

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



Optimización de dividendos bajo una tasa estocástica y con cambio de régimen

Tesis para optar el grado de
Magistra en Matemáticas Aplicadas que presenta

Edith Chavely Anco Blas

Dirigido por
Dr. Jonathan Samuel Farfán Vargas

San Miguel, 2018

Agradecimientos

Agradezco a Dios el Creador del universo, por todas sus bendiciones que derrama en mi vida y brindarme lo necesario para conseguir culminar esta maestría.

Agradezco a mis padres por su gran respaldo y por tenerme presente en cada una de sus oraciones. Ya mi amigo Lito por cada palabra precisa en los momentos en que lo necesitaba.

Agradezco a mi asesor el Dr. Jonathan Farfán por su gran apoyo, su tiempo que me brindó durante el desarrollo de esta tesis y sobre todo por su inmensa paciencia conmigo, y al Dr. Abelardo Jordán por el gran apoyo brindado desde el inicio de la maestría.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen | III |
| Abstract | IV |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Optimización de dividendos | 7 |
| 2.1. Modelo matemático | 7 |
| 2.2. Formulación del problema | 9 |
| 3. Optimización con tasas de dividendos acotadas | 11 |
| 3.1. Teorema de verificación | 13 |
| 3.2. Construcción de una solución | 21 |
| 3.3. Verificación de la solución | 30 |
| 3.4. Ejemplos numéricos y comparación con el caso de un régimen | 34 |
| 4. Optimización con tasas de dividendos no acotadas | 38 |
| 4.1. Teorema de verificación | 40 |
| 4.2. Construcción | 54 |
| 4.3. Verificación | 58 |
| 4.4. Una estrategia óptima | 61 |
| Apéndice | 66 |
| Bibliografía | 78 |

Resumen

En el presente trabajo, estudiaremos el problema de optimización de dividendos para una compañía de seguros cuya reserva de efectivo y la tasa de interés de descuento son modelados por procesos de difusión con los coeficientes de la tendencia y la volatilidad dependiendo del régimen económico externo (condiciones macroeconómicas). Este cambio de régimen está modelado por una cadena de Markov observable de estados finitos. El objetivo es encontrar un esquema de distribución de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos acumulados descontados hasta el tiempo de ruina. Consideramos dos escenarios:

- (I) **Cuando el proceso de dividendos tiene una tasa y esta es uniformemente acotada.** En este caso, probaremos un Teorema de verificación que indica que la solución de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman correspondiente coincide con la función de valor asociada a nuestro problema y que bajo ciertas condiciones una estrategia óptima existe. Además, encontraremos una forma explícita de una estrategia óptima, en el caso de dos regímenes. Esta estrategia consiste en que la compañía pagará dividendos con la tasa máxima siempre y cuando el proceso de reservas después de pagar dividendos sea igual o mayor a algunos niveles críticos (barreras) y no pagar nada cuando se encuentre por debajo de estas barreras.
- (II) **Engeneral, cuando el proceso de dividendos es solo cadlag.** En este caso, obtenemos una cota superior para la función de valor asociada a nuestro problema. Además, a partir de los resultados obtenidos en la literatura existente en problemas similares y de los resultados obtenidos en el presente trabajo conjeturamos una posible forma de la estrategia óptima.

Palabras clave: Distribución óptima de dividendos, procesos de difusión, cambio de régimen, control óptimo estocástico, estrategia de dividendos.

Abstract

In the present work, we will study the dividend optimization problem for an insurance entity whose cash surplus process and the discounting interest rate are modeled by diffusion processes with drift and volatility coefficients dependent on the external economic regime (macroeconomic conditions). This regime switching is modeled by an observable finite-state Markov chain. The aim is to find a dividend distribution policy that maximizes the expected total discounted amount of dividend payments up to bankruptcy. We consider two situations:

- (I) **When the dividend process has a rate and this is uniformly bounded.** In this case, we will prove a verification Theorem which indicates that the solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation corresponding coincides with the value function associated with our problem and that under certain conditions an optimal strategy exists. Also, we will find an explicit form for optimal dividend strategy, in the case of two regimes. This consists in that the company will pay out dividends at the maximum rate as long as the reserve process after the payment of dividends is bigger than or equal to some critical levels (barriers) and do not pay dividends when is below these barriers.
- (II) **In general, when the dividends process is cadlag only.** In this case, we get an upper bound for the value function associated with our problem. Also, from the results obtained in the existing literature in similar problems and the results obtained in the present work, we conjecture a possible form of an optimal strategy.

Keywords: Optimal distribution of dividends, diffusion processes, regime switching, stochastic optimal control, dividend strategy.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los temas clásicos de investigación durante muchos años por parte de la ciencia actuarial y literatura financiera es el problema de distribución óptima de dividendos en una compañía financiera. Este problema de optimización de dividendos es conocido como “el problema de la gerencia de determinar el momento óptimo y el tamaño de los pagos de dividendos en presencia de riesgo de ruina”. El ejemplo más típico de una corporación financiera con este tipo de problemas es el de una compañía de seguros.

La atención y el interés alcanzado en el estudio de este tema, se debe en gran parte a la importancia que implica para una compañía las decisiones que tome con respecto a la distribución o pago de dividendos, al ser cruciales porque no solo representan una señal importante sobre las oportunidades de crecimiento futuro y la rentabilidad de esta, sino que además pueden influir en las decisiones de inversión y financiación incluso afectando la riqueza de los accionistas. Debido a que los dividendos se pagan del beneficio neto, los dividendos que se han de pagar no deben ser demasiado altos ya que las utilidades retenidas pueden llegar a ser bajas y esto podría causar una inestabilidad financiera o disminuir las oportunidades de crecimiento. Pero si los dividendos son muy bajos, las acciones de la compañía pueden volverse menos atractivas para los inversionistas o futuros inversionistas. Por tanto, seleccionar una política de dividendos óptima es una de las decisiones más importantes que cada compañía debe tomar.

En la literatura, De Finetti B., en [5], fue uno de los primeros que estudió este problema bajo un modelo de tiempo discreto. Karl Borch, en [3] y [4], discutió extensamente el problema de encontrar la estrategia óptima de pago de dividendos. Jeanblac-Piqué y Shiryaev, en [11], así como Asmussen y Taksar, en [2], plantearon y resolvieron el problema en tiempo continuo modelando la reserva de la compañía por un movimiento

Browniano. Estos últimos emplearon teoría de control óptimo en este tipo de modelo. Desde entonces ha aparecido una extensa literatura sobre el problema del dividendo y sus extensiones, incluyendo el de reaseguro (por ejemplo, Schmidli H., en [21]), la inversión óptima de las reservas (por ejemplo, Højgaard B., en [10]), el impuesto y el costo proporcional (por ejemplo, Løkka y Zervos, en [16]).

En este contexto, el problema principal consiste en encontrar una política de distribución de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos acumulados descontados (función de retorno) hasta el primer instante en el que el nivel de la reserva, después de pagar dividendos, llega a cero (tiempo de ruina).

Diversos modelos tales como, procesos de difusión (por ejemplo, Asmussen y Taksar, en [2]), procesos de difusión con salto (por ejemplo, Paulsen y Gjessing, en [19]) y el proceso compuesto de Poisson (por ejemplo, Schmidli H., en [22]) se han utilizado para representar la reserva en ausencia de pago de dividendos. Sin embargo, teniendo presente que es poco probable que los parámetros que influyen en el crecimiento económico sean constantes en horizontes de largo plazo (por ejemplo, por la presencia de ciclos económicos), estos modelos no reflejarían los cambios que pueden ocurrir gradualmente o producirse abruptamente en la reserva de una compañía y en la tasa de descuento, las cuales podrían ser producidas por algún régimen económico externo.

Para entender mejor uno de estos modelos consideremos un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ con una filtración $\{\mathbf{F}_t\} = \{\mathbf{F}_t; t \geq 0\}$ que satisface las condiciones usuales. Representaremos por un proceso de difusión $\{X_t; t \geq 0\}$ a la reserva de la compañía, y por μ y σ la tendencia y la volatilidad respectivamente. Adicionalmente, consideremos un movimiento Browniano $\{W_t; t \geq 0\}$ con respecto a la filtración $\{\mathbf{F}_t\}$. De este modo, la reserva de la compañía será modelada por

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (1.0.1)$$

En este modelo, los coeficientes μ y σ son constantes y la incertidumbre causada por movimientos minúsculos y continuos de la reserva está representada por el movimiento Browniano. Sin embargo, la reserva (que está sujeta a los cambios que sucede en la economía) puede variar de vez en cuando entre, digamos, un estado “tranquilo” (estable, con baja volatilidad) y un estado “turbulento” (inestable, alta volatilidad). Entonces, es necesario definir un modelo que tenga presente estos cambios aleatorios que se dan

a lo largo del tiempo.

Durante los últimos años, ha habido un gran número de trabajos donde se han tenido en cuenta estas condiciones cambiantes, agregando a estos modelos un cambio de régimen controlado por una cadena de Markov de tiempo continuo $\{\alpha_t; t \geq 0\}$ y espacio de estados finito $S = \{1, 2, \dots, N\}$. En general, el cambio de régimen se utilizó para caracterizar el cambio de la condición económica. Por ejemplo, es apropiado para describir las cantidades macroeconómicas, lo cual es apoyado por una literatura sustancial en econometría (por ejemplo, Hamilton D., en [9], quién introdujo por primera vez el modelo con cambio de régimen). Para estudiar más modelos donde se tiene presente el cambio de régimen aplicados en otras áreas de finanzas, recomendamos leer Roger M. y en Robert E., [17]. Los estados de la cadena de Markov representan los posibles estados de la economía concebible. Así, obtenemos el siguiente modelo

$$dX_t = \mu(\alpha_t)dt + \sigma(\alpha_t)dW_t. \quad (1.0.2)$$

Notemos que en (1.0.2) los parámetros μ y σ ahora dependen de α , es decir, cambiarán según el régimen bajo el cual se esté rigiendo la reserva. Indicando así que estos dependerán del estado en el cual se encuentre la economía. Existen varios trabajos que han utilizado el modelo (1.0.2) para representar la reserva como por ejemplo, Jiang y Pistorius, en [12], Jinxia Z., en [26] y también Sotomayor y Cadenillas, en [23]. En estos trabajos, la estrategia de pago de dividendo es considerado un proceso estocástico $\{C_t; t \geq 0\}$ llamada estrategia o política de dividendo, la cual es definida de manera adecuada según el problema y además la dinámica del proceso de reserva $\{X^C_t; t \geq 0\}$ en presencia de pago de dividendos es dada por

$$dX_t^C = \mu(\alpha_t)dt + \sigma(\alpha_t)dW_t - dC_t. \quad (1.0.3)$$

El problema de control estocástico clásico que se define en una compañía de seguros está sujeto a una dinámica adecuada y a una tasa de descuento constante $\delta > 0$; el objetivo es hallar una estrategia de distribución de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos acumulados descontados hasta τ^C (tiempo de ruina bajo la estrategia C). Es decir, bajo la ecuación con cambio de régimen (1.0.3), maximizar el valor de la media

$$V^C(x) = \mathbf{E} \int_0^{\tau^C} e^{-\delta t} dC_t, \quad (1.0.4)$$

sobre el conjunto de estrategias adecuadas, encontrar una estrategia óptima C^* y la correspondiente función de valor

$$V(x) = V^{C^*}(x) = \sup V^C(x).$$

La expresión (1.0.4) es el valor actual (según su propia tasa de descuento) que pagará la gerencia por la inversión de sus accionistas en la compañía.

Sin embargo, las tasas de interés constituyen una parte integral de la economía de mercado, que puede influir desde decisiones que se toman con respecto a grandes inversiones dentro de las compañías, hasta pequeñas decisiones de gasto en los hogares. Las incertidumbres presentes en los mercados financieros pueden cambiar el comportamiento monetario de un inversionista, conduciendo a un resultado totalmente diferente del esperado bajo la suposición de una tasa de interés constante. Intuitivamente, está claro que una tasa de interés estocástica refleja fluctuaciones en el mercado mejor que una determinística y esto ayudaría a tener un modelo más realista que los modelos antes mencionados.

Teniendo en cuenta la importancia de estos factores, en este trabajo de tesis modelaremos la tasa de interés de descuento por un proceso de difusión con cambio de régimen con el propósito que este refleje las fluctuaciones presentes en el mercado, ayudando así a tener un modelo más general y realista. Existen trabajos recientes en los que esta tasa de descuento es representada de una manera estocástica: Eisenberg, en [6], trabajó con el modelo de Vasicek y el modelo de Dothan para representar el factor de descuento pero para la reserva utilizó un proceso de difusión sin cambio de régimen; Zhengjun y Pistorius, en [12], representaron la reserva por la difusión dada en (1.0.2) y la tasa modelada por la cadena de Markov α . Zhu y Chen, en [27], utilizaron el mismo modelo para la tasa de descuento y para la reserva el mismo modelo con parámetros de la difusión más generales.

En este trabajo, representaremos a la tasa de descuento como un proceso con cambio $\{r_t; t \geq 0\}$ dado por

$$dr_t = \mu_t dt + \sum_{i=1}^N \sigma_i \frac{\delta_i^2}{2} dt \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.0.5)$$

Además, $\{B_t; t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar y B, W, α son procesos estocásticos independientes.

Nuestro problema de control estocástico que es objeto de estudio a lo largo de esta tesis es encontrar la estrategia óptima C^* que maximice el valor esperado

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau_C} e^{-rt} dC_t, \quad (1.0.6)$$

bajo el modelo (1.0.3) y (1.0.5).

El principal aporte del presente trabajo de tesis es que el modelo que estudiaremos es una extensión de los modelos considerados en la literatura (por ejemplo, [2], [6], [12] y [23]), y por tanto describe de una mejor manera la evolución de la tasa de descuento.

La estructura del trabajo es la siguiente. El capítulo 2 consiste en la presentación del modelo. En este capítulo se describirán los objetos matemáticos involucrados en el modelo, se presentarán las ecuaciones diferenciales estocásticas que rigen las dinámicas correspondientes y se formulará detalladamente el problema de optimización de pago de dividendos a resolver.

En el capítulo 3, abordaremos el problema de control óptimo bajo estrategias admisibles de la forma $C_t = \int_0^t c_t dt$, donde c_t representa un proceso de tasas de dividendos acotadas. Esto ayudará a entender la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada al problema. Además, encontraremos condiciones suficientes para que una función sea la función de valor y para que una estrategia de pago de dividendos sea óptima (Teorema de verificación). Estas condiciones son tenidas en cuenta para la construcción de un candidato para la función de valor, que se realizará en este capítulo con el fin de encontrar de forma explícita la función de valor y una estrategia de pago óptima. Además, realizamos la demostración de que el candidato obtenido es la función de valor. Este capítulo finaliza con una comparación entre los resultados obtenidos en esta tesis y los obtenidos en el trabajo de Eisenberg, en [6], donde no se tiene presente el cambio de régimen.

En el capítulo 4, consideramos estrategias con tasas de dividendos no acotadas. Las estrategias admisibles en este caso son cadlag, adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, con trayectorias crecientes no negativas. Demostraremos en este contexto una parte del Teorema

de verificación correspondiente. De manera más precisa, probaremos que bajo ciertas condiciones, una cierta función es mayor o igual que la función de valor. Además, construiremos un candidato a ser cota superior para la función de valor y conjeturamos la posible forma de una estrategia óptima basados en varios trabajos que han estudian problemas similiares y los propios resultados obtenidos en esta tesis.

Finalmente, en el apéndice probamos una fórmula de Itô para funciones de clase C^2 por partes.

Capítulo 2

Optimización de dividendos

2.1. Modelo matemático

A lo largo de este trabajo de tesis asumiremos que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad filtrado completo donde $\{\mathcal{F}_t\} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ es una filtración que satisface las condiciones usuales. Asumiremos además que W, B y α son procesos estocásticos independientes tales que:

- $\{W_t; t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.
- $\{B_t; t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.
- $\{\alpha_t; t \geq 0\}$ es una \mathcal{F}_t -cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados finito $S = \{1, 2, \dots, N\}, N \geq 2$, y con una matriz generadora irreducible $Q = [q_{ij}]_{N \times N}$ tal que $q_{ii} = -\lambda_i < 0$ para cada $i \in S$.

Asimismo, para cada $i \in S$,

- $\mu_i = \mu(i)$ y $\sigma_i = \sigma(i)$ son constantes positivas.
- $m_i = m(i)$ y $\delta_i = \delta(i)$ son constantes positivas tales que $m_i > \frac{\delta_i^2}{2}$.

En el presente modelo la reserva de una compañía de seguros $X = \{X_t, t \geq 0\}$ evoluciona, en ausencia de pago de dividendos, regida por el movimiento Browniano W y la cadena de Markov α , de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$dX_t = \mu(\alpha_t)dt + \sigma(\alpha_t)dW_t, \quad X_0 = x \geq 0, \quad \alpha(0) = i, \quad (2.1.1)$$

con un nivel inicial de la reserva x . Este modelo de difusión con cambio de régimen captura ocasionalmente cambios simultáneos y sustanciales de los parámetros. De este modo, nuestro modelo no solo considera las perturbaciones continuas inciertas y mínúsculas sobre la reserva que son generadas por el movimiento Browniano sino también considera los diversos escenarios que se pueden presentar en la compañía. Para ser más precisos con respecto a la importancia de considerar en nuestro modelo una cadena de Markov, entendamos que los estados de dicha cadena representan los diferentes estados de una economía. El cambio de régimen de los estados de la economía puede atribuirse a los cambios estructurales en las condiciones (macro-)económicas, los cambios en los regímenes políticos, el impacto de las noticias (macro-)económicas y los ciclos económicos, etc. Estas condiciones serán modeladas por la cadena de Markov α .

En este modelo, los procesos X y α son completamente observables por la compañía. Es decir, en cada instante la compañía tiene información sobre estos dos, desde el principio hasta el presente. En base a esta información la compañía decide cuál será la estrategia de dividendos adecuada que ha de pagar a los accionistas por invertir su dinero en la compañía.

Una *estrategia* o *política de pago de dividendos* consiste en un proceso estocástico $C = \{C_t; t \geq 0\}$, el cual representa la cantidad acumulada de dividendos que se ha pagado hasta el instante t . Asumiremos que, además de reducir las reservas, el pago de dividendos no tienen efecto en el negocio y que no hay costos de transacción asociados al pago o recibo de dividendos. Siguiendo la estrategia C el proceso de reserva después de pagar los dividendos (excedente) es $X^C = \{X_t - C_t; t \geq 0\}$, el cual sigue la dinámica

$$dX_t^C = \mu(\alpha)dt + \sigma(\alpha)dW_t - dC_t. \quad (2.1.2)$$

Denotaremos por τ^C el *tiempo de ruina* del proceso X^C bajo la estrategia C ,

$$\tau^C := \inf\{t \geq 0; X_t^C \leq 0\}.$$

Dado que tener información sobre el proceso más allá del tiempo de ruina es irrelevante para nuestro modelo, consideramos que luego de este tiempo la reserva en presencia de pago es nula. Es decir, $X_t^C = 0$ para $t \in [\tau^C, \infty)$.

Como medida de riesgo, consideramos el valor de los dividendos descontados esperados bajo una tasa estocástica $r = \{r_t; t \geq 0\}$ la cual evoluciona regida por el movimiento

Browniano B y la cadena de Markov α , de la siguiente manera

$$dr_t = m(\alpha_t)dt + \delta(\alpha_t)dB_t, \quad r_0 = r. \quad (2.1.3)$$

2.2. Formulación del problema

Uno de los problemas clásicos que es objeto de diversas investigaciones es encontrar la distribución óptima de dividendos de una compañía bajo una tasa de interés constante. Este problema consiste en hallar una política de pago de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos acumulados descontados hasta el tiempo de ruina. Es decir, para una tasa constante $\delta > 0$, se desea maximizar la media

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau_c} e^{-\delta t} dC_t.$$

Esta expresión es el valor actual (según su propia tasa de descuento) de lo que los accionistas esperan obtener por su inversión en la compañía.

Si tenemos presente que es poco probable que el crecimiento económico (el cual puede influir en las decisiones de los inversionistas) sea constante en horizontes de largo plazo entonces sería adecuado utilizar una tasa de interés de descuento estocástica que podría reflejar los factores de incertidumbre que hace que el crecimiento no sea constante. Por tanto trabajar con la tasa estocástica (2.1.3) nos ayudaría a capturar esas pequeñas fluctuaciones del mercado. Así, podemos representar una situación más realista en este contexto económico. Es por esto que redefinimos el problema de control bajo una tasa estocástica, que será objeto de estudio en este trabajo de tesis.

Pero antes de plantear el nuevo problema de control denotamos por $\mathbf{P}_{r,x,i}$ a la medida \mathbf{P} condicionada a $\{r_0 = r, X_0 = x, \alpha_0 = i\}$ y por $\mathbf{E}_{r,x,i}$ a la esperanza con respecto $\mathbf{P}_{r,x,i}$. También denotamos por \mathbf{R}_+ el conjunto de números reales no negativos y por \mathbf{R}_{++} el conjunto de números reales positivos. Por último, denotamos $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, \hat{m} y $\hat{\delta}$ como

$$\hat{\mu} = \max_{i \in S} \mu_i, \quad \hat{\sigma} = \max_{i \in S} \sigma_i, \quad \hat{m} = \max_{i \in S} m_i, \quad \hat{\delta} = \max_{i \in S} \delta_i. \quad (2.2.4)$$

Bajo las dinámicas (2.1.2) y (2.1.3) definimos las siguientes funciones:

Función de retorno:

$$V^C(r, x, i) := \mathbf{E}_{r,x,i} \left[\int_0^{\tau^C} e^{-rs} dC_s \right]. \quad (2.2.5)$$

Función de valor:

$$V(r, x, i) := \sup_{C \in \mathcal{C}} V^C(r, x, i) \quad (2.2.6)$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto \mathcal{C} de todos los procesos estocásticos C que son estrategias admisibles según las restricciones del problema.

Observación 2.2.1. *Para nuestro problema de control se entiende que $V(r, 0, i) = 0$, debido a que si la reserva inicial de la compañía es 0, la compañía estaría en quiebra en el instante 0 y no se podría pagar ningún dividendo.*

En este trabajo, nos enfocaremos principalmente en:

- Primero, encontrar la forma explícita de la función de valor.
- Segundo, encontrar una estrategia adecuada que maximice la función de retorno.

