f(x) = x^2 + ax$ pasa por el origen, por lo tanto solo tendrá a lo más una raíz positiva.

Grafica la función cuadrática



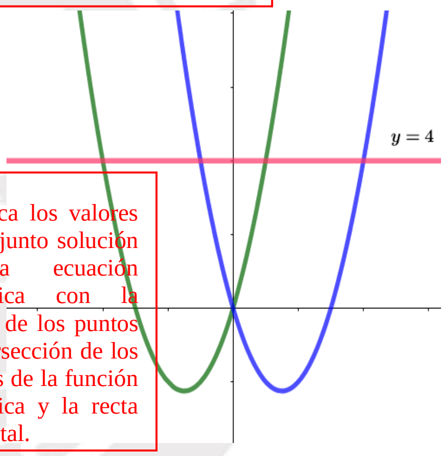
Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con

Relaciona la ecuación cuadrática con los ceros de la función cuadrática.

Relaciona la ecuación cuadrática con la función cuadrática g (algebraicamente)

ii. Gráficamente, se puede observar que la función $g(x) = x^2 + bx$ y la función constante $p(x) = 4$ donde a lo mucho un punto de intersección tiene abscisa positiva, por lo tanto a lo mucho puede tener una raíz positiva.

Grafica la función cuadrática



Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la abscisa de los puntos de intersección de los gráficos de la función cuadrática y la recta horizontal.

Relaciona la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de una función

Para el primer ítem de esta pregunta, se espera que relacionen la ecuación cuadrática con una función cuadrática f y que identifique los ceros de la función para poder afirmar que no se pueden tener dos raíces positivas.

Para el segundo ítem, se debe identificar una función cuadrática g dada la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ y una función constante p, tal que verifique $q(x) - p(x) = f(x)$ y logre visualizar que los gráficos de p y q tienen puntos de intersección, donde uno de ellos tendrá una abscisa positiva y el otro negativo, por lo tanto se puede asegurar que solo se tiene una raíz positiva.

ANEXO F:

<u>EXPLORACIÓN FINAL</u>

1. Pedro necesita comprar un terreno rectangular cuya área sea por lo menos de 110 m^2 y no mayor a 130 m^2 y recibe cómo oferta un terreno rectangular cuyo largo excede en 2 metros a su ancho.

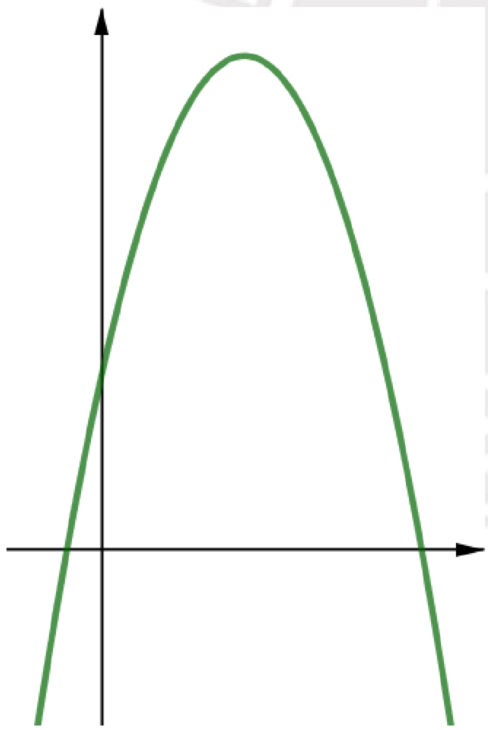
   Con esta información cree un problema y resuélvalo mostrando la relación entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática *f*. Especifique lo que representa su variable y su función *f*.

2. El perímetro de un terreno rectangular es 40 metros.

   Con esta información cree un problema y resuélvalo mostrando la relación entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática g. Especifique lo que representa su variable y su función g.

3. ¿Qué ***relación*** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$?

4. El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es cómo se muestra en la figura.



Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ puede ser positivo?

5. a. Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2x + 8 = 0$. ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

c. Si $F(x) = x^2 - 2x + 8$ y G(x) = k, ¿para qué ***valores de k*** la intersección de los gráficos de F y de G es no vacía?

ANEXO G:

<u>SOLUCIONARIO Y ANALISIS DE LA EXPLORACIÓN FINAL</u>

1. Pedro necesita comprar un terreno rectangular cuya área sea por lo menos de 110 m^2 y no mayor a 130 m^2 y recibe como oferta un terreno rectangular cuyo largo excede en 2 metros a su ancho.

   Con esta información cree un problema y resuélvalo mostrando la relación entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática f. Especifique lo que representa su variable y su función f.

Se espera que se cree un problema nuevo por variación, donde el profesor evidencie cualquiera de las seis relaciones descritas.

