PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL POR MEDIO DEL TRÁNSITO POR LOS DISTINTOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

AUTOR

HERNAN NICOLAY CUPI CONDORI

ASESOR

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

Abril, 2018

RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo interpretar cómo el tránsito por los distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función exponencial en estudiantes de Ingeniería Ambiental de una universidad pública en Lima-Perú. Para dicho estudio, hemos revisado antecedentes de investigación que estén relacionadas con el estudio del objeto matemático función exponencial en el nivel superior. Así mismo, hemos justificado la realización de nuestra tesis en cuatro aspectos: importancia de la función exponencial en el currículo, importancia de la función exponencial para modelar situaciones en contextos reales, importancia de la función exponencial dentro de la estructura matemática y la importancia de la comprensión de la noción de función exponencial mediante el uso de diversas representaciones semióticas para contrarrestar algunas dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático. El marco teórico que hemos considerado es la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), la cual nos da herramientas para interpretar cómo se realiza la comprensión de la noción de función exponencial. En cuanto a la metodología utilizada para alcanzar los objetivos de nuestra investigación, siendo esta de naturaleza cualitativa experimental, hemos considerado a la Ingeniería Didáctica, cuyos lineamientos organizan la forma de nuestro trabajo. Para la experimentación hemos seleccionado a tres estudiantes, quienes participaron en una actividad conformada por siete preguntas elaboradas con la intención de que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos y la información que vayan obteniendo mientras realicen las actividades cognitivas de tratamiento y conversión cuando transiten por los registros de lengua natural, numérico, algebraico y gráfico. Finalmente concluimos que, los resultados de la experimentación nos han permitido interpretar, en base a algunos aspectos de la TRRS, cómo el tránsito por los distintos registros favorece la comprensión de la noción de función exponencial.

Palabras clave: Función exponencial; registros de representaciones semióticas, tratamientos y conversiones.

ABSTRACT

The objective of this research is to interpret how the transit through the different registers of semiotic representation favors the understanding of the notion of exponential function in students of Environmental Engineering of a public university in Lima-Peru. For this study, we have reviewed research backgrounds that are related to the study of the mathematical object exponential function at the higher level. Likewise, we have justified the realization of our thesis in four aspects: importance of the exponential function in the curriculum, importance of the exponential function to model situations in real contexts, importance of the exponential function within the mathematical structure and the importance of the understanding of the notion of exponential function by using various semiotic representations to counteract some difficulties in learning this mathematical object. The theoretical framework that we have considered is the Theory of Registries of Semiotic Representation (TRRS), which gives us tools to interpret how the understanding of the notion of exponential function is realized. Regarding the methodology used to achieve the objectives of our research, which is of an experimental qualitative nature, we have considered Didactic Engineering, whose guidelines organize the form of our work. For experimentation we have selected three students, who participated in an activity consisting of seven questions, designed with the intention that students mobilize their previous knowledge and the information they obtain while performing cognitive activities of treatment and conversion when they transit through the registers of natural, numeric, algebraic and graphic language. Finally, we conclude that the results of the experimentation have allowed us to interpret, based on some aspects of the TRRS, how the transit through the different registers favors the understanding of the notion of exponential function.

Keywords: Exponential function, registers of semiotic representations, treatments and conversions.

DEDICATORIA

A Dios, por la salud, el trabajo, guardar mi vida, acompañarme durante todo este tiempo y rodearme de gente maravillosa.

A mi madre, doña Carmen por todas sus atenciones, cuidados y sabios consejos.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Mg. Carolina Reaño, por su tiempo, valiosos consejos, oritentaciones, críticas constructivas y paciencia constante.

Al jurado, Dr. Uldarico Malaspina y Mg. Augusta Osorio por sus recomendaciones y aportes valiosos.

A los profesores, quienes compartieron sus conocimientos, experiencias profesionales y nos motivaron siempre a continuar en el camino de la investigación en aras del desarrollo personal, social y de la ciencia.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

El presente trabajo de investigación surgió por el interés de interpretar cómo se produce la comprensión de la noción de funciòn exponencial a través de los diferentes tipos de representaciones semióticas en estudiantes de ingeniería.

Para este estudio, consideramos la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999), la cual nos brindará las herramientas necesarias para explicar los resultados de la experimentación. En esa línea, asumimos como objetivo general: interpretar cómo el tránsito por los distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función exponencial en estudiantes de primer ciclo de ingeniería,

A continuación, resumimos los cuatro capítulos que estructuran la investigación:

En el capítulo I, presentamos el problema de investigación. En esta sección hemos revisado algunos antecedentes que tienen como objeto matemático a la función exponencial. Luego, planteamos cuatro aspectos importantes que justifican nuestro trabajo. Seguidamente presentamos el problema de la investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

En el capítulo II, realizamos un estudio sobre la evolución histórica del objeto matemático función exponencial y una revisión de nuestro objeto matemático en dos libros. Uno es el libro de Lages et al (2000), el cual está relacionado con la matemática formal, y el otro es el libro de Precálculo de Stewart, Redlin y Watson (2012), el cual está propuesto en el sílabo de la asignatura de Matemática Básica de la carrera de ingeniería.

En el capítulo III, consideramos el marco teórico que fundamenta nuestra investigación, en el cual se describe algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999). Asimismo, describimos algunos aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual estructurará la investigación.

El capítulo IV trata sobre la experimentación y análisis, en el cual se señala las características del escenario, la descripción de los sujetos de la investigación, la descripción de la actividad, el instrumento de recolección de la información y finalmente realizamos el análisis a priori y a posteriori de la actividad.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación que responde al objetivo general y los objetivos específicos; así también, se presentan las recomendaciones para futuros trabajos que se puedan realizar a partir de esta investigación.

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos los antecedentes del trabajo de investigación que están relacionados con el estudio del objeto matemático función exponencial, además justificamos la relevancia de nuestro trabajo y formulamos la pregunta del problema de investigación, determinamos el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 ANTECEDENTES

En el presente trabajo hacemos una revisión de aquellas investigaciones que aporten y enriquezcan nuestro estudio, y que contengan o se relacionen con nuestro objeto matemático función exponencial a fin de que den soporte científico a nuestro trabajo.

En ese sentido, el estudio realizado por Advíncula (2010), menciona que los estudiantes de las carreras de humanidades de Estudios Generales de Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, tienden a asociar la función exponencial con crecimiento, a su vez, este crecimiento lo relacionan con líneas rectas crecientes, además tienen dificultades en reconocer las características de crecimiento en los problemas planteados. También realiza una revisión de textos universitarios, observando que en ninguno de ellos se proponen actividades iniciales que le permita al estudiante construir el concepto de función exponencial, sin embargo, los autores incluyen aplicaciones en un contexto cercano a la realidad.

Por tal motivo, se propuso como objetivo, diseñar una situación didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para la enseñanza del concepto de función exponencial a fin que el estudiante sea participe en la construcción de la noción de función exponencial, para tal efecto, la metodología de investigación que empleó fue la Ingeniería Didáctica, además realiza algunas observaciones en base a algunos aspectos de la teoría de Duval.

Con respecto al análisis epistemológico que realizó Advíncula (2010), menciona una serie de dificultades epistemológicas ligadas a la noción de función y función exponencial. Una de ellas tiene que ver con la falta de elementos geométricos y visuales en las actividades matemáticas, las cuales constituyen una dificultad para transitar por los diferentes registros, textualmente la autora se basa en las palabras de Cantoral y Farfán (1999):

> En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes hemos constatado que en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces se suele manejar a la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones (p. 6).

Por lo expuesto anteriormente, Advíncula (2010) afirma que la actividad matemática requiere del uso de diversas representaciones para cada noción, estas representaciones pueden ser simbólicas o gráficas para expresar conceptos, procedimientos, características y propiedades.

En ese sentido, Duval (2004, p. 24) afirma que:

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas.

Otras dificultades que indica la autora y que, según De Faria (2006, p.6), están presentes en el proceso de construcción de la noción de función exponencial, son las siguientes dificultades:

- para elevar números a distintos exponentes, cada tipo de número que se maneje impondrá retos distintos y en ocasiones será difícil de interpretar el significado de la operación,
- para identificar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura, creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo continuo de su representación gráfica),
- para identificar la relación con la función logarítmica.

Asimismo, de la experimentación que realizó en el aula con los estudiantes, en donde aplicó la situación didáctica que diseño, los resultados le permitieron identificar los siguientes obstáculos en el sentido de Brousseau:

> la dificultad para determinar una expresión analítica para la función exponencial, la dificultad para graficar funciones exponenciales a partir de una expresión analítica o dentro de su dominio correspondiente y la dificultad para pasar de una representación a otra sea gráfica, analítica o tabular (Advíncula 2010, p. 172).

Otro resultado del trabajo de Advíncula (2010) que nos parece importante señalar, es que el uso de la progresión geométrica como estrategia de solución de los problemas propuestos, favoreció la construcción del concepto función exponencial. Finalmente, la investigadora recomienda utilizar el material que ha elaborado y modificado, o al menos tomarlo como referencia para futuras investigaciones.

En esa línea, Alvarez (2017) realiza una investigación teniendo como objetivo potenciar la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas desde los registros de representación semiótica con la asistencia de herramientas virtuales de aprendizaje para estudiantes del primer ciclo de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira. Los referentes teóricos en los cuales basa su investigación son la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), y la metodología que considera para orientar su trabajo es la Ingeniería Didáctica.

En su investigación, Alvarez (2017) elabora una prueba de diagnóstico que le permitió explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre la función exponencial y logarítmica. El análisis de la prueba le permitió afirmar que los estudiantes tienen dificultades para elevar números a distintos exponentes e interpretar el significado de sus operaciones, dificultades para reconocer en qué casos es creciente o decreciente la función exponencial, dificultades para reconocer las propiedades relacionadas con este objeto matemático, dificultades para relacionar la función exponencial con la logarítmica, dificultades para interpretar datos y gráficos, dificultades en la comprensión de situaciones problemas.

En las conclusiones, Alvarez (2017) menciona que de todas las actividades realizadas por los estudiantes, se evidencia mayor dificultad en aquella donde el estudiante tiene que transitar del registro numérico al algebraico. Además, el investigador considera que, según el análisis de los resultados obtenidos en la fase de experimentación, el registro más enriquecedor para la comprensión de un concepto es el registro gráfico.

Por su parte, Vargas (2012) realiza una investigación sobre la enseñanza de las funciones exponenciales en un curso de precálculo, para lo cual considera el marco teórico expuesto por Dubinsky, Action Process Object Schema (APOS) y el marco sociocultural de Gavilán.

En esta investigación podemos observar una propuesta de una descomposición genética de la función exponencial. Al respecto, Asiala (citado por Vargas, 2012) afirma que la descomposición genética es: un conjunto estructurado de construcciones mentales, las cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo (p. 36). De ese modo, la descomposición genética propuesta por la investigadora es un modelo para describir de qué forma el estudiante construye el concepto función exponencial. Cabe acotar que, según Dubisky (1991), esta descomposición genética no tiene que ser válida para todos los estudiantes, pero es razonable considerarla porque nos orienta en cómo el estudiante construye un concepto.

Como antesala a la descomposición genética de la función exponencial, Vargas (2012) realiza una revisión de las investigaciones de Elstak (2007), Weber (2002a, 2002b), Martinez (2000, 2003), Lezama (1999, 2003), Díaz (2006). Confrey y Smith (1995), Lage y Trigueros (2006), Hernández y Arrieta (2005), y Bradie (1998), que le sirvieron como aportes para la construcción de la descomposición genética; estos documentos los ha dividido en tres temas de investigación que lo acercan a la comprensión del concepto función exponencial. El primer tema aborda la comprensión del concepto de exponente, el segundo centra su atención en la necesidad del manejo, por parte del estudiante, de la noción de covariación relacionada a la noción de función, el tercero trata sobre propuestas para la enseñanza de la función exponencial, todos estos aportes se resumen en el cuadro 1.

Temas de investigación	**Inferencias sobre la Comprensión de los estudiantes. Función Exponencial**	**Autores**
Exponentes y potencias.	Los estudiantes poseen diferentes definiciones de exponentes según estos sean números naturales, enteros, racionales o reales y deben llegar a vincular las diversas definiciones de exponentes naturales, enteros, racionales.	Elstak (2007).
	Las leyes de los exponentes son únicamente uno de los apoyos para construir una comprensión de los exponentes negativos, racionales o cero.	Elstak (2007). Weber (2002a). Martinez (2000).
	La imagen más poderosa, del significado de exponente, es la multiplicación reiterada, aun cuando los estudiantes incurren en errores al usarla.	Lezama (1999). Díaz (2006).
	El concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de estudiantes, pero los exponentes fraccionarios tienen significado para un número reducido estudiantes.	Martínez (2000).
	Las estrategias para establecer los valores de la expresión a^x según los valores del exponente son: persistencia de operaciones simples	

	(recurrir a suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente); persistencia del modelo de multiplicación reiterada; ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas; evolución hacia respuestas correctas; el cero como representación de la nada; deslizamiento de la memoria (aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos). Los estudiantes necesitan adquirir la noción de exponente no natural para la construcción de la noción de función exponencial, al menos en el sentido de Dirichlet-Bourbaki. El conocimiento de las convenciones matemáticas relativas a los exponentes no naturales no necesariamente lleva a los estudiantes a concebir la expresión a^x como una operación entre *a* y *x*. Las convenciones matemáticas para los exponentes pueden ser formuladas a través de observar patrones algebraicos y después observar que son consistentes con una operatividad anterior. Se espera que los estudiantes puedan reconocer un significado de los exponentes numéricos racionales positivos, negativos e irracionales. Los estudiantes deben expresar argumentos formales para establecer el significado de una potencia con base real positiva y exponente numérico irracional	Lezama (1999, 2003). Martínez (2000, 2003). Martínez (2000, 2003). Díaz (2006).
Covariación, Dominio y rango	La operación “dividir” surge de manera natural en las mentes de los niños como una forma de estructuración de ciertos problemas y situaciones tales como ampliación, similitud, reducir a la mitad y duplicación. Esta operación es independiente del recuento y el mundo aditivo. Existe un enfoque diferente al de correspondencia para comprender las funciones y es el de covariación, entendido como la yuxtaposición de dos secuencias cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores de datos. Los estudiantes construyen la imagen de una función como la coordinación entre dos columnas y la subsiguiente interpolación para poder insertar valores entre datos previamente establecidos. La función exponencial se puede definir a partir de la yuxtaposición establecida por Napier entre los mundos aditivo (contar) y el multiplicativo (dividir), que en un sentido más formal, constituye un isomorfismo entre dichos mundos. Una aproximación de covariación, de la función, implica la construcción del dominio como una estructura matemática ordenada y la de un rango, a partir de la relación establecida entre los datos. La comprensión del dominio de una función dada, involucra el estudio de la expresión simbólica de la función o bien su gráfica e identificar para qué valores la función no está definida, es decir,	Confrey y Smith (1995). Confrey y Smith (1995). Lage y Trigueros, (2006)

	cuando no se puede sustituir en la expresión un determinado valor o no se puede representar un punto sobre el gráfico. Desde el punto de vista algebraico, para que los estudiantes identifiquen el rango de una función necesitan aplicar la regla de dicha función a cada punto del dominio, e interiorizar esas acciones en un proceso para poder construir todo el conjunto de valores que constituyen ese rango. Desde el punto de vista gráfico, el estudiante necesita reconocer qué puntos del eje y se corresponden con puntos de la gráfica, primero individualmente para cada valor del dominio y, posteriormente, interiorizando todo el conjunto de valores que corresponde a la proyección de la curva sobre el eje y.	
Función Exponencial y Aplicaciones.	La mayoría de los estudiantes entiende la exponenciación como acción, y es indispensable una comprensión objeto. Los estudiantes son capaces de determinar que una función exponencial particular es decreciente y algunos también explican por qué lo es. Existen estudiantes que aunque no recuerdan las leyes de los exponentes, son capaces de reconstruirlas a partir de su comprensión del concepto. El estudiante comprende la función exponencial cuando puede generalizar su conocimiento de x^b como el número que es "el producto de x factores de b" lo cual revierte en una mayor comprensión de las propiedades de los exponentes. Por definición común de los exponentes se entiende: el exponente representa el número de factores de una misma unidad o de una misma base multiplicada por si misma. A través de la comprensión de una función exponencial particular se puede inducir en los estudiantes la generalización de las regularidades observadas para 2^x y extenderla a otras bases distintas de dos. Los estudiantes pueden entender que el modelo de crecimiento de una función exponencial no es lineal y aditivo. La enseñanza de la función exponencial puede partir de la toma de datos en una situación real y luego proceder a la construcción del modelo numérico (tabla de datos), y planteamiento de conjeturas al analizar las características de la tabla de datos. A partir de predicciones construir un modelo gráfico como una nube de puntos y, poder argumentar acerca de las conjeturas realizadas.	Weber (2002a). Weber (2002a, 2002b). Weber (2002b). Weber (2002a, 2002b). Elstak (2007). Elstak (2007). Lezama (1999). Lezama (1999) Hernández y Arrieta (2005) Bradie (1998).

	La habilidad de los estudiantes para reconocer el uso de las funciones exponenciales está asociada a la comprensión de esta función a través de su tasa de cambio proporcional al valor de la función. La tasa de cambio de una función exponencial puede ser enseñada acudiendo a herramientas tecnológicas, sin ser necesario que los estudiantes posean conocimientos del concepto de derivada.	

Cuadro 1: Investigaciones acerca de la comprensión de la función exponencial.
Fuente: Vargas (2012, pp. 68-70)

Estas investigaciones junto al desarrollo epistemológico de la función exponencial y a los conocimientos que poseen como profesores-investigadores, le permitieron, según Vargas (2012), construir la propuesta de descomposición genética. Al respecto, la autora considera que este modelo se establece a partir de una serie de elementos matemáticos y un sistema de representaciones del objeto función exponencial.

Con respecto a las representaciones, Vargas (2012, p. 72) menciona:

> Se ha de tener en cuenta además el papel de los diferentes sistemas de representación para que los estudiantes construyan una adecuada imagen del concepto que conduzca a su comprensión. (…).
>
> De esta forma, describimos cada uno de los mecanismos de construcción en dos registros de representación: el simbólico y el gráfico. Consideramos los aspectos aritméticos, algebraicos y analíticos dentro de lo simbólico y los geométricos y las representaciones en el plano cartesiano como el registro gráfico.

Vargas (2012) clasifica los elementos matemáticos en dos grupos, uno global y otro puntual. El grupo global hace referencia a las funciones exponenciales particulares [por ejemplo $f(x) = 2^x$; $f(x) = 10^{-x}$], funciones exponenciales genéricas [por ejemplo $f(x) = b^x$] y la generalización de la función exponencial [por ejemplo $f(x) = kb^{tx+s}$]. El grupo puntual está relacionado al concepto de exponente, dominio y rango, la estructura aditiva de los exponentes y multiplicativa de las potencias, monotonía y asíntota, etc.

Sobre las conclusiones de la descomposición genética de la función exponencial respecto al uso de los registros de representación, Vargas (2012) menciona que uno de los participantes de su estudio procura integrar los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos de este concepto. Además, la idea de identificar la función exponencial como aquella cuya variable está en el exponente provoca cierta dependencia a la representación simbólica.

Entre las sugerencias para futuras investigaciones, Vargas (2012, p.274) menciona:

- Investigaciones encaminadas a estudiar el conocimiento que tiene el profesor del estudiante de precálculo; sus concepciones, creencias, errores y dificultades a partir de preguntas específicas sobre la comprensión de la función exponencial, explicarlas y cómo se pueden utilizar para corregir las respuestas inapropiadas de estos.
- Estudios que enriquezcan la propuesta de descomposición genética de la función exponencial.

Por su parte, Castro, González, Flores, Ramírez, Cruz y Fuentes (2017) expresan que la matemática forma una parte fundamental de nuestra vida y que el paso por el sistema educativo tiene como objetivo obtener un entendimiento cada vez más detallado de ella, en dirección de lo particular a lo complejo. En esa dirección, uno de los conceptos más relevantes de la etapa escolar, y posteriormente de los estudios superiores, es el concepto de función. Al respecto, Castro et al (2017), Farfán y García (2005), Prada, Hernández y Ramírez (2016), coinciden en que las funciones resultan fundamentales para el estudio de las matemáticas en cualquier nivel educativo, sobre todo en los estudios superiores. Por esta razón, ha sido y es foco de atención de copiosas investigaciones puesto que alrededor de su estudio giran una serie de dificultades que obstaculizan su compresión. Según Castro et al (2017), desde el punto de vista de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS), ha habido esfuerzos por superar estas dificultades, sin embargo resultan aún insuficientes para que el estudiante tenga un entendimiento cabal de este concepto.

En el caso de la función exponencial, Castro et al (2017) señala que uno de los obstáculos para su comprensión en secundaria es la didáctica empleada en el proceso de aprendizaje, en este nivel trabajan con diversas representaciones y situaciones en un contexto real en el que se emplean modelos matemáticos, a pesar de ello, resulta extraño que algunos estudiantes, al llegar al nivel superior, no muestran evidencias de haber alcanzado un aprendizaje significativo.

Por tal razón, los investigadores se propusieron como objetivo explorar los efectos cognitivos de los diversos cambios de registros de representación de este objeto matemático en los estudiantes de ingeniería de la asignatura de Cálculo Diferencial en el Instituto Tecnológico de Ciudad de Juárez.

Ante esta situación, Duval (1999, p. 15) afirma:

> En las observaciones que se han podido hacer en el aprendizaje de las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos en los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible.

El marco teórico que emplearon fue la TRRS, su grupo de estudio lo dividieron en dos, uno experimental y uno de control. Para el análisis de los resultados de la experimentación, Castro et al (2017) indican que se utilizaron por un lado, el factor o ganancia normalizada de Hake (1997), que es un indicador o coeficiente que permite medir el progreso de un estudiante luego de un proceso de enseñanza-aprendizaje, y por otro lado, los 5 niveles de comprensión de un concepto propuesto por Hitt (1998). En el cuadro 2 se muestran los niveles de comprensión de Hitt, en cuyo diseño se consideró el uso de los diversos registros de representación, identificación, conversión y coordinación realizados por un estudiante al resolver los problemas planteados.

Niveles de comprensión	Características observadas en procedimientos de estudiantes.
Nivel 1	Uso incoherente de diferentes representaciones del concepto después de someterse a un proceso de aprendizaje.
Nivel 2	Identificación de las diferentes representaciones de un concepto.
Nivel 3	Transformación, con la preservación del significado, de un sistema de representación a otro.
Nivel 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
Nivel 5	Articulación coherente de los diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

Cuadro 2: Niveles de comprensión de Hitt.
Fuente: Castro et al (2017, p. 12), elaborada en base a Hitt (1998).

Las conclusiones derivadas de la investigación de Castro et al (2017), se indica que este tipo de enseñanza, enfocada en privilegiar los cambios de representación semiótica, promueve que los estudiantes mejoren su posición en los niveles de comprensión del concepto función exponencial. Asimismo, sugieren que es necesario que la comunidad conozca y adopte los modelos diseñados por investigadores en el área de la Matemática Educativa.

En palabras de Castro et al (2017, pp. 16, 17)

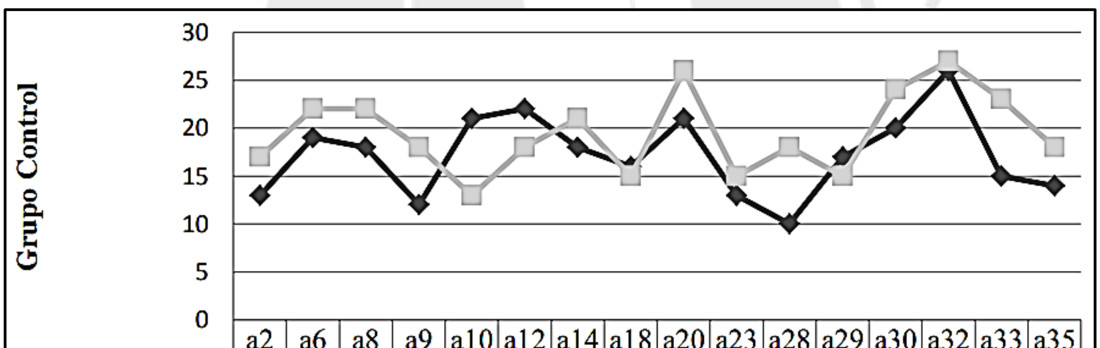
> Encontramos que 50% de los estudiantes expuestos a un proceso de aprendizaje con base en el uso de conversiones entre diversos registros de representación semiótica, apenas logró utilizar e identificar representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la función exponencial. Otro 25% de estos estudiantes alcanzaron una transformación, preservando el significado, entre las diferentes representaciones de la función exponencial. El restante 25% de los estudiantes lograron la articulación coherente entre los diferentes sistemas de representación, y fueron capaces de aplicarlos en la solución de un problema. En contraste, más de 80% de los estudiantes del grupo control, bajo un esquema de instrucción tradicional, se localizaron en los niveles 1 y 2 de acuerdo a la clasificación de Hitt. El resto del grupo apenas logró la transformación entre los sistemas de representación, sin pérdida del significado, esto es, sólo llegaron al nivel 3 de entendimiento de Hitt.

Por otro lado, en el libro, Entendimiento del concepto de función exponencial. Castro, González y Ramírez (2016), mencionan que la introducción del concepto de función exponencial que se les brinda a los estudiantes tiene sus inicios en el segundo año de secundaria de educación básica con la resolución ejercicios referidos a lo que en nuestro país lo conocemos como teoría de exponentes. En los años siguientes se presenta a la función exponencial en diversos problemas relacionados con porcentaje, cálculo de interés compuesto y crecimiento poblacional. Posteriormente se estudia la función exponencial aceptando su existencia y siendo válidas sus propiedades, además se hace un estudio del significado del crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función exponencial. Para el trazado de gráficas, los estudiantes hacen uso de la calculadora, los datos obtenidos los trasladan a una tabla de dos columnas, los datos de cada fila los consideran como pares ordenados por donde se traza la gráfica de la función en el plano cartesiano. En el nivel superior vuelve a estudiar este concepto en el curso de Cálculo Diferencial, su desarrollo comienza con la presentación formal de este objeto en el registro algebraico para luego dar paso al estudio de las características relacionadas con su dominio, rango y representación gráfica, además se utilizan transformaciones de funciones para trazar gráficas de funciones exponenciales generalizadas.

En el libro se describe el diseño, la implementación y los resultados de la aplicación de una secuencia didáctica basada en la TRSS a dos grupos de estudiantes del curso de Cálculo Diferencial de la carrera de ingeniería del Instituto Tecnológico de la Ciudad de Juárez, México. Uno de los grupos es el experimental, a quienes se les enseño el tema de función exponencial resolviendo problemas de manera que pudieran realizar la conversión del registro algebraico al tabular y del tabular al gráfico, y viceversa (del registro gráfico al tabular y del tabular al algebraico). El otro grupo es el de control, quienes recibieron una enseñanza basada en resolver problemas en donde necesariamente se debe de transitar por el registro algebraico, tabular y gráfico en ese orden y sentido. Ambos grupos rindieron dos pruebas, una de entrada y otra de salida. El porcentaje de éxito, basado en la ganancia normalizada de Hake (1997), fue mayor en el grupo experimental que en el de control.

En ese sentido, las respuestas correctas de la prueba de entrada dadas por los estudiantes del grupo de control fue de 55% con respecto al total y aumentó a 63% en la prueba de salida, mientras que su contraparte aumentó de 66% a 86%.

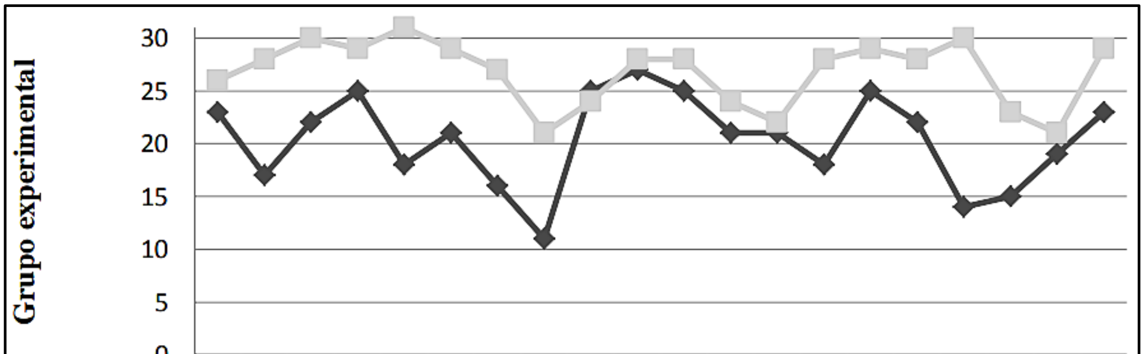
Por ejemplo, en la figura 1 se muestra el número de aciertos de los 31 ítems propuestos en las evaluaciones de entrada y salida para el grupo control. Ahí se observa que el estudiante "a2" ubicado en el eje horizontal, obtuvo 13 aciertos en el examen de entrada (en la gráfica se representa con un punto color gris oscuro) y 17 en el de salida (en la gráfica se representa con un punto color gris claro).



	a2	a6	a8	a9	a10	a12	a14	a18	a20	a23	a28	a29	a30	a32	a33	a35
Ac. Entrada	13	19	18	12	21	22	18	16	21	13	10	17	20	26	15	14
Ac. Salida	17	22	22	18	13	18	21	15	26	15	18	15	24	27	23	18

Figura 1: Aciertos de cada estudiante del grupo control en las evaluaciones de entrada y salida.
Fuente: Castro, González y Ramírez (2016, p. 73)

En la figura 2 también se muestra el número de aciertos de los 31 ítems propuestos en las evaluaciones de entrada y salida para el grupo experimental. Ahí se observa que el estudiante "A1" ubicado en el eje horizontal, respondió correctamente 21 ítems del examen de entrada (en la gráfica se representa con un punto color gris oscuro) y 26 del examen de salida (en la gráfica se representa con un punto color gris claro).