Para tal fin consideremos dos situaciones (de acuerdo al conjunto de estrategias admisibles) las cuales serán desarrolladas en los siguientes dos capítulos.

Capítulo 3

Optimización con tasas de dividendos acotadas

En el presente capítulo estudiaremos el problema de optimización de pago de dividendos mencionado en el capítulo anterior considerando como estrategias admisibles a aquellas que posean tasas uniformemente acotadas por una constante previamente establecida.

De manera más precisa, fijamos una constante $\xi > 0$ (la cual permanecerá fija durante este capítulo) y las *estrategias admisibles* serán aquellos procesos estocásticos $C = \{C_t; t \geq 0\}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Existe un proceso estocástico $c = \{c_t; t \geq 0\}$ tal que $C_t = \int_0^t c_s ds$ para todo $t \geq 0$;
2. El proceso c es adaptado a la filtración $\{\mathbf{F}_t\}$;
3. $c_t \in [0, \xi]$ para todo $t \geq 0$;
4. $c(t, \omega) = 0$ para cada $(t, \omega) \in \tau^C, \infty) \times \Omega$;
5. Si $A \subset \mathbf{R}$ es un conjunto Borel medible tal que $m(A) = 0$ (donde m es la medida de Lebesgue) entonces $\mathbf{P}(X^C \in A) = 0$ para todo $t \geq 0$;

Llamaremos *control admisible* a todo aquel proceso c asociado a una estrategia admisible C de acuerdo a la condición 1. Dicho proceso representa la tasa a la cual se pagan los dividendos. Representaremos por \mathbf{C}_ξ el conjunto de todos los controles admisibles.

Observaciones 3.0.1. 1. En términos económicos, la condición 3 significa que la compañía no paga dividendos después de la ruina.

2. La condición 5 nos indica que, para todo $t \geq 0$, la medida μ_t sobre $(\mathbf{R}, \mathbf{B}(\mathbf{R}))$ definida por $\mu_t(A) = \mathbf{P}(X^C \in A)$, es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Esta condición nos será útil más adelante para adaptar la fórmula de Itô para una clase especial de funciones.

De este modo, al utilizar una estrategia admisible C asociada a un control admisible c , la reserva después de pagar los dividendos es

$$X_t^C = x + \int_0^t (\mu_{a_s} - c_s) ds + \int_0^t \sigma_{a_s} dW_s, \quad \text{para cada } t \in [0, \tau^C]. \quad (3.0.1)$$

En este contexto, nuestro problema consiste en encontrar:

1. La función de valor

$$V(r, x, i) := \sup_{c \in C_\xi} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\tau^C} e^{-rs} c_s ds, \quad (3.0.2)$$

2. Un control admisible c^* tal que

$$V(r, x, i) = V^{C^*}(r, x, i). \quad (3.0.3)$$

Sea

$$\theta = \min_{i \in \mathbf{S}} m_i \frac{\delta}{i} > \frac{2}{i}$$

El siguiente resultado garantiza que la función de valor es finita y uniformemente acotada con respecto a $(x, i) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}$, lo cual será de mucha utilidad en la demostración del Teorema de verificación que veremos en la siguiente sección.

Teorema 3.0.2. Sea $r \in \mathbf{R}$. Si C es una estrategia admisible, entonces

$$V^C(r, x, i) \leq \frac{\zeta e^{-r}}{\theta} \quad \text{para cada } (x, i) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}.$$

Demostración.

Sea c el control admisible asociado a la estrategia admisible C ,

$$\begin{aligned} V^C(r, x, i) &= \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\tau^C} e^{-rt} c_t dt \\ &\leq \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\tau^C} e^{-rt} \zeta dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-rt} \zeta dt \\ &= \zeta e^{-r} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-t \delta_a dB_s - \frac{1}{2} t \delta^2 ds} e^{-\theta t} dt \\ &\leq \zeta e^{-r} \int_0^{\infty} \mathbf{E} M_t e^{-\theta t} dt, \end{aligned} \tag{3.0.4}$$

donde

$$M_t = e^{-\int_0^t \delta_a dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \delta^2 ds}.$$

Como M_t es una martingala con valor esperado $\mathbf{E}_{r,x,i} [M_t] = 1$ (ver 4.4.56), podemos concluir que

$$V^C(r, x, i) \leq \zeta e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-\theta t} dt = \frac{\zeta e^{-r}}{\theta}.$$

□

3.1. Teorema de verificación

El principal propósito de esta sección es encontrar condiciones suficientes que nos permitan garantizar primero que una cierta función es en efecto la función de valor (Teorema de verificación) y segundo que una cierta estrategia de pago de dividendos es óptima.

El siguiente resultado auxiliar será de mucha utilidad en la prueba de los resultados antes mencionados.

Proposición 3.1.1. Sean C una estrategia admisible y τ el tiempo de ruina del proceso de reserva X^C . Suponga que τ_k es una sucesión de tiempos de parada tal que $\tau_k \uparrow \tau$ c.s. y que $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}_+$ es una función acotada tal que, para cada $i \in \mathbf{S}$,

(i) $F(0, i) = 0$;

(ii) La función $F(\cdot, i)$ es continua.

Entonces, para todo $t \geq 0$, \sum_{-r}^C $\sum_{-r_{\tau \wedge t}}^C$ $\sum_{\tau \wedge t, \alpha_{\tau \wedge t}}$ $\mathbf{E}_{r,x,i} e^{-r_{\tau_k \wedge t}} F(X_{\tau_k \wedge t}^C, \alpha_{\tau_k \wedge t}) \rightarrow \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-r_{\tau \wedge t}} F(X_{\tau \wedge t}^C, \alpha_{\tau \wedge t})$ cuando $k \rightarrow \infty$. (3.1.5)

Demostración.

Fijemos $t \geq 0$. Primero veamos que

$$e^{-r_{\tau_k \wedge t}} F(X_{\tau_k \wedge t}^C, \alpha_{\tau_k \wedge t}) \xrightarrow{c.s.} e^{-r_{\tau \wedge t}} F(X_{\tau \wedge t}^C, \alpha_{\tau \wedge t}) \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad (3.1.6)$$

Para tal fin, fijemos $\omega \in \Omega$ y consideremos las dos posibles situaciones:

- **Cuando** $\tau(\omega) > t$. Entonces $\tau(\omega) \wedge t = t$ y, ya que $\tau_k \uparrow \tau$,

$$\tau_k(\omega) \wedge t = t, \quad \text{a partir de un cierto } k = k(\omega).$$

Obtenemos así (3.1.6).

- **Cuando** $\tau(\omega) \leq t$. Entonces $\tau(\omega) \wedge t = \tau(\omega)$ y

$$\tau_k(\omega) \wedge t = \tau_k(\omega), \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Como $\tau(\omega) < \infty$ y τ es el tiempo de ruina del proceso continuo X^C entonces, para cada $i \in S$,

$$F_{\tau \wedge t}^C(\omega), i = F_{\tau}^C(\omega), i = F(0, i) = 0.$$

Recordemos que el proceso $r_s, s \geq 0$, tiene trayectorias continuas y que, para cada $i \in S$, la función $F(\cdot, i)$ es continua. Entonces, para cada $i \in S$,

$$e^{-r_{\tau_k \wedge t}(\omega)} F_{\tau_k \wedge t}^C(\omega), i \xrightarrow{c.s.} e^{-r_{\tau \wedge t}(\omega)} F_{\tau \wedge t}^C(\omega), i = 0.$$

Por tanto,

$$e^{-r_{\tau_k \wedge t}(\omega)} F_{\tau_k \wedge t}^C(\omega), \alpha_{\tau_k \wedge t}(\omega) \rightarrow 0 = e^{-r_{\tau \wedge t}(\omega)} F_{\tau \wedge t}^C(\omega), \alpha_{\tau \wedge t}(\omega).$$

Así podemos concluir que se cumple la convergencia (3.1.6).

Por tanto, a fin de demostrar (3.1.5), basta probar que, para cada $t \geq 0$, la sucesión de variables aleatorias $Y_k = e^{-r\tau_k \wedge t} F(X_{\tau_k \wedge t}^C, \alpha_{\tau_k \wedge t})$ es uniformemente integrable. Fijemos $p > 1$ y sea K una cota superior de F . Entonces,

$$\mathbf{E}_{r,x,i}[|Y_k|^p] = \mathbf{E}_{r,x,i} \left[e^{-pr\tau_k \wedge t} F(X_{\tau_k \wedge t}^C, \alpha_{\tau_k \wedge t})^p \right] \leq K^p \mathbf{E}_{r,x,i} \left[e^{-pr\tau_k \wedge t} \right],$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i}[|Y_k|^p] &\leq K^p e^{-pr} \mathbf{E}_{r,x,i} \left[M_{\tau_k \wedge t} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_k \wedge t} p^2 \delta_{as}^2 ds - p \int_0^{\tau_k \wedge t} m_{as} ds \right] \\ &\leq K^p e^{-pr} \mathbf{E}_{r,x,i} \left[M_{\tau_k \wedge t} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_k \wedge t} p^2 \delta_{as}^2 ds \right] \\ &\leq K^p e^{-pr + \frac{1}{2} p^2 t \hat{\delta}^2} \mathbf{E}_{r,x,i} [M_{\tau_k \wedge t}]. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

donde $M_u = e^{-\int_0^u p \delta_{as} ds - \frac{1}{2} \int_0^u p^2 \delta_{as}^2 ds}$, $u \geq 0$. Como M_u , $u \geq 0$, es una martingala continua y, para cada $k \geq 1$, $\tau_k \wedge t$ es un tiempo de parada acotado, por el Teorema de muestreo opcional,

$$\mathbf{E}_{r,x,i} [M_{t \wedge \tau_k}] = \mathbf{E}_{r,x,i} [M_0] = 1.$$

Así,

$$\sup_k \mathbf{E}_{r,x,i} [|Y_k|^p] < +\infty, \tag{3.1.8}$$

lo cual implica que la sucesión Y_k es uniformemente integrable y se cumple (3.1.5). \square

El Teorema de verificación que presentaremos hace uso de una clase especial de funciones, la cual definimos a continuación. Diremos que una función $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ es de clase C^2 por tramos si, para cada $i \in \mathbf{S}$, existe un conjunto de números reales positivos $N_i = \{b_1^i, b_2^i, \dots, b_{n_i}^i\}$, con $b_1^i < b_2^i < \dots < b_{n_i}^i$, de modo que:

1. La función $F(\cdot, i)$ es de clase C^1 en \mathbf{R}_+ ;
2. La derivada $F^{(j)}(\cdot, i)$ existe y es continua en $\mathbf{R}_+ \setminus N_i$;
3. Los límites

$$F^{(j)}(b_{\pm}^i, i) := \lim_{x \rightarrow b^i \pm} F^{(j)}(x, i)$$

existen y son finitos.

Si $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^2 por tramos, $i \in \mathbf{S}$, $x \in \mathbf{R}_+ \setminus N_i$ y $f(r, x, i) = e^{-rF}(x, i)$, definimos

$$\mathbb{L}_c f(r, x, i) := m_i f_r(r, x, i) + (\mu_i - c) f_x(r, x, i) + \frac{1}{2} \sigma_i^2 f_{xx}(r, x, i) \quad (3.1.9)$$

$$+ \frac{1}{2} \delta_i^2 f_{rr}(r, x, i) + Qf(r, x, \cdot)(i),$$

donde $Qf(r, x, \cdot)(i) = \sum_{j \in \mathbf{S}} q_{ij} f(r, x, j)$.

Teorema 3.1.2. Sea $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}_+$ una función de clase C^2 por tramos tal que, para cada $i \in \mathbf{S}$, se cumple que:

(i) $F(0, i) = 0$;

(ii) Las funciones $F(\cdot, i)$ y $F_x(\cdot, i)$ son acotadas en \mathbf{R}_+ .

Sea $f(r, x, i) = e^{-rF}(x, i)$. Suponga que para cada $i \in \mathbf{S}$, cada $r \in \mathbf{R}$ y cada $x \in \mathbf{R}_+ \setminus N_i$, se cumple que:

$$\sup_{0 \leq c \leq \xi} \mathbb{L}_c f(r, x, i) + e^{-rc} = 0. \quad (3.1.10)$$

Entonces:

a) $f(r, x, i) \geq V(r, x, i)$ para todo $(r, x, i) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}$.

b) Si el control admisible c^* satisface que

$$c_t^* = \begin{cases} \arg \sup_{0 \leq c \leq \xi} \mathbb{L}_c f(r_t, X_t^C, \alpha_t) + e^{-r_t c} \mathbf{1}_{\{X_t^C \in N_{\alpha_t}\}}, & \text{si } t \in \sum_{i \in \mathbf{S}} [0, \tau^C], \\ 0, & \text{si } t \in \tau^C, \infty, \end{cases} \quad (3.1.11)$$

donde C^* es la estrategia admisible asociada a c^* , entonces $f \equiv V^{C^*} \equiv V$.

Demostración.

Sean C una estrategia admisible arbitraria, $X = X^C$ el proceso de reserva bajo la estrategia C , y $\tau = \tau^C$ su tiempo de ruina. Aplicando la fórmula de Itô (ver 4.4.7) al proceso con cambio de régimen $f(r_t, X_t, \alpha_t) = \{e^{-r_t F}(X_t, \alpha_t); t \geq 0\}$, obtenemos

$$f(r_t, X_t, \alpha_t) = f(r, x, i) + \int_0^t \mathbb{L}_c f(r_s, X_s, \alpha_s) \mathbf{1}_{\{X_s \in N_{\alpha_s}\}} ds + \int_0^t \sigma_{\alpha_s} f_x(r_s, X_s, \alpha_s) dW_s + \int_0^t \delta_{\alpha_s} f_r(r_s, X_s, \alpha_s) dB_s + M_t, \quad (3.1.12)$$

donde el proceso $\{M_t^f; t \geq 0\}$, es una martingala local con $M_0^f = 0$, **P**-c.s (ver 4.4.7).

Para cada entero $k \geq 1$, sea

$$D_k = (-k, k) \times (0, k).$$

Observemos que D_k es una sucesión creciente de abiertos acotados, y que $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Para cada entero $k \geq 1$, sea τ_k el primer tiempo de salida del proceso (r, X) del conjunto D_k

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0; (r_t, X_t) \notin D_k\}.$$

Fijemos $t \geq 0$. Para cada $k \geq 1$, sea $a_k = t \wedge \tau_k$. Entonces, de (3.1.12),

$$\begin{aligned} f(r_{a_k}, X_{a_k}, \alpha_{a_k}) &= f(r, x, i) + \int_0^{a_k} \mathbf{L}_c f(r_s, X_s, \alpha_s) \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{a_s}\}} ds + M_{a_k}^f \\ &+ \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_s} e^{-rs} F_x(X_s, \alpha_s) dW_s \\ &- \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_s} e^{-rs} F(X_s, \alpha_s) dB_s, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Por la ecuación (3.1.10), tenemos

$$\mathbf{L}_c f(r, x, i) \mathbf{1}_{\{x \in N_{a_s}\}} \leq -c e^{-r} \mathbf{1}_{\{x \in N_{a_s}\}}.$$

Entonces

$$\int_0^{a_k} \mathbf{L}_c f(r_s, X_s, \alpha_s) \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{a_s}\}} ds \leq - \int_0^{a_k} c s e^{-rs} \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{a_s}\}} ds. \quad (3.1.14)$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_0^{a_k} c e^{-rs} ds = \int_0^{a_k} c e^{-rs} \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{a_s}\}} ds + \int_0^{a_k} c e^{-rs} \mathbf{1}_{\{s; X_s \notin N_{a_s}\}} ds,$$

donde $m(N_i) = 0$, por tanto, a partir de la proposición 4.4.3, se cumple

$$m(\{s \in [0, \tau_k \wedge t]; X_s \in N_{a_s}\}) = 0, \quad \mathbf{P} - \text{c.s.}$$

Por tanto debido a las propiedades de Lebesgue integral, para cada t y k fijos, la integral

$$\int_0^{a_k} c_s e^{-rs} ds = \int_{[0, \tau_k \wedge t] \cap \{s; X_s \in N_{a_s}\}} c_s e^{-rs} ds,$$

es cero **P**-c.s. Por tanto, para un t y k fijos

$$\int_0^{a_k} c_s e^{-rs} ds = \int_0^{a_k} c_s e^{-rs} \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{\alpha_s}\}} ds, \quad \mathbf{P} - \text{c.s.}$$

A partir de esta última igualdad y de (3.1.14) se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) \leq & e^{-r} F(x, i) - \int_0^{a_k} c_s e^{-rs} ds + M_{a_k}^f + \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_s} e^{-rs} F_x(X_s, \alpha_s) dW_s \\ & - \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_s} e^{-rs} F(X_s, \alpha_s) dB_s, \quad \mathbf{P} - \text{c.s.} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Afirmamos que las dos últimas integrales estocásticas son martingalas con esperanza cero. En efecto, ya que para todo $i \in \mathbf{S}$, $F(\cdot, i)$ y $F_x(\cdot, i)$, son acotadas, entonces existen dos números reales positivos K_1 y K_2 tales que

$$\begin{aligned} |F(x, i)| & \leq K_1, \\ |F_x(x, i)| & \leq K_2, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbf{R}_+$. Además, σ_i y δ_i toma un conjunto finito de valores y $\{e^{-rs}; s \geq 0\}$ es un proceso continuo cumpliendo (ver prueba de 3.1.5)

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum e^{-2rs} ds \leq e^{-2r+2s\hat{\sigma}^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{\alpha} \delta^2 e^{-2rs} F^2(X_s, \alpha) ds & \leq K_1^2 \hat{\sigma}^2 \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} \sum e^{-2rs} ds < \infty, \\ \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{\alpha_s} \sigma^2 e^{-2rs} F^2(X_s, \alpha) ds & \leq K_2^2 \hat{\sigma}^2 \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} \sum e^{-2rs} ds < \infty. \end{aligned}$$

Así, estas dos últimas integrales estocásticas son martingalas (ver [15]). Tomando esperanza condicional con respecto a $r_0 = r$, $X_0 = x$, y $\alpha_0 = i$, a ambos lados de la desigualdad anterior tenemos

$$\mathbf{E}_{r,x,i} e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) \leq e^{-r} F(x, i) - \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} e^{-rs} c_s ds + \mathbf{E}_{r,x,i} M_{a_k}^f. \quad (3.1.16)$$

Para cada $i \in \mathbf{S}$, $f(\cdot, \cdot, i)$ es acotada en $[-k, k] \times [0, k]$, ya que $f(\cdot, \cdot, i)$ es continuo. Así, $f(r_s, X_s, \alpha_s)$ es acotado para cada $s \in [0, t \wedge \tau_k]$. Entonces, $\{M_t^f; t \geq 0\}$ es

una martingala cuadrado integrable con $\mathbf{E}_{r,x,i} M_{t \wedge \tau_k}^f = 0$. Por tanto, la desigualdad (3.1.16) se convierte en

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau_k} e^{-r t \wedge \tau_k} F(X_{t \wedge \tau_k}, \alpha_{t \wedge \tau_k}) \leq e^{-r} F(x, i) - \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} c_s ds. \quad (3.1.17)$$

Tengamos presente que

$$\int_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} c_s ds \uparrow \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds, \quad \text{c.s cuando } k \rightarrow \infty.$$

Entonces por el Teorema de convergencia monótona, se tiene que

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} c_s ds \rightarrow \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Recuerde además que

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds < \infty.$$

Por tanto, cuando $k \rightarrow \infty$ en (3.1.17) obtenemos que

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}) \leq e^{-r} F(x, i) - \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds, \quad (3.1.18)$$

esto debido al uso de la Proposición 3.1.1. Por último analizamos el valor esperado del lado izquierdo de (3.1.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}) &= \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t} F(X_t, \alpha_t) 1_{\tau > t} + \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t} F(X_t, \alpha_t) 1_{\tau \leq t} \\ &= \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t} F(X_t, \alpha_t) 1_{\tau > t} \quad \{ \leq \} \end{aligned}$$

porque si $\tau < \infty$, entonces $F(X_\tau, \alpha_\tau) = F(0, \alpha_\tau) = 0$. Recuerde que, para $i \in S$, $F(\cdot, i)$, es acotado, por tanto se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}) &= \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t} F(X_t, \alpha_t) 1_{\tau > t} \\ &\leq K_1 \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-r t} e^{-\int_0^t m_{as} ds - \int_0^t \delta_{as} dB_s} \\ &\leq e^{-r-\theta t} K_1 \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-\int_0^t \delta_{as} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \delta_{as}^2 ds} \\ &= e^{-r-\theta t} K_1 \mathbf{E}_{r,x,i} [\varepsilon(M)_t] \\ &= e^{-r-\theta t} K_1, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

como $\theta > 0$, podemos afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\Sigma} e^{-rt \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}) = 0.$$

Observemos que para $\tau = \infty$, la desigualdad (3.1.19) se sigue manteniendo. Como

$$\int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds \uparrow \int_0^{\tau} e^{-rs} c_s ds, \quad \text{c.s. cuando } t \rightarrow \infty,$$

y que

$$0 \leq \int_0^{\tau} e^{-rs} c_s ds, \quad \forall k \geq 1.$$

Entonces por el Teorema de convergencia monótona, se tiene que

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} c_s ds \rightarrow \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\tau} e^{-rs} c_s ds \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por último, cuando $t \rightarrow \infty$ en (3.1.18)

$$e^{-r} F(x, i) \geq V^C(r, x, i), \quad \text{para un } C = \{c_t\} \text{ arbitrario.}$$

En particular, la desigualdad (3.1.16) se convierte en una igualdad bajo la estrategia $c = \{c_t^*\}$. En efecto, por la ecuación (3.1.10)

$$\mathbf{L}_{c^*} f(r, x, i) \mathbf{1}_{\{x \in N_i\}} + e^{-r} c^* \mathbf{1}_{\{x \in N_i\}} = 0, \quad (3.1.20)$$

donde $y_t = (r_t, X_t, \alpha_t)$. Substituyendo c_t^* por c_t en (3.1.12), vemos que la desigualdad (3.1.15) se convierte en igualdad, demostrando así la afirmación. A partir de lo demostrado se puede concluir

$$V(r, x, i) \geq V^{C^*}(r, x, i) = F(x, i) e^{-r} \geq \sup_{c \in C_{\xi}} V^C(r, x, i) = V(r, x, i).$$

□

3.2. Construcción de una solución

En la presente sección, intentaremos encontrar una solución F de clase C^2 por tramos para la ecuación (3.1.10) que además para cada $i \in S$, satisfaga las siguientes condiciones

1. $F(0, i) = 0$.
2. La función $F(\cdot, i)$ es creciente.
3. La función $F(\cdot, i)$ es acotada.
4. La función $F_x(\cdot, i)$ es decreciente.
5. La función $F_x(\cdot, i)$ es acotada tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x, i) = 0$.