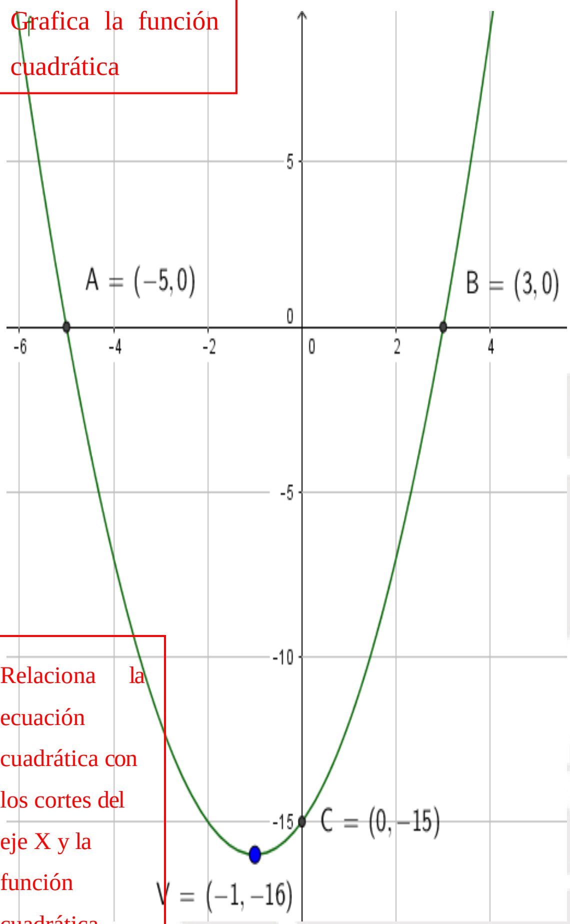
2. El perímetro de un terreno rectangular es 40 metros.

   Con esta información cree un problema y resuélvalo mostrando la relación entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática g. Especifique lo que representa su variable y su función g.

Se espera que se cree un problema nuevo por elaboración, donde el profesor evidencie cualquiera de las seis relaciones descritas.

3. ¿Qué ***relación*** encuentra entre el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$?

Grafica la función cuadrática



Relaciona la ecuación cuadrática con los cortes del eje X y la función cuadrática.

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática

Al resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 9$ se tiene $C.S. = \{-6; 4\}$

Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática

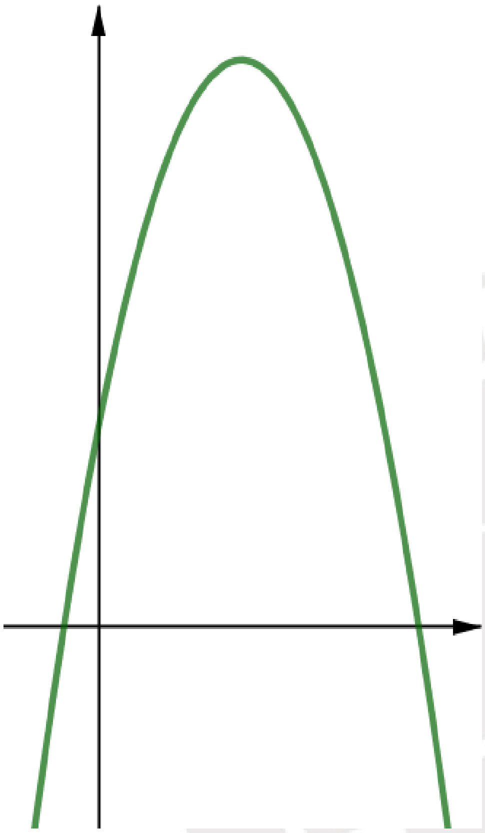
y el gráfico de f corta al eje X en $(-5; 0)$ y $(3; 0)$.

Identifica los valores del conjunto solución de la ecuación cuadrática con la intersección de los gráficos de con el eje X

Entonces se puede afirmar que los puntos de corte del gráfico de f con el eje X tienen como abcisas los elementos del conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.

En esta pregunta se les da una tarea, en donde se pide encontrar una relación entre el gráfico de una función cuadrática y la ecuación cuadrática, para ello se debe encontrar el conjunto solución de la ecuación cuadrática y también realizar el gráfico de la función cuadrática; para realizar el esbozo correcto del gráfico se debe identificar el vértice y dos puntos simétricos, una forma de hallar estos puntos simétricos es identificando los puntos de cortes de la función cuadrática con el eje X (también conocidos como ceros de la función), es así que se logra identificar una relación entre las ecuaciones y funciones cuadráticas, ya que encontrar los ceros de una función cuadrática implica resolver la ecuación cuadrática $f(x) = 0$, además los elementos del conjunto solución son las abscisas de los puntos de corte de la función cuadrática y el eje X.

4. El gráfico de la función cuadrática f, dada por $f(x) = \boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r}$ es como se muestra en la figura.