	A1	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A10	A11	A12	A13	A14	A16	A17	A18	A19	A20	A22	A23	A25
Ac.Entrada	23	17	22	25	18	21	16	11	25	27	25	21	21	18	25	22	14	15	19	23
Ac. Salida	26	28	30	29	31	29	27	21	24	28	28	24	22	28	29	28	30	23	21	29

Figura 2: Aciertos de cada estudiante del grupo experimental en las evaluaciones de entrada y salida.
Fuente: Castro, González y Ramírez (2016, p. 73)

Los investigadores mencionan que los estudiantes del grupo experimental tienen un mejor manejo de los registros de representación, los tratamientos y las conversiones que los del grupo control. Según los autores, parece ser que la enseñanza basada en el uso de distintos registros representación semiótica y las conversiones, tuvo mayor impacto en el grupo experimental debido a que adicionalmente a la utilización de los 4 registros y las conversiones clásicas, se trabajó también con las unidades significantes de cada registro para que el estudiante pueda realizar las conversiones inversas de las conversiones clásicas.

A fin de que la investigación continúe en futuros trabajos, los investigadores recomiendan:

> Incorporar a la evaluación de entrada y salida problemas de aplicación en los que intervengan la función exponencial, (…). El objetivo es determinar si existe una correlación entre estudiantes que muestran evidencias de articular diferentes registros de representación y la transferencia de conocimientos. Promover el uso de diferentes registros de representación así como conversiones en el que se utilicen distintos registros de representación. Castro, González y Ramírez (2016, p. 167)

Los investigadores también afirman que los resultados obtenidos al clasificar a los alumnos en alguno de los niveles de comprensión de Hitt (1998), muestran que el 15% de los alumnos del grupo experimental realizan el cambio de registro en ambos sentidos. En esa línea, también afirman que para el 25% y 19% del grupo experimental y de control respectivamente, las enseñanzas recibidas permitieron reforzar las conversiones entre los registros algebraico, tabular y gráfico. Sin embargo, el 30% del grupo experimental y el 70 % del grupo de control muestran inconsistencias al realizar las conversiones, no reconocen a la función exponencial en los distintos registros y no pudieron deducir la regla de correspondencia para la conversión del registro tabular y verbal al registro algebraico. Los profesores investigadores consideran que una enseñanza que promueva la coordinación entre los diferentes registros de representación puede influir satisfactoriamente en la aprehensión conceptual de la función exponencial.

Por su parte, Villaseñor (2011) diseñó una secuencia de actividades didácticas para fomentar la aprehensión conceptual de las funciones exponenciales y logarítmicas de base e mediante la conversión de un registro a otro. El fundamento teórico que le ha permitido formular y describir su propuesta, además de evaluar los resultados, es la TRRS. Parafraseando a Duval (1998), el autor menciona que:

> En la actividad matemática, la coordinación de varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos; estas conversiones entre registros de representación semiótica es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas. (Villaseñor, 2011, p. 9)

Los elementos de la metodología que empleó son: el diseño de la secuencia didáctica, la implementación de las actividades al grupo de estudiantes universitarios matriculados en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I del Área de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora y finalmente el análisis de los resultados.

Con referencia a las conclusiones, en las actividades propuestas se fomentan las conversiones entre los diversos registros de representación. El autor pone énfasis en problemas donde ser requiera la conversión del registro numérico al registro algebraico y la conversión del registro gráfico al algebraico, esto debido a que en el ejercicio profesional de las matemáticas o en las matemáticas aplicadas, la información dada frecuentemente en los problemas a tratar son enunciados en el registro numérico o gráfico. El investigador también menciona que estas actividades le permitieron al estudiante explorar las características de la función exponencial. Cabe señalar que el investigador detecto que algunos problemas requieren ciertos cambios para mejorarlas y sugiere que para posteriores investigaciones, donde se deseen considerar estas actividades, tendrían que modificarse, adaptarse o reorganizarse la secuencia didáctica, así como también diseñar e incluir un cuestionario de entrevista, ya que nos daría una mejor interpretación de los resultados obtenidos.

Al igual que Villaseñor, Ortega (2007) proponen una secuencia didáctica para el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas mediante el uso de los distintos registros de representaciones semióticas con el objetivo de describir las dificultades y evaluar los efectos que produce el empleo de estos registros por parte de los estudiantes de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Nayarit, México. La investigadora considera como marco teórico los aportes de Jean Piaget, Vigotsky y Duval, y la metodología empleada es la cuantitativa.

De los resultados obtenidos, Ortega (2007) manifiesta que las actividades propuestas para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas con el uso de diferentes registros de representación semiótica fueron muy importantes porque favorecieron el aprendizaje de estos conceptos, esto podría deberse a dos razones: “que permite a los alumnos se formen una imagen conceptual, pudiendo escoger la representación más adecuada para cada problema y que compensa las limitaciones de unas representaciones con otras”. (p. 43). La autora señala que el registro gráfico modifica y favorece los procesos observación y deducción de los estudiantes, esto refuerza la comprensión de los estudiantes puesto que ellos están más familiarizados con el tratamiento en el registro algebraico, lo cual muchas veces implica realizar actividades meramente mecánicas.

En las investigaciones de Advíncula (2010), Álvarez (2017), Vargas (2012) y Castro et al (2017) se mencionan que los estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto de función exponencial, Castro, González y Ramírez (2016) afirman que las posibles causas de tales dificultades radican en la metodología de enseñanza del docente, la cual no permite al estudiante construir la noción de este concepto. Ante esta situación, se propusieron diseñar una secuencia de actividades que favorezca la habilidad para cambiar de registros, identificar qué registros y conversiones son más utilizados por los estudiantes debido a su viabilidad, señalar si es posible la conversión inversa, determinar el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes.

Hemos elegido las investigaciones de Advíncula (2010), Álvarez (2017), Vargas (2012), Castro et al (2017), Castro, González y Ramírez (2016), Villaseñor(2011) y Ortega (2007) por la relevancia que le dan al uso registros de representaciones semióticas en el proceso de enseñanza – aprendizaje del función exponencial; por el diseño de las actividades propuestas, las cuales consideraremos como referencia cuando diseñemos nuestras situaciones que permitan a los estudiantes la posibilidad de construir la noción de función exponencial al transitar por los diferentes registros de representación (cabe anotar que las actividades planteadas por los investigadores antes mencionados tienen una gran aplicación en el campo de la biología, física, química, economía, etc., pues muestran modelos matemáticos referidos a la propagación de virus, enfriamiento de sustancias, decrecimiento radioactivo, interés compuesto, etc.), por las pautas y consideraciones que realizan antes de elaborar las actividades, por ejemplo, algunos investigadores elaboran y toman una prueba de diagnóstico o una prueba de entrada para darse una idea de los conocimientos previos con que cuentan los estudiantes, de las dificultades al interpretar un enunciado, de las dificultades en el tratamientos y la movilización de un registro a otro; y finalmente por el análisis que realizan todos excepto Advíncula (2010) y Vargas (2012) en base a la TRRS de los resultados obtenidos luego de la experimentación con los estudiantes, análisis que nos dan pautas de cómo llevar acabo nuestro análisis a posteriori.

1.1 JUSTIFICACIÓN

En el presente apartado mostramos las razones de la relevancia de nuestro trabajo de investigación.

1.2.1 Importancia de la función exponencial en el currículo.

En este apartado abordaremos el tema del currículo universitario, al respecto, Moreno (2011) menciona que existen muchos factores que obligan a las instituciones de educación superior a modificar sus modelos de formación, por ejemplo, la evolución de la ciencia y la tecnología. En los países desarrollados se ha iniciado, desde hace algunos años, una serie de reforma educativa a través de amplios proyectos que busca afrontar las exigencias de la sociedad contemporánea, es así que la tendencia actual del currículo es que sea flexible y diversificado, lo cual pone en aprietos al profesorado ya que tiene que enfrentarse a un currículo variable donde la innovación se tiene que mantener a través del tiempo. A pesar de los esfuerzos, según menciona Saxe y Braddy (2015), en el año 2012, The President's Council of Advisors on Science and Technology's (El Consejo Presidencial de Asesores en Ciencia y Tecnología) reportó que los estudiantes de pregrado se sentían insatisfechos con la enseñanza de las matemáticas que habían recibido, y en el 2013, The National Research Council's (El Consejo Nacional de Investigación) solicitó que la enseñanza de las matemáticas se alineen a otras áreas del conocimiento, a fin de realizar un cambio constructivo de la educación matemática. En esa línea, en Saxe y Braddy (2015) se menciona: "creemos que la educación post-secundaria debe permitir a cualquier estudiante, independientemente de su programa de estudio elegido, desarrollar los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para el compromiso productivo en la sociedad y en el lugar de trabajo". (p. v)

A continuación, mostramos algunos detalles importantes del informe elaborado por Saxe y Braddy (2015), dicho informe es sobre el proyecto Common Vision, el cual reunió a cinco asociaciones profesionales de los Estados Unidos: la American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC), la American Mathematical Society (AMS), la American Statistical Association (ASA), la Mathematical Association of America (MAA) y la Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). El proyecto tuvo como objetivo revisar los planes de estudio de pregrado y modernizar los programas educativos de matemáticas. El grupo de trabajo inició sus labores revisando meticulosamente las guías curriculares de cada una de estas cinco instituciones para poder encontrar temas comunes. El informe revela que las guías tienen ciertas deficiencias y los expertos las catalogaron como inaceptables. En consecuencia, el grupo de trabajo decidió centrar su atención en áreas específicas de las guías curriculares que requieren acciones significativas para generar cambios importantes, a dichas áreas las ubicaron en cuatro categorías: currículo, estructura del curso, preparación de la fuerza de trabajo y desarrollo de la facultad. Este es un primer paso, pero el cambio verdadero requiere la participación de profesores, empleados, administradores, asociaciones profesionales e instituciones que apoyen económicamente.

A continuación presentamos el cuadro 3 con las categorías y algunas recomendaciones realizadas por el grupo de trabajo que revisó las guías curriculares de las cinco asociaciones antes mencionadas.

Categorías	**Recomendaciones**
Currículo.	Presentar ideas y conceptos claves desde una variedad de puntos de vista, emplear una diversidad de ejemplos y aplicaciones para motivar e ilustrar el material, promover las conexiones con otros temas e introducir asuntos contemporáneos, planificar intencionadamente los programas de estudios para: Aumentar las habilidades de razonamiento lógico matemático de los estudiantes. Mejorar la capacidad de los estudiantes para comunicar ideas cuantitativas oralmente y por escrito, esto es, mejorar la capacidad de los estudiantes para interpretar la información, organizar el material y reflexionar sobre los resultados.
Estructura del curso.	Alejarse del uso de la clase magistral tradicional. Confiar en la viabilidad de los proyectos, ejercicios de laboratorio, problemas de grupo y actividades de discusión. Usar la tecnología como un medio de aprendizaje para fortalecer las habilidades de resolución de problemas empleando múltiples estrategias (gráficas, numéricas, algebraicas) en el proceso.
Preparación de la fuerza de trabajo.	Establecer comités de asesores que incluyan representantes de negocios, la industria y el gobierno para participar regularmente en conversaciones sobre las expectativas de los posibles empleadores. Los egresados deben lograr las competencias necesarias para un buen rendimiento en el campo laboral. Los estudiantes deben tener la oportunidad de mejorar sus habilidades de hablar y escribir, trabajar con datos, participar en una investigación abierta y trabajar en equipo.
Desarrollo y apoyo de profesores.	La formación continua y el apoyo son necesarios en todas las áreas de las matemáticas. Se necesitan profesores para adaptar los currículos a los nuevos cambios contemporáneos, desarrollar nuevos cursos, incorporar herramientas pedagógicas y utilizar la tecnología de manera efectiva, por lo tanto, los miembros de la facultad requieren capacitación, recursos y recompensas por sus esfuerzos.

Cuadro 3: Categorías y recomendaciones sobre las guías curriculares.
Fuente: Saxe y Braddy (2015)

Además de los temas antes mencionados, Saxe y Braddy (2015) nos muestran que hay otras áreas que merecen especial atención, como por ejemplo el Cálculo. Al respecto, el informe menciona que existe una considerable cantidad de estudiantes que están inadecuadamente preparados para enfrentar este curso, por tanto, es necesario rediseñar los planes de estudio desde el colegio.

Un curso que sienta las bases para posteriores cursos como pre-cálculo, estadística, cálculo para negocios, matemáticas finitas, etc., es el curso de Álgebra. Al respecto, el curso College Algebra brinda a los estudiantes una experiencia académica de nivel superior, enfatizando su enseñanza en el uso del álgebra y de las funciones en la resolución de problemas y modelado. Algunas recomendaciones relacionadas con los objetivos del curso fueron: Involucrar a los estudiantes en una experiencia matemática significativa y positiva; fortalecer las habilidades algebraicas, necesarias en el estudio de otras disciplinas; mejorar la capacidad para comunicar claramente las ideas matemáticas en forma oral y escrita. Similarmente, algunas recomendaciones relacionadas con las metas para los estudiantes fueron: Comprender los conceptos de función y tasa de cambio; utilizar eficazmente múltiples representaciones (simbólicas, numéricas, gráficas y verbales) para explorar funciones elementales; investigar funciones lineales, exponenciales, de potencia, polinómicas, logarítmicas y periódicas, según corresponda; reconocer y utilizar transformaciones estándar tales como traslaciones y dilataciones con gráficos de funciones elementales; También se recomienda traducir las palabras en fórmulas y ecuaciones apropiadas y realizar representaciones gráficas.

Como observamos, los expertos aconsejan tener una buena formación en cursos como álgebra o precálculo, los cuales anteceden al cálculo. Desde ese punto de vista, el estudio de las funciones y las funciones exponenciales tienen gran relevancia en los currículos internacionales. En este contexto, la National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000) recomendó la inclusión en el currículo de matemática de bachillerato, temas relacionados con el estudio de la función exponencial en contextos reales; las características del comportamiento de este tipo de función, por ejemplo, el crecimiento y decaimiento exponencial son fenómenos que los podemos encontrar en la naturaleza y que demandan su estudio por parte de las ciencias puras y aplicadas; el concepto de razón de cambio proporcional al valor de la función.

En esa dirección, la NTCM (2002) menciona que:

> El currículo de matemáticas debería incluir una continuación del estudio de funciones para que los estudiantes sean capaces de elaborar modelos de fenómenos del mundo real con diversos tipos de funciones; representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas; hacer traducciones entre representaciones tabulares, gráficas y analíticas de funciones; y para que, además los futuros universitarios puedan entender las operaciones con conjuntos de funciones, sus propiedades generales y su comportamiento. (p. 159)

En esa línea, la European Society for Engineering Education (SEFI, sociedad científica), que es una red internacional de instituciones de educación superior de ingeniería en Europa, creada en 1973 y cuyos fines son desarrollar y mejorar la educación superior de ingeniería en Europa, reforzar la posición del ingeniero en la sociedad, mejorar la comunicación profesores, investigadores y estudiantes, promover la información sobre educación superior en ingeniería, y promover la cooperación entre universidad y empresa.

Según el informe SEFI (2013), hay diversas ramas de la ingeniería, cada una con diversas competencias matemáticas y diferentes perfiles. El reporte también recoge una variedad de informes e investigaciones para sustentar su posición en el sector educativo, entre ellos se encuentra el informe del Programme for International Student Assessment (PISA) y lo considera como un documento muy relevante a tomar en cuenta porque muestra el panorama educativo de los países participantes.

De dicho informe, SEFI (2013) considera apropiado el concepto que tiene de competencia matemática:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte 2013, p. 9).

Para detallar esta competencia matemática, SEFI (2013) menciona una lista de ocho competencias, de las cuales las competencias 5 y 6 tienen una mayor relación con la TRSS:

1. Pensando matemáticamente. (…)
2. Razonando matemáticamente. (…)
3. Planteando y solucionando problemas matemáticos. (…)
4. Modelado matemático. (…)
5. Representación de entidades matemáticas. Esta competencia incluye la capacidad de comprender y utilizar representaciones matemáticas (ya sean simbólicas, numéricas, gráficas y visuales, verbales, materiales, etc.) y conocer sus relaciones, ventajas y limitaciones. También incluye la capacidad de elegir y cambiar entre las representaciones basadas en este conocimiento.
6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismo. Esta competencia incluye la capacidad de comprender el lenguaje matemático simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural, así como la traducción entre ambos. También incluye las reglas de los sistemas matemáticos formales y la capacidad de utilizar y manipular expresiones y expresiones simbólicas de acuerdo con las reglas.
7. Comunicarse en, con y sobre las matemáticas. (…)
8. Hacer uso de accesorios y herramientas. (…). (pp. 13, 14)

Así también, SEFI (2013) da a conocer una serie de temas dentro de un material llamado Core Zero, Core Level 1, 2 y 3. Con respecto a Core Zero, del cual se dice que es ideal para ser estudiado antes de ingresar a una carrera de ingeniería puesto que contiene temas que se enseñan en todas las escuelas de Europa y forman una plataforma sólida para construir una matemática universitaria para ingeniería. Este material se ha agrupado en cinco áreas del conocimiento: Álgebra, Análisis y cálculo, Matemáticas discretas, Geometría y trigonometría, Estadística y probabilidad. A continuación mostramos parte del material Core Zero con las cinco áreas del conocimiento, los temas que se desarrollan y los logros de aprendizaje. Cabe indicar que en el área de Análisis y cálculo, ubicamos a nuestro objeto matemático función exponencial.

Análisis y cálculo.

- Funciones y sus inversas. (…)
- Secuencias, series, expansiones binomiales. (…)
- Funciones logarítmicas y exponenciales.
  Como resultado del aprendizaje de este material usted debería ser capaz de:
  - reconocer los gráficos de la función de ley de potencia
  - definir la función exponencial y dibujar su gráfica
  - definir la función logarítmica como la inversa de la función exponencial
  - utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar las expresiones
  - resolver ecuaciones que implican funciones exponenciales y logarítmicas
  - resolver problemas utilizando modelos de crecimiento y decaimiento.
- Tasas de cambio y diferenciación. (…)
- Puntos estacionarios, valores máximos y mínimos. (…)
- Integración indefinida. (…)
- Integración definitiva, aplicaciones a áreas y volúmenes. (…)
- Números complejos. (…)
- Prueba. (…) (SEFI, 2013, pp. 23-28)

El estudio de la función exponencial no concluye en Core Zero, esto continua en Corel Level 1, 2 y 3, con la diferencia que ahora forma parte de estructuras matemáticas más complejas, así por ejemplo, tenemos que en Core Level 1, en el área de Análisis y cálculo, la función exponencial forma parte del estudio de las funciones hiperbólicas, los números complejos, diferenciación, métodos de integración, etc. En Core Level 2, en la misma área, la función exponencial la encontramos en el estudio de los temas de ecuaciones diferenciales ordinarias, funciones de varias variables, integrales dobles, transformada de Laplace, etc. En Core Level 3, la encontramos en el estudio de las series de Fourier.

Como podemos notar, el estudio y la comprensión adecuada de las funciones, y en particular de las funciones exponenciales es importante en el currículo de varias instituciones internacionales de educación superior, y no solo por su trascendencia a lo largo de los cursos de matemática, ya que es de gran ayuda para enfrentar cursos más avanzados como el Cálculo, sino también por su utilidad en situaciones de la vida real, ya que nos sirve como herramienta para interpretar cierta información y reflexionar sobre ciertos resultados.

Presencia de la función exponencial en la malla curricular de ingeniería.

La organización internacional formada por instituciones educativas de nivel superior y educadores de Europa, SEFI (2013), fue creada con el fin de contribuir con el desarrollo y la mejora de la educación superior, también se señala que para tener un estudio integrado, la educación del futuro ingeniero debe incluir los siguientes conceptos matemáticos como funciones, sistemas de ecuaciones, diferenciación e integración, ecuaciones diferenciales ordinarias, transformada de Laplace entre otros. En ese sentido, presentamos una parte de los sílabos de matemática de dos universidades peruanas, una pública y otra privada donde se muestra directa o indirectamente la presencia de la función exponencial en el plan de estudios de la carrera de ingeniería.

Consideramos primero parte de los sílabos de matemática de la universidad pública, esto es, los sílabos de matemática de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental de la Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur (UNTELS), que es el centro de estudio donde llevaremos a cabo nuestra experimentación. Cabe mencionar que esta universidad emplea un currículo por competencias, esto lo podemos apreciar cuando se menciona en el perfil profesional del egresado de Ingeniería Ambiental de la UNTELS, que el ingeniero ambiental tiene definido tres dimensiones de formación, conocimientos, desarrollo de habilidades y logro de sus competencias.

En ese sentido, en la competencia específica con respecto al tema de funciones reales de variable real del sílabo de Matemática Básica, se menciona que el estudiante define las diferentes clases de funciones y hace uso correcto de las propiedades mientras resuelve los ejercicios propuestos. Cabe indicar que el tema de funciones se trabaja a partir de la semana 12 a la 15, y el de funciones exponenciales se estudia en la semana 14 tal como se muestra en el cuadro 4, dicha tabla es parte del contenido temático del sílabo.

Semana	Contenido Temático	Procedimientos y Estrategias
14	Función exponencial. Función logaritmo.	Resuelve ejercicios y problemas planteado usando las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Cuadro 4: Matemática Básica. Cuarta Unidad: Relaciones y Funciones.
Fuente: Sílabo de Matemática Básica de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental (2014).

En la tabla 5 se observa parte de la programación temática del sílabo de Matemática I, curso perteneciente al segundo ciclo, en donde se asume que el estudiante tiene conocimiento de lo que es una función exponencial. En esta semana 7 se estudia el límite de una función exponencial o de su generalización, o el límite de la función exponencial relacionada con otras funciones como las polinómicas, racionales, logarítmicas, trigonométricas o hiperbólicas. Cabe aclarar que, a partir de este curso en adelante, las funciones exponenciales forman parte de temas como funciones paramétricas, continuidad y derivadas, además en cada sesión de clase, el profesor entrega una guía de ejercicios propuestos, algunos de ellos se desarrollan en clase, otros quedan para que el estudiante practique fuera de clase o como una tarea para presentarlo la próxima clase, en donde el estudiante desarrolla los ejercicios propuestos usando una variedad de propiedades tal como lo indica el cuadro 5.

Semana	Contenido Temático	Procedimientos
7	Límites trigonométricos, exponenciales, logarítmicos e hiperbólicos.	Desarrolla ejercicios propuestos usando propiedades.

Cuadro 5: Matemática I. Programación temática.
Fuente: Sílabo de Matemática I de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental (2014).

En el cuadro 6 se aprecia parte de la programación temática del sílabo de Matemática II correspondiente al tercer ciclo, en los ejemplos y ejercicios planteados de esta semana se solicita a los estudiantes que hallen la integral indefinida de una función exponencial o de una función exponencial relacionada con alguna(s) función(es) mediante el método de cambio de variable o el de integral por partes, empleando las fórmulas de integración.

Semana	Contenido Temático	Procedimientos
3	Integración de funciones trascendentales: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas.	Aplica el método de integración apropiado para encontrar una solución. Empleo de las fórmulas básicas de integración.

Cuadro 6: Matemática II. Unidad 2: Métodos de integración.
Fuente: Sílabo de Matemática II de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental (2014).

En el cuadro 7 se tiene parte de la programación temática del sílabo de Matemática III, aquí la función exponencial forma parte de la definición del método de la transformada de Laplace, es decir, el nombre de función exponencial ya no aparece, pero al estudiar este método y durante el proceso de solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO), la función exponencial se hace presente. En general, la función exponencial aparecerá formando parte de la solución de algunas EDO lineales o de grado superior. En esta semana 14, lo que se busca básicamente es que el estudiante identifique y use la tabla de fórmulas de la transformada de Laplace durante el proceso de solución de la EDO.

Semana	Contenido Temático	Procedimientos
14	Transformada de Laplace: Aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de EDO. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo orden lineales a: circuitos y resortes.	Identifica y usa adecuadamente las fórmulas para resolver los diversos ejercicios.

Cuadro 7: Matemática III. Cuarta Unidad: Resolución de Ecuaciones Diferenciales usando la Transformada de Laplace.
Fuente: Sílabo de Matemática III de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental (2014).

Ahora, consideremos parte de los sílabos de matemática para ingeniería de la universidad privada:

En el cuadro 8 se muestra parte de la descripción del programa del sílabo de Fundamentos de la Matemática 1, que es un curso electivo de nivelación, en él se observa que el objeto matemático función exponencial forma parte de una ecuación, a la cual se le llama ecuación exponencial. Otros temas muy relacionados con la función exponencial son las progresiones aritméticas y geométricas. Al resolver lo ejercicios y problemas planteados en las actividades, lo que se busca es que el estudiante aplique una serie conceptos y propiedades de los números reales. Cabe señalar que el registro de representación más usado es el registro algebraico.

CAPÍTULO 2 Álgebra de los números reales (36 horas) Presentación axiomática de los números reales. Igualdad, adición, multiplicación. Propiedades principales. Sustracción, división, potenciación, radicación. Expresiones algebraicas. Polinomios. Grado de un polinomio. Productos notables. División de polinomios. Teorema del residuo y del factor para polinomios. Cocientes notables. Factorización. Radicales y Racionalización. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de segundo grado. Orden en los números reales. Propiedades fundamentales. Intervalos. Inecuaciones de primer grado. Inecuaciones de segundo grado. Logaritmos. Propiedades. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Progresiones aritméticas y geométricas.

Cuadro 8: Descripción del programa. Capítulo 2: Álgebra de los números reales.
Fuente: Sílabo de Fundamentos de la Matemática 1 de Estudios Generales de Ciencias de la universidad privada. (2017-1).

En el cuadro 9 se observa los contenidos de la unidad didáctica llamada números complejos del sílabo de Álgebra Matricial y Geometría Analítica, que es un curso obligatorio para todas las especialidades de ingeniería. En dicha unidad se estudian los números complejos representados en su forma exponencial, que es una forma abreviada de expresar un número complejo. Durante el proceso de aprendizaje, se incluyen problemas y ejercicios que demanden en el estudiante el uso de propiedades, que realicen operaciones y conexiones entre las diferentes representaciones de un número complejo.

Contenidos
Números complejos. Operaciones. Propiedades de la adición y multiplicación. Plano complejo. Representación gráfica de los números complejos. Conjugado, módulo y argumento de un número complejo. Propiedades. Forma polar y forma exponencial de un número complejo. Operaciones de multiplicación y división en forma polar. Teorema de Moivre Potenciación en $\mathbb{C}$. Radicación en $\mathbb{C}$. Resolución de ecuaciones de la forma $w^n = z$.

Cuadro 9: Unidad didáctica. Capítulo 3: Números complejos.
Fuente: Sílabo de Álgebra Matricial y Geometría Analítica de Estudios Generales de Ciencias (EGC) de la universidad privada. (2017-1).

En el cuadro 10 se aprecia los contenidos de la unidad didáctica funciones reales de variable real del sílabo del programa analítico de Fundamentos de Cálculo, que es un curso obligatorio para todos los estudiantes de la línea de ingeniería. En dicha unidad se estudia las diversas clases de funciones considerando el dominio y rango, su gráfica y sus transformaciones, asíntotas y una serie de propiedades propia de cada una de las funciones. Dentro del estudio de las funciones, encontramos a nuestro objeto matemático de estudio, la función exponencial, previo al inicio del estudio de este concepto, se repasan las ecuaciones exponenciales estudiadas en el curso de fundamentos de la matemática 1. Por otro lado, se espera que como resultado del aprendizaje de este tema, el estudiante logre modelar situaciones reales o en un contexto científico, así también se espera que los estudiantes construyan funciones exponenciales que cumplan ciertas condiciones dadas, usando definiciones, propiedades, gráficas, operaciones o transformaciones, representándolas en forma algebraica o gráfica.

Contenidos
Definición de función. Dominio y rango. Funciones lineales. Gráficas: rectas, intersección de rectas, rectas paralelas y perpendiculares. Ecuaciones e inecuaciones. Funciones cuadráticas. Ecuaciones e inecuaciones cuadráticas. Ceros de una función cuadrática. Gráfica de función cuadrática. Representación gráfica de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas. Función valor absoluto. Valor absoluto de un número real. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Gráfica de función valor absoluto. Funciones seccionadas. Dominio y rango. Gráficas. Función par e impar. Función creciente y decreciente. Transformaciones de funciones y sus gráficas. Álgebra de funciones: Adición, sustracción, producto. Álgebra de funciones: Cocientes y composición de funciones. Funciones inyectivas y función inversa. Funciones polinomiales y sus gráficas. Raíces de una ecuación polinómica. División de polinomios, teoremas del residuo y factor. Ceros reales de funciones polinomiales. Funciones racionales y asíntotas (idea intuitiva del límite). Definición de asíntotas verticales y no verticales. Gráfica de funciones racionales. Funciones exponenciales. Definición. Gráfica de funciones exponenciales. Transformaciones de funciones exponenciales. Función exponencial natural. Funciones logarítmicas. Propiedades de logaritmos. Gráficas de funciones logarítmicas. Transformaciones de funciones logarítmicas. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Funciones trigonométricas. Circunferencia Unitaria. Funciones trigonométricas de números reales. Gráficas. Periodicidad de las funciones seno y coseno. Transformaciones de las funciones seno y coseno- Amplitud y periodo. Gráficas de las funciones, tangente, cotangente, secante y cosecante. Propiedades de periodicidad. Propiedades de periodicidad. Funciones trigonométricas inversas. La funciones seno, coseno y tangente inverso. Definición y gráficas. Modelado de movimiento armónico simple y amortiguado.

Cuadro 10: Unidad didáctica. Capítulo 3: Funciones reales de variable real.
Fuente: Sílabo de Fundamentos de Cálculo de EGC de la universidad privada. (2017-1).

En el cuadro 11 se muestra la descripción de la unidad llamada introducción a las integrales y a las EDO del sílabo de Cálculo Diferencial, aquí se desarrolla el tema de las aplicaciones de las EDO en problemas de crecimiento poblacional y enfriamiento de los cuerpos. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Factor integrante. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales en problemas de mezcla.

