PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

COORDINACIÓN DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA MOVILIZAR LA NOCIÓN DE ELIPSE EN ESTUDIANTES DE FÍSICA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZAS DE LAS MATEMÁTICAS

EDWIN HERNAN OLIVARES LOPEZ

Dirigida por:

VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

San Miguel, 2018

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es analizar la coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de Elipse de estudiantes de Física. La investigación se realiza con estudiantes del primer año de estudio de Física de una universidad pública de Lima – Perú, cuyas edades oscilan entre 17 y 20 años. Los sujetos de investigación mediante una secuencia de preguntas se apropian realizando tratamientos y conversiones en los Registros de Representación Semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico del objeto matemático Elipse. En ese sentido, nos planteamos responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo la coordinación de diferentes registros de representación semiótica favorece la movilización de la noción de Elipse de estudiantes de Física? Para dar respuesta a esta pregunta, nos planteamos como objetivos específicos: Identificar los tratamientos y las conversiones realizadas por los estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse y describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes utilizan al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse. Asimismo, justificamos esta investigación por la relevancia que tiene el estudio de la cónica Elipse para estudiantes de Física en su formación profesional. Tomamos como marco teórico que sustenta nuestra investigación aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), lo concerniente a transformaciones: Tratamientos y conversiones. Dado que el enfoque de esta investigación es cualitativo, como metodología, consideramos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la micro ingeniería. Para la fase de la experimentación, se seleccionó a dos estudiantes quienes realizaron la secuencia de preguntas. Observando los resultados de los sujetos de investigación, durante el transcurso de la secuencia de preguntas, verificamos que los estudiantes logran la coordinación de los diferentes Registros de Representación Semiótico con el cual se apropian de la noción de elipse, así como también algunas dificultades en la articulación de los registros de lengua natural, algebraica y gráfica.

Palabras clave: Teoría de Registros; Ingeniería Didáctica; Cónicas; Elipse.

ABSTRACT

The obyetive of the following work is meant to analyze thecolaboration of different registers of semiotic representation to make Physics students Ellipse work. The research invoves students of first year of the Physics course from a public university in Lima – Peru. Their ager goes from 17 to 20. The subjects of the investigation, which though a sequence of questions, take thelead and develop procedures and conversions in the Semiotic Representation on Natural tangue, algebraic and graphic of the math target Elipse. Therefore, we have decided to answer the following question of investigation: How does the coordination of the different Semiotic Registers of Representation help the Ellipse of Physics students' Notion work? To answer this question, we suggestted the following specific objetives: to identify the procedures and conversions mode by the students when they develop a didactic sequence that make the Ellipse Notion work. Futhermore, we support this research because of the importance that the study has on the conic Ellipse for students of Physics in their profesional education. As a theoric field that suppors our rescarch of aspects of the theory of Registers of Representation Semiotic of Duval (2004), what concerns transformations: procedures and conversions. Due to the focus of this research, which is qualitative, as methodology, we consider aspects of Didactic Engineering from Artigue (1995), micro Engineering. In the stage of experimentation, we selected two subjects of investigation, during the lenght of the questions sequence, we verified that the students achiere the coordination of the different Semiotic Representation Registers, which they used to develop the notion of Ellipse. Likewise, some difficulties regarding linking the natural, algebraic and graphic.

Keywords: Register Theory; Didactic Engineering; Conic; Ellipse.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, la Mg. Verónica Neira Fernández, por su paciencia y apoyo incondicional durante el desarrollo de la investigación.

A la profesora, Dra Jesús Victoria Flores Salazar, por sus críticas constructivas y sugerencias durante las exposiciones de avance que permitieron pulir la versión final del presente trabajo.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus enseñanzas en la disciplina científica Didáctica de las Matemáticas.

A mis padres, por su apoyo incondicional en este proyecto profesional de vida.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

El interés de realizar esta investigación radica en que, en nuestra experiencia como docente del área de Matemática, observamos que los estudiantes de Física del curso de complemento de Matemática, en su enseñanza-aprendizaje de la cónica elipse, privilegian el registro algebraico dejando de lado otros registros de representación. En ese sentido, se cree que mediante los aspectos teóricos y metodológicos que nos brinda la didáctica de las Matemáticas, como disciplina científica, podemos realizar nuestro análisis.

Debido a que nuestro objetivo general para responder a la pregunta de investigación es analizar cómo una actividad, que involucra la articulación de diferentes registros de representación semiótica, permite que los estudiantes de Física movilicen la noción de elipse, precisamos identificar los tratamientos y las conversiones de representación, para luego describir las articulaciones entre los registros de lengua natural, algebraica y gráfica. Por ello, la importancia de establecer el marco teórico para identificar los tratamientos y las conversiones, así como establecer el marco metodológico para lograr nuestro objetivo planteado.

La presente investigación se encuentra dividida por capítulos. En el primero, trataremos sobre la problemática, razón por la cual buscamos antecedentes relacionados a investigaciones sobre nuestro objeto matemático elipse o relacionado a él, así como antecedentes relacionados a nuestro marco teórico. También se encuentra la justificación, el marco teórico, que son aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), que sustenta nuestro trabajo, y aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

En el segundo capítulo, trataremos el aspecto histórico de nuestro objeto matemático elipse, desde su origen en la antigua Grecia hasta nuestra época y haremos una revisión de libros didácticos que son de consulta para los estudiantes.

Finalmente, en el tercer capítulo, trataremos sobre la experimentación y el análisis. En esta parte, se describe a los sujetos de investigación, el lugar donde se va a desarrollar la actividad, los recursos e instrumentos utilizados, el análisis a priori y a posteriori de los datos recolectados, para luego realizar el contraste y validación, según nuestra metodología: La Ingeniería Didáctica.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentaremos algunos trabajos de investigación relacionados a las secciones cónicas, a nuestro objeto matemático elipse, investigaciones que tengan como marco teórico referencial a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, así como las relacionadas al uso de un Ambiente de Representaciones Dinámicas (ARD) en la enseñanza y aprendizaje de las cónicas y, en particular, de la elipse. Además, justificaremos nuestra investigación y presentaremos como marco teórico algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

1.1 Investigaciones de referencia

Con respecto al estudio de las secciones cónicas, presentamos la investigación de Flores (2015), quien realiza un diseño instruccional para el aprendizaje de las secciones cónicas dirigido a estudiantes del sexto semestre de Geometría II de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, teniendo como prioridad los cambios de registros: Del algebraico al gráfico y viceversa.

Dicha investigación tiene como marco teórico referencial a la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la metodología que emplea la investigadora se enmarca en la modalidad de proyecto factible, con diseño descriptivo y de campo, el cual que consiste en la elaboración y desarrollo de una propuesta de un modelo viable para solucionar el problema de la comprensión de las secciones cónicas.

La propuesta radica en dar mayor énfasis en la conversión del registro algebraico al gráfico y al respecto la investigadora indica:

> La investigación persigue proponer una mayor productividad e importancia en cuanto a los cambios de registros, lo cual da pie a otras investigaciones en diversas áreas del conocimiento y en todos los niveles educativos, pero más aún en niveles superiores en todas las carreras, pues solo desde la destreza y dominio de los cambios de registros se puede lograr la masificación de las definiciones que el docente desea enseñar en sus respectivas aulas. (Flores, 2015, p. 29)

La población es de 18 estudiantes que cursan el curso de Geometría II, mientras que para la muestra selecciona al azar 13 considerando la eficacia y la representación de los datos recabados y los cinco estudiantes restantes los utiliza para analizar la confiabilidad del instrumento.

Para la recolección de datos, la investigadora realiza un cuestionario de respuestas cerradas sobre el conocimiento y manejo de los cambios de registros en secciones cónicas. Al aplicarlo a los 13 estudiantes seleccionados, evidencia un alto porcentaje de respuestas incorrectas de los cambios de registros gráficos al algebraico y viceversa. Debido a estos resultados, concluye en la necesidad de elaborar un módulo de aprendizaje de las secciones cónicas que incentiven los cambios de registros algebraicos y gráficos y esto motivó el diseño instruccional para el aprendizaje de secciones cónicas.

Del mismo modo, Dávila, De Alba, Hernández y Antolín (2013) presentan un avance de la investigación sobre el diseño, experimentación y análisis de una serie de secuencias didácticas.

Los autores realizan una secuencia de actividades didácticas para el aprendizaje de las secciones cónicas y sus diferentes representaciones dirigido a estudiantes que llevan el curso de Geometría Analítica del tercer semestre de preparatoria del nivel medio superior en Ciudad Juárez, México.

El objetivo es identificar las dificultades que tienen los estudiantes en realizar las transformaciones (Conversiones y tratamientos) entre las representaciones de las cónicas y en su avance de investigación, los autores toman como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica y, como método, a la Ingeniería Didáctica.

Los investigadores, en primer lugar, realizan una prueba de diagnóstico para determinar el nivel de conocimientos previos de los 14 estudiantes que fueron seleccionados. Luego, realizan una secuencia didáctica de seis actividades de las cuales solo ejecutan cuatro por inconvenientes presentados con los tiempos.

Las actividades elaboradas por los investigadores contenían temas relacionados a: Reconocimientos de las secciones cónicas al realizar un corte a un cono de unicel y describir las características de cada una, reconocimientos de las secciones cónicas que se obtienen al manipular el Software Cabri – Gémétre II Plus y expresarlas de manera verbal, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola y sus representaciones. También realizaron dos evaluaciones, las cuales se realizaron luego de la primera y tercera actividad.

De estas cuatro actividades, los autores llegan a la conclusión que los alumnos tienen dificultades para realizar las conversiones o tratamientos, ya sea por problemas algebraicos, aritméticos o de conocimientos previos y que además presentan dificultades en la habilidad lectora.

Por otro lado, Silva (2013), en su trabajo de investigación dirigido a estudiantes del tercer año de educación media, se preocupa en que los que aspiran pasar a la educación superior reconozcan a las cónicas en sus diferentes representaciones, tema que es muy estudiado en la Ingeniería y ciencias básicas.

Silva (2013), tomando como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica y, como apoyo visual, al Software Geogebra, desarrolla una secuencia de actividades de la siguiente manera: En la primera actividad, se realiza la construcción de cada cónica utilizando el Software a partir del círculo director; en la segunda actividad, se analizan las propiedades de la figura y se realiza una definición de la idea de lugar geométrico y; en la tercera actividad, se obtiene la expresión algebraica utilizando algunos conceptos de Geometría Analítica, llegando a la forma canónica y a la ecuación de segundo grado.

En esta presentación, la investigadora se centra en trabajar con la cónica elipse, dejando abierto la posibilidad de adaptar la actividad hacia las otras cónicas (Parábola e hipérbola).

Para la construcción de la elipse, como lugar geométrico, la investigadora utiliza una secuencia de pasos con los comandos del Software Geogebra como la mediatriz, intersección, arrastre, animación. Seguidamente, se orienta al alumno a probar algunas características de la elipse como llamar a F_1 y F_2 focos de la elipse y considerar a P un punto de ella, entonces se observa que $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$, donde $2a$ es la longitud del eje mayor y que esto es una de las características de la elipse.

Para llegar a la representación algebraica, utilizan algunos conceptos de Geometría Analítica como la distancia entre dos puntos y realizando tratamientos en esta representación algebraica se logra la forma canónica de la elipse, partiendo de la representación algebraica y utilizando la ventana de entrada del Software Geogebra se muestra la representación gráfica.

De esta actividad, la investigadora llega a la conclusión que, mediante el uso del Software Geogebra, el alumno será capaz de conocer las cónicas en sus diferentes representaciones y que también puede trabajar otras características de las cónicas como el de la excentricidad, entre otros; sin embargo, la investigadora indica que el Software tiene algunas limitaciones pues no puede mostrar la forma canónica de las cónicas.

Finalmente, termina concluyendo que una secuencia de actividades utilizando los recursos de representación dinámica, que están bien planificadas, facilita el acceso a otros tipos de registros y contribuye al apropiamiento de la enseñanza matemática.

Seguidamente, presentaremos investigaciones relacionadas a nuestro objeto matemático de estudio, la elipse, en el nivel medio y superior.

Al respecto, presentamos la investigación de Santa (2011) que realiza un estudio de la elipse como lugar geométrico, a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto del modelo de Van Hiele, en el cual privilegia su reconocimiento, dejando para estudios posteriores la parte algebraica.

Lo que motivó la elección de la comprensión del concepto elipse, como lugar geométrico, fue, en primer lugar, su importancia en el estudio de los cuerpos celestes y, en segundo lugar, que el estudio de la elipse como lugar geométrico trae consigo otros conceptos geométricos, como la mediatriz y circunferencia.

La investigadora señala que los estudiantes primero deben conocer las propiedades de la elipse, como lugar geométrico, para después conocer el concepto de hipérbola. Al respecto indica:

> Nuestra experiencia como docentes de Cálculo y como investigadores en la didáctica del doblado de papel, nos ha permitido concluir que el estudiante primero debería comprender el concepto de elipse como lugar geométrico y las propiedades que cumplen los puntos para pertenecer a éste y, después, el concepto de hipérbola. (p. 32)

La investigación realizada por la autora no solo centra sus esfuerzos en la comprensión del concepto elipse, sino también en conceptos geométricos como: Mediatriz, equidistancia, circunferencia y lugar geométrico.

Dicha investigación tiene como marco teórico referencial el modelo educativo de Van Hiele y como metodología de investigación el estudio de casos, dirigido a estudiantes del grado décimo de una I.E de la ciudad de Medellín, Colombia.

La pregunta que orientó la investigación fue ¿Cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la Geometría del doblado de papel en el contexto del modelo educativo de Van Hiele?, teniendo como objetivo general: Analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la Geometría del doblado de papel con los estudiantes del grado décimo de una I.E de la ciudad de Medellín o con estudiantes universitarios de primeros semestres de cursos de Matemática Básica.

La investigación se realizó con cinco estudiantes del grado décimo de una institución educativa de la ciudad de Medellín que estaban próximos a tocar el tema de secciones cónicas. Para la selección de estos estudiantes, la investigadora realiza una actividad para determinar los conocimientos que tienen sobre la Geometría del doblado de papel y la Geometría euclidiana y la recolección de los datos se dio mediante la observación, encuestas, entrevistas individuales y grupales y revisión de los materiales.

Santa (2011) sigue la secuencia metodológica de la siguiente manera: Seleccionar a los cinco estudiantes mediante una actividad, los elegidos realizan una encuesta individual con un número de preguntas abiertas y dos entrevistas grupales, de carácter socrático, con el objetivo de fortalecer conceptos básicos y necesarios para comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

Luego realiza una entrevista individual, de carácter socrático, en el cual les plantea preguntas relacionadas con la visualización de construcciones de algunas figuras geométricas mediante el doblado de papel. Acto seguido, a medida que iban entrevistando a los estudiantes, se mejoran las actividades y el cuestionario de preguntas de la entrevista para determinar el nivel de razonamiento del estudiante y permitirle avanzar en su comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. Además, estas entrevistas permiten determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele y, por último, realiza una triangulación entre el análisis del proceso del razonamiento de los cinco estudiantes, el marco teórico referencial y las vivencias de la investigadora.

Algunas de las conclusiones a las que llegó la investigadora es que la entrevista, de carácter socrática individual, permite a los estudiantes avanzar en su nivel de razonamiento, dando como resultado que cuatro de los estudiantes lleguen al nivel III y uno al nivel II.

También concluye que la elección adecuada de unos descriptores iniciales contribuye a la comprensión del concepto objeto de estudio, porque en el proceso de interacción entre los estudiantes y el investigador se van refinando. Por ello, la investigadora afirma que el estudio de la elipse, mediante la geometría del doblado de papel, es muy provechoso para el estudiante pues relaciona lugares geométricos como la mediatriz o circunferencia.

Por otro lado, León (2014) realiza una investigación sobre la instrumentalización de la elipse, mediado por el Software Geogebra, dirigido a estudiantes de Matemática I de la carrera de Arquitectura y Administración de proyectos en una universidad privada, el cual se basó en el enriquecimiento de las propiedades del objeto matemático elipse mediante una secuencia de actividades mediado por el programa antes mencionado.

Dicha investigación tiene como pregunta: ¿Una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra permite que los alumnos de Arquitectura y Administración de Proyectos instrumentalicen la elipse?, teniendo como objetivo propiciar la instrumentalización de la elipse cuando los alumnos trabajan una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra.

Para sustentar su investigación, León (2014) toma como marco teórico referencial el Enfoque Instrumental y como método de investigación aspectos de la Ingeniería Didáctica.

En la investigación, el autor elabora una prueba de diagnóstico a 20 estudiantes voluntarios del curso de Matemática I conteniendo temas relacionados a rectas, circunferencia y parábola, que son temas anteriores a elipse, de los cuales seleccionó a seis estudiantes.

Dicho cuestionario consta de seis preguntas, los cuales están divididos en tres partes: La primera parte está relacionado a los conocimientos sobre la mediatriz, su representación gráfica y cómo se aplica esta definición en otras representaciones geométricas. La segunda parte está relacionada con el conocimiento de la circunferencia así como el trazo de algunos elementos y la tercera parte está relacionada con el lugar geométrico de la parábola y el conocimiento de algunas de sus características.

Después de analizar los resultados de la prueba de diagnóstico, el investigador se da cuenta que la mayoría de alumnos tienen dificultades en reconocer a las cónicas como lugar geométrico, señalando que esto es debido a que la construcción geométrica es ajena en su enseñanza.

Para ello, el investigador realiza una secuencia de 15 actividades distribuidas de la siguiente manera: Cinco relacionadas a la exploración de algunas herramientas del Software Geogebra, otras cinco relacionadas a la construcción de la elipse como lugar geométrico y la misma cantidad de actividades a la representación geométrica de la elipse mediante los ejes coordenados y su expresión algebraica.

De las actividades realizadas en clase, el investigador llega a contestar la pregunta que lo motivó a la realización del trabajo, ya que encuentra indicios que las actividades propuestas logran el enriquecimiento y el surgimiento progresivo de las propiedades de la elipse, mediados por el Geogebra, indicando que se pueden realizar investigaciones futuras mediante la traslación y rotación de ejes.

Prosiguiendo con la presentación de investigaciones de nuestro objeto matemático elipse, Bonilla (2012) realiza una investigación sobre la elipse desde la perspectiva de la teoría de los Modos de Pensamiento con estudiantes de 15 a 17 años que llevan el curso de Álgebra y modelos analíticos del plan científico de tercer año de medio de un establecimiento educacional chileno. Dicho curso tiene como objetivo preparar a los alumnos en los conocimientos básicos necesarios, para que más adelante puedan enfrentar con éxito los cursos de las carreras científicas en la educación superior.

El trabajo tiene como marco teórico referencial a la teoría de Modos de Pensamiento de Sierpinska y, como método, al estudio de casos. Ante esto, Bonilla (2012) centra su investigación en la elipse, porque ve la problemática de que solo se centran en su estudio utilizando la técnica de las ecuaciones cartesianas y que esto no ayuda a la comprensión profunda del concepto y al respecto indica:

> Consideramos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto. Cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando en que el estudiante pueda relacionar las distintas definiciones de elipse, ya sea la elipse como una sección cónica, elipse como lugar geométrico y la elipse a partir de las ecuaciones que la describen. (p. 23)

La investigadora elige como marco teórico los Modos de Pensamiento de Sierpinska porque distingue tres modos de pensamiento: Uno que tiene que ver con el pensamiento práctico (El Sintético – Geométrico (SG)) y otros dos que tienen que ver con el pensamiento teórico (El Analítico- Aritmético (AA) y Analítico – Estructural (AE)).

En la parte metodológica, la investigadora realiza, en una primera etapa, un cuestionario exploratorio de cinco preguntas con el fin de indagar en los modos de comprender la elipse que privilegian 10 de los estudiantes de un establecimiento educacional de dependencia compartida (Particular subvencionada) que aprobaron el curso de Álgebra y modelos analíticos; es decir, si estos conocimientos hacen transitar a los estudiantes entre las diferentes definiciones de la elipse en el plano cartesiano.

De este cuestionario, la investigadora llega a la conclusión de que la mayoría de los estudiantes logran graficar la elipse dada su ecuación o bien obtienen la ecuación a partir de su gráfica; es decir, logran transitar entre los modos de pensamiento SG – AA, teniendo grandes dificultades en pensar el concepto elipse en un modo AE.

En la segunda etapa, la investigadora realiza un análisis documental que tiene que ver con los elementos de la Matemática que permiten las distintas definiciones de la elipse. Finalmente, en una tercera etapa, realiza el diseño de actividades de aprendizajes desde la teoría del Modo de Pensamiento para el estudio del concepto elipse, que tienen como finalidad documentar las conexiones que pueden realizar los estudiantes entre los modos de pensamientos SG – AA – AE de la elipse en el plano y los modos de pensamiento SG – AE en el espacio.

Las secuencias de actividades diseñadas para la interacción entre los distintos modos de pensamiento, para la comprensión profunda de la elipse, fue elaborada de la siguiente manera: La primera actividad está presentada en la Geometría del taxista (Geocity), esto debido a que la distancia discreta facilita la comprensión de las propiedades que define a la elipse. Es así que

Bonilla (2012) realiza una serie de preguntas como para familiarizar a los estudiantes con los elementos de la Geometría del taxista y luego realiza otra serie de preguntas para hacer transitar a los estudiantes entre los modos de pensamientos SG – AE y AE – SG de la elipse en Geocity.

La segunda actividad tiene por objetivo hacer transitar a los estudiantes entre los modos de pensamiento SG – AA – AE en el plano cartesiano y para ello dispone de algunas representaciones de la elipse con rotación y traslación de ejes coordenados, para observar a qué modo de pensamiento recurren los estudiantes cuando se enfrenten a las preguntas.

Por último, en la tercera actividad, plantea dos preguntas para observar si los estudiantes recurren al modo de pensamiento AE y las siguientes cuatro preguntas son diseñadas para mostrar los argumentos de éstos en el tránsito de la representación de la elipse en el plano (SG1) a la representación de la elipse en el espacio (SG2) y a la AE.

De las actividades realizadas, la investigadora llega a la conclusión que los 19 estudiantes que habían aprobado el curso de Álgebra y Modelos Analíticos (Cuarto año de educación media) logran satisfactoriamente responder a las actividades y comprender el concepto de elipse, esto debido a las conexiones que lograron entre los modos de pensamientos SG – AA – AE en el plano y SG2 – AE en el espacio.

De 10 estudiantes que no habían llevado el curso de Álgebra y Modelos Analíticos (Segundo año de educación media) y que fueron elegidos por sus notas sobresalientes en Matemática, la investigadora centra su análisis en el modo de pensamiento SG – AE en la Geometría del taxista y en el plano, llegando a la conclusión que, en la actividad 1, los estudiantes muestran una comprensión en el modo AE en la Geometría del taxista. Con respecto al tránsito entre los modos SG – AA – AE, muestran dificultades para obtener la ecuación de la elipse y sobre las conexiones entre SG1 – SG2 – AE de la elipse en el espacio, presentan dificultades debido a que desconocen algunos conceptos.

En relación a los 11 estudiantes que llevan el curso de Álgebra y Modelos Analíticos, pero que aún no tocan el tema de elipse (Tercer año de educación media), la autora llega a la conclusión que, en la actividad 1, los estudiantes logran una comprensión en el modo AE en la Geometría del taxista y, con respecto a las conexiones entre SG – AE – AA, la mayoría de los estudiantes logran la comprensión de estos modos en el plano cartesiano y, en relación al tránsito entre SG1 – SG2 – AE de la elipse en el espacio, presentan dificultades como graficar y describir la posición del plano que al intersectar a un cono forme una elipse.

De las conclusiones obtenidas en cada caso, Bonilla (2012) da sugerencias didactas como por ejemplo, los estudiantes que se inician y puedan lograr transitar entre los modos SG – AE desarrollen actividades en la Geometría del taxista, ya que ésta da importantes aportes en la comprensión del modo AE, a partir del modo SG de la elipse y con respecto al modo SG – AE de la elipse en el espacio recomienda que no es viable por las dificultades que presentaron, pero que sí se pueden trabajar después de haber estudiado el concepto elipse. Por último, concluye escribiendo que los estudiantes que logren comprender la elipse como lugar geométrico (Modo AE) tienen mayor éxito en la comprensión profunda del concepto.

En la misma línea, Contreras, Contreras y García (2002) realizan una investigación sobre la Geometría sintética y analítica de la elipse y sus construcciones, esto debido a que las ideas previas que tienen los estudiantes del segundo bachillerato español sobre las cónicas es estudiarlas por separado como si fueran independientes, sin ninguna relación estructural entre ellos.

Si bien es cierto los autores centran su investigación en la elipse, lo que buscan es construir conocimiento a partir de realizar cuestionamientos y quitar esas ideas previas. Además, los investigadores realizando una revisión bibliográfica encontraron que el tipo de tratamiento que se le da al tema de cónicas es exclusivamente analítico; por ello, realizan una propuesta integradora de la Geometría sintética y analítica.

Con ello, intentan mostrar el tópico elipse desde la perspectiva sintética y analítica complementándose entre sí y para ello realizan las distintas construcciones de la elipse empezando por:

La **construcción por trazo continuo,** la cual es una construcción de técnica sintética en el cual, teniendo como datos los focos F , F' y la longitud mayor $2a$, para lograr la construcción, se toma un hilo de longitud $2a$, cuyos extremos se atan a los focos, y manteniendo el hilo tenso se dibujará la elipse, ya que si tomamos un punto "P" perteneciente a la elipse tenemos que la suma de distancias de los focos al punto "P" siempre dará como resultado $2a$ y si tenemos como dato los semiejes a y b, entonces se construye la elipse conociendo la relación $c^2+b^2=a^2$ y considerando al lado mayor AA', lado menor BB' y centro de la elipse "O" se traza un arco tomando como centro B radio $OA=a$ el cual corta al eje mayor en F y F' con el cual se logra la construcción.

Por otro lado, por medio de la utilización del compás elíptico y teniendo como datos los semiejes a y b , se puede construir de manera sintética un cuarto de elipse y de manera analítica tenemos "P", cuya abscisa es $x = a\text{Cos}\alpha$ y ordenada $y = bsen\alpha$ de donde utilizando las propiedades trigonométricas y realizando algunos cálculos, Contreras, et al. (2002) obtienen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Colocando el punto P en el segundo, tercero y cuarto cuadrante se forma la elipse completa.

En la **construcción por puntos aislados:** Teniendo como datos los semiejes a y b , se construye la elipse con una argumentación sintética – analítica y esta se logra al trazar dos circunferencias concéntricas de centro O y de radios a y b, sea $OR = a$ y C el punto de intersección de OR con la circunferencia de radio b, por R se traza una paralela al eje Y y por C se traza una paralela al eje X intersectándose en el punto P, entonces los autores determinan que los triángulos RPC y $RR'O$ son semejantes, de donde obtienen $\frac{RC}{RO} = \frac{RP}{RR'}$, después de realizar algunos cálculos llegan a la siguiente ecuación: $\frac{a-b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, realizando operaciones llegan a la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los investigadores presentan el problema de Pappus en la cual, realizando cálculos, llegan a una ecuación de la forma: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, que es la ecuación general de la familia de las cónicas. Por lo tanto, la solución del problema de Pappus es una cónica.

Los investigadores toman como ejemplo de aplicación a la Física como en Biología a la luz polarizada, que consiste en la medida del índice complejo de refracción y del espesor de películas delgadas (Elipsometría).

Después de realizar las construcciones de la elipse, ya sea de forma sintética, analítica o sintética – analítica, los investigadores llegan a la conclusión que existe una complementariedad y coordinación entre ambas técnicas. Además, recomiendan que la aplicación de las técnicas sintética – analítica y al conectar determinados conceptos de la Física con la cónica elipse, como elementos motivadores, los estudiantes logran un mejor provecho interdisciplinario.

Siguiendo la revisión de investigaciones relacionadas a cónicas, tenemos la de López y Aldana (2013) quienes realizan una propuesta de un estudio más amplio del concepto de parábola, dirigido a estudiantes de Ingeniería de Sistemas que llevan el curso de Geometría analítica en el primer semestre de la Universidad de Quindío del Municipio de Armenia, Colombia.

El objetivo de la investigación es analizar cómo llegan a la comprensión y/o construcción del concepto de parábola como una cónica desde las dimensiones epistemológica, didácticas y cognitivas.

Este estudio tiene como sustento teórico a la teoría de Situaciones Didáctica de Brousseau y como método a la Ingeniería Didáctica de Artigue, el cual les permite realizar un análisis a priori y a posteriori de unas situaciones a-didácticas y didácticas de una secuencia en el aula.

Para la investigación, López y Aldana (2013) tomaron un grupo de 25 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre 17 y 30 años, que además algunos de ellos llevaban el curso por segunda vez, y como apoyo visual tomaron al Software Geogebra.

La investigación se desarrolla de la siguiente manera: Elaboración de situaciones a-didácticas, validación de las tareas por expertos, aplicación de las situaciones a-didácticas, confrontación de los resultados de los sujetos por expertos, análisis a-priori de la situación a-didáctica, aplicación de algunas situaciones didácticas, análisis a posteriori, entrevistas y triangulación de la información. Para la recolección de la información, se utilizan los siguientes instrumentos: Cuestionarios, entrevistas, observación en el aula y video grabaciones.

En la fase a-didáctica, se presenta la tarea 1: Observe la gráfica correspondiente a una parábola y responda las siguientes preguntas ¿Cuáles son las coordenadas del foco y el vértice de la parábola? ¿Cuál es la ecuación de la directriz? ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la cónica?, entre otros.

De estos resultados, los investigadores evidencian que los estudiantes reconocen algunos elementos de la parábola, como por ejemplo el lado recto y el foco; sin embargo, no relacionan de manera correcta por la forma como responden erróneamente sobre las coordenadas del vértice, el eje de simetría y el lado recto.

Por ello, los investigadores nuevamente le presentan unos gráficos de parábolas a los estudiantes y les piden que lo relacionen con una expresión algebraica, donde responden de manera incorrecta y sin un orden. Es por estos resultados que los autores presentan una secuencia de enseñanza e intervención en el aula con respecto al objeto matemático parábola y tratar de definir en forma lógica su lugar geométrico.

En esta actividad fue muy importante el uso del Software Geogebra, ya que facilita el trabajo de la ubicación de los puntos, luego los investigadores, en la situación didáctica, les plantean algunas tareas a los estudiantes en los cuales los sujetos responden correctamente, pues aplican correctamente el concepto de lugar geométrico.

De estas actividades, López y Aldana (2013) llegan a las conclusiones que, mediante una secuencia de enseñanzas mediadas por un entorno informático, no solo permiten realizar una planeación de la clase sino también validar cada uno de las secuencias.

En la fase a-didáctica, los alumnos presentan dificultades en reconocer a la parábola como lugar geométrico y no logran la comprensión/construcción de la parábola y, en la fase didáctica, las secuencias didácticas permiten realizar transformaciones de ecuaciones en el mismo sistema de representación y lograr la coordinación entre las representaciones gráficas, algebraicas y analíticas.

A continuación, justificaremos nuestra investigación de acuerdo a nuestros antecedentes.

1.2 Justificación

De las investigaciones presentadas en los antecedentes, podemos notar la preocupación de los investigadores en la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el nivel Básico Regular o Superior.

En ese sentido, Flores (2015) diseña un modelo instruccional para la enseñanza de las cónicas debido a las dificultades encontradas por los estudiantes en realizar las conversiones y tratamientos entre los registros de representación algebraico a gráfico y viceversa dirigido a estudiantes del curso de Geometría II. Dicho diseño tuvo como prioridad los cambios de registro gráfico a algebraico.

De manera similar, Dávila, De Alba, Fernández y Antolín (2013) realizan una secuencia de actividades para el aprendizaje de las secciones cónicas, cuyo objetivo se centra en identificar las dificultades de los estudiantes en realizar las transformaciones; es decir, en realizar tratamientos y conversiones teniendo como apoyo al Software Cabri – Gémétre II Plus.

Por otro lado, Silva (2013) se preocupa en que los estudiantes de Educación Media, que aspiran pasar a Educación Superior, reconozcan a las cónicas en sus diferentes representaciones mediante el apoyo del Software Geogebra, cuyo tema es muy estudiado en la Ingeniería y ciencias básicas.

También podemos citar investigaciones cuya preocupación es el aprendizaje y la enseñanza de la parábola como lugar geométrico, tal como lo describen López y Aldana (2013), así como también encontramos investigaciones relacionados al estudio y enseñanza de la elipse, como Santa (2011), León (2014) y Bonilla (2015) que evidencian la importancia que tiene el estudio de esta cónica, ya sea en su expresión como lugar geométrico o construcción mediante el uso de algún Software.

De esta preocupación, por el estudio de las secciones cónicas y su enseñanza aprendizaje, así como también el estudio de la elipse, realizaremos una actividad basado en una secuencia de preguntas, dando prioridad a los cambios de registros de lengua natural, algebraico y gráfico en los cuales los estudiantes logren la comprensión del concepto matemático elipse y así poder evidenciar sus diferentes representaciones. Cabe recalcar que la actividad será avalada por el marco teórico referencial de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

Debido a que nuestra investigación está relacionado con en el objeto matemático elipse, dirigido a estudiantes de Física, cuyas edades oscilan entre 18 y 20 años, también revisamos el plan de estudios de los estudiantes de la Escuela Profesional de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao (UNAC), encontrando que nuestro objeto matemático elipse se encuentra contenido en el curso de Complemento de Matemática, que es llevado en el primer semestre de estudio y es pre requisito para cursos posteriores como Física I, II y III, Termodinámica, Física Moderna, Mecánica clásica, tal como lo demuestra su malla curricular (Ver figura 1).