Las condiciones 2 y 4 son condiciones comunes en este tipo de funciones de valor. Las demás condiciones están asociadas a las hipótesis del Teorema 3.1.2. La construcción que hacemos está basada en el trabajo realizado por Sotomayor y Cadenillas en [23].

Como $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$, entonces la ecuación (3.1.10) es equivalente a

$$\mu_i F_x(x, i) + \frac{\sigma_i^2}{2} F_{xx}(x, i) - m_i - \frac{\delta_i}{2} F(x, i) + \sup_{0 \leq c \leq \xi} c(1 - F_x(x, i)) = - \sum_{j \geq 1} q_{ij} F(x, j). \quad (3.2.21)$$

observamos que para $t \in [0, \tau^C)$, la expresión que es maximizada es una función lineal de c para cada x e i . El óptimo c^* en cada punto x e i es alcanzando según

$$c^*(x, i) = \arg \sup_{0 \leq c \leq \xi} c(1 - F_x(x, i)) = \begin{cases} 0, & \text{si } F_x(x, i) > 1, \\ \in [0, \xi], & \text{si } F_x(x, i) = 1, \\ \xi, & \text{si } F_x(x, i) < 1, \end{cases}$$

observamos que nuestro control dependerá de los valores de x e i excepto en el caso cuando $F_x(x, i) = 1$ que puede tomar cualquier valor. Por tanto, el candidato para control óptimo $c^* = \{c_t^*\}$ tiene la forma $c_t^* = \phi(X_t^C, \alpha_t)$ para $t \in [0, \tau^*)$, donde $\phi(\cdot, i)$, $i \in S$, es una función medible definida por $\phi(x, i) = 0$, si $F_x(x, i) > 1$, y $\phi(x, i) = \xi$, si $F_x(x, i) \leq 1$. Bajo la suposición 4 dada al inicio de la presente sección, tenemos que para todo $i \in S$, $F(\cdot, i)$ es cóncava y entonces podemos resolver la ecuación (3.2.21) sobre dos conjunto. Sobre el conjuntos de puntos que satisfacen $F_x(x, i) > 1$, la ecuación

(3.2.21) tiene la siguiente forma

$$\frac{\sigma_i^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu_i F_x(x, i) - \left(m_i - \frac{\sum_{j=1}^2 \delta_j}{2} \right) F(x, i) = - \sum_{j \geq 1} q_{ij} F(x, j), \quad (3.2.22)$$

y sobre el conjunto de puntos que satisfacen $F_x(x, i) \leq 1$, la ecuación tiene la forma

$$\frac{\sigma_i^2}{2} F_{xx}(x, i) + (\mu_i - \zeta) F_x(x, i) - \left(m_i - \frac{\sum_{j=1}^2 \delta_j}{2} \right) F(x, i) + \zeta = - \sum_{j \geq 1} q_{ij} F(x, j). \quad (3.2.23)$$

Por simplicidad, asumiremos en el resto de esta sección que la economía cambia sólo entre dos regímenes; es decir, $i \in \{1, 2\}$. Entonces, consideramos los tres únicos posibles casos:

1. $F_x(0, i) > 1$ para $i \in \{1, 2\}$.
2. $F_x(0, i_0) \leq 1$ y $F_x(0, 3 - i_0) > 1$ para algún $i_0 \in \{1, 2\}$.
3. $F_x(0, i) \leq 1$ para $i \in \{1, 2\}$.

El siguiente lema, nos garantiza que las soluciones de la ecuación característica asociada al sistema de ecuaciones diferenciales (3.2.22) y (3.2.23) son reales y diferentes.

Lema 3.2.1. *Para $i \in S$, considere la función real $\varphi_i(z) = -\beta_i z^2 - \mu_i z + \lambda_i + r_i$. Dado que $r_1, r_2, \beta_1, \beta_2, \lambda_1$ y λ_2 son positivas, la ecuación $\varphi_1(z)\varphi_2(z) = \lambda_1\lambda_2$ tiene cuatro raíces reales tales que $z_1 < z_2 < 0 < z_3 < z_4$*

Demostración.

Definamos la función g como

$$g(\alpha) = -\beta \alpha^2 - \mu \alpha + \lambda + r - \lambda_1 \lambda_2 \left(-\beta_2 \alpha^2 - \mu_2 \alpha + \lambda_2 + r_2 \right)^{-1}$$

Sean θ_1 y θ_2 las raíces de la siguiente ecuación cuadrática

$$-\beta_1 x^2 - \mu_1 x + r_1 = 0,$$

Es fácil comprobar que estas dos raíces son reales y diferentes. Claramente, la función g es continua y satisface

- $g(0) > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.
- $g(\theta_i) = -\lambda_1 \lambda_2 < 0$ para $i = 1, 2$.

Como, $g(\theta_1) = g(\theta_2) = -\lambda_1 \lambda_2$ y también $g(0) = (\lambda_1 + r_1)(\lambda_2 + r_2) - \lambda_1 \lambda_2$. Entonces, a partir del Teorema de valor intermedio, se tiene que en cada intervalo $(-\infty, \theta_1)$, $(\theta_1, 0)$, $(0, \theta_2)$, y (θ_2, ∞) tenemos una raíz, demostrando así el lema. \square

Definiremos

$$r_i := \frac{\delta^2}{2}.$$

Caso 1: $F_x(0, i) > 1$ para $i = 1, 2$

De acuerdo a la suposición 4 dada al inicio de la presente sección, la función es cóncava entonces existe una barrera $b_i > 0$ tal que $b_i = \inf\{x \geq 0 : F_x(x, i) = 1\}$. Por tanto, tenemos que $F_x(x, i) > 1$ o $F_x(x, i) \leq 1$ según $x < b_i$ o $x \geq b_i$. En vista de esto, para $x \in (0, b_i)$,

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu F_x(x, i) - r F(x, i) = \lambda F(x, i) - \lambda F(x, 3-i) \quad (3.2.24)$$

y para $x \in [b_i, \infty)$ tenemos

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + (\mu - \xi) F_x(x, i) - r F(x, i) + \xi = \lambda F(x, i) - \lambda F(x, 3-i). \quad (3.2.25)$$

La relación entre b_1 y b_2 dependerá de las relaciones entre los parámetros que están presentes en nuestro modelo. Consideraremos el caso $b_1 < b_2$. El otro caso tiene un tratamiento similar. Así, tenemos que considerar tres posibilidades: $x \in (0, b_1)$, $x \in [b_1, b_2)$ y $x \in [b_2, \infty)$.

1. **Cuando** $x \in (0, b_1)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2}{2} F_{xx}(x, 1) + \mu F_x(x, 1) - r F(x, 1) &= \lambda F(x, 1) - \lambda F(x, 2), \\ \frac{\sigma_2^2}{2} F_{xx}(x, 2) + \mu F_x(x, 2) - r F(x, 2) &= \lambda F(x, 2) - \lambda F(x, 1). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

La ecuación característica asociada al sistema (3.2.26) es

$$\varphi_1^1(z) \varphi_2^1(z) = \lambda_1 \lambda_2,$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_1^1(z) &:= -\frac{\sigma_1^2}{2}z^2 - \mu_1 z + \lambda_1 + r_1, \\ \varphi_2^1(z) &:= -\frac{\sigma_2^2}{2}z^2 - \mu_2 z + \lambda_2 + r_2.\end{aligned}\tag{3.2.27}$$

Por el Lema 3.2.1, dicha ecuación característica tiene cuatro raíces reales y diferentes $\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. Entonces, la solución para el sistema (3.2.26) (ver [25]) es de la forma

$$\begin{aligned}F(x, 1) &= \sum_{j=1}^4 A_j^1 e^{\alpha_j x} \\ F(x, 2) &= \sum_{j=1}^4 \lambda_1^{-1} \varphi_1^1(\alpha_j) A_j^1 e^{\alpha_j x}\end{aligned}\tag{3.2.28}$$

donde A_j^1 son constantes.

2. Cuando $x \in [b_1, b_2)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}-\frac{\sigma_1^2}{2}F(x, 1) + (\mu_1 - \zeta)F(x, 1) - rF(x, 1) + \zeta = \lambda F(x, 1) - \lambda_1 F(x, 2), \\ \frac{\sigma_2^2}{2}F(x, 2) + \mu F(x, 2) - rF(x, 2) = \lambda F(x, 2) - \lambda_2 F(x, 1),\end{aligned}\tag{3.2.29}$$

la ecuación característica asociada al sistema (3.2.29) es

$$\varphi_1^2(z)\varphi_2^2(z) = \lambda_1\lambda_2,$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_1^2(z) &:= -\frac{\sigma_1^2}{2}z^2 - (\mu_1 - \zeta)z + \lambda_1 + r_1, \\ \varphi_2^2(z) &:= -\frac{\sigma_2^2}{2}z^2 - \mu_2 z + \lambda_2 + r_2.\end{aligned}\tag{3.2.30}$$

Por el Lema 3.2.1, dicha ecuación característica tiene cuatro raíces reales y diferentes $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2 < 0 < \tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$. La solución para el sistema (3.2.29) es de la

forma

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \sum_{j=1}^4 A_j^2 e^{\tilde{\alpha}_j x} + \hat{a}^1 \\ F(x, 2) &= \sum_{j=1}^4 \lambda_1^{-1} \varphi_1^2(\tilde{\alpha}_j) A_j^2 e^{\tilde{\alpha}_j x} + \tilde{a}^1 \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

donde

$$\hat{a}^1 = \frac{(\lambda_2 + r_2)\xi}{(r_1 + \lambda_1)(r_2 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2}, \quad \tilde{a}^1 = \frac{\lambda_2\xi}{(r_1 + \lambda_1)(r_2 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2},$$

y A_j^2 son constantes.

3. Cuando $x \in [b_2, \infty)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2}{2} F(x, 1) + (\mu_1 - \xi) F(x, 1) - r F(x, 1) + \xi &= \lambda F(x, 1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} F(x, 2), \\ \frac{\sigma_2^2}{2} F(x, 2) + (\mu_2 - \xi) F(x, 2) - r F(x, 2) + \xi &= \lambda F(x, 2) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} F(x, 1), \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

la ecuación característica asociada al sistema (3.2.32) es

$$\varphi_1^3(z) \varphi_2^3(z) = \lambda_1 \lambda_2$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1^3(z) &:= -\frac{\sigma_1^2}{2} z^2 - (\mu_1 - \xi)z + \lambda_1 + r_1, \\ \varphi_2^3(z) &:= -\frac{\sigma_2^2}{2} z^2 - (\mu_2 - \xi)z + \lambda_2 + r_2, \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Por el Lema 3.2.1 dicha ecuación característica tiene cuatro raíces reales y diferentes $\gamma_1 < \gamma_2 < 0 < \gamma_3 < \gamma_4$. Entonces, la solución para el sistema (3.2.32) es de la forma

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \sum_{j=1}^4 A_j^3 e^{\gamma_j x} + \hat{a}^2 \\ F(x, 2) &= \sum_{j=1}^4 \lambda_1^{-1} \varphi_1^3(\gamma_j) A_j^3 e^{\gamma_j x} + \tilde{a}^2 \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

donde

$$\hat{a}^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1}, \quad \tilde{a}^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_1)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1}$$

y A_j^3 son constantes. Por la suposición 3 y 4 dadas al inicio de la presente sección, es necesario que $A_3^3 = A_4^3 = 0$. Por tanto la solución (3.2.34) es reducida a

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= A_1^3 e^{\gamma_1 x} + A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \hat{a}^2, \\ F(x, 2) &= \lambda^{-1} \varphi^3(\gamma_1) A_1^3 e^{\gamma_1 x} + \varphi^3(\gamma_2) A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \tilde{a}^2. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Para encontrar los límites b_1 y b_2 , y los coeficientes en las soluciones, suponemos que la condición de suavidad se mantiene. También queremos que $F_x(b_i, i) = 1$ para cada $i = 1, 2$. Así, necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(0, 1) &= 0, & F(0, 2) &= 0, \\ F(b_{1-}, 1) &= F(b_{1+}, 1), & F(b_{2-}, 2) &= F(b_{2+}, 2), \\ F(b_{2-}, 1) &= F(b_{2+}, 1), & F(b_{1-}, 2) &= F(b_{1+}, 2), \\ F_x(b_{1-}, 1) &= F_x(b_{1+}, 1) = 1, & F_x(b_{2-}, 2) &= F_x(b_{2+}, 2) = 1, \\ F_x(b_{2-}, 1) &= F_x(b_{2+}, 1), & F_x(b_{1-}, 2) &= F_x(b_{1+}, 2). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Observamos que este sistema tiene doce ecuaciones y doce incógnitas. Una solución del sistema (3.2.36) nos dará los valores de b_1 y b_2 , y de $A_j^1, A_j^2, j = 1, 2, 3, 4$, y de $A_j^3, j = 1, 2$. Recordemos que hemos supuesto que $F_x(0, i) > 1$ para ambos $i = 1, 2$. Esto ocurre si los coeficientes encontrados a través del sistema (3.2.36) satisfacen

$$\begin{aligned} A_1^1 \alpha_1 + A_2^1 \alpha_2 + A_3^1 \alpha_3 + A_4^1 \alpha_4 &> 1, \\ A_1^1 \varphi^1(\alpha_1) \alpha_1 + A_2^1 \varphi^1(\alpha_2) \alpha_2 + A_3^1 \varphi^1(\alpha_3) \alpha_3 + A_4^1 \varphi^1(\alpha_4) \alpha_4 &> \lambda_1, \\ b_2 &> b_1 > 0. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Caso 2: Existe $i_0 \in \{1, 2\}$ tal que $F_x(0, i_0) \leq 1$ y $F_x(0, 3 - i_0) > 1$

Bajo la suposición 4 dada al inicio de la presente sección, se tiene que $F_x(x, i_0) \leq F_x(0, i_0) \leq 1$ para cada $0 < x$. Entonces, para i_0 tenemos

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i_0) + (\mu_{i_0} - \xi) F_x(x, i_0) - r_{i_0} F(x, i_0) + \xi = \lambda_{i_0} F(x, i_0) - \lambda_{i_0} F(x, \hat{i})$$

donde $\hat{i} = 3 - i_0$ para cada $x \geq 0$. Además, puesto que $F_x(0, \hat{i}) > 1$, un análisis similar al primer caso implica que existe una barrera $b_i > 0$ (definida como en el anterior caso)

tal que $F_x(b_i, \hat{i}) = 1$. Así, para cada $x \in (0, b_i)$

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, \hat{i}) + \mu F_x(x, \hat{i}) - (r_i + \lambda_i) F(x, \hat{i}) = -\lambda_i F(x, i_0),$$

y cuando $x \in [b_i, \infty)$

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, \hat{i}) + (\mu_i - \zeta) F_x(x, \hat{i}) - (r_i + \lambda_i) F(x, \hat{i}) + \zeta = -\lambda_i F(x, i_0),$$

Por tanto, tenemos los siguientes casos

1. **Cuando** $x \in (0, b_i)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i_0}^2}{2} F_{xx}(x, i_0) + (\mu_{i_0} - \zeta) F_x(x, i_0) - (r_{i_0} + \lambda_{i_0}) F(x, i_0) + \zeta &= -\lambda_{i_0} F(x, \hat{i}), \\ \frac{\sigma_i^2}{2} F_{xx}(x, \hat{i}) + \mu_i F_x(x, \hat{i}) - (r_i + \lambda_i) F(x, \hat{i}) &= -\lambda_i F(x, i_0). \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

La ecuación característica asociado al sistema (3.2.38) es

$$\varphi_{i_0}^4(z) \varphi_{\hat{i}}^4(z) = \lambda_{i_0} \lambda_{\hat{i}},$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_{i_0}^4(z) &:= -\frac{\sigma_{i_0}^2}{2} z^2 - (\mu_{i_0} - \zeta) z + \lambda_{i_0} + r_{i_0}, \\ \varphi_{\hat{i}}^4(z) &:= -\frac{\sigma_{\hat{i}}^2}{2} z^2 - \mu_{\hat{i}} z + \lambda_{\hat{i}} + r_{\hat{i}} \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Por el Lema 3.2.1, la ecuación característica tiene cuatro raíces reales y diferentes $\theta_1 < \theta_2 < 0 < \theta_3 < \theta_4$. La solución para el sistema (3.2.38) es de la forma

$$\begin{aligned} F(x, i_0) &= \sum_{j=1}^4 B_j^1 e^{\theta_j x} + \hat{b}_1, \\ F(x, \hat{i}) &= \sum_{j=1}^4 \lambda_{i_0}^{-1} \varphi_{i_0}^4(\theta_j) B_j^1 e^{\theta_j x} + \tilde{b}_1, \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

donde

$$\hat{b}^1 = \frac{(\lambda_i + r_i)\zeta}{(r_{i_0} + \lambda_{i_0})(r_i + \lambda_i) - \lambda_2\lambda_1}, \quad \tilde{b}^1 = \frac{\lambda_i\zeta}{(r_{i_0} + \lambda_{i_0})(r_i + \lambda_i) - \lambda_2\lambda_1}$$

y B_j^1 son constantes.

2. Cuando $x \in [b_i, \infty)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{xx}(x, i_0) + (\mu_{i_0} - \zeta)F_x(x, i_0) - (r_{i_0} + \lambda_{i_0})F(x, i_0) + \zeta &= -\lambda_{i_0} F(x, i_0), \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{xx}(x, i) + (\mu_i - \zeta)F_x(x, i) - (r_i + \lambda_i)F(x, i) + \zeta &= -\lambda_i F(x, i). \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Este sistema es idéntico al sistema (3.2.32) y su solución es de la forma

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, i) &= \sum_{j=1}^4 B_j^2 e^{\gamma_j x} + \hat{b}^2, \\ F(x, i) &= \sum_{j=1}^4 \lambda_{i_0}^{-1} \varphi^3(\gamma_j) B_j^2 e^{\gamma_j x} + \tilde{b}^2, \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

donde

$$\hat{b}^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_i)\zeta}{r_1 r_2 + \lambda_{i_0} r_i + \lambda_i r_{i_0}}, \quad \tilde{b}^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_{i_0})\zeta}{r_1 r_2 + \lambda_{i_0} r_i + \lambda_i r_{i_0}}$$

y B_j^1 son constantes. Por las suposición 3 y 5 dadas al inicio de la presente seccion, es necesario que $B_3^2 = B_4^2 = 0$. Por tanto, la solución (3.2.42) es reducida a

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= B_1^2 e^{\gamma_1 x} + B_2^2 e^{\gamma_2 x} + \hat{b}^2, \\ F(x, 2) &= \lambda_{i_0}^{-1} \varphi^3(\gamma_1) B_1^2 e^{\gamma_1 x} + \varphi^3(\gamma_2) B_2^2 e^{\gamma_2 x} + \tilde{b}^2. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Para encontrar el límite b_{3-i_0} , y los coeficientes en las soluciones, suponemos que la condición de suavidad se mantiene. También queremos que $F_x(b_i, i) = 1$. Así,

necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 F(0, i_0) &= F(0, \hat{i}) = 0, \\
 F(b_{i-}, i_0) &= F(b_{i+}, i_0), \\
 F(b_{i-}, \hat{i}) &= F(b_{i+}, \hat{i}), \\
 F_x(b_{i-}, \hat{i}) &= F_x(b_{i+}, \hat{i}) = 1, \\
 F_x(b_{i-}, i_0) &= F_x(b_{i+}, i_0).
 \end{aligned}
 \tag{3.2.44}$$

Observamos que el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones. Una solución del sistema (3.2.44) nos dará los valores de b , B^1 , $j = 1, 2, 3, 4$ y

B^2 , $j = 1, 2$. Recordemos que hemos supuesto que $F_x(0, \hat{i}) > 1$ y $F_x(0, i_0) \leq 1$. Esto ocurre si los coeficientes encontrados a través del sistema (3.2.44) satisfacen

$$\begin{aligned}
 0 &\leq B_1^1 \theta_1 + B_2^1 \theta_2 + B_3^1 \theta_3 + B_4^1 \theta_4 \leq 1, \\
 \lambda_i &< B_1^1 \theta_1 \varphi^4(\theta_1) + B_2^1 \theta_2 \varphi^4(\theta_2) + B_3^1 \theta_3 \varphi^4(\theta_3) + B_4^1 \theta_4 \varphi^4(\theta_4), \\
 b_i &> 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.45}$$

Caso 3: $F_x(0, i) \leq 1$ para $i = 1, 2$

$F_x(x, i) \leq 1$ para cada $0 < x$ e $i = 1, 2$. Esto debido a la suposición 4 dada al inicio de la presente sección, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_1^2}{2} F(x, 1) + (\mu - \zeta) F(x, 1) - (r + \lambda) F(x, 1) + \zeta &= \frac{\lambda}{xx} \lambda_1 F(x, 2), \\
 \frac{\sigma_2^2}{2} F(x, 2) + (\mu - \zeta) F(x, 2) - (r + \lambda) F(x, 2) + \zeta &= \frac{\lambda}{xx} \lambda_2 F(x, 1),
 \end{aligned}
 \tag{3.2.46}$$

este sistema es idéntico al sistema (3.2.32). Por tanto la solución es de la forma

$$\begin{aligned}
 F(x, 1) &= \sum_{j=1}^4 C_j e^{\gamma_j x} + \hat{c}^1, \\
 F(x, 2) &= \sum_{j=1}^4 C_j e^{\gamma_j x} + \tilde{c}^1.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.47}$$

donde

$$\hat{c}^1 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)\zeta}{r_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2}, \quad \tilde{c}^1 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_1)\zeta}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1},$$

y C_j son constantes. Por la suposición 3 y 5 dadas al inicio de la presente sección, es necesario que $C_3 = C_4 = 0$. Por tanto la solución (3.2.47) es reducida a

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \tilde{c}^1, \\ F(x, 2) &= \lambda_1^{-1} \varphi^3(\gamma_1) C_1 e^{\lambda_1 x} + \varphi^3(\gamma_2) C_2 e^{\lambda_2 x} + \tilde{c}^1. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Además, por la suposición 1 de (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-\xi}{r_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)(\varphi^3(\gamma_2) - \lambda_1) + \lambda_1(r_2 - r_1)}{\varphi^3(\gamma_2) - \varphi^3(\gamma_1)}, \\ C_2 &= \frac{-\xi}{r_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)(\lambda_1 - \varphi^3(\gamma_1)) + \lambda_1(r_1 - r_2)}{\varphi^3(\gamma_2) - \varphi^3(\gamma_1)}. \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Por último, la suposición que $F_X(0, i) \leq 1$ para $i = 1, 2$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{-\xi(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)}{r_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2} \frac{\varphi^3(\gamma_2)\gamma_1 + \lambda_1(\gamma_2 - \gamma_1) - \varphi^3(\gamma_1)\gamma_2}{\varphi^3(\gamma_2) - \varphi^3(\gamma_1)} \leq 1, \\ 0 &\leq \frac{-\xi}{r_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2) \{ \varphi^3(\gamma_1)\gamma_1 [\varphi^3(\gamma_2) - \lambda_1] + \varphi^3(\gamma_2)\gamma_2 [\lambda_1 - \varphi^3(\gamma_1)] \}}{\varphi^3(\gamma_2) - \varphi^3(\gamma_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda_1(r_2 - r_1) [\varphi^3(\gamma_1)\gamma_1 - \varphi^3(\gamma_2)\gamma_2]}{\varphi^3(\gamma_2) - \varphi^3(\gamma_1)} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

Observemos que en el caso 3, conocemos de forma explícita la función F ya que los coeficientes dependen solo de los parámetros del modelo, mientras que en el caso 1 y 2 es necesario encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones (3.2.37) y (3.2.45) respectivamente.