Descripción general de la unidad
El planteamiento de situaciones como el crecimiento de una población, el enfriamiento de cuerpos, mezclas de soluciones, entre otros fenómenos físicos son modelados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales. Es indispensable para resolver una ecuación diferencial ordinaria el desarrollo de los conceptos de antiderivada e integrales indefinidas.

Cuadro 11: Unidad didáctica. Capítulo 3: Introducción a las integrales y a las ecuaciones diferenciales ordinarias.
Fuente: Sílabo de Cálculo Diferencial de EGC de la universidad privada. (2017-1).

Posteriormente los estudiantes llevarán las asignaturas de Cálculo Integral, Cálculo de Varias Variables y Cálculo Aplicado, en donde el concepto de función exponencial forma parte de estructuras matemáticas más complejas.

1.2.2 Importancia de la función exponencial para modelar situaciones en contextos reales.

El conocimiento de las funciones es importante en esta sociedad contemporánea, ellas nos ayudan a comprender ciertos hechos de la realidad. Por ejemplo, en el caso de las funciones exponenciales, Elstak (2007), menciona que dicho objeto matemático aparece fuertemente ligado a situaciones cercanas a la realidad del ciudadano, en ese sentido, el autor cita las siguientes situaciones: el crecimiento del dinero colocado a interés compuesto, el aumento de la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito, problemas de inflación, el crecimiento de una epidemia en una determinada población, el aumento de la radiación solar en nuestro planeta debido al debilitamiento de la capa de ozono ocasionado por la contaminación del aire, la teoría de fractales, etc. A su vez, estas situaciones, enfocadas adecuadamente, pueden convertirse en una herramienta poderosa para motivar y darle significado al objeto matemático de estudio. Un objeto que relaciona la matemática y la situación real es el modelo matemático.

Según Blomhoj (2004) citado por Jaimes (2012, p. 33) menciona que:

> Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Esto implica, en primer lugar, que cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. En segundo lugar, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados.

Y, en palabras de Hitt (2000, p. 81):

> A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de lo sucesos que estamos describiendo.

En esa línea, muchos de los fenómenos físicos, químicos, económicos, etc., son explicados a través de modelos matemáticos, más aún, algunos de ellos, bajo ciertas condiciones, nos podrían ayudar a predecir ciertas situaciones futuras. Acerca de esto, Arriaga (2015) realiza un trabajo relacionado con la agricultura en las regiones rurales de Andalucía-España, nos indica que una de las preocupaciones del agricultor es la escasez del agua, por tal motivo señala que urge la necesidad de introducir diferentes herramientas y modelos que permitan alcanzar una gestión más adecuada y sostenible de los recursos hídricos, además de la posibilidad de plantear distintos escenarios futuros para así poder elaborar respuestas pertinentes que les permitan prever acontecimientos. El investigador menciona que es posible crear modelos matemáticos que hacen posible el estudio de estos procesos naturales, en particular del comportamiento en el suelo bajo ciertas condiciones. Es así que el autor crea un modelo matemático de parámetros, el cual surge de añadirle ciertos parámetros al modelo desarrollado por Rodriguez-Iturbe (1999) con el fin de complementarlo y adaptarlo a diferentes necesidades. Dentro del modelo planteado por el autor, hay una sección donde se puede apreciar la función exponencial que junto a otras expresiones matemáticas describen paso lento del agua por la zona de las raíces de las plantas. El autor tiene como objetivo analizar este modelo, pues según lo menciona, le permitirá comprender mejor la relación entre suelo, planta y atmósfera a través de los cuales circula el agua, en palabras del autor:

> Consiste en un modelo de tipo «leaky bucket», una ecuación de continuidad en la que se establece un balance de aguas, estipulando que el incremento del contenido de humedad en suelo varía linealmente con la suma de una serie de aportaciones y pérdidas. (Arriaga 2015, p. 44).

El análisis de este modelo contribuirá, según lo menciona el autor, al diseño de estrategias para la optimización del uso de los recursos hídricos.

Al respecto, creemos relevante que el estudiante tenga una clara compresión del objeto matemático función exponencial para que posteriormente le sea factible la comprensión y el análisis de modelos matemáticos de las diversas áreas del quehacer científico.

1.2.3 Importancia de la función exponencial dentro de la estructura matemática.

En este apartado mostraremos aportes de investigadores que se preocuparon directa o indirectamente por el estudio de la función exponencial, logrando con ello importantes avances tanto en la matemática como de la matemática aplicada.

Según Kline (1999), un primer progreso que se obtuvo de los adelantos científicos del siglo XVII fue el estudio del movimiento, grandes hombres de ciencia como Galileo y Kepler fueron absorbidos por este problema, fue este último, conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del astro rey, quien antes que Newton describiera la ley de la gravitación universal ($F = G\frac{m_1 \times m_2}{d^2}$, *F*: fuerza de atracción, *G*: constante gravitacional, m_1 y m_2: masa de los cuerpos, *d*: distancia entre los cuerpos), ya presumía la existencia de un fuerza gravitacional actuando sobre dos cuerpos, por tanto era necesario mejorar el cálculo de las posiciones de los planetas. Por otro lado, una razón pragmática para mejorar los cálculos astronómicos era porque había aumentado la navegación debido al comercio y la búsqueda de materias primas por parte de los europeos, y los marineros requerían métodos más precisos para determinar su ubicación cuando surcaban por los océanos. Para saber su posición, los marineros tenían que hallar la latitud y longitud de la embarcación, con la primera solo les bastaba con mirar el sol o las estrellas, lo que si les resultaba dificultoso era hallar la longitud. En 1672, el gobierno inglés formó la Comission for the Discovery of Longitude, y en 1675, el rey Carlos II de Inglaterra, preocupado por la pérdida de navíos, fundó el Royal Observatory en Greenwich.

Las investigaciones sobre el movimiento, matemáticamente decaían en el concepto de función o relación entre dos variables, el lenguaje usado por Galileo en sus experimentaciones sobre el movimiento así lo demuestran, solo le faltaba el uso de una simbología adecuada para establecer la relación entre espacio y tiempo, cabe señalar que el concepto de función ha ido evolucionando a partir del siglo XVII, en ese mismo siglo, Leibniz quien acuño el nombre de función y fue Euler quien uso la notación $f(x)$. De las funciones descubiertas en el siglo XVII, encontramos a las funciones trascendentales elementales como $log(x)$, $sen(x)$ y a^x. Según Kline (1999), Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, estudio la curva (hasta entonces, la función era tratada como una curva) que hoy la representaríamos como $y = ae^{-cx}$ para $x \geq 0$ y mencionó que guarda conexión con los logaritmos. Asimismo, Descartes también encontró esta curva, aunque no mencionó su relación con los logaritmos.

Con el descubrimiento del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz en el siglo XVIII, creció el interés por el estudio de las funciones. Según lo menciona Ribnikov (1987, p. 219), "Euler escribió que todo el análisis infinitesimal gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones".

Según Ribnikov (1987), en su obra clásica, Introducción al análisis, Euler lo dedicó al estudio de las funciones, clasificación, propiedades, métodos de desarrollo, etc., por ejemplo, en él se encuentran los métodos de desarrollo en serie de las funciones exponenciales y logarítmicas, además se aclara la definición de logaritmo, simbólicamente, si $a^x = N$, entonces $x = log_a N$.

A continuación, Euler deduce las fórmulas:

- $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, donde i es un número infinitamente grande y z es un número complejo;

  que más adelante se conocería como $e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (Nota: En un principio Euler consideró a *i* como un número muy grande, años después lo consideró como la unidad imaginaria de los números complejos)
- $e^{\pm vi} = cosv \pm i\,senv$, donde i es la unidad imaginaria.

Euler trabajo en el campo de los complejos para darle mayor generalidad a sus investigaciones.

Otro aporte de Euler utilizando la función exponencial lo encontramos en uno de los trabajos dedicados a la de resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de cualquier orden con coeficientes constantes, en ella realiza las siguientes sustituciones para hallar la solución de la ecuación diferencial: $y = e^{kx}$, $y = ue^{kx}$ y $y = ue^{\alpha x}$ donde α es la parte real de un número complejo.

En esa línea, según Ribnikov (1987), Laplace (1749-1827) desarrolló el método de la Transformada de Laplace (conocido en aquel entonces como método de resolución de ecuaciones lineales en diferencias y diferenciales). En dicho método se hace uso de la integral $F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ como un medio para hallar la solución de una ecuación diferencial. Este método juntos a otros análogos resuelven problemas relacionados hidrodinámica, mecánica, conducción del calor, etc.

En el siglo XVIII, los avances científicos lograron ampliar el campo de la teoría de las probabilidades, sus estudios lograron penetrar en la estadística (particularmente en la demografía), en cuestiones que tienen que ver con el seguro, la teoría de errores, etc. Uno de los investigadores que uso el concepto de función exponencial entre otros conceptos para la demostración de un teorema referido a la estimación de la probabilidad fue Laplace, no ahondaremos en los detalles del teorema, pero mostramos la fórmula que obtuvo luego de sus investigaciones

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx .$$

En una conferencia notable sobre el desarrollo de las funciones en series de Taylor y Maclaurin, que entre sus bondades nos permite calcular valores aproximados de las funciones, Cauchy pone de ejemplo a la función $f(t)=e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0;\ f(x)=0,\ x=0$.

Por otro lado, desde hace algunas décadas se viene estudiando la función exponencial de matrices y su aplicación en la ingeniería y la ciencia. Según Smalls (2007), existe una teoría general sobre funciones matriciales con numerosas propiedades que sugieren hacer uso de diversos métodos computacionales.

Por su parte, Mandelbrot (1924-2010) incursiona en la geometría, llegando a ser uno de los principales creadores de la geometría fractal. Dentro del legado dejado por Mandelbrot, Rodríguez (1995) menciona a una serie de algoritmos para la construcción de figuras geométricas, llamado conjunto de Mandelbort, alguno de esos algoritmos hacen uso de la función exponencial en el campo de los números complejos.

Con respecto a la aplicación de los fractales, el Rodríguez (1995) menciona:

> Actualmente se aplica la teoría de fractales a diversas áreas tales como ingeniería de materiales, específicamente: microestructura de metales, superficies de ruptura, rugosidad de superficies por desgaste, caracterización de partículas finas, ya sean polvos metálicos o cerámicos. En biología se ha aplicado en la caracterización de: el crecimiento de colonias de bacterias, retina humana, área superficial de la masa del cerebro. En el arte, por medio de fractales, se han analizado imágenes artísticas de diferentes pintores. En fisiología se ha caracterizado: la flora intestinal, el espacio ocupado por las arterias del cuerpo humano, las neuronas, etc. En percepción remota se ha empleado para la caracterización de: uso de suelo, montañas, valles, etc. En química se ha aplicado en: absorción, catálisis, agregación limitada por difusión, crecimiento de depósitos electrolíticos. (p. 82)

En resumen, son diversos investigadores, que a través de los años, realzan la importancia de las funciones exponenciales tanto en la parte de la matemática formal como en la matemática aplicada. Así pues, se hace necesario que es estudiante de ingeniería profundice en este concepto por medio del conocimiento de otras estructuras matemáticas.

1.2.4 Importancia de la comprensión de la noción de función exponencial mediante el uso de diversas representaciones semióticas para contrarrestar algunas dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático.

En este apartado haremos una recopilación de diversas investigaciones que muestran las dificultades cognitivas y epistemológicas que tienen los estudiantes durante el proceso de comprensión del concepto de potencia, función y función exponencial, los cuales están íntimamente relacionados. Seguidamente, mencionaremos una serie de recomendaciones que dan diversos investigadores sobre la importancia del uso de diversas representaciones semióticas para la comprensión del objeto función exponencial.

En el trabajo realizado por Elstak (2007), el autor suponía que los estudiantes del nivel superior comprendían el concepto de exponente y que eran capaces de expresar ideas que generalizaban este concepto cuando lo trabajaban en el conjunto de los números reales. Sin embargo, su estudio nos muestra que los estudiantes tienen dificultades para establecer relaciones entre las diversas definiciones de exponentes, las cuales varían de acuerdo al tipo de conjunto en el cual se esté trabajando, esto es, en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y reales. Por ejemplo, Elstak (2007) manifiesta que los estudiantes no reconocen la relación entre los exponentes negativos y positivos, y hay una tendencia de representar la gráfica de la función exponencial con lineales rectas, este último caso también lo manifestó Advíncula (2010).

Al respecto, Díaz (2006, citado por Vargas 2012, p. 60) afirma que:

> Los estudiantes de Nivel Superior, en significativa mayoría, que han cursado estudios de Álgebra o Cálculo, desconocen los significados formales de los conceptos de potencia con base en R^+ y exponentes en I, y por ende en R, y si tienen algunos de ellos ideas acerca del significado de potencia con base en R^+ y exponente en I, dichas ideas son concepciones alternativas acerca del significado de tal tipo de potencia.

Por su parte, Martínez (2000) realizó una investigación con estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad. Su objetivo fue conocer los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural. En su trabajo realizó una recopilación de investigación, entre ellas, la de Lezama (1999), y descubre que ciertos fenómenos didácticos descritos en el estudio de Lezama, son similares a los que encontró en su investigación.

A continuación, Martínez (2000, pp. 81, 82) menciona los siguientes fenómenos didácticos con sus respectivos argumentos que dieron los estudiantes para sustentar su respuesta:

> En secundaria:
> $2^0 = 0$ ya que el dos no se multiplica
> $2^1 = 4$ ya que multiplicamos una vez el dos (2*2)
> $2^1 = 2$ ya que se pone una vez el número
> $2^1 = 2$ ya que se pone (2)()
> $2^{-3} = -8$ ya que 2*2*2 = 8 y sólo se le cambia el signo
> $2^{-3} = -8$ ya que (–2)*(–2)*(–2) = –8
> $2^{-4} = -16$ ya que (–2)*(–2)*(–2)*(–2) = –16 (Aquí, el autor asume que el estudiante se equivocó en la ley de signos)
>
> En bachillerato:
> $2^0 = 0$ ya que el dos no se multiplica
> $2^{-3} = -8$ ya que 2*2*2 = 8 y sólo se le cambia el signo
> $2^{-3} = -8$ ya que (–2)*(–2)*(–2) = –8
> $2^{-4} = -16$ ya que (–2)*(–2)*(–2)*(–2) = 16
>
> En universidad:
> $2^0 = 0$ ya que el dos no se multiplica

De lo anterior, observamos que los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad manifiestan que $2^0 = 0$ porque *el dos no se multiplica*, el autor no explica qué significa esta frase dada por los estudiantes, creemos que posiblemente signifique que simplemente no toman en cuenta el número 2 y asumen que el resultado es cero, o tal vez crean que $2^0 = (2)(0) = 0$, o posiblemente piensen que si $2^1 = 2$ es porque el 1 les indica que deben de colocar solo una vez 2, entonces $2^0 = 0$ les indica que no deben de colocar el 2.

Con respecto a las funciones, en un estudio realizado por Prada, Hernández y Ramírez (2014-2015) sobre la comprensión del concepto de función en los primeros cursos de educación superior, concluyeron que:

> Los estudiantes no manejan un concepto claro de lo que es una función, así mismo no poseen un concepto único, sino es un concepto asociado a diferentes variaciones conceptuales entre las que se destacan: Asociación de función con la de par ordenado, asociación de correspondencia única entre pares de elementos e incluso entre pares de conjuntos.
>
> Necesitan un apoyo visual o gráfico más que analítico para comprender si una expresión dada es una función, debido a la carencia de competencias algebraicas.
>
> Una gráfica representa una función si es continua, entendida la continuidad como un sinónimo de secuencia o de no interrupción desconociendo las funciones definidas por partes o a tramos. (p. 14, 15)

En esa línea, Díaz (2013, p. 20) menciona (luego de revisar algunas investigaciones que hacen referencia a las diversas componentes y representaciones de la noción de función): "Los estudiantes, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función".

El investigador sugiere que los siguientes aspectos son cruciales para la profunda comprensión de este concepto:

> Interpretación de funciones representadas por gráficas.
> Descripción de situaciones, fórmulas y tablas. Modelación de situaciones del mundo real.
> Transferencia entre las múltiples representaciones de las funciones.
> Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones.
> Aplicación de la tecnología para representar las funciones. (Díaz 2013, p. 20)

Por su parte, Advíncula (2010) menciona que los estudiantes tienen dificultad cognitivas al pasar de una representación analítica a una gráfica, por ejemplo, en la situación 4 se menciona:

> Raúl recibe una gratificación de S/. 10 000 y decide depositarlo en una entidad bancaria que le ofrece una tasa de interés de 9,5% compuesto anualmente. Si Raúl no retira ni abona ninguna cantidad de dinero adicional a la depositada inicialmente y la entidad bancaria no le hace ningún descuento, responda las siguientes preguntas:
>
> (…)
>
> b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de dinero que tendrá Raúl en su cuenta luego de t años. Explique cómo obtuvo la expresión y comente sus características indicando su relación con la información dada en el problema.
>
> c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte b). (pp. 65, 66)

Para la parte b), la investigadora manifiesta que algunos alumnos obtuvieron una expresión incorrecta, otros utilizaron sus conocimientos de interés compuesto y usaron la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$, y otros reconocieron la existencia de una función exponencial de la forma $f(t) = Ca^t$. Para la parte c), usando la función exponencial obtenida en b), algunos estudiantes graficaron correctamente, en contraste, otros estudiantes graficaron líneas decrecientes o rectas con pendientes positivas.

En ese contexto, Duval (2006) afirma que a menudo los estudiantes de todos los niveles del currículo, perciben una brecha entre las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fuera de las matemáticas, aunque el conocimiento matemático se pueda usar en una situación real. Así también, se menciona que los docentes observan frecuentemente que la adquisición del conocimiento del concepto del objeto matemático no introduce a la mayoría de estudiantes en las formas del pensamiento matemático, por ejemplo, la habilidad para cambiar el registro de representación. Al respecto, Advíncula (2010, p. 53) afirma que “uno de los obstáculos en el aprendizaje de conceptos matemáticos es justamente la falta de conversión entre registros diferentes de representación”.

Como podemos observar, los estudiantes presentan una serie de dificultades al resolver problemas matemáticos. A continuación, mostramos una serie de sugerencias que dan diversos investigadores sobre el uso de representaciones semióticas para fomentar la comprensión del objeto función exponencial.

Advíncula (2010) afirma que la actividad matemática requiere del uso de diversas representaciones para cada noción, estas representaciones pueden ser simbólicas o gráficas para expresar conceptos, procedimientos, características y propiedades.

Alvarez (2017) menciona que los registros de representación semiótica y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de registros favorecen la conceptualización del concepto función exponencial.

Ortega, Nesterova y Mendoza (2009) sugieren a los docentes planteen actividades que promuevan el uso de las distintas representaciones ya que estas favorecen el aprendizaje, además permiten que los estudiantes formen una imagen conceptual, pudiendo así escoger ellos la representación más adecuada para resolver cada problema.

Villaseñor (2011) y Ortega (2007) proponen una secuencia didáctica para el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas mediante el uso de los distintos registros de representaciones semióticas con el objetivo de describir las dificultades y evaluar los efectos que produce el empleo de estos registros por parte de los estudiantes.

Castro, González y Ramírez (2016) sugieren a los docentes promover el uso de diferentes registros de representación así como conversiones en el que se utilicen distintos registros de representación.

Finalizamos este apartado mencionando las palabras de Duval (2006, p. 144) a quien le preocupa, entre otras cosas, conocer cómo se da el proceso de comprensión de las matemáticas: "Para comprender lo que ocurre en el aprendizaje de las matemáticas necesitamos extensivas y detalladas investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático".

1.3 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Pregunta de investigación.

¿De qué manera los estudiantes de primer ciclo de ingeniería comprenden la noción de función exponencial mediante el tránsito por los distintos registros de representaciones semióticas?

1.3.2 Objetivos de la investigación.

Objetivo General

Interpretar cómo el tránsito por los distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función exponencial en estudiantes de primer ciclo de ingeniería.

Objetivos Específicos

1. Identificar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permiten movilizar los elementos y las propiedades de la función exponencial al transitar por los distintos registros de representaciones semióticas (lengua natural, numérico, algebraico y gráfico).
2. Describir las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes al transitar por los registros de lengua natural, numérico, algebraico y gráfico.

CAPÍTULO II: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

2.2 Aspectos matemáticos

Evolución histórica del objeto matemático función exponencial.

A continuación presentaremos un breve resumen de la evolución histórica del objeto matemático función exponencial, el cual tiene sus orígenes en el nacimiento del concepto de potencia (en la actualidad: a^n es llamada potencia de base *a* y exponente *n*). En esa línea, empezaremos narrando el proceso de construcción del objeto potencia o exponente (entendiéndose que son objetos diferentes, pero estrechamente relacionados) y su notación exponencial, nos detendremos para comentar sobre el surgimiento del objeto logaritmo, puesto que la función logaritmo es función inversa a la función exponencial, luego daremos a conocer las variaciones que ha tenido la definición del objeto función desde XVII al XX, seguidamente daremos la definición de función exponencial propuesta por Euler.

Finalmente, realizaremos un breve análisis, desde el punto de vista de la teoría de registros (tránsito por distintos registros) de dos libros de matemática, el primero es el libro de Lima, Morgado, Pinto y Wagner (2000) titulado: La Matemática de la Enseñanza Media, y el segundo es el libro de Stewart, Redlim y Watson (2012), el cual lleva por título: Precálculo: Matemática para el cálculo.

2.1.1 Construcción del objeto potencia y su notación exponencial.

Se dice que la matemática entendida como disciplina racional, organizada e independiente tiene sus orígenes en la cultura griega, específicamente entre los años 600 y 300 a.C. aproximadamente (Kline, 1999). En esos años, Euclídes escribe la obra los Elementos, el cual está compuesto por trece libros, de ellos, los libros VII, VIII y IX tratan sobre la teoría de números (propiedades y razones entre números enteros), en donde los números son representados como segmentos de recta. En el libro VII, define al plano como producto de dos números y al sólido como producto de tres números. En el libro VIII, Euclides nos habla acerca de las progresiones geométricas, él las ve como un conjunto de números en una proporción continua.

Por ejemplo, la progresión geométrica $f;\ \underbrace{f\times k}_{e};\ \underbrace{f\times k^2}_{d};\ \underbrace{f\times k^3}_{c};\ \underbrace{f\times k^4}_{b};\ \underbrace{f\times k^5}_{a}$, Euclides lo veía como el conjunto $\{a;b;c;d;e;f\}$, tales que forman la siguiente proporción geométrica continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=k$. Cabe señalar que no utilizo esta notación, de hecho, en aquella época los números concretos se escribían con letras del alfabeto griego, difícilmente se les iba a ocurrir una generalización como la que acabamos de redactar. En el libro IX, en la proposición 35, se nos da a conocer con una elegante prueba, la suma de los términos de una progresión geométrica. En ese mismo libro, en la proposición 11, según Pulido (2012, p. 9), se encuentra un enunciado equivalente a la regla $a^m \times a^n = a^{m+n}$, el cual es retomado por estudiosos a finales de la Edad Media y a comienzos del Renacimiento.

Más adelante, Arquímedes (287-212 a.C.) nos comenta, en su obra titulada El Arenario, que existe la necesidad de desarrollar una notación para algunas potencias relacionadas con números grandes obtenidos de cálculos astronómicos, según Boyer (2012, p. 169-171), Arquímedes se jactaba de ser capaz de escribir un número mayor que el número requerido de granos de arena para llenar el universo, según él, no serían necesarios más de 10^{63} granos de arena, por supuesto, no utilizo esta notación, en relación a esto, Bell (1985, p. 60, 61), comenta

> … por fortuna para las matemáticas, la numeración griega desapareció rápidamente. Uno de sus muchos defectos era su incapacidad para representar concisamente números incluso moderadamente grandes. Arquímedes superó este inconveniente en el siglo III a.C. en su sistema de contar por potencias octavas de diez.

Hacia el año 150 d.C., Diofanto de Alejandría, autor de la obra Arithmetica, usa una serie de abreviaturas para potencias de números. Según Kline (1999), se sospecha que el símbolo usado para la indeterminada era ζ, en la actualidad puede ser identificada con la letra x, además se indica que a la incógnita la llamó el número del problema y lo que es para nosotros x^2, él lo representaba como Δ^{Y}, donde a Δ lo llamó potencia, similarmente a x^3 lo representó como K^{Y}, x^4 con $\Delta^{\mathrm{Y}}\Delta$, x^5 con $\Delta\mathrm{K}^{\mathrm{Y}}$, x^6 con $\mathrm{K}^{\mathrm{Y}}\mathrm{K}$, y usa los nombres cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo y cubo-cubo respectivamente. En este sistema, K^{Y} no es exactamente el cubo de ζ como lo es x^3 de x. Cabe mencionar que para Diofanto, ζ^x representaba $\frac{1}{x}$. Más adelante, según Bell (1999), fue Descartes quien en 1637 solucionó este crucial problema (a excepción de x^2 porque lo siguió escribiendo como xx) de las notaciones al escribir x, xx, x^3, x^4, . . . , etc.

Sin embargo, es Nicole Oresme (1323-1382) quien generalizó el concepto de potencia al introducir los exponentes fraccionarios y también sugirió el uso de notaciones especiales para este tipo de potencias. Según Artigas (1989), Oresme escribió la obra De proportionibus proportionum, en ella se encuentra el estudio del uso de los números fraccionarios como bases y exponentes de relaciones algebraicas. Oresme señala que si el exponente es racional, entonces la expresión también lo será, caso contrario, será irracional. En el tratado Algoritmus proportionum, después de definir la nomenclatura que utilizará, prosigue enunciando las reglas para multiplicar y dividir proporciones en las que se encuentran exponentes enteros y fraccionarios. Por ejemplo, (en nuestra notación) $4^3 = 64$ y $\left(4^3\right)^{1/2} = 8$ entonces $4^{3/2} = 8$.

Años más tarde, Nicolas Chuquet (1445-1488) escribió la obra Triparty en la science des nombres, según Boyer (2012, p.__), Chuquet inventó una notación exponencial de gran relevancia, cabe señalar que para esta época, aún no hay un símbolo especial para la incógnita, siendo comúnmente llamada con la palabra premier.

Según Boyer (2012), cuando Chuquet escribe que $.72.^{1}$ dividido entre $.8.^{3}$ es igual a $.9.^{2m}$, él se refiere a $\frac{72x}{8x^3} = 9x^{-2}$.

En el año 1544, Michael Stifel (1487-1567) introduce el término exponente en su obra Arithmetica integra, en esta obra nos explica la importancia de asociar la progresión aritmética con la geométrica, por ejemplo, en la siguiente tabla mostramos los dos tipos de progresiones.

Progresión aritmética	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
Progresión geométrica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

En ella, según Michael Stifel, a la adición en la parte superior de la serie aritmética le corresponde a la multiplicación de la serie de abajo (geométrica), esto es, por ejemplo,

2	3
4	8

En la actualidad, esta relación entre progresiones la denotamos de la siguiente forma: $4 \times 8 = 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3}$.

Posteriormente, según Kline (1999), Stifel extendió esta relación entre las progresiones para exponentes negativos y fraccionarios.

En esa línea, Kline (1999, p. 72) cita a Wieleitner (1932) al manifestar que Stifel utiliza la idea de los exponentes fraccionarios de Oresme en la resolución de la ecuación $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$, en donde obtuvo que $x = 2\frac{1}{3}$.

Seguidamente, Vargas (2012, p. 72 y 73) menciona que hubo la necesidad de homogenizar las operaciones entre monomios y la de ampliar los índices (en la actualidad son llamados exponentes) naturales a índices fraccionarios y negativos. El representante principal de esta evolución es Jhon Wallis (1606-1703), autor de la obra Arithmetica Infinitorum (1665). Diez años antes, Wallis mostró que $x^0 = 1$ y $x^{-1} = \frac{1}{x}$, definiendo así al índice de $\frac{1}{x}$ como -1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc., y al índice de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ como $-\frac{1}{2}$.

Otro ilustre hombre de ciencias que usaba los exponentes positivos, negativos, enteros y fraccionarios fue Newton, en sus obras podemos observar expresiones como $x^{5/3}$ y x^{-3}, sin embargo, el primero en usar x^2 en vez de xx fue Gauss, esto según Kline (1999, p. 349).

En palabras de Boyer (2003, p. 338):

> Nosotros solemos tomar ahora como lo más natural del mundo nuestra notación simbólica para las potencias y raíces, sin pararnos a pensar en la sorprendente lentitud con que se desarrolló esta notación a lo largo de la historia de las matemáticas.

2.1.2 Breve historia del objeto logaritmo.

Como es sabido, muchas de las investigaciones basan sus resultados en el legado dejado por investigadores del pasado. En ese sentido, Boyer (1987, p. 395) nos dice que Jhon Napier (1550-1617) debió reflexionar sobre las ideas de Arquímedes y los trabajos de Stifel sobre las sucesiones de potencias de un número dado, para posteriormente proponer la noción del concepto logaritmo. Al respecto, Vargas (2012, p. 39) coincide con Boyer en que el germen sobre el cual se construye este concepto, radica en los trabajos de Arquímedes, relativos a los grandes números.

Antes de seguir hablando de Napier, acotemos que a finales del siglo XVI, los matemáticos daneses Wittich y Clavius sugirieron la aplicación de unas tablas trigonométricas que ayudaron a abreviar los cálculos relacionados con problemas de navegación, estas tablas fueron obtenidas mediante el uso de las identidades trigonométricas del seno y coseno de la suma de dos ángulos. Según Tapia (2003, p. 3), se cree que este recurso de cálculo sirvió de motivación a John Napier, es así como Napier llegó a interesarse y enfrascarse por los aspectos de la matemática relacionados con el cálculo numérico y la trigonometría. En medio de esta reflexión, le visitó el médico del rey Jaime VI de Escocia, el doctor John Craig, quien le habló de las bondades del método prostafairesis, muy usado en los cálculos que se realizaban en el observatorio de Dinamarca. Esto fue una motivación más para que Napier redoblada sus esfuerzos y tras 20 años de esfuerzo, publica en 1614 su obra Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos).