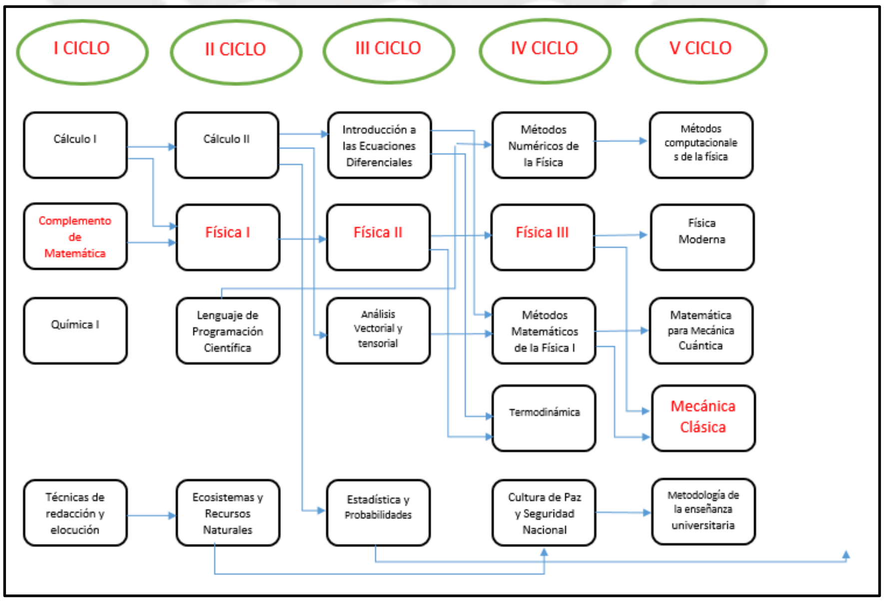


Figura 1. Malla Curricular de Física
Fuente. Adaptado del plan de estudios UNAC (2016 p. 22)

La importancia del estudio de las cónicas, para los estudiantes de Física, radica en que en cursos posteriores como el de Mecánica Clásica, que pertenece al quinto ciclo, estudian temas como Fuerzas centrales, las leyes de Kepler, cuerpos celestes, problema de los dos cuerpos, entre otros, donde recuerdan el estudio de las cónicas y, en especial, el objeto matemático elipse.

Revisando el plan de estudio, podemos observar que el estudio vectorial de la cónica elipse se encuentra en el curso de Complemento de Matemática, teniendo como propósito que los estudiantes den un uso correcto de los métodos vectoriales y matriciales del Álgebra vectorial y n-dimensional, así como la aplicación de la teoría básica en problemas contextualizados de la vida real.

Por ello, revisando el silabo del curso encontramos contenidos de: Álgebra vectorial, Cónicas, Números complejos, Teoría de polinomios matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones lineales, tal como lo muestra su Silabo (Ver figura 2).

Contenidos
• Álgebra Vectorial
• Cónicas
• Números Complejos
• Teoría de Polinomios
• Matrices
• Determinantes
• Sistemas de Ecuaciones lineales

Figura 2. Contenidos del curso de complemento de Matemática.
Fuente: Silabo del curso de Complemento de Matemática

El tema de las cónicas es abordado en la sexta semana de estudio, en la sesión 23, el cual es trabajado de manera vectorial, determinando las ecuaciones de la parábola y la elipse, según lo que muestra el silabo del curso (Ver figura 3).

SEMANA	CONTENIDO CONCEPTUAL	CONTENIDO PROCEDIMENTAL	CONTENIDO ACTITUDINAL	INDICADORES
6ta Semana	**Sesión 21**: Parábola **Sesión 23**: Elipse	• Reconoce diversas ecuaciones de una parábola. • Determina la ecuación de una elipse. • Trabaja en grupos los problemas y ejercicios. • Establece técnicas para la mejor comprensión dela parábola y elipse. • Participa en la resolución de problemas.	• Analiza la excentricidad de una cónica. • Muestra interés por el estudio de las cónicas. • Utiliza metodologías y técnicas de trabajo. • Es responsable solidario y ético. • Desarrolla un espíritu crítico y constructivo. • Es abierto al dialogo y trabaja en equipo.	• Adquiere información para trazar la cónica elipse. • Participa en la resolución de ejercicios y problemas. **Sesión 22**: Práctica dirigida **Sesión 24**: práctica dirigida

Figura 3. Programación de contenidos
Fuente: Adaptado del Silabo del curso de Complemento de Matemática

Asimismo, podemos mencionar la importancia del estudio de las cónicas en las carreras de Ingeniería. Por ello, revisamos el plan de estudios de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Energía (FIME) de la Universidad Nacional del Callao (UNAC), encontrando que el estudio de las cónicas es abordado de manera vectorial en un primer curso que lleva como nombre Complemento de Matemática, el cual es pre requisito para cursos posteriores como Dibujo en Ingeniería, Lenguaje de Programación para Ingeniería, Dibujo Mecánico I Asistido por computadora, Estática, Dibujo Mecánico II Asistido por computadora, Mecánica de Materiales I y II, donde al estudiar el tema de sólidos rígidos se encuentran con las elipses de inercia.

Las propiedades de esta elipse también son importantes en cursos como Resistencia de materiales, ya que al presentar una placa a la que se puede hacer girar, gracias a ejes de rotación que se localizan en la misma placa y que pasan por su centro de gravedad (SDG), todos los puntos sobre los diferentes ejes y cuya longitud al centro de masa es inversamente proporcional al cuadrado de su momento de inercia forman una elipse. Es a esta elipse que se le llama **elipse de inercia.**

Por otro lado, el elipsoide de inercia de un cuerpo rígido obtenido en relación a su centro de masa, es llamado el elipsoide central de inercia. Para una mejor comprensión del elipsoide de inercia, observemos la siguiente figura (Ver figura 4).

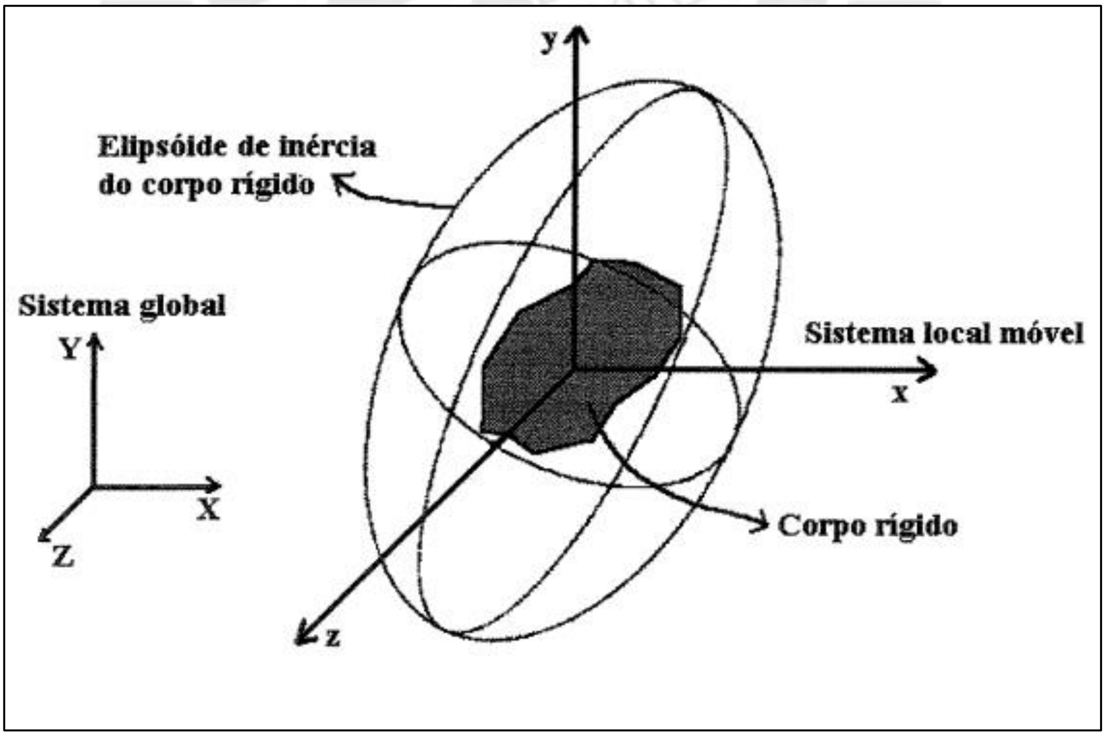


Figura 4. Elipsoide de Inercia
Fuente: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/274863/1/Mercadante_LucianoAllegretti_D.pdf

A continuación, mostramos la malla curricular de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Energía (Ver figura 5).

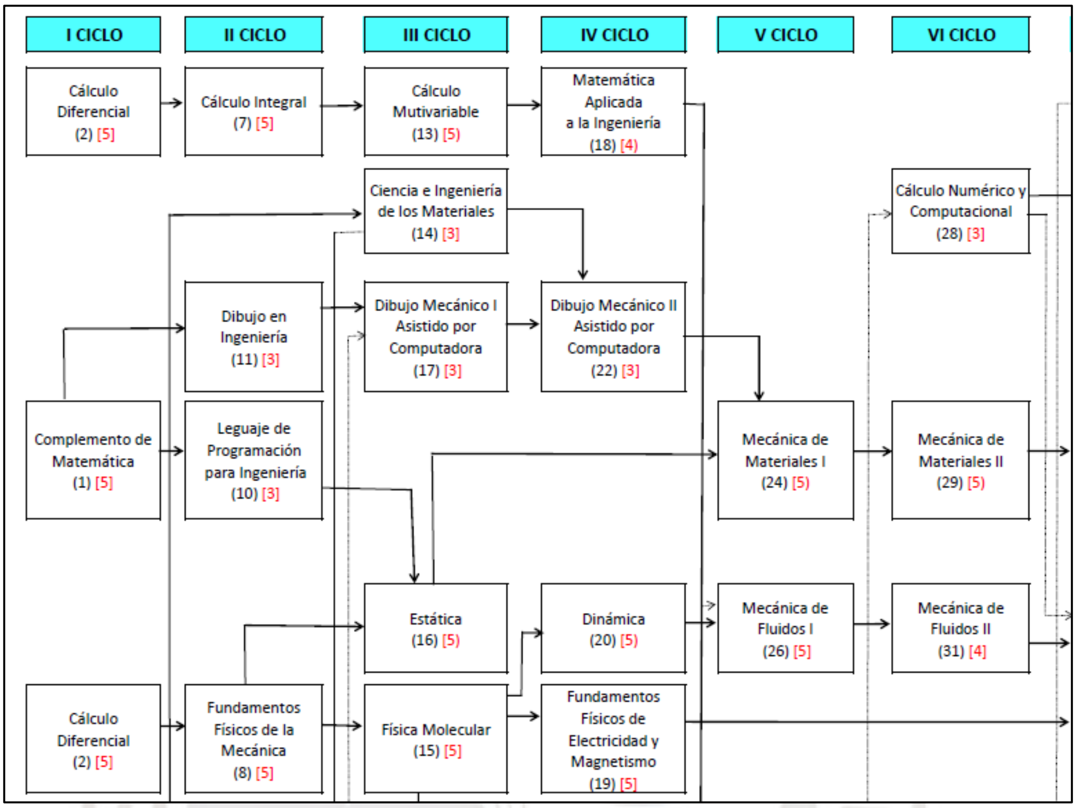


Figura 5. Malla Curricular FIME
Fuente: Adaptado del plan de estudios de la FIME

Del mismo modo, también encontramos nuestro objeto de estudio en el curso de Matemática Básica (MB) de la escuela profesional de Ingeniería Ambiental y Recursos Naturas (FIARN) de la Universidad Nacional del Callao (UNAC),

De las investigaciones realizadas por Santa (2011), León (2014) y Bonilla (2015) relacionadas con la preocupación del estudio de la cónica elipse y de las investigaciones de Silva (2013) y Flores (2015) relacionadas con la preocupación de que los estudiantes logren la comprensión de las secciones cónicas y sus diferentes representaciones para así poder apropiarse del objeto matemático en estudio, por la importancia del estudio de la cónica elipse en las carreras de Física e Ingeniería, así como también sus aplicaciones en la medicina y por la importancia de un ambiente de representación dinámica en el aprendizaje y enseñanza de un tema matemático determinado, justificamos nuestra investigación y que consistirá en realizar una actividad mediante una secuencia de preguntas que privilegian la transición entre los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraica y gráfica, dirigido a estudiantes de Física.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Como estamos interesados en el estudio de la elipse y sus diferentes representaciones, nuestra investigación pretende responder la siguiente pregunta:

¿Cómo la coordinación de diferentes registros de representación semiótica favorece la movilización de la noción de Elipse en estudiantes de Física?

Para responder a esta pregunta nos planteamos los siguientes objetivos:

<u>Objetivo General:</u>

Analizar la coordinación de diferentes registros de representación semiótica que los estudiantes de Física realizan para movilizar la noción de Elipse.

<u>Objetivos específicos:</u>

- Identificar los tratamientos y las conversiones realizadas por los estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse
- Describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes utilizan al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse.

CAPÍTULO II: LA ELIPSE

En este apartado, presentaremos un estudio de la elipse desde su aspecto histórico, tomando como referencia a Eves (2004) y aspectos matemáticos como la ecuación ordinaria, la deducción de sus elementos asociados y las gráficas dependiendo la ubicación del vértice y su orientación tomando como referencia a Venero (2009), texto que es muy revisado por estudiantes de Ciencias Básicas e Ingeniería y, por otro lado, también presentaremos el aspecto didáctico de la elipse.

2.1 Aspectos históricos de la elipse.

En nuestra investigación, haremos un recuento de la evolución histórica de la elipse. Para ello, tomamos como referencia al autor Eves (2004), quien nos da una línea de tiempo que empieza por los tres problemas clásicos: Duplicación del cubo, trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, pasando por Apolonio de Perga (262 a.C) y concluyendo con Descartes (1596 – 1650 a.C).

Eves (2004) menciona que alrededor del año 1200 a.C, las tribus Dórias se desplazaron al sur de la península griega, siendo su principal tribu los espartanos, quienes fundaron la ciudad de Esparta.

Los habitantes de las regiones invadidas por los espartanos se movilizaron a las islas Jónicas del mar Egeo formando centros comerciales griegos y son en esas colonias, en el siglo VI a.C, en la que se crea la escuela Jónica, donde prosperó la filosofía griega y donde nació la Geometría demostrativa.

En esa época, los espartanos eran un gran imperio que tenía una filosofía expansionista cuya economía se basaba en la esclavitud. Debido a su ambición expansionista, invaden las ciudades Jónicas cuyo resultado es el desplazamiento hacia el sur de Italia de grandes filósofos griegos, como Pitágoras y Xenófanes que más adelante formarían escuelas Filosofía y Matemática en Crotona.

Luego de la derrota de los espartanos, por parte de Atenas, la hegemonía ateniense se consolidaba y se vivió un tiempo de gran prosperidad que atraía a grandes matemáticos de todas partes del mundo griego, como Hipócrates, quien se cree publicó la primera Geometría organizada.

Durante la guerra del Peloponeso entre Atenas y Esparta en el año 427 a.C, Atenas era azotado por una gran peste que mató a casi un cuarto de su población, año conocido como *el de la gran peste,* nace Platón, quien en el año 387 a.C funda su famosa ***Academia*** cuyo lema a la entrada decía: ***Que aquí no entren aquellos no versados en Geometría***.

Muchos de los trabajos importantes de Matemática en el siglo VI a.C fueron hechos por amigos o discípulos de Platón, entre ellos Menaecmo (350 a.C), su amigo personal y discípulo de Eudoxo, quien inventaría posteriormente las secciones cónicas al querer resolver el problema clásico de la duplicación del cubo sin utilizar una regla graduada y compás.

Este problema clásico también era conocido como el problema de los Delianos. Al respecto, Eves (2004) escribe que los Delianos, en esas épocas, eran azotados por una gran peste y por querer librase de tal castigo consultaron a su oráculo, indicándoles que para parar el castigo tendrían que duplicar el altar cúbico de Apolo.

Para el autor, la importancia de los tres problemas clásicos radica en que no pueden ser resueltos con la utilización de regla y compás, aunque para otros problemas geométricos esos instrumentos servían para su construcción. La búsqueda desesperada de soluciones para los tres problemas clásicos tiene una gran influencia en la Geometría griega, el cual llevó a realizar algunos descubrimientos como las secciones cónicas, muchas curvas cubicas y cuadráticas y varias curvas trascendentes.

El problema de la duplicación del cubo fue estudiado en la Academia de Platón, cuyo primer progreso fue la reducción del problema hecha por Hipócrates (440 a.C) que consiste en la construcción de dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta de longitudes s y $2s$, donde las medias proporcionales las denotó por x e y. Esto quiere decir que $s : x = x : y = y : 2s$. De estas proporciones obtiene que $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$, donde eliminando la variable y, Hipócrates obtiene $x^3 = 2s^3$, siendo x la arista de un cubo cuyo volumen era el doble de otro cuya arista es s .

Después de la reducción del problema realizado por Hipócrates, existen algunas tentativas en la resolución del problema de la duplicación del cubo, siguiendo los caminos de las medias proporcionales entre dos segmentos de rectas dados, siendo entre todos ellos, el más notable, la solución echa por Arquitas (400 a.C) por la Geometría superior utilizada.

Esta solución consistió en encontrar un punto de intersección entre un cilindro circular recto, un toro de diámetro interior circular cero y un cono circular recto, lo que evidencia los conocimientos matemáticos que tenían en aquella época.

De igual manera, Menaecmo (350 a.C) da dos soluciones al problema de la duplicación del cubo y para ello invento las secciones cónicas. En la primera solución, Menaecmo indica:

> Trazar dos parábolas con vértice en común, ejes perpendiculares y tales que el lado recto de una es el doble de la otra. Denota por x la longitud de la perpendicular bajada de la otra intersección de las dos parábolas sobre el eje de la parábola menor. Entonces, x es la arista de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen del cubo que tiene como arista el lado recto menor. (Eves 2004, p. 149-150)

Podemos notar que Menaecmo, para poder dar una solución al problema de la duplicación del cubo, utiliza a las secciones cónicas, en particular, la parábola.

Interpretando el enunciado en esa época y trasladado a la actualidad podemos realizar un gráfico representativo de la siguiente manera (Ver figura 6):

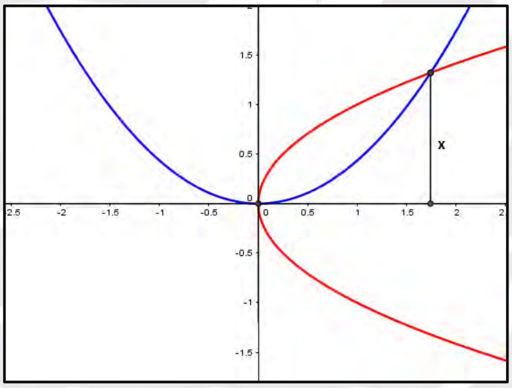


Figura 6. Duplicación del Cubo
Fuente: Elaboración propia

En la segunda solución dada por Menaecmo, el autor nos indica:

> Trazar una parábola de lado recto s, después una hipérbola equilátera de eje real igual a $4s$, teniendo como asíntotas el eje de la parábola y la tangente a la parábola en su vértice. Sea x la longitud de la perpendicular bajada de la intersección de las dos curvas sobre el eje de la parábola, esto es $x^3 = 2s^3$. (Eves 2004, p.150)

Después de la guerra del Peloponeso, Eves (2004) indica que los estados griegos sufren una desunión política que es aprovechado por el Rey Felipe de Macedonia, quien extiende sus dominios hacia el sur, anexando a Grecia al imperio macedonio.

Luego de la muerte de Felipe, le sucede en el poder su hijo, Alexandre el grande, quien funda la ciudad de Alejandría, en Egipto en el año 332 a.C aproximadamente y con su muerte en el año 323 a.C, Ptolomeo construye la famosa Universidad de Alejandría, cuyo pulcro fue su gran biblioteca.

Euclides, del que no se sabe nada de la fecha de su nacimiento y el lugar donde nació, estuvo a cargo del departamento de Matemática de aquella casa de estudio por ser un gran geómetra quien realizó por lo menos unos 10 trabajos, pero su más grande obra fue *los elementos*. Al respecto, el autor indica:

> Parece que ese trabajo notable inmediato, completamente superó todos los elementos anteriores; de hecho, ningún vestigio ha quedado de esfuerzos anteriores. Tan pronto como el trabajo apareció, ganó el más alto respeto y, de los sucesores de Euclides hasta los tiempos modernos, la mera cita del número de un libro y el de una proposición de su obra maestra es suficiente para identificar un teorema o construcción particular. (Eves 2004, p. 167)

Desde el año 300 al 200 a.C aproximadamente, donde sobresalieron grandes matemáticos como Euclides, Arquímedes y Apolonio, durante la época Helenística, se le conoce como *la edad de oro, ya que los* tres fueron los más grandes matemáticos del siglo III a.C.

De Arquímedes, Eves (2004) nos relata que es oriundo de la ciudad griega Siracusa, considerado uno de los mayores matemáticos de la antigüedad y de todos los tiempos.

Los historiadores romanos dejaron muchos relatos sobre Arquímedes, entre esos el autor nos cuenta cómo ayudó en la defensa de la ciudad Siracusa cuando los romanos lo sitiaron al mando del general Marcel, ya que encontraron catapultas que se podían ajustar para lanzar pesadas rocas a las embarcaciones enemigas que se acercasen a los muros de la ciudad.

Sobre Apolonio, el autor escribe que nació alrededor del año 262 a.C, en Perga, en el sur del Asia menor.

Cuando era joven, viajó a Alexandria a estudiar con los discípulos de Euclides, donde terminó quedándose mucho tiempo. A Apolonio se le conoce como un gran astrónomo, pero cuya fama se debe a las ***secciones cónicas***. Al respecto, el autor indica:

> Aunque Apolonio fuese un astrónomo notable y aunque él hubiese escrito sobre múltiples asuntos matemáticos, su fama se debe principalmente a ***las secciones cónicas***, una obra extraordinaria gracias a la cual sus contemporáneos le darán el sobrenombre de "***el gran geómetra".*** Con más de 400 proposiciones en sus ocho libros, secciones cónicas es un estudio exhaustivo de esas curvas que supera completamente los trabajos anteriores de Menaecmo, Aristeu y Euclides sobre esos asuntos. (Eves 2004, p. 198)

De los ocho libros, solo llegan a nosotros siete de ellos, ya que los primeros cuatro se encuentran en lengua griega y los tres restantes en una traducción árabe del siglo IX. De estos cuatro primeros libros, el I, II y el III se encuentran basados en trabajos anteriores realizados por Euclides y que tratan de una manera elemental a las secciones cónicas.

Los antecesores griegos a Apolonio obtenían a las cónicas de tres tipos distintos de conos de revolución, cambiando el ángulo del vértice, que en nuestros tiempos de podría escribir como un ángulo menor que, igual a o mayor que un ángulo de 90°. Estos conos, según el autor, eran seccionados por un plano perpendicular a su generatriz y de esta intersección daba como resultado una elipse, una parábola o una hipérbole respectivamente. Esta hipérbole que obtenían los griegos era de una sola hoja.

Por otro lado, Apolonio, en su libo I, obtenía las secciones cónicas como se las conoce en la actualidad de un cono circular duplo, ya sea recto u oblicuo. Los nombres de elipse, parábola e hipérbole, Apolonio la toma de la escuela pitagórica. Al respecto, el autor nos dice:

> Los nombres elipse, parábola e hipérbole fueron introducidos por Apolonio y fueron tomados de la terminología pitagórica antigua referente a la aplicación de áreas. Cuando los pitagóricos aplicaban un rectángulo a un segmento de recta (Esto es, colocaban la base del rectángulo a lo largo del segmento de recta, con un vértice del rectángulo sobre un extremo del segmento), ellos decían que se tenía un caso de elipse, parábola o hipérbole conforme la base del rectángulo quedaba por debajo del segmento de recta, coincidía con él o lo excedía. (Eves 2004, p. 199)

Utilizando la terminología de la época de los pitagóricos, Apolonio lo interpreta diciendo sea AB el eje principal de una cónica, tomando a P como uno de sus puntos, se traza la perpendicular a AB cuyo pie es el punto Q; considera a A como el vértice de la cónica y por ella traza una perpendicular a AB de longitud AR, lo que se le conoce en la actualidad con el nombre de lado recto o parámetro p de la cónica y aplica a AR un rectángulo, teniendo como uno de sus lados AQ, cuya área es $(PQ)^2$.

Entonces, Apolonio expresa que si el rectángulo está por debajo de la recta AR, coincida con él o lo exceda, la cónica será una elipse, parábola o hipérbole (Ver figura 7).

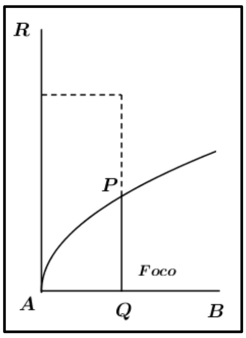


Figura 7. Representación de la cónica
Fuente: Eves (2004, p. 200)

Considerando esta curva en un sistema de coordenadas cartesianas y denotando al punto P con coordenadas x e y, Apolonio deduce que la curva es una elipse o hipérbole si $y^2 < px$ o $y^2 > px$; es decir, $y^2 = px \mp \frac{px^2}{d}$, donde d lo denotaba como la longitud del diámetro por el vértice A. Para el caso de la parábola, se tiene que $y^2 = px$. Con esto, gracias a unas ecuaciones cartesianas geométricas equivalentes, es que Apolonio deduce la Geometría de las secciones cónicas.

Con respecto al libro II del tratado de las secciones cónicas, Eves (2004) nos indica que Apolonio se dedicó exclusivamente al estudio de las asíntotas e hipérbolas conjugadas, además del trazado de tangentes.

En el libro III, trabaja una variedad de teoremas en los cuales se incluye los relacionados a áreas. También encuentra estudios sobre propiedades armónicas de polos y polares, lo que en la actualidad se le conoce como la Geometría proyectiva y algunos teoremas relacionados al producto de segmentos de cuerdas que se intersectan.

En la parte final de este libro III, Apolonio se dedica a describir las propiedades de los focos de las secciones cónicas, más no se encuentra un estudio entre la relación foco-directriz y al estudio del foco de la parábola. El nombre "foco", utilizado por los griegos y Apolonio, fue introducido muchos después por Johann Kepler (1571 - 1630) a quien dedicaremos unas líneas más adelante por la importancia de su estudio sobre Astronomía y Física.

En el libro IV, Apolonio realiza la demostración de algunas proposiciones propuestas en su libro III, relacionados a las propiedades armónicas de polos y polares, así también estudia a los pares de cónicas que se interceptan y, con respecto al libro V, el autor indica que es el libro más notable que ha permanecido, donde se estudia las normales como segmentos de recta máximos y mínimos obtenidos en un punto de la curva.

En el libro VI, Apolonio trabaja lo relacionado a cónicas iguales y semejantes mediante problemas de construcción y teoremas, mientras que el libro VII contiene varios teoremas sobre los diámetros conjugados.

Para profundizar un poco más respecto al libro I del tratado de "*las secciones cónicas"* de Apolonio, Ortiz (2015) da una visión del aporte de su trabajo a la Geometría analítica, teniendo mucho cuidado con el enfoque planteado por éste y respetando su lenguaje matemático.

De esta manera, el autor expone la idea planteada en el libro I:

> Sea un círculo BC y un punto A que esta fuera del plano que contiene al círculo; el cono doble es generado por la recta que pasa por A y que se mueve a lo largo de la circunferencia; este círculo se llama la base del cono. Su eje es la recta que va de A al centro del círculo, si el eje es perpendicular a la base, el cono es circular recto; caso contrario, el cono es escaleno u oblicuo. Ahora, consideremos la sección de un cono por un plano que corta al plano de la base en una recta DE. Sea BC el diámetro del círculo base tal que $BC \perp DE$; de esta manera el ΔABC contiene en su interior al eje del cono; este triángulo es llamado triángulo axial. Si este triángulo corta a la cónica en PP', entonces $PP'M$ es la recta determinada por la intersección del plano de corte con el triángulo axial. (Ortiz 2015, p. 308-309)

Prosiguiendo con la idea planteada por Apolonio, sea QQ' cualquier cuerda de la sección cónica la cual es paralela al segmento DE, entonces Apolonio llegó a probar que el segmento PP' corta en "V" al segmento QQ' (V punto medio de QQ'); es decir, $VQ = \frac{1}{2}QQ'$.

Seguidamente traza una recta AF paralela a PM hasta intersectar a BM en F. A continuación, traza la recta PL ortogonal a PM en el plano de la sección.

Es así que, para que la cónica sea la elipse y la hipérbola, se toma al punto L tal que cumpla lo siguiente: $\frac{PL}{PP'} = \frac{BF.FC}{AF^2}$ y para la parábola se considera la relación, $\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$.

Para tener una mejor comprensión de lo expresado por Ortiz (2015), realiza el siguiente gráfico (Ver figura 8).

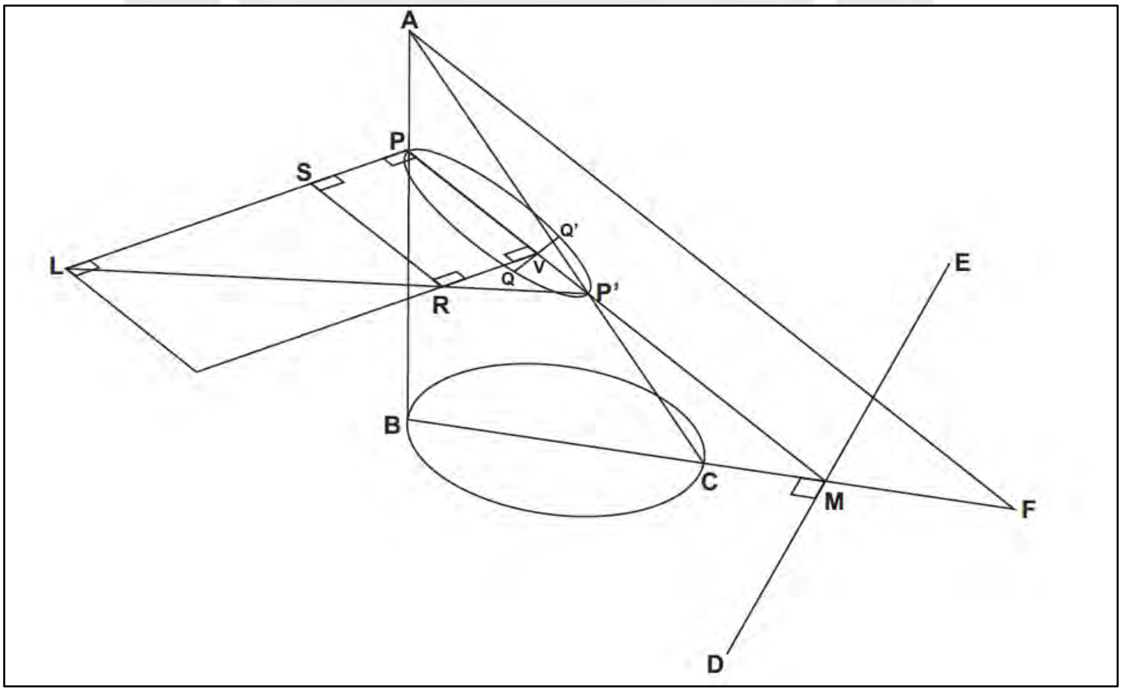


Figura 8. Interpretación geométrica de las secciones cónicas
Fuente: Ortiz (2015, p. 309)

Esto quiere decir que, para el caso de la elipse, se traza el segmento $P'L$ y para la hipérbola VR paralelo a PL desde V hasta intersectar a PL en R. Para el caso de la hipérbola, el punto P' estaría ubicado en la otra hoja, lo que implica que se tenga que prolongar $P'L$ para ubicar el punto R.

Bajo estos argumentos planteados líneas arriba, el autor indica que para que la sección sea una elipse o una hipérbola, Apolonio prueba que: $QV^2 = PV.VR$, denotando a QV como la "ordenada", de donde el cuadrado construido de la ordenada es equivalente al rectángulo que se construye sobre PL.

Para el caso de la elipse, Ortiz (2015) explica que Apolonio llega a comprobar que el complemento de tal rectángulo, en el rectángulo $PV.PL$, es el rectángulo LR y que este rectángulo es semejante al de lados PL y PP'. A esta situación los griegos lo llamaban "elipse".

Con respecto a la hipérbola, Apolonio partiendo de $QV^2 = PV.VR$, llega a probar que el segmento VR tiene mayor longitud que PL, el rectángulo de lados $PV.VR$ excede al rectángulo construido sobre PL, de donde Apolonio obtiene que el rectángulo $PL.PV$ es el rectángulo LR y que éste es semejante al rectángulo de lados PL y PP'. Cuando se daba este caso los griegos lo llamaban "hipérbola".

Según Eves (2004), después de la caída del imperio romano, en la mitad del siglo V hasta aproximadamente el siglo XI, era conocido como ***la baja edad media***. Durante esta etapa, hubo una decadencia del saber matemático casi al punto de desaparecer el saber griego y muchos de las artes u oficios.

En la historia de la Matemática, al siglo XII, también se le conoce como el siglo de las traducciones (Del árabe al latín, hebreo al latín y árabe al hebreo, así como del griego al latín). Después de estos siglos, no hubo casi nada en lo concerniente a los estudios de la Geometría hasta el siglo XVII. A este siglo, el autor lo llamo ***el alba de la Matemática moderna***, ya que en los inicios Napaier revela la teoría de los logaritmos, Galileo funda la ciencia de la dinámica y Kepler da a conocer sus leyes del movimiento planetario y Descartes dio a conocer la Geometría analítica moderna.

Debido a nuestra investigación, respecto a la cónica elipse dirigida a estudiantes de ciencias básicas (Física), vamos a hablar sobre Kepler y sus leyes, además de Descartes y la Geometría analítica.

Con respecto a Kepler, nació en 1571 y desde muy joven tenía una gran pasión por Astronomía, ya que llegó a tener un puesto de trabajo en la Universidad de Grätz, Austria, donde fue asistente del ya famoso astrónomo danés-sueco Tycho Brahe, quien falleciera unos años después dejando una vasta colección de datos astronómicos sobre el movimiento de los planetas.