3.3. Verificación de una solución

En la sección anterior, construimos un candidato para la función de valor y un candidato para el control óptimo. Para demostrar que ellos en efecto son la función de valor y control óptimo del problema (3.0.2) es suficiente demostrar que ellos satisfacen todas las condiciones del Teorema 3.1.2.

Teorema 3.3.1. a) Suponga que $A_j^1, A_j^2, j = 1, 2, 3, 4$, y $A_j^3, b_j, j = 1, 2$, constituyen una solución del sistema de ecuaciones (3.2.36) y que ellos satisfacen (3.2.37). Sea f la función dada por

$$\begin{aligned}
 f(r, x, 1) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{j=1}^4 A_j^1 e^{\alpha_j x}, & \text{si } x \in [0, b_1), \\ e^{-r} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j A_j e^{\tilde{\alpha}_j x} + \hat{a}^1, & \text{si } x \in [b_1, b_2), \\ e^{-r} A_1^3 e^{\gamma_1 x} + A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \hat{a}^2, & \text{si } x \in [b_2, \infty), \end{cases} \\
 y \\
 f(r, x, 2) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{j=1}^4 \lambda_1 \varphi_1(\alpha_j) A_j e^{\alpha_j x}, & \text{si } x \in [0, b_1), \\ e^{-r} \sum_{j=1}^2 \lambda_1 \varphi_1(\tilde{\alpha}_j) A_j e^{\tilde{\alpha}_j x} + \tilde{a}^1, & \text{si } x \in [b_1, b_2), \\ e^{-r} \frac{\varphi_1^3(\gamma_1)}{\lambda_1} A_1^3 e^{\gamma_1 x} + \frac{\varphi_1^3(\gamma_2)}{\lambda_1} A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \tilde{a}^2, & \text{si } x \in [b_2, \infty). \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.51}$$

Entonces f coincide con la función de valor V del problema (3.0.2). Además, el control admisible c^* dado por

$$c_t^* = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_t = 1 \text{ y } X_t^{c^*} \in [0, b_1) \text{ o } \alpha_t = 2 \text{ y } X_t^{c^*} \in [0, b_2), \\ \xi, & \text{si } \alpha_t = 1 \text{ y } X_t^{c^*} \in [b_1, \infty) \text{ o } \alpha_t = 2 \text{ y } X_t^{c^*} \in [b_2, \infty), \end{cases}$$

para $t \in [0, \tau^*)$, y $c_t^* = 0$ para $t \in [\tau^*, \infty)$, es un control óptimo para el problema (3.0.2).

b) Suponga que $B_j^1, B_j^2, j = 1, 2$, y \hat{b}, b , constituyen una solución del sistema de ecuaciones (3.2.44) y que ellos satisfacen (3.2.45). Sea f la función dada por

$$\begin{aligned}
f(r, x, i_0) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{j=1}^4 B_j^1 e^{\theta_j x} + \hat{b}^1, & \text{si } x \in [0, b_i], \\ e^{-r} \left(B_1^2 e^{\gamma_1 x} + B_2^2 e^{\gamma_2 x} + \tilde{b}^2 \right), & \text{si } x \in [b_i, \infty), \end{cases} \\
y \\
f(r, x, \hat{i}) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{j=1}^4 \lambda_{i_0} \varphi_{i_0}^4(\theta_j) B_j e^{\theta_j x} + \tilde{b}^1, & \text{si } x \in [0, b_i], \\ e^{-r} \left(\frac{\varphi_1^3(\gamma_1)}{\lambda_{i_0}} B_1^2 e^{\gamma_1 x} + \frac{\varphi_1^3(\gamma_2)}{\lambda_{i_0}} B_2^2 e^{\gamma_2 x} + \tilde{b}^2 \right), & \text{si } x \in [b_i, \infty). \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

Entonces f coincide con la función de valor V del problema (3.0.2). Además, el control admisible c^* dado por

$$c_t^* = \begin{cases} \zeta, & \text{si } \alpha_t = i \text{ o } \alpha_t = \hat{i} \text{ y } X^{C^*} \in [b, \infty) \\ 0, & \text{si } \alpha_t = \hat{i} \text{ y } X^{C^*} \in [0, b], \end{cases}$$

para $t \in [0, \tau^*)$, y $c_t^* = 0$ para $[\tau^*, \infty)$, es el control óptimo para (3.0.2).

c) Suponga que se satisface (3.2.50). Sea f la función dada por

$$\begin{aligned}
f(r, x, 1) &= e^{-r} \left(C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x} + \hat{c}^1 \right) \\
y \\
f(r, x, 2) &= e^{-r} \left(\frac{\varphi_1^3(\gamma_1)}{\lambda_1} C_1 e^{\gamma_1 x} + \frac{\varphi_1^3(\gamma_2)}{\lambda_1} C_2 e^{\gamma_2 x} + \tilde{c}^1 \right),
\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

donde C_1 y C_2 son dadas (3.2.49). Entonces f coincide con la función de valor V del problema (3.0.2). Además, el control admisible c^* dado por

$$c_t^* = \begin{cases} \zeta, & \text{si } X^{C^*} \in [0, \tau^*), \\ 0, & \text{si } X^{C^*} \in [\tau^*, \infty), \end{cases}$$

es el control óptimo para (3.0.2).

Demostración.

En los tres casos, es suficiente demostrar que la función f definida anteriormente satis-

face las condiciones del Teorema 3.1.2. Dado que las pruebas para cada uno de los tres casos son similares, consideraremos solo el primer caso.

a) Por la construcción de F (ver **caso 1**) y por las condiciones en (3.2.36), podemos deducir que $F(\cdot, i) \in C^2([0, \infty) - \{b_1, b_2\})$, $i \in S$, y que las funciones F y F_x son continuas en $x \in [0, \infty)$. De este modo, demostrar que estas funciones son acotadas es suficiente analizar para $x \in [b_2, \infty)$,

$$F(x, 1) = A_1^3 e^{\gamma_1 x} + A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1}$$

$$F(x, 2) = \frac{\varphi^3(\gamma_1)}{\lambda_1} A_1^3 e^{\gamma_1 x} + \frac{\varphi^3(\gamma_2)}{\lambda_1} A_2^3 e^{\gamma_2 x} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_1)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1},$$

donde $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$. Por ello,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, 1) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_2)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1} < +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, 2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + r_1)\xi}{r_1 r_2 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1} < +\infty,$$

teniendo así que $F(\cdot, i)$, $i = 1, 2$, es acotada. De la misma manera, $F_x(\cdot, i)$, $i = 1, 2$, es acotada porque $\lim_{x \rightarrow \infty} F_x(x, 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_x(x, 2) = 0$. Además, la primera condición del sistema (3.2.36) garantiza que $F(0, 1) = F(0, 2) = 0$.

Definamos la función $\phi : [0, \infty) \times \{1, 2\} \rightarrow [0, \xi]$, de la siguiente manera

$$\phi(x, i) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, b_i), \\ \xi, & \text{si } x \in [b_i, \infty). \end{cases}$$

Por construcción y la condición (3.2.37),

$$c_t^* := \arg \sup_{0 \leq c \leq \xi} \{c \mathbf{1} - F_x(X_t^{C^*}, \alpha_t)\} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, b_i), \\ \xi, & \text{si } x \in [b_i, \infty), \end{cases} = \phi(X_t^{C^*}, \alpha_t)$$

para $t \in [0, \tau^*)$, y por tanto

$$c_t^* = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_t = i \text{ y } X_t^{C^*} \in [0, b_i), \\ \xi, & \text{si } \alpha_t = i \text{ y } X_t^{C^*} \notin [0, b_i). \end{cases}$$

para $t \in [0, \tau^*)$, y $c_t^* = 0$ para $t \in [\tau^*, \infty)$.

Por último, sólo resta demostrar que $f(\cdot, \cdot, i)$, $i = 1, 2$, satisface la ecuación (3.1.10) que es equivalente a que $F(\cdot, i)$, $i = 1, 2$, satisfaga (3.2.21). A partir de la definición de ϕ y las ecuaciones características definidas anteriormente, se tiene que la ecuación

$$L_{\phi(x,i)}F(x, i) + \phi(x, i) = \lambda_i(F(x, i) - F(x, 3 - i)). \quad (3.3.54)$$

se mantiene para $i = 1, 2$. De hecho, para $x \in [0, b_1)$, la función $F(x, i)$, $i = 1, 2$, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.2.26); para $x \in [b_1, b_2)$, es solución del sistema (3.2.29); y para $x \in [b_2, \infty)$, es solución del sistema (3.2.32). Es decir, la función $F(\cdot, i)$, $i = 1, 2$, satisface la ecuación (3.2.21) porque la igualdad (3.3.54) también se cumple cuando reemplazamos $\phi(X^{\mathcal{G}^*}, \alpha_t) = c_t^*$ para $t \in [0, \tau^*)$. Por tanto, la función f cumple con las condiciones del Teorema 3.1.2, demostrando así que $f(\cdot, \cdot, i)$, $i = 1, 2$, es la función de valor y c^* el control óptimo del problema (3.0.2). \square

3.4. Ejemplos numéricos y comparación con el caso de un régimen

En esta sección realizaremos una comparación entre los resultados obtenidos en la primera parte del trabajo realizado por Julia Eisenberg, en [6], (donde no se tiene presente el cambio de régimen) y los resultados obtenidos en la presente tesis.

En [6], se estudió el problema de optimización de dividendos de una compañía de seguros bajo una tasa estocástica. El ingreso de la compañía esta modela por un movimiento Browniano con drift, $X_s = x + \mu s + \sigma W_s$, y el factor de descuento se modela con un proceso estocástico. En la primera parte de este trabajo, el factor de descuento es un movimiento geométrico Browniano, mientras que en la segunda parte es presentado como una función exponencial de un proceso integrado de Ornstein-Uhlenbeck. En este trabajo se considera un único régimen, es decir no hay cambio de régimen.

En el primer modelo, cuando la tasa de descuento está dada por $r_s = r + ms + \delta B_s$, se muestra que la estrategia óptima es una estrategia de barrera constante en el nivel

$$\hat{x} = \frac{\log \frac{\zeta^2 - \zeta \eta}{\theta^2 - \theta \eta}}{\theta - \zeta},$$

donde

$$\eta = \frac{\zeta - \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2},$$

$$\zeta = \frac{-\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2},$$

$$\theta = \frac{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}.$$

De acuerdo a esta estrategia, se muestra que la política óptima de dividendos es no pagar dividendos mientras el proceso $X^{C^*} = \{X^{C^*}; t \geq 0\}$, este por debajo de \hat{x} , y pagar dividendos a la tasa máxima ζ , cuando exceda \hat{x} . Es decir, la estrategia de dividendo óptima $C^* = \{c_t^*\}$ es dada por

$$c_t^*(x) = \zeta \mathbf{1}_{\{X_t > \hat{x}\}}.$$

La correspondiente función de valor es dada por

$$V(r, x) = \begin{cases} \frac{\zeta e^{-r}}{m - \frac{\delta^2}{2}} (1 - e^{\eta x}), & \text{si } \frac{-\zeta \eta}{m - \frac{\delta^2}{2}} \leq 1, \\ e^{-r} F(x), & \text{si } \frac{-\zeta \eta}{m - \frac{\delta^2}{2}} \geq 1, \end{cases}$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-\zeta}{m - \frac{\delta^2}{2}} (e^{\theta x} - e^{\zeta x}), & \text{si } x \leq \hat{x}, \\ \frac{\eta(e^{\theta \hat{x}} - e^{\zeta \hat{x}}) - \theta e^{\theta \hat{x}} + \zeta e^{\zeta \hat{x}}}{m - \frac{\delta^2}{2}}, & \text{si } x > \hat{x}. \end{cases}$$

Podemos observar que estos resultados son comparables al presentado en la sección anterior, dado por el Teorema 3.0.6. La diferencia (en el caso de 2 regímenes) es la existencia de dos límites diferentes (bajo ciertos supuestos) b_1 y b_2 , donde uno de ellos puede ser utilizado en el caso de recesión económica y el otro en el caso de crecimiento económico. En el modelo con cambio de régimen, la solución para el problema de optimización de pago de dividendos es más compleja y esto se debe a que se involucra un nuevo proceso que no se consideró en el modelo de un solo régimen. Sin embargo, esta solución también es más precisa y adecuada, porque el nuevo proceso es relevante para el análisis financiero.

También podemos observar que a partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis, se tiene que la estrategia óptima de dividendos en el *Caso 1*, depende del régimen de la economía. Es decir, si la economía está en régimen i y el proceso X^{C^*} , está por debajo del límite b_i (el nivel b_i , depende de i), la compañía no pagará dividendos. Sin embargo, si la economía está en el régimen i y el proceso alcanza o es mayor que b_i , la compañía pagará dividendos a la tasa máxima ζ . Algo similar ocurre en el *Caso 2* cuando $\hat{i} = 3 - i_0$ es el régimen de la economía. Sin embargo, en el régimen i_0 , la compañía pagará dividendos a la tasa máxima, independientemente del nivel donde se encuentre el proceso. En el *Caso 3*, en todos los regímenes, la compañía pagará dividendos a la tasa máxima, independientemente del nivel de efectivo.

Ejemplos numéricos

A continuación presentamos 3 resultados numéricos (estos muestran los diferentes casos presentes en el Teorema 3.0.6.) que muestran los coeficientes y los límites presentes en la función de valor y la estrategia óptima. Recordemos que para hallar estos coeficientes nos limitábamos a resolver un sistema no lineal y luego verificar que los coeficientes cumplan las condiciones dadas según cada caso. Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales asociado a nuestro problema hemos aplicado el método de Newton.

1. Supongamos que en nuestro modelo se tiene presente los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu_1 = 0.05, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad m_1 = 0.3, \quad \delta_1 = 0.6, \quad \lambda_1 = 0.06, \\ \mu_2 = 0.15, \quad \sigma_2 = 0.45, \quad m_2 = 0.2, \quad \delta_2 = 0.4, \quad \lambda_2 = 0.04 \text{ y } \zeta = 5. \end{aligned}$$

Entonces, resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que la solución (los coeficientes de la función de valor) está dada por

$$\begin{aligned} A^1_1 = -0.0218, \quad A^1_2 = -0.7024, \quad A^1_3 = 0.7100, \quad A^1_4 = 0.0143, \\ A^2_1 = 0.0032, \quad A^2_2 = -30.3055, \quad A^2_3 = 0.0069, \quad A^2_4 = 0, \\ A^3_1 = 0.4886, \quad A^3_2 = -42.1481. \end{aligned}$$

Verificando entre las condiciones en (3.2.37), en (3.2.45) y en (3.2.50), vemos que estos coeficientes cumplen las condiciones en (3.2.37). Es decir, encontramos en el **caso 1**. Por ello, existen 2 límites

$$b_1 = 0.4670 \text{ y } b_2 = 0.9037.$$

2. Si consideramos ahora los parámetros

$$\begin{aligned} \mu_1 = 0.50, \sigma_1 = 0.70, \quad m_1 = 0.3, \delta_1 = 0.6, \lambda_1 = 0.06, \\ \mu_2 = 0.15, \sigma_2 = 0.45, \quad m_2 = 0.2, \delta_2 = 0.4, \lambda_2 = 0.04 \text{ y } \zeta = 6. \end{aligned}$$

Entonces, resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que la solución está dada por

$$\begin{aligned} B^1_1 = 10.72910, \quad B^1_2 = -82.3328, \quad B^1_3 = 35.3782, \quad B^1_4 = -0.1382, \\ B^2_1 = -2.8146, \quad B^2_2 = -47.1854. \end{aligned}$$

Verificando entre las condiciones en (3.2.37), en (3.2.45) y en (3.2.50), vemos que estos coeficientes cumplen las condiciones en (3.2.45). Es decir, encontramos en el **caso 2**, por ello existe un único límite

$$b_2 = 0.00013514.$$

3. Por último, si los parámetros son dados por

$$\begin{aligned} \mu_1 = 0.03, \sigma_1 = 0.5, \quad m_1 = 0.46, \delta_1 = 0.9, \lambda_1 = 0.05, \\ \mu_2 = 0.15, \sigma_2 = 0.45, \quad m_2 = 0.2, \delta_2 = 0.4, \lambda_2 = 0.03 \text{ y } \zeta = 3. \end{aligned}$$

Entonces, resolvemos el sistema de ecuaciones y que los dos únicos coeficientes presentes en la función de valor esta dado por

$$C_1 = 5.4816 \text{ y } C_2 = -47.5869.$$

En este caso los parámetros dados cumplen con la condición (3.2.50). Al encontrarnos en el **caso 3**, la estrategia óptima no depende que el proceso de riqueza este o no por encima de algún límite.

Capítulo 4

Optimización con tasas de dividendos no acotadas

En este capítulo, estudiaremos el problema de optimización de pago de dividendos considerando como estrategias admisibles a ciertos procesos crecientes y continuas por la derecha (con posibilidad de saltos). Esto requiere un tratamiento matemático más delicado del problema, por ello redefinimos las estrategias admisibles bajo este contexto de una manera más general que en el capítulo anterior.

Definición 4.0.1. *Un proceso estocástico $C = \{C_t; t \geq 0\}$ es una estrategia admisible si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Escadlag, es decir, sus trayectorias son continuas por la derecha y existe el límite por la izquierda;*
2. *Es adaptado a la filtración $\{\mathbf{F}_t\}$;*
3. *Para cada $\omega \in \Omega$, $dC_t = 0$ para $t \geq \tau^C$;*
4. *$X_t^C \geq C_t - C_t$ para todo $t < \tau^C$;*
5. *Es un proceso no negativo con trayectorias crecientes;*
6. *Para cada $\omega \in \Omega$ y cada $t > 0$, el conjunto de instantes de saltos*

$\{s \in [0, t]; C(s, \omega) > C(s^-, \omega)\}$ *es finito;*

7. *Si $A \subset \mathbf{R}$ es un conjunto de Borel medible tal que $m(A) = 0$, donde m es la medida de Lebesgue, entonces para todo $t \geq 0$, $\mathbf{P}(X^C \in A) = 0$.*

El conjunto de todas las estrategias admisibles será denoto por C_∞ .

Observación 4.0.2. La condición (4) indica que no se permite un pago instantáneo de dividendos mayor que el nivel actual de la reserva.

De este modo, bajo la estrategia admisible C tenemos que la reserva después de pagar los dividendos es

$$X_t^C = x + \int_0^t \mu_{\alpha_s} ds + \int_0^t \sigma_{\alpha_s} dW_s - C_t, \quad \text{para cada } t \in \Sigma(0, \tau^C). \quad (4.0.1)$$

Observemos en particular que $X_0^C = x - C_0$, significa que si hay un pago de dividendo en el instante $t = 0$ entonces el excedente X^C decrece instantaneamente de x a $x - C_0$. Así, convencionalmente escribimos $X_{0-}^C = x$ y asumimos que $C_{0-} = 0$.

Observación 4.0.3. A lo largo de este capítulo consideramos que en la integral que representa la cantidad de dividendos acumulados descontados $\int_0^{\tau^C} e^{-rs} dC_s$, está incluido el punto 0 dentro de la región de integración con el fin de considerar un posible pago de dividendos inmediato $C_0 > 0$ en el valor.

Al igual que en el capítulo anterior, nuestro problema (2.2.6) consiste en encontrar

1. La función de valor

$$V(r, x, i) := \sup_{C \in C_\infty} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\tau^C} e^{-rs} dC_s. \quad (4.0.2)$$

2. Una estrategia admisible C^* tal que $V(r, x, i) = V^{C^*}(r, x, i)$.

Observación 4.0.4. Debido a que la estrategia admisible C es continua por la derecha y tiene límite por la izquierda, representamos por $\wedge = \{s \geq 0; C_{s-} \neq C_s\}$ el conjunto de instantes en los que C tiene discontinuidad. Este conjunto es numerable porque C solo puede saltar un cantidad numerable de veces durante el período $[0, \tau^C]$.

Observación 4.0.5. El proceso $C^d := \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \wedge}} (C_s - C_{s-})$, es conocido como la parte discontinua de la estrategia admisible C y el proceso $C_t^c := C_t - C_t^d$ es conocido como la parte continua de C . Por tanto, toda estrategia admisible presenta la siguiente descomposición

$$C_t = C_t^c + \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \wedge}} (C_s - C_{s-}).$$

Lema 4.0.6. Sea $r \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$V(r, x, i) \geq V(r, y, i), \quad \text{para } 0 \leq y \leq x \text{ e } i \in \mathbf{S}.$$

Demostración.