Collette (1986, p. 304) indica que, según Napier, el concepto geométrico-mecánico de los puntos en movimiento y las relaciones existentes entre las progresiones aritméticas y geométricas fueron los dos pilares que lo condujeron a la invención de los logaritmos. En 1619, se publica la obra titulada Mirifici logarithmorum canonis constructio (Construcción de la maravillosa regla de los logaritmos) en donde se muestra la construcción de las tablas de logaritmos.

Al respecto, Boyer (1987, p. 396) comenta que, la obra de Napier se puede explicar de la siguiente manera, para obtener los términos de una progresión geométrica (muy próximos unos a otros) formada por potencias enteras crecientes de un número en particular, es necesario considerar un número muy próximo a uno, es así que Napier decidió trabajar con $1 - 10^{-7}$, luego multiplico a todas las potencias por 10^7, así obtuvo $N = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^L$, donde L es el logaritmo de Napier del número N, de donde se observa que el logaritmo de 10^7 es 0 y el logaritmo de $10^7\left(1-10^{-7}\right)$ es 1.

Cabe señalar que Napier no usaba ninguna idea de lo que hoy conocemos como base de un sistema de logaritmos. La tarea de elaborar la primera tabla de logaritmos en base diez la asumió Henry Briggs (1561-1630), esto tras una discusión con Napier, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debería ser 0 y el logaritmo de 10 debería ser 1, así surgieron los logaritmos en base vulgar o logaritmos de Briggs. Luego, en 1617, Briggs publicó Logarithmorum chilias prima, en donde se indican los logaritmos del 1 al 100 con una precisión de 14 decimales. Posteriormente, en 1624, publica Arithmetica logarithmica, que comprende los logaritmos de los números del 1 al 20000 con una precisión de 14 decimales, aquí también aparece por primera vez las palabras mantisa y característica. Collette (1986, p. 307).

A la par que Napier, hubo otro hombre de ciencia llamado Jobst Bürgi (1552-1632) que tuvo ideas parecidas e independiente a las de Napier sobre la invención de los logaritmos, sus resultados los publico en la obra Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen (1620), una de las diferencias es la siguiente, la relación $log\, m < log\, n$ si $m > n$ es cierta en el sistema de Napier, mientras que en el Bürgi el $log\, m < log\, n$ si $m < n$.

Según Collette (1986, p. 308), fue William Oughtred, en 1650, quien establece las propiedades:

$$log(m \times n) = log\, m + log\, n$$

$$log\left(\frac{m}{n}\right) = log\, m - log\, n$$

$$log\,(x^n) = n\, log\, x$$

2.1.3 Hacia la definición del objeto función.

Hagamos un paréntesis para referirnos a la definición del objeto matemático función, el cual lo utilizó por primera Leibniz en 1673, pero no en un contexto matemático. Posteriormente, Johann Bernoulli (1694) le escribe una carta a Leibniz en donde describe una función como "… una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes". En 1748, Euler define la función como "una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o de cantidades", a los pocos años modifica su definición por "si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas". Fourier (1805) y Cauchy (1844) argumentaban que había un problema con la definición de función dada por Euler debido a una falta de comprensión de la diferencia entre función y su representación. Hubo varios matemáticos como Condorcet, Arbogast, Lacroix, Cauchy, Lobachevshy y Dirichlet quienes dieron sus propias versiones de la definición de función. A continuación, citaremos a Dirichlet quien en 1840 escribió la definición de función con la que aún se trabaja hoy en día, "y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo está correspondido un valor definido de la variable y". (Zuñiga, 2009, p. 29, 30).

En 1939, el grupo Bourbaki dio la siguiente definición de función como una regla correspondiente entre dominio y rango:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x E, existe un único y de F el cual está en la relación dada con x. (citado por Díaz, p. 18, de Rüthing, 1984).

2.1.4 Definición del concepto de función exponencial.

Según Pulido (2012, p. 16, 17), es Euler (1707-1783) quien además de precisar el concepto de función matemática con la notación de hoy, $f(x)$; también definió e^x como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, además relacionó la función logarítmica con la exponencial, estableciendo que una es la inversa de la otra.

Las siguientes expresiones son emblemas de su obra:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Como dato adicional, los símbolos i y e, se le atribuyen a Euler, más no el símbolo π, con respecto a esto, fue William Jones (1675-1749) quien la utilizó por primera vez esta letra griega en su obra Synopsis Palmariorum Matheseos (Nueva introducción a la matemática), lo que si le se atribuye a Euler fue la popularización de este símbolo en sus textos, haciéndolo universalmente conocido y usado por los demás hombres de ciencia hasta la actualidad. Con respecto al símbolo *i*, Euler lo utilizaba en un inicio para representar $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, que lo entendía como un número infinito, hoy lo podemos escribir y entender como $e^x = \lim\limits_{h\to\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right)^h$, ya al final de sus días, utilizo la *i* para representar al número imaginario $\sqrt{-1}$.

A continuación, presentamos en el cuadro 12 una parte de la información donde Vargas (2012, p. 52) muestra una síntesis de la evolución del concepto exponente y función exponencial (etapas, características de la evolución y cronología).

La función exponencial.	Las funciones trascendentes fueron estudiadas mediante cuadraturas y sumas de series. Las expresiones analíticas que involucraban números y letras, más que los objetos geométricos en los que se apoyaban, se convirtieron en el centro de atención. Lo concerniente al requerimiento de homogeneidad de las fórmulas fue perdiendo fuerza. El término variable era referido, por Euler como: una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados... Define las funciones exponenciales; "potencias simples cuyos exponentes son variables". Funciones exponenciales: "de sus inversas he llegado al concepto más sencillo y provechoso de logaritmo", y complementa diciendo de las funciones de la forma $y = a^z$, donde $a>1$, "el grado en el que y depende de z, se comprende fácilmente a partir de la naturaleza de los exponentes". Euler calculó, utilizando el binomio generalizado de la serie de Newton, la constante designada por e. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^3}{3.2.1} + \frac{x^4}{4.3.2.1} + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$	Primera mitad del siglo XVIII Euler (1707-1783) escribió su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que está dedicada al estudio de las funciones. Euler (1743). *Elements of Algebra.* Euler (1765)

Cuadro 12: Síntesis de la evolución del concepto de función exponencial
Fuente: Vargas (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales.*

2.2 Aspectos didácticos

2.2.1 Estudio de la función exponencial.

En esta sección, estudiaremos el objeto matemático función exponencial desde dos aspectos: El primero, desde el aspecto de la matemática formal en el que se define a la función exponencial, sus propiedades y características; el segundo, desde el aspecto didáctico.

Para realizar el estudio matemático de la función exponencial, utilizaremos la orientación del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000). Luego, para realizar el estudio didáctico, basados en los registros de representación semiótica de Duval, de la función exponencial del libro de Precálculo: Matemáticas para el cálculo de Stewart, Redlin y Watson (2012).

La Función Exponencial

El estudio formal del objeto función exponencial nos permite darle sustento matemático a la actividad que propongamos.

Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000) empiezan el estudio de la función exponencial considerando primero un número real positivo *a* diferente de 1, para luego definir la función exponencial de base *a* en el registro algebraico.

> La función exponencial de base *a*, $f: R \to R^+$, indicada por la notación $f(x) = a^x$, debe ser definida de modo que tenga las siguientes propiedades, para cualquier $x,\ y \in R$:
>
> 1) $a^x .\, a^y = a^{x+y}$
> 2) $a^1 = a$
> 3) $x < y \ \Rightarrow\ a^x < a^y$ cuando $a > 1$ y
> $x < y \ \Rightarrow\ a^x > a^y$ cuando $0 < a < 1$. (p. 178)

En palabras de Lima et al (2000):

> Es interesante observar que si una función $f: R \to R$ tiene la propiedad (1) de arriba, esto es, $f(x+y) = f(x).f(y)$, entonces f no puede asumir el valor de 0, a menos que sea idénticamente nula.
>
> Más aún, si $f: R \to R$ tiene la propiedad (1) y no es idénticamente nula entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in R$. (pp. 178, 179)

Por ejemplo, para justificar que $f(x) > 0$, consideran la propiedad $f(x+y) = f(x).f(y)$ y realizan el siguiente tratamiento en el registro algebraico:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Si $\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in R$, luego f es la función nula, pero ya no cumpliría la propiedad (3) porque la función es constante.

Seguidamente, Lima et al (2000) muestra un esbozo de la demostración de la buena definición de la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = a^x$, para todo $x \in R$, considerando primero a $x = n \in N$, luego a $x = r \in Q$ y finalmente cuando x pertenece al conjunto de los número irracionales con el fin de extenderlo al conjunto de los números reales, además menciona que así como está definida la función f, ella verifica las tres propiedades anteriores.

Lima et al (2000, p. 180) señalan en el registro algebraico y apoyados con argumentos en lengua natural, algunas otras características de la función exponencial:

> Definiendo f como $f(x) = a^x$, para todo $x \in R$, que cumple las propiedades anteriores, también cumple las siguientes propiedades:
>
> 4) La función $f: R \to R^+$ definida por $f(x) = a^x$, es ilimitada superiormente. (…)
>   Más precisamente: si $a > 1$ entonces a^x crece sin límites cuando $x > 0$ es muy grande. Y si $0 < a < 1$ entonces a^x se vuelve arbitrariamente grande cuando $x < 0$ tiene valor absoluto grande.
> 5) La función exponencial es continua. (…)
>   En símbolos: $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
> 6) La función exponencial $f: R \to R^+$, $f(x) = a^x$, $a^x \neq 1$, es sobreyectiva.

En la figura 3, se observa que la representación en el registro gráfico de la función f definida como $f(x) = a^x$. En esta sección, los autores dan a conocer que la función f es creciente cuando $a > 1$ y es decreciente cuando $0 < a < 1$.

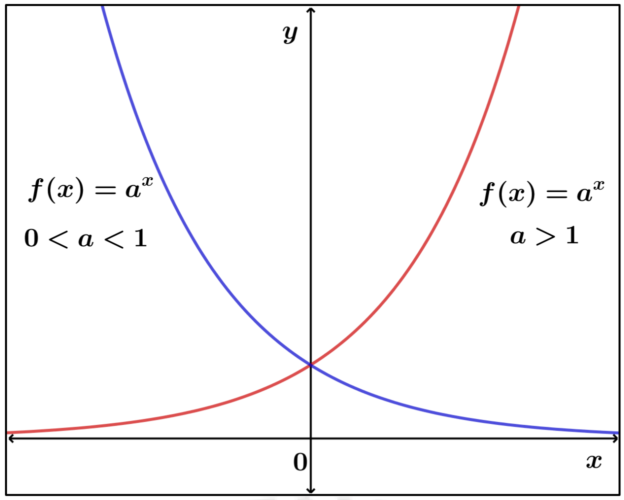


Figura 3: Crecimiento y decrecimiento de la función *f* definida como $f(x) = a^x$
Fuente: Lima et al (2000, p.182). La Matemática de la Enseñanza Media.

Asimismo, Lima et al (2000, p. 182) afirman que el crecimiento exponencial, cuando la base es mayor que uno, supera al crecimiento de cualquier polinomio y considera como ejemplo a la ecuación exponencial $y = 2^x$ y a la ecuación polinómica $y = x^{10}$.

> Si comparamos $y = 2^x$ con $y = x^{10}$, veremos que:
> Para $0 < x < 1,077$; tenemos que $x^{10} < 2^x$.
> Para $1,077 < x < 58,77$; se tiene que $x^{10} > 2^x$.
> Para $x > 58,77$; se tiene que $x^{10} < 2^x$. (p. 182)

En ese sentido, Lima et al (2000) se apoyan en el registro gráfico para ser visibles sus afirmaciones (figura 4):

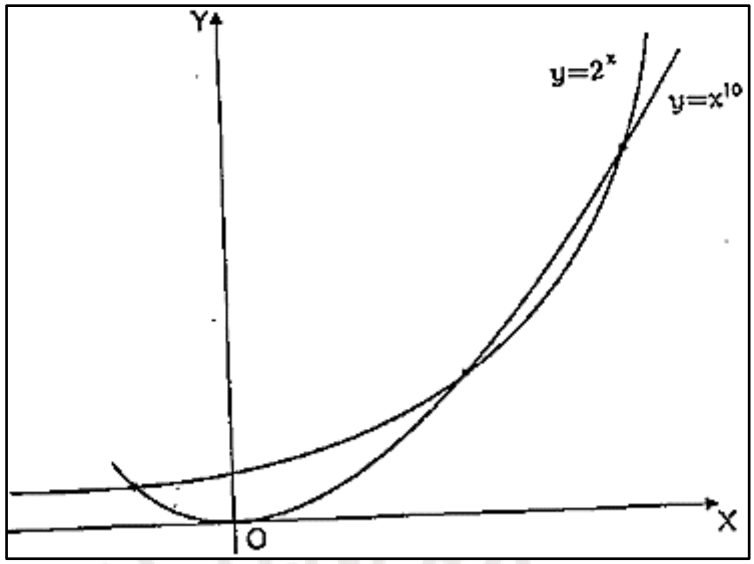


Figura 4: Comparación entre las gráficas de las ecuaciones $y = 2^x$ e $y = x^{10}$.
Fuente: Lima et al (2000, p.182). La Matemática de la Enseñanza Media.

A continuación, Lima et al. (2000) mencionan que las funciones exponenciales juntamente con las funciones afines y cuadráticas son los modelos matemáticos más usados para resolver problemas elementales, además afirman que estás dos últimas funciones son las más importantes en la etapa universitaria puesto que se aplican a actividades científicas o profesionales. Por motivos de rigurosidad, los autores brindan esta información en el registro algebraico.

> **Teorema.** (Caracterización de la función exponencial) Sea $f: R \to R^+$ una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> 1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in Z$ y todo $x \in R$.
> 2) $f(x) = a^n$ para todo $x \in R$, donde $a = f(1)$.
> 3) $f(x+y) = f(x).f(y)$, para cualquier $x,\ y \in R$. (Lima et al. 2000, p. 183)

Los autores mencionan que este teorema puede ser enunciado de modo ligeramente diferente y sustituir la hipótesis de que f es monótona por la suposición de que f es una función continua.

El resultado que veremos a continuación dado en el registro algebraico está relacionado con la variación relativa y variación porcentual. En efecto, los autores definen primero lo que es una función de tipo exponencial. Luego afirman que toda función de tipo exponencial cumple con

$\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^x - 1$. Finalmente, enuncian un teorema que es la recíproca de la afirmación anterior.

En palabras de Lima et al (2000, pp. 184, 185):

> Diremos que una función $g: R \to R$ es de tipo exponencial cuando se tiene que $g(x) = b\,a^x$ para todo $x \in R$, donde a, b son constantes reales positivos. Si $a > 1$, g es creciente y si $0 < a < 1$, g es decreciente.
>
> Si la función $g: R \to R$ es de tipo exponencial, entonces para cualquier $x,\ h \in R$, los cocientes:
>
> $$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^x - 1 \ \text{ y } \ \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^x$$
>
> dependen de *h*, y no de *x*.
>
> Mostramos ahora que también vale la recíproca.
>
> **Teorema.** Sea $g: R \to R^+$ una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente) tal que, para cada $x,\ h \in R$ cualesquiera, el incremento relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de *h*, y no de *x*. Entonces, si $b = g(0)$ y $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, se tiene $g(x) = ba^x$ para todo $x \in R$.

Otro resultado importante es la relación que existe entre la función exponencial y las progresiones aritméticas y geométricas. Lima et al (2000) nos lo explican en el registro algebraico y apoyado en argumentos en lengua natural esta relación entre estos dos objetos.

Funciones Exponenciales y Progresiones

Sea $f: R \to R$ tal que $f(x) = ba^x$ una función de tipo exponencial. Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ es una progresión aritmética de razón *h*, esto es, $x_n = x_{n-1} + h$, entonces los valores

$$f(x_1) = ba^{x_1},\ f(x_2) = ba^{x_2},\ f(x_3) = ba^{x_3}, \ldots,\ f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots$$

forman una progresión geométrica de razón a^h pues

$$f(x_n) = ba^{x_n} = ba^{x_{n-1}+h} = \left(ba^{x_{n-1}}\right)a^h$$

Como el n-ésimo término de la progresión aritmética dada es $x_n = x_1 + (n-1)h$, se sigue que $f(x_n) = f(x_1)\,A^{n-1}$, donde $A = a^h$.

En particular, si $x_1 = 0$, entonces $f(x_1) = b$, luego $f(x_n) = b\,.\,A^{n-1}$, la progresión geométrica está dada por: $b,\, bA,\, bA^2, \ldots, bA^{n-1}, \ldots$

Esta propiedad, dada en el registro algebraico, es característica de las funciones de tipo exponencial, de acuerdo al siguiente teorema.

En palabras de Lima et al. (2000, p. 186):

> **Teorema.** Sea $f: R \to R^+$ una función monótona inyectiva (creciente o decreciente) que transforma toda progresión aritmética $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ en una progresión geométrica $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$. Si ponemos $b = f(0)$ y $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$ tenemos que $f(x) = ba^x$ para todo $x \in R$.

2.2.2 Análisis de materiales didácticos.

A continuación analizaremos desde la TRRS, particularmente desde las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión, cómo se presenta el tema de la función exponencial en cada uno de los materiales didácticos utilizados en la enseñanza de la función exponencial orientada a estudiantes de ingeniería con la finalidad de conocer las definiciones, propiedades, y ejemplos.

Libro

Stewart, Redlin y Watson (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. Cengage Learning Editores. México.

En este libro, el objeto matemático función exponencial se presenta de siguiente manera:

Inicialmente, proponen un ejemplo en el registro algebraico de la función f definida como: $f(x) = 2^x$ para inducir a la noción de función exponencial. Por su parte, Lima et al (2000) también propone las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 10^x$ para explicar que la gráfica de la ecuación exponencial crece más rápido que la gráfica de la ecuación polinómica.

Tratamientos en el registro numérico:

$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$f(10) = 2^{10} = 1024$$
$$f(30) = 2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

Cuadro 13: Tratamiento en el registro numérico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 302). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En la cuadro 13 se observa la rapidez con la que aumentan los valores de la función. Lo que se quiere resaltar es el crecimiento rápido de la función exponencial.

Definición y ejemplos en el registro algebraico:

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Cuadro 14: Definición de la función exponencial en el registro algebraico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 3^x \qquad h(x) = 10^x$$

Base 2 Base 3 Base 10

Cuadro 15: La base es diferente de uno.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 302). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Note en el cuadro 14 que aún no se menciona que la función es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$. De igual forma lo define Lima et al (2000) e incluso muestra un gráfico en donde se muestra cuando la función f es creciente y decreciente. En el cuadro 15 se observa que la base tiene que ser diferente de 1, caso contrario, resultará ser que la función f es la función constante cuya regla de correspondencia es $f(x) = 1$.

Tratamientos en el registro numérico promoviendo el uso de la calculadora:

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

Cuadro 16: Tratamientos en el registro numérico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 303). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En la cuadro 16 se muestran una serie de ejercicios en donde se pide evaluar, todos los ejercicios a excepción del ejercicio (a), se requiere el uso de una calculadora. Además, observamos que la variable x toma un valor natural, luego un valor racional y finalmente dos valores irracionales, estos ejemplos indican que el dominio de la función f se extiende hasta el conjunto de los números reales.

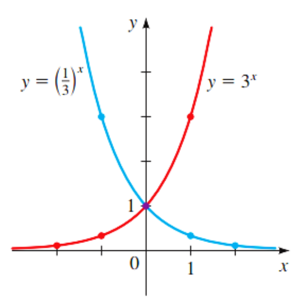
Ejemplos en el registro algebraico, numérico y gráfico:

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



Observe que $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$

Figura 5: Ejemplos en el registro algebraico, numérico (presentado en forma ordenada y secuencial) y gráfico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 303). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En la figura 5 se muestra el proceso de solución de dos ejercicios dados en el registro algebraico. Primero se seleccionan 7 valores numéricos convenientes en el dominio de cada función, luego se evalúa f y g en dichos puntos, los valores numéricos encontrados se colocan en una tabla de forma ordenada y secuencial. Esos pares de números se convierten en pares ordenados cuando se ubican plano cartesiano y se los representa como puntos por donde se trazan curvas las cuales representan a las gráficas de las funciones. Note que ambas gráficas son continuas tal como lo menciona Lima et al (2000) cuando afirma que la función exponencial es continua.

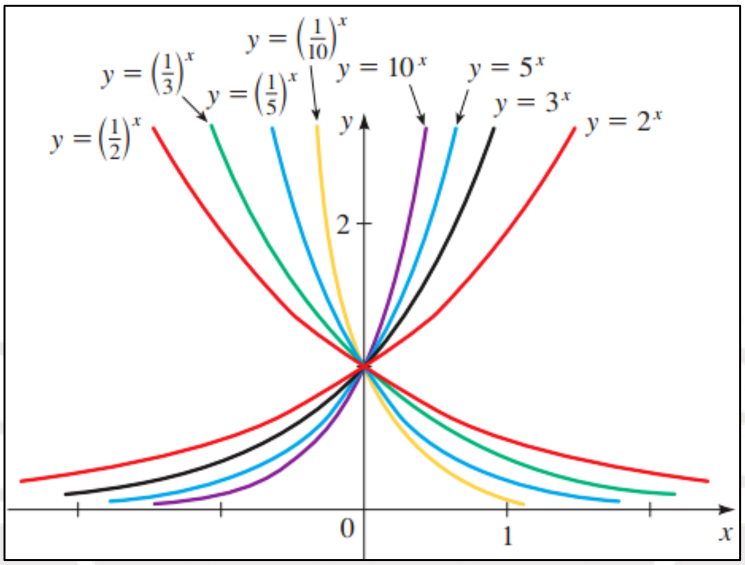


Figura 6: Ejemplos en el registro gráfico para diferentes bases de la función exponencial.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 304). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En la figura 6 observamos una familia de funciones exponenciales dadas en el registro gráfico que pasan por el puntos (0;1), aquí se puede notar dos tipos de funciones, unas crecientes y otras decrecientes, esto sirve de preámbulo a la definición de función exponencial.

Definición y ejemplos en el registro algebraico y gráfico, considerando el dominio, rango y la asíntota.

En la figura 7 se observa cómo definen los autores, en el registro algebraico, al objeto función exponencial cuando $a > 1$ y cuando $0 < a < 1$, considerando su dominio, rango, la asíntota horizontal y el intercepto con el eje y. Además, incluyen las gráficas cuando la función creciente y decreciente. Además, para dar realce a la definición, muestran dos gráficas, una creciente y otra decreciente en donde se observa la asíntota horizontal y el intercepto con el eje y.

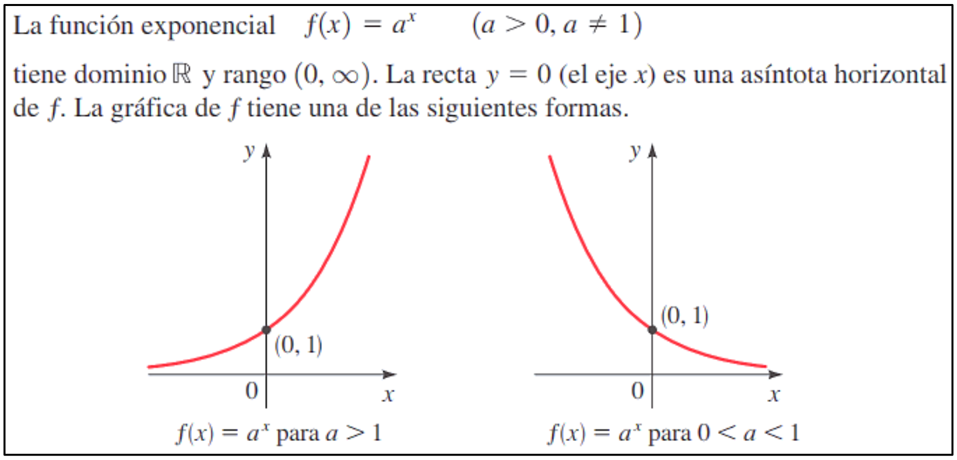


Figura 7: Definición de la función exponencial para $a > 1$ y $0 < a < 1$.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 304). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Transformaciones de funciones exponenciales.

En la figura 8 observamos 3 ejemplos planteados en el registro algebraico sobre transformaciones de funciones exponenciales, en el cual se les solicita que **grafiquen**. Cada gráfica tiene su respectiva justificación a partir de la función f definida como $f(x) = 2^x$. En las gráficas podemos observar que las transformaciones que se han considerado son las siguientes:

(a) Translación vertical hacia arriba.
(b) Reflexión con respecto al eje y.
(c) Translación horizontal hacia la derecha.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura (a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la Figura (b).

(c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la Figura (c).

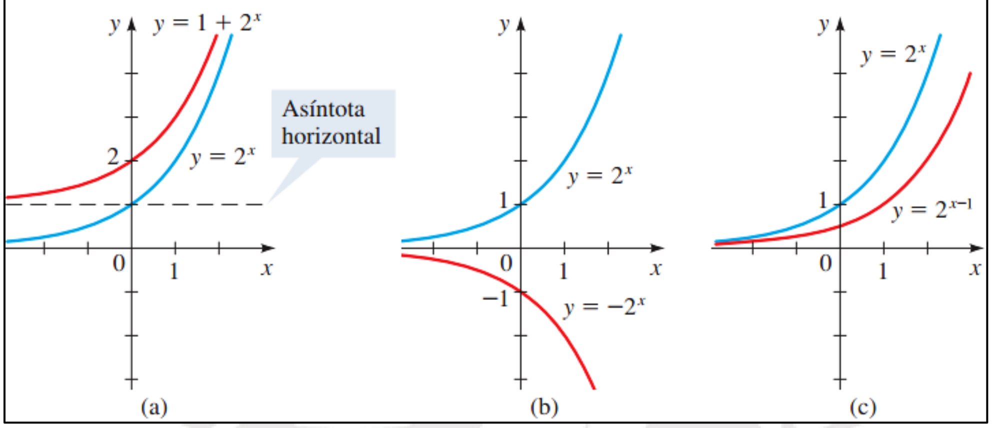


Figura 8: Transformaciones de la función exponencial.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 305). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Ejemplo aplicativo: Interés compuesto.

En el cuadro 17 observamos la regla de correspondencia de la función interés compuesto A, la cual está redactada en el registro algebraico y tiene como variable independiente al número de años representada con la letra t.

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde
$A(t)$ = cantidad después de t años
P = principal
r = tasa de interés por año
n = número de veces que el interés se capitaliza por año
t = número de años

Cuadro 17: Fórmula para hallar el interés compuesto.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 306). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En el cuadro 18 se muestra un ejemplo aplicativo de la función interés compuesto enunciado en el registro de lengua natural.

EJEMPLO 6 | Cálculo de interés compuesto

Una suma de $1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensualmente y a diario.

Cuadro 18: Ejemplo aplicativo de la función exponencial.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 306). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En el cuadro 19 podemos observar el desarrollo del problema, notamos la conversión del registro en lengua natural al registro numérico, también tratamientos en este registro numérico.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semestral	2	$1000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diario	365	$1000\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

Cuadro 19: Solución usando tratamientos en el registro numérico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 307). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En la presentación del objeto matemático función exponencial, Stewart, Redlin y Watson (2012) presentan un ejemplo clásico y utilizado en varios libros de matemática superior, esto es, la función f definida como $f(x)=2^x$. Luego, la pasan a la definición formal de la función exponencial y los ejemplos desarrollados pasan del registro algebraico al registro numérico y tabular, para luego representarlo en el registro gráfico. Cabe señalar que para el tratamiento en el registro numérico recurren al uso de la calculadora. El registro tabular no es mencionado por Duval, sino otros autores como Font (2000).

Observamos que Lima et al (2000) menciona seis propiedades, por ejemplo, nos dice que una función exponencial es ilimitada, continua y sobreyectiva, sin embargo, Stewart, Redlin y Watson (2012) no lo mencionan, ni tampoco mencionan que la función exponencial crece rápidamente a medida que la base $a > 1$ aumenta. Otro punto a observar es que mientras Lima et al (2000) dan unas pautas sobre la relación entre la función exponencial, y las progresiones aritméticas y geométricas, los autores del libro de Precálculo no lo dan a conocer.

CAPÍTULO III: ASPECTOS DEL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el presente capítulo mostraremos algunos elementos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas y de la metodología que utilizaremos en nuestra investigación, la Ingeniería Didáctica

3.1 ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICA

Antes de señalar algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS), haremos un comentario conciso sobre el responsable del desarrollo de esta teoría, Raymond Duval (filósofo y psicólogo de formación), catedrático de la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo, quien además trabajó en el Instituto de Investigación en Educación Matemática (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques - IREM) desde 1969 a 1995. En este instituto formó parte en varias investigaciones con estudiantes de 11 a 16 años, todos estos estudios y experiencias lo llevaron a escribir reconocidas obras como "*Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*", publicada en 1995. En esta obra se desarrolla la teoría de representaciones semióticas y analiza el funcionamiento del pensamiento durante la adquisición de conocimiento. Según Duval (1999): "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma", (p. 5). Sus temas de investigación se centraron principalmente en la comprensión de textos, la argumentación, el razonamiento y los diversos tipos de visualización en matemática.

Al respecto Duval (2004, p.24) menciona que:

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas.

Según Duval (2003), para acceder a la comprensión de un objeto matemático, se necesita por lo menos de la articulación de dos registros de representación, el mismo objeto puede ser dado por medio de representaciones diferentes, cualquier acción, actividad cognitiva o tratamiento se realiza sobre dichos registros de representación. Con referencia a la comprensión del objeto función exponencial, su acceso no debe restringirse al uso de un solo registro, sino que debe incluir la capacidad de transitar la información de un registro a otro.

En ese contexto, Duval (2006) manifiesta que no debe de haber confusión, en ningún momento, entre el objeto matemático y su representación, caso contrario estaríamos incurriendo en un error que con el tiempo desembocaría en una serie de dificultades y sería un obstáculo para la comprensión no solo del objeto de estudio, sino también de otros objetos matemáticos.