Kepler era un seguidor de la teoría de Copérnico y, por ello, tuvo una gran perseverancia para poder resolver el problema del movimiento de los planetas en torno al Sol utilizando los datos dejados por Brahe. Al respecto, Eves (2004) indica:

> Enteramente convencido de la teoría copernicana de que los planetas describen orbitas en torno al Sol, Kepler procuró de manera infatigable determinar la naturaleza y la posición de esas órbitas y cómo ellas son recorridas por los planetas. Después de muchos intentos hechos, cuando sus pocos datos eran complementados por la imaginación, Kepler heredó la masa enorme de observaciones muy exactas hechas por Tycho Brahe sobre los movimientos de los planetas. (p. 356)

Para poder resolver el problema, Kepler, en primer lugar, se plantea buscar, con la imaginación, una solución posible y después hacer los cálculos para poder demostrar si la solución era la correcta y es así que en el año 1609 formula sus dos primeras leyes del movimiento de los planetas y, en un periodo de 10 años después, su tercera ley, las cuales son:

- Los planteas de mueven en torno del Sol en trayectorias elípticas con el Sol en uno de sus focos.
- El radio vector que une un planeta al Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
- El cuadrado del tiempo para que un planeta complete su revolución orbital es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

Dichas leyes son fundamentales en la historia de la Astronomía y la Matemática. Tanto es su influencia que Isaac Newton, para poder demostrarla, tuvo que crear la teoría de la mecánica celeste moderna, lo que evidenció una aplicación de la Matemática.

Al respecto, el autor dice que después de 1800 años del estudio de los griegos realizado a las secciones cónicas, se pudo encontrar una aplicación directa. También indica que es a Kepler a quien se le atribuye de introducir la palabra ***foco*** en la Geometría de las cónicas.

Con respecto a la Geometría Analítica, el autor nos indica que ya en el mundo antiguo los griegos se dedicaron al Álgebra geométrica y que la noción de coordenada surge por los egipcios y los romanos en la confección de mapas.

La Geometría analítica, como se le conoce en la actualidad, tuvo que esperar hasta el siglo XVII los aportes hechos por el francés Rene Descartes y Pierre de Fermat.

Descartes nació en 1596 y sus escritos matemáticos se dieron cuando estaba en Holanda, durante un periodo de 20 años.

En los primeros cuatro años, escribió ***Le Monde*** que fue una descripción física incompleta del universo y es en los años siguientes en los que se pone a escribir un tratado filosófico bajo el nombre de ***Discours de la Méthode,*** publicado en 1637**,** en el cual se plantea conducir bien la razón y procurar la verdad en las ciencias. Este tratado estaba acompañado por tres apéndices: ***Dioptrique, Les météores y la géométrie***.

Es en el tercer apéndice donde se encuentra el aporte a la Geometría analítica, ya que este apéndice fue el único escrito matemático que realizó Descartes, el cual se divide en tres partes: En la primera parte, realiza una explicación de algunos principios de la Geometría algebraica, a diferencia de los griegos quienes consideraban que una variable era la longitud de un segmento al producto de dos variables el área de un rectángulo y al producto de tres variables el volumen de un paralelepípedo rectángulo.

Descartes fue más allá de eso, ya que para él la expresión x^2 representaba el cuarto término de la proporción $1:x=x:x^2$ y no un área. Con esta representación, Descartes aritmetizó la Geometría y es en esta parte que él utilizó la variable x como un eje fijo e y una longitud de segmento que formaba un ángulo fijo con el eje x, cuyo propósito era construir puntos que satisficieran una relación dada, como por ejemplo $y=x^2$ de donde podía obtener para un x su y correspondiente como el cuarto término de la proporción señalado líneas arriba.

Para Eves (2004), Descartes logra inventar la Geometría analítica al tratar de resolver el siguiente problema: Si $P_1, P_2, ...P_m, P_{m+1}, P_{m+2}, ...P_{m+n}$ son las longitudes de $m+n$ segmentos de rectas que son trazadas desde un punto P a las $m+n$ rectas dadas y que forman un ángulo con esas rectas y si además $P_1P_2.......P_m = kP_{m+1}P_{m+2}.......P_{m+n}$, donde la letra k es una constante, se pide hallar el lugar geométrico de P.

De este problema y de las tentativas que realizó Descartes para poder resolverlo, es que llega a inventar la Geometría analítica.

Para una mejor comprensión de lo expresado por Descartes, con respecto a la representación de los ejes x e y, observemos el siguiente gráfico (Ver figura 9).

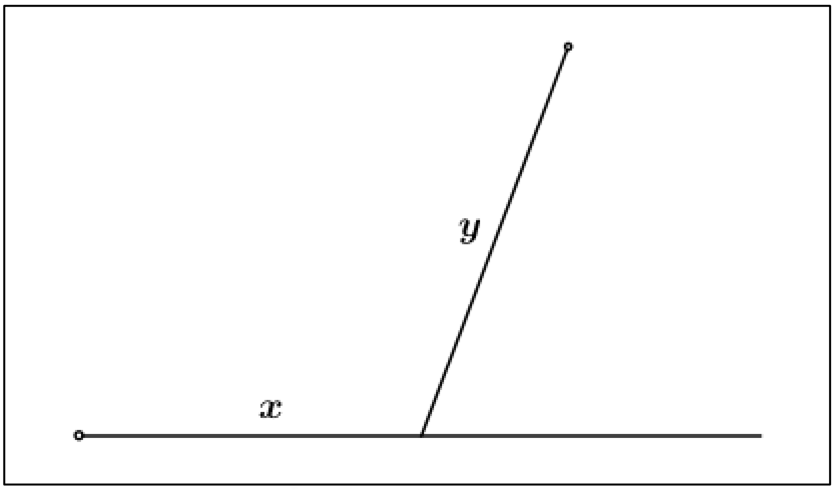


Figura 9. Relación entre el eje x e y
Fuente: Eves (2004, p. 385)

En la segunda parte del apéndice ***la géométrie***, Descartes da una clasificación de curvas que, en la actualidad, son desarrolladas, además de un método de cómo construir una recta tangente a dichas curvas. Por ejemplo, Eves (2004) muestra cómo construir la tangente a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto $(1,\ 2)$.

En la tercera parte, se enfoca en la resolución de ecuaciones de grado mayores a dos, utilizando lo que ahora se conoce como regla de las señales de Descartes.

En su trabajo de investigación, Descartes utilizó las primeras letras del alfabeto para denotar constantes y las ultimas como variables. Las palabras de coordenadas, abscisas y ordenada fueron contribución de Leibniz en 1692 y son estas palabras las que se utilizan en la actualidad.

Entre otras contribuciones realizadas por Descartes resalta la relación entre el número de vértices v, el número de caras f y el número de aristas a de un poliedro convexo. A esta relación lo escribió de la siguiente manera: $v - a + f = 2$.

De lo concerniente a las investigaciones realizadas por Descartes, su trabajo siempre encontraba una relación entre lo geométrico y algebraico y que su estudio partía de lo geométrico para llegar al algebraico.

Con respecto a Fermat, Eves (2004) indica que realizó sus investigaciones al mismo tiempo que Descartes, pues en una publicación realizada póstumamente a la muerte de Fermat que lleva como título ***Isogoge ad locus planos et solidos,*** formula la ecuación general de la recta y de la circunferencia y además hace una pequeña discusión sobre hipérbolas, parábolas y elipses.

Es a lo largo de la histórica que se ve la evolución del estudio de las secciones cónicas. Desde la antigüedad, en el siglo IV a.C., partiendo por resolver uno de los problemas clásicos como la duplicación del cubo por Meneacmo, se logra encontrar la expresión de las cónicas parábola, elipse e hipérbola, pasando luego por el siglo III a.C. por la obtención de las cónicas mediante el corte de un plano a un cono y, finalmente, llegar al siglo XVII con la invención de la Geometría analítica realizada por el francés Rene Descartes, el cual promueve la representación gráfica de la parábola, elipse e hipérbola mediante una ecuación de dos variables.

Este trabajo de investigación se centra en la representación de las coordenadas como pares ordenados que más adelante se convertirán en el Álgebra vectorial. Es en esta perspectiva del Álgebra vectorial que a continuación vamos a analizar el enfoque actual de nuestro objeto de estudio, la cónica elipse, con estudiantes de ciencias básicas y para ello analizaremos el libro de Venero (2009).

2.2 Aspectos matemáticos de la elipse.

Para realizar nuestro estudio de la elipse, hemos seleccionado el libro de Venero (2009) que tiene como título “Introducción al Análisis Matemático”, cuyo contenido aborda los temas de: Lógica, Conjuntos, Números reales, Vectores en el plano, Plano cartesiano, Grafica de ecuaciones, Transformación de coordenadas, Secciones cónicas, entre otros.

La elección de este libro radica en que se encuentra presente en la bibliografía propuesta por el docente del curso de Complemento de Matemática y que además es un libro muy privilegiado por estudiantes de Ingeniería y ciencias básicas. Nosotros nos centraremos en el sub capítulo 3 del capítulo VIII, concerniente a la elipse.

Realizaremos un análisis del libro seleccionado haciendo una conexión con nuestro marco teórico referencial, la teoría de Registros de Representación Semiótica.

El autor empieza el estudio de la elipse definiéndolo como lugar geométrico, afirmando que el conjunto de todos aquellos puntos tales que la suma de las distancias hacia dos puntos fijos siempre es constante e igual $2a$; es decir,

$$d\left[p;F_1\right]+d\left[p;F_2\right]=2a$$

O de manera similar

$$\left|P-F_1\right|+\left|P-F_2\right|=2a \tag{1}$$

Donde F_1 y F_2 ($F_1 \neq F_2$) son los focos y que la distancia entre focos es igual a $2c$, $a>c>0$, tal como se muestra a continuación (Ver figura 10):

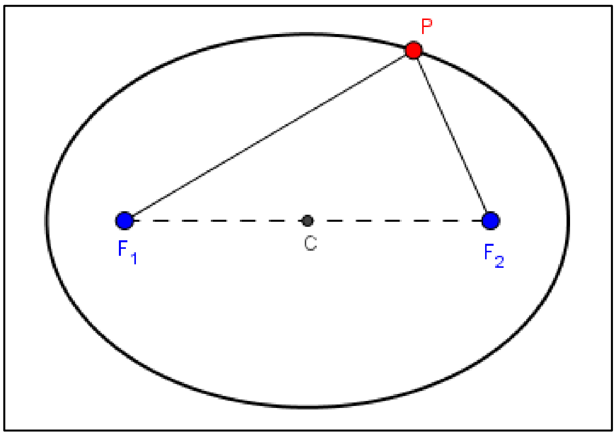


Figura 10. Registro figural de la elipse
Fuente: Venero (2009, p. 369)

Seguidamente, el autor realiza una representación gráfica de la elipse en el sistema de coordenadas XY, mostrando la representación gráfica de los vectores unitarios direccionales en un nuevo sistema de coordenadas que definió como $X'Y'$ (Ver figura 11).

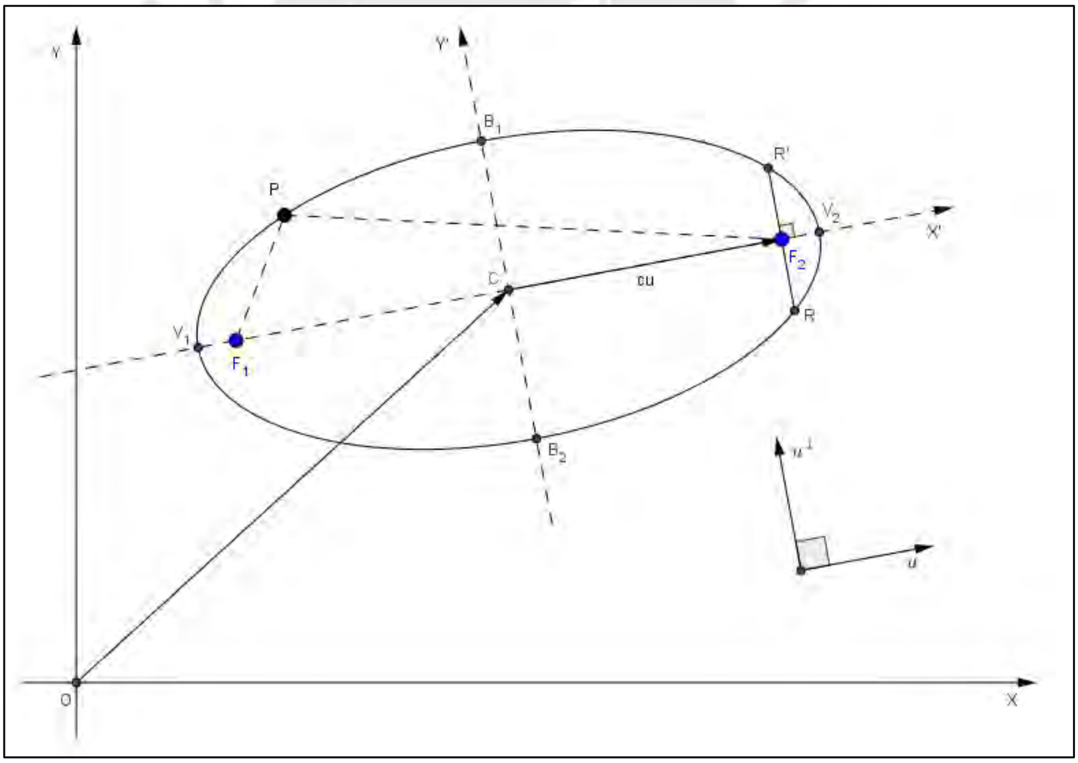


Figura 11. Representación gráfica de la elipse
Fuente: Venero (2009, p. 369)

Después de representar gráficamente a la elipse, Venero (2009) brinda una relación de puntos y segmentos característicos utilizados en la elipse: A F_1 y F_2 lo denomina focos, a la recta X' que pasa por los focos lo denomina eje focal, este eje focal intercepta a la elipse en los puntos V_1 y V_2 ,denominados vértices, y el segmento $\overline{V_1V_2}$ recibe el nombre de eje mayor, al punto medio del eje mayor lo nombra centro y lo representa algebraicamente mediante $C=(h;k)$, a la recta Y' que corta perpendicularmente al eje mayor en el punto C lo denomina eje normal y, este eje corta a la elipse en los puntos B_1 y B_2, donde $\overline{B_1B_2}$ recibe el nombre de eje menor, cuya longitud es igual a $2b$, a $\overline{RR'}$, que es perpendicular al eje mayor en el foco F_2, recibe el nombre de lado recto. Además, en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, el autor representa algebraicamente las coordenadas de: $B_1=(0;b)'$, $B_2=(0;-b)'$, $F_1=(-c;0)'$, $F_2=(c;0)'$ y $C=(0;0)'$.

Seguidamente, Venero (2009) continúa su descripción mediante lengua natural de los elementos de la elipse, indicando que L_1 y L_2 son denominadas rectas directrices con respecto a los focos F_1 y F_2, si es que son perpendiculares al eje focal sin interceptar al segmento $\overline{F_1F_2}$ y que además exista una constante e que lo denominó EXENTRICIDAD, tal que para todo punto P que pertenezca a la elipse, se debe verificar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{d[P;F_1]}{d[P;L_1]}=e=\frac{d[P;F_2]}{d[P;L_2]}$$

Después de definir a las rectas directrices y relacionarlas algebraicamente con la excentricidad, mediante la expresión dado líneas arriba, el autor, realizando tratamientos en el registro de representación algebraico y utilizando la Geometría analítica, demuestra que en toda elipse se verifican los siguientes ítems:

a) $d[B_1;F_1]=d[B_1;F_2]=a$ y $d[B_2;F_1]=d[B_2;F_2]=a$

b) $d[V_1;C]=d[V_2;C]=a$

c) $d[C;L_1]=d[C;L_2]=\dfrac{a}{e}$

d) Denotando $c=d[C;F_1]=d[C;F_2] \Rightarrow c=ae$

e) $a>b$ y $a^2=b^2+c^2$

f) La excentricidad e verifica que $0<e<1$, empleando las definiciones previas a la gráfica anterior.

Después de realizar las demostraciones de los ítems anteriores, el autor realiza una representación gráfica de todos los elementos de la elipse y las relaciones existentes entre ellos. Esta representación gráfica de los elementos de la elipse es recomendada por el autor para que los estudiantes puedan guiarse de manera fácil y puedan realizar los cálculos y la resolución de problemas que involucren cálculos de longitudes y distancias en la elipse, como se muestra en la siguiente figura (Ver figura 12).

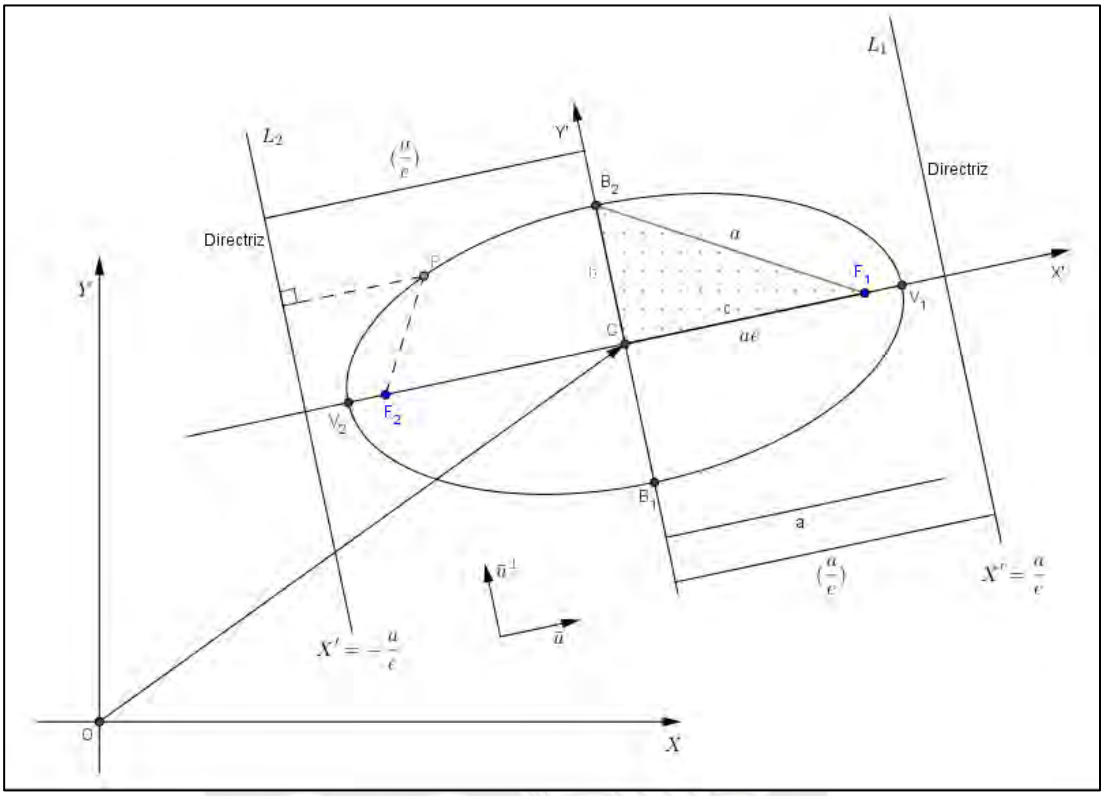


Figura 12. Longitudes y distancias en la elipse
Fuente: Venero (2009, p. 372)

Después de realizar la representación gráfica de los elementos de la elipse, tal como se muestra en la figura 12 y que el autor recomienda a todo estudiante por ser muy fácil de recordar, pasa a deducir, mediante tratamientos en el registro algebraico, la ecuación general de la elipse por dos métodos distintos.

Primer Método.

Para la demostración, utilizando este primer método, el autor toma un punto P cualquiera perteneciente a la elipse y apoyándose en la teoría de Vectores, mediante tratamientos en el registro de representación algebraico, llega a la siguiente expresión algebraica:

$P = (x, y) = C + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$, entonces para el foco F_2 tenemos,

$$P - F_2 = C - F_2 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp} = (c\bar{u}) + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$$

$$|P - F_2| = \left|(x'+c)\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}\right| = \sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

De manera similar realiza tratamientos en la expresión algebraica para el foco F_1,

$$P - F_1 = C - F_1 + x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp} = (-c\overline{u}) + x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}$$

$$|P - F_1| = \left|(x'-c)\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}\right| = \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} \qquad \text{............ }(\beta)$$

Reemplazando las expresiones algebraicas (α) y (β) en la ecuación (1), obtiene:

$$\sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} = 2a$$

De donde realizando tratamientos en la expresión algebraica, Venero (2009) obtiene la siguiente igualdad:

$$\left(a^2 - c^2\right)x'^2 + ay'^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

De esta igualdad, el autor nuevamente realiza tratamientos algebraicos para llegar a la siguiente expresión:

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2 \text{, pues } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \text{........... }(*)$$

Luego, afirma que un punto $P = (x, y)$ pertenece a la elipse si para el vector unitario $\overline{u}$ de rotación de ejes coordenados, se tiene que:

$$P = C + x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp} \text{ , donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ , con } |\overline{u}| = 1$$

Al cual le denomina ECUACION VECTORIAL DE LA ELIPSE, donde realizando tratamientos algebraicos, el autor obtiene algunos resultados:

$$x' = \left[(x, y) - C\right].\overline{u} \quad , \quad y' = \left[(x, y) - C\right].\overline{u}^{\perp}$$

Finalmente, apoyándose en la figura 12, el autor concluye esta parte indicando que si el punto P pertenece a la elipse y que si $C = (h, k)$ es su centro, entonces se verifican las siguientes expresiones algebraicas:

- Vértices $V = C \pm a\vec{u}$
- Focos $F = C \pm c\vec{u}$

- Extremos del eje menor $B = C \pm b\overrightarrow{u^{\perp}}$
- Directrices $L: \; x' = \pm \dfrac{a}{e}$

Segundo Método.

En este segundo método, el autor toma un punto P que pertenece a la elipse, el cual relaciona la distancia de este punto al foco F_2 y la recta directriz L_2 con la excentricidad, mediante la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{d[P;F_2]}{d[P;L_2]} = e \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\theta)$$

Venero (20009) realiza tratamientos algebraicos en la distancia del punto P al foco F_2 y la distancia a la recta directriz, para luego reemplazar en la expresión algebraica (θ).

$$d[P;F_2] = |P - F_2| = \sqrt{(x'+c)^2 + y'^2}$$

$d[P;L_2] = |P - L_2| = \left| x' + \dfrac{a}{e} \right|$, de (θ) y de que $c = ae$ obtenemos:

$$\left(d[P;F_2]\right)^2 = e^2 \left(d[P;L_2]\right)^2$$

$$\Rightarrow \; (x'+c)^2 + y'^2 = e^2 \left(x' + \frac{a}{e} \right)^2$$

De esta última expresión algebraica, el autor realiza tratamientos algebraicos y obtiene la siguiente ecuación:

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, para todo $P = (x, y)$ que pertenece a la elipse tal que: $P = C + x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}$.

Después de demostrar la ecuación vectorial de la elipse mediante dos métodos, el autor pasa a mostrar las ecuaciones de la elipse con eje focal paralelo a los ejes coordenados XY.

Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X

En esta ecuación de la elipse, el autor considera al vector unitario $\overline{u} = \hat{i} = (1,0)$, lo que implica que no existe rotación de coordenadas. Seguidamente, toma como centro de la elipse a $C = (h, k)$, el cual origina el radio vector de traslación de ejes, reemplazando este centro en la ecuación vectorial de la elipse y realizando tratamientos en el registro algebraico, el autor llega a la siguiente expresión:

$$x' = x - h \ , \quad y' = y - k$$

Luego, estas expresiones algebraicas son reemplazadas en (*), obteniendo la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X .

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Prosiguiendo con la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X , Venero (2009) realiza la conversión del registro de representación algebraica al gráfico, como se puede ver en la siguiente figura (Ver figura 13).

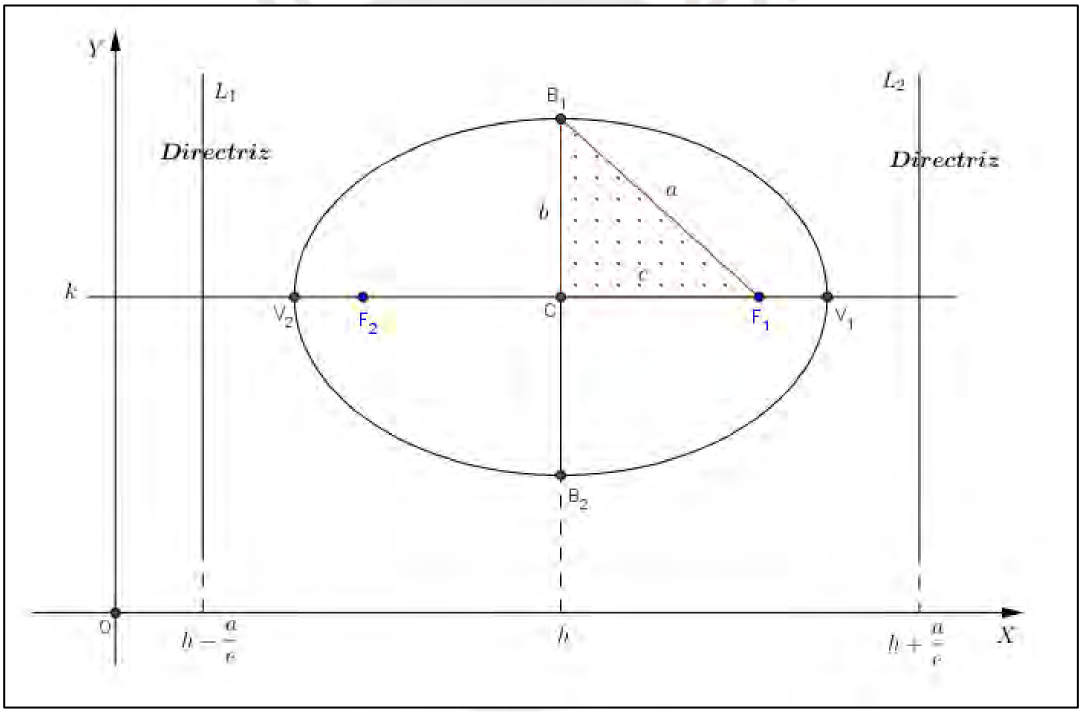


Figura 13. Eje focal paralelo al eje X
Fuente: Venero (2009, p. 374)

De la representación gráfica de la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X , el autor deduce, mediante tratamientos en el registro algebraico, lo siguiente:

- Vértices $V = (h \pm a \ , \ k)$
- Focos $F = (h \pm c \ , \mathrm{k})$
- Extremos del eje menor $B = (h \ , \mathrm{k} \pm \mathrm{b})$
- Directrices $L: \ x = h \pm \dfrac{a}{e}$, donde $C = (h \ , \mathrm{k})$ es el centro de la elipse.

Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje Y

Para este caso, Venero (2009) considera al vector unitario direccional $u=(0\ ,\ 1)$, lo que implica una rotación de $90°$ respecto al vector unitario $\hat{i}=(1\ ,\ 0)$, considerando a $C=(h,k)$ como el centro de la elipse, lo que origina el radio vector de traslación de los ejes coordenados.

El autor realizando tratamientos en el registro algebraico llega a las siguientes expresiones algebraicas:

$$x'=(x-h,y-k).\bar{u} \quad , \quad y'=(x-h,y-k).\bar{u}^{\perp}$$

De donde mediante tratamientos obtiene:

$$x'=(y-k)\ ,\ y'=-(x-h)$$

Estas dos últimas expresiones algebraicas el autor lo reemplaza en (*) obteniendo:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

De esta representación algebraica, el autor realiza la conversión a su registro de representación gráfica, tal como se observa en la siguiente figura (Ver figura 14).

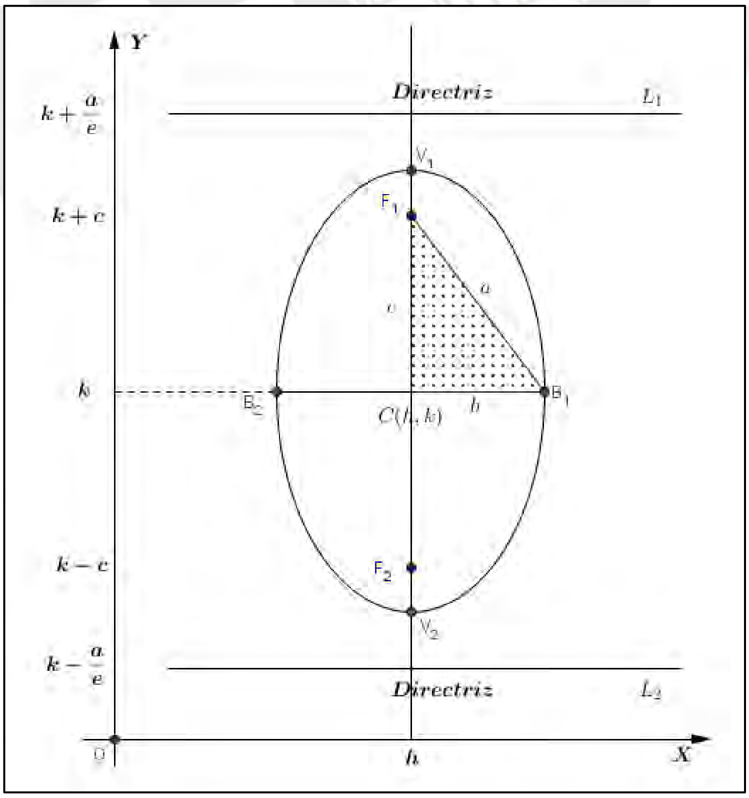


Figura 14. Eje focal paralelo al eje Y
Fuente: Venero (2009, p. 374)

Nuevamente Venero (2009), apoyándose en la representación gráfica de la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje Y realizando la conversión al registro de representación algebraica, deduce las siguientes expresiones algebraicas:

- Vértices $V = (h\ , \mathrm{k} \pm \mathrm{a})$
- Focos $F = (h\ , \mathrm{k} \pm \mathrm{c})$
- Extremos del eje menor $B = (h \pm b\ , \mathrm{k})$
- Rectas directrices $L:\ \mathrm{y} = \mathrm{k} \pm \dfrac{a}{e}$

Una vez definida las ecuaciones de la elipse con eje focal paralelo al eje X e Y respectivamente y dar sus representaciones gráficas, el autor plantea unos ejercicios aplicativos, donde realizando tratamientos en el registro de representación algebraico determina los elementos de la elipse. Luego, analiza los casos particulares cuando el centro de la elipse se encuentra en el origen de coordenadas; es decir, $C = (h\ , \mathrm{k}) = (0,0)$, entonces las ecuaciones con el eje X e Y como eje focal son expresadas algebraicamente como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Seguidamente, plantea y resuelve unos ejercicios aplicativos para finalmente exponer sobre las propiedades de las rectas tangentes a una elipse.

Considerando la ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ (\,a > b > 0\,)$

Entonces, la ecuación de la recta L_T tangente a la elipse en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dado por:

$$L_T : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

De esta ecuación, el autor toma como vector direccional de L_T a $\left(a^2 y_0, -b^2 x_0\right)$ y como es paralelo al vector $\left(-\dfrac{y_0}{b^2}, \dfrac{x_0}{a^2}\right)$, entonces le permite considerar como vector normal de L_T a

$\bar{c}=\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2}\right)$. Tomando como vectores focales $\bar{a}$ y $\bar{b}$, demuestra que los ángulos α y β formados por la recta normal L_N con los vectores focales son iguales (Ver figura 15).

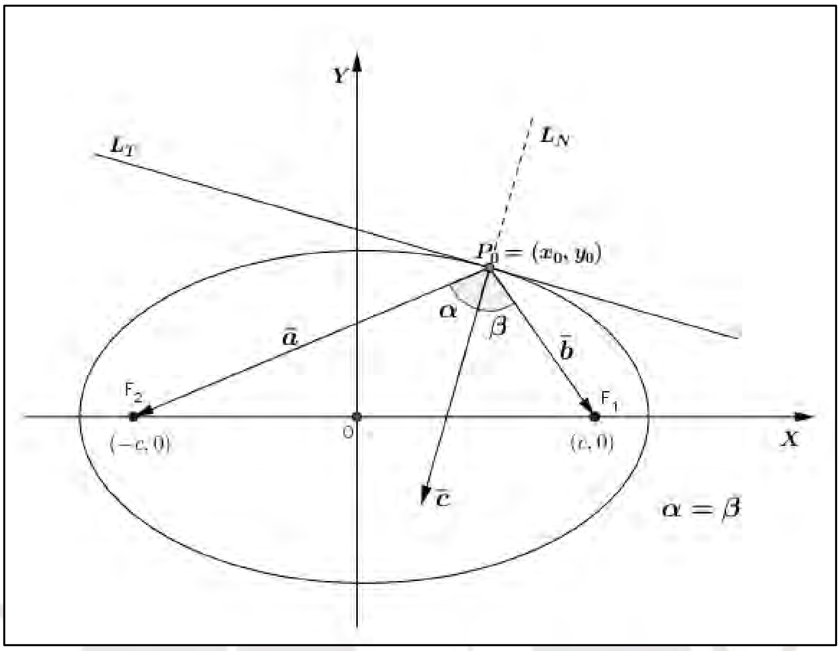


Figura 15. Recta tangente a la elipse
Fuente: Venero (2009, p. 387)

Del grafico se puede observar que:

$$\bar{a}=\overline{PF_2}=(-c-x_0,-y_0)\ \ ,\ \ \bar{b}=\overline{PF_1}=(c-x_0,-y_0),$$

Donde

$$\operatorname{Cos}\alpha=\frac{\bar{a}.\bar{c}}{|\bar{a}||\bar{c}|}=\frac{-\dfrac{cx_0}{a^2}-\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2}-\dfrac{y_0^{\,2}}{b^2}}{|\bar{c}|\sqrt{(c+x_0)^2+y_0^{\,2}}}=\frac{-\left(\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right)}{|\bar{c}|\sqrt{(c+x_0)^2+y_0^{\,2}}}$$

$$\operatorname{Cos}\beta=\frac{\bar{b}.\bar{c}}{|\bar{b}||\bar{c}|}=\frac{\dfrac{cx_0}{a^2}-\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2}-\dfrac{y_0^{\,2}}{b^2}}{|\bar{c}|\sqrt{(c-x_0)^2+y_0^{\,2}}}=\frac{-\left(1-\dfrac{cx_0}{a^2}\right)}{|\bar{c}|\sqrt{(c-x_0)^2+y_0^{\,2}}}$$

Como

$$\frac{x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{y_0^{\,2}}{b^2}=1\text{, entonces}$$

$$(c+x_0)^2+y_0^{\,2}=\frac{\left(a^2+cx_0\right)^2}{a^2}\ \text{ y }\ (c-x_0)^2+y_0^{\,2}=\frac{\left(a^2-cx_0\right)^2}{a^2}\text{, luego}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{-\left(\dfrac{cx_0 + a^2}{a^2}\right)}{\left(\dfrac{cx_0 + a^2}{a}\right)\left|\bar{c}\right|} = -\frac{1}{a\left|\bar{c}\right|}$$

$$\text{Cos}\,\beta = \frac{-\left(\dfrac{a^2 - cx_0}{a^2}\right)}{\left(\dfrac{a^2 - cx_0}{a}\right)\left|\bar{c}\right|} = -\frac{1}{a\left|\bar{c}\right|},$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

Esta propiedad de las rectas es independiente de la posición de la elipse en el plano

A continuación, presentaremos el marco teórico que sustente nuestra investigación, por ello tomaremos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, lo concerniente a transformaciones, como metodología tomaremos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentaremos el marco teórico que sustenta nuestra investigación y para ello nos apoyaremos en algunos aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, lo concerniente a transformaciones y, como método, utilizaremos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue.