Considerando la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, responda:

> Relaciona los parámetros de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

i) ¿$\boldsymbol{p}$ puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

No, la función f representada por la parábola es cóncava hacia abajo, por lo tanto p es negativo.

ii) ¿$\boldsymbol{r}$ puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

No, del gráfico la ordenada del punto de corte con el eje Y es positivo. Por lo tanto r es positivo.

iii) ¿$\boldsymbol{q}$ puede tomar solamente valores positivos? ¿Por qué?

Si, del gráfico la abscisa del vértice de la parábola es positiva, entonces $h = \frac{-q}{2p} > 0$. Por lo tanto de i, q solo toma valores positivos

> Relaciona el número ceros de una función cuadrática con la discriminante de una ecuación cuadrática.

iv) ¿El discriminante de la ecuación $\boldsymbol{p}x^2 + \boldsymbol{q}x + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ puede ser positivo?

Si, el discriminante de la ecuación es positiva, pues la función f tiene dos puntos de cortes con el eje X.

Para esta pregunta, en los tres primeros ítems se espera vincular el gráfico de una función cuadrática, donde del gráfico de función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se identifica los posibles valores de los parámetros "a, b y c" y así relacionarlo con los parámetros de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

El valor del "a" está relacionado a la concavidad de la parábola, el valor de "b" se espera que lo analice con la forma vértice de la función cuadrática y para el valor de "c" lo encuentre con el punto de corte de la función cuadrática y el eje Y.

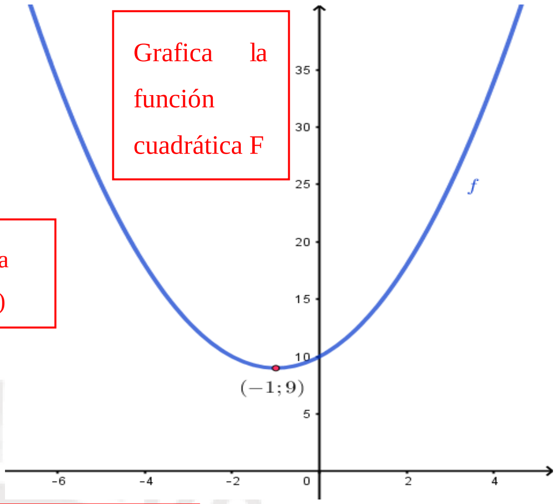
Para el último ítem, se espera que vinculen el número de ceros de la función cuadrática con el posible valor de la discriminante de la ecuación cuadrática, para este caso como solo existe un cero dada el gráfico de la función cuadrática se espera que se identifique que la discriminante tiene el valor de cero.

5. a. Determine el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2x + 8 = 0$. ***Haga una ilustración gráfica***, ***vinculándola con una función***.

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática

El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$ es vacío, pues $\Delta = -36 < 0$.

Grafica la función cuadrática F



Relaciona la ecuación cuadrática con la función cuadrática F (algebraicamente)

Dada la función $F(x) = x^2 + 2x + 10$ vinculada a la ecuación $x^2 + 2x + 10 = 0$, se observa que el gráfico que representa la función F no se interseca con el eje X.

Relaciona el número ceros de una función cuadrática con la discriminante de una ecuación cuadrática.

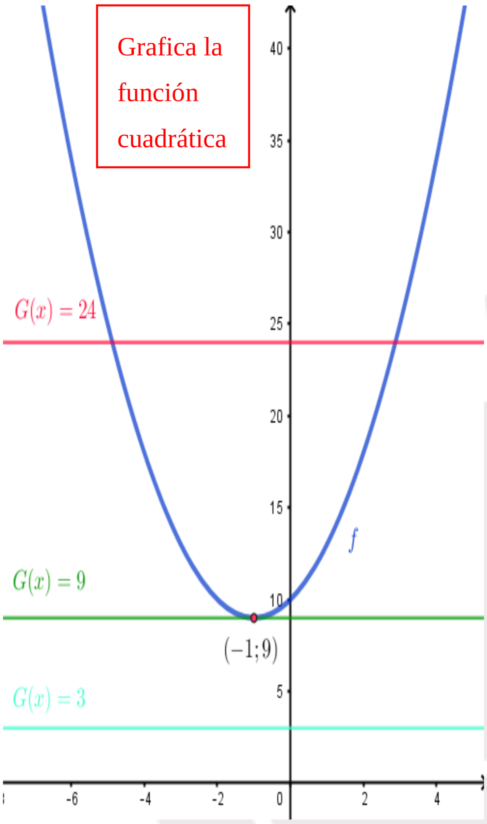
NOTA:

- También puede justificar que la ecuación no tiene solución, pues al completar cuadrados llega a la contradicción $(x + 1)^2 = -9$ o al usar la fórmula general obtiene soluciones complejas.