Sea $s > 0$ y $C^{y,i}$ una s -estrategia óptima para el proceso con valor inicial $X_0 = y$ y $\alpha_0 = i$, en el sentido que

$$V^{C^{y,i}}(r, y, i) \geq V(r, y, i) - s.$$

Para el proceso (X^C, α) a partir del valor inicial (x, i) ($x > y \geq 0$), se construye una estrategia \hat{C}_t , la cual consiste en pagar en el instante 0 la cantidad de $x - y$ y luego sigue la estrategia $C_t^{y,i}$ inmediatamente. Es decir,

$$\hat{C}_t = (x - y)1_{\{t=0\}} + C_t^{y,i}1_{\{t>0\}},$$

como resultado, tenemos

$$V(r, x, i) \geq V^{\hat{C}}(r, x, i) \geq e^{-r}(x - y) + V^{C^{y,i}}(r, y, i) \geq e^{-r}(x - y) + V(r, y, i) - s,$$

que implica $V(r, x, i) \geq V(r, y, i)$ para todo $x > y \geq 0$. □

4.1. Teorema de verificación

Si $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^2 por tramos, $i \in \mathbf{S}$, $x \in \mathbf{R}_+ \setminus N_i$ y $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(r, x, i) := & m_i f_r(r, x, i) + \mu_i f_x(r, x, i) + \frac{1}{2} \sigma_i^2 f_{xx}(r, x, i) \\ & + \frac{1}{2} \delta_i^2 f_{rr}(r, x, i) + Qf(r, x, \cdot)(i) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

donde $Qf(r, x, \cdot)(i) = \sum_{j \in \mathbf{S}} q_{ij} f(r, x, j)$.

Denotaremos por C_0 el conjunto de estrategias admisibles que no saltan en el mismo instante en que lo hace la cadena de Markov α . Es decir, para cada $\omega \in \Omega$, se tiene:

$$\{s \geq 0; C(s, \omega) > C(s^-, \omega)\} \cap \{s \geq 0; \alpha(s, \omega) \neq \alpha(s^-, \omega)\} = \emptyset.$$

El Teorema de verificación que demostraremos es el resultado principal de este capítulo. Para la demostración de dicho teorema se necesita el siguiente lema, el cual nos permite

aproximar los dividendos acumulados descontados bajo cualquier estrategia admisible hasta un instante mediante dividendos acumulados descontados de estrategias que pertenecen al conjunto C_o .

Lema 4.1.1. Sean $C \in C_\infty$ y $T > 0$. Entonces, existe una secuencia $\{C^n\}$ en C_o tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^{C^n}} e^{-rt} dG^n = \int_0^{\tau^C \wedge T} e^{-rt} dC_t, \quad \text{c.s.} \quad (4.1.4)$$

Demostración.

Sea C una estrategia admisible arbitraria y $T > 0$, fijo. Si C no tiene saltos en $[0, T]$, es fácil demostrar que se cumple la igualdad (4.1.4) tan solo definiendo a C^n , como

$$\begin{aligned} C_t^n &= C_t, & \text{para } t \in [0, \tau^C \wedge T), \\ C_t^n &= C_{\tau^C \wedge T}, & \text{para } t \in [\tau^C \wedge T, \infty). \end{aligned}$$

Por eso nos enfocaremos en el caso en que C presenta algún salto. La idea principal que usaremos para construir la estrategia C^n consiste en hacerla igual a C en ciertos intervalos de tiempo y constantes en los demás intervalos de tiempo de manera adecuada. Esta idea es ilustrada en la Figura (4.1).

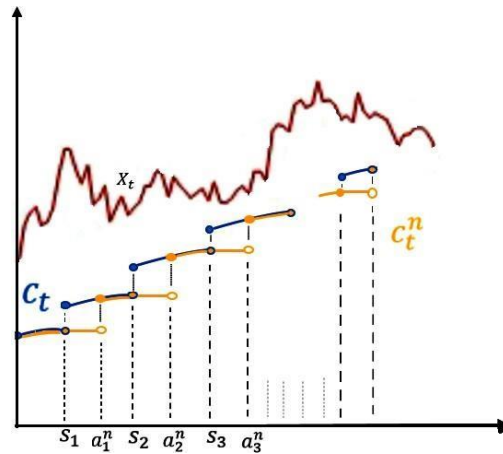


Figura 4.1: Aproximación a la estrategia C mediante C^n .

Definimos el funcional J^T por

$$J^T(C) = \int_0^{\tau^C \wedge T} e^{-rt} dC_t.$$

Para cada ω , representamos el conjunto de instantes de saltos de α en el intervalo $[0, T]$

por $\mathbf{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_\beta\}$ y los de C por $S = \{s_1, s_2, \dots, s_\beta\}$. Con el fin de construir la sucesión C^n a partir de C tal que no tenga instantes de saltos en común con C ni con α ,

definimos para cada $k = 1, 2, \dots, \beta$.

$$\hat{j}_k = \inf\{t > s_k; t \in \mathbf{J}\}, \quad \hat{a}_0^n = 0, \quad \hat{a}_s^n = s + \frac{j_k}{2},$$

$$\hat{a}_k^n = \min\left\{s + \frac{j_k}{2}, s_{k+1}\right\}, \quad \text{si existe el instante de salto } s_{k+1} \text{ o } k = \beta,$$

$$\hat{a}_k^n = \min\left\{s_k + \frac{j_k}{2}, s_{k+1}\right\}, \quad \text{en caso contrario.}$$

$$a^n = \beta = s + \frac{j_k}{2}, \quad \text{dentro del intervalo } [0, T].$$

Note que n es el número del último salto de C dentro del intervalo $[0, T]$. A continuación construiremos para cada n , la estrategia C^n pero antes observemos la Figura (4.2), donde se muestran los únicos 6 posibles casos:

- *Caso 1*, el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C sucede antes del instante T y además C no salta en el instante τ^C . Es decir,

$$\tau^C < T \quad \wedge \quad C_{\tau^C} = C_{\tau^C-}.$$

- *Caso 2*, el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C sucede antes del instante T y además C salta en el instante τ^C . Es decir,

$$\tau^C < T \quad \wedge \quad C_{\tau^C} \neq C_{\tau^C-}.$$

- *Caso 3*, si el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C no sucede hasta el instante T y además C no salta en el instante T . Es decir,

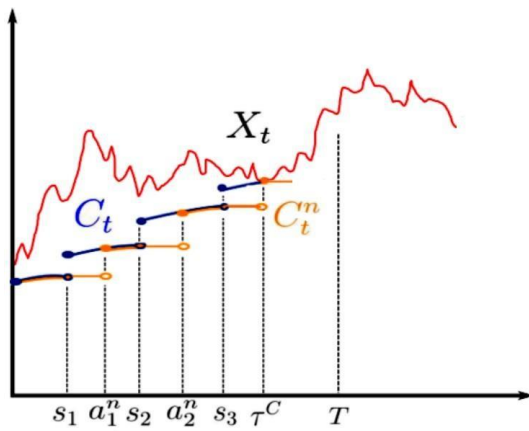
$$\tau^C > T \quad \wedge \quad C_T = C_{T-}.$$

- *Caso 4*, el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C sucede en el instante T y además C no salta en el instante T . Es decir,

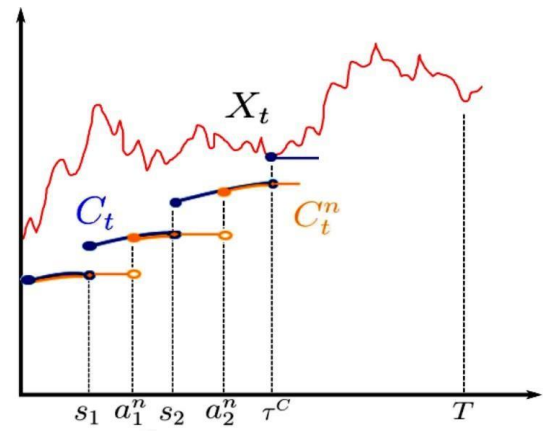
$$\tau^C = T \quad \wedge \quad C_T = C_{T-}.$$

- *Caso 5*, si el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C no sucede hasta el instante T y además C salta en el instante T . Es decir,

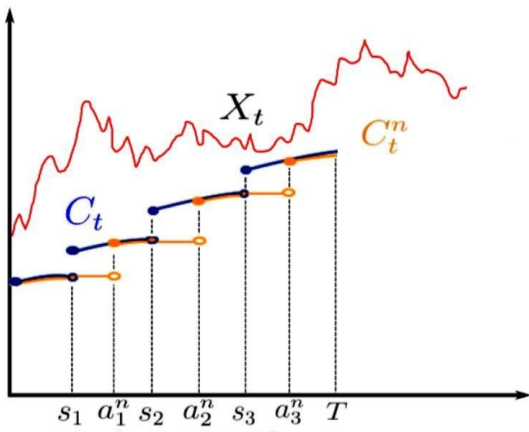
$$\tau^C > T \quad \wedge \quad C_T \neq C_{T-}.$$



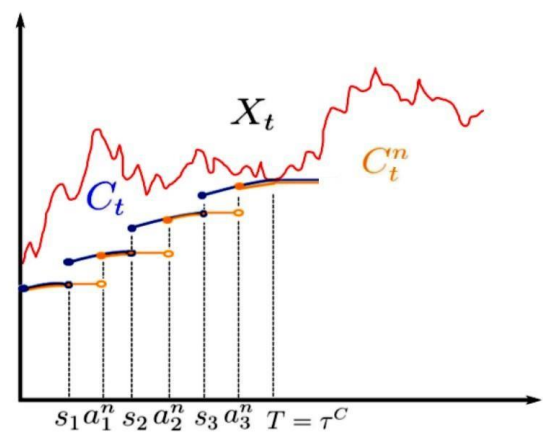
Caso 1



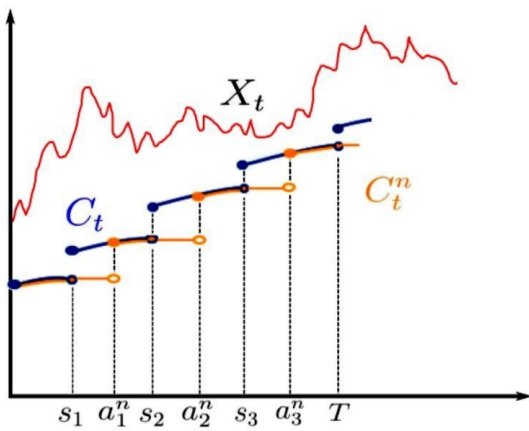
Caso 2



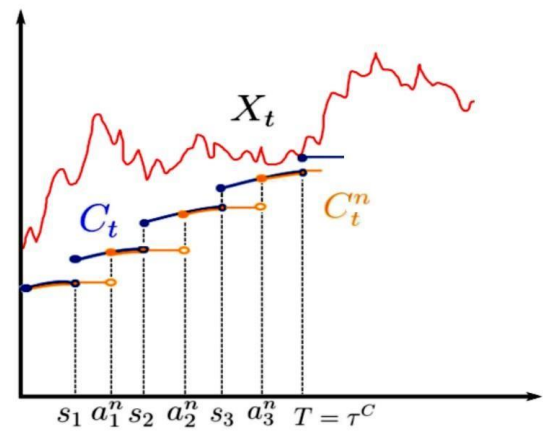
Caso 3



Caso 4



Caso 5



Caso 6

Figura 4.2: Posibles comportamientos de la estrategia C hasta el instante T .

- Caso 6, el tiempo de ruina de acuerdo a la estrategia C sucede en el instante T y además C salta en el instante T . Es decir,

$$\tau^C = T \quad \wedge \quad C_T \neq C_{T-}.$$

Para el caso 1, 3 y 4 definimos para cada n , la estrategia C^n por

$$\begin{aligned} C_t^n &= C_t, & \text{para } t \in [a^{n-1}, s_k) \text{ y } k = 1, 2, \dots, \beta, \\ C_t^n &= C_{t-}^n, & \text{f para } t \in [s_k, a^n) \text{ y } k = \beta, \\ C_t^n &= C_{t-}^n, & \text{para } t \in [s_\beta, a^n \wedge \tau^C \wedge T), \\ C_t^n &= C_t \wedge C_{\tau^C} \wedge C_T, & \text{para } t \in [a_\beta \wedge \tau^C \wedge T, \infty). \end{aligned}$$

Para el caso 2, 5 y 6 definimos para cada n , la estrategia C^n por

$$\begin{aligned} C_t^n &= C_t, & \text{para } t \in [a^{n-1}, s_k) \text{ y } k = 1, 2, \dots, \beta, \\ C_t^n &= C_{t-}^n, & \text{f para } t \in [s_k, a^n) \text{ y } k = \beta, \\ C_t^n &= C_{t-}^n, & \text{para } t \in [s_\beta, a^n \wedge \gamma), \\ C_t^n &= C_{s_\beta}, & \text{para } t \in [a^n \wedge \gamma, \infty), \end{aligned}$$

donde $\gamma = \inf\{t > s_\beta; X_t = C_{s_\beta-}\}$. Observemos que la estrategia C^n no salta en el mismo instante en que lo hace C o α y además se tiene que $\tau^C \leq \tau^{C^n}$. Para verificar la igualdad (4.1.4), primero vamos a demostrar que independientemente en el caso en que nos encontremos, siempre se cumple que para todo $k \in \{1, 2, \dots, \beta - 1\}$,

$$\int_{[s_k, a^n]} e^{-rt} dC_t^n - \int_{[s_k, a^n]} e^{-rt} dC_t \stackrel{c.s.}{=} 0, \quad (4.1.5)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, para la primera integral de (4.1.5) se cumple

$$\begin{aligned} \int_{[s_k, a^n]} e^{-rt} dC_t^n &= \int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t^n + \sum_{\{a_k^n\}} e^{-rt} dC_t^n \\ &= e^{-r(a_k^n)} C^n(a_k^n) - C^n(a_k^{n-}) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

De la definición de a_k^n

$$\begin{aligned} &= e^{-r(a_k^n)} \cdot C(a_k^n) - C(s_k^-) \\ & \quad s_k < a_k^n \leq s_k + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

A partir de esto, es claro que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s.} e^{-r(s_k)} \Delta C(s_k). \quad (4.1.7)$$

La segunda integral de (4.1.5) cumple

$$\int_{\{s_k\}} e^{-rt} dC_t \leq \int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t = \int_{\{s_k\}} e^{-rt} dC_t + \int_{(s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t. \quad (4.1.8)$$

Por otro lado, para cada ω fijo, la función $t \mapsto e^{-rt(\omega)}$ es acotada en $t \in [0, T]$. Es decir, existe un $K = K(\omega) > 0$, tal que

$$|e^{-rt(\omega)}| < K, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Esto nos permite acotar el segundo integrando del lado derecho en (4.1.8).

$$e^{-r(s_k)} \Delta C(s_k) \leq \int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t \leq e^{-r(s_k)} \Delta C(s_k) + K \int_{(s_k, a_k^n]} (a_k^n - C(s_k)) \Sigma. \quad (4.1.9)$$

Como C es continua por la derechas, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s.} e^{-r(s_k)} \Delta C(s_k). \quad (4.1.10)$$

De (4.1.7) y (4.1.10) se concluye que

$$\int_{[s, a_k^n]} e^{-rt} dG_t^n - \int_{[s_k, a_k^n]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s.} 0. \quad (4.1.11)$$

Demostrando así la afirmación (4.1.5). Por otro lado, es obvio que a partir de la definición de C^n sobre (a_{k-1}^n, s_k) , se cumple que

$$\int_{(a_{k-1}^n, s_k)} e^{-rt} dG_t^n - \int_{(a_{k-1}^n, s_k)} e^{-rt} dC_t = 0, \quad (4.1.12)$$

para $k = 1, 2, \dots, \beta$. Por tanto, podemos concluir que independientemente del caso en que nos encontremos siempre se cumplirá que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[0, s_\beta]} e^{-rt} dG_t^n - \int_{[0, s_\beta]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s.} 0. \quad (4.1.13)$$

Ahora s'í, examinemos los casos presentados:

• **Caso 1**

Aquí tenemos que $\tau^C = \tau^{C^n}$, $\tau^C \wedge T = \tau^C$ y $C_t \wedge C_{\tau^C} \wedge C_T = C_t \wedge C_{\tau^C}$. Además,

$$\begin{aligned} C_t^n &= C_t, & \text{para } t \in [a_{k-1}, s_k), & \quad k = 1, 2, \dots, \beta. \\ C_t &= C_{s_k^-}, & \text{para } t \in [s_k, a_k), & \quad k = \beta, \\ C_t^n &= C_{s_k^-} \wedge C_{a_k^n}, & \text{para } t \in [s_k, a_k^n \wedge \tau^C), & \\ C_t &= C_t \wedge C_{\tau^C}, & \text{para } t \in [a_\beta \wedge \tau, \infty). & \end{aligned}$$

Debido (4.1.13), si deseamos demostrar (4.1.4) solo nos resta analizar la integral sobre los conjuntos $\sum_{s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C}$ y $\sum_{a_\beta \wedge \tau^C, \tau^C}$. Debido a la definición de C^n sobre el conjunto $\sum_{s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C}$, tenemos

$$\int_{[s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C)} e^{-rt} dC_t^n = 0. \tag{4.1.14}$$

Mientras que la integral para C sobre $\sum_{s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C}$, se cumple

$$\int_{[s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C)} e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta) \leq \int_{[s_\beta, a_\beta \wedge \tau^C)} e^{-rt} dC_t \leq e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta) + K C(a_\beta \wedge \tau^C) - C(s_\beta). \tag{4.1.15}$$

Debido a que la estrategia C es constante después del tiempo de ruina se afirma que $s_\beta < \tau^C$. Así,

$$s_\beta \leq a_\beta^n \wedge \tau^C \leq s_\beta + \frac{1}{n}.$$

Entonces, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[s_\beta, a_\beta^n \wedge \tau^C)} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s.} e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta). \tag{4.1.16}$$

El último análisis es sobre el conjunto $\sum_{a_\beta \wedge \tau^C, \tau^C}$. Recordemos que en el caso 1 el tiempo de ruina no es un salto para C y que la estrategia nunca salta en a_β^n , por esto

$$\int_{[a_\beta^n \wedge \tau^C, \tau^C]} e^{-rt} dC_t = \int_{[a_\beta^n \wedge \tau^C, \tau^C]} e^{-rt} dC_t.$$

A partir de la definición de C^n , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{[a^n \wedge \tau^c, \tau^c]} e^{-rt} dC^n &= e^{-r(a^n \wedge \tau^c)} \Delta C^n(a^n \wedge \tau^c) + \int_{(a^n \wedge \tau^c, \tau^c]} e^{-rt} dC^n \\ &= e^{-r(a^n \wedge \tau^c)} \left[C(a^n \wedge \tau^c) - C(s_\beta^-) \right] + \int_{(a^n \wedge \tau^c, \tau^c]} e^{-rt} dC^n \end{aligned}$$

Así, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[a_\beta^n \wedge \tau^c, \tau^c]} e^{-rt} dC^n - \int_{[a^n \wedge \tau^c, \tau^c]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s} e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta). \quad (4.1.17)$$

Debido a (4.1.16), (4.1.14) y (4.1.17), podemos afirmar que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[s_\beta, \tau^c]} e^{-rt} dC^n - \int_{[s_\beta, \tau^c]} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s} 0. \quad (4.1.18)$$

Con esto hemos demostrado que en el caso 1 la igualdad (4.1.4) se cumple. La demostración para el caso 3 y 4 es similar y por ello omitimos su prueba.

• **Caso 2**

Aquí observamos que $s_\beta = \tau^c < T$. Por (4.1.13), solo resta analizar la integral sobre los conjuntos $\sum_{s_\beta, \tau^c} C^n$ y $\{s_\beta\}$. La definición de C^n sobre esos conjuntos está dado por

$$\begin{aligned} C_t^n &= C_{s_\beta}^-, \quad \text{para } t \in [s_\beta, a_\beta^n \wedge \gamma), \\ C_t^n &= C_{s_\beta}, \quad \text{para } t \in [a_\beta^n \wedge \gamma, \infty), \end{aligned}$$

donde $\gamma = \inf\{t > s_\beta; X_t = C_{s_\beta}^-\}$. Observemos que si el tiempo de ruina de C^n sucede este será después del instante γ y además que antes y después de $a_\beta^n \wedge \gamma$, será constante. Por ello

$$\begin{aligned} \int_{s_\beta}^{\tau^c} e^{-rt} dC^n - \int_{\{s_\beta\}} e^{-rt} dC &= \int_{[a_\beta^n \wedge \gamma, \tau^c]} e^{-rt} dC^n - \int_{\{s_\beta\}} e^{-rt} dC \\ &= e^{-r(a_\beta^n \wedge \gamma)} \Delta C^n(a_\beta^n \wedge \gamma) - e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta) \quad (4.1.19) \\ &= e^{-r(a_\beta^n \wedge \gamma)} \Delta C(s_\beta) - e^{-r(s_\beta)} \Delta C(s_\beta). \end{aligned}$$

Entonces, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{\tau^c} e^{-rt} dC^n - \int_{\{s_\beta\}} e^{-rt} dC_t \xrightarrow{c.s} 0,$$

Con esto hemos demostrado una vez más que se cumple (4.1.4). La demostración para el caso 5 y 6 es similar y por ello que omitimos también su demostración. □

Teorema 4.1.2. Sea $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}_+$, una función de clase C^2 por tramos tal que, para cada $i \in \mathbf{S}$, se cumple que:

(i) $F(0, i) = 0$,

(ii) $F(\cdot, i)$ es cóncava sobre \mathbf{R}_+ .

Sea $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$. Suponga que para cada $i \in \mathbf{S}$, cada $r \in \mathbf{R}$, y cada $x \in \mathbf{R}_{++}$ se cumple que

$$\max_{\Sigma} \mathbb{L}f(r, x, i) \mathbf{1}_{\{x \in N_{i, \beta}\}} - e^{-r} - f_x(r, x, i) = 0. \quad (4.1.20)$$

Entonces,

$$V(r, x, i) \leq f(r, x, i) \quad (4.1.21)$$

para todo $(r, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ e $i \in \mathbf{S}$.