3.1 Aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica

Duval (2004) afirma que no es posible estudiar los fenómenos relacionados al conocimiento sin que se recurra a las representaciones. La teoría de Registros de Representación Semiótica propone que las representaciones semióticas son fundamentales para lograr el aprendizaje de las matemáticas.

Al respecto, el autor indica que el aprendizaje de las Matemáticas configura un ámbito de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales, como el razonamiento, la resolución de problemas, la conceptualización y la comprensión de textos.

La particularidad de esto es que las actividades cognitivas requieran del uso de sistemas de representación y expresión que sean diferentes a los de lenguaje natural o de las imágenes, como diferentes sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escritura algebraica para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, entre otros.

El autor define dos tipos de representaciones:

Representaciones mentales: Son representaciones conscientes perteneciente a un conjunto de imágenes y de concepciones que un sujeto puede poseer sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado.

Representaciones semióticas: Son aquellas elaboraciones constituidas por el uso de signos (Enunciado en lengua natural, expresión algebraica, grafico, figura geométrica…) no parecen ser más que el método del cual dispone un sujeto para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas observables o accesibles a los otros.

Esto implicaría que las representaciones semióticas estarían subordinada a las representaciones mentales y no cumplirían más que la función de comunicación, olvidando que también cumplen las funciones tan primordiales de tratamiento de la información y de objetivación o toma de conciencia.

En nuestra investigación, al aplicar la actividad, observaremos si los estudiantes tienen nociones sobre la representación de la elipse, sobre su expresión algebraica y gráfica; es decir, las representaciones mentales y semióticas que tienen los estudiantes de la cónica elipse.
Duval (2004), en el papel de la cognición, clasifica a las representaciones en mentales, computacionales y semióticas y la comprensión de sus respectivas relaciones existentes entre ellos.

Esta clasificación, la realiza mediante una de las dos oposiciones clásicas: La oposición interna – externa y la oposición consiente – no consiente, señalando que estas dos oposiciones son diferentes entre sí. Para una mejor comprensión (Ver cuadro 1).

Cuadro 1. *Tipos y funciones de representación.*

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSIENTE	**Mental** *Función de objetivación*	**Semiótica** *Función de objetivación* *Función de expresión* *Función de tratamiento intencional*
NO CONSIENTE	**Computacional** *Función de tratamiento automático o cuasi instantánea*	

En nuestra investigación, nos centraremos en las representaciones semióticas en el aprendizaje del objeto matemático elipse.

El autor indica que para hablar de un registro de representación semiótico se tiene que cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: En primer lugar, establecer una marca o un conjunto de marcas visibles que sean reconocibles como una representación de algún objeto en un sistema determinado. En segundo lugar, transformar la representación de acuerdo a las únicas normas propias del sistema, de modo que se desprendan otras representaciones que puedan establecer una ganancia de conocimientos en confrontación con las representaciones iniciales. En tercer lugar, convertir las representaciones realizadas en un sistema de representación en otro sistema, de modo que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

En el análisis del desarrollo de los conocimientos y los obstáculos que se puedan presentar en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, Duval (2004) indica que esto se debe a que existen tres fenómenos que están estrechamente ligados:

- La diversidad de los registros de representación semiótica, el lenguaje natural y las lenguas simbólicas no se puede considerar como si fuesen un único registro. Del mismo modo, los esquemas, los gráficos cartesianos, las tablas y las figuras geométricas, tampoco se pueden considerar como un único sistema de representación, pues cada una de ellas plantea preguntas específicas sobre aprendizaje.
- La diferenciación entre representante y representado es imposible de lograr de manera inmediata, cualquiera que sea el registro de representación.
- Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótico, entre los sistemas semióticos diferentes, no es necesario saber sus reglas de correspondencia para poder ser movilizados conjuntamente. El mayor obstáculo que se encuentra es el del fenómeno de no congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Todo estudio que tenga relación con los aprendizajes fundamentales, siempre se debe tener en cuenta estos tres fenómenos que tienen que ver con la semioisis, además de la operación de conversión que le es intrínseco. Por ello, el autor señala que, para que una representación funcione verdaderamente como una representación, se deben de cumplir dos condiciones: Por un lado, la distinción de dos representaciones semióticas diferentes para poder expresar la representación de un mismo objeto y, por otro lado, que se puedan representar de un sistema semiótico a otro sin dificultad. Al respecto, El autor indica:

> Para los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación; es decir, permitirle el acceso al objeto representado solo cundo se cumplan dos condiciones: Que dispongan de, al menos, dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso, … y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas sin siquiera notarlo. (p. 31).

De lo expuesto, el autor nos señala que, si estas dos condiciones no se cumplen, entonces el objeto representado y la representación se confunden, lo que implica que un mismo objeto no puede ser reconocido en dos diferentes representaciones.

Las actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis son: la formación, el tratamiento y la conversión.

- **La formación** viene a ser la representación identificable de un objeto en un registro dado como, por ejemplo; el enunciado de una frase, la composición de un texto, el diseño de una figura geométrica, la elaboración de un esquema, etc.
- **El tratamiento** es la transformación de la representación (inicial) en otra representación (final), respecto a un problema o una cuestión, que facilitan el criterio de suspensión en la serie de las transformaciones realizadas. Un tratamiento en una transformación de representación interna a un registro de representación o a un sistema. Como por ejemplo la paráfrasis es una transformación interna al registro del discurso de lengua natural.
- **La conversión** es una transformación que hace pasar de un registro a otro, conservando la totalidad o solo una parte de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro inicial. Por ejemplo, tenemos que la ilustración es una conversión lingüística en una representación figural, la traducción es una conversión de una representación en lengua dada, en otras lenguas, etc.

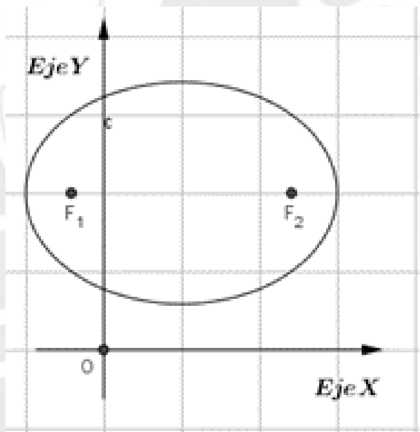
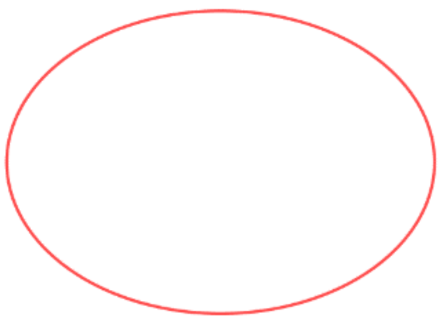
Duval (2006) indica que la actividad matemática se ejecuta necesariamente en un "contexto de representación". Por ejemplo, los números naturales se pueden representar con puntos, con una representación poligonal y también mediante la notación decimal. Además, el autor indica que los estudiantes deben ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y darles utilidad.

Asimismo, el autor señala que los registros de representación usados en la actividad matemática son exclusivamente semióticas y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas equivale tener en cuenta la manera en que se usan, como los requisitos cognitivos que involucran.
Dichos requisitos son la transformación y la coordinación. En ese sentido, el autor indica:

> Estas son las dos caras de la actividad matemática que no se pueden considerar separadamente la una de la otra, sobre todo para comprender los problemas de aprendizaje, y que proporcionan la idea clave para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático. (p. 145).

El autor distingue cuatro tipos de registros de representación semiótica: Lengua natural, algebraica, gráfico y figural.

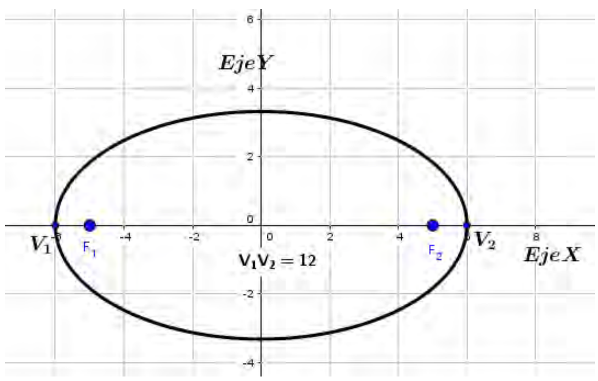
Cuadro 2. *Registros de Representación Semiótica de la Elipse.*

<table>
<tr><td rowspan="8">REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA
Objeto matemático
(La Elipse)</td><td>Lengua Natural</td></tr>
<tr><td>Elipse que tiene como centro (1 , 2), la longitud del eje mayor 4 y la del eje menor $2\sqrt{2}$.</td></tr>
<tr><td>Algebraico</td></tr>
<tr><td>$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>Figural</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

En nuestro estudio de la cónica elipse, dirigido a estudiantes de Física, vamos a requerir de la utilización de los registros de lengua natural, algebraica y gráfico, dejando de lado al registro de representación figural, ya que los estudiantes trabajaran en el plano cartesiano.

En el cuadro 2, se muestra un ejemplo del cambio de registro de representación entre lengua natural, algebraica y gráfico.

Cuadro 3. *Registros de Representación Semiótica de la elipse en estudiantes de Física.*

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Objeto Matemático Elipse	Lengua Natural
	Elipse que tiene como focos a los puntos $F'(-5,0)$, $F(5,0)$ y la magnitud del eje mayor es 12 .
	Algebraico
	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$
	Gráfico
	

En el cuadro, se puede observar que en el registro de lenguaje natural es necesario indicar los focos y la longitud del eje mayor de la elipse para poder representarla, interpretando la información dada en la representación de lengua natural y realizando la conversión de esta representación de lengua natural al algebraico para luego realizar tratamientos en esta representación, se puede llegar a la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$, el cual, mediante la conversión de la representación algebraica a la gráfica, queda representado gráficamente, como lo muestra el cuadro 2.

En dichos tratamientos, se ha seguido ciertos tipos de transformaciones obedeciendo las normas establecidas por Duval (2004).

En el cuadro 3, se muestra las transformaciones de conversión y tratamiento de una elipse entre sus tres tipos de registros.

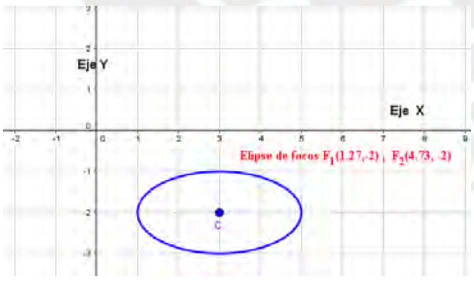
Cuadro 4. *Los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.*

TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA

Dado la ecuación general de la elipse $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la elipse.

CONVERSIÓN

registro gráfico



TRATAMIENTO

Registro algebraico

$$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$$

$$x^2-6x+9+4(y^2+4y+4)-4=0$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

Fuente: Adaptado de Duval (2006, p. 146)

En el cuadro 3, se observa la conversión del registro de lenguaje natural al gráfico y del mismo modo se observa la conversión del registro de lenguaje natural al algebraico que nos provee una mayor información para realizar tratamientos que nos permite obtener la forma ordinaria de la elipse y, del mismo modo, para la representación gráfica de los elementos de nuestro objeto matemático en estudio, la elipse, como el trazo del gráfico de las rectas correspondientes al eje menor y mayor, las rectas directrices y la representación gráfica de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley.

Al respecto, Duval (2011) indica que existen muchos estudios sobre las dificultades de lectura e interpretación de las representaciones graficas cartesianas, como la imposibilidad de encontrar la ecuación de una recta partiendo de su representación gráfica, lo que implica la no articulación de la representación gráfica y de sus ecuaciones. Tales dificultades no se deben buscar en el concepto matemático, según el autor, sino en la falta de conocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de representación gráfica y la algebraica.

En nuestra investigación, para el trazado de la recta del eje menor, el eje mayor y las rectas directrices de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, vamos a pasar de la representación algebraica a la gráfica. En ese sentido, el autor nos señala tres tratamientos heterogéneos a los cuales las representaciones semióticas cartesianas provocan:

El enfoque punto a punto: Consiste en que en el sistema de ejes coordenados un par de números representa un punto. Este enfoque es utilizado para el trazado de representaciones graficas de ecuaciones de primer y segundo grado. Al respecto de este enfoque, el autor indica:

> Es por medio de este enfoque que son introducidas y definidas las representaciones gráficas. En referencia a los ejes graduados, un par de números permite identificar un punto (E inversamente, un punto se traduce por un par de números). Este modo asociativo se limita a algunos valores particulares y a los puntos marcados en el plano referencial. Este enfoque es favorable cuando se quiere trazar el grafico correspondiente de una ecuación de primer grado y el grafico de una ecuación de segundo grado. (Duval 2011, p. 98)

Para una mejor comprensión, observemos la siguiente figura (Ver figura16).

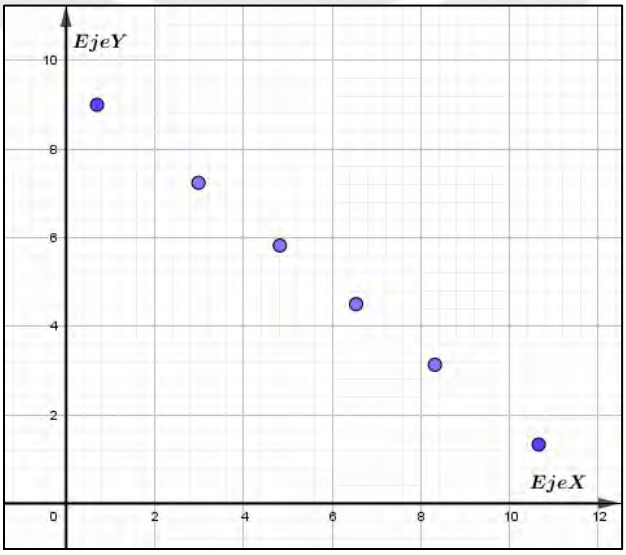


Figura 16. Enfoque punto a punto
Fuente: Elaboración propia

El enfoque de extensión del trazado efectuado: Consiste en la ubicación de infinitos puntos entre el intervalo de puntos marcados. Este enfoque, de acuerdo a Duval (2011), indica que es netamente mental. Al respecto, nos señala:

> De modo general, este enfoque es puramente mental: Ella no acarrea trazos complementarios y explicativos, como un cambio local en la graduación de los ejes para ampliar una parte del trazado. Es preciso señalar que este enfoque de extensión no se alcanza más sobre un conjunto finito de puntos marcados, como en el caso del enfoque punto a punto, ya que esta extensión se apoya en un conjunto infinito de puntos potenciales; quiere decir, en el fondo homogéneo de la hoja, en los intervalos entre puntos marcados. (p. 98)

El autor señala que este enfoque, como el enfoque punto a punto, tiene en cuenta los datos para el trazado de la representación gráfica de una recta (Ver figura 17).

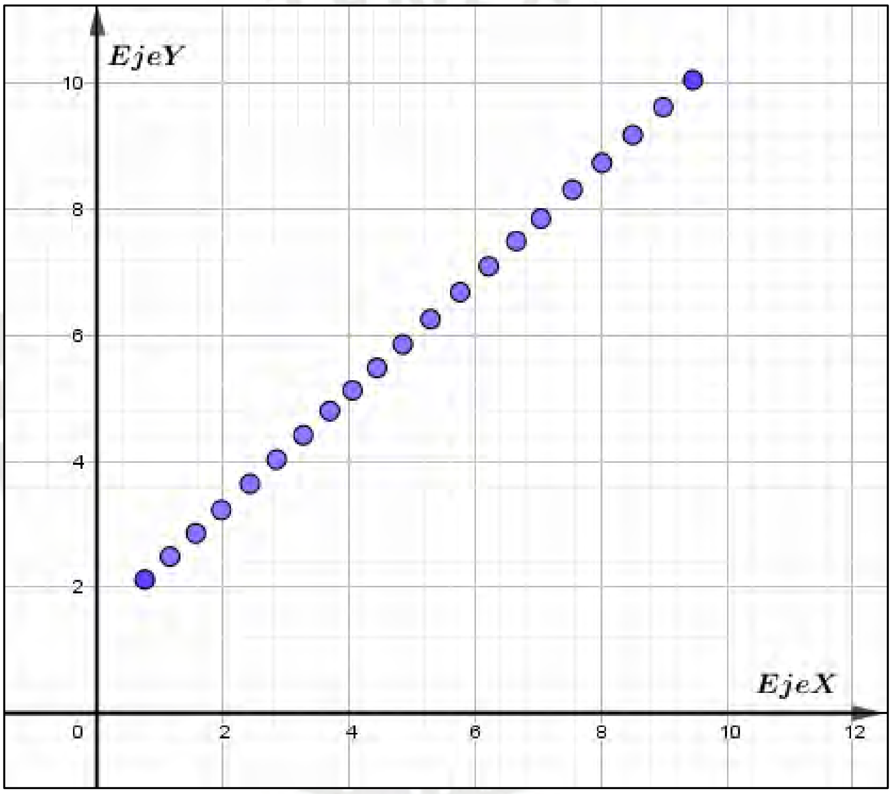


Figura 17. Enfoque de extensión del trazado efectuado
Fuente: Elaboración propia

El enfoque de interpretación global de propiedades figurales: Consiste en que toda representación gráfica representa una expresión algebraica, lo que implica que toda modificación en la representación gráfica origina una modificación en la expresión algebraica, implicando la determinación de variables visuales. A este hecho, el autor lo denomina congruencia entre dos registros de representación de un objeto o de una información.

De manera similar, Duval (2004) también nos indica que con este enfoque ya no estaremos en el enfoque punto a punto, sino en la asociación variable visual de representación – unidad significante de la expresión algebraica.

En nuestra investigación, nos vamos a apoyar en los dos primeros enfoques para el trazado de los elementos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, dejando de lado este tercer enfoque, pues en nuestra investigación no vamos a realizar la conversión de una representación gráfica de la recta a su expresión algebraica.

Para el trazado continuo del eje menor, el eje mayor y las rectas directrices de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, nos apoyaremos en lo expuesto por Duval (2012), quien dice que una regla de codificación solo permite ubicar tantos puntos como quisiéramos colocar; sin embargo, esto no permite trazar de manera continua una recta o una ecuación de segundo grado y es por eso que el autor indica que es necesario apoyarse en la interpolación y aceptar la **ley de la Gestalt de continuidad**. Para un mejor entendimiento, ver la siguiente figura (Ver figura 18).

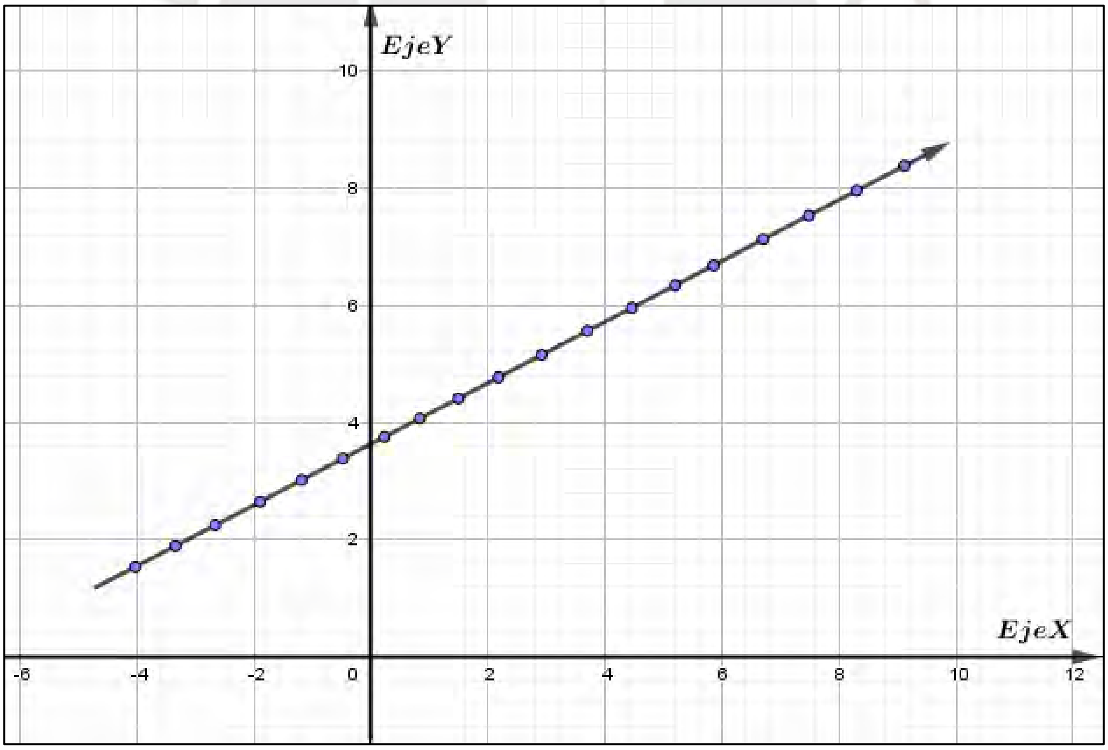


Figura 18. Trazo continuo de la recta
Fuente: Elaboración propia

De manera similar, en la secuencia de preguntas planteadas en nuestra actividad, se espera que los estudiantes logren representar gráficamente la ecuación que modela la órbita del cometa Halle mediante su regla de correspondencia. Este trazo se efectuará con la ubicación de algunos puntos de referencia mediante el enfoque punto a punto y el enfoque de extensión del trazado efectuado y, para realizar el trazo continuo, Duval (2012), nos indica:

> Ahora esta regla de codificación no es suficiente para cambiar de registro, para pasar por ejemplo, de la expresión algebraica de una relación ($y = x$, $y = x^2$) a la representación gráfica correspondiente. Ella permite marcar tantos puntos cuando deseemos, pero no de trazar el trazo continuo de una recta o una parábola. Por eso es preciso interpolar y aceptar la ley de la Gestalt de continuidad. (p. 275)

Para tener una mejor idea, ver la siguiente figura (Ver figura 19).

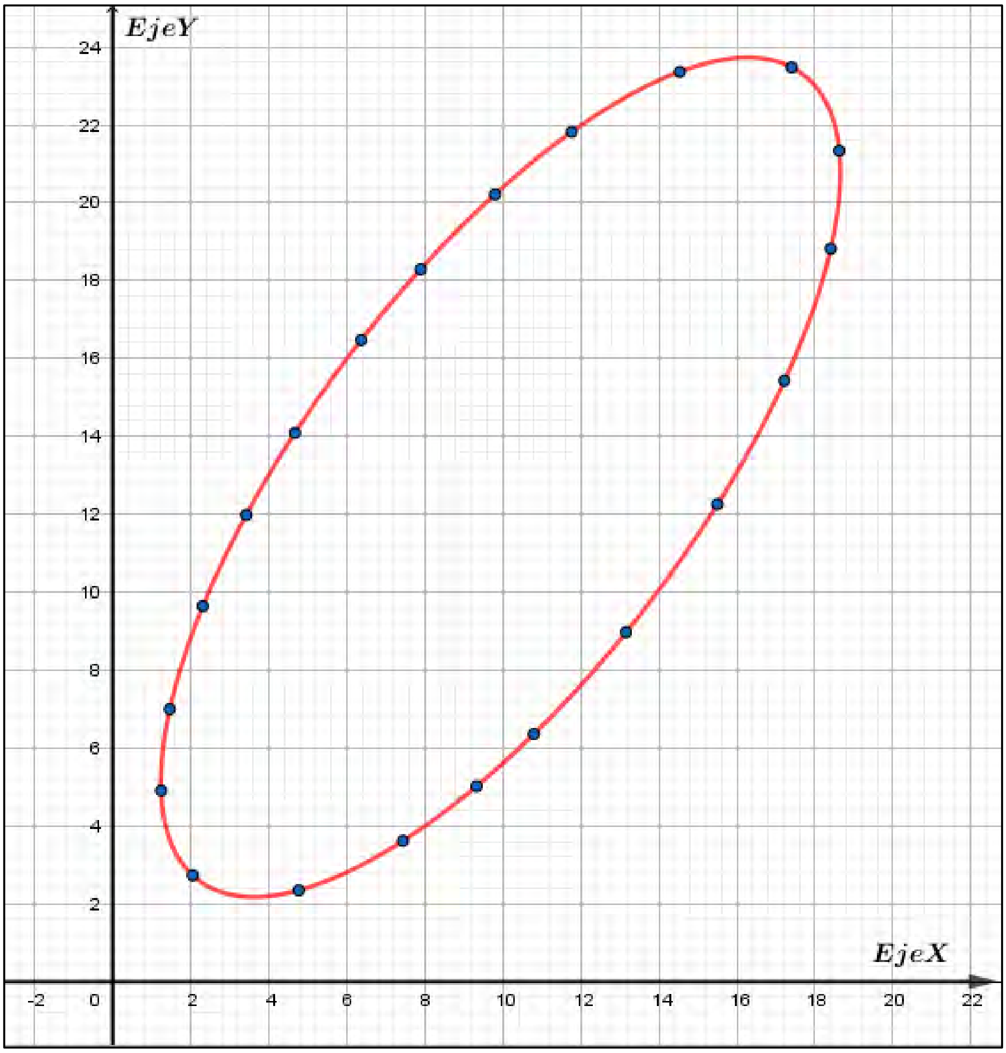


Figura 19. Trazo continuo de la elipse
Fuente: Elaboración propia

A continuación, presentaremos la metodología que utilizaremos en nuestra investigación, la cual es cualitativa y como método tomaremos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica.

3.2 Metodología y procedimientos

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010), se considera una investigación cualitativa cuando se intenta entender la perspectiva de los partícipes respecto a los hechos que los circundan, indagar en sus hábitos, opiniones y significados; es decir, cómo los participantes observan su entorno. En la investigación cualitativa, los métodos de recolección de datos no son estandarizados ni predeterminados, tal como ocurre con la investigación cuantitativa.

Según lo mencionado, consideramos que nuestra investigación, relacionada a la cónica elipse, que consiste en realizar actividades de aprendizaje, tiene las características de un enfoque cualitativo, ya que observaremos cómo los estudiantes se desenvuelven al realizar las actividades sobre los cambios de registros al realizar las transformaciones, teniendo como apoyo visual al Software Geogebra.

Para nuestra investigación, tomaremos, como metodología, la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), puesto que la misma se desarrolla específicamente en el área de la Educación Matemática y contiene aspectos que nos ayudarán en realizar una validación mediante el análisis a posteriori.

Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surge por la necesidad de abordar dos puntos cruciales en didáctica de las Matemáticas: El fuerte lazo existente entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza y el papel que deben tomar las realizaciones didácticas en clase, inscritas en la metodología de la investigación en didáctica.

La aparición de la Ingeniería Didáctica, dentro de la didáctica de las Matemáticas, se remonta a comienzos de los años 80, en Francia, siendo su máximo exponente Michel Artigue.

En nuestra investigación, nos centraremos en las secuencias didácticas en clase, donde tendremos la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias didácticas.

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

Como metodología de la investigación, Artigue (1995) indica que “la Ingeniería Didáctica se caracteriza, en un primer lugar, por el desarrollo de un esquema experimental sustentado en las “realizaciones didácticas”; es decir, donde podamos observar la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias de enseñanza” (p. 44).

Dependiendo de la investigación en las realizaciones didácticas, la Ingeniería Didáctica se divide en micro Ingeniería y macro Ingeniería. En la nuestra, vamos a considerar el nivel de micro ingeniería, pues se realiza de manera local en un ambiente de clase.

Al respecto, la investigadora señala que la micro Ingeniería, a comparación de la macro-Ingeniería, es más fácil de poner en práctica porque es local y toma en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en la clase y, en segundo lugar, porque se caracteriza, en comparación con otras metodologías que tienen como base la experimentación en clase, por el registro donde se ubica y por la validación a las que está asociada.

La metodología de la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos y cuya validación es, en esencia, interna, basadas en la comparación entre el análisis a priori y a posteriori.

Fases de la Ingeniería Didáctica

En este apartado, describiremos la metodología de la Ingeniería Didáctica mediante su proceso experimental, en el cual tenemos cuatro fases:

-Fase 1: Análisis preliminar

- Fase 2: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la Ingeniería
- Fase 3: Experimentación
- Fase 4: Análisis a posteriori y validación

Fase 1: Análisis preliminar

Artigue (1995) nos indica que en una investigación de Ingeniería Didáctica, en la fase de concepción, es muy importante un determinado número de análisis preliminares y que los más frecuentes son:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza (Análisis epistemológico).
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (Análisis didáctico).
- El análisis de la concepción de los estudiantes, de las dificultades y los obstáculos que determinan su evolución (Análisis cognitivo).
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, se realiza los ítems anteriores. La investigadora señala que, en el **análisis epistemológico**, se debe tener en cuenta la génesis histórica del saber en estudio y sus manifestaciones antiguas o contemporáneas, sus funcionalidades en la Matemática y los obstáculos epistemológicos relativos al objeto de estudio.

En nuestra investigación, no haremos un análisis epistemológico, sino una reseña histórica de nuestro objeto matemático, elipse, desde sus orígenes y las concepciones que se tiene sobre ella, así como también explicaremos la forma cómo fue evolucionando su expresión matemática, desde la antigua Grecia pasando por Apolonio hasta Descartes.

Con respecto al **análisis cognitivo,** Artigue (1995) indica que se debe analizar las diferentes instituciones de enseñanza en el que el saber debe ser enseñado y/o aprendido, estudiar la evolución del tratamiento del concepto, así como analizar propuestas curriculares; es decir, las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.

Finalmente, con respecto al **análisis didáctico,** la investigadora indica que se debe analizar las características de la puesta en marcha del sistema de enseñanza.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En esta parte, Artigue (1995) indica que el investigador debe tomar unas variables didácticas que considere adecuado en relación al problema estudiado, que facilitará realizar el respectivo análisis distinguiendo dos tipos de variables:

- Variables macro didácticas o globales: Concernientes a la organización total de la Ingeniería.
- Variables micro didácticas o locales: Tienen que ver con la organización local de la Ingeniería.

Como nuestra investigación se desarrollará en un aula de clase y es de tipo local, tendremos variables micro didácticas. Por otro lado, la importancia de realizar un análisis a priori consiste en considerar las posibles respuestas de los estudiantes y así poder controlar su comportamiento y su significado. Este análisis es en realidad un conjunto de hipótesis que más adelante serán contrastadas.

En este apartado, elaboramos las secuencias de actividades y realizamos su respectivo análisis a priori, teniendo en cuenta el área donde se encuentra inmerso la cónica elipse, los antecedentes y las variables micro didácticos.

Fase 3: La experimentación

En esta fase, Artigue (1995) señala que se pone en funcionamiento todo el dispositivo construido en la concepción y análisis a priori; es decir, los estudiantes, profesor y observadores entran en contacto para recoger y registrar la información respecto del desempeño de los estudiantes durante la actividad.

Nuestra investigación se desarrollará en una universidad pública con estudiantes de Física en el curso de Complemento de Matemática. Para ello, se dispondrá de un grupo de profesores observadores que contarán con unas fichas donde podrán anotar sus observaciones.

Para recolectar la información de los estudiantes, se dispondrá de unas fichas de trabajo y de una carpeta donde guarden los archivos que se generen a la hora de utilizar el Software Geogebra como apoyo visual. Dicha recolección de datos se dará en un número determinado de actividades, los cuales tendrán un tiempo de duración determinado.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

En esta fase, Artigue (1995) señala que el análisis a posteriori se basa en análisis del conjunto de datos recogidos durante la fase de experimentación. En ese sentido, indica:

> A esta fase sigue una de análisis a posteriori, que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella (p. 56)

Estos datos se completan con otros que se obtienen por otras metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos que se aplican en distintos momentos de la secuencia de enseñanza. Es de la contrastación entre el análisis a posteriori y a priori que se fundamenta la validación interna de la hipótesis.

En nuestra investigación, realizaremos una confrontación entre el análisis a priori, descrito en la fase 2, con el análisis a posteriori para dar validación a nuestras hipótesis.

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado, especificaremos las características de los sujetos de investigación, describiremos todos los recursos empleados en esta fase de experimentación y en la aplicación de la actividad y en la recolección de los datos mediante fichas de trabajo. También presentaremos la actividad y realizaremos un análisis a priori, para después contrastar con el análisis a posteriori y realizar la validación, el cual es analizado mediante la teoría de Registros de Representación Semiótica

4.1 Sujetos de investigación

En la fase de experimentación, la investigación se encuentra dirigido a estudiantes de Física que, en la actualidad, se encuentran matriculados en cursos como Cálculo II, Física I y Lenguaje de programación científica y que en el primer semestre de estudio superior llevaron el curso de Complemento de Matemática.

Los sujetos de investigación son estudiantes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao. De una población de 25 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 18 y 20 años de edad, se seleccionó a dos de ellos y cuyas identidades se mantendrán en reserva, ya que la selección fue de manera voluntaria siendo elegido un alumno y una alumna.