En palabras de Duval (2006):

> Es esencial no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones. Toda confusión entre objeto y su representación, provoca en un plazo más o menos amplio, una pérdida de comprensión; los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto del aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones inherentes que no sugieren ninguna transformación productora. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación.

Por otro lado, es importante señalar que en las actividades que propongamos, se plantearán preguntas orientadas para que el estudiante transite la información por diversos tipos de representaciones semióticas, con el fin de que el estudiante vaya adquiriendo una comprensión adecuada del objeto matemático de estudio. Según Duval (2006), las matemáticas son el campo en el que nos encontramos con la más amplia variedad de sistemas semióticos de representación, desde aquellos comunes a cualquier área del conocimiento humano como el lenguaje natural, hasta aquellos sistemas específicos e inherentes a las matemáticas como signos algebraicos, y expresiones formales y rigurosas.

En esa línea, Villaseñor (2011, pp. 7, 8) afirma que:

> Siempre que hacemos matemáticas, inevitablemente usamos algún tipo de representación, ya sea a través del lenguaje natural o mediante los signos y gráficas propios de las matemáticas. Un texto o un discurso, una notación convencional, un cierto tipo de gráfica, las figuras geométricas, etcétera, son ejemplos de representaciones. Usamos todo ello con el fin de que el estudiante desarrolle un significado adecuado para un cierto objeto o concepto matemático.

En la actualidad, uno de los temas de investigación que cobran mayor atención e interés en el campo educativo y de la didáctica de la matemática es precisamente el tema de las representaciones (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1994; Descaves, 1999; Dubinsky, 1991, 1996; Duval, 1993, 1995; Contreras et al 2004; Godino, 1994, 1998; Hughes, 1987; Hurbert y Carpenter, 1992; Kaput, 1987, 1991, 1992; Peltier, 2003; Riviere, 1986; Tall, 1998; Vergnaud, 1991, 1994, 2007; entre otros, citado por Font, 2000). Según Tamayo (2006), desde el punto de vista de las ciencias cognitivas, las representaciones son consideradas como cualquier noción, conjunto de signos o símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior. A la par, otro concepto que comenzó a formar parte de las investigaciones en didáctica de la matemática, según D'Amore, Fadiño y Lori (2013), es el concepto de semiótica. Al respecto, Cobley y Jansz (2004, p. 4) mencionan que: "La semiótica como disciplina es el análisis de los signos o el estudio del funcionamiento de sistemas de signos". Y según Duval (1999a), fue Pierce el primero en reconocer la importancia de la semiosis en la lógica, además fue el primero en clasificarla en tres tipos: íconos, símbolos e índices, sin embargo, deja de lado las posibles relaciones entre diferentes sistemas semióticos y el problema de la conversión de las representación de un sistema a otro.

Ahora veamos algunos aspectos de la TRRS:

Iniciamos esta sección enunciando la famosa paradoja cognitiva del pensamiento matemático de Duval (1993, citado y traducido por D'Amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi, p. 180) y posteriormente profundizamos en algunos puntos:

> (…) por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representación semióticas, si no tienen el domino conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

3.1.1 Representación mental y representación semiótica

En la TRRS, se considera que no hay conocimiento matemático que pueda ser movilizado por un individuo fuera de toda actividad de representación, puesto que los objetos matemáticos no son objetos reales, por tal motivo requieren de la utilización de varios sistemas de representación (como por ejemplo: las figuras geométricas, el lenguaje algebraico, gráfico, y la lengua natural) que son fundamentales para el ejercicio y el desarrollo de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. De esta manera el estudiante aprende, construye y se apropia del concepto del objeto matemático.

Con respecto a las representaciones, Font (2000) menciona que Duval distingue tres tipos de representaciones, mentales, semióticas y computacionales; en esta investigación hacemos mención de las dos primeras.

✓ **Representaciones mentales**

Las representaciones mentales, también llamadas representaciones internas o privadas, tienen su base en la psicología cognitiva. Según Duval (1999a, 2006), estas representaciones son obtenidas de un conjunto de imágenes, concepciones, creencias y fantasías que un sujeto tiene de un objeto o de una situación, su campo de acción es nuestra mente y son de carácter netamente internas, por tanto, no pueden ser percibidas por nuestros sentidos. Para hacerlas visibles y accesible se requiere de las representaciones semióticas.

Al respecto, Duval (1999a, p. 35) afirma:

> Las representaciones mentales son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible. Por lo general, se igualan con las "imágenes mentales" en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción. Pero las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que el de las imágenes. Es necesario incorporar en ellas no solo los conceptos, las nociones, las "ideas", sino también las creencias y las fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos.

Más adelante veremos que existe una ‘interacción’ un tanto compleja entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas.

✓ Representaciones semióticas

Las representaciones semióticas o externas, según Duval (1995), son producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significación y de funcionamiento. Las representaciones semióticas son medios que disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, a través de ellas nos dan ideas de lo que el sujeto ha representado internamente. En matemática, las representaciones semióticas y cómo se accede a ellas son indispensables y cruciales para la adquisición y comprensión de un concepto por parte del estudiante, pues a través de estas representaciones podemos realizar diversas funciones como tratamientos y conversiones, estos dos conceptos lo veremos más adelante. Además, las representaciones semióticas son medios para la producción de conocimientos, cuanta más representaciones semióticas sobre un mismo objeto, más se enriquece el conocimiento y la utilidad, es decir, más se enriquece la comprensión sobre dicho objeto.

Al respecto, Duval (1995) afirma:

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (p.14)

En esa dirección, se identifica una actividad relacionada a la producción de representaciones y otra a la aprehensión conceptual del objeto, al respecto Duval (1999, p, 6) las llama semiosis y noesis respectivamente, y afirma que: “no hay noesis sin semiosis”, es decir no habrá comprensión del objeto matemático sin la identificación y uso de varias representaciones semióticas.

Por otro lado, Duval (1999a) menciona que no puede haber una correspondencia directa entre ambas representaciones, los motivos son los siguientes: Puede haber una gran diferencia entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que él produce para expresar las primeras. Las representaciones semióticas presentan un grado de libertad, necesario para todo tratamiento de la información, las representaciones mentales no lo tienen. Por último, existen diversas formas de representaciones semióticas de un mismo objeto, esto es esencial para el tratamiento y la conceptualización de dicho objeto. Ahora hablaremos sobre los registros de representaciones semióticas.

3.1.2 Registros de representaciones semióticas

Duval (1999a, 1999b) define a los registros de representación semiótica como sistemas particulares de representación semiótica que deben de cumplir tres actividades cognitivas fundamentales: la formación, el tratamiento y la conversión. La primera está relacionada con una representación metal y las otras con la transformación de las representaciones

A continuación, detallamos brevemente en que consiste cada una de las tres actividades cognitivas:

1) **La formación** hace referencia a la identificación o reconocimiento de una representación dentro de un registro semiótico particular. Sea para expresar una representación mental o para evocar un objeto real, la formación siempre implica una selección dentro de una agrupación de caracteres determinados de un registro. Por ejemplo, el enunciado de una frase u oración, la elaboración de un dibujo, esquema o gráfica, la escritura de una expresión algebraica, fórmula escrita, etc. Esta formación debe acatar las reglas propias del registro dado, la razón es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos posteriores.

   Para ilustrar este punto, consideremos a modo de ejemplo a la función exponencial f, evaluada en los puntos 0, 1 y 2, donde podemos notar que la formación está sujeta a reglas propias del sistema algebraico para funciones reales de una variable real:

$$f(x) = Ab^{x}$$

$$\text{donde}: A_0 = f(0),\ A_0 \text{ es el valor inicial}$$

$$f(1) = 10,\ f(2) = 40$$

$$b: \text{ base}$$

2) **El tratamiento** de una representación es la transformación de una representación (inicial) a otra representación (final) en el mismo registro donde ha sido considerada y con respecto a una situación, cuestión, problema o necesidad , es decir, es una transformación interna que responde a un problema o necesidad dentro de una situación planteada, teniendo en cuenta las reglas propias del registro de representación (por ejemplo, si

estamos en el registro algebraico, tener en cuenta las operaciones algebraicas). Según Duval (2004), el tratamiento en el registro de lengua natural sería la paráfrasis o reformulación en lengua natural. Con respecto al registro gráfico, el autor manifiesta que el tratamiento en este registro sería, por ejemplo, discriminar las características de dos gráficas.

Para la resolución de un problema, la conversión y el tratamiento lo son todo, se necesita la elección del mejor registro en donde se pueda efectuar el tratamiento correspondiente. Cuanto más eficiente sea el tratamiento, mayor reconocimiento adquiere el registro. En palabras de Duval (2006, p. 149): "lo que importa es el tratamiento, que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado".

Para ilustrar este punto, consideramos a la función exponencial f definida como $f(x) = Ab^x$, bajo las siguientes condiciones:

$A_0 = f(0)$, A_0 es el valor inicial, $f(1) = 10$, $f(2) = 40$, con b: base y k: constante

Ahora utilizamos como tratamiento algunas operaciones algebraicas, en efecto:

Tratamiento

$$\begin{array}{l|l} f(x) = Ab^x \quad \text{(Representación inicial)} & A_0 = f(0) = Ab^0 = A \\ \text{donde: } A_0 = f(0),\ A_0 \text{ es el valor inicial} & \text{Luego, } f(x) = A_0 b^x \\ \qquad f(1) = 10,\ f(2) = 40 & \text{Evaluamos} \\ \qquad b:\ \text{base} & \left.\begin{array}{l} f(1) = A_0 b = 10 \\ f(2) = A_0 b^2 = 40 \end{array}\right\} \text{dividiendo: } b = 4 \\ & \text{Así, } \underbrace{f(x) = A_0 4^x}_{\text{Representación final}} \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{\text{Así, } f(x) = A_0 4^x \text{ Representación final}}}_{\text{Transformación interna}}$$

En el esquema apreciamos un tratamiento o transformación interna de la expresión $f(x) = Ab^{kx}$ a la expresión $f(x) = A_0 4^x$ mediante operaciones algebraicas dentro del registro algebraico

3) **La conversión** es una transformación de la representación de un objeto, situación o información dada en un registro de representación semiótica, en otra representación del mismo objeto, situación o información en otro registro de representación semiótica. La conversión es una transformación externa con respecto al registro de representación inicial, conservando el contenido total o parcial de dicha representación inicial, por tanto, es necesario seleccionar aquellos elementos relevantes en el registro de representación final y reorganizarlos para su tratamiento. Así por ejemplo, al representar el enunciado de un problema por medio de una ecuación, se realiza la conversión del registro de representación en lengua natural al registro algebraico, en dicho proceso se pierden algunos elementos del discurso en lengua natural.

Un hecho resaltante es que la conversión es el resultado de la comprensión del objeto matemático de estudio, a veces se necesita más de una conversión para tal objetivo. En palabras de Duval (2006, p. 149): "parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión", esto quiere decir que la conversión es la actividad cognitiva menos espontánea y no tan fácil de adquirir por la mayoría de estudiantes.

A continuación, veamos dos ejemplos relacionados con estas actividades cognitivas fundamentales. El primero es propuesto por Duval (2006), cuadro 20, en él observamos un problema sobre edades presentado en el registro de lengua natural, la conversión del registro de lengua natural al algebraico y el tratamiento en el registro algebraico. En este ejemplo se observa la definición de la variable x como la edad de Pedro y a partir de allí se define la edad de Juan; en el tratamiento se pierde la idea de la edad de Pedro y de Juan.

<table>
<tr><td colspan="2">TRANSFORMACIÓN
de una representación semiótica en otra.
Juan es 3 años mayor que Pedro, juntos tienen 23 años de edad.
¿Qué edad tienen?</td></tr>
<tr><td>CONVERSIÓN
Cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados.</td><td>TRATAMIENTO
Manteniendo el mismo sistema semiótico.</td></tr>
<tr><td>$\downarrow$
$x+(x+3)=23$</td><td>$x+(x+3)=23$
$\downarrow$
$2x+3=23$
$\downarrow$
$2x=23-3$
$\downarrow$
……….</td></tr>
</table>

Cuadro 20: Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.
Fuente: Duval (2006, p. 146)

El segundo ejemplo que hemos considerado es un problema de crecimiento poblacional, tomado de investigación de Advíncula (2010, p. 166), cuadro 21, el cual está enunciado en lengua natural de la siguiente manera:

La población mundial al inicio del año 1990 era de 5,3 mil millones de habitantes. Si la población continúa creciendo a una razón de aproximadamente 2% al año. Determine la función que exprese la población mundial (en miles de millones) como función del tiempo, donde el tiempo igual a cero corresponde al año 1990.

Cuadro 21: Ejemplo de un problema de crecimiento poblacional.
Fuente: Advíncula (2010, p. 166)

Solución:

Para determinar la función que exprese la población mundial dependiente del tiempo e miles de millones, realizamos los cambios de registro (del registro de lengua natural al registro numérico, y del numérico al registro algebraico) y los tratamientos correspondientes, por ejemplo:

Años	Operaciones	
0		5,3
1	Factorización y operaciones numéricas, por ejemplo: 5,3 + 2%(5,3) = 5,3(1 + 0,02) = 5,3(1,02)	$5,3(1,02)$
2	$5,3(1,02)+2\%\left[5,3(1,02)\right]$	$5,3(1,02)^2$
3	$5,3(1,02)^2+2\%\left[5,3(1,02)^2\right]$	$5,3(1,02)^3$
4	$5,3(1,02)^3+2\%\left[5,3(1,02)^3\right]$	$5,3(1,02)^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t		$P(t)=5,3(1,02)^t$

Respuesta: La función que expresa la población mundial es la función exponencial representada por P y definida como $P(t)=5,3(1,02)^t$, donde t es el tiempo en miles de millones de años.

Otro punto a tomar en cuenta es la posibilidad de realizar la actividad cognitiva de conversión en ambos sentidos, aunque también cabe la posibilidad de que el tránsito inverso de uno de los registros al otro sea un tanto más complicado.

De estas tres las actividades cognitivas, la formación y el tratamiento son las más utilizadas por los docentes en el proceso de enseñanza, por ejemplo, muchos docentes creen que las operaciones en el registro algebraico merecen mayor reconocimiento que las resoluciones de problemas en otros registros, y si usan la conversión, solo se limitan a la conversión clásica y tradicional, del registro de lengua natural al numérico, del numérico al gráfico y finalmente del gráfico al algebraico (Castro, González y Ramírez, 2016).

✓ **Registros de representación en Matemáticas**

Acorde con lo manifestado anteriormente, Duval (199b, 2004, 2006) considera que existen por un lado registros de tipo discursivo y no discursivo, y por otro lado registros monofuncionales y multifuncionales:

1) **Los registros discursivos** son aquellos que utilizan una lengua natural y sirven para enunciar proposiciones y transformar expresiones, además permiten describir, inferir, declarar, denotar, razonar, hasta incluso calcular.

   Ejemplo: Argumentos de forma verbal o escrito.

2) **Los registros no discursivos** son aquellos que muestran configuraciones de formas y organizaciones, estos registros nos permiten visualizar aquello que no es dado de forma visible.

   Ejemplo: Figuras geométricas.

3) **Los registros monofuncionales** son aquellos que se especializan en tratamientos de tipo algorítmico, son del tipo técnico y formal, tienen mayor contundencia en el tratamiento que los multifuncionales.

   Ejemplo: Escritura simbólica, sistemas algebraicos.

4) **Los registros multifuncionales** son aquellos que son utilizados en diversos campos de la vida cultural y social, sus tratamientos no son algorítmicos y favorecen la aplicación de diversas actividades cognitivas como la comunicación, procesamiento, imaginación, etc.

   Ejemplo: Graficas cartesianas.

A manera de resumen, presentamos el cuadro 22 elaborado por Duval (2006) acerca de estos cuatro registros, aquí observamos que la lengua natural es un registro multifuncional y discursivo, las figuras geométricas son multifuncionales y no discursivas, la escritura simbólica es monofuncional y discursiva, y los sistemas cartesianos son monofuncionales y no discursivos:

	Representaciones resultantes de operaciones discursivas: denotación, declaración, inferencia razonamiento. (Registros discursivos)	Representaciones no discursivas: visualizar. (Registros no discursivos)
Registros Multifuncionales Los tratamientos no son algorítmicos.	En lenguaje natural: Oral o escrito. Explicaciones, asociaciones, razonamientos (argumentaciones desde la observación, creencias, deducción válida a partir de definiciones o de teoremas, etc.)	Icónicos: Dibujos, esquemas, patrones. No icónicos: Figuras geométricas como: configuraciones de forma, en el plano o en perspectiva. Aprehensión operativa y no solamente aprehensión perceptual. Construcción con instrumentos.
Registros Monofuncionales Los tratamientos son principalmente algorítmicos.	En sistemas simbólicos, sistemas numéricos: binario, decimal, fraccionario. Sistemas de notación simbólicos o algebraicos, lenguajes formales. Computación, pruebas.	Gráficos cartesianos: Cambio de sistemas de coordenadas, interpolación, extrapolación. Diagramas, gráficas

Cuadro 22: Clasificación de diferentes registros en la actividad matemática.
Fuente: Duval(2006, p. 110)

Según Duval (2017), la noción de registro de representación semiótica se introdujo para explicar los tratamientos y las conversiones que distinguen la actividad matemática de las otras formas de actividad intelectual.

A continuación, mostramos cuatro tipos de registros (lengua natural, numérico, algebraico y gráfico) considerados por Duval (1999), los cuales hemos tomado en cuenta en la elaboración de nuestra actividad.

✓ **Registros de representación para la función exponencial.**

Primero consideramos los conceptos de cada uno de los registros desarrollados y estudiados por Duval (1999), quien nos muestra 5 tipos de registros (lengua natural, numérico, algebraico, gráfico y figural), de los cuales solo utilizaremos 4 de ellos (lengua natural, numérico, algebraico y gráfico), después mostramos dos ejemplos con registros de representación para la función y la función exponencial

1. **Registro de representación en lenguaje natural:** Este registro es ideal para introducir definiciones, así como hacer descripciones, explicaciones y plantear problemas que giren alrededor de la función exponencial.

   Al respecto, Chamorro (2007, p. 131) nos dice que:

   > La mayoría de los problemas que se proponen son dados en este registro con las siguientes características: Describir en lengua materna una situación de la vida real (en algunos casos se acompaña de dibujos que juegan un papel auxiliar decorativo), resaltar aspectos cuantitativos de la situación (comúnmente los datos numéricos se utilizan en la solución y suelen ser suficientes sin que falte o sobre alguno) y expresar aumentos, disminuciones, comparaciones como perder, comprar, regalar, (…) para inducir las operaciones asociadas.

   Cabe mencionar que, según Duval (2017), la originalidad y poder de este registro radica en que actúan simultáneamente la comunicación y todas las funciones cognitivas. Además considera que el lenguaje puede ser un código o un registro dependiendo si favorecemos a la función comunicativa o cognitiva respectivamente.

2. **Registro de representación numérico:** Este registro permite realizar operaciones de cálculo, aplicar operaciones como pueden ser la conmutativa, asociativa, distributiva, etc,, necesarias para resolver diversos problemas. Además, permite observar algunas características de los objetos matemáticos, por ejemplo, en el siguiente cuadro se observa como a medida que los valores de x aumenta, 2^x (potencias de 2) crece rápidamente.

x	1	3	5	7	9	11	13	15
2^x	2	8	32	128	512	2048	9192	36768

   En general, según Duval (2017, p. 48), "los sistemas numéricos son registros y no códigos como los alfabetos".

3. **Registro de representación gráfico**: Este registro permite deducir, de manera visual, el comportamiento que va seguir la función exponencial, así como realizar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc.; este registro hace uso del plano cartesiano.

4. **Registro de representación algebraico:** Este registro muestra características particulares de manera formal y rigurosa de la función exponencial.

Los registros de representación relacionados con el concepto de función y en particular la función exponencial ponen a consideración diversos procesos cognitivos.

Al respecto, citamos a Font (2001), quien señala que:

> La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la Geometría y la Topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el Álgebra. (p. 182)

Por su parte, Javier (1987) considera que el aprendizaje de las funciones no debe de restringirse al uso de una sola forma de representación (él lo llama representación ostensible), sino que debe incluir la capacidad de transitar de una representación a otra. En ese sentido, elabora un cuadro (23) para organizar las diferentes formas de transitar entre las representaciones. Font (2001) considera las ideas de Javier y menciona que estas actividades que se pueden trabajar en clase.

hacia / desde	Situación, descripción verbal	Tabla	Grafica	Expresión analítica
Situación, descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación / cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Grafica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Cuadro 23: Tabla de conversiones.
Fuente: Adaptación de Font (2001, p. 182) de la tabla propuesta por Javier (1987).

Cabe señalar que Duval (1999) menciona al registro tabla, pero no lo utiliza como parte de sus investigaciones.

A continuación, presentamos algunas características de los cuatro tipos de registros de representación semiótica en el concepto de función con su respectiva descripción elaborado por Prada, Hernández y Ramírez (2016) (ver el cuadro 24):

Tipos de representación	**Característica**
Lenguaje natural	Representación que utiliza expresiones y palabras propias de la lengua, como por ejemplo, el cuadrado de un número.
Tablas	Representación horizontal o vertical en la que se identifican valores asociados de la variable independiente y dependiente
Gráficas	Representación de tipo visual que se apoya en los conceptos de plano cartesiano, par ordenado y otros del mismo estilo.
Fórmulas	Representación de tipo algebraico en la que se visualiza la expresión que relaciona las variables x y y.

Cuadro 24: Descripción de los tipos de representación semiótica.
Fuente: Prada, Hernández y Ramírez (2016, p. 193)

Seguidamente, presentamos otro ejemplo de elaboración propia con respecto a la función exponencial enunciado en los registros de lengua natural, numérico, gráfico y algebraico.

Ejemplo de elaboración propia:

Registro de representación de lengua natural.

La población mundial al inicio del año 1990 era de 5,3 mil millones de habitantes. Si la población continua creciendo a una razón de aproximadamente 2% al año.

¿Qué debe suceder en un país para que la tasa de crecimiento sea constante en un lapso de tiempo de 5 años?

Registro de representación numérico.

La siguiente tabla muestra el crecimiento poblacional mundial desde 1990 hasta 1992, donde los valores de la variable independiente "*t*" esta espaciada una con otra por 1 unidad que representa un año y $P(t)$ es el número de habitantes en el mundo en miles de millones. Determine la variación de la población mundial entre los años 1993 y 1994.

t	$P(t)$
0	5,3
1	5,406
2	5,51412

Registro de representación gráfico.

En la figura 9 se muestra la gráfica de la función *P*, la cual representa el crecimiento poblacional mundial en miles de millones de habitantes desde 1990, donde *t* está dado en años.

Traza sobre la figura 3 posibles comportamientos de la gráfica a partir del año 2010.

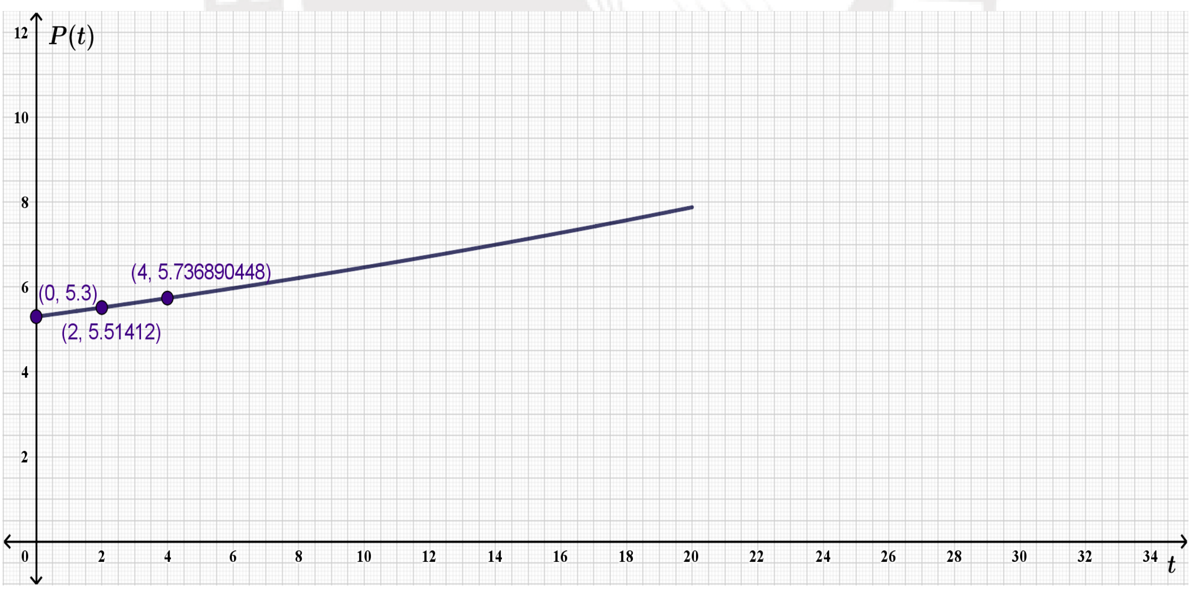


Figura 9: Gráfica de la función *P*.
Fuente: Elaboración propia.

Registro de representación algebraico.

La regla de correspondencia de la función exponencial P representa a la población mundial en miles de millones de habitantes, donde $P(t) = Ab^t$, además $P(0) = 5{,}3$, $P(1) = 5{,}406$ y t está dada en años a partir de 1990.

Determine explícitamente $P(t)$.

3.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. ASPECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

A continuación, se detalla la metodología de investigación que se empleará en la investigación, esto es, la metodología cualitativa, la cual permitirá analizar el proceso de construcción del concepto de función exponencial.

En ese sentido, Taylor y Bogdan (2000), sintetizan los criterios definitorios de los estudios cualitativos de la siguiente manera:

1. La investigación cualitativa es inductiva.
2. Entiende el contexto y a las personas bajo una perspectiva holística.
3. Es sensible a los efectos que el investigador causa a las personas que son el objeto de su estudio.
4. El investigador cualitativo trata de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas.
5. El investigador cualitativo suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones.
6. Todas las perspectivas son valiosas.
7. Los métodos cualitativos son humanistas.
8. Los estudios cualitativos dan énfasis a la validez de la investigación.
9. Todos los contextos y personas son potenciales ámbitos de estudio.
10. La investigación cualitativa es un arte.

Ellos señalan que uno de los tipos de metodologías de investigación cualitativa que se emplean actualmente en la Enseñanza de las Matemáticas es la Ingeniería Didáctica, la cual permite analizar de manera minuciosa todos los procesos de construcción y comunicación que moviliza un estudiante para apropiarse de un conocimiento determinado.

Por su parte, Izcara (2014) menciona que los investigadores que usan esta metodología tienen mayor interés en el proceso más que en los resultados, sean estos favorables o desfavorables. Ahora pasamos a desarrollar qué aspectos de esta metodología vamos a considerar para nuestra investigación.

Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Con respecto a esta metodología, ella surgió en la década de los 80 como consecuencia de las investigaciones de Michéle Artigue, quien denominó a esta metodología con el término Ingeniería para hacer un parangón entre el trabajo didáctico y el trabajo del ingeniero, ya que para construir se requiere de bases sólidas y bien definidas.

Artigue (1995) menciona que la Ingeniería Didáctica está basada en el desarrollo de experiencias didácticas en clase, donde primero se realizan algunos análisis preliminares, luego se propone la secuencia didáctica, a continuación se ejecuta la secuencia didáctica, para finalmente analizar los resultados obtenidos de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

En palabras de Artigue (1995):

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (pp. 33-34).

Fases de la Ingeniería Didáctica

Artigue indica que la Ingeniería Didáctica se divide en cuatro fases, las cuales pasamos a enunciar y describir:

1. Fase preliminar

Se deduce que la fase preliminar es el análisis previo realizado por el profesor para identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático función exponencial, la manera en la que se presenta dicho objeto matemático en los libros y en los centros de estudio, su desarrollo histórico, los problemas o dificultades surgidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho objeto matemático.

En palabras de Artigue (1995):

> En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. (p. 38).

En este análisis, se hace necesaria la presentación de tres dimensiones:

1.1 Epistemológica: En esta dimensión, se analiza los aspectos teóricos del objeto matemático función exponencial, es decir, una reseña histórica, así como, los aspectos teóricos relacionados y la forma de abordarlo ante posibles dificultades. Además, se analizará algunos textos de nivel universitario para saber cómo presentan este objeto matemático.

1.2 Cognitivas: En esta dimensión, se analiza la forma en que los estudiantes interpretan el conocimiento matemático mencionado anteriormente, esto tiene que ver con los errores que comenten teniendo en cuenta sus conocimientos previos.

1.3 Didáctica: En esta dimensión, se analiza la forma en que los estudiantes han recibido la enseñanza del objeto de estudio y los efectos de dicha enseñanza.

2. Fase de concepción y análisis *a priori*

Esta fase se basa en una serie de hipótesis sobre lo que podrían hacer los estudiantes durante la secuencia didáctica. La validación o no de estas hipótesis se formalizará cuando se confronten el análisis a priori con el análisis a posteriori durante la cuarta fase.

En palabras de Artigue (1995):

> El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. (p. 45)

3. Fase de experimentación.

Según Artigue (1995), esta es la fase donde se ejecuta toda las actividades de la secuencia didáctica que ha sido estructurada con anticipación. Es aquí donde el profesor-investigador, los observadores y los estudiantes se reúnen en el aula donde se realizará el proceso de aprendizaje, y es aquí donde se inicia el contrato didáctico que precisa los roles y las obligaciones de cada uno de los participantes. Además, se aplican de los instrumentos elaborados y se anotan las observaciones realizadas.

Según De Farías (2006, p. 5), en esta fase ocurre:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes participantes en la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de las observaciones.

4. Fase de análisis *a posteriori* y validación

En esta última fase, el investigador recolecta y organiza los datos obtenidos durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Seguidamente, se hace el contraste entre el análisis *a priori* con los resultados obtenidos en la fase de experimentación, es decir, la validación de las hipótesis formuladas se efectúa a partir de la comparación entre el producto obtenido de los estudiantes y lo que se esperaba que ellos respondan durante el desarrollo de la secuencia didáctica.