Demostración.

Primerodemostraremos que se cumple la desigualdad (4.1.21) sobre el conjunto C_o . Sea C un elemento de C_o , $X = X^C$ y $\tau = \tau^C$ el proceso excedente y el tiempo de ruina respectivamente. Por la observación (4.0.5), se tiene que X^C satisface

$$X_t^C = x + \int_0^t \mu_{\alpha_s} ds + \int_0^t \sigma_{\alpha_s} dW_s - C_t - \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \Lambda}} (C_s - C_{s-}).$$

Aplicando la fórmula de Itô generalizado para el proceso $\{f(r_t, X_t, \alpha_t)\}$ (ver 4.4.7), tenemos

$$\begin{aligned} f(r_t, X_t, \alpha_t) = & f(r, x, i) + \int_0^t \mathbb{L}f(r_s, X_{s-}, \alpha_{s-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s-} \notin N_{\alpha_{s-}}\}} ds \\ & + \int_0^t \sigma_{\alpha_{s-}} f_x(r_s, X_{s-}, \alpha_{s-}) dW_s \\ & + \int_0^t \delta_{\alpha_{s-}} f_r(r_s, X_{s-}, \alpha_{s-}) dB_s \\ & + \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \Lambda}} \sum_{\Sigma} f(r_s, X_s, \alpha_s) - f(r_s, X_{s-}, \alpha_{s-}) \\ & - \int_0^t f_x(r_s, X_{s-}, \alpha_{s-}) dC_s + M_t \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

donde el proceso $\{M_t^f; t \geq 0\}$ es una martingala local con $M_0^f = 0$, **P**-c.s. (ver 4.4.7).

Para cada $k \geq 1$, sea

$$D_k = (-k, k) \times (0, k).$$

Sea $k \geq 1$ tal que $-k < r_0 = r < k$ y $0 < X_0 = x < k$. Para cada $k \geq 1$, consideramos el primer tiempo de salida del proceso (r_t, X_t) conjunto D_k

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0; (r_t, X_t) \notin D_k\}.$$

A partir de la observación (4.0.5) y $X_s = X_{s^-} - \Delta C_s$, podemos reescribir la igualdad (4.1.22) y obtener

$$\begin{aligned} & e^{-rt} F(X_t, \alpha_t) - e^{-r} F(x, i) + \int_0^t e^{-rs} dC_s \\ &= \int_0^t \mathbb{L}f(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{a_s^-}\}} ds + \int_0^t e^{-rs} f_x(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dC_s \\ &+ \int_0^t \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s - \int_0^t \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \wedge}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s + M_t^f. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Entonces, para cada $t \geq 0$ y cada $k \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} & e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) - e^{-r} F(x, i) + \int_0^{a_k} e^{-rs} dC_s \\ &= \int_0^{a_k} \mathbb{L}f(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{a_s^-}\}} ds + \int_0^{a_k} e^{-rs} f_x(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dC_s \\ &+ \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s - \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq s \leq a_k \\ s \in \wedge}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s + M_{a_k}^f \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

donde $a_k = t \wedge \tau_{D_k}$, $k = 1, 2, \dots$ Tomando esperanza condicional con respecto a $r_0 = r$,

$X_0 = x$, y $\alpha_0 = i$, a la igualdad (4.1.24)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) - e^{-r} F(x, i) + \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} e^{-rs} dC_s \\
&= \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{\infty} \mathbf{L}f(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in N_{a_s}\}} ds \\
&+ \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} e^{-rs} - f_x(r_s, X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dC_s^c \\
&+ \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s + \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} M_{a_k}^{q_k} \\
&- \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s \\
&+ \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{0 \leq s \leq a_k} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_{s^-}) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s.
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

De la hipótesis se tiene que para cada $i \in S$, $f(r, x, i)$ satisface la ecuación (4.1.20) para $(r, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++}$. Entonces,

$$\mathbf{L}f(r, x, i) \mathbf{1}_{\{x \in N_i\}} \leq 0 \quad \text{y} \quad e^r \leq f_x(r, x, i).$$

Así, para cada $s \in [0, a_k]$, tenemos

$$\mathbf{L}f(r_s, X_s, \alpha_s) \mathbf{1}_{\{s; X_s \in N_{a_s}\}} \leq 0 \quad \text{y} \quad e^{r_s} \leq f_x(r_s, X_s, \alpha_s).$$

Usando esto en la expresión (4.1.25), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) - e^{-r} F(x, i) + \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} e^{-rs} dC_s \\
&\leq \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq s \leq a_k \\ s \in \Lambda}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s \\
&+ \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s + \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} M_{a_k} \\
&- \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s.
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

El siguiente paso es reducir esta última expresión, para ello debemos tener presente que $(r_s, X_s) \in D_k$, cuando $s \in [0, a_k]$. Es decir, $r_s \in [-k, k]$ y $X_s \in [0, k]$, cuando $s \in [0, a_k]$.

Afirmamos que las integrales estocásticas

$$\int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s + \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s \quad (4.1.27)$$

son martingalas para cada k fijo. En efecto:

- Cuando $s \in [0, a_k)$ se tiene que $r_s \in [-k, k]$ y $X_s \in [0, k]$, recordemos que para cada $i \in \mathbf{S}$, la función $F(\cdot, i)$ es continua y $f(r, x, i) = e^{-r} F(x, i)$ para $(r, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Así, $f(r_s, X_s, \alpha_s)$ es acotado para cada $s \in [0, a_k)$. Además, observemos que a partir del hecho que para cada $i \in \mathbf{S}$, la función $f(\cdot, \cdot, i)$, satisface la ecuación (4.1.20) obtenemos que $F(\cdot, i)$ es creciente. Esto es debido a que para cada $i \in \mathbf{S}$, se tiene $F_x(x, i) \geq 1$. Así, cuando $x \in [0, k]$, se tiene

$$\max_{i \in \mathbf{S}} F(x, i) \leq \max_{i \in \mathbf{S}} F(k, i) = K_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-2rs} F^2(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds &\leq \hat{\delta}^2 K_1^2 e^{2k} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^t ds \\ &\leq \hat{\delta}^2 K_1^2 e^{2k} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^t ds < \infty, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, \infty)$, lo que implica

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s = 0.$$

- Procediendo de manera analoga que en el paso anterior se tiene que el proceso $f_x(r_s, X_s, \alpha_s) = e^{-rs} F_x(X_s, \alpha_s)$ es acotado para cada $s \in [0, a_k)$. Además, para cada $i \in \mathbf{S}$, la función $F_x(\cdot, i)$ es decreciente por ser cóncavo. Así, para $x \in [0, k]$, se tiene

$$\max_{i \in \mathbf{S}} F_x(x, i) \leq \max_{i \in \mathbf{S}} F_x(0, i) = K_2.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-2rs} F_x^2(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds &\leq \hat{\sigma}^2 K^2 e^{2k} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} ds \\ &\leq \hat{\sigma}^2 K^2 e^{2k} \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^\infty ds < \infty, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, \infty)$, lo que implica

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_x(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s = 0.$$

Con el mismo argumento utilizado en el capítulo anterior para obtener la desigualdad (3.1.17) podemos afirmar que $\{M^f; t \geq 0\}$ es una martingala cuadrado

integrable con media $\mathbf{E}_{r,x,i} M_{t \wedge \tau_{D_k}}^f = 0$.

Así, de la desigualdad (4.1.26), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_k e^{-ra_k} F(X_{a_k}, \alpha_{a_k}) - e^{-r} F(x, i) + \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{a_k} e^{-rs} dC_s \\ \leq \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{\substack{0 \leq s \leq a_k \\ s \in \Lambda}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Analizaremos el último término del lado derecho de la expresión (4.1.28). A partir de que para cada $i \in S$, la función $F(\cdot, i)$ satisface la desigualdad $F_x(x, i) \geq 1$ para $x > 0$ y por el Teorema de valor medio, tenemos

$$\Delta C_s \leq F(X_{s^-}, \alpha_s) - F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s).$$

Definamos el conjunto de instantes donde saltan C y α , por

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{s \geq 0; \alpha_s \neq \alpha_{s^-} \text{ y } C_s = C_{s^-}\}, \\ \Lambda_2 &= \{s \geq 0; \alpha_s = \alpha_{s^-} \text{ y } C_s \neq C_{s^-}\}. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Como la estrategia C no salta en el mismo instante en que lo hace α , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \wedge \tau \\ s \in \Lambda}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) + \Delta C_s \\ = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \wedge \tau \\ s \in \Lambda_2}} e^{-rs} F(X_{s^-} - \Delta C_s, \alpha_s) - F(X_{s^-}, \alpha_s) + \Delta C_s, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

por tanto, la expresión (4.1.28) es reducida a

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge k} e^{-rt \wedge \tau_k} F(X_{t \wedge k}, \alpha_{t \wedge \tau_k}) + \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} dC_s \leq e^{-r} F(x, i), \quad (4.1.31)$$

y por propiedad de l'ímite inferior

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau_k} e^{-rt \wedge \tau_k} F(X_{t \wedge \tau_k}, \alpha_{t \wedge \tau_k}) + \int_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} dC_s \leq e^{-r} F(x, i). \quad (4.1.32)$$

Observemos que cuando $k \rightarrow \infty$, tenemos las siguientes convergencias de sucesiones de variables positivas

$$\int_0^{t \wedge \tau_k} e^{-rs} dC_s \xrightarrow{c.s.} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} dC_s, \quad (4.1.33)$$

$$e^{-rt \wedge \tau_k} F(X_{t \wedge \tau_k}, \alpha_{t \wedge \tau_k}) \xrightarrow{c.s.} e^{-rt \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}).$$

Esta última convergencia es por la Proposición 3.1.5. Por el Lema de Fatou aplicado a la desigualdad (4.1.32), tenemos

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-rs} dC_s \leq \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{t \wedge \tau} e^{-rt \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}, \alpha_{t \wedge \tau}) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} dC_s \leq e^{-r} F(x, i). \quad (4.1.34)$$

Aplicando el Teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{\tau} e^{-rs} dC_s \leq e^{-r} F(x, i).$$

Con esta desigualdad demostramos la desigualdad (4.1.21) sobre el conjunto C_o , ya que la estrategia C es arbitraria. Así,

$$\sup_{C \in C_o} \mathbf{E}_{r,x,i} \sum_{\tau} e^{-rs} dC_s \leq f(r, x, i) \quad (4.1.35)$$

Para extender la desigualdad (4.1.35) sobre el conjunto C_∞ , recordemos que por el Lema 4.1.1, para cualquier estrategia admisible existe una sucesión de estrategias C^n en C_o , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^{C^n}} e^{-rt} dC^n = \int_0^{\tau^{C \wedge T}} e^{-rt} dC_t, \quad \text{c.s.}$$

Debido a esto y por el Lema de Fatou, resulta

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau^c \wedge T} e^{-rt} dC_t \leq \liminf \mathbf{E} \int_0^{\tau^c} e^{-rt} dC_t^n .$$

Entonces,

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau^c \wedge T} e^{-rt} dC_t \leq f(r, x, i).$$

Por último, aplicando el Teorema de convergencia monótona cuando $T \rightarrow \infty$, se tiene

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau^c} e^{-rt} dC_t \leq f(r, x, i). \quad (4.1.36)$$

Así,

$$V(r, x, i) \leq f(r, x, i).$$

□

4.2. Construcción

Al igual que en el capítulo anterior intentaremos encontrar una solución F de clase C^2 por tramos para la ecuación (4.1.20) y que además para cada $i \in S$, satisfaga las siguientes condiciones:

1. $F(0, i) = 0$.
2. La función $F(\cdot, i)$ es creciente.
3. La función $F(\cdot, i)$ es cóncava.

El procedimiento para encontrar esta función también está basada en el trabajo realizado por Sotomayor y Cadenillas en [23].

Debemos tener presente que la función f dada por $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$ satisface la ecuación (4.1.20) si y solo si F satisface la siguiente ecuación

$$\max \{ \mathbf{L}(x, i), 1 - F_x(x, i) \} = 0, \quad (4.2.37)$$

donde

$$\mathbf{L}(x, i) = \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu_i F_x(x, i) - r_i F(x, i) + \sum_{j \geq 1} q_{ij} F(x, j).$$

Observemos que la función indicadora es omitida en la ecuación (4.2.37). Esta función indicadora era necesaria para evitar aquellos puntos donde la segunda derivada no existía. Esta omisión no afectará los cálculos ya que cuando intentemos encontrar la solución del sistema (4.2.37) se tendrá presente en cuáles puntos la segunda derivada pueda no existir. Definimos para cada $i \in S$,

$$b_i := \inf\{x \geq 0; F_x(x, i) \leq 1\},$$

y supondremos que $\min\{b_i; i \in S\} > 0$.

A partir de la definición de b_i se tiene que $F_x(x, i) > 1$, para todo $x \in (0, b_i)$. Entonces, de la ecuación (4.2.37), tenemos que la función F satisface

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu_i F_x(x, i) - r_i F(x, i) + \sum_{j \geq 1} q_{ij} F(x, j) = 0. \quad (4.2.38)$$

Debido a la suposición 3 y 4 dadas al inicio de la presente sección tenemos que cuando $x \in [b_i, \infty)$,

$$F_x(x, i) = 1.$$

Bajo esta suposición tenemos que $F_{xx}(b_{i+}, i) = 0$ y podemos asumir que $F_{xx}(b_{i-}, i) = 0$. Entonces, la función F que necesitamos debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \square & \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu_i F_x(x, i) - (r_i + \lambda_i) F(x, i) = - \sum_{j \neq i} q_{ij} F(x, j), & 0 < x < b_i, \\ \square & F(x, i) = x + \hat{K}_i, & b_i \leq x, \\ \square & F_{xx}(b_i, i) = 0, \\ \square & F(0, i) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

para cada $i \in S$.

Caso: dos regímenes

Nos restringiremos al caso de dos regímenes, $S = \{1, 2\}$. Bajo este caso tenemos solo 2 límites b_1, b_2 y la relación entre ellos dependerá de la relación entre los parámetros

del modelo. El sistema (4.2.39) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \square & \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu_i F_x(x, i) - (r_i + \lambda_i) F(x, i) = -\lambda_i F(x, 3 - i), \quad 0 < x < b_i, \\
 \square & F(x, i) = x + \hat{K}_i, \quad b_i \leq x, \\
 & F(0, i) = 0, \\
 \square & F_x(b_i, i) = 1, \\
 \square & F_{xx}(b_i, i) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

para $i \in S = \{1, 2\}$. Para hallar la solución de este sistema consideraremos sin pérdida de generalidad que $b_1 < b_2$. Así, cuando $x \in (0, b_1)$, F satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 \square & \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, 1) + \mu_1 F_x(x, 1) - (r_1 + \lambda_1) F(x, 1) = -\lambda_1 F(x, 2), \\
 \square & \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, 2) + \mu_2 F_x(x, 2) - (r_2 + \lambda_2) F(x, 2) = -\lambda_2 F(x, 1).
 \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

Y cuando $x \in [b_1, b_2)$, F satisface

$$\begin{aligned}
 \square & \frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, 2) + \mu_2 F_x(x, 2) - (r_2 + \lambda_2) F(x, 2) = -\lambda_2 F(x, 1). \\
 \square & F(x, 1) = x + \hat{K}_1.
 \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

La siguiente proposición nos indicará cuál es la solución para el sistema (4.2.42).

Proposición 4.2.1. Si $0 < b_1 < b_2$ y se cumple el sistema (4.2.40) entonces

$$F(x, 2) = \frac{\alpha_1^j r_2 e^{-\alpha_1^j(x-b_2)}}{\alpha_1^j \mu_2 \lambda_2 + \lambda_2 \hat{K}_2 + \lambda_2^2} + \frac{\alpha_1^j r_2 e^{-\alpha_1^j(x-b_2)}}{\alpha_1^j \mu_2 \lambda_2 + \lambda_2 \hat{K}_2 + \lambda_2^2} + \frac{\lambda_2 x}{r_2 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2 x}{r_2 + \lambda_2} \tag{4.2.43}$$

Demostración.

Cuando $0 < b_1 \leq x < b_2$, se sigue a partir del sistema (4.2.40) que

$$\frac{\sigma^2}{2} F_{xx}(x, 2) + \mu_2 F_x(x, 2) - (r_2 + \lambda_2) F(x, 2) = -\lambda_2(x - \hat{K}_1),$$

resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria tenemos que la solución es dada por

$$F(x, 2) = K_1 e^{\alpha_1^j x} + K_2 e^{\alpha_2^j x} + K_3 x + K_4,$$

donde $\alpha^1 < 0 < \alpha^2$ son las raíces de la ecuación característica, $\varphi(\alpha) := \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \mu\alpha - (\lambda_2 + r_2)$. Los coeficientes K_3 y K_4 (encontrados a partir de la solución homogénea) son

$$K_3 = \frac{\lambda_2}{r_2 + \lambda_2} \quad y \quad K_4 = \frac{\mu\lambda_2 + \lambda_2\hat{K}_1(r_2 + \lambda_2)}{(r_2 + \lambda_2)^2}, \quad (4.2.44)$$

usando las condiciones $F_x(b_2, 2) = 1$ $F_{xx}(b_2, 2) = 0$, tenemos

$$K_1 = \frac{\alpha^2 r_2 e^{-\alpha^1 b_2}}{\alpha^1(\alpha^2 - \alpha^1)(r_2 + \lambda_2)} < 0 \quad y \quad K_2 = \frac{\alpha^1 r_2 e^{-\alpha^2 b_2}}{\alpha^2(\alpha^1 - \alpha^2)(r_2 + \lambda_2)} > 0. \quad (4.2.45)$$

□

El procedimiento para hallar la solución del sistema (4.2.41) es idéntica que en el capítulo anterior. Este sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas tiene como ecuación característica a

$$\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha) = \lambda_1\lambda_2,$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi^1(\alpha) &:= \frac{\sigma^2}{2}\alpha + \mu - \alpha_1(\lambda + r_1), \\ \varphi^2(\alpha) &:= \frac{\sigma^2}{2}\alpha + \mu - \alpha_2(\lambda + r_2). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.2.1, se tiene que la ecuación tiene 4 raíces $\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. Por tanto, la solución de (4.2.41) es de la forma A.8 y A.9

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \sum_{k=1}^4 a_k e^{\alpha_k x}, \\ F(x, 2) &= -\lambda_1^{-1} \sum_{k=1}^4 \varphi_1(\alpha_k) a_k e^{\alpha_k x}. \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Recordemos que cuando $x \in [b_2, \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= x + \hat{K}_1, \\ F(x, 2) &= x + \hat{K}_2. \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Como para cada $i \in \mathcal{S}$, la función $F(\cdot, i)$, debe satisfacer la condición 4 dada al inicio de la presente sección entonces, los límites b_1 y b_2 , los coeficientes a_k , $k = 1, 2, 3, 4$ y las

constantes \hat{K}_1 , y \hat{K}_1 deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}
 F(0, 1) &= F(0, 2) = 0, \\
 F(b_{1-}, 1) &= F(b_{1+}, 1), \\
 F(b_{1-}, 2) &= F(b_{1+}, 2), \\
 F(b_{2-}, 2) &= F(b_{2+}, 2), \\
 F_x(b_{1-}, 1) &= 1, \\
 F_x(b_{1-}, 2) &= F_x(b_{1+}, 2), \\
 F_{xx}(b_{1-}, 1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.48}$$

4.3. Verificación

En la presente sección demostraremos que la función obtenida en la anterior sección satisface las condiciones de la hipótesis del Teorema 4.1.2 y por tanto esta función es mayor o igual que la función de valor.

Teorema 4.3.1. *Suponga que b_k , \hat{K}_k , $k = 1, 2$, y a_k , $k = 1, 2, 3, 4$, constituyen una solución del sistema de ecuaciones (4.2.48). Sea f , la función dada por*

$$\begin{aligned}
 f(r, x, 1) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{j=1}^4 a_j e^{\alpha_j x}, & \text{si } x \in [0, b_1], \\ e^{-r}(x + \hat{K}_1), & \text{si } x \in [b_1, \infty), \end{cases} \\
 y \\
 f(r, x, 2) &= \begin{cases} e^{-r} \sum_{k=1}^4 \frac{-\varphi_1(\alpha_k)}{\lambda_1} a_k e^{\alpha_k x}, & \text{si } x \in [0, b], \\ e^{-r}(K_1 e^{\alpha_1 x} + K_2 e^{\alpha_2 x} + K_3 x + K_4), & \text{si } x \in [b, b], \\ e^{-r}(x + \hat{K}_2), & \text{si } x \in [b, \infty), \end{cases} \tag{4.3.49}
 \end{aligned}$$

donde K_j , para $j = 1, 2, 3, 4$, son dados en (4.2.45) y (4.2.44). Suponga además que

$$a_1^3 e^{\alpha_1 x} + a_2^3 e^{\alpha_2 x} + a_3^3 e^{\alpha_3 x} + a_4^3 e^{\alpha_4 x} > 0$$

y que

$$\varphi_1(\alpha_1) a_1^3 e^{\alpha_1 x} + \varphi_1(\alpha_2) a_2^3 e^{\alpha_2 x} + \varphi_1(\alpha_3) a_3^3 e^{\alpha_3 x} + \varphi_1(\alpha_4) a_4^3 e^{\alpha_4 x} < 0.$$

Entonces, $f(r, x, i) \geq V(r, x, i)$ para todo $(r, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ y para $i = 1, 2$.

Demostración.