Los dos estudiantes ya estudiaron las cónicas de manera vectorial y además tienen conocimientos previos de sistemas de coordenadas cartesianas, Álgebra vectorial, longitud de un vector, vector unitario direccional y ortogonal, ecuación vectorial de la recta, graficas de ecuaciones, circunferencia, transformación de coordenadas y parábola que son temas anteriores al estudio de nuestro objeto matemático en estudio, la elipse. Vale la pena destacar que dichos estudiantes fueron seleccionados por su alto desempeño académico.

Dicha actividad se desarrolló en un horario fuera de clases en un ambiente apropiado, en coordinación con el profesor del curso, y de acuerdo a la disponibilidad de los estudiantes.

Para la recolección de la información, además de la ficha de trabajo, que se hizo a lápiz y papel, también se contó con una ficha de anotaciones de incidencias que se puedan suscitar durante el desarrollo de la actividad.

Para el desarrollo, se consideró un tiempo prudente de 120 minutos, en los cuales los estudiantes dispusieron de sus materiales de trabajo, como lapiceros de color, lápiz, borrador, regla y calculadora. También se les proporcionó unas hojas bulky para que los usaran como borrador.

4.2 Análisis de la actividad

En esta parte, presentamos el análisis a priori y a posteriori de la actividad que se desarrolla con lápiz y papel, de acuerdo a la metodología de investigación. La misma fue desarrollada con lápiz y papel, la cual fue diseñada mediante la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Desde ahora en adelante nos referimos a los sujetos de la investigación como Jack y Rose. Con el análisis a priori y a posteriori realizamos la validación de nuestra investigación. Seguidamente, presentamos la actividad con su respectivo análisis a priori y a posteriori.

La actividad se basa en una secuencia de preguntas, que tiene por objetivo que los estudiantes de Física transiten entre los diferentes Registros de Representación Semiótica (Registro de lengua natural, algebraico y gráfico) y así logren apropiarse de la noción de elipse.

Para lograr este objetivo, los estudiantes desarrollan la actividad apoyándose en la teoría de Vectores, que es un tema muy importante en su formación profesional, y que lo ven en el primer semestre de estudio en el curso de Complemento de Matemática. Dicha teoría es muy importante en el estudio de cursos posteriores y en su formación profesional.

Análisis a priori de la pregunta 1.

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes de Física realicen tratamientos en el registro de lengua natural y relacionen la ecuación que modela la órbita del cometa Halley con la cónica elipse.

El cometa Halley es un cometa grande y brillante que orbita alrededor del Sol cada 76 años aproximadamente. Recibió este nombre gracias a su descubridor Edmund Halley, quien determinó el periodo orbital del cometa en 1705.

El cometa describe una órbita cónica alrededor del Sol cuya excentricidad es menor que la unidad ($e<1$), teniendo al Sol como uno de sus focos. La distancia desde la posición del cometa Halley, en su órbita respecto al Sol, se mide en Unidades Astronómicas (UA), que es la distancia en promedio de la Tierra al Sol $(1UA \approx 93000000 \text{ millas})$. A la distancia más cercana se le denomina **Perihelio** y las más lejanas **Afelio**.

1. ¿Qué cónica modela la órbita del cometa Halley? Explique.

En esta pregunta, esperamos, a priori, que los estudiantes de Física interpreten el enunciado dado en lengua natural: **El cometa describe una órbita alrededor del Sol cuya excentricidad es menor que la unidad** y, evocando en sus conocimientos previos obtenidos en clase, relacionen el valor de la excentricidad con la cónica que modela la órbita del cometa Halley, respondiendo y realizando tratamientos en lengua natural que la cónica, cuya excentricidad es menor que la unidad, tiene una forma elíptica. También podrían explicar por qué no pueden ser la otras dos cónicas parábola e hipérbola.

Análisis a posteriori de la pregunta 1.

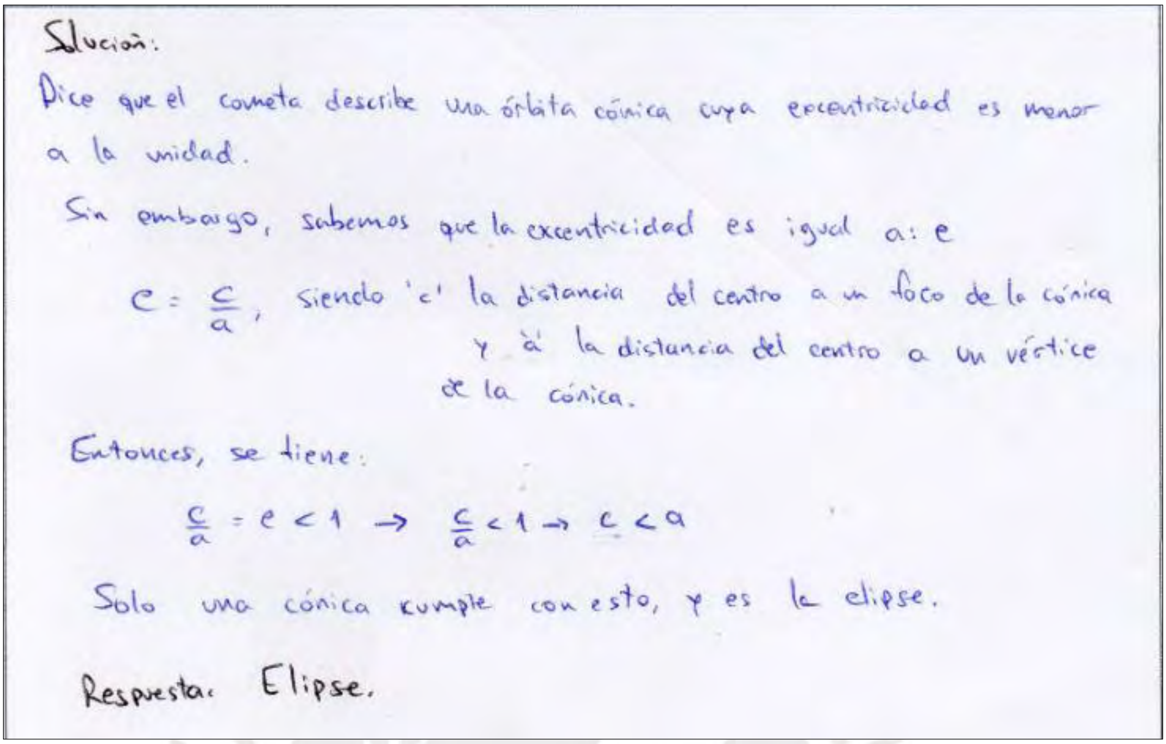
<u>Estudiante Jack.</u>

Tal como se esperaba, en nuestro análisis a priori, Jack interpretó la información brindada dentro del contexto del problema: “El cometa describe una órbita, cuya excentricidad es menor que la unidad”, denotando a la excentricidad con la letra $"e"$, para luego dar la fórmula de cálculo de la excentricidad $\left(e = \dfrac{c}{a}\right)$.

Al interpretar la información y dar la fórmula del cálculo de la excentricidad, mediante la relación denotada líneas arriba, el estudiante Jack realiza una conversión del registro en lengua natural al algebraico, lo que implica, según Duval (2004), que realizó una transformación.

Después de realizar la conversión y pasar al registro algebraico, el estudiante indica que la constante $"c"$ es la distancia del centro de la cónica a un foco y que la constante $"a"$ es la distancia del centro de la cónica a uno de sus vértices. Para esta definición realizada por el estudiante, podemos observar que recurrió al registro de lengua natural, lo cual nos indica que realiza una conversión del registro algebraico al de lengua natural.

Luego de definir a las constantes $"a"$ y $"c"$, mediante el uso de un lenguaje natural, el estudiante Jack relaciona a la excentricidad con la expresión algebraica $\dfrac{c}{a} = e < 1$, donde realizando tratamientos en el registro algebraico, llega a deducir que la distancia del centro de la cónica a uno de los focos es menor que la distancia del centro de la cónica a uno de los vértices; es decir, $c < a$ (Ver figura 20).



Solución:

Dice que el cometa describe una órbita cónica cuya excentricidad es menor a la unidad.

Sin embargo, sabemos que la excentricidad es igual a: e

$e = \frac{c}{a}$, siendo 'c' la distancia del centro a un foco de la cónica y 'a' la distancia del centro a un vértice de la cónica.

Entonces, se tiene:

$$\frac{c}{a} = e < 1 \rightarrow \frac{c}{a} < 1 \rightarrow c < a$$

Solo una cónica cumple con esto, y es la elipse.

Respuesta: Elipse.

Figura 20. Respuesta presentada por Jack a la pregunta 1

Después de realizar este tránsito entre los registros de lengua natural y algebraico y viceversa, con sus respectivos tratamientos, el estudiante Jack responde como se tenía previsto en nuestro análisis a priori en lengua natural, ya que la única cónica que cumple con esta condición es la elipse, dejando entender, de manera implícita, que no puede ser la cónica parábola o hipérbola; sin embargo, Jack no explicó por qué no podría ser una de las otras dos cónicas: la parábola o hipérbola. También notamos que el estudiante, para responder de manera correcta, privilegia el registro algebraico.

De la respuesta brindada por el estudiante Jack líneas arriba, concluimos que interpreta de manera correcta la información brindada y, realizando tratamientos en el registro de lenguaje natural, responde que la cónica que modela la órbita del cometa Halley es la elipse, con lo cual logramos nuestro objetivo planteado para esta pregunta. A pesar de esto, el estudiante utiliza el registro algebraico para dar su respuesta, lo que evidencia su predilección por este registro. Esto tal vez se deba a que es la manera tradicional con que fue tratado el tema en clase.

Estudiante Rose.

La estudiante Rose, como se tenía previsto en nuestro análisis a priori, interpreta la información dada, de manera contextual, en el registro de lengua natural que le dice que la excentricidad es menor que la unidad $(e < 1)$ e indica, en lenguaje natural, que se podría saber con qué cónica se trabaja, si sabemos en qué rango oscila la excentricidad, donde podemos notar que la estudiante maneja de manera adecuada el registro de lengua natural.

De lo expuesto por la estudiante Rose, podemos observar que interpreta de manera correcta la información y lo relaciona con sus conocimientos previos sobre la excentricidad. Seguidamente, relaciona la excentricidad con la ecuación que modela la órbita de la trayectoria del cometa Halley con el rango donde oscila la excentricidad y lo expresa de manera algebraica mediante la relación $0 < e < 1$ (Ver figura 21).

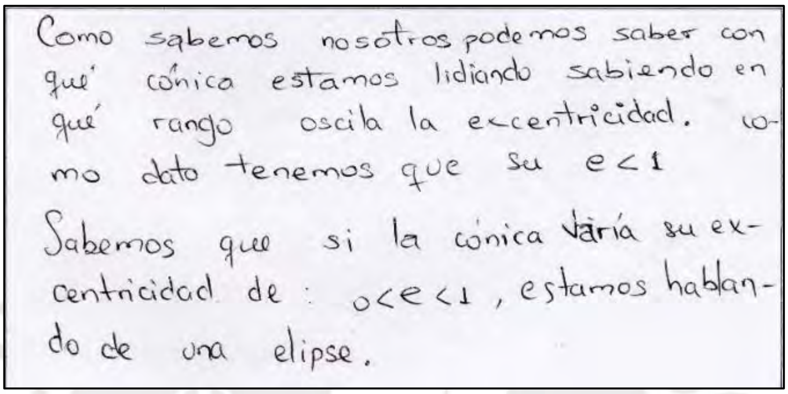

Como sabemos nosotros podemos saber con
qué cónica estamos lidiando sabiendo en
qué rango oscila la excentricidad. co-
mo dato tenemos que su $e < 1$
Sabemos que si la cónica varía su ex-
centricidad de : $0 < e < 1$, estamos hablan-
do de una elipse.

Figura 21. Respuesta de Rose a la pregunta 1

El paso de la interpretación del contexto a la representación algebraica implica que Rose está realizando la conversión del registro de lengua natural al algebraico, lo que para Duval (2004) sería realizar transformaciones.

Debido a este rango de oscilación expresado de manera algebraica y recurriendo a sus conocimientos de que, si la excentricidad varía en ese rango, responde en lengua natural que la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley es la elipse.

La respuesta dada por Rose a la pregunta uno, se ajusta a lo que se tenía previsto en nuestro análisis a priori, ya que interpreta de manera adecuada la información y lo relaciona correctamente con la excentricidad, para luego responder, como se esperaba, en leguaje natural que la cónica que modela la órbita de la trayectoria del cometa Halley es la elipse, con lo cual la estudiante Rose logra nuestro objetivo planteado para esta pregunta; sin embargo, para responder a la pregunta, expresa algebraicamente el rango de oscilación de la excentricidad mediante la relación $0 < e < 1$, lo cual indica que recurrió al registro algebraico para responder que la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley es la elipse. Esto evidencia que, en cierto modo, privilegia el registro gráfico.

También podemos observar que la estudiante Rose no explicó por qué no puede ser la cónica parábola o hipérbola.

Análisis a priori de la pregunta 2.

La pregunta 2 se encuentra conformada por una secuencia de varios ítems. El objetivo de esta secuencia de ítems es que los estudiantes de Física identifiquen los elementos de la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley, como el eje normal o eje menor y eje focal o eje mayor, así como también que identifiquen si los sistemas de coordenadas deben ser rotados y/o trasladados a un nuevo sistema. Para lograr estos objetivos, los estudiantes deben transitar entre los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

Esta pregunta consta de cuatro ítems (a , b , c y d), los cuales se encuentran secuencialmente y los analizaremos de manera independiente, ya que el desarrollo del ítem a) es necesario para el ítem b) y así sucesivamente.

Análisis a priori del ítem (a)

Este ítem tiene por objetivo que los estudiantes de Física interpreten la información brindada y, realizando transformaciones mediante una conversión del registro en lengua natural al gráfico, identifiquen y respondan, en lenguaje natural, que la recta que pasa por los puntos A y B , cuya distancia equidista de la posición del Sol es el eje normal o eje menor de la cónica que modela la órbita del cometa Halley. A continuación, la pregunta 2 e ítem a).

2. En un sistema de coordenadas XY , el cometa Halley, en su órbita, pasa por los puntos $A(3,14)$ y $B(11,8)$. Si la distancia entre dichos puntos es la **máxima posible** y que además equidistan de la posición del Sol, responda lo siguiente:
   a) ¿Qué elemento representa la recta que pasa por los puntos A y B con respecto a la cónica que modela la órbita del cometa Halley?

Esperamos, a priori, que los estudiantes interpreten la información brindada y que apoyándose en una representación gráfica, mediante un plano cartesiano XY , ubiquen los puntos A y B . Se espera también que ubiquen la posición del Sol de manera referencial en el plano cartesiano, de modo que cumpla con las condiciones de equidistancia con respecto a los puntos A y B , considerando que la distancia de separación entre dichos puntos sea la máxima posible.

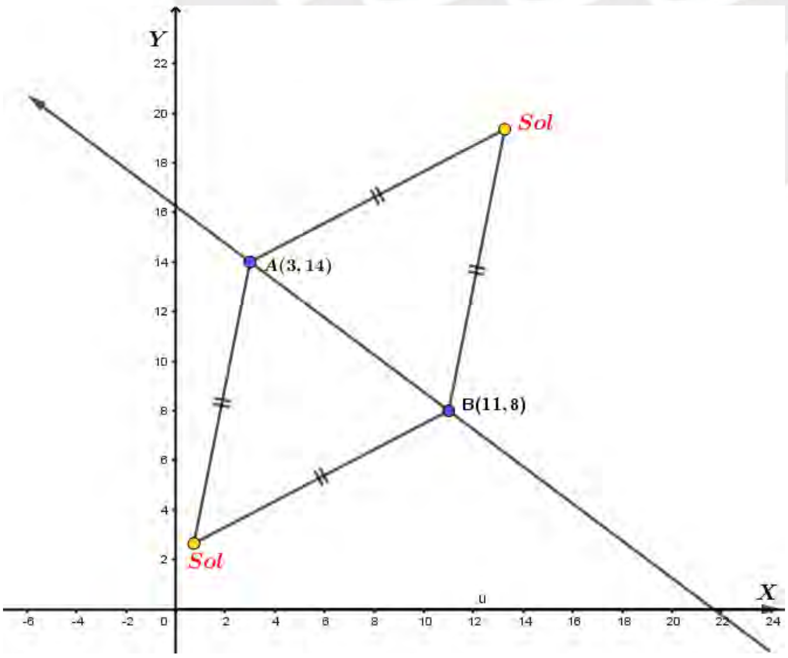
Al paso de la interpretación de la información a la representación gráfica del plano cartesiano y la ubicación de los puntos A y B , como la posición del Sol, a este hecho, Duval (2004) lo denomina realizar transformaciones mediante la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico. Una vez ubicados los puntos A y B , se espera, a priori, que los estudiantes tracen la recta que pasa por dichos puntos y respondan, en lenguaje natural, que dicha recta es el eje menor o eje normal de la elipse.

Duval (2011) indica que las representaciones cartesianas provocan tres tratamientos en las representaciones gráficas, las cuales son denominadas por el autor como enfoques: El enfoque punto a punto, enfoque de extensión del trazado efectuado y enfoque de interpretación global de propiedades figúrales. Destacando que el enfoque punto a punto es favorable cuando se quiere trazar el gráfico correspondiente a una ecuación de primer grado o el gráfico de una ecuación de segundo grado.

El enfoque punto a punto permite marcar tantos puntos como lo deseen; sin embargo, ello no permite hacer el trazo continuo de la recta que pase por los puntos A y B. Es por eso que Duval (2012) indica que para estos casos es necesario interpolar y aceptar la ley de la Gestalt de continuidad.

Esperamos también que los estudiantes den su respuesta, de manera escrita, que la recta que pasa por los puntos es el eje normal o eje menor de la elipse, lo cual implica, según el autor, el uso del registro en lengua natural (Ver cuadro 5)

Cuadro 5. *Respuesta esperada a la pregunta 2(a).*

Representación Gráfica	Lenguaje Natural
	La recta que pasa por los puntos A, B, cuya distancia entre ellas es la máxima posible y que equidistan de la posición del Sol es el eje menor o el eje normal de la elipse.

Análisis a posteriori del ítem (a)

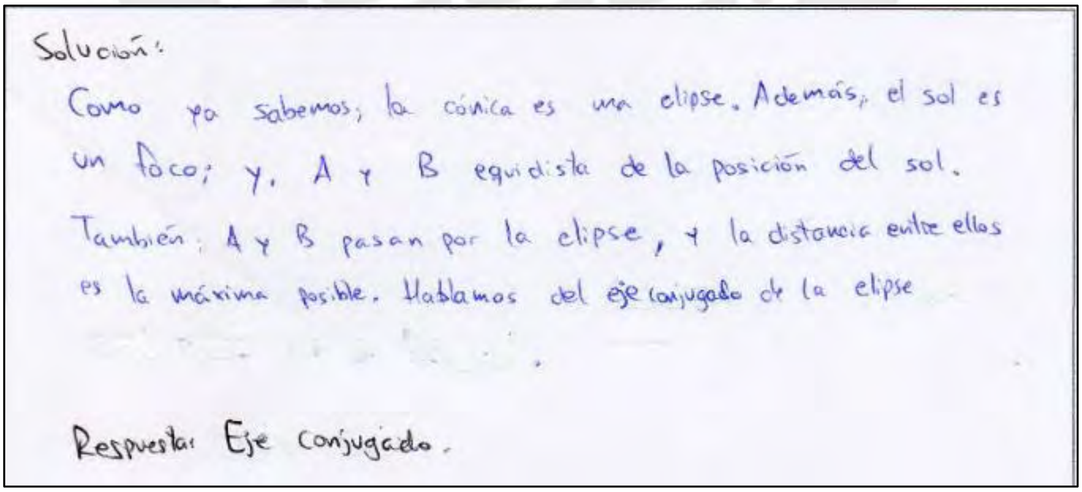
__**Estudiante Jack**__.

Para responder al ítem (a), el estudiante Jack se basó en su respuesta dada en la pregunta 1, que dice que la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley es la elipse. Este apoyo se basa en que las preguntas planteadas tienen una secuencia.

También observamos que Jack analiza la información brindada: El Sol es uno de los focos y que los puntos A y B equidistan de la posición del Sol.

Esperábamos, a priori, que Jack interprete esta información dada en lengua natural y que realizara transformaciones del registro de lengua natural al gráfico para graficar el sistema de coordenadas XY, ubicando la posición referencial del Sol y los puntos A y B en este sistema de coordenadas; sin embargo, podemos observar que el estudiante no representa gráficamente el sistema de coordenadas XY, así como tampoco representa gráficamente los puntos A y B en este sistema de coordenadas.

La manera como analiza Jack la pregunta nos evidencia que no tiene un manejo del registro gráfico y tal vez esto se deba a que en su enseñanza el profesor del curso no orientó a los estudiantes al uso del registro gráfico, privilegiando lo analítico algebraico. También se observa en la respuesta del estudiante que relaciona a los puntos A y B como los puntos de paso de la elipse (Ver figura 22).


Solución:
Como ya sabemos, la cónica es una elipse. Además, el sol es un foco; y, A y B equidista de la posición del sol.
También: A y B pasan por la elipse, y la distancia entre ellos es la máxima posible. Hablamos del eje conjugado de la elipse

Respuesta: Eje conjugado.

Figura 22. Respuesta de Jack a la pregunta 2(a)

En la respuesta brindada por el estudiante Jack, podemos observar que responde de manera correcta en lenguaje natural que el elemento que pasa por los puntos A y B es el eje conjugado de la elipse, mas no responde como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori. Tal vez se deba a que el estudiante haya revisado otras bibliografías brindadas por el profesor, en donde en el estudio de la cónica elipse renombran al eje menor o eje normal como eje conjugado. Este hecho de renombrar al eje normal o eje menor por eje conjugado, en lengua natural, evidencia lo que para Duval (2004) es realizar tratamientos en el registro de lengua natural.

Tampoco representa gráficamente, como lo esperábamos, la recta que pasa por los puntos A y B ni ubica en el sistema de coordenadas XY, de manera referencial, la posición del Sol, teniendo presente que equidista de los puntos A y B. Esto nos evidencia que Jack no utiliza, como lo teníamos, previsto el enfoque punto a punto, que es recomendado para el trazado de la gráfica de la recta que pasa por los puntos A y B, lo que refleja su poca familiaridad con el registro gráfico.

El estudiante Jack, para responder a este ítem (a), solo trabaja en el registro de lengua natural sin manejar el registro gráfico. Su razonamiento respecto a la información brindada, sujeto a algunas condiciones, fue correcto y esto se debe a que el estudiante domina muy bien la relación que existe entre los extremos del eje menor con los focos de la elipse, pero no realiza, como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, la conversión del registro de lengua natural al gráfico, lo que demuestra la dificultad que tiene Jack con el manejo del registro gráfico en su proceso de aprendizaje de la cónica elipse.

De lo expuesto por Jack como respuesta a la pregunta 2(a), si bien es cierto el estudiante responde en lengua natural que la recta que pasa por los A y B y que cumple las condiciones del problema es el eje conjugado y lo que en nuestro análisis a priori habíamos nombrado eje normal o menor de la cónica, podemos decir que el estudiante se apropia del elemento de la cónica que modela la órbita del cometa Halley; sin embargo, en su proceso de aprendizaje, no transita como lo teníamos previsto entre los registros de lengua natural y gráfica, con lo cual podemos afirmar que el objetivo planteado, para este ítem, se logra.

<u>Estudiante Rose.</u>

Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, la estudiante Rose, para contestar al ítem (a) de la pregunta dos, traza un sistemas de coordenadas XY e ubica a los puntos A y B, lo que demuestra que interpreta de manera correcta la información brindada en lenguaje natural y realiza idóneamente la conversión del registro de lenguaje natural al gráfico lo que para Duval (2004) sería realizar transformaciones del registro de lengua natural al gráfico, la estudiante demuestra que se está apropiando del objeto matemático en estudio, la elipse.

Interpretando la información brindado en lengua natural, Rose ubica de manera referencial, como lo teníamos previsto líneas arriba, la posición del Sol en el sistema de coordenadas XY. Podemos inferir que la ubicación de la posición del Sol, en este sistema de coordenadas mediante un punto respetando las condiciones del problema, se debe a sus conocimientos sobre el tema y su familiaridad en trabajar con el registro gráfico. Para ello, la estudiante realiza una conversión del registro en lengua natural al gráfico.

También observamos en la respuesta dada por Rose que grafica la recta que pasa por los puntos A y B e ubica al centro entre dichos puntos y lo denota como $C(h,k)$.

Para la realización del trazo de la gráfica de esta recta, se puede observar que Rose utiliza uno de los tres enfoques del trazado de gráficos, como lo es el enfoque punto a punto e interpolando y aceptando la ley de la Gestalt de continuidad. Esto demuestra su facilidad de realizar tratamientos en el registro gráfico, que es algo ajeno a su enseñanza-aprendizaje, pues fueron instruidos mediante la predilección del registro algebraico que es parte de la problemática y lo que motivó a realizar esta investigación (Ver figura 23)

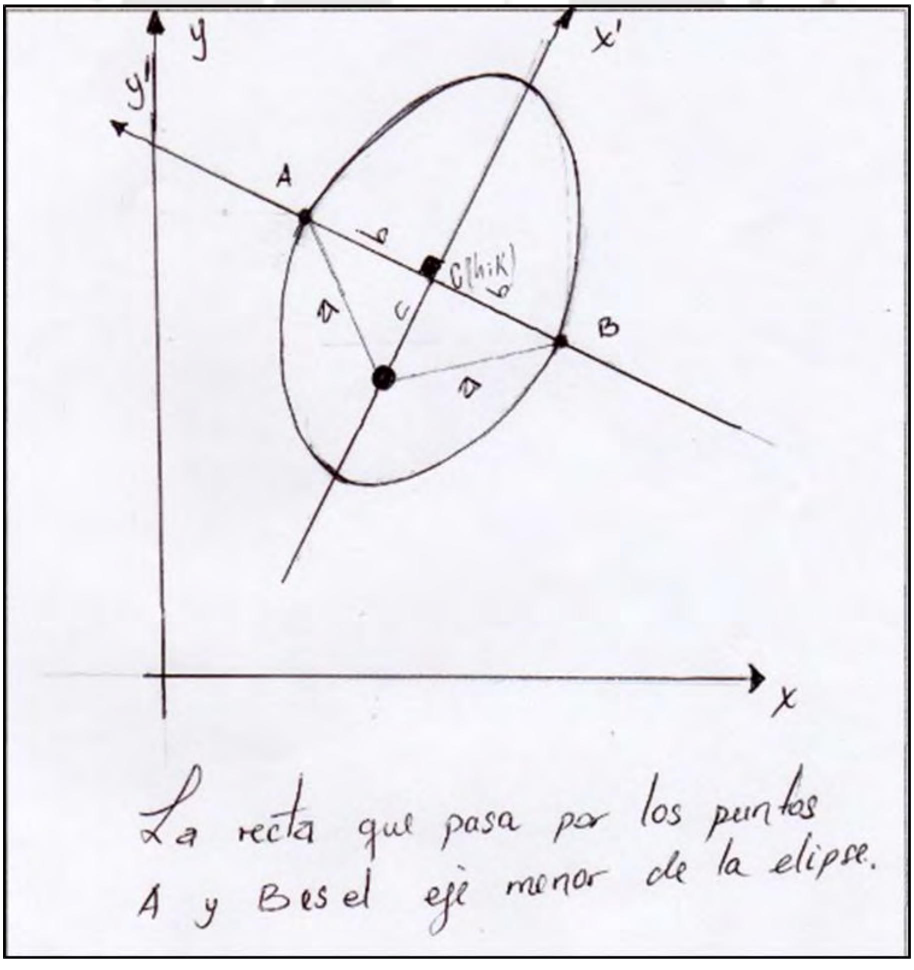


Figura 23. Respuesta de Rose a la pregunta 2(a)

Para denotar como $C(h,k)$ al punto medio de $\overline{AB}$, la estudiante Rose, de manera implícita, realiza tratamientos en el registro algebraico. Esto no estaba previsto en nuestro análisis a priori; sin embargo, vemos que la estudiante lo considera necesario para responder al ítem (a).

Por otro lado, también observamos que traza el gráfico de la recta que pasa por el punto medio $C(h,k)$ y el punto referencial del Sol y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, demostrando un profundo conocimiento de los elementos de la cónica en estudio.

Como estaba previsto en nuestro análisis a priori, Rose interpreta la información brindada respecto a la máxima distancia entre los puntos A y B y que estos puntos equidistan de la posición del Sol. En este caso, demuestra la habilidad de cambiar del lenguaje verbal al gráfico; es decir, realizó una conversión del registro de lenguaje verbal al gráfico.

Observamos que a las rectas trazadas las denota como x' e y'. La representación gráfica de la recta, que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y por la posición del Sol y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, es algo que no estaba previsto en nuestro análisis a priori, pues consideramos que no era necesario para responder la pregunta en el ítem (a); sin embargo, Rose demuestra su conocimiento amplio respecto a los ejes de la cónica elipse.

También se puede ver que realiza el gráfico de manera referencial de la cónica elipse y forma el triángulo rectángulo, que tiene como vértices la posición referencial del Sol y los puntos A y B, considerando la equidistancia con el Sol. Esto nos indica que Rose realiza adecuadamente la conversión del registro en lengua natural al gráfico.

Además, vemos que en su representación gráfica la distancia entre la posición del Sol y el punto A lo denota con la constante "a", a la distancia entre el centro $C(h,k)$ y el punto A lo denota con la constante "b" y a la distancia entre la posición del Sol y el centro $C(h,k)$ lo denota con la constante "c". Esto, como lo mencionamos líneas arriba, evidencia un gran dominio de Rose del objeto matemático en estudio, la elipse.

La respuesta dada por Rose, que la recta que pasa por los puntos A y B es el eje menor de la elipse, nos demuestra que maneja de manera adecuada los registros de lengua natural y gráfico; es decir, realiza transformaciones de conversión del registro de lengua natural al gráfico, como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, con lo cual la estudiante logró el objetivo trazado de esta pregunta.

Análisis a priori del ítem (b)

El ítem (b) tiene por objetivo que los estudiantes transiten entre los registros de lengua natural, algebraico y gráfico, y respondan, **en lengua natural,** que la recta que pasa por el punto medio M de $\overline{AB}$ y que es perpendicular al eje normal o eje menor de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley es el eje mayor o eje focal. A continuación, presentamos la pregunta del ítem (b)

b) ¿Qué elemento de la cónica, que modela la órbita del cometa Halley, representa la recta que pasa por el punto medio M de $\overline{AB}$ y que es perpendicular a la recta mencionada en el ítem (a)?

Se espera que los estudiantes se apropien de un nuevo elemento de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley: El eje focal o eje mayor. Para ello, esperamos que interpreten la información y, apoyándose en la representación gráfica del plano cartesiano XY, representen geométricamente los puntos A y B, lo que implica que los estudiantes estarían realizando la conversión del registro de lengua natural al gráfico, lo que para Duval (2004) es realizar transformaciones.

Luego, se espera que pasen al registro algebraico y realizando tratamientos dentro de este registro determinen las coordenadas del punto medio M de $\overline{AB}$, para después ubicar este punto en el sistema de coordenadas y trazar, de manera referencial, la recta que pasa por el punto M y que sea perpendicular al eje normal de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley. También se espera que los estudiantes relacionen a dicha recta con los focos de la órbita del cometa Halley.

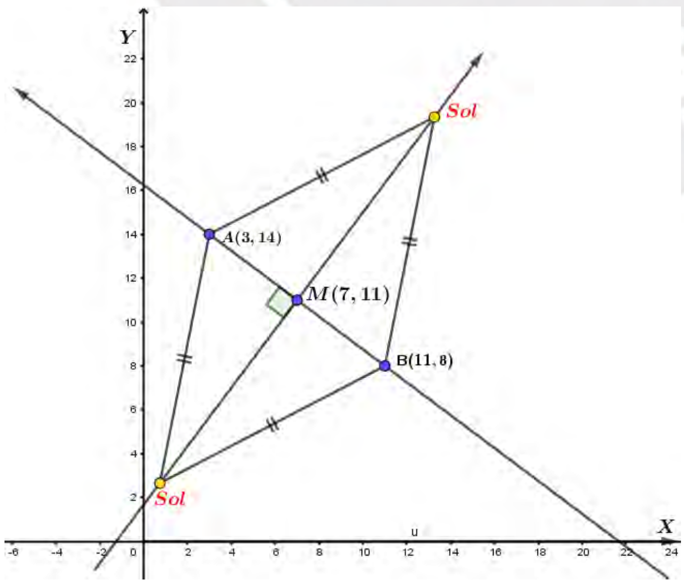
En esta pregunta, los estudiantes interpretarán la información y pasarán por diferentes registros (lengua natural, gráfico y algebraico), para luego responder, en lengua natural, que la recta que pasa por el punto medio M y que es perpendicular a la recta determinada en el ítem (a) es el eje focal o eje mayor de la órbita del cometa Halley.

Duval (2004) indica que el tránsito entre los registros de lengua natural, gráfico y algebraico implica la realización de transformaciones mediante la conversión y tratamientos, respectivamente. Con esto, esperamos, a priori, que los estudiantes de Física realicen transformaciones y pasen del lenguaje natural al gráfico para ubicar los puntos en el plano cartesiano, lo que implica que están realizando una conversión del registro de lengua natural al registro algebraico y para determinar la coordenadas del punto medio M , pasen del registro gráfico al algebraico, lo que para Duval (2004) estarían realizando una conversión del registro grafico al algebraico y que además realizan tratamientos con éste último.

Para el trazado del eje focal o eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, esperamos que los estudiantes ubiquen, en el plano cartesiano, algunos puntos referenciales por donde pasa el eje focal y que luego tracen la recta de manera continua que pase por dichos puntos. A esta forma de trazar la gráfica de una recta, Duval (2012) lo denominó como el enfoque punto a punto, realizando la interpolación y aceptando la ley de la Gestalt de continuidad, descrito en el ítem (a), y, para dar la respuesta esperada, realiza la conversión del registro grafico al de lengua natural.