Según Artigué (1995):

> Análisis *a posteriori*, se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (p. 48).

CAPITULO IV: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo realizaremos la descripción de los sujetos de la investigación, la secuencia de actividades, las técnicas y los instrumentos de recolección de la información, y finalmente el análisis a priori y a posteriori de acuerdo a los antecedentes, la metodología y el marco teórico de la investigación que hemos considerado.

4.1 Escenario de la investigación.

Se eligió como escenario para realizar la experimentación un aula ubicada en el campus universitario, además consta de carpetas individuales, computadora, cañón multimedia y pizarra acrílica, los estudiantes harán uso de sus útiles para responder las preguntas de las actividades, en caso hubiere consulta por parte de los estudiantes, serán respondidas verbalmente y haciendo uso de un plumón y la pizarra acrílica en caso sea necesaria.

4.2 Descripción y selección de los sujetos de la investigación.

Nuestra investigación se llevará acabo con tres estudiantes matriculados en el semestre 2017-2 de la carrera profesional de Ingeniería Ambiental de la Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur (UNTELS). El grupo de estudiantes está conformado un varón y dos mujeres, cuyas edades fluctúan entre los 17 y 18 años. Dichos estudiantes tienen nociones del concepto de función, cálculo del dominio y rango, operaciones con funciones y el trazado de gráficas en el plano cartesiano, así como también de nociones sobre progresiones aritméticas y geométricas. Además, los estudiantes cursan el primer ciclo y están matriculados por primera vez en la asignatura de Matemática Básica.

Los nombres de los estudiantes son los siguientes:

E-1: Carol (primer ciclo)
E-2: Alexandra (primer ciclo)
E-3: Ceferino (primer ciclo)

4.3 Descripción de la secuencia de la actividad

Para llevar a cabo la experimentación, proponemos la secuencia de una actividad que se llevará acabo fuera del horario establecido para las sesiones de clase, es decir, en un horario extracurricular cuya duración será de aproximadamente 90 minutos. En el cuadro 25 se muestra la descripción de la secuencia de la actividad, luego mostramos el objetivo de la actividad, así como también de los tratamientos y las conversiones que se promueven:

	Medios	Duración	Descripción
Actividad: El problema del tablero de ajedrez.	Lápiz, lapicero y papel.	90 min.	La actividad está dada en el registro de lengua natural, las preguntas están formuladas con la intención de que el estudiante transite la información a través de los distintos registros, es decir, que realice la conversión del registro de lengua natural al numérico, del registro numérico al algebraico, del registro algebraico al gráfico y del algebraico al registro de lengua natural. Algunas preguntas han sido planteadas para que el estudiante realice tratamientos en el registro de lengua natural, numérico y algebraico.

Cuadro 25: Descripción de las actividades de la experimentación.

Objetivos de la secuencia de la actividad

➢ **Objetivos de la Actividad**

- Que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos para responder a cada ítem.
- Que los estudiantes utilicen la información para responder los ítems anteriores.
- Que los estudiantes reconozcan la variable independiente y dependiente, y la relación entre ellas.
- Que los estudiantes reconozcan que la variable dependiente toma valores muy grandes a medida que la variable independiente aumente.
- Que los estudiantes transiten la información por los distintos registros.

- Que los estudiantes realicen las actividades cognitivas de tratamiento y conversión durante el desarrollo de la actividad.
- Que los estudiantes interpreten que este crecimiento es muy rápido a medida que la variable independiente aumenta.
- Que los estudiantes identifiquen a qué intervalo pertenece la constante b para que la función f, cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x) = Ab^x$, sea creciente o decreciente, considerando $A > 0$ y $b > 0$.

Tratamientos que se realizan dentro de los respectivos registros de representación:

Tratamiento en el registro en lengua natural	Pregunta 1.a, 1.b y 1.c
Tratamiento en el registro numérico	Pregunta 2, 3.a, 3.b y 5
Tratamiento en el registro algebraico	Pregunta 4, 7.a, 7.b, 7.c y 7.d

Conversiones entre registros de representaciones que se promueven:

Registro de lengua natural → Registro numérico	Pregunta 2
Registro numérico → Registro algebraico	Pregunta 3.a
Registro algebraico y/o numérico → Registro gráfico	Pregunta 5
Registro algebraico → Registro de lengua natural	Pregunta 6

4.4 Instrumento de recolección de información.

En esta sección describimos el instrumento de recolección de datos que utilizaremos durante la experimentación en el aula.

Fichas de actividades

Son fichas que contienen la actividad propuesta a los estudiantes. Cada ficha contiene instrucciones, tiempo de duración y problemas con sus respectivos ítems.

4.5 Análisis de la actividad.

En esta parte, presentamos los análisis a priori y a posteriori de la actividad propuesta de acuerdo a la metodología de nuestra investigación.

Análisis a priori y a posteriori de la actividad.

Actividad: El problema del tablero de ajedrez.

Instrucciones:
Lea cuidadosamente el texto y los ítems de la actividad.
Si desea, subraye aquellas palabras o frases que crea importante.
La actividad es individual, utilice sus útiles de escritorio, puede usar la calculadora.
Tiempo de duración: 100 minutos.

Resumen de la leyenda sobre el juego de ajedrez, contada al califa de Bagdad, Al-Motacen Billah, Emir de los Creyentes, por Beremís Samir, el "Hombre que calculaba".

Cuenta una leyenda que hace mucho tiempo reinaba en Taligana (provincia de la India) un rey llamado Iadava. El rey gozaba del respeto y aprecio de sus súbditos, sin embargo, la pérdida de su hijo lo había sumido en una profunda tristeza. Un buen día se presentó en su corte un joven llamado Sessa quien solicitó audiencia con el monarca para mostrarle el novedoso juego del ajedrez. El rey lo recibió y rápidamente aprendió las reglas del juego. Complacido por tan agradable pasatiempo, su majestad decidió recompensarlo.

Inicialmente, Sessa no quiso aceptar recompensa alguna, pero ante la insistencia del rey dijo lo siguiente: *Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente*.

El rey sorprendido por la petición, accedió e inmediatamente ordenó a los algebristas más expertos de la corte que calcularan el número exacto de granos de trigo. Los algebristas se asombraron al realizar los cálculos y al cabo de unas horas, le comunicaron que *la cantidad de trigo equivale a una montaña que teniendo por base la provincia de Taligana, fuese 100 veces más alta que el Himalaya*. El rey se quedó atónito al oír a sus sabios, en ese momento Sessa, como buen súbdito, renunció a su pedido, pues estaba satisfecho con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz.

Nota

El ajedrez es un juego de tablero para dos personas, cada jugador cuenta con 16 piezas, un rey, una reina, dos alfiles, dos caballos, dos torres y ocho peones. El juego consta de varias reglas en donde cada jugador pone a prueba sus habilidades estratégicas para eliminar al rey del adversario a través de varias maniobras.

Figura 10: Tabla de ajedrez.

1. El siguiente enunciado se muestran las palabras de Seesa al rey: *Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente*.

1.a Escribe con tus propias palabras el enunciado anterior.

Análisis a priori del ítem 1.a.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes realicen tratamientos en el registro de lengua natural a través del parafraseo sobre el pedido que le hizo Sessa al rey.

Respuesta esperada

Esperamos que los estudiantes reescriban las palabras de Sessa, por ejemplo:

- Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente.
- Por la primera casilla del tablero de ajedrez deseo un grano de trigo, por la segunda casilla deseo dos granos de trigo, por la tercera casilla deseo cuatro, por la cuarta deseo ocho y así sucesivamente.

Análisis a posteriori del ítem 1.a

A continuación mostramos las figuras 11 y 12 que corresponden a las respuestas E-1 y E-2, como algunas palabras no están legibles, procedemos a realizar la transcripción de ambas respuestas.

La estudiante E-1 menciona: Deseo por cada casilla del tablero el doble de granos de trigo de la anterior comenzando desde uno.

La estudiante E-2 menciona: Su deseo consistía en que por cada casilla se duplicaría la cantidad anterior.

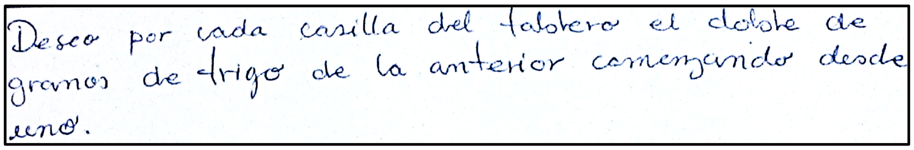


Figura 11: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 1.a.

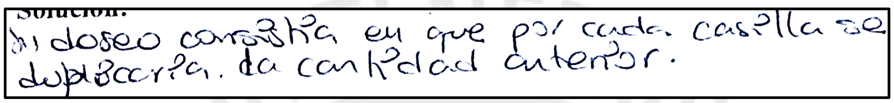


Figura 12: Respuesta de la estudiante E-2, ítem 1.a.

Recordemos que con este ítem se pretendió que los estudiantes, mediante tratamientos en el registro lengua natural, identifiquen, interpreten y describan con sus propias palabras aspectos importantes que tendrán que utilizarlos más adelante, por ejemplo, la existencia de dos variables y la relación entre ellas.

Para responder correctamente al ítem, los estudiantes tienen que realizar el parafraseo del enunciado, es decir, una frase diferente que exprese el mismo contenido del enunciado. Al respecto, Duval (1999) manifiesta que un discurso, en este caso el enunciado mostrado dado en lengua natural, puede ser transformado o enriquecido por otro discurso sin perder el significado del discurso original.

En esa línea, observamos que la respuesta de la estudiante E-1 es imprecisa porque no hace explicita la relación entre el número de granos de trigo y el número de casilla. Por otro lado, del enunciado se infiere dos tipos de sucesiones, la progresión geométrica de razón 2 formada por las cantidades de granos de trigo correspondientes a cada casilla y la progresión aritmética de razón uno formada por los números de las casillas, también se infiere la relación entre los términos de ambas progresiones, sin embargo, en el parafraseo de la estudiante E-1 esta relación entre ambos términos es imprecisa.

En conclusión, afirmamos que la estudiante si ha comprendido el enunciado de la pregunta pero no ha parafraseo correctamente, es decir, ha realizado un tratamiento incorrecto en el registro lengua natural. Así también, observamos que la estudiante reconoce que la cantidad de granos de trigo se está duplicando con respecto a una cantidad anterior y que la cantidad inicial de granos de trigo es uno.

En la respuesta de la estudiante E-2 mostrada en la figura 12, se observa que ha tratado de explicar la situación mostrada en el enunciado, sin embargo, sus palabras son imprecisas puesto que no menciona que es lo que se estaría duplicando ni relaciona explícitamente la cantidad de granos de trigo con el número de casilla. Además, no menciona la cantidad inicial de granos de trigo. Concluimos que la estudiante no ha respondido correctamente a la pregunta puesto que en su respuesta se pierden varias ideas importantes del enunciado original, según Duval (1999), el discurso inicial no debe perder el significado del discurso original.

A continuación, mostramos la respuesta del estudiante E-3 en la figura 13.

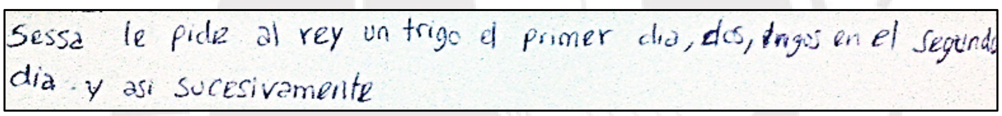

Sessa le pide al rey un trigo el primer dia, dos, trigos en el Segund
dia . y asi sucesivamente

Figura 13: Respuesta de la estudiante E-3, ítem 1.a.

Con respecto a la respuesta del estudiante E-3, solo menciona que Sessa le pidió al rey un trigo el primer día, dos trigos el segundo día y así sucesivamente. Aquí observamos que el estudiante no ha realizado una lectura comprensiva del enunciado pues cambia la palabra casillas por días y obvia la palabra granos, además con la información que brinda no nos permite hallar la cantidad de granos de trigo correspondiente a cada casilla. Por tanto, afirmamos que la respuesta del estudiante no expresa el mismo contenido del enunciado original.

1.b ¿Cuáles son los datos o las variables que se deducen de las palabras de Sessa?

Análisis a priori del ítem 1.b

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen las variables número de casilla y el número de granos de trigo.

Respuesta esperada

- Esperamos que los estudiantes identifiquen cuales son las variables involucradas en el problema y respondan lo siguiente: Los datos o las variables que se deducen de las palabras de Sessa son: Número de casilla y número de granos de trigo.

Análisis a posteriori del ítem 1.b

Este ítem podría haber confundido a los estudiantes ya que pudieron haber asumido que las palabras datos y variables eran sinónimos, siendo estas palabras dos conceptos distintos, por ejemplo, pueden considerarse como datos a uno, dos, cuatro y ocho granos de trigo, los cuales son representaciones numéricas de la variable número de granos de trigo.

En las figuras 14 y 15, mostramos las respuestas de los estudiantes E-1 y E-3 respectivamente.

Se deduce que, por cada casilla se recive el doble de la anterior.

Figura 14: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 1.b.

Solución: Que no queria tener el trigo. Si puso en aprietos al rey por que sabía que no podia darle tanta cantidad de trigo.

Figura 15: Respuesta del estudiante E-3, ítem 1.b.

Observamos que ninguno de los estudiantes ha logrado identificar las variables incluidas en el enunciado. La respuesta de la estudiante E-1 es parte de la respuesta que dio en el ítem 1.a, y la respuesta de E-3 no son datos ni variables. La estudiante E-3 deduce que Sessa sabía de antemano lo que iba a suceder. En conclusión, los estudiantes E-1 y E-3 no han logrado identificar las variables cantidad de granos de trigo y número de casilla ni la relación entre ellas.

Por su parte, en la figura 16 observamos la respuesta de la estudiante E-2, quien estuvo relativamente cerca de la respuesta que esperábamos en el análisis a priori, solo le faltó más contundencia a su respuesta, por ejemplo, podría haber completado su respuesta con las siguientes palabras “número de …” y “número de …. de trigo”.

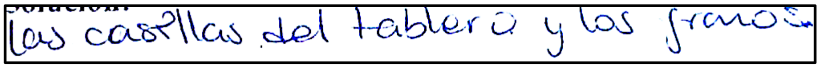


Figura 16: Respuesta de la estudiante E-2, actividad N° 1, ítem 1.b.

Según Duval (2017), los tratamientos son procesos que generan nuevas representaciones en el mismo registro, además cumplen la función justificar y probar un problema dado. En ese sentido, concluimos que la estudiante E-2 ha realizado un tratamiento incompleto en el registro lenguaje natural. Cabe acotar que es muy importante que los estudiantes reconozcan estas variables porque más adelante les serán de utilidad cuando realicen la conversión del registro lengua natural al registro numérico, luego del registro numérico al algebraico y finalmente del registro numérico y/o algebraico al gráfico.

1.c. ¿Estás de acuerdo en qué el número de casilla depende del número de granos de trigo? Justifica tu respuesta.

Análisis a priori del ítem 1.c.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen la relación de dependencia entre las variables número de casilla y número de granos de trigo.

Respuesta esperada

Esperamos que los estudiantes respondan:

- No estoy de acuerdo en que el número de casilla depende del número de granos de trigo, todo lo contrario, el número de granos de trigo depende del número de casilla.

Esperamos que los estudiantes definan las variables de modo similar a:

- n: número de casilla
- $T(n)$: número de granos de trigo

Análisis a posteriori del ítem 1.c.

Con este ítem esperábamos que los estudiantes, mediante un tratamiento en el registro de lengua natural, identifiquen que el número de granos de trigo depende del número de casilla, por tal motivo esperábamos que los estudiantes mencionen que no están de acuerdo con que el número de casillas depende del número de granos de trigo porque el número de granos de trigo depende del número de casilla, según Duval (1999), este tipo de tratamiento pertenece a los llamados tratamientos por negación en el registro de lengua natural.

En palabras de Duval (1999, p. 139):

> Cada registro presenta posibilidades de tratamiento que le son propios o que, siéndoles comunes, son considerablemente más económicos en relación con otros registros. De ahí el interés de un cambio de registro. Esto es equivale a decir que no hay tratamientos que tengas la misma naturaleza en dos registros diferentes. Sin embargo, hay una excepción para los registros de lengua. (…). Una comparación de los tratamientos por negación, tal como pueden efectuarse en cada uno de estos dos registros, es entonces esencial en la perspectiva de una coordinación de registros.

Por ejemplo, en el cuadro 26 observamos una comparación entre dos tratamientos, uno en el registro en lengua natural y otro en el registro de lengua formal.

Lengua natural	Lengua formal
Todos → Algunos	$\forall \rightarrow \exists$
Todos → No todos	$\forall \rightarrow \sim\forall$
Grande → Pequeño	
Es → No es	
Estás de acuerdo → No estás de acuerdo	

Cuadro 26: Comparación de tratamientos por negación.

Fuente: Duval (1999, p. 140)

A continuación mostramos en las figuras 17 y 18 las respuestas de los estudiantes E-1 y E-2, para luego hacer el análisis respectivo.

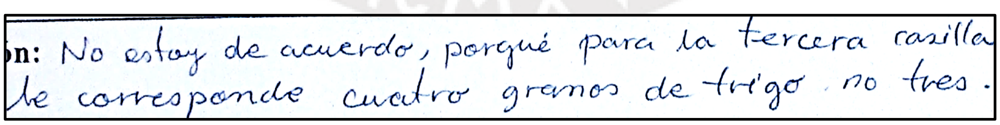

n: No estoy de acuerdo, porqué para la tercera casilla le corresponde cuatro granos de trigo . no tres .

Figura 17: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 1.c.

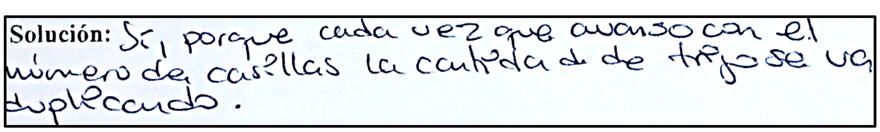

Solución: Sí, porque cada vez que avanso con el número de casillas la cantidad de trigo se va duplicando .

Figura 18: Respuesta de la estudiante E-2, ítem 1.c.

En la figura 17 observamos la respuesta de la estudiante E-1, quien está de acuerdo porque afirma que a la tercera casilla le corresponde 4 granos de trigo y no 3. Aquí podemos notar que la estudiante se ha confundido entre los términos número de casilla y número de granos de trigo, pues a la tercera casilla si le corresponde 4 granos de trigo. Creemos que este error de apreciación no le permitió identificar la relación de dependencia.

En la figura 18 notamos una contradicción en la respuesta de la estudiante E-2 pues al inicio de su respuesta escribe la palabra sí, lo cual entendemos que la estudiante si está de acuerdo con que el número de casilla depende del número de granos de trigo, y por otro lado afirma que cada vez que aumenta el número de casilla, la cantidad de trigo se va duplicando. Su respuesta, hasta este punto, no nos permite afirmar que la estudiante ha identifica quien es la variable independiente y dependiente; sin embargo, se observa que ha logrado identificar una relación de proporcionalidad directa, aunque faltan especificar detalles de dicha proporcionalidad.

Con respecto a la respuesta del estudiante E-3 mostrada en la figura 19:

Solución: no por que esta aplicando una Progresion Geometrica y Sabe Sessa que el rey no lo Va tener.

Figura 19: Respuesta de la estudiante E-3, ítem 1.c.

El estudiante afirma que no está de acuerdo porque está aplicando una progresión geométrica. La respuesta del estudiante es ambigua, afirmamos que aún no identifica que el número de granos de trigo depende del número de casilla. Por otro lado, cabe mencionar que del enunciado se infiere la existencia de una progresión geométrica en el registro de lengua natural formada por los granos de trigo, cuyos elementos dependen de los elementos de una progresión aritmética formada por los números de las casillas.

En conclusión, afirmamos que ningún estudiante ha logrado establecer la relación de dependencia entre las dos variables número de granos de trigo y número de casilla.

2. ¿Cuántos granos de trigo hubiera recibido Sessa por la décima quinta casilla? Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial hasta llegar a la respuesta.

Análisis a priori del ítem 2.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen que el número de granos de trigo se está duplicando con respecto a la cantidad anterior a medida que el número de casilla aumenta consecutivamente.
- Que los estudiantes realicen la conversión del registro de lengua natural al registro numérico.

Respuestas esperadas

- Esperamos que los estudiantes reconozcan que el número de granos de trigo se está duplicando con respecto a la cantidad anterior a medida que el número de casillas aumenta consecutivamente.
- Esperamos que los estudiantes realicen operaciones en el registro numérico y lo organicen de forma ordenada y secuencial, por ejemplo:

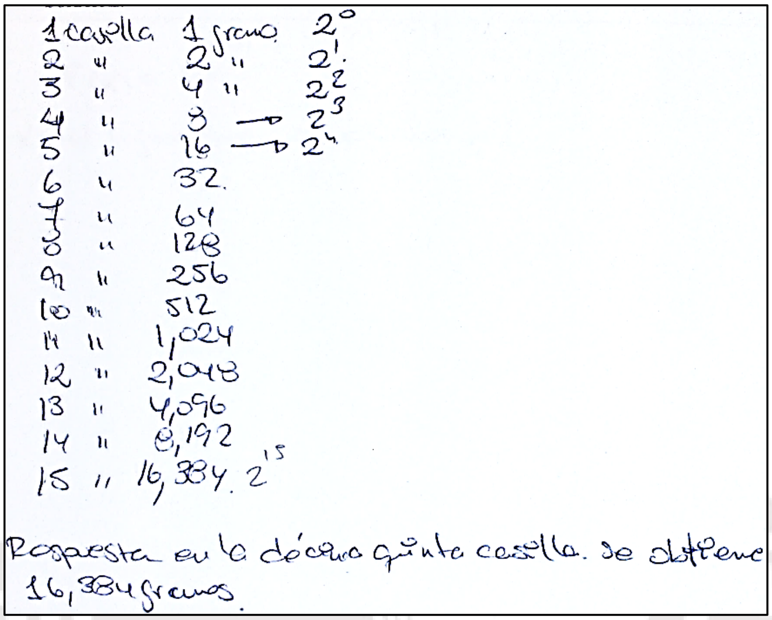
Número de casilla	Número de granos de trigo
1	1
2	2
3	4
4	8
5	8 x 2 = 16
6	16 x 2 = 32
7	32 x 2 = 64
8	64 x 2 = 128
9	128 x 2 = 256
10	256 x 2 = 512
11	512 x 2 = 1024
12	1024 x 2 = 2048
13	2048 x 2 = 4096
14	4096 x 2 = 8192
15	8192 x 2 = 16384

Cuadro 27: Número de casillas versus cantidad de granos de trigo.

El número de granos de trigo correspondiente a la décimo quinta casilla es 16384.

Análisis a posteriori del ítem 2.

Con este ítem se pretendía que los estudiantes realicen la conversión del registro de lengua natural al numérico. Todos los estudiantes presentaron un desarrollo ordenado y secuencial similar a la respuesta de la estudiante E-2, tal como se muestra en la figura 26.



1 casilla 1 grano 2^0
2 " 2 " 2^1
3 " 4 " 2^2
4 " 8 → 2^3
5 " 16 → 2^4
6 " 32
7 " 64
8 " 128
9 " 256
10 " 512
11 " 1,024
12 " 2,048
13 " 4,096
14 " 8,192
15 " 16,384 2^{15}

Respuesta en la décima quinta casilla se obtiene 16,384 granos.

Figura 20: Respuesta de la estudiante E-2, ítem 2.

Además, observamos que la estudiante identifica los números de las casillas con el número de granos de trigo que le corresponde. Así también realiza tratamientos en el registro numérico para la cantidad de granos de trigo correspondiente a las 5 primeras casillas, es decir, expresa la cantidad de granos de trigo en su forma exponencial. Todos los estudiantes identificaron que a la casilla 15 le corresponde 16384 granos de trigo, sin embargo, los estudiantes E-2 y E-3 expresaron al final que 16384 es igual a 2^{15}, lo cual es incorrecto porque 16384 es igual a 2^{14}. Esta equivocación pudo haber ocurrido porque la estudiante comenzó a duplicar las cantidades de granos de trigo hasta la casilla 15 y no expresó en su forma exponencial al número de granos de trigo correspondientes a las casillas del 6 al 14. De las respuestas dadas por los estudiantes, solo E-2 redactó su respuesta y mencionó que “en la décima quinta casilla se obtiene 16384 granos”.

3. Analice, desarrolle y responda:

3.a Deduzca una expresión matemática que le permita determinar el número de granos de trigo para cualquier número de casilla. Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial.

Análisis a priori del ítem 3.a.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes realicen tratamientos en el registro numérico.
- Que los estudiantes realicen la conversión del registro numérico al registro algebraico.

Respuestas esperadas.

- Esperamos que los estudiantes realicen tratamientos al expresar el número de granos de trigo como potencias de base 2, es decir, como números de la forma 2^x.
- Esperamos que los estudiantes utilicen el método inductivo para determinar que la expresión matemática que están buscando tiene la forma $T(n) = 2^{n-1}$, es decir,

Número de casilla	Número de granos de trigo
1	$1 = 2^0 = 2^{1-1}$
2	$2 = 2^1 = 2^{2-1}$
3	$4 = 2^2 = 2^{3-1}$
4	$8 = 2^3 = 2^{4-1}$
5	$16 = 2^4 = 2^{5-1}$
6	$32 = 2^5 = 2^{6-1}$
7	$64 = 2^6 = 2^{7-1}$
8	$128 = 2^7 = 2^{8-1}$
9	$256 = 2^8 = 2^{9-1}$
10	$512 = 2^9 = 2^{10-1}$
11	$1024 = 2^{10} = 2^{11-1}$
12	$2048 = 2^{11} = 2^{12-1}$
13	$4096 = 2^{12} = 2^{13-1}$
14	$8192 = 2^{13} = 2^{14-1}$
15	$16384 = 2^{14} = 2^{15-1}$

Cuadro 28: Tratamiento en el registro numérico, ítem 3.a.

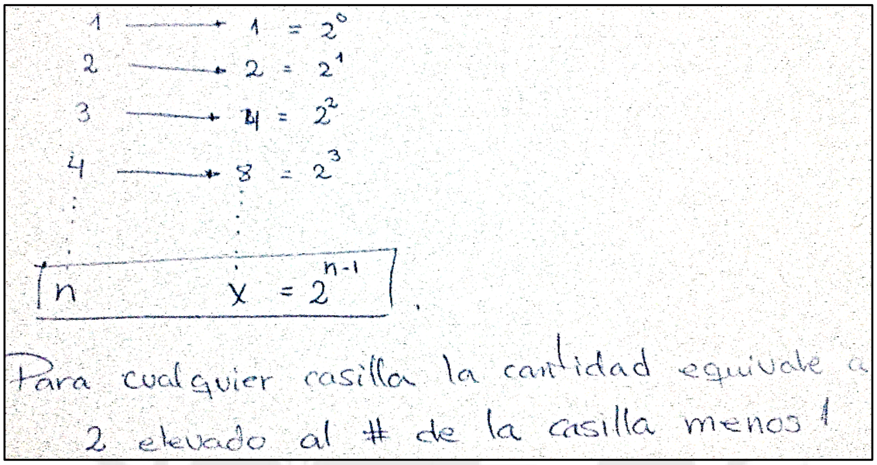
Se deduce que el número de granos de trigo para cualquier número de casilla es 2^{n-1}.

Análisis a posteriori del ítem 3.a

El objetivo de este ítem era que el estudiante realice la conversión del registro numérico al algebraico. En esa línea, todos realizaron la conversión basándose en los resultados del ítem 2, es decir, todos consideraron que $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ y así sucesivamente: Para este problema, el tratamiento que han realizado los estudiantes es el mejor tratamiento para realizar el cambio de registro, a modo de ejemplo, mostramos la figura 21 que corresponde a la respuesta de la estudiante E-1.

Según Duval (2006, p. 149):

> Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado.



$1 \longrightarrow 1 = 2^0$

$2 \longrightarrow 2 = 2^1$

$3 \longrightarrow 4 = 2^2$

$4 \longrightarrow 8 = 2^3$

$\vdots \qquad \vdots$

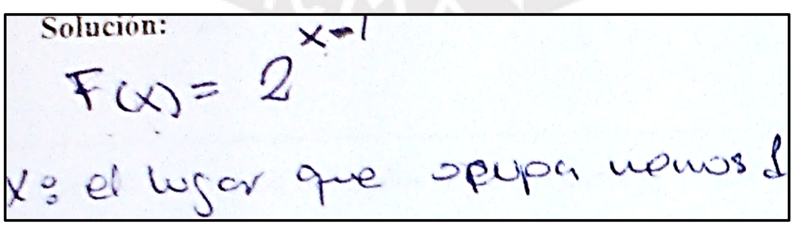
$\boxed{n \qquad x = 2^{n-1}}$.

Para cualquier casilla la cantidad equivale a 2 elevado al # de la casilla menos 1

Figura 21: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 3.a.

En la respuesta de la estudiante también observamos que luego de hallar la expresión matemática, la estudiante realiza la conversión del registro algebraico al registro en lengua natural, esta último no forma parte de la respuesta que esperábamos en el análisis a priori.

Por su parte, en la figura 22 se muestra la respuesta de la estudiante E-2, quien define la variable independiente "*x*" como el lugar que ocupa menos 1, aunque lo correcto es definir a "*x*" como el número de casilla, tal como lo hizo la estudiante E-1.



Solución:

$F(x) = 2^{x-1}$

x: el lugar que ocupa menos 1

Figura 22: Respuesta de la estudiante E-2, ítem 3.a.

En la figura 22 también se muestra que la estudiante E-2 iguala esta expresión matemática a la expresión *F*(*x*), afirmamos que E-2 reconoce la existencia de una relación de dependencia entre las variables; más adelante se les solicitará a los estudiantes que demuestren que esta relación es una función.