A partir de que los coeficientes y constantes presentes en las expresiones de $F(\cdot, 1)$ y $F(\cdot, 2)$ (ver (4.2.46) y (4.2.47)) satisfacen el sistema de ecuaciones (4.2.48), tenemos que $F(\cdot, 1)$ es de clase C^2 y $F(\cdot, 2)$ es de clase C^2 por tramos, observemos que la segundas derivadas laterales de esta función en $x = b_2$, existen pero no son iguales. Recordemos que para cada $i = 1, 2$, teníamos que $b_i := \inf\{x \geq 0; F_x(x, i) \leq 1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_x(x, i) &> 1 && \forall x \in [0, b_i), \\ F_x(x, i) &= 1 && \forall x \in [b_i, \infty). \end{aligned}$$

Por tanto, para cada $i = 1, 2$, la función $F(\cdot, i)$ es estrictamente creciente. La función $F(\cdot, 1)$ es cóncava. En efecto, si $x \in [0, b_1)$ entonces

$$F_{xxx}(x, 1) = a^3 e^{a_1 x} + a^3 e^{a_2 x} + a^3 e^{a_3 x} + a^3 e^{a_4 x} > 0.$$

Por tanto, $F_{xx}(x, 1)$ es estrictamente creciente sobre $[0, b_1)$ y

$$\begin{aligned} F_{xx}(x, 1) &< F_{xx}(b_1^-, 1) = F_{xx}(b_1, 1) = 0, && \forall x \in [0, b_1), \\ F_{xx}(x, 1) &= 0, && \forall x \in [b_1, \infty). \end{aligned}$$

Así, la función $F(\cdot, 1)$ es cóncava. Usando el mismo argumento anterior tenemos que $F_{xx}(x, 2) < 0$ sobre $[0, b_1)$. Cuando $x \in [b_1, b_2)$, tenemos que

$$F_{xx}(x, 2) = \frac{\alpha_1^j \alpha_2^j r_2}{(\alpha_2^j - \alpha_1^j)(r_2 + \lambda_2)} (e^{\alpha_1^j(x-b_2)} - e^{\alpha_2^j(x-b_2)}) < 0.$$

De esta desigualdad, $F(\cdot, 2)$ es también una función cóncava. El sistema de ecuaciones (4.2.48) garantiza que $F(0, 1) = F(0, 2) = 0$. Solo resta probar que f satisface la ecuación (4.1.20), que es equivalente a que para cada $i = 1, 2$, $F(\cdot, i)$ satisface la ecuación

$$\text{máx}\{\mathbf{L}(x, i), 1 - F_x(x, i)\} = 0, \quad (4.3.50)$$

donde

$$\mathbf{L}(x, i) = -\frac{\sigma_i^2}{2} F_{xx}(x, i) + \mu F_x(x, i) - r F(x, i) - \lambda F(x, i) + \lambda F(x, 3-x, i).$$

A partir del sistema de ecuaciones (4.2.48), se tiene que $\mathbf{L}(\cdot, 1)$ es continua sobre $[0, \infty)$ y que $\mathbf{L}(\cdot, 2)$ es continua sobre $[0, \infty)$ excepto en $x = b_1$. Cuando $x \in (0, b_1)$, para cada

$i = 1, 2$, las funciones $F(\cdot, i)$ resuelven el sistema (4.2.41). Por tanto,

$$\mathbf{L}(x, 1) = \mathbf{L}(x, 2) = 0, \quad \forall x \in (0, b_1).$$

Además, para cada $i = 1, 2$, la función $F(x, i) > 1$, porque $x \in (0, b_1) \subset (0, b_2)$. Lo cual implica que para cada $i = 1, 2$, la ecuación (4.3.50) es satisfecha en $(0, b_1)$. Recordemos que cuando $x \in [b_1, b_2)$, la función $F(\cdot, 2)$ es la solución del sistema (4.2.42) y por la definición de b_2 se tiene que

$$F(x, 2) > 1 \quad \forall x \in [b_1, b_2).$$

Así, la ecuación (4.3.50) es satisfecha para $i = 2$, en $[b_1, b_2)$. Ahora falta demostrar que para $i = 1$, la ecuación (4.3.50) es satisfecha en $[b_1, b_2)$. Para ello observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x(x, 1) &= -(\lambda_1 + r_1) + \lambda_i F_x(x, 2), & \forall x \in [b_1, \infty), \\ \mathbf{L}_{xx}(x, 1) &= \lambda_i F_{xx}(x, 2) < 0, & \forall x \in (b_1, \infty). \end{aligned}$$

Así, las funciones $\mathbf{L}_x(\cdot, 1)$ y $\mathbf{L}_{xx}(\cdot, 1)$ son continuas sobre (b_1, ∞) y $\mathbf{L}(\cdot, 1)$ es cóncava sobre ese conjunto. Por otro lado, la función $F(\cdot, 1)$ que es la solución de (4.2.41) sobre $(0, b_1)$ satisface

$$\lambda F(x, 2) = \frac{\sigma^2}{2} F(x, 1) - \mu F_{xx}(x, 1) + (r + \lambda) F(x, 1).$$

Del sistema de ecuaciones (4.2.48) se tiene que $F_x(b_{1-}, 1) = 1$ y $F_{xx}(b_{1-}, 1) = 0$. Recordemos que bajo nuestras hipótesis, la función $F_{xxx}(x, 1) > 0$ sobre $(0, b_1)$. En particular $F_{xxx}(b_{1-}, 1) \geq 0$, y además a partir de la definición de $\varphi_1(\alpha)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 F_x(b_{1-}, 2) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\varphi_1(\alpha_k) \alpha_k e^{\alpha_k b_1} a_k \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^3 e^{\alpha_k b_1} a_k - \mu \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^2 e^{\alpha_k b_1} a_k + (r + \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha e^{\alpha_k b_1} a_k \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} F_{xxx}(b_{1-}, 1) - \mu F_{xx}(b_{1-}, 1) + (r_1 + \lambda_1) F_x(b_{1-}, 1) \leq \lambda_1 + r_1. \end{aligned}$$

Teniendo presente esta desigualdad y que $\mathbf{L}(\cdot, 1)$ es cóncava sobre (b_1, ∞) , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x(x, 1) &\leq \mathbf{L}_x(b_1, 1) = -(r_1 + \lambda_1) + \lambda_1 F_x(b_1, 2) \\ &= -(r_1 + \lambda_1) + \lambda_1 F_x(b_{1-}, 2) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.3.51}$$

A partir de esto, tenemos que $\mathbf{L}(\cdot, 1)$ es decreciente sobre (b_1, ∞) . En particular tenemos que

$$\mathbf{L}(x, 1) \leq \mathbf{L}(b_1, 1) = 0, \quad \forall x \in [b_1, b_2).$$

Esto demuestra que la ecuación (4.3.50) es satisfecha en el intervalo $[b_1, b_2)$. Por último, resta probar que para $i = 1, 2$, la ecuación (4.3.50) también es satisfecha en $[b_2, \infty)$. Debido a que $\mathbf{L}(\cdot, 1)$ es decreciente, se tiene

$$\mathbf{L}(x, 1) \leq \mathbf{L}(b_2, 1) \leq \mathbf{L}(b_1, 1) = 0, \quad \forall x \in [b_2, \infty).$$

Además,

$$\mathbf{L}_x(x, 2) = -(r_1 + \lambda_1) + \lambda_1 < 0.$$

Por tanto, $\mathbf{L}(\cdot, 2)$ es estrictamente decreciente sobre $[b_2, \infty)$. Así

$$\mathbf{L}_x(x, 2) \leq \mathbf{L}(b_2, 2) = \mathbf{L}(b_2^-, 2) \leq 0.$$

Esto demuestra que la ecuación (4.3.50) es satisfecha en $[b_2, \infty)$. Por todo lo anterior se demostró que para cada $i = 1, 2$, la función $F(\cdot, i)$ satisface la ecuación (4.3.50) que es equivalente a que la función f dado por $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$, satisface la ecuación (4.1.20). \square

4.4. Una estrategia óptima

En la sección anterior se demostró, bajo ciertas condiciones, que una función f de la forma $f(r, x, i) = e^{-r}F(x, i)$ cumple que

$$f(r, x, i) \geq V^C(r, x, i), \quad \text{para toda estrategia admisible } C.$$

En la presente sección, intentaremos construir una estrategia asociada a la función F que cumple con las condiciones del Teorema 4.1.2 y que satisface la ecuación (4.2.37). Conjeturamos que esta estrategia podría ser la óptima. Esta conjetura es producto de los diversos resultados obtenidos anteriormente sobre la estrategia óptima cuando el proceso de reserva es modelado por un proceso de difusión con o sin cambio de régimen con tasa de pago de dividendos no acotada (por ejemplo, [2], [6], [12] y [27]) y los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Para observar esto, asumimos por el momento que hay un único régimen presente

$S = \{i\}$. En el trabajo realizado por Julia Eisenberg, en [6], donde el factor de descuento es modelado por un movimiento Browniano, se muestra que la estrategia óptima C^* es una estrategia de barrera constante en el nivel

$$\hat{x}_i = \frac{2 \ln(\frac{\zeta_i}{\theta_i})}{\theta_i - \zeta_i},$$

donde

$$\zeta_i = \frac{-\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 + 2\sigma_i^2(m_i - \frac{\delta_i^2}{2})}}{\sigma_i^2} \quad \text{y} \quad \theta_i = \frac{-\mu_i + \sqrt{\mu_i^2 + 2\sigma_i^2(m_i - \frac{\delta_i^2}{2})}}{\sigma_i^2}.$$

De acuerdo a esta estrategia, el excedente de la reserva sobre el nivel \hat{x}_i es inmediatamente pagado como dividendo, es decir,

$$c_i^* = \max_{0 \leq s \leq \tau \wedge t} \sup_{X_s^0 - \hat{x}_i, 0},$$

donde

$$X_s^0 = x + \mu_i s + \sigma_i W \quad \text{y} \quad \tau \text{ denota el tiempo de ruina bajo } C^*.$$

La correspondiente función de valor es dada por

$$V(r, x) = \begin{cases} e^{-r} \frac{e^{\theta_i x} - e^{\zeta_i x}}{\theta_i e^{\theta_i \hat{x}_i} - \zeta_i e^{\zeta_i \hat{x}_i}}, & \text{si } x \in [0, \hat{x}_i), \\ e^{-r} \frac{\mu_i}{m_i - \frac{\delta_i}{2}} + x - \hat{x}_i, & \text{si } x \in [\hat{x}_i, \infty), \end{cases}$$

A partir de lo anterior, se observa que cuando hay un solo régimen o estado, existe una única barrera o nivel \hat{x}_i , que depende de los parámetros presentes en el modelo. Es entonces razonable pensar que para un modelo con cambio de régimen con n estados, deberían existir n barreras. Esta idea se acerca a la definición de *estrategia de barrera modulada* en el nivel $b = \{b_i; i \in S\}$, dada en [12], que es una estrategia que paga el excedente de la reserva sobre el nivel dependiente de régimen.

Definición 4.4.1. Una estrategia de barrera modulada en el nivel $b = \{b_i; i \in S\}$ es una estrategia $C^b \in C_\infty$ que satisface:

1. $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t^b < b_{as}\}} dC^b = 0,$
2. $X^b \leq b_{as}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$

donde X^b es el proceso de (2.1.2) correspondiente a C^b .

De acuerdo a esta estrategia, los dividendos solo son pagados cuando X^b está en la barrera b , que implica que el proceso C^b es un tiempo local. Se puede verificar que C^b puede ser expresado explícitamente como sigue:

$$C_t^b = \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ x + \int_0^s \mu_{\alpha_u} du + \int_0^s \sigma_{\alpha_u} dW_u - b_{\alpha_s}, 0 \right\}.$$

Para conocer quienes serían ser los candidatos a barreras óptimas, observemos que para cada $i \in \mathbf{S}$, la solución $F(\cdot, i)$ de (4.2.37) divide el intervalo $[0, \infty)$ en dos regiones:

Región de continuación:

$$\mathbf{C}(i) := \{x > 0; \mathbf{L}(x, i) = 0 \text{ y } 1 - F_x(x, i) < 0\}. \quad (4.4.52)$$

Región de intervención:

$$\mathbf{\Sigma}(i) := \{x > 0; \mathbf{L}(x, i) < 0 \text{ y } 1 - F_x(x, i) = 0\}. \quad (4.4.53)$$

Para cada $i \in \mathbf{S}$, definimos $b_i^* := \inf\{x > 0; F_x(x, i) \leq 1\}$. Supongamos que existe el nivel $b^* = \{b_i^*; i \in \mathbf{S}\}$, con $0 < b_i^* < \infty$, asociado a la función F . Entonces podemos construir la estrategia C^{b^*} como

$$C_t^{b^*} = \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ X_s - b_{\alpha_s}^*, 0 \right\},$$

donde $X_s = x + \int_0^s \mu_{\alpha_u} du + \int_0^s \sigma_{\alpha_u} dW_u$. Observamos que $C_{b_0^*}^{b^*} > 0$ si y solo si $x > b_{\alpha_0}^*$.

Como se indicó al inicio de esta sección conjeturamos una posible estrategia óptima en base a resultados anteriores. Esta estrategia es C^{b^*} , que consiste en pagar como dividendos el exceso de las reservas por encima de una cierta barrera óptima, donde esta barrera salta hacia arriba o hacia abajo exactamente en el momento en que el régimen cambia. Por tanto, en el momento de un cambio de régimen, cuando los parámetros claves del modelo pueden cambiar, sería óptimo realizar un pago de dividendos, $C_t^{b^*} - C_{t^-}^{b^*}$, en el instante t , concretamente cuando el nivel salta por debajo del nivel actual de la reserva.

Conclusiones

En esta tesis, aplicamos la teoría de control óptimo estocástico con cambio de régimen para resolver un problema importante de economía financiera. Este problema consiste en maximizar el valor esperado de los dividendos acumulados descontados hasta el tiempo de ruina del proceso de reserva pero considerando una tasa de descuento estocástico. El proceso de reserva se ve afectado por condiciones (macro)-económicas que pueden generar períodos de crecimiento económico y períodos de recesión económica. Es por ello que utilizamos una cadena de Markov con espacio de estados finito para modelar el cambio de régimen.

Cuando formulamos el problema consideramos dos casos: cuando la tasa de pago de dividendos es acotada y cuando esta tasa no es acotada. En ambos casos el objetivo era encontrar la función de valor y una estrategia óptima. Para ello hemos supuesto varias condiciones que son propias de este tipo de problemas y otras para adaptarla a un tipo de función de clase C^2 por tramos.

En el primer caso, bajo ciertas condiciones, hemos podido encontrar la función de valor de manera explícita y una estrategia óptima. La estrategia óptima encontrada sigue siendo una estrategia de barrera como en los otros modelos en los que no se considera el cambio de régimen. Esta estrategia de barrera consiste en pagar la máxima tasa de dividendo si el proceso excedente se encuentra por encima de una barrera y no pagar nada si se encuentra por debajo de la barrera.

Nuestro modelo resalta la importancia de tener presente el régimen en el cual se encuentra la compañía, esto es debido a que mientras la estrategia óptima en modelos sin cambio de régimen solo depende que el excedente se encuentre por debajo o por encima de una barrera para así poder pagar o no dividendos, la estrategia en nuestro modelo dependerá además del régimen de la economía. Es decir, que para pagar dividendos óptimos, la compañía debe considerar primero en que régimen se encuentra la

economía, y luego verificar que el nivel de reserva (excedente) bajo esta estrategia sea mayor o igual a una cierta barrera que depende del régimen.

En el caso de tasa de pago de dividendos no acotada, hemos podido encontrar condiciones suficientes para que una función sea mayor o igual que la función de valor. Además, conjeturamos sobre una posible estrategia óptima basándonos en diversos similares de trabajos anteriores los cuales consideraban o no el cambio de régimen. En el caso que la tasa de pagos de dividendos no es acotada. Al tener presente las características de estas estrategias óptimas, conjeturamos que una estrategia óptima para nuestro modelo debe ser una estrategia de barrera modulada, que consiste en pagar como dividendos el excedente de las reservas por encima de ciertas barreras óptimas y no pagar nada si se encuentra por debajo de esta. Este candidato a estrategia óptima está asociado a la función que cumple con las condiciones del teorema principal del capítulo de tasa no acotada.

Apéndice

Exponencial estocástica

Para cada martingala local continua M_t con $M_0 = 0$, la exponencial estocástica de M_t es definido como

$$\varepsilon(M)_t = e^{\frac{M_t - \frac{1}{2}[M]_t}{1}}, \quad t \geq 0,$$

donde $[M]_t$ es la variación cuadrática de M_t .

Teorema 4.4.2. (Condición de Novikov)

Sea $T > 0$ y M_t un martingala local continua con $M_0 = 0$. Supongamos que

$$\mathbf{E} e^{\frac{1}{2}[M]_T} < \infty. \quad (4.4.54)$$

Entonces, $\varepsilon(M)_t, 0 \leq t \leq T$ es una martingala continua con media igual a uno.

Demostración.

El resultado es probado en [14] página 226. □

Si $h(t)$ es un proceso F_t -adaptado y existe una constante $K > 0$ tal que

$$|h(t)| \leq K, \quad \forall t \in [0, T],$$

es conocido que $M = \int_0^t h(s)dB_s, 0 \leq t \leq T$, es una martingala cuadrado integrable con $M_0 = 0$ y su variación cuadrática es dada por

$$[M]_t = (M)_t = \int_0^t h(s)^2 dB_s. \quad (4.4.55)$$

En nuestro modelo, teniendo presente la igualdad (4.4.55), podemos concluir que la exponencial estocástica $\varepsilon(M)_t$ para la martingala $M = \int_0^t \theta^2 dB_s$ es dada por

$$\varepsilon(M)_t = e^{-\int_0^t \theta^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^4 ds}, \quad (4.4.56)$$

En este caso,

$$\mathbf{E} e^{\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \delta_i^2 T} \leq \mathbf{E} e^{\frac{1}{2} \hat{\delta}^2 T} < \infty,$$

donde $\hat{\delta} = \max_{i \in S} \delta_i$. Por tanto, a partir de (4.4.54), la exponencial $\varepsilon(M)$ es un martingala continua con esperanza igual a uno.

Fórmula de Itô para una función de clase C^2 por tramos

Recordemos el Teorema de la fórmula de Itô en su versión más simple. Este teorema en esencia nos indica que dado un proceso de difusión de Itô X_t y una función f de clase C^2 entonces el proceso $f(X_t)$ es también un proceso de difusión de Itô.

En diversos trabajos, bajo ciertas condiciones adecuadas, se ha obtenido una extensión de este resultado que funciona bien para funciones continuas no necesariamente suaves. Por ejemplo, Aebi, en [1], obtuvo una versión de esta fórmula donde el proceso subyacente es una semimartingala continua con una estructura especial y la función f es continua con primera y segunda derivada que existen en el sentido distribucional. Föllmer y Shiryaev, en [8], discuten una extensión de la fórmula para un movimiento Browniano estándar unidimensional y una función f absolutamente continua con derivada localmente cuadrado integrable. Este resultado fue ampliado por Föllmer y Protter, en [7], a un movimiento Browniano multidimensional. Karatzas y Shreve, en [13], proporcionan una fórmula de Itô para un proceso Browniano cuando la función f es convexa.

Debemos indicar que en los trabajos anteriormente señalados, los procesos subyacentes son continuos. Con respecto a los procesos discontinuos, la fórmula de Meyer-Itô (ver [20] el Teorema 70, Capítulo IV) proporciona una extensión bastante general de la fórmula de Itô para una semimartingala y para aquellas funciones f que son diferencias de dos funciones convexas pero solo para el caso unidimensional.

En nuestro caso, probaremos una fórmula de Itô para los dos procesos r y X^C (definidos en el capítulo 2 y 3) con cambio de régimen para funciones de clase C^2 por tramos. Antes de demostrar dicho resultado enunciaremos una proposición que garantiza, bajo cierta condición, que casi seguramente la medida de Lebesgue de la cantidad de tiempo que pasa un proceso cadlag en un conjunto de Borel es cero para cualquier conjunto de Borel de medida cero.

Proposición 4.4.3. Sea $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow U \subset \mathbf{R}^d$ un proceso estocástico cadlag sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Suponga que para todos $t \geq 0$, la medida μ_s sobre $(U, \mathbf{B}(U))$, definida por $\mu_s(A) = \mathbf{P}(X_s \in A)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Si $D \subset \mathbf{R}_+ \times U$ es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula entonces, para todo $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : m(\{s \in [0, t] : (s, X_s(\omega)) \in D\}) = 0\}) = 1,$$

donde m es la medida de Lebesgue. En particular, para casi todo $\omega \in \Omega$, el conjunto $\{s \in [0, t] : (s, X_s(\omega)) \in D\}$ es Lebesgue medible para todo $t \geq 0$.

Demostración.

El resultado es probado en [18] página 7. □

Observación 4.4.4. Si $A = [0, t] \times B$, $B \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^d)$ entonces $m(\{s \in [0, t] : (s, X_s) \in A\})$, se puede interpretar como la cantidad de tiempo que el proceso pasa en el conjunto B en el intervalo de $[0, t]$.

Observación 4.4.5. Si B es un conjunto de Borel de medida nula y $t \geq 0$,

$$m(\{s \in [0, t] : X_s \in B\}) = 0, \quad \mathbf{P} - c.s.$$

Para ver esto, basta considerar el conjunto $A = [0, \infty) \times B$ en la proposición anterior.

Observación 4.4.6. Debido a que un proceso cadlag tiene un cantidad numerable de discontinuidades en $[0, t]$, el conjunto de discontinuidades en dicho intervalo es de medida nula. Entonces, si B es un conjunto de medida nula,

$$m(\{s \in [0, t] : X_s \in B\}) = m(\{s \in [0, t] : X_{s-} \in B\}) = 0, \quad \mathbf{P} - c.s.$$

Teniendo presente todo lo anterior podemos demostrar una Fórmula de Itô para una función de clase C^2 por tramos. Recordemos la definición de una función F de clase C^2 por tramos dada en el capítulo 3. La función $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ es de clase C^2 por tramos si, para cada $i \in \mathbf{S}$, existe un conjunto de números reales positivos $N_i = \{b^i_1, b^i_2, \dots, b^i_n\}$, con $b^i_1 < b^i_2 < \dots < b^i_n$, de modo que

1. $F(\cdot, i)$ y $F^j(\cdot, i)$ son continuas.
2. $F^{ij}(\cdot, i)$ existe y es continua sobre $\mathbf{R}_+ \setminus N_i$.

3. Los l'imites

$$F^{ij}(b^{i\pm}, i) := \lim_{x \rightarrow b^{i\pm}} F^{ij}(x, i)$$

existen y son finitos.