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes de Física se apropien de uno de los elementos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley: El eje focal o eje mayor. Para lograrlo, se espera que realicen transformaciones mediante el tránsito entre los registros de lengua natural, gráfico y algebraico, para luego responder, en lengua natural, que la recta que pasa por el punto medio M de $\overline{AB}$ y que sea perpendicular a la recta, mencionada en el ítem (a), es el eje focal o eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley (Ver cuadro 6).

Cuadro 6. *Respuesta esperada al ítem (b).*

Representación Grafica	Lenguaje Verbal
	La recta que pasa por el punto medio M y que es perpendicular al eje normal es el eje focal o eje mayor.

Análisis a posteriori del ítem (b)

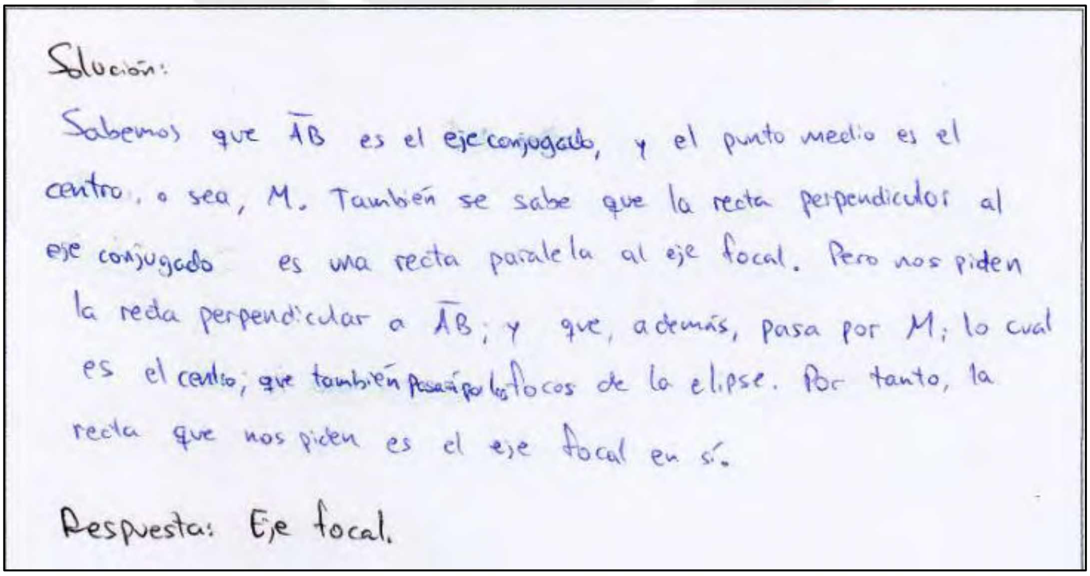
<u>Estudiante Jack.</u>

En la respuesta dada por el estudiante Jack al ítem (b), se puede observar que analiza la información y la vincula con la respuesta dada en el ítem (a), el cual nos dice que la recta que pasa por los puntos “ A ” y “ B ” es el eje conjugado. Esta vinculación del ítem (b) con el ítem (a) es reflejo de la secuencia que tienen las preguntas.

En este análisis, podemos observar que Jack no representa gráficamente el sistema de ejes coordenados XY, como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, y, por ende, tampoco ubica en dicho sistema cartesiano los puntos A y B. El no representar gráficamente el sistema de coordenadas y los puntos tal vez se deba a su dominio en el tema o que el estudiante privilegia el análisis algebraico, que es muy común en los estudiantes de ciencias básicas, o que no le es familiar trabajar en el registro gráfico, debido a que en su enseñanza del tema, por parte del docente, se privilegió el registro algebraico, dejando de lado el registro gráfico y lengua natural.

Como el estudiante Jack no representa gráficamente al sistema de coordenadas XY y los puntos A y B en dicho sistema, entonces no realiza las transformaciones que teníamos previstos en nuestro análisis a priori; es decir, la conversión del registro de lengua natural, gráfico y algebraico para determinar las coordenadas del punto medio “ M ”, mediante tratamientos, para luego ubicarlo en el sistema de coordenadas.

Como lo mencionamos, el estudiante evidencia una capacidad analítica algebraica, dejando de lado el registro gráfico (Ver figura 24).



Solución:

Sabemos que $\overline{AB}$ es el eje conjugado, y el punto medio es el centro, o sea, M. También se sabe que la recta perpendicular al eje conjugado es una recta paralela al eje focal. Pero nos piden la recta perpendicular a $\overline{AB}$; y que, además, pasa por M; lo cual es el centro; que también pasa por los focos de la elipse. Por tanto, la recta que nos piden es el eje focal en sí.

Respuesta: Eje focal.

Figura 24. Respuesta dada por Jack a la pregunta 2(b)

Tal como se espera a priori, Jack responde, en lengua natural, que la recta que pasa por el punto medio "M" de $\overline{AB}$ y que es perpendicular a la recta mencionada en el ítem (a) es el eje focal, además menciona que dicha recta pasa por los focos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley; sin embargo, Jack no representa gráficamente dicho eje focal, indicando, de manera referencial, los focos.

Esta ausencia de trabajar en el registro gráfico y privilegiar el registro en lengua natural, mediante su análisis, indica que Jack no realiza la transformación; es decir, no efectúa la conversión del registro en lengua natural al gráfico, ya que simplemente ha realizado un tratamiento en el registro de lengua natural para llegar a la respuesta correcta.

En resumen, podemos decir que el estudiante responde, como se tenía previsto, en lengua natural que la recta es el eje focal, apropiándose del elemento de la elipse, mas no transita entre los registros de lengua natural, algebraica y grafica para así apropiarse del objeto matemático en estudio.

Estudiante Rose.

Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, la estudiante Rose, para responder a la pregunta del ítem (b), representa gráficamente el sistema de coordenadas XY y ubica de manera adecuada la posición de los puntos A y B. Esto nos demuestra que Rose interpreta de manera adecuada la información dada en lengua natural y, realizando la conversión al registro gráfico, representa geométricamente en el sistema de coordenadas XY los puntos A y B, lo que evidencia, según Duval (2004), un aprendizaje al realizar este tránsito.

También se puede observar que Rose, después de representar los puntos de paso, traza la gráfica de la recta correspondiente a la pregunta del ítem (a). Este trazo de la gráfica de la recta de manera continua lo pudo realizar mediante el enfoque de punto a punto con la interpolación de puntos y con la ley de la Gestalt de continuidad descrito líneas arriba.

Además, observamos que ubica, de manera referencial, el punto medio "M", sin embargo, no determina las coordenadas del punto medio "M" mediante una coordenada, lo que implica que la estudiante no realiza la conversión del registro gráfico al algebraico y que, por ende, no hizo tratamientos en este último registro para determinar dicha coordenada.

También observamos que no ubica, de manera referencial, la posición del Sol en el sistema de coordenadas, pero sí traza la gráfica de la recta que es perpendicular a la recta de la pregunta del ítem (a) y que además pasa por el punto medio “M”, lo que se entiende que el trazo de la recta lo realizó de manera referencial, como lo teníamos previsto (Ver figura 25).

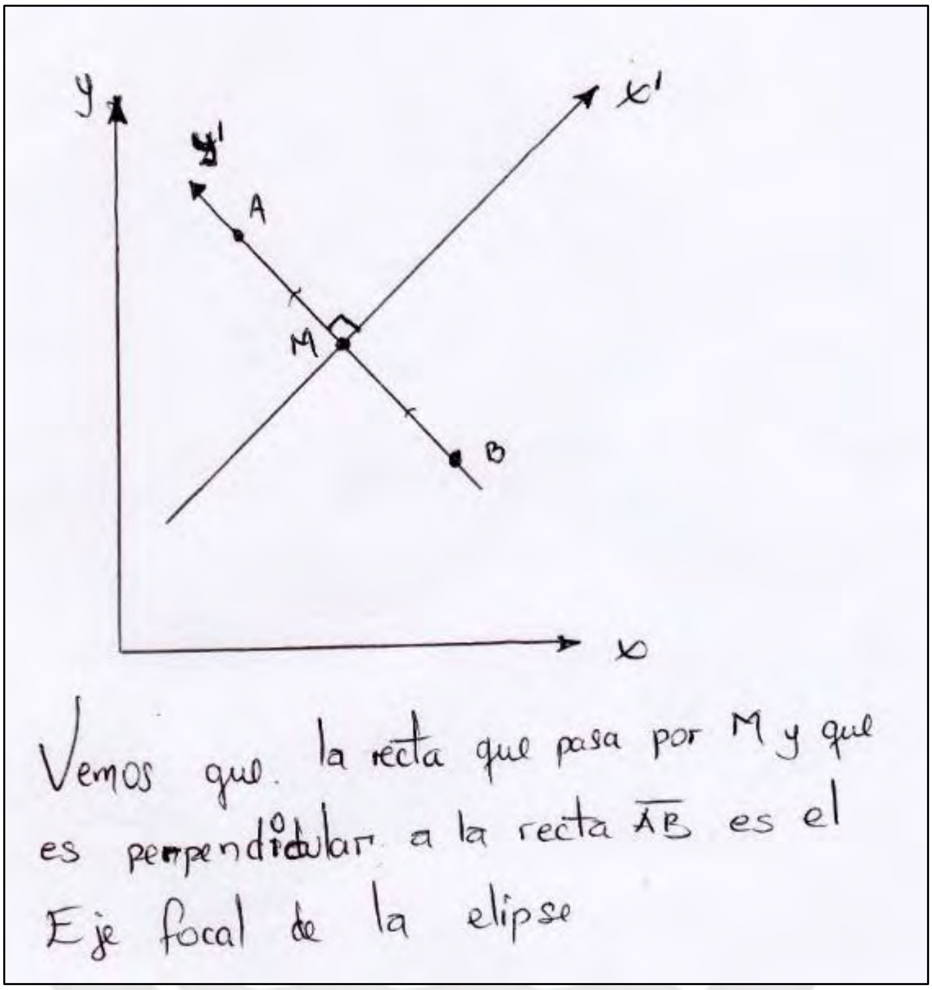


Figura 25. Respuesta de Rose a la pregunta 2(b)

Seguidamente, observamos que denota al eje menor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley con la letra “y'”, de manera similar también denota a la recta que es perpendicular al eje menor y que pasa por el punto medio "M" como “x'”. Esta denotación que realiza Rose, hace entender que se va apropiando del objeto matemático en estudio; sin embargo, era lo que esperamos, en parte, respondiera al siguiente ítem.

Después de analizar la respuesta dada por Rose, podemos observar que interpreta la información y realiza transformaciones mediante la conversión del registro de lengua natural al gráfico para responder, como lo teníamos previsto, en lengua natural que la recta que pasa por el punto medio "M" y que es perpendicular al eje normal es el eje mayor o eje focal de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley.

De este análisis podemos decir que la estudiante Rose logra los objetivos planteados para esta pregunta, la cual consistió en que se apropie de un elemento de la cónica en estudio mediante el tránsito de los registros de lengua natural, gráfico y algebraico.

Análisis a priori del ítem (c)

En este ítem (c), se plantea como objetivo que los estudiantes de Física, apoyándose en el registro gráfico, respondan en lengua natural que ya no se está trabajando en el sistema de coordenadas XY y que los ejes han sido rotados y trasladados a un nuevo sistema de coordenadas. Seguidamente presentamos la pregunta del ítem (c).

> c) Si se desea encontrar la ecuación vectorial de la cónica que describe la trayectoria del cometa Halley, ¿Se trabajará en el mismo sistema de coordenadas? Explique.

Se espera, a priori, que los estudiantes de Física tracen la representación gráfica del sistema de coordenadas XY y, relacionando las preguntas de los ítems (a) y (b), grafiquen las rectas del eje mayor y eje menor de la órbita del cometa Halley.

Luego, esperamos que reflexionen sobre la posibilidad de qué es lo que precisan saber para determinar la ecuación vectorial de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley e indiquen que se encuentran en un nuevo sistema de coordenadas que los estudiantes definirán.

También queremos que comparen este nuevo sistema de coordenadas con el sistema XY y expliquen, en lengua natural, que el nuevo sistema de coordenadas es el resultado de haber trasladado y rotado el sistema de coordenadas XY. Este tránsito de los estudiantes, del registro de lengua natural al grafico para luego responder en lengua natural, Duval (2004) lo define como transformaciones mediante la conversión y tratamientos.

Análisis a posteriori del ítem (c)

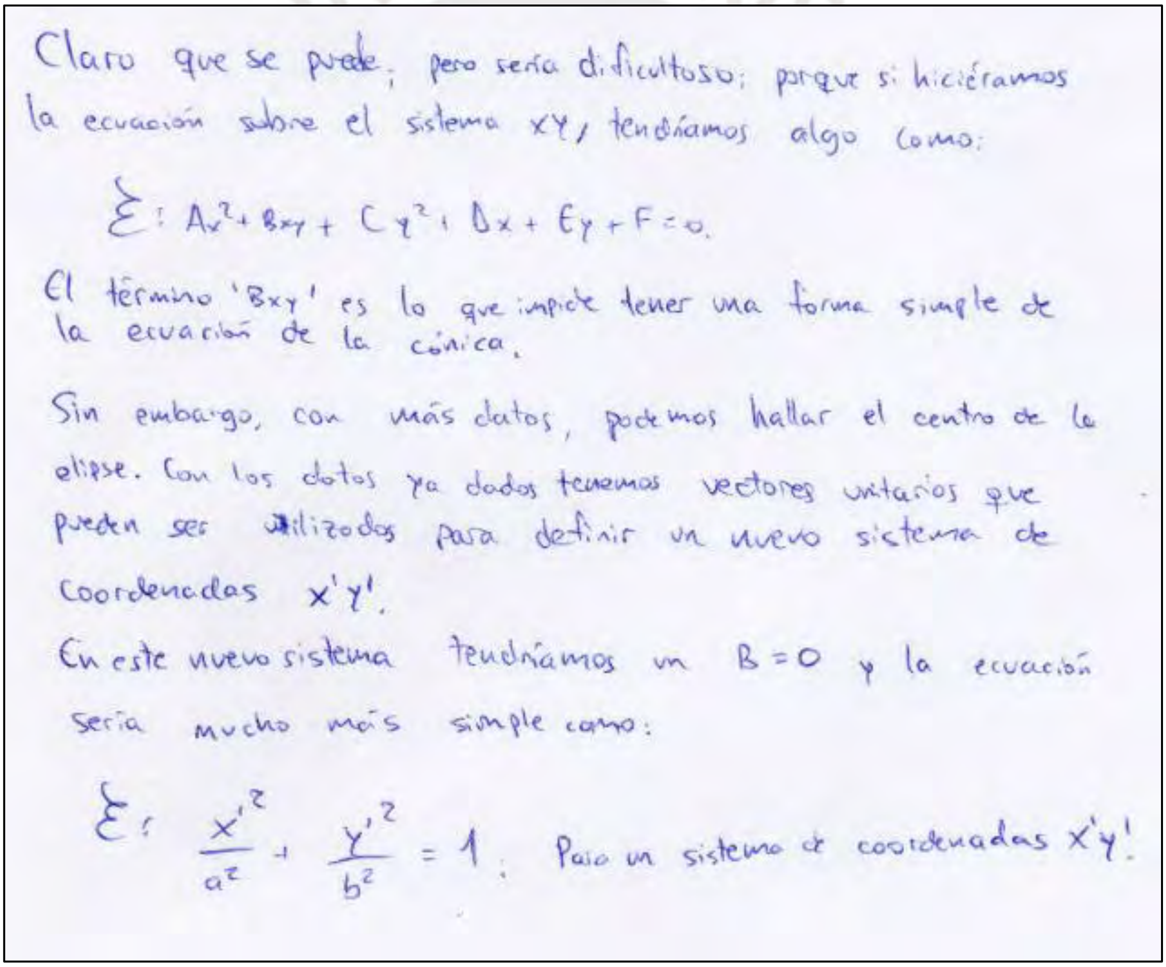
<u>Estudiante Jack.</u>

En la respuesta dada por el estudiante Jack, podemos observar que utiliza de manera adecuada el registro de lengua natural y nos afirma que sí se podría calcular la ecuación vectorial de cónica que describe la trayectoria del cometa Halley en el sistema de coordenadas XY, pero que esto sería muy trabajoso y requeriría mucho tiempo, porque para que pueda encontrar la ecuación vectorial necesitaría la ecuación general de segundo grado, lo que el estudiante lo escribe como:

$$\xi : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vemos también que Jack analiza la ecuación de segundo grado y se concentra en el término Bxy, afirmando que es este término el que hace tener la forma cónica de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley.

En esta parte, podemos observar que el estudiante trata de realizar un análisis algebraicamente al relacionar el término Bxy con la ecuación que modela la trayectoria del cometa, lo que implica que estaría trabajando en el registro algebraico. Este análisis realizado por Jack es algo que no estaba previsto en nuestro análisis a priori y podemos suponer que esto se debe a que no se percató que las preguntas tienen una secuencia y no relacionó las respuestas brindadas en los ítems (a) y (b) con el ítem (c) (Ver figura 26).



Claro que se puede, pero sería dificultoso; porque si hiciéramos la ecuación sobre el sistema XY, tendríamos algo como:

$$\xi : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

El término 'Bxy' es lo que impide tener una forma simple de la ecuación de la cónica.

Sin embargo, con más datos, podemos hallar el centro de la elipse. Con los datos ya dados tenemos vectores unitarios que pueden ser utilizados para definir un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$.

En este nuevo sistema tendríamos un $B = 0$ y la ecuación sería mucho más simple como:

$$\xi : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$; Para un sistema de coordenadas $x'y'$.

Figura 26. Respuesta dada por Jack al ítem (c)

Este análisis algebraico que realiza Jack, lo lleva a querer encontrar el centro de la elipse, pero como no tiene muchos datos desiste de esta opción, lo que nos demuestra que tiene predilección de trabajar en el registro algebraico y esto tal vez se dé porque en su enseñanza de la elipse, el docente ha privilegiado lo algebraico, dejando de lado muchas veces otros registros como el de lenguaje natural y gráfico.

Después de realizar un análisis algebraico, observamos que Jack analiza la información brindada en los ítems anteriores y responde en lenguaje natural que, con los datos anteriores, se puede determinar unos vectores unitarios y que mediante ellos se puede definir un nuevo sistema de coordenadas, que lo denota como el sistema de coordenadas $X'Y'$. En esta respuesta, podemos ver que se utiliza el registro de lengua natural, que era lo que esperamos a priori, y, para que llegara a la misma, Jack analiza la información de los ítems (a) y (b) y relaciona las rectas del eje menor y el eje mayor de la elipse con sus vectores unitarios direccionales respectivos.

Del mismo modo, también observamos que en este nuevo sistema, que define como $X'Y'$, vuelve a analizar la ecuación general de segundo grado y responde que, en este sistema, $B=0$, que es una característica de analizar y trabajar en el registro algebraico.

Después de realizar este análisis algebraico, Jack relaciona la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley con la expresión:

$$\xi : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Esta expresión algebraica es la ecuación canónica de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas, que Jack lo definió como $X'Y'$.

Si bien es cierto responde en lengua natural, como se tenía previsto, que se trabaja en otro sistema de coordenadas, no argumentó en el registro de lengua natural, que es lo que sucede con el sistema de coordenadas XY; es decir, no explica si el sistema de coordenadas XY fueron rotadas y trasladadas a un nuevo sistema. Esto tal vez de deba a que no fue muy explícita la pregunta.

De cierto modo, el estudiante Jack interpreta la información y respondió, en lengua natural, que se está trabajando en un nuevo sistema de coordenadas y que, sin embargo, no explicitó qué es lo que ha sucedido con el sistema de coordenadas XY .

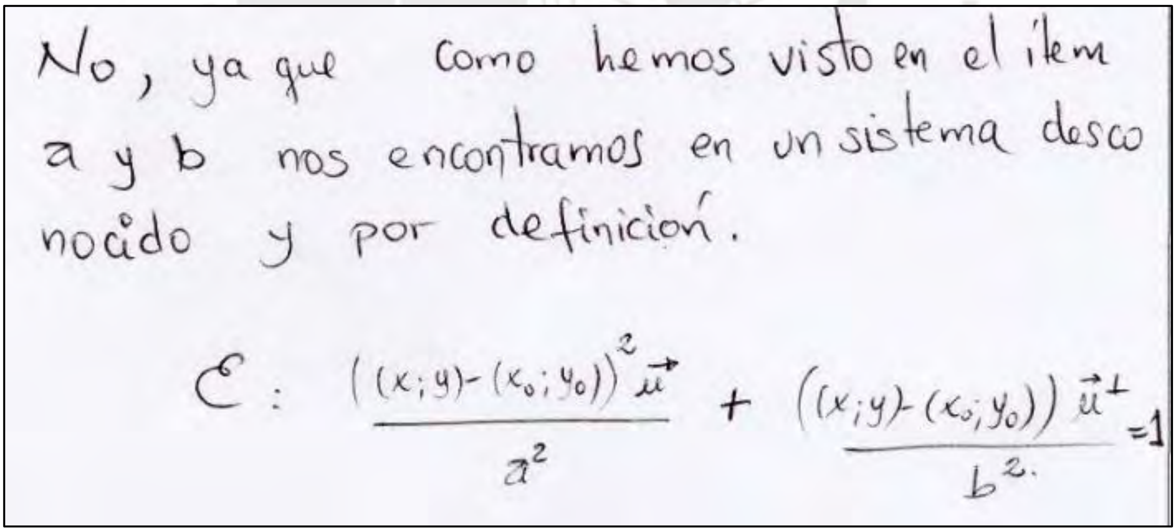
De esto, podemos concluir que el estudiante Jack deja implícito que si se desea encontrar la ecuación vectorial de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, se trabajaría en un nuevo sistema de coordenadas que él define como $X'Y'$; sin embargo, no explicita qué es lo que ha sucedido con el sistema de coordenadas XY. De lo expuesto podemos decir que Jack, logra el objetivo planteado en esta pregunta.

Estudiante Rose.

La estudiante Rose, para responder a esta pregunta del ítem (c), se apoya en las respuestas que dio en los ítems (a) y (b) y nos dice que no se está trabajando en el mismo sistema de coordenadas y que se encuentran en uno nuevo.

Podemos observar que, en la respuesta que nos brinda a la pregunta del ítem (c), interpreta la información y lo relaciona con sus respuestas anteriores y responde en lengua natural, como lo habíamos previsto en nuestro análisis a priori, que ya no se está trabajando en el mismo sistema de coordenadas. Esto implica que Rose realiza un tratamiento, en lengua natural, que era lo que esperábamos; sin embargo, la estudiante no se apoya en el registro grafico para responder y esto tal vez se deba a que en preguntas anteriores, como el ítem (a) y (b), la estudiante grafica el eje mayor y menor de la elipse denotándolos como x' e y' respectivamente.

Lo que se puede interpretar, es que Rose ya relaciona los ejes de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley como un nuevo sistema de coordenadas (Ver Figura 27).


No, ya que como hemos visto en el item a y b nos encontramos en un sistema desco nocido y por definición.

$$\mathcal{E}: \frac{((x;y)-(x_0;y_0))^2\,\vec{u}}{a^2} + \frac{((x;y)-(x_0;y_0))\,\vec{u}^{\perp}}{b^2} = 1$$

Figura 27. Respuesta de Rose al ítem (c)

También podemos observar que Rose intentó representar algebraicamente la ecuación canónica que modela la órbita del cometa Halley en el nuevo sistema de coordenadas. Esto nos evidencia que la estudiante reconoció que se está trabajando en un nuevo sistema de coordenadas y que, además, su ecuación tiene la forma de: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$; sin embargo, observamos que, realizando tratamientos, despejó de manera equivocada al x' e y' de la ecuación vectorial de la cónica que modela la órbita del cometa Halley.

Esta expresión algebraica es algo que no estaba previsto en nuestro análisis a priori, pues es un supuesto para darse cuenta que, si se desea encontrar la ecuación vectorial de la cónica que modela la órbita del cometa Halley, no se está trabajando en el mismo sistema de coordenadas. Por otro lado, deja a entender, implícitamente, que los ejes fueron rotados y trasladados, ya que no explica qué es lo que ha sucedido con el sistema de coordenadas XY en relación al nuevo sistema, que lo define como $X'Y'$. Esto, tal vez se deba a que en su proceso de aprendizaje, el docente del curso enseñaba de manera tradicional, privilegiándose el registro algebraico dejando de lado otros registros como el de lengua natural o el gráfico.

En esta pregunta, Rose interpreta la información brindada y responde, en lenguaje natural, que no se está trabajando en el mismo sistema de coordenadas, donde podemos identificar que la estudiante trabaja en el registro de lenguaje natural, lo que implica que realiza tratamientos en las representaciones para así apropiarse de los elementos de la elipse, con lo que se lograría responder nuestros objetivos específicos y, por ende, al objetivo general y responder la pregunta de investigación.

De lo escrito, podemos indicar que la estudiante Rose logra cumplir con el objetivo propuesto para esta pregunta.

Análisis a priori del ítem (d)

En este ítem (d), se tiene como objetivo que los estudiantes trabajen en el registro gráfico y grafiquen, en el plano cartesiano XY los elementos encontrados en los ítems (a) y (b), identificando los nuevos ejes coordenados de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley. A continuación, presentamos la pregunta del ítem (d).

> d) En el plano cartesiano, bosqueje la representación gráfica de los elementos encontrados en los ítems (a) y (b).

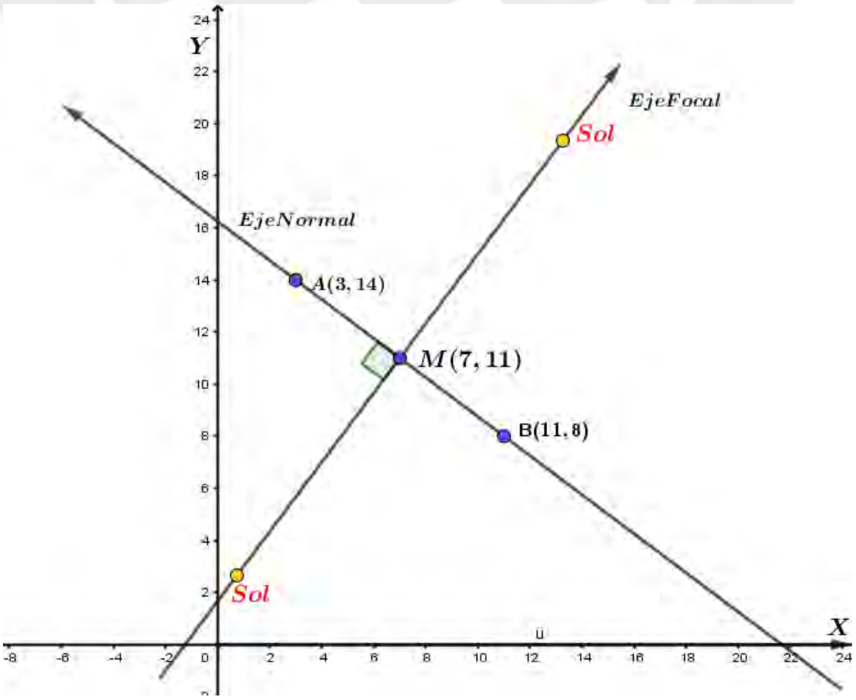
En esta pregunta, esperamos, a priori, que los estudiantes, en el sistema de coordenadas XY, representen gráficamente los puntos $"A","B"$ y el punto medio $"M"$, para luego trazar la representación gráfica del eje menor y al eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley encontrados en los ítems (a) y (b). También esperamos que estos ejes sean definidos en el nuevo sistema de coordenadas que el estudiante eligió en el ítem (c).

Para la representación geométrica de los puntos, se espera que los estudiantes realicen la conversión del registro algebraico al gráfico, lo que Duval (2004) denomina realizar transformaciones.

Para el trazado de las rectas, los estudiantes han estado utilizando dos de los tres tratamientos de las representaciones gráficas, como lo son el enfoque punto a punto y el enfoque de extensión del trazado efectuado. A diferencia del enfoque punto a punto, Duval (2011) indica que el enfoque de extensión del trazado efectuado es puramente mental, pues este enfoque no se alcanza por un conjunto finito de puntos, como es el caso del enfoque punto a punto, ya que esta extensión tiene por apoyo un conjunto infinito de puntos potenciales entre los puntos del intervalo marcado.

Se espera que los estudiantes representen gráficamente el eje normal y el eje focal de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, indicando su nuevo sistema de coordenadas que denotaron en los ítems anteriores (Ver cuadro 7).

Cuadro 7. *Respuesta esperada a la pregunta 2(d).*

Representación Gráfica del eje normal y eje focal


Análisis a posteriori del ítem (d)

<u>Estudiante Jack</u>.

En esta pregunta, como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, el estudiante Jack representa gráficamente los puntos A y B, así como también el punto medio "M" del segmento $\overline{AB}$ en el sistema de coordenadas XY, con sus respectivas coordenadas.

Esta representación adecuada nos indica que Jack interpreto la información brindada en los ítems (a) y (b) y que además ha realizado conversiones en la representación de lengua natural al gráfico. Según Duval (2004), al interpretar la información en lengua natural para luego representarla gráficamente, se está haciendo una conversión de la representación en lengua natural a la gráfica.

Para el trazado de la gráfica de la recta que pasa por los puntos A y B, podemos observar que Jack utiliza, como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, el enfoque punto a punto a la recta que pasa por estos puntos, la que denota como el eje conjugado. También denota al punto medio M de $\overline{AB}$ como el centro y luego realiza el trazado de la gráfica de la recta que pasa por el punto medio M y que es perpendicular a la recta del eje conjugado, la cual denota como eje focal o recta focal.

En este último trazado de la recta del eje focal, Jack también utiliza el enfoque punto a punto, así como también el enfoque de extensión del trazado efectuado (Ver figura 28).

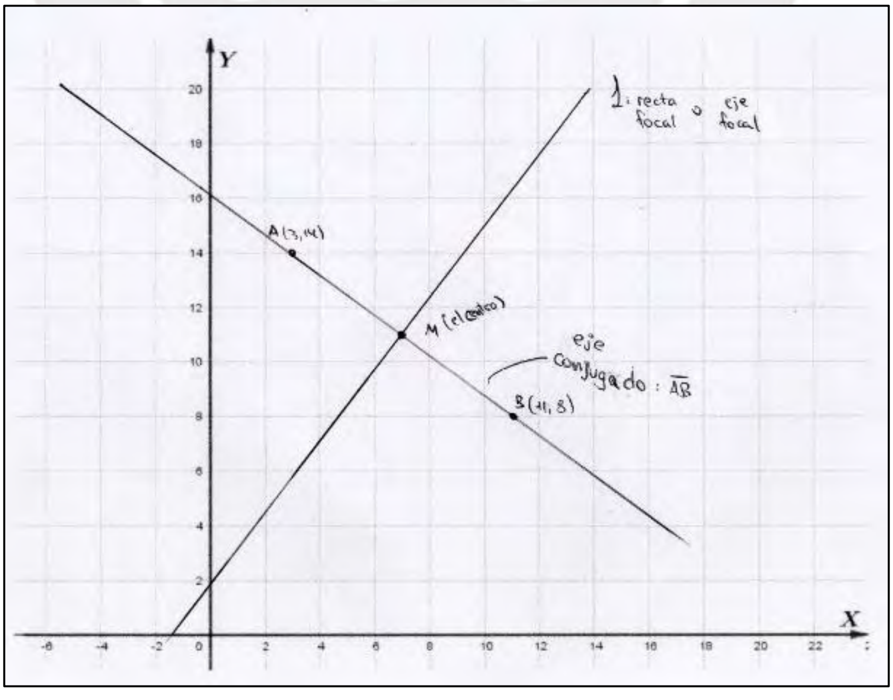


Figura 28. Respuesta de Jack al ítem 2(d)

De la respuesta dada por Jack, podemos identificar que maneja adecuadamente la representación gráfica, lo que indica que no tiene problemas en el registro gráfico. Esto tal vez se deba a que interpreta la información brindada en los ítems (a) y (b) y que además porque se le dio el plano cartesiano XY.

De la representación gráfica correcta del eje menor y el eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley en el sistema cartesiano XY, podemos identificar que Jack transita de manera correcta en el registro gráfico. Con esta identificación y con la descripción líneas arriba del registro gráfico, el estudiante Jack logra el objetivo planteado en esta pregunta.

<u>Estudiante Rose.</u>

Observando la respuesta dada por la estudiante Rose, podemos ver que ubica de manera adecuada los gráficos de los puntos A y B en el sistema de coordenadas XY. Esto nos indica, como lo teníamos previsto, que interpreta la información dada en los ítems (a) y (b), lo que nos demuestra que realiza de manera adecuada la conversión de la representación de lenguaje natural a la gráfica.

También notamos que, apoyándose en el sistema cartesiano dado, determina de manera referencial la ubicación del punto medio M del segmento $\overline{AB}$, dejando implícito que las coordenadas de dicho punto es $M = (7,11)$. Para esta determinación, de manera referencial, de las coordenadas de dicho punto, notamos que no realiza tratamientos en el registro algebraico y esto pudiera deberse a que se brinda el sistema de ejes coordenados XY por motivos de tiempos. Observamos además que realiza el trazado de la representación gráfica de la recta que pasa por los puntos A y B, que era concerniente al ítem (a) (Ver figura 29).

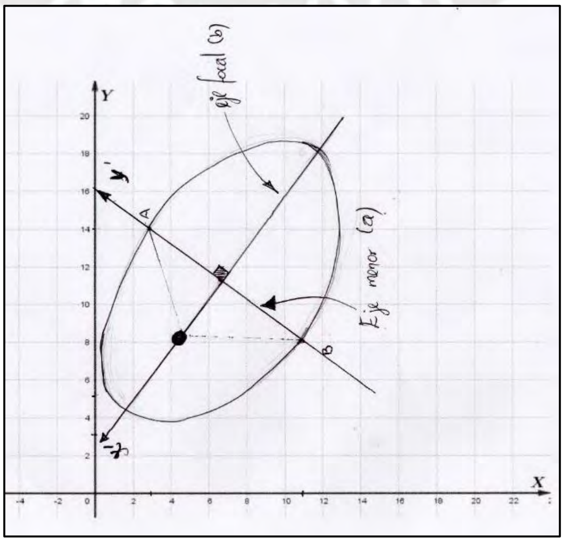


Figura 29. Respuesta dada por Rose al ítem (d)

Esta representación gráfica de la recta, que la nombra como eje menor, Rose lo realiza mediante el enfoque punto a punto, haciendo la interpolación y aceptando la ley de la Gestalt de continuidad descrito líneas arriba.