En conclusión, observamos que los estudiantes no tuvieron mayores complicaciones en hallar esta expresión matemática, afirmamos que el tratamiento en el registro numérico tuvo un efecto relevante para realizar la conversión, según Duval (2006), el tratamiento es el que hace relevante la elección del mejor cambio de registro para resolver un problema dado. En el tratamiento hay reglas de codificación que nos permiten transitar por el mismo registro, pero en la conversión no.

En palabras de Duval (2006, p. 150):

> Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación. La conversión no se reduce pues a una codificación.

3.b Asuma que 16384 granos de trigo pesan, en promedio, un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de trigo hubiera recibido Sessa por la trigésima casilla?

Análisis a priori del ítem 3.b.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes verifiquen la expresión matemática que han deducido.

Respuestas esperadas

- Esperamos que los estudiantes escriban la expresión $\frac{2^{29}}{16384}$, realicen tratamientos en el registro numérico y utilicen su calculadora para hallar el número de granos de trigo.
- Esperamos que los estudiantes redacten que la cantidad de trigo que hubiera recibido Sessa por la trigésima casilla es 32768 kilogramos.

Análisis a posteriori del ítem 3.b.

Con este ítem esperábamos que los estudiantes, mediante tratamientos en el registro numérico, resolvieran este problema por medio de una regla de tres simple directa, que utilizarán la expresión exponencial para las cantidades de granos de trigo a fin de simplificar los cálculos y finalmente que hicieran uso de la calculadora para hallar el número de kilogramos, es decir, que realizaran lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 16384 \ granos \ \_\_\_\_\_ \ 1 \ kg \\ 2^{29} \ granos \ \_\_\_\_\_ \ x \ kg \end{array}\right\} 16384x = 2^{29}$$

$$x = \frac{2^{29}}{16385} = \frac{2^{29}}{2^{14}} = 2^{15} = 32768 \ kg$$

El número de kilogramos de trigo por la trigésima casilla es de 32768.

En la solución de un problema, según Duval (2006), se necesita que los estudiantes identifiquen las cantidades conocidas, y la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas, y que traduzcan un enunciado a una ecuación. Esta traducción se da gracias a las leyes de codificación de la regla de tres simple directa.

A continuación mostramos en la figura 23 la respuesta de la estudiante E-1:

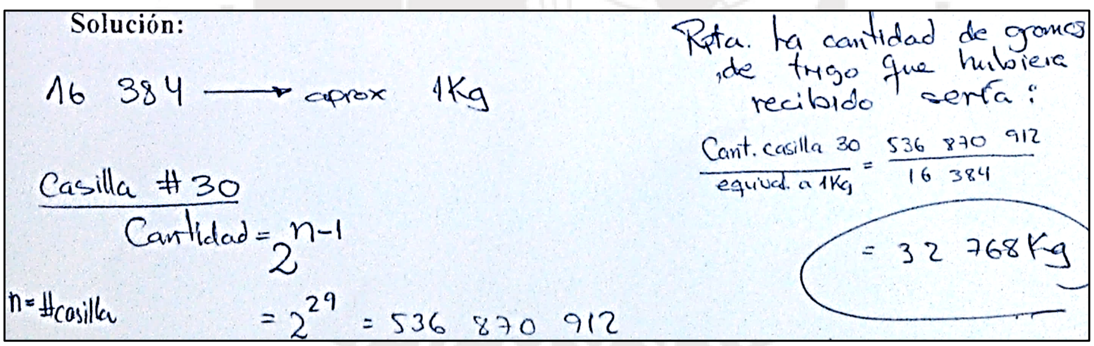


Figura 23: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 3.b.

Al analizar los resultados de esta pregunta, encontramos que todos aplicaron la regla de tres simple directa, pero tomaron un camino largo, por ejemplo, los estudiantes E-1, E-2 y E-3 trabajaron con 16384 y 536 870 912 granos de trigo en vez de su forma exponencial 2^{14} y 2^{29} respectivamente.

Por su parte, solo E-1 redactó una respuesta, aunque imprecisa pues menciona que “la cantidad de granos de trigo que hubiera recibido sería de 32768 kilogramos” cuando lo correcto es “por la trigésima casilla, Sessa hubiera recibido 32768 kilogramos de trigo”.

4. Exprese el resultado que has obtenido en el ítem 3.a en una expresión de la forma $F(x) = A \times b^{x}$. ¿Cuál es el valor numérico de las constantes A y b?

Análisis a priori del ítem 4.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes realicen el tratamiento en el registro algebraico.

Respuestas esperadas

- Esperamos que los estudiantes lleguen a la expresión $F(x) = 0,5 \times 2^{x}$ ó $F(x) = \frac{1}{2} \times 2^{x}$, e indiquen que $A = 0,5$ ó $A = \frac{1}{2}$, y $b = 2$.

Análisis a posteriori del ítem 4.

Con esta pregunta esperábamos que los estudiantes realicen un tratamiento en el registro algebraico, es decir, esperábamos que realizarán lo siguiente:

$$2^{n-1} = 2^{n} \times 2^{-1} = \frac{2^{n}}{2} = \frac{1}{2} \times 2^{n} = 0,5 \times 2^{n} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = 0,5 \text{ y } b = 2 \rightarrow F(x) = 0,5 \times 2^{x} \\ \qquad\qquad ó \\ A = \frac{1}{2} \text{ y } b = 2 \rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \times 2^{x} \end{cases}$$

Al respecto, Duval (1999) menciona que los tratamientos en el registro algebraico son algoritmizables o de tipo algoritmo al tratarse de un registro monofucional, es decir, son tareas de cálculo que se relacionan con un conjunto secuenciado de operaciones para resolver una situación dada. Por ejemplo: De la igualdad, halle los valores de A y b.

$$\begin{aligned} \underbrace{2^{x-1}} &= A \times b^{x} \\ \underbrace{2^{n} \times 2^{-1}} & \\ = \frac{2^{n}}{2} & \\ = \frac{1}{2} \times 2^{n} & \\ = 0,5 \times 2^{n} & \end{aligned}$$

En la figura 24 observamos la respuesta de la estudiante E-1, quien no realiza ninguna operación matemática para justificar su respuesta, e igual lo hicieron los demás estudiantes, ninguno de ellos justifica porqué los valores de A y b son 1 y 2 respectivamente.

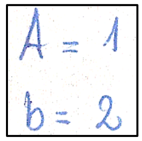


Figura 24: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 4.

Una posible causa de que los tres estudiantes no hayan obtenido el valor de A esperado es la falta de dominio de las operaciones algebraicas, o asumieron que los exponentes de 2^{n-1} y 2^x son iguales, es decir, $n - 1 = x$, tal como los hizo el estudiante E-3, cuya respuesta la podemos observar en la figura 25. Para solucionar este problema, creemos necesario agregar en la pregunta la frase "justifique su respuesta" o "verifique su respuesta dando algunos ejemplos".

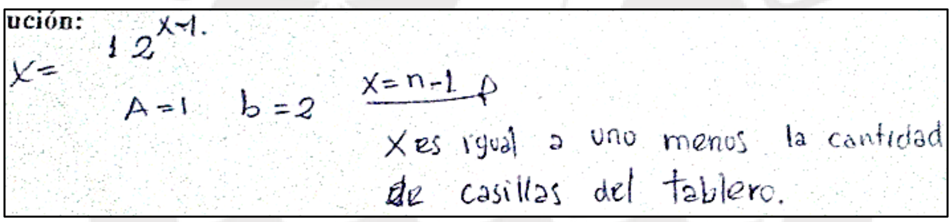


Figura 25: Respuesta de la estudiante E-3, ítem 4.

5. Con los resultados obtenidos en el ítem 4, identifique mediante el criterio de la recta vertical, que la relación F es una función. Asuma que la variable independiente $x \in R$.

Análisis a priori del ítem 5

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes realicen la conversión del registro algebraico y/o numérico al registro gráfico.

Respuestas esperadas

- Esperamos que los estudiantes consideren los resultados de los ítems 2 ó 3.a.
- Esperamos que los estudiantes consideren valores enteros para la variable x como por ejemplo $-3, -2, -1$ y 0, los evalúen en la regla de correspondencia de la función F.

- Esperamos que los estudiantes formen pares ordenados con los resultados obtenidos anteriormente, ubiquen dichos pares en el plano cartesiano, indiquen puntos que identifiquen a cada par ordenado y tracen una curva que pase por dichos puntos.
- Esperamos que los estudiantes demuestren mediante el criterio de la recta vertical que la curva trazada es una función.
- Esperamos que los estudiantes prolonguen la curva hacia la izquierda sin cortar al eje *x*., de ese modo han identificado que el eje *x* ó la gráfica de la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. (ver figura 26)
- En resumen, esperamos que los estudiantes realicen lo siguiente:

Número de casilla (x)	Número de granos de trigo $\left[F(x) = 0,5 \times 2^{x}\right]$
–3	0,0625
–2	0,125
–1	0,25
0	0,5
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32

Trazamos el plano cartesiano, ubicamos los pares ordenados en el plano, trazamos la curva que pasa por dichos pares. Seguidamente trazamos la gráfica de una recta vertical (recta paralela al eje *y*) y observamos que corta a la curva F en un solo punto. Por tanto, la curva F es una función.

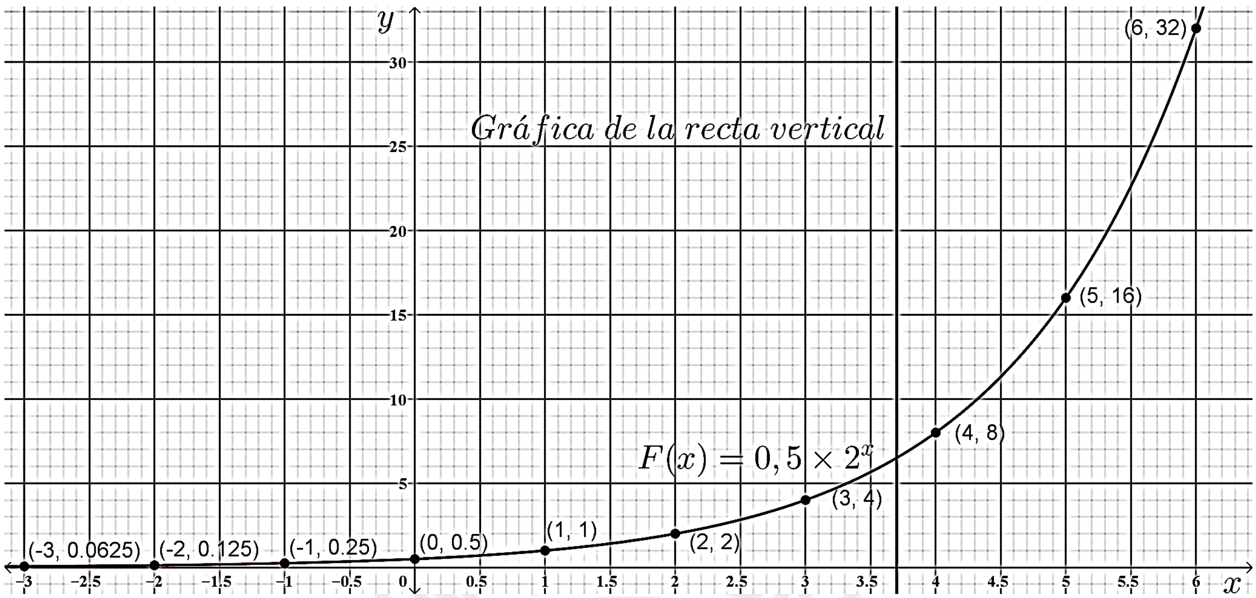


Figura 26: Respuesta esperada en el análisis a priori, ítem 5.

Análisis a posteriori del ítem 5.

Con este ítem pretendíamos que el estudiante realice la conversión del registro algebraico y/o numérico al registro gráfico. A continuación mostramos en la figura 27 correspondiente a la respuesta de la estudiante E-1, quien arrastra el error cometido en el desarrollo del ítem 4 al considerar $A = 1$. Se observa también que E-1 adjunta a la gráfica un discurso en lengua natural, es cual dice: "corta en un solo punto", está discurso fue escrito por el estudiante para justificar que la gráfica de F es función por medio del criterio de la recta vertical.

Recordemos la definición de función dada en 1939 por el grupo Bourbaki: Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x E, existe un único y de F el cual está en la relación dada con x. (citado por Díaz, p. 18, de Rüthing, 1984).

Esta es una definición formal del objeto, aquí se podemos notar como a cada elemento x del conjunto de partida E, le corresponde un único y elemento en el conjunto de llegada F, no le corresponde dos o más, sino un único elemento. Por lo tanto, si al trazar cualquier recta vertical, esta corta en un único punto a la gráfica de la relación F, entonces F es una función.

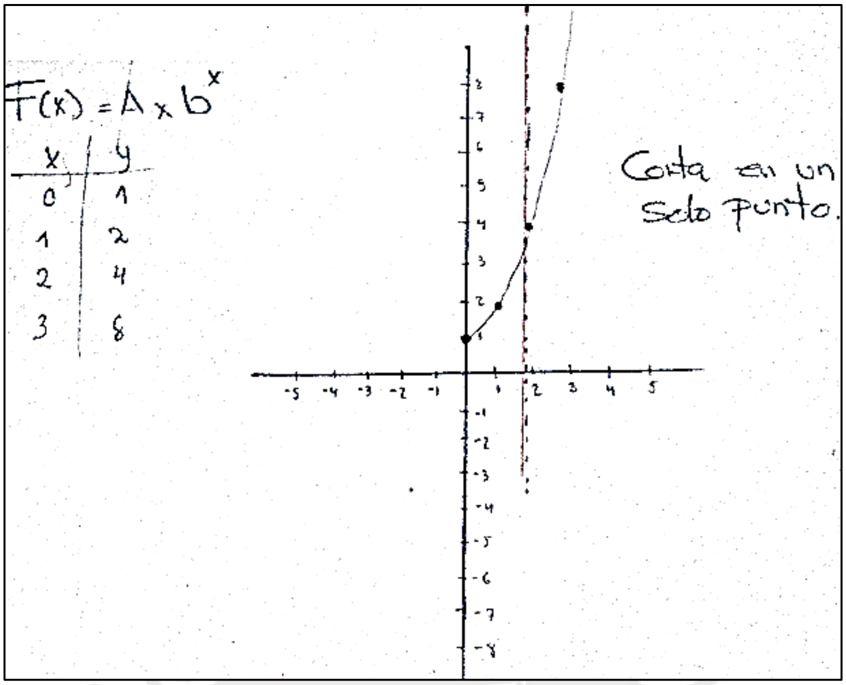


Figura 27: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 5.

En la figura 27 observamos que el estudiante, antes de trazar la gráfica, ubica primero las duplas de números en el plano cartesiano. Al realizar este proceso, se está convirtiendo a un par de números en puntos en el plano, Duval (1999) afirma que este proceso es una conversión basado en tratamientos de tipo algorítmicos y en las reglas de codificación de la representación cartesiana. Así mismo, observamos que la gráfica construida por el estudiante E-1 está incompleta porque solo grafica en el primer cuadrante, una posible causa es que la estudiante no consideró la condición $x \in R$, esto trajo como consecuencia, cuando hizo la evaluación en la regla de correspondencia de la función F, que no considerará valores para *x* menores a cero. Esta situación no le permitió intuir que la gráfica de F no corta al eje *x*. También se observa que el estudiante no hace una correcta representación del plano cartesiano ya que no ubicó al punto (0,0) en el origen de coordenadas, tampoco escribe el nombre de los ejes coordenados ni el sentido de estos. Este mismo hecho se observa en la respuesta de los demás estudiantes.

De acuerdo a Duval (1999, 2004), podemos afirmar que esta conversión dependió de los tratamientos de tipo algorítmicos que el estudiante realizó en el registro algebraico para obtener duplas de números y de la regla cartesiana de codificación que permitió asociar pares de números con puntos en el plano.

6. Con respecto al ítem 5, considera $A = \frac{1}{3}$ y $b = 3$. Tomando como referencia la lectura de la actividad, crea una actividad con dos preguntas.

Sugerencia:

- Puedes seguir considerando los granos de trigo o cambiarlo por granos de maíz, granos de arroz, granos de cebada o semillas de linaza.
- Puedes seguir considerando el juego de ajedrez o cambiarlo por el juego de damas, algún juego con cartas, juego de ludo o juego de monopolio.

Análisis a priori del ítem 6.

Objetivo del ítem

Que los estudiantes realicen la conversión del registro algebraico al registro de lengua natural.

Respuesta esperada

Esperamos que los estudiantes utilicen la lectura del tablero de ajedrez y las sugerencias dadas para crear un problema, como por ejemplo:

- Dos reyes compiten en un juego de ajedrez. Uno de ellos le dice al otro que cada vez que pierda, le iba a entregar 3 monedas de plata, el otro respondió que cada vez que pierda le iba a dar un grano de arroz por la primera perdida, 3 por la segunda, 9 por la tercera, 27 por la cuarta y así sucesivamente. Si el segundo rey perdió tantas veces como casillas hay en el tablero de ajedrez, ¿podrá cancelar su deuda?, ¿Cuántos granos de arroz recibirá el primer rey solo por ganar en la décima partida? O también.

- En un reino muy lejano gobernaba un rey justo llamado Tristán. Cierto día lo visito un joven vasallo llamado Frodo y le mostró el juego del ludo para distraerlo pues vivía siempre la misma rutina cada día. El rey en señal de agradecimiento le prometió recompensarlo, Frodo acepto y le dijo lo siguiente: En el tablero se observa 72 casillas, vamos a enumerar los casilleros con números consecutivos del 1 al 72. Por la casilla 1 deseo un grano de arroz, por el casilla 2 deseo 3 granos de arroz, por la 3 deseo 9, por la 4 deseo 27 y así sucesivamente.

  El rey viendo lo insignificante del pedido de Frodo, acepto e inmediatamente envió a sus sabios que calculen la cantidad total de granos. Al cabo de unas horas le comunicaron al rey que la cantidad total de granos de arroz era astronómicamente enorme y que ni aun convirtiendo todo el reino en tierras de cultivo de arroz y levantar las cosechas durante 10 años podría el rey cumplir con su promesa. Ante tal situación, Frodo libró al rey de su promesa. ¿Cuántos granos de arroz hubiera recibido por la casilla 20? Deduzca una expresión matemática que le permita calcular el número de granos de arroz correspondiente a cualquier número de casilla.

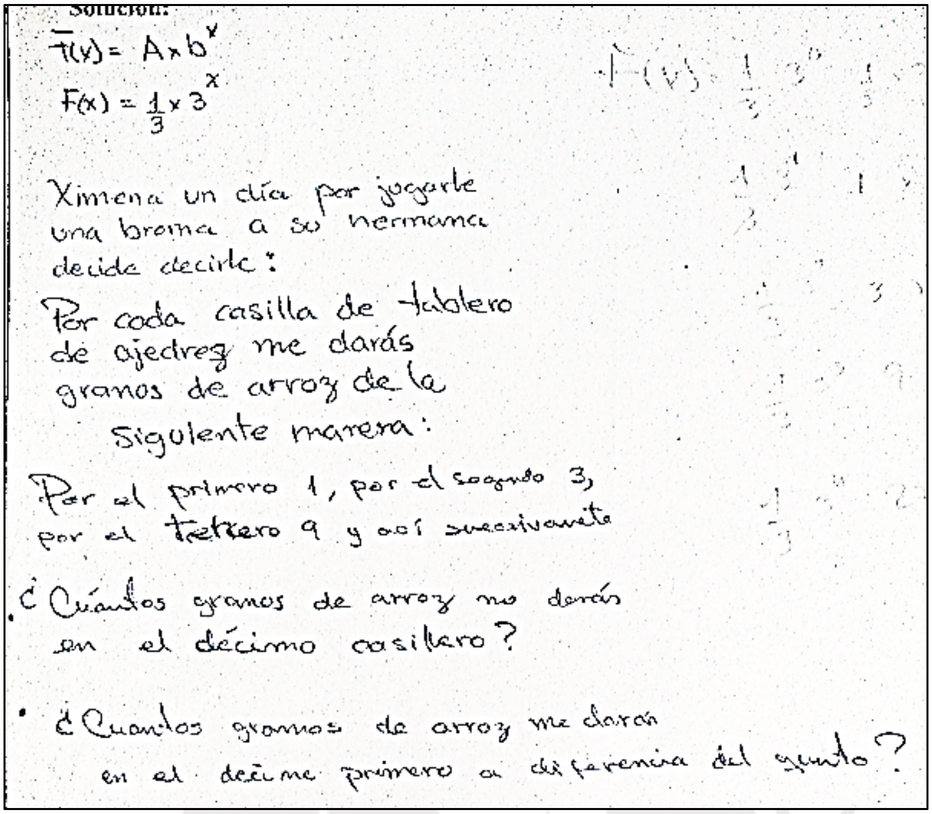
Análisis a posteriori del ítem 6.

En la figura 28 observamos lo escrito por la estudiante E-2, quien ha realizado una conversión del registro algebraico al registro en lengua natural, realizando un breve paso por el registro numérico, esto lo podemos notar porque ha considerado un tablero de damas y caramelos en vez de granos de trigo. Además, se puede deducir dos tipos de sucesiones, una progresión aritmética de razón uno formada por los números de las casillas y una progresión geométrica de razón 3 formada por los números de caramelos. Se observa también que el texto está incompleto pues carece de preguntas.

Solución:
Mi hermana y yo nos distragimos jugando damas pero acordamos que la que gane la partida su premio sería de tal modo: por la primera casilla se le iva a dar caramelo, por la segunda casilla se le iva a dar tres caramelos, por la tercera cacilla nueve caramelos, y así sucesivamente.

Figura 28: Respuesta de la estudiante E-2, ítem 6.

En la figura 29 se observa el problema creado por la estudiante E-1, en su problema se menciona nuevamente el tablero de ajedrez y en vez de granos de trigo, considera granos de arroz. Al igual que E-2, aquí también se observa la conversión del registro algebraico al registro en lengua natural y la existencia de las progresiones aritmética y geométrica de razones 1 y 3 respectivamente.



Solución:

$F(x) = A \times b^{x}$

$F(x) = \frac{1}{3} \times 3^{x}$

Ximena un día por jugarle una broma a su hermana decide decirle:

Por coda casilla de tablero de ajedrez me darás granos de arroz de la siguiente marera:

Por el primero 1, por el segundo 3, por el tercero 9 y así sucesivamente

• ¿Cuántos granos de arroz me darás en el décimo casillero?

• ¿Cuantos granos de arroz me daran en el décimo primero a diferencia del quinto?

Figura 29: Respuesta de la estudiante E-1, ítem 6.

Por otro lado, se deduce que ambos estudiantes han utilizado el registro numérico para obtener los elementos de la progresión geométrica, es decir, las cantidades de caramelos correspondientes a cada casilla y las cantidades de arroz correspondientes también a cada casilla.

7. Sea la función F definida como $F(x) = A \times b^{x}$, para $x \in R$, $A > 0$ y $b > 0$.

7.a ¿Cómo se llama la función F cuya regla de correspondencia es $F(x) = A$?

Análisis a priori del ítem 7.a.

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes reconozcan a la función constante y que esta no es creciente ni decreciente.

Respuestas esperadas

- Esperamos que los estudiantes respondan que la función F, cuya regla de correspondencia es $F(x) = A$, es la función constante.

7.b De la parte "7.a", ¿cómo se obtuvo la regla de correspondencia de la función *F*? Justifique su respuesta.

Análisis a priori del ítem 7.b

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen que la regla de correspondencia de la función *F* se obtuvo haciendo que $b = 1$ para cualquier valor de la variable x en el conjunto de los reales.

Respuesta esperada

Esperamos que los estudiantes respondan que la regla de correspondencia de la función *F* se obtuvo haciendo $b = 1$.

7.c ¿A qué intervalo debe pertenecer la constante b para que la función *F* sea creciente? Justifique su respuesta.

Análisis a priori del ítem 7.c

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen que la función *F* es creciente cuando $b \in < 1, +\infty >$.

Respuesta esperada

- Esperamos que los estudiantes respondan que, en base a lo que ya han desarrollado anteriormente, que b debe tomar valores en el intervalo $< 1, +\infty >$ para que la función *F* sea creciente.

- Esperamos que los estudiantes realicen los siguientes tratamientos en el registro algebraico.

$$x < y \;\rightarrow\; b^x < b^y$$

$1 < \dfrac{b^y}{b^x}$

$1 < b^{y-x}$, $1 < y - x$

elevando a la $1/(y-x)$ *a ambos miembros*

$1 < b$

F es creciente cuando $b \in \langle 1; +\infty \rangle$

7.d ¿A qué intervalo debe pertenecer la constante *b* para que la función *F* sea decreciente? Justifique su respuesta.

Análisis a priori del ítem 7.d

Objetivo del ítem

- Que los estudiantes identifiquen que la función *F* es decreciente cuando $b \in <\ 0\ ,1\ >$.
- Que los estudiantes realicen tratamientos en el registro algebraico.

Respuesta esperada

- Esperamos que los estudiantes respondan que la función *F* es decreciente cuando *b* toma valores en el intervalo < 0 , 1 > y lo justifican dándose ejemplos para $b = \dfrac{1}{2}$ ó $b = \dfrac{1}{3}$. También espero que los estudiantes realicen graficas en el sistema de coordenadas cartesianas para estos valores de *b*.

- Esperamos que los estudiantes realicen los siguientes tratamientos en el registro algebraico.

$x < y \;\rightarrow\; b^y < b^x$

$$\frac{b^y}{b^x} < 1$$

$$b^{y-x} < 1 \,, \;\; 1 < y - x$$

$$elevando \ a \ la \ \ ^{1}\!\!/_{(y-x)} \ a \ ambos \ miembros$$

$$b < 1 \;\;, \; además \;\; b > 0$$

F es decreciente cuando $b \in \langle 0; 1 \rangle$

Análisis a posteriori de los ítems 7.a, 7.b, 7.c y 7.d

Con respecto a los ítems 7.a, 7.b, 7.c y 7.d, solo la estudiante E-2 respondió a todas las preguntas, tal como se muestra en la figura 30.

Aquí notamos en la respuesta de la estudiante E-2 que ella reconoce la función constante, sin embargo las demás respuestas son incorrectas, por ejemplo, en la respuesta 7.b, a la constante A la llama variable, afirma que la función es creciente cuando b pertenece al intervalo $< \ 0\,,+\infty >$ y es decreciente cuando b pertenece al intervalo $< \ 0\,,-\infty >$. En los ítems 7.b, 7.c y 7.d se esperaba que los estudiantes realizaran tratamientos en el registro algebraico para justificar adecuadamente sus afirmaciones.

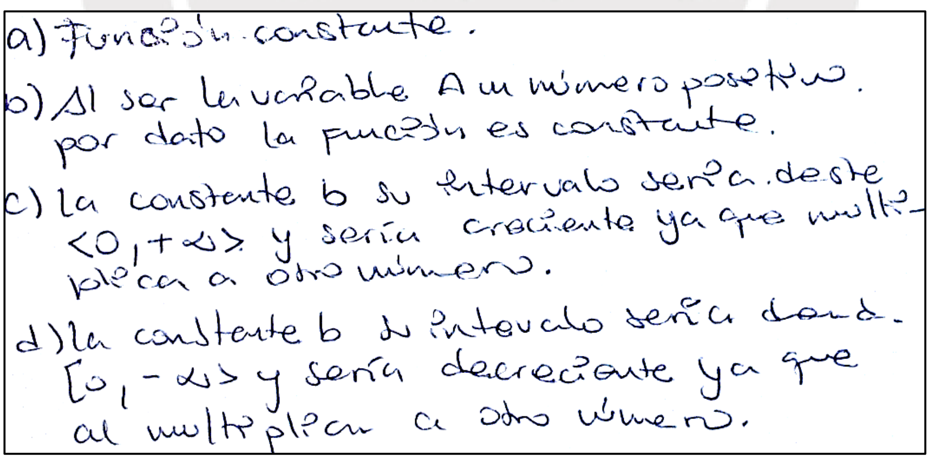

a) Función constante.
b) Al ser la variable A un número positivo. por dato la función es constante.
c) la constante b su intervalo sería desde <0,+∞> y sería creciente ya que multiplica a otro número.
d) la constante b su intervalo sería desde [0,-∞> y sería decreciente ya que al multiplicar a otro número.

Figura 30: Respuesta de la estudiante E-2, ítems 7.a, 7b, 7.c y 7.d.

CONSIDERACIONES FINALES

El estudio de función exponencial al igual que toda actividad matemática requiere del tránsito por los distintos sistemas específicos de representación. Según Duval (2004, p.24): "Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas".

A continuación, planteamos los dos objetivos específicos que sentaron las directrices para la presente investigación:

1. ***Identificar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permiten movilizar los elementos y las propiedades de la función exponencial al transitar por los distintos registros de representaciones semióticas (lengua natural, numérico, algebraico y gráfico).***

   En relación con este objetivo, concluimos que:

   Con respecto al ítems 1.a, ningún estudiante logro realizar un correcto tratamiento en lengua natural del enunciado "*Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente*"; este correcto tratamiento se da mediante el parafraseo del enunciado, según Duval (1999), un discurso puede ser transformado o enriquecido por otro discurso sin perder el significado del discurso original.

   Con respecto al ítem 1.b, solo la estudiante E-2 ha logrado realizar un tratamiento en el registro de lengua natural. Según Duval (2017), los tratamientos cumplen la función de justificar y probar un problema dado.

   Con respecto al ítem 1.c, no identificamos un tratamiento correcto en lengua natural.

   Con respecto al ítem 2, todos los estudiantes realizaron la conversión del registro de lengua natural al registro numérico, también realizaron tratamientos en el registro de numérico. Además, este ítem les ayudo a identificar la variable independiente y la variable dependiente, y establecieron una relación entre las dos variables.

Con respecto al ítem 3.a, ningún estudiante mostró dificultad al realizar la conversión del registro numérico al registro algebraico. Esta expresión generalizada del número de granos de trigo fue porque el estudiante realizo tratamientos a los números de granos de trigo (es decir, expreso dichos números en su forma exponencial con base 2) hasta encontrar una ley de formación.