Teorema 4.4.7. (F'ormula de Itô para una funci'ón de clase C^2 por tramos)

Sean $F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ una funci'ón de de clase C^2 por tramos y C_t una estrategia admisible (de acuerdo al cap'ıtulo 4). Considere los procesos r , y X dados por

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t \mu_{\alpha_s} ds + \int_0^t \sigma_{\alpha_s} dW_s - C_t \\ r_t &= r + \int_0^t m_{\alpha_s} ds + \int_0^t \delta_{\alpha_s} dB_s. \end{aligned} \quad (4.4.57)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} e^{-r_t} F(X_t, \alpha_t) - e^{-r} F(x, i) &= \int_0^t e^{-r_s} \left[\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s-}}^2 \sum_{j \in \mathbf{S}} F^{jj}(X_{s-}, \alpha_{s-}) + \mu_{\alpha_{s-}} \sum_{j \in \mathbf{S}} F^j(X_{s-}, \alpha_{s-}) \right. \\ &\quad \left. + q_{\alpha_{s-}, j} F(X_{s-}, j) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s-}}^2 \sum_{j \in \mathbf{S}} F^{jj}(X_{s-}, \alpha_{s-}) \right] ds \\ &\geq \int_0^t \sigma_{\alpha_{s-}} e^{-r_s} F^j(X_{s-}, \alpha_{s-}) dW_s \\ &\quad - \int_0^t \delta_{\alpha_{s-}} e^{-r_s} F(X_{s-}, \alpha_{s-}) dB_s \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \sum_{s \in \wedge} e^{-r_s} [F(X_s, \alpha_s) - F(X_{s-}, \alpha_{s-}) \\ &\quad - \int_{[0, t] \times \mathbf{S}} e^{-r_s} [F(X_{s-}, j) - F(X_{s-}, \alpha_s)] \tilde{\pi}(ds, dj), \end{aligned} \quad (4.4.58)$$

donde $\wedge = \{s \geq 0; C_{s-} = C_s\}$ y $\tilde{\pi} = \pi - \nu$ es una medida aleatoria compensada con

- $\pi(dt, dj) = \sum_{s \geq 0} \mathbb{1}_{\{\Delta \alpha_s(\omega) = j\}} \delta_{(s, \alpha_s(\omega))}(dt, dj)$, con $\delta_{(s, z)}$ denotando la medida de Dirac en el punto (s, z) .

- El compensador ν es dado por

$$\nu(dt, dj) = p_{\alpha_{t-}}(j) \sum_{i \in \mathbf{S}} -q_{\alpha_{t-}, i} \delta(dj) dt = q_{\alpha_{t-}, j} \delta(dj) dt, \quad j \in \mathbf{S}$$

donde $p_{\alpha_t^-}(j) = \frac{q_{\alpha_t^-}^j}{-q_{\alpha_t^-, \alpha_t^-}} = P(\alpha_t^- = j | \alpha_t^- = \alpha_t^-)$, y δ es la medida de conteo sobre S .

Demostración.

Para cada $i \in S$ y para cada $n \geq 1$, existe una función H_n^i de clase C^1 tal que

$$\begin{aligned} |H_n^i(x) - F_n^j(x, i)| &\leq \frac{1}{n}, \quad \text{si } x \in I_k^{i,n}, \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin I_k^{i,n}, \end{aligned}$$

donde $I_k^{i,n} := [b_k^i - \frac{1}{n}, b_k^i + \frac{1}{n}]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Sea $F_n^j(\cdot, i)$ la función en \mathbf{R}_+ dada por

$$F_n^j(x, i) = \int_0^x H_n^i(t) dt.$$

Notemos que, para cada $i \in S$, $F_n^j(\cdot, i)$ es una función de clase C^2 (ya que $F_n^j(\cdot, i) = H_n^i$).

Observamos que, para cada $i \in S$,

$$i) |F_n^j(x, i) - F^j(x, i)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para cada } x \geq 0.$$

$$ii) F_n^j(x, i) = F^j(x, i), \quad \text{para cada } x \in \bigcup_{k=1}^{n_i} I_k^{i,n}.$$

En consecuencia, para cada $x \geq 0$,

$$iii) |F_n(x, i) - F(x, i)| = \left| \int_0^x (H_n^i(t) - F^j(t, i)) dt \right| \leq \int_0^x |H_n^i(t) - F^j(t, i)| dt \leq \frac{2n_i}{n}.$$

Podemos asumir además sin pérdida de generalidad que

$$iv) F_n^j(x, i) \in F_n^j(b_k^i, i) - \frac{1}{n}, F_n^j(b_k^i, i) + \frac{1}{n}, \quad \text{si } x \in (b_k^i, b_{k+1}^i),$$

para cada $x \in \bigcup_{k=1}^{n_i} I_k^{i,n}$.

En particular de *iii*), la sucesión $(F_n(\cdot, i))_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $F(\cdot, i)$. Para cada $i \in S$, sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(r, x, i) = e^{-r} F_n(x, i), \quad \forall (r, x, i) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \times S, \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces, para cada $i \in S$, $f_n(\cdot, \cdot, i)$ es de clase C^2 sobre $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Aplicando la fórmula de Itô con cambio de régimen para semimartingalas (ver [24]) a $f_n(r, X_t, \alpha_t)$,

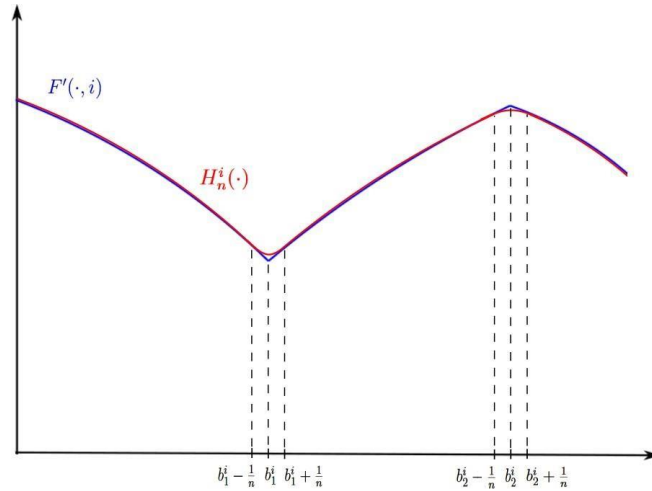


Figura 4.3: Aproximación a la función $F^j(\cdot, i)$ mediante la sucesión H_n^i

para cada $t \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
 e^{-rt} F_n(X_t, \alpha_t) - e^{-rt} F_n(x, i) &= \int_0^t e^{-rs} \left[-\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_s}^2 F_{n, \alpha\alpha}(X_{s-}, \alpha_{s-}) - m_{\alpha_s} F_n(X_{s-}, \alpha_{s-}) + \mu_{\alpha_s} F_n^j(X_{s-}, \alpha_{s-}) \right. \\
 &+ \left. q_{\alpha_s} F_n(X_{s-}, j) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_s} F_n^{jj}(X_{s-}, \alpha_{s-}) \right] ds \\
 &\geq \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_s}^2 e^{-rs} F_{n, \alpha\alpha}(X_{s-}, \alpha_{s-}) dW_s \\
 &- \int_0^t \delta_{\alpha_s} e^{-rs} F_n(X_{s-}, \alpha_{s-}) dB_s \\
 &+ \sum_{0 \leq s \leq t} \sum_{s \in \wedge} e^{-rs} [F_n(X_s, \alpha_s) - F_n(X_{s-}, \alpha_{s-})] \\
 &- \int_0^t e^{-rs} F_n(X_{s-}, \alpha_{s-}) dC_s \\
 &+ \int_{[0,t] \times S} e^{-rs} [F_n(X_{s-}, j) - F_n(X_{s-}, \alpha_s)] \tilde{\pi}(ds, dj).
 \end{aligned} \tag{4.4.59}$$

El resto de la prueba será dividida en los siguientes pasos:

- Cuando $n \rightarrow \infty$, F_n converge uniformemente a F entonces el lado izquierdo de (4.4.59) converge casi seguramente a

$$e^{-rt} F(X_t, \alpha_t) - e^{-rt} F(x, i).$$

- Fijemos $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$. Como la cadena de Markov α es irreducible y el conjunto de estados S es finito se sigue que el número de saltos de $\alpha(\cdot, \omega)$ sobre el conjunto $[0, t]$ es finito, teniendo así que la medida $\tilde{\pi}([0, t], S)$ es finita. Además, debemos tener presente que la función $s \mapsto e^{-rs(\omega)}$ es acotada en $s \in [0, t]$ por ser continua. Por la convergencia uniforme de F_n a F y por lo anterior, se puede afirmar que

$$\int e^{-rs} [F_n(X_{s-}, j) - F_n(X_{s-}, a_s)] \tilde{\pi}(ds, dj) \rightarrow \int e^{-rs} [F(X_{s-}, j) - F(X_{s-}, a_s)] \tilde{\pi}(ds, dj).$$

- Fijemos $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$. Para garantizar la existencia de la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^t e^{-rs} F_n(X_{s-}, a_{s-}) dC_s,$$

tengamos presente que el proceso C^c es creciente y que

- Para cada $n \geq 1$, la función $s \mapsto F_n^j(s, i)$ es continua para cada $i \in S$.
- El proceso $s \mapsto X_{s-}(\omega)$ es continua por partes en $[0, t]$.
- La cadena $s \mapsto \alpha_{s-}(\omega)$ es continua por partes en $[0, t]$.

Tenemos así que la función $s \mapsto F^j(X_{s-}(\omega), \alpha_{s-}(\omega))$ es continua por partes en $[0, t]$. Recordemos que el número de saltos de los procesos X y α son finitos sobre $[0, t]$. De este modo la integral de Lebesgue-Stieltjes está bien definida. Por otro lado, la función $s \mapsto e^{-rs(\omega)}$ es acotada (ya que es continua) en $s \in [0, t]$ y F_n^j converge uniformemente a F^j . Por tanto, en ω ,

$$\int_0^t e^{-rs} F_n^j(X_{s-}, a_{s-}) dC_s^c \rightarrow \int_0^t e^{-rs} F^j(X_{s-}, a_{s-}) dC_s^c.$$

- Fijemos $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$. Cuando $n \rightarrow \infty$, en ω ,

$$\sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \Lambda}} e^{-rs} [F_n(X_s, a_s) - F_n(X_{s-}, a_{s-})] \rightarrow \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in \Lambda}} e^{-rs} [F(X_s, a_s) - F(X_{s-}, a_{s-})]$$

debido a que el número de términos de la sumatoria es finita y que F_n converge uniformemente a F .

- Cuando $m \rightarrow \infty$, la integral estocástica $\int_0^t \delta_{\alpha_{s-}} e^{-rs} F_m(X_{s-}, a_{s-}) dB_s$ converge en

$$\begin{aligned}
& L^2 \text{ a } \int_0^t \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s. \text{ En efecto, por el Lema de isometr\'ia} \\
& \mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^t \left(\delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_m(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \right)^2 ds \\
& = \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} \left(\delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_m(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \right)^2 ds \\
& \leq \delta^2 \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-2rs} (F_m(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}))^2 ds \\
& \leq 4\delta^2 \int_0^t \mathbf{E}_{r,x,i} e^{-2rs} ds
\end{aligned} \tag{4.4.60}$$

donde $\hat{n} = \max_{i \in S} n_i$. Entonces, para alguna constante $C > 0$ (ver prueba de la Proposici3n 3.1.5)

$$\mathbf{E}_{r,x,i} \int_0^t \left(\delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_m(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \right)^2 ds \leq \frac{\hat{n}^2 C}{m^4} \tag{4.4.61}$$

Esto muestra lo afirmado arriba.

- Procediendo de la misma manera que en el punto anterior, obtenemos que cuando

$$m \rightarrow \infty, \text{ la integral estoc\'astica } \int_0^t \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_m(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s \text{ converge en } L^2 \text{ a } \int_0^t \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s.$$

Podemos entonces de estas dos \u00faltimas convergencias en L^2 , encontrar una sucesi3n $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ de enteros tal que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_{m_k}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s \xrightarrow{c.s.} \int_0^t \delta_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dB_s, \\
& \int_0^t \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F_{m_k}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s \xrightarrow{c.s.} \int_0^t \sigma_{\alpha_{s^-}} e^{-rs} F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) dW_s.
\end{aligned}$$

- Tenemos que $m(N_i) = 0$ por ser N_i un conjunto finito y

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_{s^-}}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds \\
& = \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_{s^-}}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in N\}} ds \\
& + \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_{s^-}}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N\}} ds,
\end{aligned}$$

Por tanto por la Proposición 4.4.3 y la observación 4.4.6

$$m(D_t) = 0, \quad \mathbf{P}\text{-c.s.}$$

donde $D_t = \{s \in [0, t]; X_{s^-} \in N_{\alpha_{s^-}}\}$. En consecuencia, para cada t fijo,

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in N_{\alpha_{s^-}}\}} ds \\ &= \int_{D_t} e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds = 0, \quad \mathbf{P}\text{-c.s.} \end{aligned} \quad (4.4.62)$$

Así, para $t \geq 0$ fijo,

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds \\ &= \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P}\text{-c.s.} \end{aligned}$$

Fijemos $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ tal que vale (4.4.62). Para todo $s \in [0, t]$,

$$|F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| - |F(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \leq |F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \leq \frac{2\hat{n}}{n^2},$$

podemos hallar una cota para $s \mapsto F(X_{s^-}(\omega), \alpha_{s^-}(\omega))$ que solo dependa de ω y t por ser una función continua por partes. La continuidad por parte sobre $[0, t]$, se debe a que:

- La función $s \mapsto F(s, i)$ es continua para cada $i \in \mathbf{S}$.
- El proceso $s \mapsto X_{s^-}(\omega)$ es continua por partes.
- La cadena $s \mapsto \alpha_{s^-}(\omega)$ es continua para por partes en $[0, t]$.

Por tanto, existe un $K > 0$, tal que para cada $i \in \mathbf{S}$

$$|F(s, i)| \leq K, \quad \forall s \in [0, t].$$

Así,

$$|F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \leq K + \hat{n}.$$

Recordemos además que $\delta_{\alpha_s(\omega)}$ y $m_{\alpha_s(\omega)}$ toman un conjunto finito de valores y que la función $s \mapsto e^{-rs(\omega)}$ es acotada en $s \in [0, t]$. Por tanto, podemos aplicar el

Teorema de convergencia acotada y tenemos, en ω ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds \\ = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_s} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P-c.s.} \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 - m_{\alpha_{s^-}} \right) F_n(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds \\ = \int_0^t e^{-rs} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_s}^2 - m_{\alpha_s} \right) F(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P-c.s.} \end{aligned}$$

De manera similar podemos probar que las siguientes convergencias son válidas **P-c.s.**

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-rs} \mu_{\alpha_{s^-}} F_n^j(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds \rightarrow \int_0^t e^{-rs} \mu_{\alpha_{s^-}} F^j(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \\ \int_0^t e^{-rs} \sum_{j \geq 1} q_{\alpha_{s^-} - j} F_n(X_{s^-}, j) ds \rightarrow \int_0^t e^{-rs} \sum_{j \geq 1} q_{\alpha_s - j} F(X_{s^-}, j) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds. \end{aligned} \quad (4.4.63)$$

• Por último analizaremos la convergencia de

$$\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds.$$

Bajo el mismo argumento que utilizamos para obtener la igualdad (4.4.62), tenemos que, para cada t fijo,

$$\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) ds = \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \notin N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P-c.s.}$$

Definiendo una sucesión de conjuntos A_s^n , como

$$A_s^n := \{X_{s^-} \in \bigcup_{k=1}^n I^{\alpha_{s^-}, k}\}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in N_{\alpha_{s^-}}\}} ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds \\
&+ \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds
\end{aligned}$$

Recordemos que para cada $i \in S$, se cumple

$$F_n^{ij}(x, i) = F^{ij}(x, i), \quad \text{para } x \in \bigcup_{k=1}^{n_i} I_k^{i,n}.$$

Entonces, para cada t fijo

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P}\text{-c.s.}
\end{aligned}$$

Con los mismos argumentos usados en el paso anterior podemos hallar una cota superior para $\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}(\omega)}^2 e^{-rs(\omega)}$ que solo depende de ω y t . Así

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}}^2 e^{-rs} |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| ds \\
&\leq \kappa \int_0^t |F_n^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-}) - F^{jj}(X_{s^-}, \alpha_{s^-})| \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds, \quad \mathbf{P}\text{-c.s.}
\end{aligned}$$

donde κ es una cota superior para $\frac{1}{2} \sigma_{\alpha_{s^-}(\omega)}^2 e^{-rs(\omega)}$. Como para cada $i \in S$,

$$|F_n^{ij}(x, i) - F^{ij}(x, i)|$$

esta cotada superiormente por una constante que no depende de n entonces, solo nos debemos enfocar en la integral

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{s; X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\}} ds.$$

Sea

$$A_n := \{s \in [0, t] : X_{s^-} \in A^n \setminus N_{\alpha_{s^-}}\},$$

es claro que:

- $A_{n+1} \subset A_n$.
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = 0.$$

Debido a las propiedades de la integral de Lebesgue, para cada $t > 0$ fijo, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t 1_{\{s; X_{s^-} \in A_n \setminus N_{a_{s^-}}\}} ds = 0$$

Así, para un t fijo, tenemos **P**-c.s.

$$\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{a_{s^-}}^2 e^{-rs} F_{jj}(X_{s^-}, a_{s^-}) ds \rightarrow \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{a_{s^-}}^2 e^{-rs} F_{jj}(X_{s^-}, a_{s^-}) 1_{\{s; X_{s^-} \notin N_{a_{s^-}}\}} ds.$$

Finalmente, para un $t \geq 0$ fijo, si en (4.4.59), tomamos $n = m_k$ y hacemos $k \rightarrow \infty$, obtenemos la siguiente igualdad **P**-c.s.

$$\begin{aligned} e^{-rt} F(X_t, a_t) - e^{-r} F(X, a) &= \int_0^t e^{-rs} \left[\frac{1}{2} \sigma_{a_{s^-}}^2 \sum F(X_{s^-}, a_{s^-}) + \mu_{a_{s^-}} F_j(X_{s^-}, a_{s^-}) \right. \\ &+ \left. q_{a_{s^-}} F_j(X_{s^-}, j) + \frac{1}{2} \sigma_{a_{s^-}}^2 F_{jj}(X_{s^-}, a_{s^-}) 1_{\{s; X_{s^-} \notin N_{a_{s^-}}\}} \right] ds \\ &\geq \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{a_{s^-}}^2 e^{-rs} F_{jj}(X_{s^-}, a_{s^-}) dW_s \\ &+ \int_0^t \sigma_{a_{s^-}} e^{-rs} F_j(X_{s^-}, a_{s^-}) dB_s \\ &- \sum_{0 \leq s \leq t} \delta_{a_{s^-}} e^{-rs} [F(X_s, a_s) - F(X_{s^-}, a_{s^-})] \\ &+ \int_{[0,t] \times S} e^{-rs} [F(X_{s^-}, j) - F(X_{s^-}, a_s)] \tilde{\pi}(ds, dj), \end{aligned} \tag{4.4.64}$$

Esto prueba nuestro teorema. El teorema aún sigue siendo válido para un tiempo de parada. Solo basta observar que el proceso del lado izquierdo presente en la ecuación (4.4.64) es una versión o modificación del proceso del lado derecho de (4.4.64). Pero debido a que ambos procesos, del lado izquierdo y del lado derecho, tienen trayectorias continuas por la derecha **P**-c.s., entonces ambos procesos son indistinguibles (ver[20]).

□

Bibliografía

- [1] Robert Aebi. Itô's formula for non-smooth functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 28(4):595–602, 1992.
- [2] Søren Asmussen and Michael Taksar. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(1):1–15, 1997.
- [3] Karl Henrik Borch. *The mathematical theory of insurance: an annotated selection of papers on insurance published 1960-1972*. Lexington Books, 1974.
- [4] Karl Henrik Borch, Agnar Sandmo, and Knut K Aase. *Economics of insurance*, volume 29. Elsevier, 2014.
- [5] Bruno De Finetti. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In *Transactions of the XVth international congress of Actuaries*, volume 2, pages 433–443. New York, 1957.
- [6] Julia Eisenberg. Optimal dividends under a stochastic interest rate. *Insurance: Mathematics and Economics*, 65:259–266, 2015.
- [7] Hans Föllmer and Philip Protter. On Itô's formula for multidimensional brownian motion. *Probability Theory and Related Fields*, 116(1):1–20, 2000.
- [8] Hans Föllmer, Philip Protter, and Albert N Shiriyayev. Quadratic covariation and an extension of Itô's formula. *Bernoulli*, pages 149–169, 1995.
- [9] James D Hamilton. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 357–384, 1989.
- [10] Bjarne Højgaard and Michael Taksar. Optimal risk control for a large corporation in the presence of returns on investments. *Finance and Stochastics*, 5(4):527–547, 2001.

- [11] Monique Jeanblanc-Picqué and Albert N Shiryaev. Optimization of the flow of dividends. *Russian Mathematical Surveys*, 50(2):257, 1995.
- [12] Zhengjun Jiang and Martijn Pistorius. Optimal dividend distribution under markov regime switching. *Finance and Stochastics*, 16(3):449–476, 2012.
- [13] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] Fima C Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [15] Hui-Hsiung Kuo. Stochastic differential equations. *Introduction to Stochastic Integration*, pages 185–230, 2006.
- [16] Arne Løkka and Mihail Zervos. Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(3):954–961, 2008.
- [17] Rogemar S Mamon and Robert James Elliott. *Hidden markov models in finance*, volume 460. Springer, 2007.
- [18] Ramin Okhrati and Uwe Schmock. Ito’s formula for finite variation levy processes: The case of non-smooth functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 430(2):1163–1174, 2015.
- [19] Jostein Paulsen and Håkon K Gjessing. Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(3):215–223, 1997.
- [20] Phillip E Protter. *Stochastic integration and differential equations*, 2004.
- [21] Hanspeter Schmidli. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001(1):55–68, 2001.
- [22] Hanspeter Schmidli. *Stochastic control in insurance*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [23] Luz R Sotomayor and Abel Cadenillas. Classical and singular stochastic control for the optimal dividend policy when there is regime switching. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(3):344–354, 2011.

- [24] Luz Rocio Sotomayor. *Stochastic control with regime switching and its applications to financial economics*. ProQuest, 2008.
- [25] Pierre NVTu. *Dynamical systems: an introduction with applications in economics and biology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] Jinxia Zhu. Dividend optimization for a regime-switching diffusion model with restricted dividend rates. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 44(2):459–494, 2014.
- [27] Jinxia Zhu and Feng Chen. Dividend optimization for regime-switching general diffusions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(2):439–456, 2013.