De la misma manera, también observamos que traza el gráfico de la recta que pasa por el punto medio M y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, la cual nombra como eje focal. Para este trazado, también utiliza el mismo método que para la recta del eje menor.

En el eje focal, Rose ubica de manera referencial la posición del Sol y forma el triángulo característico en la elipse, respetando que los puntos A y B equidisten de la posición del Sol. Al eje focal y eje menor lo denota como x' e y' respectivamente, lo que nos indica que define a su nuevo sistema de coordenadas como $X'Y'$. También vemos que realiza un bosquejo, de manera referencial, de la gráfica de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, tal como lo muestra la figura 25.

De la respuesta dada por Rose a la pregunta del ítem (d), identificamos que transita adecuadamente de la representación de lenguaje natural a la gráfica, ubicando y trazando los elementos de la ecuación que modelan la órbita del cometa Halley descrito en los ítems (a) y (b), lo que implica una adecuada conversión de representaciones.

Con las representaciones gráficas del eje menor y eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley realizadas por Rose, podemos decir que logra satisfactoriamente los objetivos planteados en esta pregunta, lo que demuestra que se está apropiando del objeto matemático en estudio mediante el tránsito de los registros de representación semiótica.

Análisis a priori de la pregunta 3

Esta pregunta tiene por objetivo que los estudiantes transiten del registro de lengua natural al **algebraico** y **realizando tratamientos,** en este último registro, determinen las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio. Para ello, tienen que encontrar la medida del semieje menor y la distancia del centro a uno de sus focos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, así como también el vector unitario direccional. A continuación, presentamos la pregunta 3.

3. Sabiendo que la distancia del punto A al Sol es $13UA$ y que las coordenadas del foco dos es $F_2(14.2;20.6)$, determine las coordenadas del **Sol**, **Perihelio y Afelio.**

Esperamos, a priori, que los estudiantes representen gráficamente, en el plano cartesiano XY, los puntos A, B, foco 2 y M punto medio de $\overline{AB}$ y que grafiquen el eje menor y el eje mayor de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley, ubicando, de manera referencial, la posición del Sol. Luego, que determinen, de manera algebraica, la longitud del semieje menor "b" mediante $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{AM}| = b$ y que, de manera geométrica, mediante la relación $a^2 = b^2 + c^2$, determinen la longitud de la distancia del centro al foco "c".

Una vez ubicado las coordenadas del foco 2, también se espera que los estudiantes determinen, algebraicamente, el vector unitario direccional en el nuevo sistema de coordenadas mediante $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|}$ y, apoyados en la teoría de Vectores, trabajen algebraicamente y encuentren las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio.

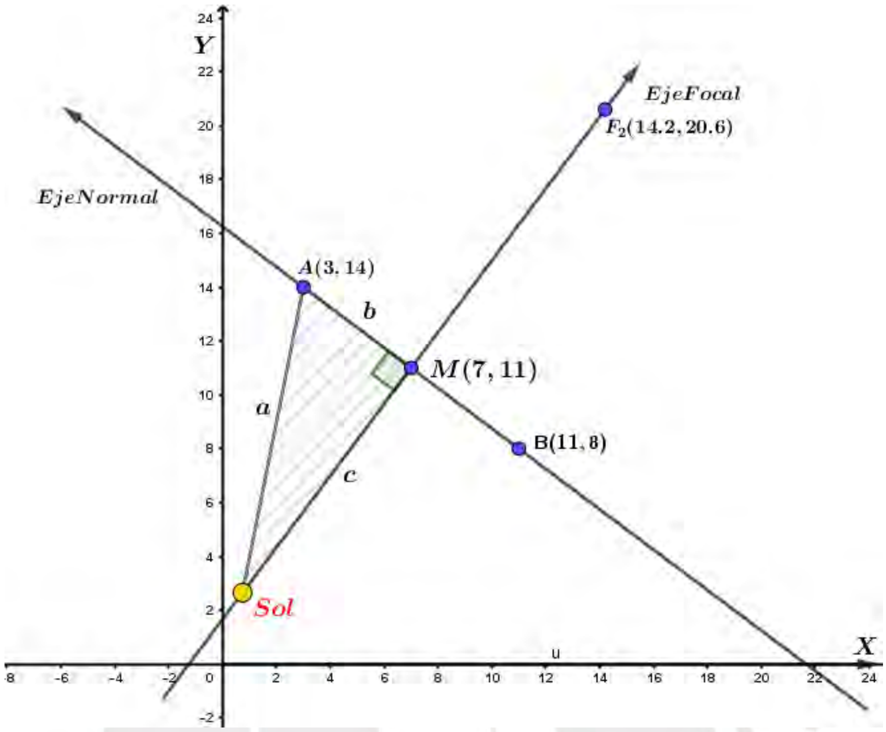
Al pasar los estudiantes de la interpretación de la información en lenguaje natural a representar gráficamente los puntos A, B, F_2 y M, punto medio de $\overline{AB}$ y trazar la gráfica del eje menor y el eje mayor, mediante el enfoque punto a punto, ubicando de manera referencial la posición del Sol, se espera que los estudiantes realicen la conversión de la representación de lengua natural al gráfico.

Además, para determinar las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio, se espera que los estudiantes realicen transformaciones mediante la conversión de la representación gráfica a la algebraica y que luego hagan -tratamientos, dentro de la representación algebraica, para determinar las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio.

Según Duval (2004), al representar gráficamente la información dada en lenguaje natural, lo que se estaría realizando es una conversión de representaciones y que el realizar operaciones internamente en una representación dada, se estaría efectuando, como lo denomina el autor, un tratamiento.

Se espera que los alumnos encuentren el vector unitario direccional del eje menor como del eje mayor de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley y determinen las coordenadas del Sol, así como también las coordenadas del Perihelio y Afelio, relacionándolos con los vértices de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley (Ver cuadro 8).

Cuadro 8. *Respuesta esperada a la pregunta 3.*



- $b = |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MB}| = 5UA$
- $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 12UA$
- $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|} = \left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$
- $Sol = M - 12\vec{u} = (-0.2, 1.4)$
- $Perihelio = M - 13\vec{u} = (-0.8, 0.6)$
- $Afelio = M + 13\vec{u} = (14.8, 21.4)$

Análisis a posteriori de la pregunta 3

<u>Estudiante Jack.</u>

Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, el estudiante Jack representa gráficamente en el sistema de coordenadas XY a los puntos A, B, el punto medio M y la del foco dos. Esto nos evidencia que Jack pasa de una representación en lengua natural a la representación gráfica, ya que, según Duval (2004), el pasar de una representación en lenguaje natural a la representación gráfica se estaría haciendo una conversión de representaciones.

También podemos observar que el estudiante Jack traza la representación gráfica de la recta del semieje menor que pasa por los puntos A y B. Este trazo de la representación gráfica de la recta lo efectuó mediante el enfoque punto a punto.

Del mismo modo, podemos observar que ubica la posición del foco dos y realiza el trazado de la representación gráfica de la recta del semieje mayor de la elipse mediante el enfoque punto a punto, así también ubica, de manera referencial y simétrica, al foco dos la posición del foco uno (Sol). Interpretando la información brindada en lenguaje natural, Jack relaciona la distancia del punto A con el foco uno con la constante a.

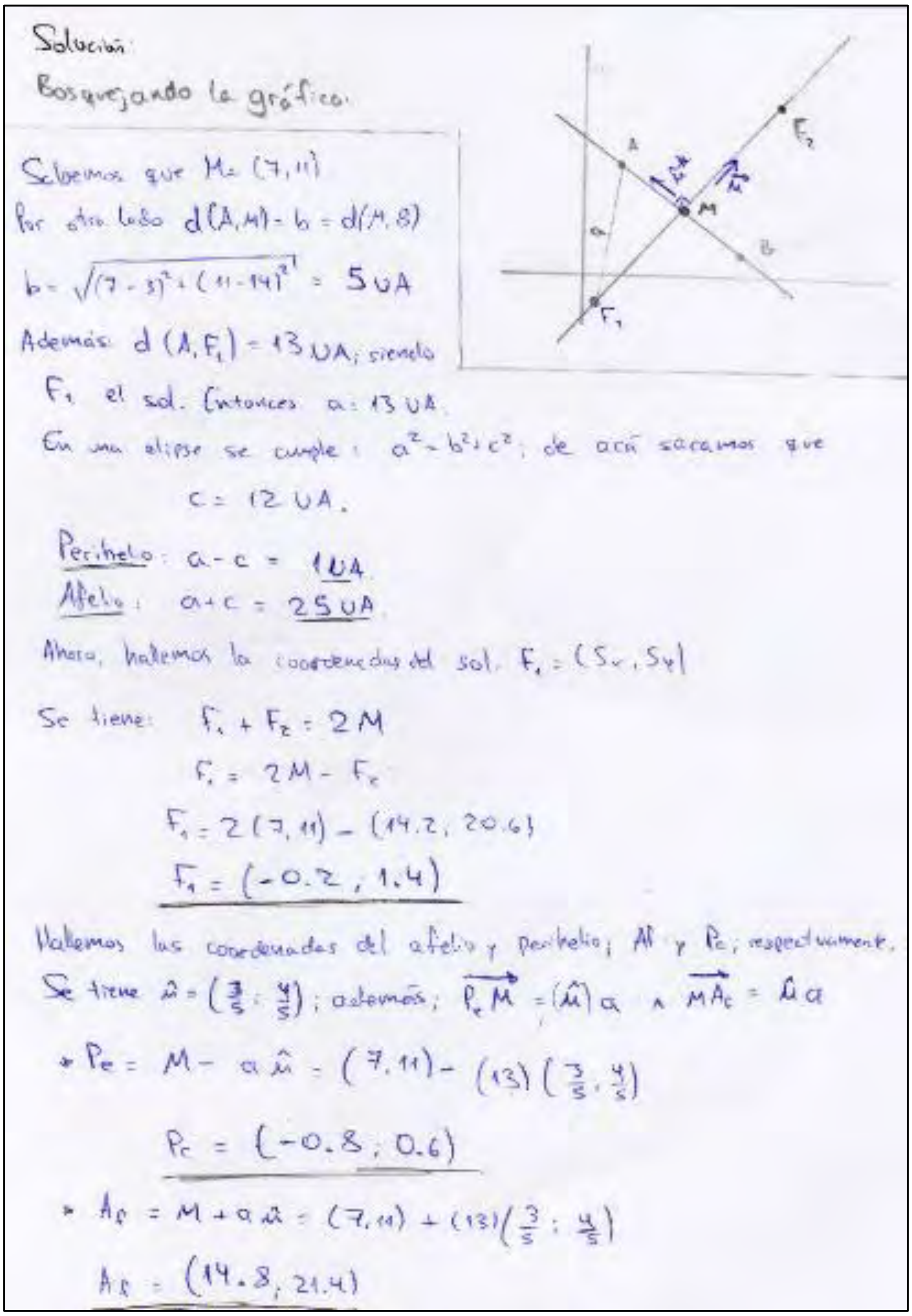
También observamos que Jack gráfica, en el nuevo sistema de coordenadas, el vector unitario direccional $\vec{u}$ en la dirección del eje mayor y el vector unitario ortogonal $\vec{u}^{\perp}$ en la dirección del semieje menor de la elipse.

La determinación de estos vectores es muy importante en carreras de ciencias básicas y, de manera especial, para estudiantes de Física.

Para la determinación de la longitud del semieje menor de la elipse, podemos observar que el estudiante relaciona la distancia entre los puntos A, B y M mediante la expresión algebraica: $d(A;M)=b=d(M;B)$. En esta relación, el estudiante utiliza otra notación con respecto a nuestro análisis a priori, pero que a pesar de ello tienen el mismo significado.

También podemos ver que realiza, de manera adecuada, tratamientos en el registro algebraico para determinar la longitud del semieje menor de la elipse, dando como resultado que $b=5UA$. De manera similar, observamos que relaciona la distancia del foco uno con el punto A mediante la relación $d(A;F_1)=13UA$, de donde concluye que la constante $a=13UA$. Esto demuestra que el estudiante Jack interpreta de manera adecuada la información brindada en la representación de lenguaje natural, para luego realizar la conversión a la representación algebraica.

Esto implica que el estudiante Jack se está apropiando, de manera adecuada, de la noción de elipse mediante el tránsito entre los diferentes registros de representación semiótica y se puede observar en la siguiente figura (Ver figura 30).



Solución:

Bosquejando la gráfica.

Sabemos que $M = (7,11)$

Por otro lado $d(A,M) = b = d(M,B)$

$b = \sqrt{(7-3)^2 + (11-14)^2} = 5UA$

Además: $d(A,F_1) = 13UA$; siendo F_1 el sol. Entonces $a = 13UA$.

En una elipse se cumple: $a^2 = b^2 + c^2$; de acá sacamos que

$c = 12UA$.

Perihelio: $a - c = 1UA$

Afelio: $a + c = 25UA$.

Ahora, hallemos la coordenadas del sol. $F_1 = (S_x, S_y)$

Se tiene: $F_1 + F_2 = 2M$

$F_1 = 2M - F_2$

$F_1 = 2(7,11) - (14.2; 20.6)$

$F_1 = (-0.2, 1.4)$

Hallemos las coordenadas del afelio y perihelio; A_f y P_e; respectivament.

Se tiene $\hat{u} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; además; $\overrightarrow{P_e M} = (\hat{u})a \wedge \overrightarrow{MA_f} = \hat{u}a$

$* P_e = M - a\hat{u} = (7,11) - (13)\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$P_e = (-0.8; 0.6)$

$* A_f = M + a\hat{u} = (7,11) + (13)\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$A_f = (14.8; 21.4)$

Figura 30. Respuesta de Jack a la pregunta 3

Teniendo la distancia del vértice del eje menor al Sol igual a $13UA$ ($a = 13UA$) y también la distancia del semieje menor ($b = 5UA$), observamos que Jack, realizando tratamientos en el registro algebraico, relaciona las constantes a y b con la expresión $a^2 = b^2 + c^2$, de donde despeja la constante $c = 12UA$, la cual es la semi distancia focal. Esperábamos, a priori, que el estudiante no tuviera problemas en encontrar estas constantes realizando tratamientos en la representación algebraica, ya que, en su enseñanza-aprendizaje, el docente del curso ha privilegiado trabajar en el registro algebraico.

Prosiguiendo con los tratamientos en el registro algebraico, Jack determina las coordenadas de la posición del Sol en el sistema cartesiano XY, relacionando los focos y el punto medio M mediante la expresión algebraica $F_1 + F_2 = 2M$. Esta relación se debe a que como el punto M es el centro de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, entonces también es punto entre los focos. De esta relación, el estudiante realiza tratamientos en la representación algebraica y obtiene que las coordenadas de F_1 es $(-0.2;1.4)$; es decir, $Sol = (-0.2;1.4)$.

Para determinar las coordenadas del Perihelio y Afelio, Jack precisa determinar el vector unitario direccional. Se puede entender que el estudiante, teniendo las coordenadas de los puntos M y F_2, realice tratamientos en la representación algebraica y encuentre que el vector unitario direccional es $\vec{u} = (0.6;0.8)$. Además, notamos que relaciona, en el registro algebraico, al Perihelio con el Afelio mediante las expresiones: $\overrightarrow{P_eM} = a(\vec{u})$ y $\overrightarrow{MA_f} = a(\vec{u})$. De estas expresiones, Jack realiza tratamientos en el registro algebraico y obtiene que las coordenadas del Perihelio: $P_e = (-0.8;0.6)$, y la del Afelio: $A_f = (14.8;21.4)$.

Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, Jack determina de manera adecuada las coordenadas del Sol, Afelio y Perihelio mediante tratamientos en el registro algebraico. Duval (2004) indica que, si se trabaja internamente en un registro, lo que se está realizando son tratamientos en este registro de representación.

En la respuesta dada por el estudiante Jack, podemos identificar que interpreta la información en lenguaje natural y realiza conversiones de representaciones que hemos explicado líneas arriba para responder a las preguntas solicitadas, logrando que transite entre los registros de lenguaje natural, gráfico y algebraico.

Esta identificación y descripción de los registros movilizados por Jack, nos indica que logra los objetivos planteados para esta pregunta, lo que hace que respondamos a nuestros objetivos específicos planteados y, en consecuencia, a nuestro objetivo general.

Estudiante Rose.

En la respuesta dada por Rose a esta pregunta, se puede observar que representa gráficamente los puntos A, B en el sistema de coordenadas XY. De igual manera, podemos observar que ubica el punto medio C del segmento $\overline{AB}$. En el paso de la representación de lenguaje natural a la representación gráfica, se evidencia que la estudiante realiza satisfactoriamente la transformación; es decir, una conversión de representaciones del leguaje natural al gráfico.

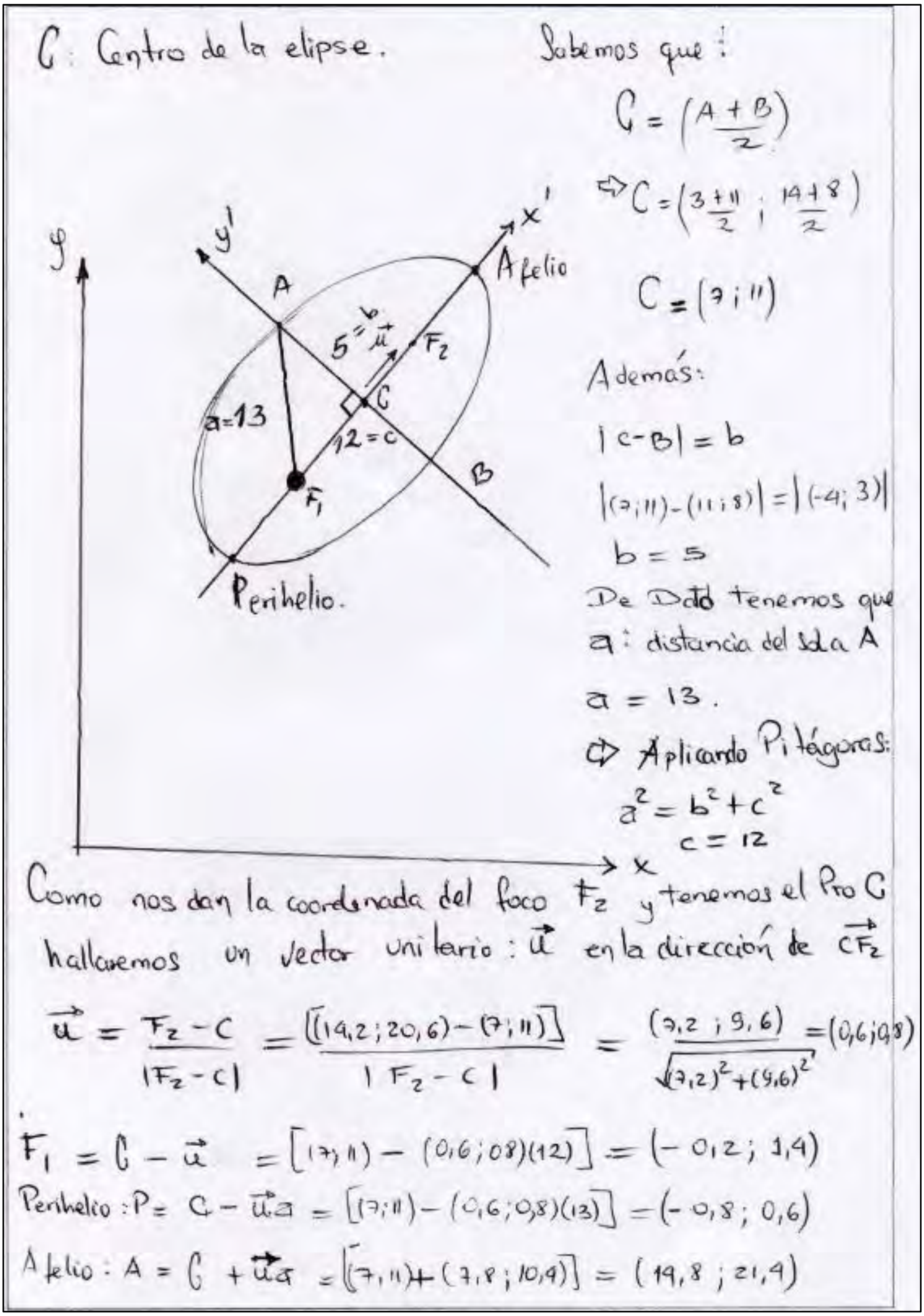
La notación elegida por Rose para denotar al punto medio del segmento $\overline{AB}$ es la "C"; sin embargo, en la actividad, este centro fue denotado por "M". Esta confusión tal vez se deba a que, en forma general, en las bibliografías siempre estilan denotar al centro de la cónica elipse como "C". También se puede observar que, en la determinación de las coordenadas del punto "C", Rose realiza una conversión de la representación gráfica a la algebraica y, realizando tratamientos en este registro, determina las coordenadas del punto medio $C(7;11)$.

Para el trazado de la representación gráfica de la recta que pasa por los puntos A y B, se entiende que Rose lo realiza mediante el enfoque punto a punto. Duval (2011) indica que este método asociativo de que un punto relaciona dos números, se limita a algunos valores particulares y que el enfoque punto a punto es favorable cuando se quiere trazar el grafico correspondiente a una ecuación de primer grado o segundo grado. Esta representación gráfica, que pasa por los puntos A y B, la denota como y', que es un nuevo sistema de coordenadas.

De manera similar, Rose realiza el trazado de la representación gráfica que pasa por el punto medio "C" y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, denotándolo como x' y ubica, de manera referencial, en el eje focal la posición del foco uno (Sol) y traza la representación gráfica del segmento $\overline{AF_1}$.

De la representación gráfica, Rose determina la longitud del semieje menor de la elipse mediante la relación $b = \left|\overline{BC}\right|$. En la determinación de la longitud del semieje menor, podemos notar que Rose realiza tratamientos en la representación algebraica y llega al resultado que $b = 5$; sin embargo, la estudiante se olvidó de colocar las unidades de medida astronómica, las Unidades Astronómicas (UA) que miden la distancia de la posición del cometa Halley con respecto al Sol. Interpretando la información brindada en lenguaje natural, Rose realiza una conversión de la representación de lenguaje natural a la representación algebraica y expresa que $d(Sol; A) = a = 13$, olvidando nuevamente indicar las Unidades Astronómicas.

En la representación gráfica hecha por Rose, podemos observar que forma el triángulo característico en la elipse que relaciona la longitud del semieje menor, semieje mayor y el semieje focal mediante la relación geométrica $a^2 = b^2 + c^2$, de donde, realizando tratamientos en el registro gráfico, Rose obtiene la longitud del semieje focal $c = 12$, obviando una vez más las unidades de medida (Ver figura 31).



C: Centro de la elipse. Sabemos que:

$$C = \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{3+11}{2} ; \frac{14+8}{2}\right)$$

$$C = (7 ; 11)$$

Además:

$$|C-B| = b$$

$$|(7;11)-(11;8)| = |(-4;3)|$$

$$b = 5$$

De Dato tenemos que

a: distancia del Sol a A

$$a = 13.$$

⇒ Aplicando Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = 12$$

Como nos dan la coordenada del foco F_2 y tenemos el Pto C hallaremos un vector unitario: $\vec{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{CF_2}$

$$\vec{u} = \frac{F_2 - C}{|F_2 - C|} = \frac{[(14,2;20,6)-(7;11)]}{|F_2 - C|} = \frac{(7,2;9,6)}{\sqrt{(7,2)^2+(9,6)^2}} = (0,6;0,8)$$

$$F_1 = C - \vec{u} = [(7;11) - (0,6;08)(12)] = (-0,2;1,4)$$

$$\text{Perihelio}: P = C - \vec{u}a = [(7;11) - (0,6;0,8)(13)] = (-0,8;0,6)$$

$$\text{Afelio}: A = C + \vec{u}a = [(7;11) + (7,8;10,4)] = (14,8;21,4)$$

Figura 31. Respuesta de Rose a la pregunta 3

También se puede observar, en la figura 35, que representa gráficamente el vector unitario direccional en la dirección del semieje positivo x' mediante la notación $\vec{u}$. Para determinar las coordenadas del vector unitario direccional, Rose interpreta la información y considerando a F_2 y el centro de la elipse, determina el vector unitario $\vec{u}$ en la dirección de $\overline{CF_2}$. Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, la estudiante relaciona al vector unitario mediante la relación $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{CF_2}}{\left|\overrightarrow{CF_2}\right|}$, y, realizando tratamientos en el registro algebraico, determina que el vector unitario $\vec{u} = (0.6; 0.8)$.

Después de determinar el vector unitario direccional $\vec{u}$, Rose relaciona el centro de la elipse con el vector unitario para determinar las coordenadas del Sol mediante la relación $F_1 = C - c\vec{u}$, de donde, realizando tratamientos en el registro algebraico, obtuvo que $F_1 = (-0.2; 1.4)$ y de manera similar relaciona, en el registro gráfico, al Perihelio y Afelio mediante las ecuaciones: $Perihelio: P = C - a\vec{u}$, $Afelio: A = C + a\vec{u}$. Además, podemos observar que Rose realiza tratamientos en el registro algebraico para determinar las coordenadas del Perihelio y Afelio, dando como resultado $Perihelio = (-0.8; 0.6)$ y el $Afelio = (14.8; 21.4)$.

Como lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, Rose no presenta dificultades en trabajar en el registro algebraico, pues en este registro es donde mejor se desenvuelven los estudiantes, ya que son instruidos de la manera tradicional.

Analizando la respuesta dada por la estudiante, identificamos el manejo de los registros de representación semiótica, ya sea de lengua natural, gráfico y algebraico, y la forma cómo fue transitando de un registro de representación a otro, realizando conversiones para luego realizar tratamientos.

Esta identificación de los registros que maneja y la descripción de ellas, nos ayuda a lograr nuestros objetivos planteados para esta pregunta, con lo que podemos decir que alcanza responder a los objetivos específicos que nos habíamos planteado, implicando también que logremos nuestro objetivo general, con lo que contestaríamos la pregunta de investigación

Análisis a priori de la pregunta 4

Esta pregunta tiene por objetivo que los estudiantes, realizando **tratamientos en el registro algebraico,** determinen las ecuaciones de las rectas directrices de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley. La importancia de estas rectas es la relación que existe entre la distancia de un punto P al foco y la recta (Excentricidad). A continuación, presentamos la pregunta 4.

4. Determine las rectas directrices de la ecuación de la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley en el sistema de coordenadas XY.

Se espera que los estudiantes representen, algebraicamente, la ecuación vectorial de la ecuación que modela la trayectoria del cometa Halley en el nuevo sistema de coordenadas que el estudiante definió anteriormente, realizando cálculos algebraicos en la ecuación vectorial. También se espera que los estudiantes determinen la abscisa del nuevo sistema, en función de las variables x e y del sistema de coordenadas XY, y las rectas directrices de la ecuación que modela la ecuación de la trayectoria del cometa Halley. A esto, Duval (2004) lo llama realizar transformaciones mediante el tránsito de la representación de lengua natural a la algebraica (Ver cuadro 9).

Cuadro 9. *Respuesta esperada a la pregunta 4.*

- $P = M + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$
- $x' = ((x, y) - M)\vec{u}$
- $L : x' = \pm\dfrac{a}{e}$
- $L_1 : 7.2x + 9.6y + 13 = 0$
- $L_2 : 7.2x + 9.6y - 325 = 0$

Análisis a posteriori de la pregunta 4

<u>Estudiante Jack.</u>

Para responder a esta pregunta, Jack indica que tendría que tener la ecuación de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, la que representa algebraicamente como: $\xi : \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, afirmando que las constantes a y b ya las tiene determinadas por la pregunta anterior y centra su atención en determinar al x' e y'.

En este primer tramo de la respuesta dada por Jack, podemos observar que relaciona la pregunta con las anteriores, mediante un lenguaje natural, y representa, en el registro algebraico, la ecuación canónica de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas.

Para determinar al vector unitario ortogonal, Jack recurre a su representación gráfica en la pregunta anterior y explica, en el registro de lenguaje natural, que ya tiene el vector unitario

$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, entonces se puede observar que, realizando tratamientos en el registro gráfico, Jack determina las coordenadas del vector unitario ortogonal y lo escribe como: $\vec{u}^{\perp} = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ (Ver figura 32).


Solución:

Primero, tendríamos que conocer un sistema x'y', tal que nuestra ecuación sea:

$\mathcal{E}: \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$; Ya tenemos a y b. Hallemos ahora x' y y'.

Según el bosquejo en el problema anterior, tenemos a los vectores unitarios.

$\hat{u}^{\perp} = \left(-\frac{4}{5} ; \frac{3}{5}\right) \wedge \hat{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Además, el centro de la elipse es $M(7,11)$; el cual será nuestro nuevo centro para nuestro nuevo sistema de coordenadas.

Por otro lado: $\mathcal{L}_D \equiv x' = \pm \frac{a}{e}$ ... (α)

Además, la transformación de x'y' a xy es, (solo para x')

$x' = \{(x,y) - M\} \cdot \hat{u}$

$x' = (x-7, y-11) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$x' = \frac{3}{5}(x-7) + \frac{4}{5}(y-11)$

Haciendo este reemplazo en (α); tendremos:

$\mathcal{L}_D: \frac{3}{5}(x-7) + \frac{4}{5}(y-11) = \pm \frac{a}{e}$, pero $\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \frac{169}{12}$

Simplificando, nos queda:

$\mathcal{L}_{D_1}: 3x + 4y - \frac{611}{12} = 0$

$\mathcal{L}_{D_2}: 3x + 4y - \frac{949}{12} = 0$

Figura 32. Respuesta de Jack a la pregunta 4

Para determinar las ecuaciones de las rectas directrices de la ecuación que modela órbita del cometa Halley, Jack la representa algebraicamente como: $L: x' = \pm\frac{a}{e}$, donde notamos que relaciona a la abscisa del nuevo sistema de coordenadas, con el cociente entre la longitud del semieje mayor y la excentricidad de la elipse. Esta manera de expresar la ecuación de las rectas directrices es algo que lo teníamos previsto en nuestro análisis a priori, ya que podemos ver que, hasta al momento, Jack ordenaba sus ideas y no ha realizado ningún tratamiento en la representación algebraico para determinar las ecuaciones de las rectas directrices.

Prosiguiendo con el análisis de la respuesta dada por Jack, podemos observar que relaciona el nuevo sistema de coordenadas con el sistema XY mediante la expresión algebraica: $x' = \{(x;y) - M\}.\vec{u}$ y mediante tratamientos en la representación algebraica llega a determinar que la abscisa del nuevo sistemas de coordenadas será: $x' = \frac{3}{5}(x-7) + \frac{4}{5}(y-11)$ el cual relaciona el sistema de coordenadas $X'Y'$ con el sistema XY.

Esperábamos, a priori, que el estudiante expresara algebraicamente la ecuación vectorial de la elipse y que, realizando tratamientos en esta representación, despejara x', tal vez esto no sucedió porque el estudiante maneja las transformaciones como un formulario.

También podemos observar que relaciona la excéntrica con la longitud del semieje mayor y con la longitud del semieje focal como: $ae = c$. De esta expresión, Jack lo determina realizando tratamientos en la representación algebraica que $\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \frac{169}{12}$.

Para determinar las ecuaciones de las rectas directrices de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, el estudiante realiza tratamientos en esta representación y expresa, algebraicamente, que las ecuaciones son: $L_{d1}: 3x + 4y - \frac{611}{12} = 0$ y $L_{d2}: 3x + 4y - \frac{949}{12} = 0$, donde podemos notar que el estudiante Jack tiene algunas dificultades en realizar los tratamientos, lo que implica que tiene un error de cálculo más no de concepto.

Podemos asegurar que Jack moviliza de manera adecuada la representación algebraica y que realiza tratamientos adecuados para determinar el vector unitario ortogonal, la ecuación de la recta directriz y el x'. De esta forma, el estudiante alcanza el objetivo planteado en esta pregunta y logra el objetivo propuesto en esta actividad y que los estudiantes se apropien de la noción de elipse mediante el tránsito entre los diferentes registros de representación semiótica.

Estudiante Rose.

Observando la respuesta dada por Rose, vemos que representa gráficamente, en el sistema de coordenadas XY, lo hecho en la pregunta anterior, agregándole las rectas directrices. En esta representación, la estudiante indica que la distancia del centro de la elipse a la recta directriz es $\frac{a}{e}$.

También vemos que para poder responder a la pregunta, volve a graficar lo hecho en la pregunta anterior, probablemente esto se deba a que precisa de un gráfico como apoyo, ya que relaciona, algebraicamente, la distancia del eje normal con la recta directriz mediante la expresión algebraica $\frac{a}{e}$; sin embargo, no expresa la representación algebraica de la ecuación vectorial de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley. Al no representar algebraicamente la ecuación vectorial, trajo como consecuencia que la estudiante no pueda expresar la ecuación: $x' = ((x; y) - M).\vec{u}$ (Ver figura 33).