Con respecto al ítem 3.b, los tres estudiantes encontraron la cantidad de kilogramos de granos de trigo correspondiente a la trigésima casilla mediante tratamientos en el registro numérico.

Con respecto al ítem 4, ningún estudiante realizó tratamientos en el registro algebraico tal como se evidencia en la respuesta de la estudiante E-1 (figura 28).

Con respecto al ítem 5, todos los estudiantes logran hacer la gráfica de la relación F con la regla de correspondencia $F(x)=2^x$, y no con la regla que le corresponde, $F(x)=2^{x-1}$ ó $F(x)=0,5\times 2^x$, esto es un error de arrastre del ítem 4. Los estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al registro numérico y del registro numérico al registro gráfico. Los estudiantes convirtieron un par de números en puntos en el plano cartesiano. Según Duval (1999), este proceso es una conversión basado en tratamientos de tipo algorítmico y en las reglas de codificación de la representación cartesiana.

Con respecto al ítem 6, solo los estudiantes E-1 y E-2 respondieron este ítem, para ello realizaron la conversión del registro algebraico al registro numérico y del registro numérico al registro de lengua natural.

Con respecto a los ítems 7.a, 7.b, 7.c y 7.d, solo la estudiante E-2 respondió correctamente al ítem 7.a, aunque sin justificar su respuesta. Los demás estudiantes no respondieron a estos ítems. Se esperaba que los estudiantes realicen tratamientos en el registro algebraico.

2. ***Describir las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes al transitar por los registros de lengua natural, numérico, algebraico y gráfico.***

En relación a este objetivo concluimos que:

Con respecto al ítem 1.a, mencionamos anteriormente que ningún estudiante realizó un correcto tratamiento en lengua natural, sin embargo, la respuesta de la estudiante E-1 da indicios de la existencia de una relación entre el número de casilla y el número de granos de trigo, y de una ley de formación para el número de granos de trigo por cada casilla. La estudiante E-2 da una respuesta similar a la estudiante E-1, solo que no considera que hay un grano de trigo en la primera casilla.

Con respecto al ítem 1.b, observamos que los estudiantes E-1 y E-3 tienen dificultades para comprender el ítem pues sus respuestas no responden a la pregunta planteada. Solo la estudiante E-2 comprendió lo que se le estaba solicitando, y dio una respuesta aceptable, aunque de manera imprecisa pues manifiesta que las variables son las casillas del tablero y los granos, cuando en realidad son el número de casillas y el número de granos de trigo.

Con respecto al ítem 1.c, ninguno de los estudiantes logro identificar las variables independiente y dependiente. Solo la estudiante E-2 logró establecer una relación de proporcionalidad directa, pues afirma que cuando el número de casilla aumenta, la cantidad de trigo se va duplicando. Note que esta relación de proporcionalidad es ambigua porque no dice la forma cómo va aumentando el número de casilla.

Con respecto al ítem 2, la conversión del registro de lengua natural al registro numérico no les causo problemas, el uso de la calculadora les facilito los cálculos para hallar la cantidad de granos de trigo correspondiente a la casilla 15. Los estudiantes E-2 y E-3 hicieron uso de la expresión exponencial para representar algunas potencias de base 2, por ejemplo, $16 = 2^4$, es decir, hicieron un tratamiento en el registro numérico, el cual les va a permitir, más adelante, hallar la ley de formación de la cantidad de granos de trigo para cualquier número de casilla.

Con respecto al ítem 3.a, todos los estudiantes eligieron el mejor tratamiento (expresar el número de granos de trigo en su forma exponencial) para hacer el cambio de registro.

Según Duval (2006, p. 149):

> Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado.

Cabe señalar que la estudiante E-1 realizó la conversión del registro algebraico al registro de lengua natural y la estudiante E-2 hallo la regla de correspondencia de una relación F con variable independiente x.

Con respecto al ítem 3.b, según Duval (2006), en la solución de un problema se necesita que los estudiantes identifiquen las cantidades conocidas, y la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas, y que traduzcan un enunciado a una ecuación. En este problema los estudiantes lograron identificar las cantidades conocidas y la cantidad desconocida, para luego hacer uso de las leyes de codificación de la regla de tres simple directa, y así poder llegar a la respuesta.

Con respecto al ítem 4, los estudiantes E-1 y E-2 asumieron valores específicos para las constantes A y b sin mostrar justificación alguna, es decir, no realizaron tratamientos en el registro algebraico. El estudiante E-3 realiza tratamientos incorrectos en el registro algebraico para justificar los motivos por los cuales asume que $A = 1$ y $b = 2$.

Con respecto al ítem 5, la conversión del registro algebraico al registro gráfico se produjo por medio de tratamientos de tipo algoritmo y por las reglas de codificación de la representación cartesiana que permitieron asociar pares de números con puntos en el plano. En este proceso, los estudiantes no consideraron valores negativos para la variable x, motivo por el cual se perdió la posibilidad de que intuyeran que la gráfica de la función f no corta al eje x.

Con respecto al ítem 6, los estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al registro numérico, este proceso se dio cuando consideraron los primeros valores enteros positivos para la variable x. luego los reemplazaron en la regla de correspondencia de la función F y mediante tratamientos en el registro numérico, obtuvieron valores que luego utilizaron para realizar la conversión al registro de lengua natural cuando plantearon sus respectivos problemas.

Con respecto a los ítems 7.a, 7.b, 7.c y 7.d, no podemos describir las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes porque no dan respuesta alguna, a excepción de la estudiante E-2, quien acierta en la respuesta del ítem 7.a, pero no justifica su resultado.

Seguidamente, presentamos el objetivo general de nuestra investigación:

Interpretar cómo el tránsito por los distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función exponencial en estudiantes de primer ciclo de ingeniería.

Luego de responder los tres primeros ítems, los estudiantes reconocen la existencia de dos variables en el enunciado, reconocen que el número de granos de trigo se va duplicando, algunos estudiantes reconocen la existencia de una relación entre dichas variables, sin embargo, no identifican que la variable independiente es el número de casilla y la variable dependiente es el número de granos de trigo. En general, todos los estudiantes mostraron dificultades al realizar los tratamientos en el registro de lengua natural. Por tanto, es relevante que los estudiantes se ejerciten en el parafraseo de los enunciados de problemas o casos, esto les va a permitir inferir, discriminar e interpretar datos importantes de un enunciado.

A partir de los resultados de los ítems 2 y 3.a, observamos que los estudiantes lograron realizar la conversión del registro de lengua natural al registro numérico y del registro numérico al registro algebraico. Además, estos ítems sirvieron para que los estudiantes identificarán quien es la variable dependiente e independiente, así como, reconocieran que el número de granos crece rápidamente a medida que el número de casillas aumenta. Se infiere también que el tratamiento en el registro numérico favoreció la deducción de la expresión matemática (número de granos de trigo expresado en su forma exponencial con base 2 para cualquier número de casilla)

A partir de los resultados de los ítems 4 y 7, observamos que los estudiantes tienen dificultades para realizar tratamientos en el registro algebraico puesto que algunos no justificaron sus respuestas, otros justificaron o simplemente no respondieron a la pregunta. Por tanto, es fundamental que los estudiantes conozcan las reglas de funcionamiento en el registro algebraico a fin hallar o justificar propiedades, por ejemplo, propiedades de desigualdades.

Durante el análisis a posteriori del ítem 5, observamos que los estudiantes realizan adecuadamente las conversiones del registro algebraico al registro numérico y del registro numérico al gráfico, sin embargo, no consideran valores negativos para la variable independiente por lo cual solo se graficó en el primer cuadrante del plano cartesiano, perdiéndose así la posibilidad de que los estudiantes intuyeran que la gráfica de la función no corta al eje x. Por tanto, es fundamental inducir en los estudiantes, por medio de preguntas, gráficos, datos numéricos, etc., la necesidad de descubrir ciertas propiedades de la función exponencial, como por ejemplo, su comportamiento asintótico.

RECOMENDACIONES

A continuación, presentamos algunas recomendaciones:

1. Elaborar actividades con preguntas que promuevan los tratamientos y las conversiones entre los diferentes registros de representaciones semióticas.

2. Cuando se esté elaborando las preguntas de las actividades que promuevan la conversión de un registro a otro, sugerimos también proponer preguntas que promuevan la conversión inversa, por ejemplo, si se elabora una pregunta que promueva la conversión del registro algebraico al gráfico, también es recomendable elaborar otra pregunta que promueva la conversión del registro gráfico al algebraico.

3. Proponer preguntar en donde se les solicite a los estudiantes que justifiquen sus afirmaciones y argumenten por escrito sus respuestas puesto que hemos observado que los estudiantes de ingeniería tienen dificultades para realizar tratamientos en el registro de lengua natural. Específicamente, creemos que se debe de proponer problemas donde se le solicite a los estudiantes interpretar un enunciado verbal e inferir aspectos relevantes de un ejercicio, un problema o un caso.

4. Utilizar libros en donde se promueva el uso de los diferentes registros de representaciones semióticas.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Advíncula, E. (2010). *Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Alvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira*. [Tesis de maestría]. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.

Arriaga, J. (2015). *Modelado, simulación y control del uso del agua en la agricultura*. [Tesis doctoral]. Universidad de Sevilla. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. España. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/28891

Artigas, M. (1989). Nicolás Oresme, Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna. Publicado en Principe de Vaina (Suplemento de ciencias), año IX, n° 9, Suplemento anual 1989, pp. 297-331. Recuperado de http://dadun.unav.edu/bitstream/10171/7377/1/Nicol%C3%A1s%20Oresme.pdf

Artigue,M.,Douady,R.,Moreno,L.,Gómez, P. (Ed). (1995). Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los andes. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Bell, E. (1985). Historia de las Matemáticas. Traducción de R. Ortiz. Fondo de Cultura Económica, México.

Bell, E. (1999). Historia de las Matemáticas.

Boyer, C. (2003). Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática.

Boyer, C. y Merzbach U. (2012). Histório da Matemática. Traducao da terceira edicao Americana.

Cantoral, R., Farfán, M., (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, Epsilon, núm. 42: 353-369, Sociedad Thales, España. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/242767113_Pensamiento_y_lenguaje_variacional_en_la_introduccion_al_analisis/links/0c96053366b87b8319000000/Pensamiento-y-lenguaje-variacional-en-la-introduccion-al-analisis.pdf

Castro, G., González, D. y Ramírez, O. (2016). Entendimiento del concepto de función exponencial mediante conversiones entre registros de representaciones semióticas. Editorial académica española.

Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M., Fuentes, M., (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5, 13. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=457651376007

Chamorro, M. (2007). Los registros de representación semiótica en la resolución de problemas matemáticos.

Cobley, P. y Jansz, L. (2004). Semiótica para principiantes. Era Naciente SRL. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de https://mariainescarvajal.files.wordpress.com/2011/03/semiotica_para_principiantes.pdf

Collette, J. (1986). Historia de las Matemáticas I. Siglo Veintiuno Editores, México.

D'Amore B. (2009/11). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Revista Cientifica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253. [El número 2009 fue impreso en el mayo 2011; esto explica la fecha puesta al artículo: 2009/11]. Recuperado de www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/740%20Conceptualizacion.pdf

D'Amore, B., Fadiño, M. y Iori, M. (2013). La semiótica en la didáctica de la matemática. Colección Didácticas. Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes históricos-filosóficos de la "Paradoja Cognitiva de Duval". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18, (2). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n2/v18n2a3.pdf

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de Investigaciones y Formación en Educación Matemática. 1, (2). .Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6887/6573

Díaz, J. (2013). *El Cálculo y su Enseñanza*, (4), 13-25. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=3&index_web=9&index_mgzne

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Francia, 5, pp. 37-65. Recuperado de: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Duval, R. (1995). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, Francia.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999a). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle. Grupo de educación matemática.

Duval, R. (1999b). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. Cali – Colombia: Editorial Merlín I.D

Duval, R. (2003). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Silvia Alcantara Machado (org.). – Campinas, SP: Papirus (colecão papirus), p. 11-33.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 9(1), pp. 143-168. Recuperado de http://skat.ihmc.us/rid=1JM80DWCV-2BL5619-23T/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Springer International Publishing AG. Switzerland.

Elstak, I. (2007). *College students' understanding of rational exponents: A teaching.* [Tesis doctoral] The Ohio State University, USA. Recuperado de https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file%3Faccession%3Dosu1186505864%26disposition%3Dinline

European Society for Engineering Education (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*. A Report of the Mathematics Working Group. Recuperado de http://www.sefi.be/wp-content/uploads/Competency%20based%20curriculum%20incl%20ads.pdf

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/422/421

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. Revista de innovación en educación matemática (EMA). 6(2), pp. 180 – 200. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/%2804%29RD.pdf

Hitt F. (2000). Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. 165-178. Recuperado de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/homenaje/11HittF.PDF

Izcara, S. (2014). Manual de Investigación Cualitativa. Editorial Fontamara. México. Recuperado de http://dide.minedu.gob.pe/handle/123456789/4613

Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/7315/1/nidiamercedesjaimesgomez.2012.pdf

Kline, M. (1999). *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días, 1. Primera edición en ensayo*. Versión de Martinez, M., Tarrés, J. y Casas, A. Alianza Editorial.

Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). La Matemática de la Enseñanza Media. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.

Ministerio de Educación (2007). Fascículo 9: Funciones Exponenciales y Logarítmicas. Ediciones El Nocedal S. A. C. Recuperado de file:///C:/Users/Cupi/Documents/Downloads/04_mat_e_s2_f9[1].pdf

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA* 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Marcos_pruebas_evaluacion_PISA_2012.pdf

Moreno, T. (2011). *Didáctica de la Educación Superior: nuevos desafíos en el siglo XXI. 50*(2), pp. 26-56. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333327290003

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA. Estados Unidos.

National Council of Teachers of Mathematics (2002). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. (2002). Traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática. S.A.E.M. España.

Ortega, M. (2007). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica*. [Tesis de maestría]. Universidad de Guadalajara. México.

Ortega, M., Nesterova, E. y Mendoza, S. (2009). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con el empleo de diferentes registros de representación semiótica*. Acta Latinoamericano de Matemática Educativa, (22), 561-571 Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4886/1/NesterovaUnapropuestaAlme2009.pdf

Prada, R., Hernández, C. y Ramirez, P. (2014-2015). *El Cálculo y su Enseñanza*, (6), 29-44. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/11862a84b8f8d90b7b57bbbe99cb1b0c.pdf

Pulido, H. (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/10550/1/henrymauriciopulidoolaya.2012.pdf

Ribnikov (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú. Editorial MIR.

Rodríguez, R. (1995). *La Teoría de Fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Nuevo León. México. Recuperado de http://eprints.uanl.mx/377/1/1020114994.PDF

Saxe, K. Braddy, L. (2015). *A Common Vision for Undergraduate Mathematical Sciences Programs in 2025*. Recuperado de http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CommonVisionFinal.pdf

Smalls, N. (2007). *The Exponential Function of Matrices*. [Tesis de maestría]. ScholarWorks @ Georgia State University. Department of Mathematics and Statistics. USA. Recuperado de http://scholarworks.gsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1041&context=math_theses

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precàlculo. Matemàticas para el càlculo. Sexta ediciòn. Cengage Learning Editores. Mèxico. Recuperado de http://190.90.112.209/precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf

Tahan, M. (2010). El hombre que calculaba. Noriega Editores. México. Recuperado de http://www.librosmaravillosos.com/hombrecalculaba/pdf/El%20Hombre%20que%20Calculaba%20-%20Malba%20Tahan.pdf

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVIII, núm. 45, (mayo-agosto), 2006, pp. 37-49. Recuperado de http://www.revistas.uma.es/index.php/contrastes/article/view/1253/1213

Tapia, F. (2003). *Historia de los logaritmos. Apuntes de la historia de las matemáticas. 2*(2), 1-18. Recuperado de http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-2-1-logaritmos.pdf

Taylor, S. y Bogdan, R. (2000). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Ediciones Paidós. Recuperado de http://www.instituto178.com.ar/Academicos/Catedras/Verandi/TayloryBogdan-Introduccionalosmetodoscualitativosdeinvestigacion.pdf

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales.* [Tesis doctoral]. Universidad de Salamanca. Recuperado de https://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/121430

Villaseñor, G. (2011). *Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas de base e mediante la vinculación de representaciones.* [Tesis de maestría]. Universidad de Sonora. México.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México.

Zuñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de Cálculo I*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Recuperado de

ANEXOS

Actividad N° 1: El problema del tablero de ajedrez.

Instrucciones:

Lea cuidadosamente el texto y los ítems de la actividad.

Si desea, subraye aquellas palabras o frases que crea importante.

La actividad es individual, utilice sus útiles de escritorio, puede usar la calculadora.

Tiempo de duración: 100 minutos.

Resumen de la leyenda sobre el juego de ajedrez, contada al califa de Bagdad, Al-Motacen Billah, Emir de los Creyentes, por Beremís Samir, el "Hombre que calculaba".

Cuenta una leyenda que hace mucho tiempo reinaba en Taligana (provincia de la India) un rey llamado Iadava. El rey gozaba del respeto y aprecio de sus súbditos, sin embargo, la pérdida de su hijo lo había sumido en una profunda tristeza. Un buen día se presentó en su corte un joven llamado Sessa quien solicitó audiencia con el monarca para mostrarle el novedoso juego del ajedrez. El rey lo recibió y rápidamente aprendió las reglas del juego. Complacido por tan agradable pasatiempo, su majestad decidió recompensarlo. Inicialmente, Sessa no quiso aceptar recompensa alguna, pero ante la insistencia del rey dijo lo siguiente: *Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente*. El rey sorprendido por la petición, accedió e inmediatamente ordenó a los algebristas más expertos de la corte que calcularan el número exacto de granos de trigo. Los algebristas se asombraron al realizar los cálculos y al cabo de unas horas, le comunicaron que *la cantidad de trigo equivale a una montaña que teniendo por base la provincia de Taligana, fuese 100 veces más alta que el Himalaya*. El rey se quedó atónito al oír a sus sabios, en ese momento Sessa, como buen súbdito, renunció a su pedido, pues estaba satisfecho con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz.

Nota

El ajedrez es un juego de tablero para dos personas, cada jugador cuenta con 16 piezas, un rey, una reina, dos alfiles, dos caballos, dos torres y ocho peones. El juego consta de varias reglas en donde cada jugador pone a prueba sus habilidades estratégicas para eliminar al rey del adversario a través de varias maniobras.

Figura 13: Tabla de ajedrez.

El siguiente enunciado son las palabras de Seesa al rey: Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente.

1.a Escribe con tus propias palabras el enunciado anterior.

1.b ¿Cuáles son los datos o las variables que se deducen del enunciado?

1.c ¿Estás de acuerdo en qué el número de casilla depende de la cantidad de granos de trigo? Justifica tu respuesta.

2. ¿Cuántos granos de trigo hubiera recibido Sessa por la décima quinta casilla? Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial hasta llegar a la respuesta.

3.a Deduzca una expresión matemática que le permita determinar el número de granos de trigo para cualquier número de casilla. Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial.

3.b Asuma que 16 384 granos de trigo pesan, en promedio, un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de trigo hubiera recibido Sessa por la trigésima casilla?

4. Exprese el resultado que has obtenido en el ítem 3.a, en una expresión de la forma $F(x) = A \times b^{x}$. ¿Cuál es el valor numérico de las constantes A y b?

5. Con los resultados obtenidos en el ítem 4, identifique mediante el criterio de la recta vertical, que la relación F es una función. Asuma que la variable independiente $x \in R$.

6. Con respecto a la pregunta 5, considerando $A = \frac{1}{3}$ y $b = 3$, se tiene la regla de correspondencia de la función F definida como $F(x) = \frac{1}{3} \times 3^x$. Tomando como referencia la lectura de la actividad, crea una actividad con dos preguntas de modo que con la información propuesta te permita responder las preguntas.

Sugerencia:

- Puedes seguir considerando los granos de trigo o cambiarlo por granos de maíz, granos de arroz, granos de cebada o semillas de linaza.
- Puedes seguir considerando el juego de ajedrez o cambiarlo por el juego de damas, algún juego con cartas, juego de ludo o juego de monopolio.

7. Sea la función F definida como $F(x) = A \times b^{x}$, para $x \in R$, $A > 0$ y $b > 0$.

7.a ¿Cómo se llama la función F cuya regla de correspondencia es $F(x) = A$?

7.b De la parte "a", ¿cómo se obtuvo la función F? Justifique su respuesta.

7.c ¿A qué intervalo debe pertenecer la constante b para que la función F sea creciente? Justifique su respuesta.

7.d ¿A qué intervalo deben pertenecer la constante b para que la función F sea decreciente? Justifique su respuesta.

Solucionario de la Actividad

1. El siguiente enunciado son las palabras de Seesa al rey: Deseo un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla del tablero, cuatro por la tercera casilla, ocho por la cuarta y así sucesivamente.

1.a Escribe con tus propias palabras el enunciado anterior.

Solución

Deseo por la primera casilla del tablero de ajedrez, un grano de trigo: por la segunda casilla del tablero, dos granos; por la tercera casilla, cuatro; por la cuarta, ocho; y así sucesivamente.

1.b ¿Cuáles son los datos o las variables que se deducen del enunciado?

Solución

Las variables que se deducen del enunciado son: Número de casillas y cantidad de granos de trigo.

1.c ¿Estás de acuerdo en qué el número de casilla depende de la cantidad de granos de trigo? Justifica tu respuesta.

Solución

No, no estoy de acuerdo en que el número de casilla depende de la cantidad de granos de trigo, todo lo contrario, la cantidad de granos de trigo depende del número de casilla. Por ejemplo, supongamos que enumero las casillas con números enteros del 1 al 64, debemos de conocer el número de casilla para determinar la cantidad de granos de trigo que le corresponde.

2. ¿Cuántos granos de trigo hubiera recibido Sessa por la décima quinta casilla? Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial hasta llegar a la respuesta.

Solución

Número de casilla	Número de granos de trigo
1	1
2	2
3	4
4	8
5	8 x 2 = 16
6	16 x 2 = 32
7	32 x 2 = 64
8	64 x 2 = 128
9	128 x 2 = 256
10	256 x 2 = 512
11	512 x 2 = 1024
12	1024 x 2 = 2048
13	2048 x 2 = 4096
14	4096 x 2 = 8192
15	8192 x 2 = 16384

El número de granos de trigo correspondiente a la décimo quinta casilla es 16384.

3.a Deduzca una expresión matemática que le permita determinar el número de granos de trigo para cualquier número de casilla. Organice sus resultados de forma ordenada y secuencial.

Solución

Número de casilla	Número de granos de trigo
1	$1 = 2^0 = 2^{1-1}$
2	$2 = 2^1 = 2^{2-1}$
3	$4 = 2^2 = 2^{3-1}$
4	$8 = 2^3 = 2^{4-1}$
5	$16 = 2^4 = 2^{5-1}$
6	$32 = 2^5 = 2^{6-1}$
7	$64 = 2^6 = 2^{7-1}$
8	$128 = 2^7 = 2^{8-1}$
9	$256 = 2^8 = 2^{9-1}$
10	$512 = 2^9 = 2^{10-1}$
11	$1024 = 2^{10} = 2^{11-1}$
12	$2048 = 2^{11} = 2^{12-1}$
13	$4096 = 2^{12} = 2^{13-1}$
14	$8192 = 2^{13} = 2^{14-1}$
15	$16384 = 2^{14} = 2^{15-1}$

Se deduce que el número de granos de trigo para cualquier número de casilla es 2^{n-1}.

3.b Asuma que 16384 granos de trigo pesan, en promedio, un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de trigo hubiera recibido Sessa por la trigésima casilla?

Solución

16384 granos de trigo _______ 1 kg

2^{30-1} granos de trigo _______ X

$$16384X = 2^{29} \quad \rightarrow \quad X = \frac{2^{29}}{2^{14}} = 2^{15} = 32768$$

La cantidad de kilogramos de trigo que hubiera recibido Sessa por la trigésima casilla es 32768.

4. Exprese el resultado que has obtenido en la pregunta 3.a, en una expresión de la forma $F(x) = A \times b^{x}$. ¿Cuál es el valor numérico de las constantes A y b?

Solución: $2^{x-1} = A \times b^{x} = 2^{x} \times 2^{-1} = 2^{x} \times \frac{1}{2} = 0,5 \times 2^{x} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$ ó $A = 0,5$ y $b = 2$

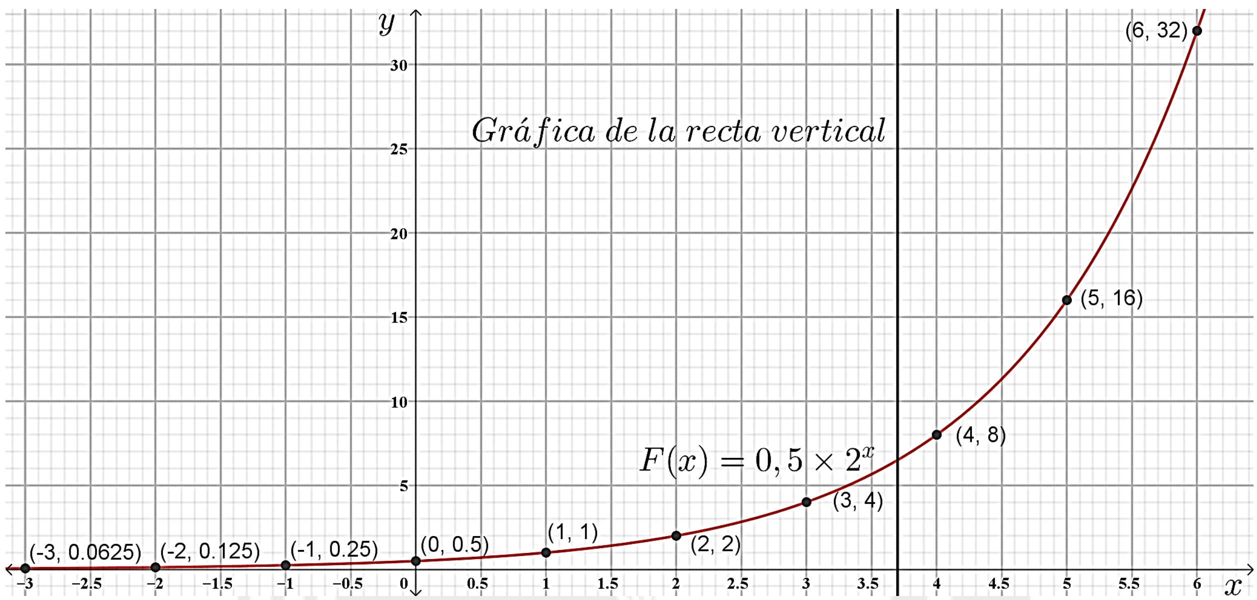
5. Con los resultados obtenidos en la pregunta 4, identifique mediante el criterio de la recta vertical, que la relación F es una función. Asuma que la variable independiente $x \in R$.

Solución: Seleccionamos valores para x, luego los reemplazamos en $F(x)$ y lo ordenamos secuencialmente.

Número de casilla (x)	Número de granos de trigo $\left[F(x) = 0,5 \times 2^{x}\right]$
–3	0,0625
–2	0,125
–1	0,25
0	0,5
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

6	32

Trazamos el plano cartesiano, ubicamos los pares ordenados en el plano, trazamos la curva que pasa por dichos pares. Seguidamente trazamos la gráfica de una recta vertical (recta paralela al eje y) y observamos que corta a la curva F en un solo punto. Por tanto, la curva F es una función.



6. Con respecto a la pregunta 5, considerando $A = \frac{1}{3}$ y $b = 3$, se tiene la regla de correspondencia de la función F definida como $F(x) = \frac{1}{3} \times 3^x$. Tomando como referencia la lectura de la actividad, crea una actividad con dos preguntas de modo que con la información propuesta te permita responder las preguntas.

Sugerencia:

- Puedes seguir considerando los granos de trigo o cambiarlo por granos de maíz, granos de arroz, granos de cebada o semillas de linaza.
- Puedes seguir considerando el juego de ajedrez o cambiarlo por el juego de damas, algún juego con cartas, juego de ludo o juego de monopolio.

Solución

Dos reyes compiten en un juego de ajedrez. Uno de ellos le dice al otro que cada vez que pierda, le iba a entregar 3 monedas de plata, el otro respondió que cada vez que pierda le iba a dar un grano de arroz por la primera perdida, 3 por la segunda, 9 por la tercera, 27 por la cuarta y así sucesivamente. Si el segundo rey perdió tantas veces como casillas hay en el tablero de ajedrez, ¿podrá cancelar su deuda?, ¿Cuántos granos de arroz recibirá el primer rey solo por ganar en la décima partida?

7. Sea la función F definida como $F(x) = A \times b^{x}$, para $x \in R$, $A > 0$ y $b > 0$.

7.a ¿Cómo se llama la función F cuya regla de correspondencia es $F(x) = A$?

7.b De la parte “a”, ¿cómo se obtuvo la regla de correspondencia de la función F? Justifique su respuesta.

7.c ¿A qué intervalo debe pertenecer la constante b para que la función F sea creciente? Justifique su respuesta.

7.d ¿A qué intervalo deben pertenecer la constante b para que la función F sea decreciente? Justifique su respuesta.

Solución

a) La función F cuya regla de correspondencia es $F(x) = A$, se llama función constante.

b) La regla de correspondencia de la función F se obtuvo haciendo $b = 1$.

c) $x < y \ \rightarrow \ b^x < b^y$

$$1 < \frac{b^y}{b^x}$$

$$1 < b^{y-x} \ , \ 1 < y - x$$

elevando a la $1/(y-x)$ *a ambos miembros*

$$1 < b$$

F es creciente cuando $b \in \langle 1; +\infty \rangle$

d) $x < y \ \rightarrow \ b^y < b^x$

$$\frac{b^y}{b^x} < 1$$

$b^{y-x} < 1\ ,\ \ 1 < y - x$

elevando a la $1/(y-x)$ *a ambos miembros*

$b < 1\ \ ,\ \ \textit{además}\ \ b > 0$

F es decreciente cuando $b \in \langle 0; 1\rangle$