Para esta pregunta se solicita encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática, el cual es vacío y luego se espera que relacionen la ecuación cuadrática con una función cuadrática para realizar su gráfico. Además, se puede notar que el gráfico de la función cuadrática no tiene ningún cero.

También puede identificar una función cuadrática p dada la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ y una función constante q, tal que verifique $p(x) - q(x) = f(x)$ y logre visualizar que los gráficos de p y q no tienen puntos de intersección.

d. Si $F(x) = x^2 - 2x + 8$ y G(x) = k, ¿para qué ***valores de k*** la intersección de los gráficos de F y de G es no vacía?



Halla los puntos de intersección entre el gráfico de la función cuadrática con la recta horizontal $y = k$ usando una ecuación cuadrática

Si $F \cap G \neq \emptyset$

$\rightarrow x^2 + 2x + 10 = k \rightarrow x^2 + 2x + 10 - k = 0$

$\rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow 4 - 4(1)(10 - k) \geq 0 \rightarrow k \geq 9$

Del gráfico de $F(x) = (x + 1)^2 + 9$ con vértice $V(-1; 9)$, la interseccion es no vacía:

Si $k > 9$ las funciones F y G se intersecan en dos puntos: $(x_1; k)$ y $(x_2; k)$.

Si $k = 9$ las funciones F y G se intersecan en un punto: $(-1; 9)$.

Como una segunda tarea, es identificar los valores de k verifican que la intersección es no vacía, eso en la forma algebraica es equivalente a encontrar el conjunto solución, de una ecuación $f(x) = k$, que no sea vacío; pero basta justificar con el gráfico de la función cuadrática a partir de su vértice.

ANEXO H:

TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS

08-10-2017

Ficha de salida - recojo de información

Este cuestionario es parte de una investigación en curso, desarrollado en la Maestría de Enseñanza de la Matemática de la Pontifica Universidad Católica del Perú.

1. ¿Enseña las ecuaciones y funciones cuadráticas con problemas en los que se relacionan estos conceptos? SI ☐ NO ☐
   ¿Por qué? ____
   ____
2. ¿Cree que es importante enseñar las relaciones entre ecuaciones y funciones cuadráticas?
   ¿Por qué? ____
   ____
3. En una escala del 1 al 5, donde 5 es excelente:
   a) Califique su experiencia de creación de problemas sobre ecuaciones y funciones cuadráticas en este taller
      1 2 3 4 5
   b) Califique el aporte didáctico de la creación de problemas en la enseñanza de contenidos matemáticos
      1 2 3 4 5

5.

	Estrategia EPP	Estrategia SPP
¿Cuál de las estrategias le ayudó más a encontrar relaciones entre las ecuaciones y funciones cuadráticas?		
Justificación		

ANEXO I:

Datos resumen Ficha de recojo de información

Código	Información Profesional			Ha enseñado		En qué grado enseña		Creación de Problemas		
	Profesión	Egresado	Años de Servicio	Ecuaciones Cuadráticas	Funciones Cuadráticas	Ecuaciones Cuadráticas	Funciones Cuadráticas	Experiencia	Utiliza alguna estrategia	Considera que potencia el aprendizaje
P1	Docente	UNJFSC	5	si	si	**5°**	**5°**	no	-	Es más atractivo para los estudiantes
P2	Docente	UNJFSC	9	si	no	**-**	**-**	no	-	-
P3	Ing. Industrial	UNJFSC	28	si	si	**3° a 5°**	**3° a 5°**	no	-	-
P4	Matemática	UNMSM	8	si	si	**1° 2° Academia**	**5° Academia**	no	-	-
P5	Ingeniero civil (bachiller)	UNJFSC	4	si	si	**Academia**	**Academia**	si	Utilizando situaciones en la realidad y llevándolo así a problemas matemáticos	Ayudaría en la atención de nuestros estudiantes y no genera actitudes negativas
P6	Matemática Aplicada	UNJFSC	6	si	si	**1° a 5°**	**1° a 5°**	si	No precisa	Mejora el razonamiento
P7	Matemática Aplicada	UNJFSC	8	si	si	**1° a 5°**	**1° a 5°**	si	Estrategias didácticas de la matemática	Permite sobresalir las capacidades y habilidades del estudiante, ayuda a captar mejor lo que el docente enseña
P8	Matemática Aplicada	UNJFSC	8	si	no	**4° - 5°**	**-**	no	-	Desarrolla las competencias y capacidades del área de matemática
P9	Docente	UNJFSC	10	si	si	**3° a 5°**	**3° a 5°**	si	No precisa	Permite mejorar las habilidades del estudiante
P10	Docente	UNJFSC	8	si	no	**3°**	**4°**	si	Por modificación de datos	Permite establecer conexiones y potenciar las capacidades matemáticas