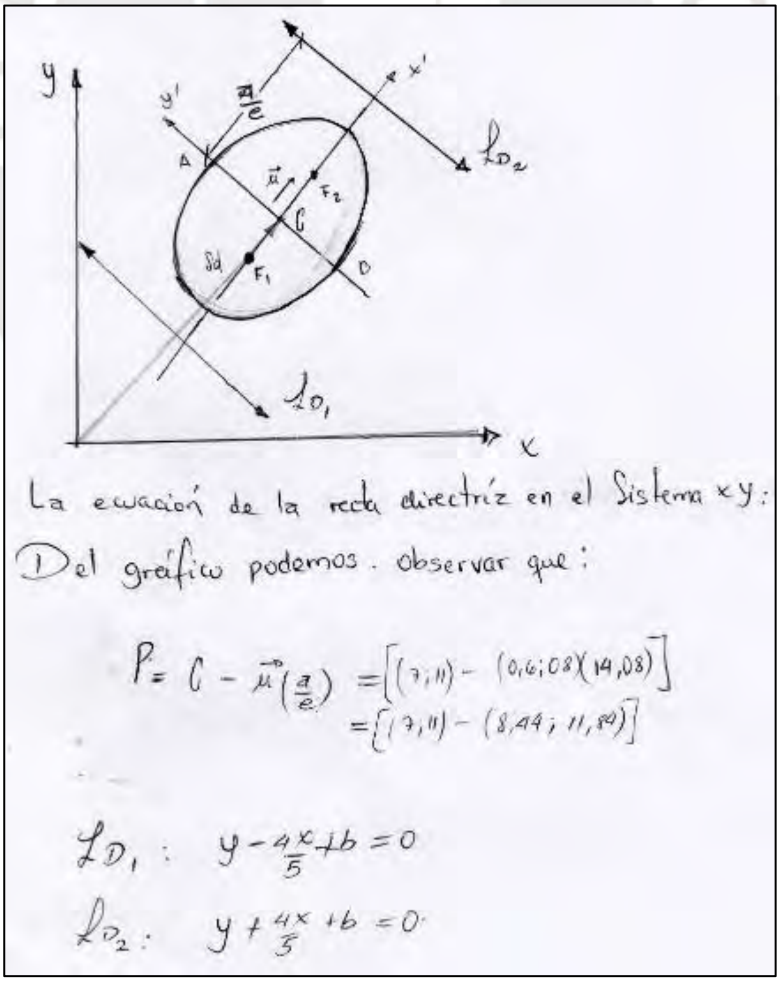


Figura 33. Respuesta de Rose a la pregunta 4

Estos errores tal vez se deban a que la estudiante no representa algebraicamente la ecuación vectorial de la elipse. También se puede observar que expresa, algebraicamente, las rectas directrices de una manera equivocada.

Esperábamos, a priori, que Rose no tuviera inconvenientes en trabajar en el registro algebraico, pues es un registro en los cuales los estudiantes se desenvuelven mejor, ya que es la manera como reciben la instrucción de cada tema en estudio. Esto conlleva a que, en esta pregunta, no se logre nuestro objetivo esperado.

Análisis a priori de la pregunta 5

Esta pregunta tiene por objetivo que los estudiantes realicen la conversión de la representación algebraica al gráfico y grafiquen la ecuación del modelo de la órbita del cometa Halley, identificando sus elementos como el Perihelio, Afelio, las coordenadas del Sol y sus rectas directrices.

5. Represente gráficamente la cónica que modela la órbita del cometa Halley identificando sus elementos.

Se espera, a priori, que los estudiantes realicen la conversión de la representación algebraica al gráfico y grafiquen la ecuación que modela la trayectoria de la órbita del cometa Halley indicando las coordenadas del Sol, de los vértices, el vector unitario direccional, vector unitario ortogonal y las rectas directrices en el sistema de coordenadas XY (Ver figura 34)

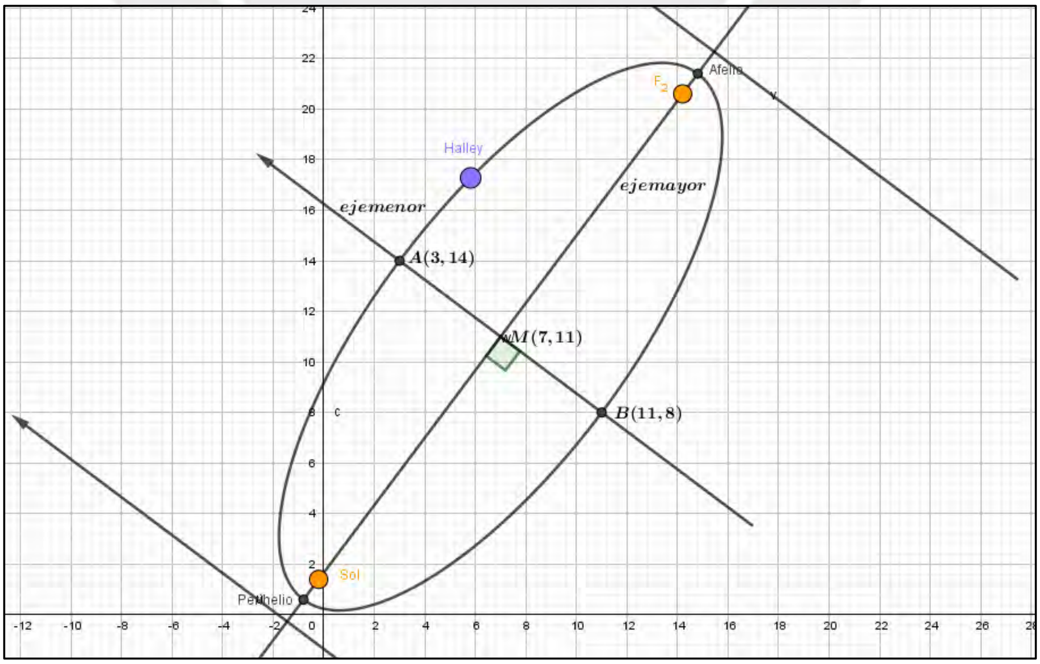


Figura 34. Respuesta esperada en la pregunta 5

Análisis a posteriori de la pregunta 5

<u>Estudiante Jack</u>.

En la representación gráfica que realiza Jack, podemos observar que modela de manera adecuada la ecuación de la trayectoria de la órbita del cometa Halley, donde indica sus elementos, como el eje mayor o eje focal, el eje menor o eje conjugado, la posición del Sol, el foco dos, los vértices, que son el Perihelio y el Afelio, así como las rectas directrices de la elipse (Ver figura 35).

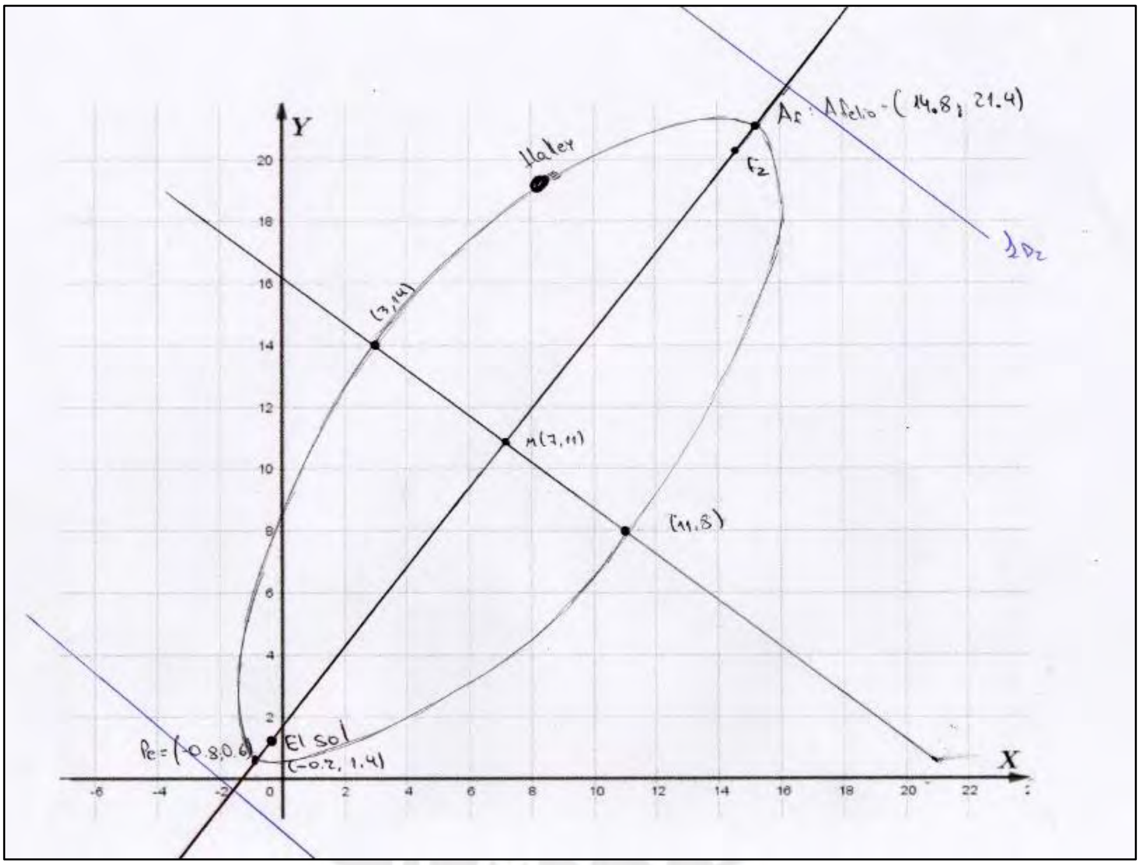


Figura 35. Respuesta de Jack a la pregunta 5

Para la realización del gráfico de los elementos de la ecuación que modela la trayectoria de la órbita del cometa Halley, se entiende que el estudiante ha utilizado el método del enfoque punto a punto, para el trazado del eje menor y el eje mayor de la elipse, así como también para el trazado de las rectas directrices, mientras que para el trazado continuo de la gráfica que modela la ecuación de la órbita del cometa Halley, se entiende que utiliza el método del enfoque de extensión del trazado efectuado apoyándose en la interpolación y aceptar la ley de la Gestalt de continuidad expuesto por Duval (2012).

Esto nos indica que Jack transita de manera adecuada de la representación algebraica, realizando la conversión, a la representación gráfica, que era lo que teníamos previsto en nuestro análisis a priori.

En esta pregunta, logramos identificar que el estudiante Jack maneja adecuadamente las representaciones algebraicas y la conversión que realiza a la representación gráfica, cuya explicación dimos líneas arriba, con lo que hemos logrado obtener nuestros objetivos planteados en la investigación, con lo cual respondemos a la pregunta de estudio.

<u>Estudiante Rose.</u>

Con respecto a la representación gráfica que modela la órbita del cometa Halley, Rose, realiza la conversión de representación del registro de lengua natural y algebraico al gráfico, esbozando la trayectoria de la órbita.

Para esta representación gráfica, la estudiante utiliza el enfoque punto a punto, que es utilizado para casos particulares. Podemos observar que traza algunos elementos, como el eje mayor y el eje menor de la elipse, denotándolas como x' y y' respectivamente (Ver figura 36).

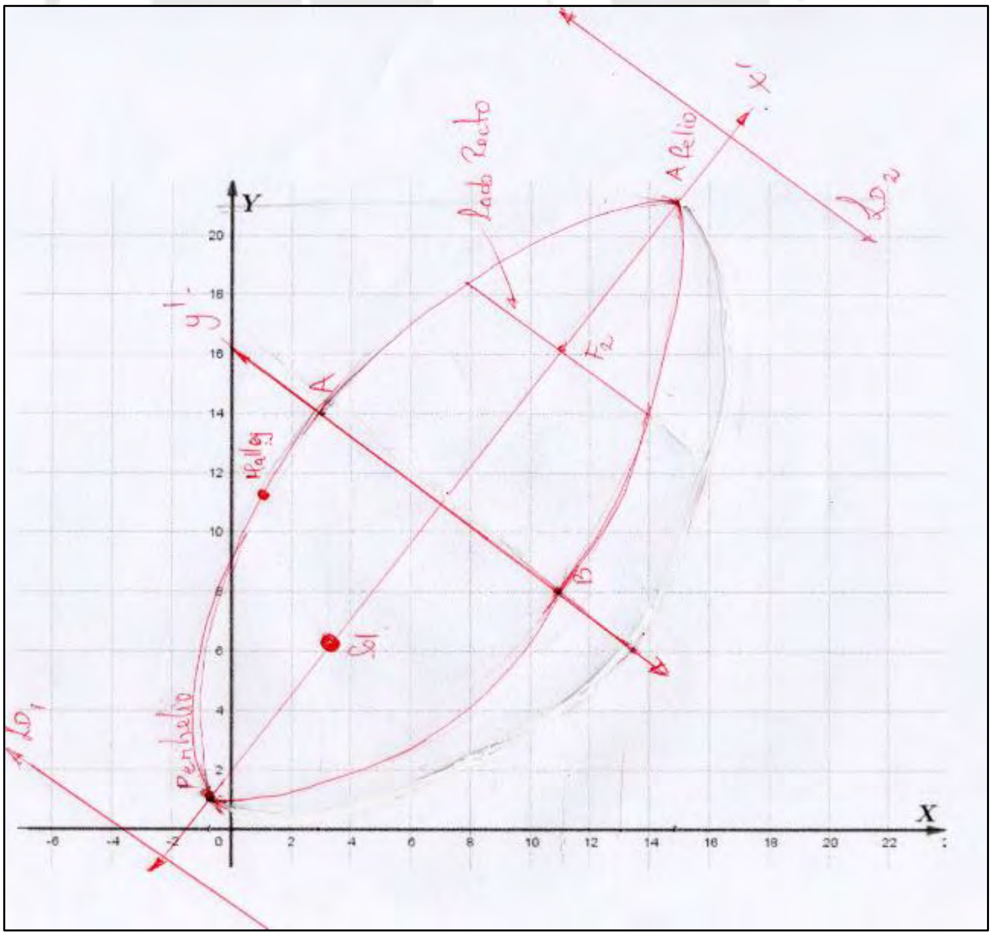


Figura 36. Respuesta dada por Rose a la pregunta 5

También vemos que indica la posición del Perihelio y el Afelio, así como la posición del Sol; sin embargo, se observa que cometió un error al ubicar la posición del Sol, a pesar de que en la pregunta anterior lo determina de manera adecuada. Esto se debe, tal vez, por el apuro, ya que el tiempo de 120 minutos se terminaba. La manera de ubicar la posición del Perihelio, Afelio y el trazo del eje menor y mayor nos evidencia que Rose articula, de manera adecuada, las representaciones algebraica y gráfica.

La mencionada articulación y la modelación de la ecuación de la órbita del cometa Halley, nos evidencia que Rose logra alcanzar el objetivo de esta pregunta.

Resultados de la parte experimental.

Con respecto a la actividad didáctica, en la secuencia de preguntas, consideramos que los estudiantes de investigación Jack y Rose lograron alcanzar el objetivo que es apropiarse de la noción de elipse mediante la coordinación entre los Registro de Representación Semiótica de lengua natural, algebraico y gráfico. A continuación, presentamos el detalle:

En la pregunta 1, como lo teníamos previsto, los estudiantes Jack y Rose, después de realizar tratamientos en el registro de lengua natural, respondieron por el mismo registro que la cónica que modela la órbita del cometa Halley es elíptica.

De las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 1, podemos indicar que los estudiantes recurrieron al registro algebraico, cosa que no teníamos previsto en nuestro análisis a priori, dejando entender su predilección por este registro para justificar sus respuestas.

Esta predilección del registro algebraico, por parte de los estudiantes, se deba tal vez a la forma como el docente del curso presenta el tema elipse en clase mediante el uso de textos que privilegian lo algebraico analítico. Esta manera de responder, y que no estaba previsto en nuestro análisis, provoca un enriquecimiento de nuestra investigación.

Con respecto a la pregunta 2, se plantea una secuencia de cuatro ítems con el objetivo que los estudiantes se apropien de los elementos de la elipse: Eje normal y eje focal y si estos fueron rotados y/o trasladados a un nuevo sistema de coordenadas, a lo que los estudiantes respondieron de manera correcta mediante la coordinación de los Registros de Representación Semiótica de lengua natural algebraica y gráfica.

En la pregunta 2(a), se brinda la información en el registro de representación de lengua natural, lo que los estudiantes, mediante la conversión al registro gráfico, ubicaron los puntos A y B en el sistema de coordenadas XY, para luego ubicar de manera referencial en este sistema de coordenadas la posición del Sol y trazar la recta que pasa por los puntos A y B para responder, en lengua natural, que dicha recta es el eje normal o menor de la elipse, lo que demuestra que los estudiantes lograron satisfactoriamente la coordinación de los registros de lengua natural y gráfico.

En la pregunta 2(b), los estudiantes de investigación, apoyándose en la representación gráfica del ítem (a) y considerando los puntos A y B, realizaron la conversión al registro algebraico y realizando tratamientos en este registro determinaron el punto medio M, para luego responder, en lengua natural que la recta que pasa por el punto medio M y que es perpendicular a la recta del ítem (a) es la recta del eje mayor o focal de la elipse, demostrando la coordinación entre los registros de lengua natural, algebraica y gráfica.

En la pregunta 2(c), partiendo de un supuesto de encontrar la ecuación vectorial de la elipse, se pregunta ¿Se trabajará en el mismo sistema de coordenadas?, los sujetos de investigación respondieron de manera adecuada, en lengua natural, que no, ya que están en un nuevo sistema de coordenadas, lo que evidencia la coordinación entre los registros gráficos y de lengua natural; sin embargo, en esta pregunta, no especificaron que el sistema de coordenadas XY fue rotado y trasladado a un nuevo sistema de coordenadas que ellos definirán.

En la pregunta 2(d), los estudiantes de investigación, mediante la conversión de la expresión algebraica a la representación gráfica, graficaron los elementos de la elipse encontrados en el ítem (a) y (b), definiéndolo en un nuevo sistema de coordenadas.

En esta pregunta 2, podemos evidenciar la coordinación entre los registros de representación de lengua natural, algebraica y grafica mediante tratamientos y conversiones.

En la pregunta 3, se planteó como objetivo que los estudiantes trabajen en el registro algebraico y, realizando tratamientos en este registro, determinen las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley. En efecto, se brinda la información en lengua natural, a lo que los estudiantes Jack y Rose realizaron la conversión al registro gráfico y ubicaron en el sistema de coordenadas XY la posición del foco 2, luego realizaron la conversión al registro algebraico para determinar, mediante tratamientos en este registro, las coordenadas del Sol, Perihelio y Afelio. Esto se logró mediante la coordinación de los registros de lengua natural algebraico y gráfico.

En la pregunta 4, planteamos que los estudiantes prosigan trabajando en el registro algebraico y determinen las ecuaciones de las rectas directrices de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, lo cual lograron, en primer lugar, realizando la conversión del registro de lengua natural al algebraico para luego realizar tratamientos en este último registro y despejar la abscisa del nuevo sistema de coordenadas.

En las respuestas dadas por los estudiantes, se observa los tratamientos realizados en el registro algebraico, así como también algunos errores de cálculos más no de concepto. Este error tal vez sea por cuestiones de tiempo, pues ya se terminaba la hora programada para la actividad.

Finalmente, en la pregunta 5, planteamos como objetivo que los estudiantes representen gráficamente los elementos de la elipse, así como el trazo continuo de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley. Para esto, los estudiantes transitaron del registro de lengua natural y algebraico al gráfico mediante su coordinación.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta parte, haremos una reflexión de los aspectos importantes en la investigación, consideraremos los aspectos metodológicos, la fundamentación teórica, así como sus contribuciones para el área de Educación Matemática y, finalmente, la contribución para futuras investigaciones.

La situación dada durante la aplicación de la actividad, posibilita a los sujetos de investigación aprendizaje y reflexión sobre la articulación de las representaciones de lengua natural, algebraica y gráfica, ya que la secuencia de preguntas permitió que los sujetos transiten entre los registros de representación semiótica y se apropien de la noción de elipse.

En ese sentido, los aspectos considerados de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), en lo concerniente a los tratamientos y conversiones, nos proporcionó los instrumentos necesarios para el análisis de los resultados de los sujetos de investigación, así como los inconvenientes presentados por los sujetos y así alcanzar los objetivos específicos de investigación.

La pregunta 2 fue relevante para la realización del tránsito entre la conversión de la representación de lengua natural a la gráfica en la Geometría Analítica, con la introducción de los ejes coordenados mediante el trazado del eje menor y eje mayor de la elipse, las cuales son representadas mediante un nuevo sistema de coordenadas. Este nuevo sistema indujo a los sujetos de investigación a apoyarse en la teoría de Vectores para poder determinar los elementos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley.

En las preguntas 3 y 4 podemos observar que los estudiantes movilizaron de manera correcta las variables didácticas, como las Unidades Astronómicas y los ejes coordenados para determinar las constantes a, b y c, así como el vector unitario direccional en el nuevo sistema de coordenadas. Estas dos preguntas tuvieron como objetivo que los sujetos de investigación articularan los registros gráficos y algebraicos y viceversa.

Concluimos, a partir del análisis a priori y a posteriori, que los sujetos de investigación se apropiaron de la noción de elipse mediante la articulación de los registros de lengua natural, algebraico y gráfico durante la secuencia de preguntas en la modelación de la ecuación de la órbita del cometa Halley.

Los aspectos metodológicos considerados han contribuido para que la experimentación con los sujetos se desarrollara de manera efectiva y atendiera a nuestro objetivo de analizar cómo una actividad que involucra la articulación de diferentes registros de representación semiótica, permite que los estudiantes de Física movilicen la noción de elipse.

También es bueno mencionar que los aspectos de la Ingeniería Didáctica favorecieron la elaboración, aplicación y análisis de la secuencia de preguntas, que fueron analizadas mediante aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Durante el desarrollo de la actividad, la teoría de Registros de Representación Semiótica evidenció toda su potencialidad, ya que siempre se trabajó realizando los tratamientos y conversiones de los registros de representaciones.

Durante la secuencia de preguntas en donde la hegemonía del lenguaje natural predominaba, la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico o gráfico ocurrió de manera satisfactoria, con lo cual logramos nuestro objetivo, ya que los sujetos de investigación se apropiaron de la noción de elipse mediante la articulación de los registros de representación de lengua natural, algebraica y gráfica.

Los objetivos específicos de investigación que fueron logrados de manera satisfactoria son:

- *Identificar los tratamientos y las conversiones realizadas por los estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse.*
- *Describir los tratamientos y las conversiones que los estudiantes utilizan al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de Elipse,*

Para el primer objetivo, hemos considerado aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica, relacionado a transformaciones lo concerniente con tratamientos y conversiones, lo cual nos da un fundamento teórico para el diseño de la actividad didáctica mediante una secuencia de preguntas. Asimismo, también establecimos las variables didácticas para la actividad didáctica, según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), el cual nos permitió controlar la actividad.

En la actividad didáctica, mediante la secuencia de preguntas, identificamos los tratamientos y las conversiones realizados por los estudiantes Jack y Rose en lengua natural, algebraica y gráfica. De modo particular, la pregunta dos, el cual consistió en una secuencia de cuatro ítems y que tuvo como objetivo que los estudiantes se apropiaran de algunos elementos de la ecuación que modela la órbita del cometa Halley, mediante el tránsito entre los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraica y gráfica, permitió identificar los tratamientos y las conversiones realizados por los estudiantes Jack y Rose. Por ejemplo, el ítem

(a) se les pregunta en lengua natural ¿Qué elemento representa la recta que pasa por los puntos A y B con respecto a la cónica que modela la órbita del cometa Halley?, lo que los estudiantes, realizando la conversión de la información en lengua natural al registro de representación gráfica y viceversa, respondieron, en lengua natural, que dicha recta es el eje normal o menor de la elipse.

Para el segundo objetivo, describimos el registro de lengua natural, algebraico y gráfico. En el análisis de la secuencia de preguntas de la actividad didáctica, hemos descrito los tratamientos y las conversiones hechas por los sujetos de investigación. En la pregunta 3, se ha desarrollado la coordinación de los registros de representación de lengua natural, algebraico y gráfico, ya que dado el enunciado del problema en lengua natural, los estudiantes de investigación realizaron la conversión al registro de representación gráfico para ubicar en un plano cartesiano la información brindada. Seguidamente, realizaron la conversión al registro algebraico y mediante tratamientos en este registro, determinaron las constantes "b" , "c" y el vector unitario direccional, para finalmente, mediante tratamientos en el registro algebraico, determinar la posición del Sol, el Perihelio y Afelio.

Al lograr identificar y describir los tratamientos y conversiones que los estudiantes utilizaron al desarrollar una secuencia didáctica que moviliza la noción de elipse, podemos afirmar que se logró concretar el objetivo general, *Analizar la coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de Elipse de estudiantes de Física.*

El análisis de los datos recolectados durante la experimentación se realizó mediante la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de la actividad, mediante la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), con el cual hemos respondido a nuestra pregunta de investigación: ¿Cómo la coordinación de diferentes registros de representación semiótica favorece la movilización de la noción de Elipse de estudiantes de Física?

Consideramos la pertinencia de nuestra investigación, ya que en Perú existen escasas investigaciones relacionados al estudio de las cónicas, en el nivel superior, mediante la teoría de Vectores, tema que es estudiado por estudiantes de ciencias básicas e Ingeniería.

Nuestro trabajo es un aporte a futuras investigaciones que puedan considerar los siguientes puntos:

- Elaborar una secuencia que analice la articulación entre los diferentes registros de representación semiótica de otros objetos matemáticos.

- Realizar estudios de la elipse de modo vectorial con el marco teórico de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), apoyados por el Software Geogebra en un ambiente de Geometría Dinámica, ya que el programa tiene herramientas que pueden ayudar a la mejor comprensión del objeto matemático elipse de modo vectorial mediante las vistas algebraica y gráfica.
- Dado la aplicación de las propiedades de la cónica elipse, ya sea en la arquitectura, mediante las construcciones de coliseos acústicos hasta estadios de futbol acústicos, también en la Física médica, mediante el tratamiento de cálculos renales, así como el estudio de los cuerpos celestes, se recomienda hacer un estudio sobre estas aplicaciones.

Debido a la predilección del registro algebraico por parte de los textos universitarios, recomendamos realizar una investigación relacionado con la aplicación del tránsito entre los Registros de Representación Semiótica de lengua natural, algebraico y grafico para una mejor comprensión de los objetos matemáticos.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995*). Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 38, 97-140). México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

Bonilla, D. (2012). *La elipse desde la perspectiva de la teoría los Modos de Pensamie*ntos. (Tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Instituto de Matemática, Chile.

Contreras, A., Contreras, M., García, M. (2002). Sobre la Geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamérica de investigación matemática – RELIME (2002) 5(2): 111 – 132.* Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33505201

Dávila, M., Del Alba, A., Hernández, P., Antolín, A. (2013). Secuencia Didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. Recuperado de http://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/viewFile/918/856

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME*, 9.1, pp. 143-168. Recuperado de http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Duval, R. (2011). *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*. REVEMAT, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011. Recuperado de https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Recuperado de https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Eves, H. (2004). *Introdução à história da Matemática*. Traducido al portuguez por: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, Brasil.

Flores, R. (2015). *Diseño instruccional para el aprendizaje de secciones cónicas*. (Tesis de Maestría en Educación matemática). Universidad de Carabobo, Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Educación, Venezuela.

Hernández, R., Fernández, C. & Batista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: Editorial Mc Graw Hill. Quinta edición.

León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumos de Arquitectura y Administracion de proyectos*. (Tesis de Maestría en Educacion matematica). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

López, J., Aldana, E. (2013). La comprensión del concepto de parábola: Un estudio de caso. *Actas del VII CIBEM ISSN 2013.* Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/211.pdf

Ortiz, A. (2015). *La Matemática a Través de Clásicas Áreas,* Lima – Perú, primera edición, volumen 1.

Perú, Universidad Nacional del Callao (2010). *Sílabo del curso Matemática básica*, Facultad de Ingeniería Ambiental y de Recursos Naturales.

Perú, Universidad Nacional del Callao (2010). *Sílabo del curso Matemáticas básica,* Facultad de Ingeniería Mecánica y Energía. Recuperado de http://fime.unac.edu.pe/3_syllabus.php

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* (Tesis de Maestría en Educación matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.

Silva, N. (2013). Geogebra e Representações Semióticas no Ensino das Cônicas, recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD6/naralinasilva6.pdf

Venero, A., (2009), *Introducción al Análisis Matemático*, Lima – Perú, Editorial: Representaciones Gemar E.I.R.L.

ANEXOS

El diseño de esta actividad se basa en una secuencia de preguntas que tiene por objetivo que los estudiantes de Física transiten entre los diferentes Registros de Representación Semiótica; es decir, en el registro de lengua natural, algebraico y gráfico y así logren apropiarse de la noción de elipse.

Para lograr este objetivo, los estudiantes desarrollaron la actividad apoyándose en la teoría de vectores, que es un tema muy importante en su formación profesional y que lo ven en el primer semestre de estudio en el curso de Complemento de Matemática.

LA TRAYECTORIA DEL COMETA HALLEY

El cometa Halley es un cometa grande y brillante que orbita alrededor del Sol cada 76 años aproximadamente. Recibió este nombre gracias a su descubridor Edmund Halley, quien determinó el periodo orbital del cometa en 1705.

El cometa describe una órbita cónica alrededor del Sol cuya excentricidad es menor que la unidad ($e<1$ **)**, teniendo al Sol como uno de sus focos. La distancia desde la posición del cometa Halley, en su órbita respecto al Sol, se mide en Unidades Astronómicas (UA), que es la distancia en promedio de la Tierra al Sol $(1UA \approx 93000000 \text{ millas})$. A la distancia más cercana se le denomina **Perihelio** y las más lejanas **Afelio**.

1. ¿Qué cónica modela la órbita del cometa Halley? Explique.

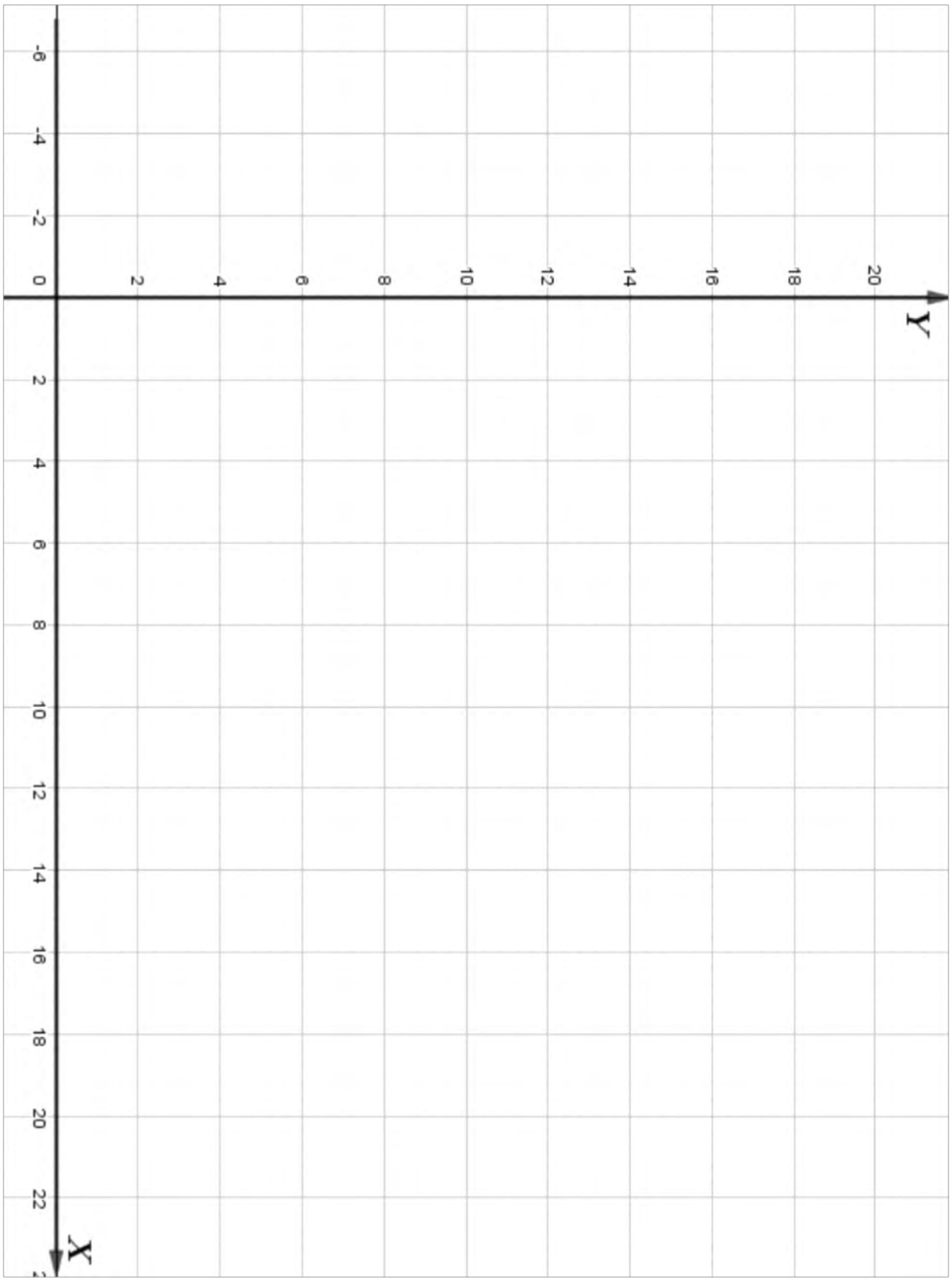
2. En un sistema de coordenadas XY, el cometa Halley, en su órbita, pasa por los puntos $A(3,14)$ y $B(11,8)$. Si la distancia entre dichos puntos es la **máxima posible** y que además equidistan de la posición del Sol, responda lo siguiente:

   a) ¿Qué elemento representa la recta que pasa por los puntos A y B con respecto a la cónica que modela la órbita del cometa Halley?

b) ¿Qué elemento de la cónica, que modela la órbita del cometa Halley, representa la recta que pasa por el punto medio M de $\overline{AB}$ y que es perpendicular a la recta mencionada en el ítem (a)?

c) Si se desea encontrar la ecuación vectorial de la cónica que describe la trayectoria del cometa Halley, ¿Se trabajará en el mismo sistema de coordenadas? Explique.

d) En el plano cartesiano, bosqueje la representación gráfica de los elementos encontrados en los ítems (a) y (b).



3. Sabiendo que la distancia del punto A al Sol es $13UA$ y que las coordenadas del foco dos es $F_2(14.2;20.6)$, determine las coordenadas del **Sol**, **Perihelio y Afelio.**

4. Determine las rectas directrices de la ecuación de la cónica que modela la trayectoria del cometa Halley en el sistema de coordenadas XY.

5. Represente gráficamente la cónica que modela la órbita del cometa Halley identificando sus elementos.